

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,  
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

**М. П. Данилевський,  
А. В. Якунін,  
Г. А. Кузнецова**

**ЕЛЕМЕНТИ  
ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ  
МАТЕМАТИКИ**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

**з дисципліни “Вища математика II”**  
*(для студентів 1 курсу денної та 2 курсу заочної форм  
навчання за напрямками підготовки 6.030504 “Економіка  
підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”)*

**з дисципліни “Вища математика”**  
*(для студентів 2 курсу денної форми навчання  
за напрямом підготовки 6.050702 “Електромеханіка”)*

**Харків  
ХНАМГ  
2012**

**Данилевський М. П. Елементи обчислювальної математики:** Конспект лекцій з дисципліни **“Вища математика II”** (для студентів 1 курсу денної та 2 курсу заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.030504 “Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”), з дисципліни **“Вища математика”** (для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050702 “Електромеханіка”) / М. П. Данилевський, А. В. Якунін, Г. А. Кузнецова; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 156 с.

Автори: М. П. Данилевський,  
А. В. Якунін,  
Г. А. Кузнецова

Рецензент: *к.ф.-м.н., доц. Л. Б. Коваленко*

Конспект лекцій відповідає навчальним програмам курсів **“Вища математика II”** для студентів напрямів підготовки 6.030504 “Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”, **“Вища математика”** для студентів напряму підготовки 6.050702 – “Електромеханіка”. Згідно з модульною технологією навчання лекційний матеріал доповнено зразками розв’язання типових задач, запитаннями для поточного контролю і самоперевірки, а також індивідуальними розрахунково-графічними завданнями до самостійної роботи.

*Рекомендовано кафедрою вищої математики,  
протокол №5 від 22.12.2010 р.*

© Данилевський М. П., Якунін А. В.,  
Кузнецова Г. А., 2012  
© ХНАМГ, 2012

## ПЕРЕДМОВА

Конспект лекцій містить розділи, які відповідають четвертому семестру курсу «Вища математика» для студентів напряму підготовки 6.050702 – "Електромеханіка", а також розділи курсу «Вища математика II» для студентів напрямів підготовки 6.030504 “Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Частина матеріалу розрахована на самостійне опрацювання. Згідно з модульною технологією навчання додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання.

Конспект лекцій також може використовуватися для самоосвіти практикуючих фахівців.

Критичні зауваження і пропозиції щодо посібника надсилайте на кафедру вищої математики за адресою:

61002, Україна, Харків, вул. Революції, 12, ХНАМГ,  
каф. Вищої математики;  
e-mail: [vm\\_kolosov@ksame.kharkov.ua](mailto:vm_kolosov@ksame.kharkov.ua)

# 1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИМИ МЕТОДАМИ. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

## 1.1. Математична задача та її розв'язок

Дослідження того чи іншого соціально-економічного процесу математичними методами розпочинається з побудови відповідної математичної моделі – його формалізованого опису мовою математики.

Під *математичною моделлю* процесу розуміють систему математичних співвідношень (алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь і нерівностей і т.п.), які визначають характеристики стану і властивості цього об'єкта і його функціонування залежно від параметрів компонентів, вхідних збуджень і часу.

*Детермінована математична модель* описує функціональну залежність між вихідними залежними змінними, через які відображається функціонування об'єкта, незалежними (такими, як час) і змінюваними змінними (параметри компонентів), а також прикладеними вхідними збудженнями. Математична модель повинна відображати найважливіші характеристики об'єкта та зв'язки між ними.

Для кожної математичної моделі формулюється *математична задача*: встановлюють, які характеристики моделі є вхідними змінними, які – параметрами, а які – вихідними змінними. Проводиться аналіз поставленої задачі з точки зору існування, єдиності та стійкості розв'язку.

Розв'язок задачі називається *стійким* за вхідними даними, якщо він неперервно залежить від них, тобто, малій зміні вхідних даних відповідає мала зміна розв'язку.

Математична задача поставлена *коректно (правильно)*, якщо виконано наступні три умови:

- 1) розв'язок існує при довільних допустимих вхідних даних;
- 2) розв'язок єдиний;
- 3) розв'язок стійкий по відношенню до малих змін вхідних даних.

Якщо хоча б одна з цих умов не справджується, то задача називається *некоректною*.

Наприклад, задача обчислення визначеного інтеграла – коректна, а задача обчислення похідної – некоректна (не виконується тре-

тя умова).

Далі розглядаються такі базові типи математичних задач:

- розв’язування нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь;
- апроксимація масиву даних або функції набором стандартних, простих функцій;
- чисельне інтегрування і диференціювання;
- розв’язування звичайних диференціальних рівнянь.

## 1.2. Чисельні методи. Загальні поняття

Для поставленої математичної задачі вибирається метод її розв’язування. У багатьох випадках знайти її точний розв’язок досить важко або взагалі не вдається. Складні математичні задачі великої розмірності вимагають застосування наближених методів, що вивчаються в даному курсі.

Під **чисельними (числовими, обчислювальними) методами** розуміють наближені процедури, що дозволяють одержувати розв’язок у вигляді набору конкретних числових значень.

Вивчення чисельних методів сприяє переосмисленню і поглибленому розумінню математики в цілому, оскільки вони зводять класичні методи вищої математики до виконання простих операцій.

Розрізняють прямі та ітераційні обчислювальні методи.

**Метод** називається **прямим**, якщо він дозволяє одержувати розв’язок після виконання скінченного числа елементарних операцій. Інколи прямі методи називають **точними**, маючи на увазі, що при відсутності похибок у вхідних даних і при виконанні елементарних операцій результат буде точним. Проте при комп’ютерній реалізації методу неминучі похибки заокруглення і, як наслідок, наявність обчислювальної похибки.

Далі розглядатимемо **ітераційні методи**, суть яких полягає в побудові послідовних наближень до розв’язку задачі. Спочатку вибирають одно чи декілька початкових наближень, а потім послідовно, використовуючи знайдені раніше наближення і однотипну процедуру розрахунку, будують нові наближення. У результаті такого ітераційного процесу теоретично можна побудувати нескінченну послідовність наближень. Якщо ця послідовність збігається (що не гарантовано), то говорять, що ітераційний метод **збіжний**. Окремий крок ітераційного процесу називається **ітерацією**.

Проте практичні обчислення не можуть тривати нескінченно довго. Тому необхідно задати **критерій закінчення** ітераційного процесу, що зв'язаний з вимогами точності наближення.

**Оцінки точності** наближення, одержані до проведення обчислень за вибраним методом, називають **ап'юріорними**, а відповідні оцінки, одержані в результаті обчислень, називають **апостеріорними**.

Для вибраного обчислювального методу складається **алгоритм** – послідовність виконання необхідних арифметичних і логічних операцій. Алгоритм, що реалізує ітераційний метод, повинен бути рекурсивним і складатися з відносно невеликих блоків, які багаторазово виконуються для різних вхідних даних.

Для розв'язування однієї й тієї ж задачі можна використати різні чисельні методи і різні їх програмні реалізації, тому треба вміти оцінювати якість різних методів і ефективність їх застосування для даної задачі. Правильність вибору безпосередньо залежить від знання і розуміння особливостей і обмежень, властивих чисельним методам, що реалізовані у відповідному програмному пакеті.

Чисельні методи:

– передбачають проведення великої кількості рутинних арифметичних обчислень за допомогою рекурсивних співвідношень, що використовуються для організації ітерацій, тобто повторюваних циклів обчислень зі зміненими початковими умовами для поліпшення результату;

– направлені на локальне спрощення задачі;

– значно залежать від близькості початкового наближення до розв'язку, від властивостей нелінійних функцій, які використовуються в математичних моделях, що накладає обмеження на їх диференційованість, величину похідної та ін.

Ітераційний процес називається **однокроковим**, якщо для обчислення чергового наближення  $x_k$  використовується тільки одне попереднє наближення  $x_{k-1}$ , і  **$m$ -кроковим**, якщо для обчислення чергового наближення  $x_k$  використовуються  $m$  попередніх наближень  $x_{k-m}, x_{k-m+1}, \dots, x_{k-1}$ .

Чисельні методи характеризуються:

– різною **швидкістю збіжності**, тобто числом ітерацій, виконання яких необхідне для отримання заданої точності розв'язку;

– різною **стійкістю**, тобто збереженням достовірності розв’язку під час подальших ітерацій (при цьому чим точніше задаються числа для обробки, тим точніший одержується результат, і для довільної точності результату можна вказати таку точність вхідних і проміжних даних, що метод приведе до результату саме з цією заданою точністю;

– різною **точністю** одержуваного розв’язку в разі виконання однакового числа ітерацій або циклів обчислень.

Чисельні методи розрізняються:

– за широтою і легкістю застосування, тобто за ступенем своєї **універсальності** та **інваріантності** для розв’язування різних математичних задач;

– за **складністю** їх програмування;

– за **можливостями використання** у разі їх реалізації **наявних бібліотек** функцій і процедур, створених для підтримки різних алгоритмічних мов;

– за **складністю комп’ютерної реалізації** з точки зору затрат пам’яті і часу;

– за **ступенем чутливості** до некоректних задач, коли малим змінам вхідних даних можуть відповідати великі зміни розв’язку.

Говорять, що **метод має  $p$ -й порядок збіжності**, якщо  $|x_k - X| \leq C |x_{k-1} - X|^p$ , де  $x_{k-1}$  і  $x_k$  – послідовні наближення, отримані в ході ітераційного процесу,  $X$  – точний розв’язок,  $C$  – додатна константа, що не залежить від номера ітерації  $k$ .

Говорять, що **метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником  $q < 1$** , якщо для всіх  $k$  справедлива оцінка  $|x_k - X| \leq C q^k$ .

Побудова алгоритму, що реалізує відповідний метод, може бути виконана розбиттям задачі на блоки так, щоб вихідні дані попереднього блоку були вхідними для наступного.

Складність обчислень, передбачених алгоритмом, оцінюється **сигнальними функціями**, що визначають час роботи алгоритму через кількість  $n$  необхідних елементарних операцій. При цьому розрізняють два типи алгоритмів:

1) **поліноміальний** алгоритм, сигнальна функція якого зростає зі збільшенням  $n$  не швидше, ніж деякий поліном.

2) **Комбінаторний** алгоритм, коли сигнальна функція змі-

нюється зі збільшенням  $n$  як експонента або містить у собі оцінки операцій перебору, перестановок, сполучень, знаходження факторіалу і т.п.

Чисельні методи забезпечують системний формалізований підхід до розв'язування математичних задач і служать інструментарієм, за допомогою якого задачі формулюються у вигляді, зручному для розв'язування на комп'ютері. Для обрання ефективного способу розв'язування конкретної задачі потрібні глибокі знання і певні навички. Освоївши такі методи, майбутній фахівець набуде здатності до системного аналізу через математичне моделювання складних задач зі сфери професійної діяльності. Він ознайомиться зі впливом похибок обчислень на результат і навчиться контролювати ці похибки.

## 2. НАБЛИЖЕНІ ЧИСЛА. ПОХИБКИ ТА ЇХ ОБЧИСЛЕННЯ

*Наближеним числом*  $x$  називається таке, що несуттєво відрізняється від точного числа  $X$  і замінює останнє в обчисленнях.

При розв'язанні прикладних задач, в основному, використовуються дійсні числа. У пам'яті комп'ютера вони зберігаються у *формі з плаваючою точкою*. Десяткове число  $x$  у цій формі записується так  $x = \pm t \cdot 10^n$ , де  $t$  і  $n$  – відповідно *мантиса* числа і його *порядок*. Наприклад, число  $x = 358,5$  можна записати в одному з таких виглядів:  $3585 \cdot 10^{-1}$ ,  $3,585 \cdot 10^2$  чи  $0,3585 \cdot 10^3$ . Останній запис, де мантиса подана у вигляді  $t = 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ,  $\alpha_1 \neq 0$ , називається *нормалізованою формою числа з плаваючою точкою*. Звичайний запис числа у вигляді  $358,5$  називається *формою з фіксованою точкою* і в комп'ютерах використовується тільки на етапах введення і виведення. Зберігання й обробка дійсних чисел здійснюється саме у формі з плаваючою точкою.

Під час роботи з наближеними величинами обчислювач повинен:

- давати математичні характеристики точності наближених величин;
- знаючи міру точності вхідних даних, оцінити міру точності результату;
- брати вхідні дані з такою мірою точності, щоб забезпечити



задану міру точності результату і позбавитись від марних розрахунків;

– правильно побудувати обчислювальний процес, щоб позбавити його тих викладок, які не будуть чинити вплив на точні цифри результату.

## 2.1. Джерела похибок. Класифікація похибок

Відхилення дійсного  $X$  значення від наближеного  $x$  називається *похибкою*.

**Основна задача теорії похибок** – знаходження області невизначеності результату.

Чисельне розв'язування задач супроводжується похибками, викликаними наступними причинами:

1) створенням математичної моделі (будь-яка модель має свій ступінь адекватності об'єкту дослідження);

2) отриманням вхідних даних, оскільки вони є результатом або вимірювань (отже, виникають вимірювальні похибки), або розв'язування деяких допоміжних задач;

3) застосуванням наближеного методу, оскільки отримання точного розв'язку вимагає необмеженої або неприйнятно великої кількості елементарних операцій, а в багатьох випадках і просто неможливо;

4) використанням обчислювальної техніки (неточності при вводі-виводі даних до комп'ютера і при виконанні математичних операцій, що обумовлено обмеженістю його розрядної сітки).

Відповідно до цих джерел похибки можна поділити на три групи:

1) **неусувні похибки**, що включають *похибки моделі* та *вхідних даних*;

2) *похибки методу* (наприклад, замінюють інтеграл сумою, затратну для оперування функцію – многочленом, похідну – скінченною різницею і т.п., обмежують максимальну кількість ітерацій);

3) *похибки обчислень* (заокруглювання під час обчислень, локальні відсікання, похибки зображення чисел у комп'ютері).

Зауваження 1. Неусувну похибку і похибку методу необхідно контролювати, щоб не здійснювати розрахунки з надмірною точністю. Похибку методу треба вибирати так, щоб вона була не більша,

ніж на порядок менша неусувних, оскільки велика похибка методу знижує точність розв'язку, а мала вимагає значного збільшення об'єму обчислень.

Зауваження 2. Обчислювальні похибки тільки накопичуються, незалежно від типу виконуваної операції. При цьому частково взаємно компенсуються, оскільки мають різні знаки. Точність проведення розрахунків можна регулювати програмно. Наприклад, зробити так, щоб комп'ютер здійснював обчислення з точністю до трьох знаків після десяткової коми.

## 2.2. Абсолютна та відносна похибки

Нехай  $X$  – точне значення деякої величини, а  $x$  – її відоме наближене значення.

Під *похибкою* наближеного числа  $x$  розуміють величину, що характеризує точність наближення і дорівнює різниці між відповідним точним числом  $X$  та його наближенням  $x$ :  $\Delta x = X - x$ .

У більшості випадків знак похибки  $\Delta x$  невідомий, тому вводиться поняття *абсолютної похибки*  $\Delta_x$  як модуля похибки  $\Delta x$ :  $\Delta_x = |\Delta x| = |X - x|$ .

Як правило, точне значення  $X$  невідоме й абсолютну похибку  $\Delta_x$  знайти неможливо. Тому для оцінки зверху  $\Delta_x$  використовується поняття *граничної абсолютної похибки*  $\Delta_x^*$ , яка визначається з нерівності  $\Delta_x \leq \Delta_x^*$ .

Нехай  $X \neq 0$ . Важливою характеристикою точності наближення є абсолютна похибка, що припадає на одиницю величини числа  $X$ , – *відносна похибка*  $\delta_x$ . Вона дорівнює відношенню абсолютної похибки  $\Delta_x$  до модуля точного числа  $X$ :  $\delta_x = \Delta_x / |X|$ .

Зауваження 1. Для  $X = 0$  відносна похибка невизначена.

Верхньою оцінкою для  $\delta_x$  служить *гранична відносна похибка*  $\delta_x^*$ , що визначається з нерівності  $\delta_x \leq \delta_x^*$ .

Звідси  $\Delta_x / |X| \leq \delta_x^*$ ;  $\Delta_x \leq |X| \delta_x^*$ . Отже, можна покласти

$\Delta_x^* = |X| \delta_x^*$ . Оскільки  $X = x$  з достатньою для практики точністю, то звичайно приймають  $\Delta_x^* = |x| \delta_x^*$ . Аналогічно  $\Delta_x = |x| \delta_x$ .

Нехай для визначеності  $\Delta_x^* < |X|$ . Тоді  $\delta_x = \Delta_x / |X| \leq \Delta_x^* / (|x| - \Delta_x^*)$ . Тобто можна покласти  $\delta_x^* = \Delta_x^* / (|x| - \Delta_x^*)$ . Як правило,  $\Delta_x^* \ll |x|$ , тому на практиці звичайно користуються формулою  $\delta_x^* = \Delta_x^* / |x|$ . Аналогічно  $\delta_x = \Delta_x / |x|$ .

Зауваження 2. Абсолютна похибка є розмірною величиною, а відносна – безрозмірною, її часто виражають у відсотках.

### 2.3. Форми запису наближених даних

Будь-яке додатне число  $x$  можна подати у вигляді скінченного чи нескінченного десяткового дробу

$$x = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + \dots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \dots,$$

де  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots$  – цифри у запису числа  $x$ , причому  $\alpha_1 \neq 0$ ;  $m$  – старший десятковий розряд числа  $x$ .

Усі десяткові знаки  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots$  такого подання наближеного числа  $x$  називаються його **значущими цифрами**. Іншими словами, **значущими цифрами** наближеного числа називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва, включаючи всі нулі справа, що є представниками збережених розрядів. Решта нулів, що входять у його запис та служать лише для позначення його десяткових розрядів, не зараховуються до значущих цифр.

Наприклад, у числах 4,570315, 0,007214, 0,03105800, 2730000, 0,30400·10<sup>6</sup> тільки підкреслені цифри є значущими.

Точність подання наближеного числа  $x$  залежить від кількості його значущих цифр.

Значуща цифра  $\alpha_i$  називається **вірною (правильною) у вузькому сенсі**, якщо абсолютна похибка  $\Delta_x^*$  числа  $x$  не перевищує половини одиниці  $(m - i + 1)$ -го розряду, що відповідає цій цифрі. У противному разі цифра  $\alpha_i$  називається **сумнівною**.

Якщо цифра  $\alpha_n$  вірна, то усі попередні до неї цифри теж вірні. Отже, при умові

$$\boxed{0,5 \cdot 10^{m-n} < \Delta_x^* \leq 0,5 \cdot 10^{m-n+1}},$$

за визначенням, перші  $n$  значущих цифр  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  є вірними у вузькому сенсі, а всі інші – сумнівними. При цьому можна покласти

$$\boxed{\Delta_x^* = 0,5 \cdot 10^{m-n+1}}.$$

Зауваження 1. Якщо додатне наближене число  $x$  має  $n$  вірних значущих цифр у вузькому сенсі  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то за граничну відносну похибку  $\delta_x^*$  можна взяти  $\boxed{\delta_x^* = 0,5 \cdot 10^{1-n} / \alpha_1}$ .

Значуща цифра  $\alpha_i$  називається *вірною (правильною) у широкому сенсі*, якщо абсолютна похибка  $\Delta_x^*$  числа  $x$  не перевищує одиниці  $(m - i + 1)$ -го розряду, що відповідає цій цифрі. При умові

$$\boxed{1 \cdot 10^{m-n} < \Delta_x^* \leq 1 \cdot 10^{m-n+1}},$$

за визначенням, перші  $n$  значущих цифр  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  є вірними у широкому сенсі, а всі інші – сумнівними.

Точне число  $X$  через його наближення  $x$  можна записати у різному вигляді:

– з використанням межових значень  $x_1 \leq X \leq x_2$ , де  $x_1 = x - \Delta_x^*$  і  $x_2 = x + \Delta_x^*$ , наприклад,  $1,351 \leq X \leq 1,357$ ;

– з використанням абсолютної похибки  $X = x \pm \Delta_x^*$ , наприклад,  $X = 1,354 \pm 0,003$ , тобто  $1,354 - 0,003 \leq X \leq 1,354 + 0,003$ ;

– з використанням відносної похибки  $X = x(1 \pm \delta_x^*)$ , наприклад,  $X = 1,354(1 \pm 0,002)$  або  $X = 1,354(1 \pm 0,2\%)$ .

Приклад. Скільки вірних значущих цифр у вузькому і широкому сенсі має дане число  $x$ , якщо:

а)  $x = 14,3820$  і  $\Delta_x^* = 0,06$ ;    б)  $x = 8,677193$  і  $\Delta_x^* = 3 \cdot 10^{-4}$ ;

в)  $x = 0,046719$  і  $\Delta_x^* = 0,008$ ;    г)  $x = 103,265(1 \pm 0,000076)$ ;

д)  $x = 0,096027$  і  $\Delta_x^* = 0,006$ ; е)  $x = 1373,174(1 \pm 0,00082)$ .

□ а) Маємо  $0,5 \cdot 10^{-1} < \Delta_x^* = 0,6 \cdot 10^{-1} \leq 0,5 \cdot 10^0$ . Отже, у вузькому сенсі у числа  $x$  вірними є дві значущі цифри 1,4, а цифри 3,8,2,0 – сумнівні. Оскільки  $1 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0,6 \cdot 10^{-1} \leq 1 \cdot 10^{-1}$ , то у широкому сенсі число  $x$  має три вірні значущі цифри 1,4 і 3, а цифри 8,2,0 – сумнівні.

б) Оскільки  $0,5 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0,3 \cdot 10^{-3} \leq 0,5 \cdot 10^{-3}$ , то  $x$  у вузькому сенсі має вірні три значущі цифри після коми, тобто вірними будуть чотири значущі цифри 8,6,7,7, а цифри 1,9,3 – сумнівні. З нерівності  $1 \cdot 10^{-4} < \Delta_x^* = 0,3 \cdot 10^{-3} \leq 1 \cdot 10^{-3}$  випливає, що у широкому сенсі число  $x$  також має ті самі чотири вірні значущі цифри 8,6,7,7, а цифри 1,9,3 – сумнівні.

в) Маємо  $0,5 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0,8 \cdot 10^{-2} \leq 0,5 \cdot 10^{-1}$ . Отже, у вузькому сенсі у числа  $x$  немає ні однієї вірної значущої цифри, всі вони сумнівні. Оскільки  $1 \cdot 10^{-3} < \Delta_x^* = 0,8 \cdot 10^{-2} \leq 1 \cdot 10^{-2}$ , то у широкому сенсі число  $x$  має одну вірну значущу цифру 4, а всі інші цифри 6,7,1,9 – сумнівні.

г) Гранична відносна похибка  $\delta_x^* = 0,000076$ , тоді гранична абсолютна похибка  $\Delta_x^* = |x| \delta_x^* = 103,265 \cdot 0,000076 = 0,0078$ . Оскільки  $0,5 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0,78 \cdot 10^{-2} \leq 0,5 \cdot 10^{-1}$ , то у вузькому сенсі  $x = 103,265$  має чотири вірні значущі цифри 1,0,3,2, а цифри 6,5 – сумнівні. У широкому сенсі це число  $x$  має п'ять вірних значущих цифр 1,0,3,2,6, а цифра 5 – сумнівна, що випливає з нерівності  $1 \cdot 10^{-3} < \Delta_x^* = 0,78 \cdot 10^{-2} \leq 1 \cdot 10^{-2}$ .

(Завдання д) і е) розв'язати самостійно). ■

Зауваження 2. У математичних таблицях усі наведені значущі цифри вірні у вузькому сенсі. Надалі, якщо не зазначено інше, поняття вірної цифри розглядається у вузькому сенсі.

## 2.4. Похибки округлення

В обчислювальному пристрої числа наводять з обмеженою кількістю розрядів, максимальне число яких визначається довжиною його розрядної сітки.

**Заокруглюванням** називається заміна числа наближеним числом з меншою кількістю значущих цифр. При цьому виникає **похибка округлення**. Щоб вона була мінімальною, треба застосовувати наступне правило симетричного заокруглювання:

*якщо цифра старшого розряду, що відкидається, менше 5, то попередня до нього цифра не змінюється;*

*якщо цифра старшого розряду, що відкидається, дорівнює або більше 5, то попередня до нього цифра збільшується на 1.*

При використанні цього правила **абсолютна похибка округлення**  $\Delta_{x_{окр}}$  числа

$$x = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + \dots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \dots$$

до  $p$  значущих цифр не перевищує половини одиниці розряду останньої залишеної цифри  $\alpha_p$ , тобто за **граничну абсолютну похибку округлення**  $\Delta_{x_{окр}}^*$  можна взяти  $\Delta_{x_{окр}}^* = 0,5 \cdot 10^{m-p+1}$ .

Під час заокруглювання наближеного числа  $x_1$  отримуємо нове наближене число  $x_2$ , абсолютна похибка  $\Delta_{x_2}$  якого визначається за формулою:

$$\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2_{окр}},$$

де  $\Delta_{x_1}$  – абсолютна похибка числа  $x_1$ ;  $\Delta_{x_2_{окр}} = |x_1 - x_2|$  – абсолютна похибка округлення числа  $x_2$ .

Аналогічною формулою зв'язані граничні значення цих похибок:

$$\Delta_{x_2}^* = \Delta_{x_1}^* + \Delta_{x_2_{окр}}^*.$$

**Зауваження 1.** Інколи вважають, якщо цифра старшого розряду, що відкидається, дорівнює 5, а попередня до нього цифра парна, то вона не змінюється, якщо ж попередня цифра непарна, то вона збільшується на 1.

Зауваження 2. При заокруглюванні цілого числа відкинуті знаки не можна замінити нулями, а потрібно застосовувати множення на відповідний степінь 10.

Зауваження 3. У деяких випадках також застосовують заокруглювання з недостачею, коли зайві цифри просто відкидаються, і заокруглювання з надлишком, коли остання справа залишена цифра збільшується на одиницю. Зокрема, такі правила заокруглювання можуть використовуватися при знаходженні граничних оцінок точності наближення.

Приклад 1. Нехай а)  $x_1 = 7,8497621$  і б)  $x_1 = 348,453275$ .

Заокруглити ці числа, відкидаючи послідовно  $t$  ( $t = 1, 2, 3, \dots$ ) останні цифри.

□ Відповідно дістанемо:

а)  $x_2 = 7,849762$  і б)  $x_2 = 348,45328$  ( $t = 1$ ); а)  $x_2 = 7,84976$

і б)  $x_2 = 348,4533$  ( $t = 2$ ); а)  $x_2 = 7,8498$

і б)  $x_2 = 348,453$  ( $t = 3$ ); а)  $x_2 = 7,850$  і б)  $x_2 = 348,45$  ( $t = 4$ );

а)  $x_2 = 7,85$  і б)  $x_2 = 348,5$  ( $t = 5$ ); а)  $x_2 = 7,8$

і б)  $x_2 = 348$  ( $t = 6$ ); а)  $x_2 = 8$  і б)  $x_2 = 3,5 \cdot 10^2$  ( $t = 7$ );

а)  $x_2 = 1 \cdot 10^1$  і б)  $x_2 = 3 \cdot 10^2$  ( $t = 8$ ). ■

Приклад 2. Округлити сумнівні цифри даного числа  $x_1$  і знайти абсолютну  $\Delta_{x_2}$  і відносну  $\delta_{x_2}$  похибки результату  $x_2$ :

а)  $x_1 = 34,124 \pm 0,021$ ; б)  $x_1 = 91,735(1 \pm 0,0000082)$ .

□ а) Наближене число  $x_1$  має три вірні цифри: 3, 4, 1, тому що  $0,005 < \Delta_{x_1} = 0,021 \leq 0,05$ . Використовуючи правило заокруглювання, знайдемо наближене значення  $x_2$ , зберігаючи вірні десяткові знаки:  $x_2 = 34,1$ . Обчислимо похибку округлення  $\Delta_{x_2 \text{ окр}}$ , абсолютну  $\Delta_{x_2}$  і відносну  $\delta_{x_2}$  похибки числа  $x_2$ :

$$\Delta_{x_2 \text{ окр}} = |x_1 - x_2| = |34,124 - 34,1| = 0,024; \quad \Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2 \text{ окр}} =$$

$$= 0,021 + 0,024 = 0,045; \quad \delta_{x_2} = \Delta_{x_2} / |x_2| = 0,045 / |34,1| = 0,0013.$$

Оскільки  $0,005 < \Delta_{x_2} = 0,045 \leq 0,05$ , то всі значущі цифри числа  $x_2$  вірні. Отже,  $x_2 = 34,1 \pm 0,045$ .

б) Оскільки відносна похибка  $\delta_{x_1} = 0,0000082$ , то абсолютна похибка  $\Delta_{x_1} = |x_1| \delta_{x_1} = 91,735 \cdot 0,0000082 = 0,00075$ . Значить, число  $x_1 = 91,735$  має чотири вірні значущі цифри: 9, 1, 7 і 3, тому що  $0,5 \cdot 10^{-3} < \Delta_{x_1} = 0,00075 \leq 0,5 \cdot 10^{-2}$ . Знайдемо наближене значення  $x_2$  з чотирма десятковими знаками, використовуючи правило заокруглювання:  $x_2 = 91,74$ . Обчислимо похибку округлення  $\Delta_{x_2 \text{ окр}}$ , абсолютну  $\Delta_{x_2}$  і відносну  $\delta_{x_2}$  похибки числа  $x_2$ :

$$\Delta_{x_2 \text{ окр}} = |x_1 - x_2| = |91,735 - 91,74| = 0,005;$$

$$\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2 \text{ окр}} = 0,00075 + 0,005 = 0,006;$$

$$\delta_{x_2} = \Delta_{x_2} / |x_2| = 0,006 / |91,74| = 0,7 \cdot 10^{-4}.$$

Оскільки  $0,5 \cdot 10^{-2} < \Delta_{x_2} = 0,006 \leq 0,5 \cdot 10^{-1}$ , то вірними значущими цифрами числа  $x_2$  є тільки перші три 9, 1 і 7, а остання цифра 4 – сумнівна. Отже,  $x_2 = 91,74 \pm 0,006$ . ■

## **2.5. Пряма задача теорії похибок. Похибка функції. Похибки арифметичних операцій**

Пряма задача теорії похибок. При оперуванні з наближеними числами важливою задачею є оцінка ступеня впливу похибок вхідних даних на точність кінцевого результату, що необхідно як для правильного врахування похибок, так і для визначення можливих шляхів їх зменшення. Зокрема, при обчисленні значень функцій, аргументами яких служать наближені числа, постає питання про похибку одержаних значень.

Визначення величини похибки кінцевого результату за відомими похибками вхідних даних складає *пряму задачу теорії похибок*.



Похибка функції. Розглянемо неперервно диференційовну на відрізьку  $[a; b]$  функцію однієї змінної  $y = f(x)$ . Припустимо, що потрібно знайти наближення  $y$  для її точного значення  $Y$  при  $X \in [a; b]$ , що задане наближеним числом  $x \in [a; b]$  з абсолютною похибкою  $\Delta_x$ , і оцінити відповідну абсолютну похибку функції  $\Delta_y = |Y - y|$ .

За наближене значення функції  $Y = f(X)$  можна взяти  $y = f(x)$ . При цьому абсолютну похибку  $\Delta_y$  можна розглядати як модуль її приросту, викликаного приростом аргументу  $\pm \Delta_x$ . Застосовуючи формулу скінченних приростів Лагранжа, для абсолютної похибки  $\Delta_y$  дістанемо  $\Delta_y = |f'(c)| \cdot \Delta_x$ , де  $c \in (x; X)$ .

Звідси для абсолютної похибки  $\Delta_y$  та її граничного значення  $\Delta_y^*$  впливають співвідношення

$$\Delta_y \leq B \Delta_x \quad \text{і} \quad \Delta_y^* = B \Delta_x^*, \quad \text{де} \quad B = \max_{x - \Delta_x^* \leq c \leq x + \Delta_x^*} |f'(c)|.$$

Оскільки приріст аргументу ( $\pm \Delta_x$  чи  $\pm \Delta_x^*$ ) відносно невеликий, то при практичних розрахунках з достатньою точністю можна використовувати **лінійні оцінки**:

$$\Delta_y = |f'(x)| \cdot \Delta_x \quad \text{і} \quad \Delta_y^* = |f'(x)| \cdot \Delta_x^*,$$

що рівносильне заміні приросту функції диференціалом. При цьому нехтуються члени другого та вищих порядків малізми порівняно з приростом аргументу.

Ці формули безпосередньо узагальнюються на випадок неперервно диференційовної функції  $n$  змінних  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad \Delta_y \leq \sum_{i=1}^n B_i \Delta_{x_i} \quad \text{і} \quad \Delta_y^* = \sum_{i=1}^n B_i \Delta_{x_i}^*,$$

$$\text{де} \quad B_i = \max_{x_k - \Delta_{x_k}^* \leq c_k \leq x_k + \Delta_{x_k}^*, k=1, \dots, n} \left| \frac{\partial f(c_1, c_2, \dots, c_n)}{\partial x_i} \right|;$$

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i} \quad \text{і} \quad \Delta_y^* = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i}^*$$

На основі одержаного наближеного значення функції та лінійної оцінки її абсолютної похибки дістанемо лінійні оцінки відносної похибки  $\delta_y$  та її граничного значення  $\delta_y^*$ .

а) У випадку функції однієї змінної  $y = f(x)$ :

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \frac{|f'(x)| \cdot \Delta_x}{|f(x)|} = \frac{|f'(x)| \cdot |x| \cdot \delta_x}{|f(x)|} = \left| x \frac{d \ln f(x)}{dx} \right| \delta_x,$$

тобто

$$\delta_y = \left| x \frac{d \ln f(x)}{dx} \right| \delta_x \quad \text{і} \quad \delta_y^* = \left| x \frac{d \ln f(x)}{dx} \right| \delta_x^*.$$

б) У випадку функції  $n$  змінних  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \frac{1}{|f(x_1, x_2, \dots, x_n)|} \sum_{i=1}^n \left| \partial f(x_1, x_2, \dots, x_n) / \partial x_i \right| \cdot \Delta_{x_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n) / \partial x_i}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| |x_i| \delta_{x_i} = \sum_{i=1}^n \left| x_i \frac{\partial \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \delta_{x_i},$$

тобто

$$\delta_y = \sum_{i=1}^n \left| x_i \frac{\partial \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \delta_{x_i}$$

і

$$\delta_y^* = \sum_{i=1}^n \left| x_i \frac{\partial \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right| \delta_{x_i}^*.$$

**Зауваження 1.** За одержаними формулами знаходяться неусувні похибки обчислення функції, породжені похибками аргументів. Похибки заокруглювання тут не враховуються.

**Похибки арифметичних операцій.** Використовуючи одержані формули, можна визначити лінійні оцінки похибок результатів арифметичних операцій як окремих випадків функції двох змінних.

а) Похибка суми. Нехай  $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ . Оскільки  $\partial f(x_1, x_2)/\partial x_i = 1$  і  $\partial \ln f(x_1, x_2)/\partial x_i = 1/(x_1 + x_2)$ ,  $i = 1, 2$ , то дістанемо

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right| \delta_{x_1} + \left| \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right| \delta_{x_2} .$$

*Абсолютна похибка суми дорівнює сумі абсолютних похибок доданків.*

Аналогічно знаходяться похибки для інших результатів арифметичних операцій.

б) Похибка різниці.  $y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ .

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \left| \frac{x_1}{x_1 - x_2} \right| \delta_{x_1} + \left| \frac{x_2}{x_1 - x_2} \right| \delta_{x_2} .$$

*Абсолютна похибка різниці дорівнює сумі абсолютних похибок зменшуваного і від'ємника.*

в) Похибка добутку.  $y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ .

$$\Delta_y = |x_2| \Delta_{x_1} + |x_1| \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} .$$

*Відносна похибка добутку дорівнює сумі відносних похибок співмножників.*

г) Похибка частки.  $y = f(x_1, x_2) = x_1/x_2$ .

$$\Delta_y = \frac{|x_2| \Delta_{x_1} + |x_1| \Delta_{x_2}}{(x_2)^2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} .$$

*Відносна похибка частки дорівнює сумі відносних похибок діленого і дільника.*

Зауваження 2. При додаванні великої кількості доданків оцінка абсолютної похибки як суми абсолютних похибок доданків виявляється сильно завищеною. У цьому випадку часто застосовують **статистичну оцінку**:  $\Delta_{x_1+x_2+\dots+x_n} = \sqrt{3n} \cdot 0,5 \cdot 10^p$ , де  $n$  – число доданків;  $p$  – номер десяткового розряду, до якого заокруглюється результат. Цю формулу застосовують при  $n > 10$ .

Зауваження 3. У разі віднімання двох близьких чисел може значно зрости відносна похибка результату. А при діленні на досить мале за модулем число може значно зрости абсолютна похибка. Таких ситуацій треба уникати, відповідним чином перетворюючи обчислювальну схему.

Зауваження 4. При додаванні чи відніманні наближених чисел бажано, щоб вони мали однакові абсолютні похибки, тобто однакову кількість вірних знаків після десяткової коми. Наприклад, при додаванні двох наближених чисел  $x_1 = 27,417$  і  $x_2 = 5,2$ , у запису яких залишені тільки вірні цифри, одержимо результат  $32,617$  з одним вірним у широкому сенсі знаком після десяткової коми, оскільки його абсолютна похибка  $1 \cdot 10^{-2} < \Delta_{x_1+x_2} \leq 1 \cdot 10^{-1}$ . Таким чином, врахування більшого числа десяткових розрядів в одному доданку при меншому в іншому не приводить до підвищення точності результату. *Підсумування потрібно проводити, починаючи з менших доданків. У протилежному випадку може мати місце значна втрата значущих цифр.*

Зауваження 5. При множенні чи діленні наближених чисел кількість значущих цифр доцільно вирівнювати відповідно найменшому за модулем з них.

Правила підрахунку цифр:

1) При знаходженні суми й різниці наближених чисел у результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх має компонент операції з найменшим числом десяткових знаків.

2) При знаходженні добутку й частки наближених чисел у результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має компонент операції з найменшим числом значущих цифр.

Приклад 1. Знайти абсолютну  $\Delta_u$  і відносну  $\delta_u$  похибки обчислення значення функції  $u = x^2 z / y^3$ , якщо  $x = 0,15 \pm 0,005$ ,  $y = 2,12 \pm 0,01$ ,  $z = 1,16 \pm 0,007$ .

□ За формулою для лінійної оцінки абсолютної похибки результату отримаємо:

$$\Delta_u = \left| \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \right| \Delta_x + \left| \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} \right| \Delta_y + \left| \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \right| \Delta_z =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{2xz}{y^3} \right| \Delta_x + \left| \frac{3x^2z}{y^4} \right| \Delta_y + \left| \frac{x^2}{y^3} \right| \Delta_z = \frac{2 \cdot 0,15 \cdot 1,16}{2,12^3} \cdot 0,005 + \\
&+ \frac{3 \cdot 0,15^2 \cdot 1,16}{2,12^4} \cdot 0,01 + \frac{0,15^2}{2,12^3} \cdot 0,007 = 0,0001826 + \\
&+ 0,0001163 + 0,00001653 = 0,00032 = 3,2 \cdot 10^{-4}.
\end{aligned}$$

Знайдемо наближене значення функції:

$$u = 0,15^2 \cdot 1,16 / 2,12^3 = 0,002739.$$

Тоді  $\delta_u = \Delta_u // u = 3,2 \cdot 10^{-4} / 0,002739 = 0,12.$  ■

Приклад 2. Висота  $h$  та радіус основи  $R$  циліндра виміряні з точністю до 0,2%. Яка відносна похибка при обчисленні об'єму  $V$  циліндра, якщо взято  $\pi = 3,14$ ?

□  $V = \pi R^2 h$ . Для числа  $\pi$  більш точне значення  $\pi = 3,14159265$ . Тоді  $\Delta_\pi = 3,14159265 - 3,14 = 0,16 \cdot 10^{-2}$ , а  $\delta_\pi = 0,16 \cdot 10^{-2} / 3,14 = 0,05 \cdot 10^{-2} = 0,05\%$ . За формулою відносної похибки добутку дістанемо

$$\delta_V = \delta_\pi + 2\delta_R + \delta_h = 0,05\% + 2 \cdot 0,2\% + 0,2\% = 0,65\%. \quad \blacksquare$$

## 2.6. Обернена задача теорії похибок

На практиці часто необхідно дістати результат обчислень так, щоб його похибка знаходилась в певних допустимих межах.

**Обернена задача теорії похибок** полягає в наступному: з якою граничною точністю  $\Delta_{x_i}^*$  ( $\delta_{x_i}^*$ ),  $i = \overline{1, n}$  потрібно взяти наближені значення аргументів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , щоб абсолютна (відносна) похибка обчислення значення функції  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  не перевищувала заданої величини  $\Delta_y^*$  ( $\delta_y^*$ ).

Для функції однієї змінної  $y = f(x)$  граничну абсолютну похибку аргументу можна обчислити за формулою

$$\Delta_x^* = \Delta_y^* / |f'(x)|.$$

Для функції декількох змінних  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  задача математично невизначена, оскільки задану похибку  $\Delta_y^*$  можна забезпечити при довільному наборі граничних абсолютних похибок аргументів  $\Delta_{x_i}^*$ ,  $i = \overline{1, n}$ , що задовольняють умові

$$\Delta_y^* = \sum_{i=1}^n |\partial f / \partial x_i| \cdot \Delta_{x_i}^*.$$

У цьому випадку задача розв'язується за допомогою наступних рекомендацій:

а) **принцип рівних впливів**: вважають, що вклади всіх аргументів у формування абсолютної похибки функції однакові, тобто в останній формулі всі доданки  $c_i = |\partial f / \partial x_i| \cdot \Delta_{x_i}^*$ ,  $i = \overline{1, n}$  рівні між собою. Тоді граничні абсолютні похибки аргументів визначаються за формулою

$$\Delta_{x_i}^* = \frac{\Delta_y^*}{n |\partial f / \partial x_i|}, \quad i = \overline{1, n}.$$

б) **принцип рівних абсолютних похибок**: вважають усі граничні абсолютні похибки аргументів рівними, тобто покладають

$$\Delta_{x_i}^* = \Delta_x^* = \Delta_y^* / \sum_{i=1}^n |\partial f / \partial x_i|, \quad i = \overline{1, n}.$$

в) **принцип рівних відносних похибок**: вважають усі граничні відносні похибки аргументів рівними, тобто покладають

$$\delta_{x_i}^* = \delta_x^* = \Delta_y^* / \sum_{i=1}^n |x_i \cdot \partial f / \partial x_i|, \quad i = \overline{1, n}.$$

**Зауваження.** Частіше використовують принцип рівних впливів. Але може статися таке: похибки окремих аргументів настільки малі, що виміряти чи обчислити ці величини з відповідною точністю неможливо. Тоді застосовують один з принципів рівних похибок. Інколи відступають від цих принципів, наприклад, допускаючи збільшення граничних абсолютних похибок для одних аргументів за рахунок одночасного зменшення їх для інших.

Приклад 1. Сторона квадрата  $x = 4$  м. З якою граничною абсолютною похибкою  $\Delta_x^*$  її потрібно виміряти, щоб абсолютна похибка знаходження площі  $S$  не перевищувала  $\Delta_y^* = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$  ?

□ Оскільки  $S = x^2$ , то  $S' = 2x$ ;  $S'(4) = 2 \cdot 4 = 8$ . Тоді

$$\Delta_x^* = \Delta_y^* / |S'| = 0,1 \cdot 10^{-3} / 8 = 0,125 \cdot 10^{-4} \text{ (м)}. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. З якою кількістю вірних значущих цифр потрібно взяти вільний член квадратного рівняння  $x^2 - 2x + \lg 6 = 0$ , щоб отримати корені рівняння з чотирма вірними значущими цифрами?

□ Корені рівняння  $x_1 = 1 + \sqrt{1 - \lg 6}$  і  $x_2 = 1 - \sqrt{1 - \lg 6}$ . Оскільки  $\lg 6 \approx 0,78$ , то  $\sqrt{1 - \lg 6} \approx 0,35$ ,  $x_1 \approx 1,35$  і  $x_2 \approx 0,65$ . Тоді за змістом задачі  $x_1$  і  $x_2$  потрібно визначити так, щоб  $\Delta_{x_1}^* = 0,5 \cdot 10^{-3}$  і  $\Delta_{x_2}^* = 0,5 \cdot 10^{-4}$ .

Позначимо  $t = \lg 6$  і розглянемо функцію  $x_1 = 1 + \sqrt{1 - t}$ . З'ясуємо, з якою точністю потрібно обчислити  $t$  в околі точки  $t = 0,78$  щоб забезпечити  $\Delta_{x_1}^* = 0,5 \cdot 10^{-3}$ . Оскільки в цій точці  $x_1' = -(1/2) / \sqrt{1 - t} = -(1/2) / 0,35 = -1,4$ , то дістанемо

$$\Delta_t^* = \Delta_{x_1}^* / |x_1'| = 0,5 \cdot 10^{-3} / 1,4 = 0,36 \cdot 10^{-3} \leq 0,5 \cdot 10^{-3}.$$

Звідси випливає, що для знаходження кореня  $x_1$  з чотирма вірними значущими знаками потрібно обчислити  $\lg 6$  з трьома вірними значущими цифрами після коми, тобто  $\lg 6 = 0,778$ .

Аналогічно, розглядаючи функцію  $x_2 = 1 - \sqrt{1 - t}$  отримаємо:

$$x_2' = (1/2) / \sqrt{1 - t} = (1/2) / 0,35 = 1,4;$$

$$\Delta_t^* = \Delta_{x_2}^* / |x_2'| = 0,5 \cdot 10^{-4} / 1,4 = 0,36 \cdot 10^{-4} \leq 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

Отже, для знаходження кореня  $x_2$  з чотирма вірними значущими цифрами потрібно обчислити  $\lg 6$  з чотирма вірними значущими знаками після коми, тобто  $\lg 6 = 0,7782$ .  $\blacksquare$

Приклад 3. Знайти граничні абсолютні  $\Delta_x^*$ ,  $\Delta_y^*$ ,  $\Delta_z^*$  і відносні  $\delta_x^*$ ,  $\delta_y^*$ ,  $\delta_z^*$  похибки аргументів, необхідні для одержання значення функції трьох змінних  $u = f(x, y, z)$  з  $m_u$  вірними значущими цифрами при вказаних значеннях аргументів. Спираючись на знайдені абсолютні похибки  $\Delta_x^*$ ,  $\Delta_y^*$  і  $\Delta_z^*$ , вказати потрібну кількість вірних значущих цифр  $m_x$ ,  $m_y$  і  $m_z$  у заданні аргументів. Задачу розв'язати трьома способами: а) за принципом рівних впливів; б) за принципом рівних абсолютних похибок; в) за принципом рівних відносних похибок.

$$u = (x^2 + y^3) / \cos z; \quad x \approx 28,2; \quad y \approx 7,46; \quad z \approx 0,7855; \quad m_u = 5.$$

$$\square \text{ Обчислимо: } x^2 = 28,2^2 = 795,2; \quad y^3 = 7,46^3 = 415,2;$$

$$\cos z = \cos 0,7855 = 0,7070; \quad x^2 + y^3 = 795,2 + 415,2 = 1210,4;$$

$$u = 1210,4 / 0,7070 = 1712,0,$$

де у значенні функції всі залишені  $m_u = 5$  значущих цифр вважатимемо вірними. Тоді

$$\Delta_u^* = 0,5 \cdot 10^{m-m_u+1} = 0,5 \cdot 10^{3-5+1} = 0,5 \cdot 10^{-1};$$

$$\delta_u^* = 0,5 \cdot 10^{1-m_u} / \alpha_1 = 0,5 \cdot 10^{1-5} / 1 = 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

Знайдемо похідні:

$$\partial u / \partial x = 2x / \cos z = 2 \cdot 28,2 / 0,7070 = 79,77;$$

$$\partial u / \partial y = 3y^2 / \cos z = 3 \cdot 7,46^2 / 0,7070 = 236,15;$$

$$\begin{aligned} \partial u / \partial z &= (x^2 + y^3) \sin z / \cos^2 z = u \operatorname{tg} z = \\ &= 1712,0 \cdot \operatorname{tg} 0,7855 = 1712,0 \cdot 1,0002 = 1712,3. \end{aligned}$$

а) Використовуючи принцип рівних впливів, дістанемо допустимі абсолютні похибки аргументів:

$$\Delta_x^* = \Delta_u^* / (n / \partial u / \partial x) = 0,5 \cdot 10^{-1} / (3 \cdot 79,77) = 0,2 \cdot 10^{-3} \geq 0,5 \cdot 10^{-4};$$

$$\Delta_y^* = \Delta_u^* / (n / \partial u / \partial y) = 0,5 \cdot 10^{-1} / (3 \cdot 236,15) = 0,7 \cdot 10^{-4} \geq 0,5 \cdot 10^{-4};$$



$$\Delta_z^* = \Delta_u^* / (n / \partial u / \partial z) = 0,5 \cdot 10^{-1} / (3 \cdot 1712,3) = 0,1 \cdot 10^{-4} \geq 0,5 \cdot 10^{-5}.$$

Тоді допустимі відносні похибки аргументів:

$$\delta_x^* = \Delta_x^* / |x| = 0,2 \cdot 10^{-3} / 28,2 = 0,7 \cdot 10^{-5};$$

$$\delta_y^* = \Delta_y^* / |y| = 0,7 \cdot 10^{-4} / 7,46 = 0,9 \cdot 10^{-5};$$

$$\delta_z^* = \Delta_z^* / |z| = 0,1 \cdot 10^{-4} / 0,7855 = 0,1 \cdot 10^{-4}.$$

Спираючись на одержані нерівності для абсолютних похибок  $\Delta_x^*$ ,  $\Delta_y^*$  і  $\Delta_z^*$ , одержимо потрібну кількість вірних значущих цифр  $m_x$ ,  $m_y$  і  $m_z$  у заданні аргументів:  $m_x = 6$ ;  $m_y = 5$ ;  $m_z = 5$ .

б) Застосовуючи принцип рівних абсолютних похибок, одержимо допустимі абсолютні похибки аргументів:

$$\begin{aligned} \Delta_x^* = \Delta_y^* = \Delta_z^* = \Delta_u^* / (|\partial u / \partial x| + |\partial u / \partial y| + |\partial u / \partial z|) = \\ = 0,5 \cdot 10^{-1} / (79,77 + 236,15 + 1712,3) = 0,2 \cdot 10^{-3} \geq 0,5 \cdot 10^{-4}; \end{aligned}$$

Тоді допустимі відносні похибки аргументів:

$$\delta_x^* = \Delta_x^* / |x| = 0,2 \cdot 10^{-3} / 28,2 = 0,7 \cdot 10^{-5};$$

$$\delta_y^* = \Delta_y^* / |y| = 0,2 \cdot 10^{-3} / 7,46 = 0,2 \cdot 10^{-4};$$

$$\delta_z^* = \Delta_z^* / |z| = 0,2 \cdot 10^{-3} / 0,7855 = 0,2 \cdot 10^{-3}.$$

Спираючись на одержану нерівність для абсолютних похибок  $\Delta_x^*$ ,  $\Delta_y^*$  і  $\Delta_z^*$ , отримаємо потрібну кількість вірних значущих цифр  $m_x$ ,  $m_y$  і  $m_z$  у заданні аргументів:  $m_x = 6$ ;  $m_y = 5$ ;  $m_z = 4$ .

в) Використовуючи принцип рівних відносних похибок, одержимо допустимі відносні похибки аргументів:

$$\begin{aligned} \delta_x^* = \delta_y^* = \delta_z^* = \Delta_u^* / (x \cdot |\partial u / \partial x| + y \cdot |\partial u / \partial y| + z \cdot |\partial u / \partial z|) = \\ = 0,5 \cdot 10^{-1} / (28,2 \cdot 79,77 + 7,46 \cdot 236,15 + 0,7855 \cdot 1712,3) = \\ = 0,5 \cdot 10^{-1} / (2249,51 + 1761,68 + 1345,01) = 0,9 \cdot 10^{-5}; \end{aligned}$$

Тоді допустимі абсолютні похибки аргументів:

$$\Delta_x^* = /x | \delta_x^* = 0,9 \cdot 10^{-5} \cdot 28,2 = 0,3 \cdot 10^{-3} \geq 0,5 \cdot 10^{-4};$$

$$\Delta_y^* = /y | \delta_y^* = 0,9 \cdot 10^{-5} \cdot 7,46 = 0,7 \cdot 10^{-4} \geq 0,5 \cdot 10^{-4};$$

$$\Delta_z^* = /z | \delta_z^* = 0,9 \cdot 10^{-5} \cdot 0,7855 = 0,7 \cdot 10^{-5} \geq 0,5 \cdot 10^{-5}.$$

Спираючись на одержані нерівності для абсолютних похибок  $\Delta_x^*$ ,  $\Delta_y^*$  і  $\Delta_z^*$ , дістанемо потрібну кількість вірних значущих цифр  $m_x$ ,  $m_y$  і  $m_z$  у заданні аргументів:  $m_x = 6$ ;  $m_y = 5$ ;  $m_z = 5$ . ■

### 3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ДІЙСНИХ КОРЕНІВ СКІНЧЕННИХ РІВНЯНЬ

#### 3.1. Дослідження рівняння і відокремлення коренів

**Рівнянням** з однією змінною  $x$  називається рівність

$$\boxed{f(x) = 0},$$

яка справджується при певних значеннях  $x$ , що називаються **коренями** рівняння. Вважають, що корінь  $x^*$  має кратність  $k$ , якщо

$$f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \text{ але } f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

Розв'язування рівняння полягає в знаходженні його коренів.

**Зауваження 1.** Рівносильними перетвореннями рівняння  $f(x) = 0$  можна звести до вигляду  $\boxed{x = \Phi(x)}$ . Тим самим знаходження кореня рівняння  $f(x) = 0$  (**нуля функції**  $f(x)$ ) зводиться до пошуку **нерухомої точки** відображення  $\Phi$  – такого значення  $x$ , яке відображенням  $\Phi$  переводиться само в себе.

**Зауваження 2.** Надалі обмежимося розглядом тільки дійсних коренів дійсних рівнянь.

Наближене обчислення кожного з дійсних коренів складається з наступних етапів:

а) дослідження кількості й розташування коренів на числовій прямій, з'ясування їх кратності; виділення області пошуку  $D$  коренів, яка відповідає умовам поставленої задачі;

б) **відокремлення (ізоляція, локалізація)** кореня  $x^*$ , тобто знаходження як можна меншого відрізка  $[a;b]$  з області пошуку  $D$ , в межах якого лежить один і тільки один цей корінь, і вибір його початкового наближення  $x_0$ ;

в) **уточнення** значення кореня  $x^*$ , тобто обчислення його з необхідною точністю.

Необхідність проведення попереднього дослідження рівняння до його безпосереднього розв'язування обумовлена тим, що при відсутності аналітичного розв'язку завчасно важко визначити кількість коренів і виявити їх природу – скільки серед них дійсних чи комплексних, додатних чи від'ємних, простих чи кратних. Пошук коренів “навмання” без попереднього дослідження приводить до значних витрат і не гарантує правильності відповіді. Крім того, деякі корні можуть не мати предметного (геометричного, фізичного і т.п.) смислу, тому не треба їх відшукувати.

Не існує універсального методу локалізації коренів. У деяких випадках допомагають фізичні міркування та інші відомості з предметної області, описом якої служить рівняння.

Найчастіше відокремлення коренів здійснюється аналітичним чи графічним способами.

Основою **аналітичного способу** служить наступна

теорема. *Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a;b]$  і приймає значення різних знаків на його кінцях, тобто  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , то усередині цього відрізка міститься хоча б один корінь  $x^*$  рівняння  $f(x) = 0$ . Цей корінь буде єдиним, якщо на інтервалі  $(a;b)$  похідна  $f'(x)$  зберігає постійний знак.*

У найпростішому випадку формують таблицю, в яку заносять послідовно розміщені на осі  $Ox$  точки  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  з досить малим кроком  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  і обчислені в них значення  $f(x_i)$  лівої частини рівняння  $f(x) = 0$ . Потім у таблиці вибирають ті пари сусідніх значень аргументу  $x_i$  і  $x_{i+1}$ , між якими функція  $f(x)$  змінює знак.

Зауваження 3. Подібний аналіз таблиці не гарантує відокремлення всіх коренів. Зокрема, корінь парної кратності так локалізува-

ти не можна, оскільки в околі такого кореня функція  $f(x)$  зберігає знак. Крім того, функція  $f(x)$  зберігає знак, якщо на відповідному проміжку розміщене парне число простих коренів. Якщо функція розривна, то вона може змінювати знак при переході через точку розриву.

При **графічному способі** будують графік функції  $y = f(x)$  і приблизно виявляють ділянки його перетину з віссю  $Ox$ . Або, перетворивши вхідне рівняння  $f(x) = 0$  до вигляду  $f_1(x) = f_2(x)$ , будують графіки двох функцій  $y = f_1(x)$  та  $y = f_2(x)$  і приблизно визначають проміжки, яким належать абсциси їх точок перетину між собою.

**Приклад 1.** Графічно знайти проміжки ізоляції коренів рівняння  $2\sqrt{x} \ln x - 1 = 0$ .

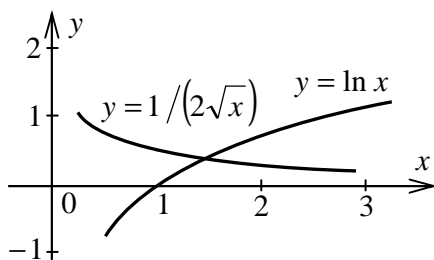


Рис. 1

□ Областю допустимих значень є промінь  $(0; +\infty)$ . Подамо рівняння у вигляді  $\ln x = 1/(2\sqrt{x})$ . Тоді корені можуть бути знайдені як абсциси точок перетину ліній  $y = \ln x$  і  $y = 1/(2\sqrt{x})$ . Побудуємо ці графіки (рис. 1) і за

ними визначимо кількість коренів та інтервали їх ізоляції.

З рис. 1 видно, що корінь єдиний і знаходиться на відрізку  $[1; 2]$ . Якщо взяти по осі  $Ox$  менший крок, то і проміжок локалізації можна знайти точніше. ■

**Приклад 2.** Для рівняння  $2^x + x^2 - 2 = 0$  знайти інтервали ізоляції його коренів, що лежать на проміжку  $[-2; 2]$ , аналітичним способом (на основі аналізу зміни знаків функції у таблиці значень лівої частини  $f(x) = 2^x + x^2 - 2$  рівняння), а потім проконтролювати результат графічним методом.

□ Побудуємо таблицю значень, де  $y = f(x) = 2^x + x^2 - 2$ .

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	2,25	-0,5	-1	1	6

З таблиці значень видно, що відрізьку  $[-2; 2]$  функція  $y = f(x)$  двічі змінює знак, тому можна припустити, що рівняння має два корені, проміжки локалізації яких  $[-2; -1]$  і  $[0; 1]$ .

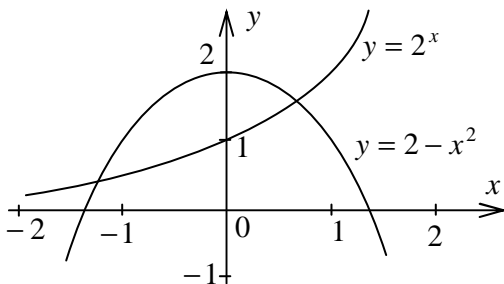


Рис. 2

Для контролю розв'яжемо задачу графічно. Подано рівняння  $y$  вигляді  $2^x = 2 - x^2$  і побудуємо графіки лівої  $y = 2^x$  та правої  $y = 2 - x^2$  частин (рис. 2). Перетин графіків на рис. 2 показує,

що коренів два і вони розміщені на відрізках  $[-2; -1]$  і  $[0; 1]$ . ■

### 3.2. Методи уточнення наближених значень коренів

На етапі уточнення кореня  $x^*$  рівняння  $f(x) = 0$  обчислюють його наближене значення з заданою точністю.

Для цього використовують різні ітераційні методи (методи послідовних наближень), суть яких полягає у послідовному обчисленні, виходячи з початкового наближення  $x_0$ , за однією й тією ж схемою (за допомогою відповідного рекурентного співвідношення

$$x_k = \Phi_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

значень  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ , що наближаються до кореня  $x^*$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* \quad (\text{це забезпечується вибором } \Phi_k).$$

**Критеріями закінчення** ітераційного процесу можуть служити:

а) досягнення заданої точності за аргументом:  $|x_k - x^*| < \delta$ , де  $\delta > 0$  – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного значення  $x_k$  кореня  $x^*$ ;

б) досягнення заданої точності за функцією:  $|f(x_k)| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon > 0$  – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного нульового значення  $f(x_k)$  функції  $f(x)$ ;

в) досягнення заданого максимально допустимого числа ітерацій  $k_{\max}$ :  $k = k_{\max}$ .

Зауваження 1. Найчастіше використовується набір з критеріїв а) і в). Ітераційний процес зупиняється при виконанні хоча б одного з них.

Зауваження 2. Позитивною стороною всіх ітераційних методів є відсутність накопичення похибок обчислень.

Далі розглянемо найпоширеніші ітераційні методи уточнення наближеного значення кореня.

### 3.2.1. Метод поділу навпіл (дихотомії, бісекції)

*Метод дихотомії (бісекції, поділу навпіл)* є досить простим і надійним способом розв’язування нелінійних рівнянь.

Нехай з попереднього аналізу відомо, що корінь  $x^*$  рівняння  $f(x) = 0$  належить відрізку  $[a_0; b_0]$ :  $x^* \in [a_0; b_0]$ , причому функція  $f(x)$  неперервна на цьому відрізку і приймає на його кінцях різні за знаком значення, тобто  $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ .

На першому кроці ( $k = 1$ ) розділимо відрізок  $[a_0; b_0]$  навпіл точкою  $x_1 = (a_0 + b_0)/2$  (рис. 3). Якщо  $f(x_1) = 0$ , то  $x_1$  – шуканий корінь і задача розв’язана:  $x^* = x_1$ . Якщо  $f(x_1) \neq 0$ , то треба визначити, на кінцях якого з відрізків  $[a_0; x_1]$  чи  $[x_1; b_0]$  функція приймає різні за знаком значення. Позначимо цей відрізок  $[a_1; b_1]$ . Оскільки  $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ , то  $x^* \in [a_1; b_1]$  і довжина відрізка  $[a_1; b_1]$  удвічі менша, ніж довжина попереднього відрізка  $[a_0; b_0]$ .

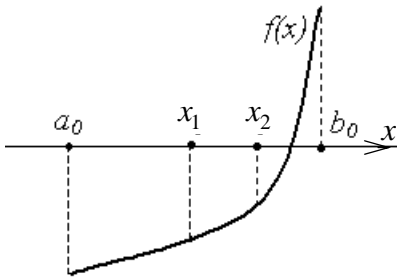


Рис. 3

Далі ( $k = 2$ ) зробимо аналогічні дії на відрізку  $[a_1; b_1]$  (поділимо його навпіл і т.д.). У результаті отримаємо корінь  $x^*$  або його відповідне наближення

$$x_2 = (a_1 + b_1)/2$$

і новий відрізок ізоляції  $[a_2; b_2]$  і т.д. На  $k$ -му кроці обчислення проводяться за схемою:

$$x_k = (a_{k-1} + b_{k-1})/2; \quad f(a_{k-1}) f(b_{k-1}) < 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

де  $x_k$  – наближення до шуканого кореня  $x^*$ ;  $[a_{k-1}; b_{k-1}]$  – попередній проміжок ізоляції кореня. Якщо  $k = k_{\max}$ , то покласти  $x^* = x_k$  і закінчити обчислення. Якщо  $f(x_k) = 0$ , то покласти  $x^* = x_k$  і закінчити обчислення. Якщо  $f(x_k) \cdot f(a_{k-1}) > 0$ , то покласти  $a_k = x_k$ ;  $b_k = b_{k-1}$ , інакше –  $a_k = a_{k-1}$ ;  $b_k = x_k$ . Далі присвоїти  $k := k + 1$  і продовжити обчислення.

На  $k$ -му кроці довжина одержаного відрізка ізоляції  $[a_k; b_k]$  дорівнює  $(b_0 - a_0)/2^k$ . Оскільки  $x^* \in [a_k; b_k]$ , то маємо оцінку

$$|x_k - x^*| \leq b_k - a_k = (b_0 - a_0)/2^k,$$

яка характеризує похибку методу ділення відрізка навпіл і вказує на швидкість збіжності: *метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії, знаменник якої  $q = 1/2$ .*

Оскільки  $|x_k - x^*| \leq b_k - a_k = |x_k - x_{k-1}|$ , то обчислення закінчують, коли буде виконана нерівність  $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ , де  $\delta > 0$  – задана точність.

Зауваження 1. Необхідну кількість ітерацій для досягнення заданої точності  $\delta > 0$  можна оцінити попередньо: зі співвідношення  $|x_k - x_{k-1}| = (b_0 - a_0)/2^k < \delta$  випливає  $k > \log_2((b_0 - a_0)/\delta)$ . Для

одержання кожних 3 вірних десяткових знаків необхідно зробити близько 10 ітерацій. На практиці ітераційний процес закінчують, коли два рази підряд одержуються однакові з заданою точністю числа (перестають змінюватися десяткові знаки, які треба зберегти у відповіді). Проміжні обчислення здійснюють з одним чи двома запасними десятковими знаками.

Зауваження 2. Метод дихотомії є досить простим і надійним способом розв'язування нелінійних рівнянь. Він не накладає ніяких вимог на гладкість функції  $f(x)$ : функція  $f(x)$  може бути недиференційовною, достатньо лише її неперервності. Якщо при локалізації кореня допущена помилка і на відрізку  $[a_0; b_0]$  знаходиться кілька коренів, то процес дихотомії збігається до одного з них.

Зауваження 3. До недоліків методу можна віднести невисоку швидкість збіжності. Крім того, він не застосовний для знаходження коренів парної кратності. Хоча у випадку кореня високої непарної кратності метод збігається, але при цьому має зменшену точність і невисоку стійкість до похибок обчислень.

Метод дихотомії застосовують тоді, коли вимагається висока надійність, а швидкість збіжності несуттєва.

Приклад. Знайти наближено  $x = \sqrt[8]{2}$  з точністю  $\delta = 0,01$ . Максимально допустиме число ітерацій  $k_{\max} = 10$ .

□ Задача еквівалентна відшукуванню додатного кореня рівняння  $x^8 - 2 = 0$  (знаходженню додатного нуля функції  $f(x) = x^8 - 2$ ). За початковий проміжок локалізації  $[a_0; b_0]$  можна взяти відрізок  $[1; 2]$ , оскільки на кінцях цього відрізка функція  $f(x)$  приймає значення з різними знаками:  $f(1) < 0$  і  $f(2) > 0$ .

Для уточнення кореня застосуємо метод дихотомії.

Оцінимо число  $k$  поділів відрізка  $[1; 2]$ , що необхідні для досягнення заданої точності  $\delta = 0,01$ :

$$k > \log_2((b_0 - a_0)/\delta) = \log_2((2 - 1)/0,01) = \log_2 100; \quad k \geq 7$$

Очікуємо, що після сьомої ітерації знайдемо  $\sqrt[8]{2}$  з потрібною точністю.

Оскільки  $\delta = 0,01$ , тобто результат треба знайти з двома вір-



ними значущими десятковими цифрами після коми, то проміжні обчислення виконуємо з чотирма десятковими знаками після коми (дві цифри запасні).

Результати обчислень подані у наступній таблиці:

$k$	1	2	3	4	5	6	7
$a_k$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0625	1,0625	1,0781
$b_k$	2,0000	1,5000	1,2500	1,1250	1,1250	1,0937	1,0937
$x_k$	1,5000	1,2500	1,1250	1,0625	1,0937	1,0781	1,0859
Знак $f(a_k)$	-	-	-	-	-	-	-
Знак $f(b_k)$	+	+	+	+	+	+	+
Знак $f(x_k)$	+	+	+	-	+	-	-
$ x_k - x_{k-1} $	—	0,2500	0,1250	0,0625	0,0312	0,0156	0,0078

Отже,  $x = \sqrt[8]{2} = x_7 = 1,09 \pm 0,01$ . ■

### 3.2.2. Метод хорд (пропорційних частин)

Як у методі дихотомії, припускаємо, що корінь  $x^*$  рівняння  $f(x) = 0$  належить відрізку  $[a_0; b_0]$ , причому функція  $f(x)$  неперервна на цьому відрізку і  $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ .

**Метод хорд (пропорційних частин)** полягає в поділі відрізка локалізації  $[a_{k-1}; b_{k-1}]$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) такого, що  $f(a_{k-1}) f(b_{k-1}) < 0$ , на частини, пропорційні значенням функції на його кінцях:

$$(a_{k-1} - x_k) / (b_{k-1} - x_k) = f(a_{k-1}) / f(b_{k-1}).$$

Звідси для  $k$ -го кроку ( $k = 1, 2, \dots$ ) маємо розрахункову схему:

$$x_k = a_{k-1} - \frac{f(a_{k-1}) \cdot (b_{k-1} - a_{k-1})}{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})}; \quad f(a_{k-1}) f(b_{k-1}) < 0,$$

де  $x_k$  – наближення до шуканого кореня  $x^*$ ;  $[a_{k-1}; b_{k-1}]$  – попередній проміжок ізоляції кореня. Якщо  $k = k_{\max}$ , то покласти  $x^* = x_k$

і закінчити обчислення. Якщо  $f(x_k) = 0$ , то покласти  $x^* = x_k$  і закінчити обчислення. Якщо  $f(x_k) \cdot f(a_{k-1}) > 0$ , то покласти  $a_k = x_k$ ;  $b_k = b_{k-1}$ , інакше –  $a_k = a_{k-1}$ ;  $b_k = x_k$ . Далі присвоїти  $k := k + 1$  і продовжити обчислення.

Геометрично метод пропорційних частин еквівалентний заміні дуги  $A_{k-1}B_{k-1}$  графіка функції  $f(x)$  хордою, що сполучає її кінці  $A_{k-1}(a_{k-1}; f(a_{k-1}))$  і  $B_{k-1}(b_{k-1}; f(b_{k-1}))$ , та вибору за наближене

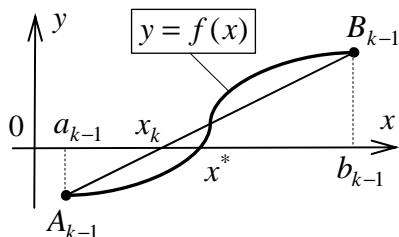


Рис. 4

значення кореня  $x^*$  точки перетину хорди з віссю  $Ox$  (рис. 4).

Як у методі дихотомії, обчислення закінчують, коли буде виконана нерівність  $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ , де  $\delta > 0$  – задана точність.

При умові, що на відрізку  $[a_{k-1}; b_{k-1}]$  перша похідна відмінна від нуля  $f'(x) \neq 0$ , а друга похідна  $f''(x)$  зберігає знак, оцінка абсолютної похибки наближення визначається за формулою

$$|x_k - x^*| \leq |f(x_k)| / \mu, \text{ де } \mu = \min_{x \in [a_{k-1}; b_{k-1}]} |f'(x)|.$$

Зауваження 1. Метод хорд аналогічний методу поділу навпіл, але забезпечує більш швидку збіжність.

Приклад. Методом хорд знайти наближено корінь заданого рівняння з указаною точністю:  $x^3 - 2^{-x} + 0,5 = 0$ ;  $\delta = 0,001$ . Максимально допустиме число ітерацій  $k_{\max} = 10$ .

□ Маємо  $f(x) = x^3 - 2^{-x} + 0,5$ . Оскільки  $f(0) = -0,5 < 0$ ,  $f(1) = 1 > 0$  і для всіх  $x \in (-\infty; +\infty)$  похідна зберігає знак  $f'(x) = 3x^2 + 2^{-x} \ln 2 > 0$ , то на відрізку  $[0; 1]$  знаходиться єдиний корінь  $x^*$  рівняння.

Проведемо уточнення кореня методом хорд для  $k = 1, 2, \dots$ . Обчислення зупинимо, коли буде виконана нерівність

$|x_k - x_{k-1}| < \delta = 0,001$  або досягнуто максимально допустиме число ітерацій  $k_{\max} = 10$ . Оскільки  $\delta = 0,001$ , то проміжні обчислення виконуємо з п'ятьма десятковими знаками після коми (дві цифри запасні).

Результати обчислень подані у наступній таблиці.

Отже, шукане значення кореня  $x^* = x_8 = 0,562 \pm 0,001$  досягнуто після восьми ітерацій. ■

$k$	1	2	3	4	5
$a_k$	0,00000	0,33333	0,46949	0,52579	0,54804
$b_k$	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
$f(a_k)$	-0,50000	-0,25666	-0,11873	-0,04922	-0,01935
$f(b_k)$	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
$x_k$	0,33333	0,46949	0,52579	0,54804	0,55662
$f(x_k)$	-0,25666	-0,11873	-0,04922	-0,01935	-0,00744
$ x_k - x_{k-1} $	—	0,13616	0,05630	0,02225	0,00858

$k$	6	7	8	9	10
$a_k$	0,55662	0,55989	0,56114		
$b_k$	1,00000	1,00000	1,00000		
$f(a_k)$	-0,00744	-0,00108	-0,00108		
$f(b_k)$	1,00000	1,00000	1,00000		
$x_k$	0,55989	0,56114	0,56161		
$f(x_k)$	-0,00108	-0,00108	-0,00041		
$ x_k - x_{k-1} $	0,00327	0,00124	0,00047		

Зауваження 2. Якщо на відрізку локалізації  $[a_0; b_0]$  друга похідна  $f''(x)$  зберігає знак, то при обчисленнях за методом хорд один з кінців відрізків локалізації  $[a_k; b_k]$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), де знак функції  $f(x)$  збігається зі знаком другої похідної, залишається неру-

хомим. При цьому послідовні наближення  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$  лежать по ту сторону від кореня, де знак функції протилежний знакові  $f''(x)$ .

### 3.2.3. Метод простих ітерацій

**Метод простих ітерацій** застосовується до розв'язування рівняння вигляду  $x = \varphi(x)$ .

Виберемо довільно початкове наближення  $x_0 \in [a; b]$  кореня  $x^*$  рівняння  $x = \varphi(x)$  й обчислимо послідовно наступні наближення за схемою:  $x_k = \varphi(x_{k-1}), k = 1, 2, \dots$ .

Достатню умову збіжності методу простих ітерацій установлює наступна

**теорема.** *Якщо в інтервалі, який містить корінь  $x^*$  рівняння  $x = \varphi(x)$  і його послідовні наближення  $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ , які обчислюються за формулою  $x_k = \varphi(x_{k-1}), k = 1, 2, \dots$ , виконується умова  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ , тобто ітераційний процес збігається, і справджується нерівність  $|x_k - x^*| \leq q^k |x_0 - x^*|$ .*

Оцінка похибки  $|x_k - x^*| \leq q^k |x_0 - x^*|$  показує, що метод простих ітерацій збігається зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником  $q$ . Швидкість збіжності тим більша, чим менше  $q$ .

Умова  $|\varphi'(x)| < 1$  є достатньою для збіжності методу простих ітерацій: її виконання гарантує збіжність. Але ця умова не є необхідною: якщо вона не виконується, то це не означає, що ітераційний процес обов'язково буде розбігатись.

Метод простих ітерацій має прозору геометричну інтерпретацію. Побудуємо графіки функцій  $y = x$  і  $y = \varphi(x)$ . Коренем рівняння  $x = \varphi(x)$  є абсциса точки їх перетину. Від початкового наближення  $x_0$  будемо ламану, абсциси вершин якої є послідовними наближеннями  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$  до кореня  $x^*$ .

На рис. 5 – 8 показано чотири випадки взаємного розташування ліній  $y = x$ ,  $y = \varphi(x)$  і відповідної ламаної, що описує ітераційний процес. Рис. 5 і 6 відповідають випадку  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ , коли ітераційний процес збігається. Рис. 7 і 8 відповідають випадку  $|\varphi'(x)| > 1$ , коли ітераційний процес розбігається.

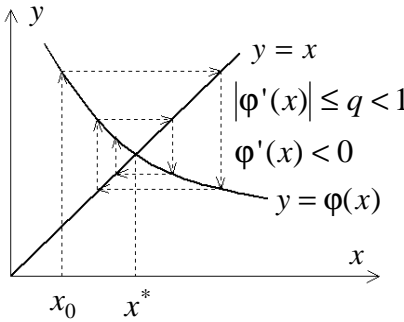


Рис. 5

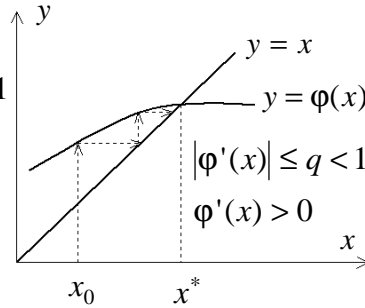


Рис. 6

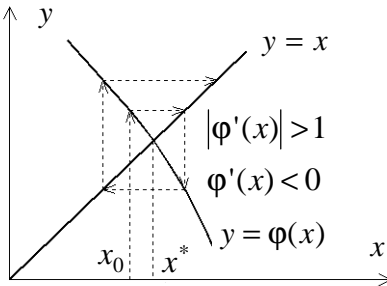


Рис. 7

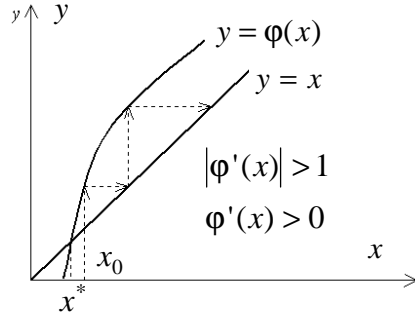


Рис. 8

Зауваження 1. Якщо не виконана ні одна з умов  $|\varphi'(x)| < 1$  чи  $|\varphi'(x)| > 1$ , то ітераційний процес може зациклюватися.

Похибка методу і критерій закінчення. Якщо відома величина  $q$  в умові  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ , то застосовують оцінку похибки

$$|x_k - x^*| \leq (q/(1-q))|x_k - x_{k-1}|, k \geq 1,$$

з якої витікає наступний критерій закінчення ітераційного процесу: обчислення необхідно продовжувати до виконання нерівності  $|x_k - x_{k-1}| < \delta q/(1-q)$ , де  $\delta > 0$  – задана точність.

Зауваження 2. Якщо  $q \leq 0,5$ , то можна користуватись більш простим критерієм закінчення:  $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ .

Зауваження 3. Надати рівнянню  $f(x) = 0$  вигляду  $x = \varphi(x)$  можна багатьма способами. Успіх методу простих ітерацій залежить від того, наскільки вдало вибрана функція  $\varphi(x)$ . Найпростіше безпосередньо додати  $x$  до обох частин рівняння  $f(x) = 0$ :  $x = x + f(x)$ . Часто застосовується **модифікація методу простих ітерацій**:  $x = x + \alpha f(x)$ , де  $\alpha$  – параметр, значення якого підбирається експериментально так, щоб справджувалася умова збіжності  $|\varphi'(x)| < 1$  (звичайно, з діапазону  $|\alpha| = 0,1 \div 1$ , пам'ятаючи, що чим менше значення  $|\alpha|$ , тим повільніше збігається ітераційна послідовність). Якщо на відрізку  $[a_0; b_0]$  функція  $f(x)$  диференційовна і похідна  $f'(x)$  зберігає знак, то можна покласти  $\alpha = \pm 1/M$ , де  $M = \max_{x \in [a_0; b_0]} |f'(x)|$  і знак вибирається протилежним знаку похідної  $f'(x)$ .

Приклад. Методом простих ітерацій розв'язати рівняння  $f(x) = 0$ , де  $f(x) = 2x^2\sqrt{x} + x^2 - 4$ , з точністю  $\delta = 0,001$  з додатковою вимогою  $|f(x_k)| < \epsilon$ , де  $\epsilon = 0,01$ . Максимально допустиме число ітерацій  $k_{\max} = 5$ .

□ Областю допустимих значень даного рівняння є закритий промінь  $[0; +\infty)$ .

Оскільки  $f(1) = -1 < 0$ , а  $f(2) = 11,3 > 0$ , тобто функція  $f(x)$  на кінцях відрізка  $[1; 2]$  має різні знаки, то всередині цього відрізка є корінь  $x^*$ . Так як для всіх  $x \in (0; +\infty)$  похідна  $f'(x)$

зберігає знак  $f'(x) = 5x\sqrt{x} + 2x > 0$ , то на відрізку  $[1;2]$  знаходиться єдиний корінь  $x^*$  рівняння.

Проведемо уточнення кореня методом простих ітерацій.

Перетворимо рівняння до вигляду  $x = \varphi(x)$ :

$$x^2 = 4/(2\sqrt{x} + 1); \quad x = 2/\sqrt{2\sqrt{x} + 1}. \quad \text{Отже, } \varphi(x) = 2/\sqrt{2\sqrt{x} + 1}.$$

На рис. 9 показано розташування кореня  $x^*$ . Видно, що корінь розміщений значно ближче до лівого кінця відрізка  $[1;2]$ , ніж до правого. Тому за початкове наближення оберемо  $x_0 = 1,1$ .

Обчислимо першу та другу похідні функції  $\varphi(x)$ :

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)^{3/2}}; \quad \varphi''(x) = \frac{3(5\sqrt{x} + 1)}{4x\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)^{5/2}}.$$

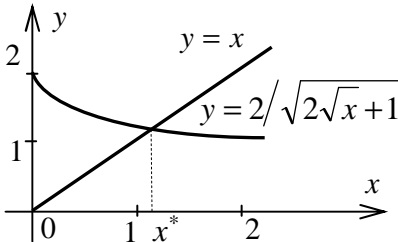


Рис. 9

Оскільки на відрізку  $[1;2]$  друга похідна  $\varphi''(x)$  додатна, то перша похідна  $\varphi'(x)$  монотонно зростає на цьому відрізку і приймає найменше та найбільше значення на його кінцях:

$$\min_{x \in [a_0; b_0]} \varphi'(x) = \varphi'(1) = -0,192;$$

$$\max_{x \in [a_0; b_0]} \varphi'(x) = \varphi'(2) = -0,094.$$

Тоді справедлива оцінка  $|\varphi'(x)| \leq \max_{x \in [a_0; b_0]} |\varphi'(x)| = 0,192 < 1$ .

Таким чином, умова збіжності  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$  справджується, причому  $q = 0,192 \leq 0,5$ . Обчислення зупинимо, коли буде задовольнятися система нерівностей  $|x_k - x_{k-1}| < \delta = 0,001$  і  $|f(x_k)| < \varepsilon = 0,01$  або досягнуто максимально допустиме число ітерацій  $k_{\max} = 5$ . Отримані за формулою  $x_k = \varphi(x_{k-1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$  наближення показані у наступній таблиці:

$k$	1	2	3	4	5
$x_k$	1,13636	1,13011	1,13117	1,13099	
$ x_k - x_{k-1} $	0,03636	0,00625	0,00106	0,00018	
$ f(x_k) $	0,0444	0,0075	0,0013	0,0002	

Оскільки  $\delta = 0,001$  і  $\varepsilon = 0,01$ , то проміжні обчислення виконані з п'ятьма десятковими знаками після коми (дві-три цифри запасні). Характер збіжності відповідає рис. 5.

Отже, шукане значення кореня  $x^* = x_4 = 1,131 \pm 0,001$  досягнуто після чотирьох ітерацій. ■

Зазначимо, що у розглянутому прикладі можна застосувати інші способи зведення рівняння до вигляду  $x = \varphi(x)$ , відстежуючи виконання умови збіжності  $|\varphi'(x)| < 1$ . Наприклад, наступна схема:

$$\sqrt{x} = \frac{4 - x^2}{2x^2}; \quad x = \frac{(4 - x^2)^2}{4x^4}; \quad \varphi(x) = \frac{(4 - x^2)^2}{4x^4} \text{ на відрізку } [1; 2]$$

цю умову не задовольняє. (Переконайтеся самостійно).

### 3.2.4. Метод Ньютона (метод дотичних, метод лінеаризації)

Найбільш ефективним методом розв'язування нелінійних рівнянь є *метод Ньютона (метод дотичних або метод лінеаризації)*.

Нехай корінь  $x^* \in [a; b]$ , причому  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , а функція  $f(x)$  неперервна на відрізку локалізації  $[a; b]$  і двічі неперервно диференційовна на інтервалі  $(a; b)$ , де друга похідна  $f''(x)$  зберігає знак. За початкове наближення  $x_0$  візьмемо той кінець відрізка  $[a; b]$ , для якого  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$  (знаки функції та другої похідної співпадають).

Покладемо, для визначеності,  $f''(x) > 0$  і  $f(b) > 0$ . Тоді  $x_0 = b$ . Проведемо дотичну до графіка функції  $y = f(x)$  у точці  $B_0(x_0; f(x_0))$  (рис. 10). Рівняння цієї дотичної:



$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Знайдемо точку перетину дотичної з віссю  $Ox$ , абсциса якої буде першим наближенням до кореня:  $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ .

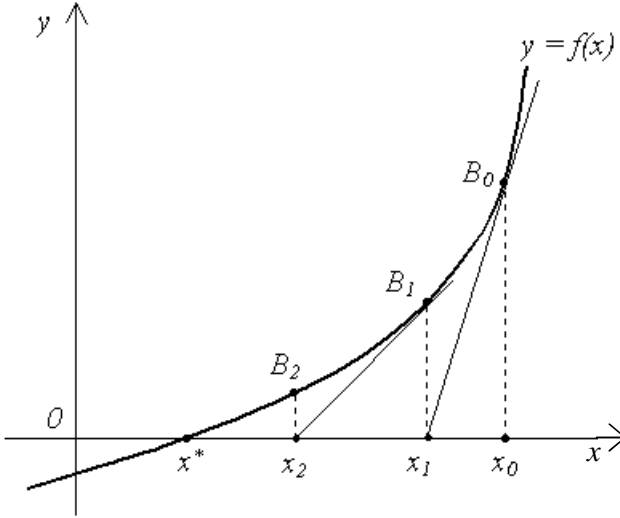


Рис. 10

У точці  $B_1(x_1; f(x_1))$  знову проведемо дотичну до кривої й отримаємо наступне наближення. Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність наближень  $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ , де

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1}); k = 1, 2, \dots$$

Це співвідношення є **ітераційною формулою** методу Ньютона.

Зауваження 1. Одержану ітераційну формулу можна вивести наступним чином. Нехай маємо деяке наближення  $x_{k-1}$  до кореня  $x^*$ . Лінеаризуємо функцію  $f(x)$  в околі точки  $x^*$ , застосовуючи формулу Лагранжа про скінченні прирости, і дістанемо:

$$f(x^*) = f(x_{k-1}) + f'(\xi)(x^* - x_{k-1}) = 0, \text{ де } \xi \in (x^*; x_{k-1}).$$

Наближено замінюючи  $f'(\xi)$  на значення похідної у відомій точці

$x_{k-1}$ , звідси знаходимо  $x^* \approx x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})$ .

Зауваження 2. Метод Ньютона можна розглядати як окремих випадок методу простих ітерацій, для якого  $\Phi(x) = x - f(x)/f'(x)$ .

Тоді умова збіжності  $|\Phi'(x)| < 1$  матиме вигляд  $\boxed{|f \cdot f''| < (f')^2}$ .

Достатню умову збіжності методу дотичних встановлює наступна

теорема. Нехай  $[a; b]$  – відрізок, який містить корінь  $x^*$  рівняння  $f(x) = 0$ . Якщо  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , причому  $f'(x)$  і  $f''(x)$  відмінні від нуля та зберігають знак на  $[a; b]$ , то виходячи з довільного початкового наближення  $x_0 \in [a; b]$ , що задовольняє умову  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ , ітераційний процес методу Ньютона  $x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) монотонно збігається до єдиного на відрізку  $[a; b]$  кореня  $x^*$ , який можна обчислити з будь-яким ступенем точності.

Зауваження 3. Збіжність методу Ньютона суттєво залежить від того, чи достатньо близько до кореня взято початкове наближення.

Похибка методу. Для дослідження швидкості збіжності скористаємося поданням функції  $f(x)$  в околі точки  $x_{k-1}$  за формулою Тейлора до членів другого порядку включно й отримасмо:

$$f(x^*) = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x^* - x_{k-1}) + (1/2)f''(\xi)(x^* - x_{k-1})^2 = 0,$$

де  $\xi \in (x^*; x_{k-1})$ . Звідси

$$f(x_{k-1}) = -f'(x_{k-1})(x^* - x_{k-1}) - (1/2)f''(\xi)(x^* - x_{k-1})^2.$$

Підставимо цей вираз у формулу методу Ньютона і дістанемо

$$x_{k-1} = x^* + (1/2)(f''(\xi)/f'(x_{k-1}))(x^* - x_{k-1})^2.$$

Тоді для похибки  $k$ -го наближення маємо

$$x_{k-1} - x^* = (1/2)(f''(\xi)/f'(x_{k-1}))(x^* - x_{k-1})^2.$$

Позначимо  $m = \min_{x \in [a; b]} |f'(x)| \neq 0$ ;  $M = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|$ . Тоді для

абсолютної похибки  $k$ -го наближення дістанемо оцінку

$$\boxed{|x_k - x^*| \leq (M / (2m)) |x_{k-1} - x^*|^2.}$$

Це означає, що *метод Ньютона має квадратичну швидкість збіжності*, тобто похибка чергового наближення пропорційна до квадрата похибки попереднього наближення.

Зауваження 4. На практиці звичайно користуються такою оцінкою похибки:  $\boxed{|x_k - x^*| \leq |x_k - x_{k-1}|}$ . У кращих випадках число вірних десяткових знаків у черговому наближенні подвоюється, тобто процес збігається дуже швидко.

Критерій закінчення. Попередня оцінка дозволяє сформулювати такий критерій закінчення ітерацій: обчислення треба вести доти, доки не буде виконана нерівність  $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ , де  $\delta > 0$  – задана точність.

Зауваження 5. Для підвищення стійкості ітераційного процесу застосовується наступна *модифікація методу Ньютона*:

$$\boxed{x_k = x_{k-1} - \alpha f(x_{k-1}) / f'(x_{k-1}); k = 1, 2, \dots,}$$

де  $\alpha$  – параметр, значення якого підбирається експериментально (звичайно, з діапазону  $\alpha = 0,1 \div 1$ ).

Зауваження 6. Недоліком методу дотичних є необхідність обчислювати в кожній точці не тільки значення функції, але і значення похідної. Якщо обчислення похідної складне, то часто застосовують спрощений *метод однієї дотичної*:

$$\boxed{x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) / f'(x_0); k = 1, 2, \dots,}$$

що характеризується збіжністю лише зі швидкістю геометричної прогресії.

Приклад 1. Методом Ньютона з точністю  $\delta = 0,001$  знайти додатний корінь  $x^*$  рівняння  $f(x) = 0$ , де  $f(x) = e^{-x} - 2x^2 + 1$ , з додатковою вимогою  $|f(x_k)| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon = 0,0001$ . Максимально допустиме число ітерацій  $k_{\max} = 5$ .

□ Подамо дане рівняння у вигляді  $e^{-x} = 2x^2 - 1$ , дослідимо

перетин графіків  $y = e^{-x}$  і  $y = 2x^2 - 1$  при  $x \in [0; +\infty)$ . У результаті одержимо, що додатний корінь  $x^*$  лежить на відрізку  $[0,5;1]$ . (Проробіть це самостійно).

На кінцях відрізка  $f(0,5) = 1,11 > 0$  і  $f(1) = -0,63 < 0$ .

Обчислимо першу та другу похідні функції  $f(x)$ :

$$f'(x) = -e^{-x} - 4x; \quad f''(x) = e^{-x} - 4.$$

На відрізку  $[0,5;1]$  справджуються нерівності  $f'(x) < 0$  і  $f''(x) < 0$ . Оскільки виконується умова  $f'(1)f''(1) > 0$ , то за початкове наближення візьмемо  $x_0 = 1$ . Обчислення зупинимо, коли буде задовольнятися система нерівностей  $|x_k - x_{k-1}| < \delta = 0,001$  і  $|f(x_k)| < \varepsilon = 0,0001$  або досягнуто максимально допустиме число ітерацій  $k_{\max} = 5$ . Виходячи з того, що  $\delta = 0,001$  і  $\varepsilon = 0,0001$ , проміжні обчислення здійснюємо з п'ятьма десятковими знаками після коми (одна-дві цифри запасні).

Результати обчислень наведені у наступній таблиці.

Отже, шукане значення кореня  $x^* = x_3 = 0,845 \pm 0,001$  досягнуто після трьох ітерацій. ■

$k$	0	1	2	3	4
$x_k$	1,00000	0,85528	0,84544	0,84540	
$ x_k - x_{k-1} $	—	0,14472	0,00984	0,00005	
$f(x_k)$	-0,63212	-0,03784	-0,00017	-0,00000	
$f'(x_k)$	-4,36788	-3,84628	-3,81113	—	

**Приклад 2.** Методом Ньютона з точністю  $\delta = 0,001$  розв'язати рівняння  $f(x) = 0$ , де  $f(x) = 2/(x^2 + 1) - x^3 + 1$ , з додатковою вимогою  $|f(x_k)| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon = 0,0001$ . Максимально допустиме число ітерацій  $k_{\max} = 5$ .

(Розв'язати самостійно). Відповідь:  $x^* = 1,218 \pm 0,001$ .

### 3.2.5. Метод січних

Метод Ньютона потребує для своєї реалізації обчислення похідної, що обмежує його застосування. Цей недолік усуває наступна його модифікація – *метод січних*.

Якщо в схемі методу дотичних замінити похідну  $f'(x_{k-1})$  її різницеvim наближенням “назад”:

$$f'(x_{k-1}) \approx (f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})) / (x_{k-1} - x_{k-2}),$$

то дістанемо *ітераційну формулу* методу січних:

$$x_k = x_{k-1} - (x_{k-1} - x_{k-2}) f(x_{k-1}) / (f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})); k = 2, 3, \dots$$

Це означає, що замість дотичних використовуються січні: наступне наближення  $x_k$  отримують як точку перетину з віссю  $Ox$  січної, що з'єднає дві точки графіка функції  $f(x)$  з координатами  $(x_{k-2}; f(x_{k-2}))$  і  $(x_{k-1}; f(x_{k-1}))$  (рис. 11).

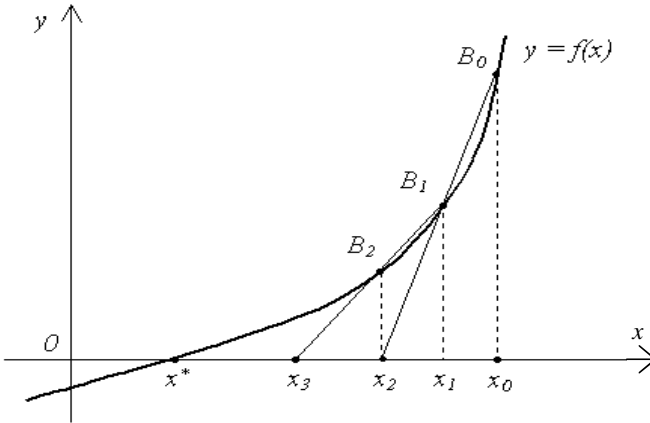


Рис. 11

Метод січних є двокроковим: для обчислення чергового наближення  $x_k$  необхідно знати два попередніх  $x_{k-1}$  і  $x_{k-2}$ . При цьому запуск ітераційного процесу передбачає задання двох початкових значень  $x_0$  і  $x_1$ .

Зауваження 1. Часто вказується тільки одне початкове наближення  $x_0$ . Тоді потрібні для запуску  $m$ -крокового методу ( $m \geq 2$ ) інші наближення  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$  попередньо обчислюються за допомогою деякого однокрокового методу.

Збіжність методу січних підтверджує наступна

теорема. Нехай функція  $f(x)$  двічі неперервно диференційовна у деякому околі кореня  $x^*$  рівняння  $f(x) = 0$ , причому  $f''(x^*) \neq 0$ . Тоді знайдеться такий малий  $\delta$ -оکیل кореня  $x^*$ , що при довільному виборі початкових наближень  $x_0$  і  $x_1$  з цього околу ітераційна послідовність, яка визначається за формулою

$$x_k = x_{k-1} - (x_{k-1} - x_{k-2}) \frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}; \quad k = 2, 3, \dots,$$

збігається до  $x^*$  і справджується оцінка  $|x_k - x^*| \leq C |x_{k-1} - x_{k-2}|^p$ ,

де  $C = \delta^{-1}$ ;  $p = ((\sqrt{5} + 1)/2) \approx 1,618$ ;  $k = 2, 3, \dots$

Критерій закінчення у методі січних такий же, як у методі Ньютона: обчислення треба вести доти, доки не буде виконана нерівність  $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ , де  $\delta > 0$  – задана точність.

Зауваження 2. На відміну від методу дотичних, метод січних збігається не так швидко, оскільки  $p < 2$ , причому збіжність може бути немонотонною не тільки далеко від кореня, а й поблизу. Проте у методі Ньютона на кожній ітерації треба обчислювати як функцію, так і похідну, а у методі січних – тільки функцію. Тому при однаковому об'ємі обчислень у методі січних можна зробити приблизно удвічі більше ітерацій і отримати більш високу точність.

Зауваження 3. При невдалому виборі початкових наближень метод січних, як і метод Ньютона, може розбігатися. Крім того, наявність у знаменнику ітераційної формули різниці значень функції приводить до втрати стійкості обчислювального процесу поблизу кореня, де ця різниця стає досить малою.

Зауваження 4. Якщо метод січних доповнити додатковою вимогою, що шуканий корінь  $x^*$  локалізований на відрізку  $[x_0; x_1]$ , причому на кінцях відрізка  $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ , і в ітераційній форму-

лі замість  $x_{k-2}$  взяти  $x_s$  – наближення з найбільшим номером  $s$  з  $x_0, x_1, \dots, x_{k-2}$ , яке задовольняє умову  $f(x_s) \cdot f(x_{k-1}) < 0$  (тобто корінь  $x^*$  розміщений між  $x_{k-1}$  і  $x_s$ ), то дістанемо розрахункову схему  $x_k = x_{k-1} - (x_{k-1} - x_s) \frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-1}) - f(x_s)}$ , що відповідає методу хорд.

Приклад. Методом січних з точністю  $\delta = 0,001$  знайти додатний корінь  $x^*$  рівняння  $f(x) = 0$ , де  $f(x) = 3 - 4x^2 - e^x$ , з додатковою вимогою  $|f(x_k)| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon = 0,001$ . Максимально допустиме число ітерацій  $k_{\max} = 5$ .

□ Подамо дане рівняння у вигляді  $e^x = 3 - 4x^2$ , дослідимо перетин ліній  $y = e^x$  і  $y = 3 - 4x^2$  при  $x \in [0; +\infty)$ . Дістанемо, що додатний корінь  $x^*$  лежить на відрізку  $[a; b] = [0; 1]$ , причому  $f(0) = 2 > 0$  і  $f(1) = -1 - e < 0$ . (Проробіть це самостійно). Друга похідна функції:  $f''(x) = -8 - e^x$ . Умова  $f(x)f''(x) > 0$  виконується для правого кінця  $x = 1$  відрізка  $[0; 1]$ , тому за перше початкове наближення візьмемо  $x_0 = 1$ . За друге початкове значення оберемо середину відрізка  $[0; 1]$  – точку  $x_1 = 0,5$ .

Процес зупинимо, коли буде задовольнятися система нерівностей  $|x_k - x_{k-1}| < \delta = 0,001$  і  $|f(x_k)| < \varepsilon = 0,001$  або досягнуто максимального допустимого числа ітерацій  $k_{\max} = 5$ . Оскільки  $\delta = 0,001$  і  $\varepsilon = 0,001$ , проміжні обчислення здійснюємо з п'ятьма десятковими знаками після коми (дві цифри запасні).

Результати обчислень наведені у наступній таблиці.

Отже,  $x^* = x_4 = 0,559 \pm 0,001$ . ■

$k$	0	1	2	3	4
$x_k$	1,00000	0,50000	0,54316	0,55997	0,55918
$ x_k - x_{k-1} $	—	—	0,04316	0,01681	0,00080
$f(x_k)$	-3,71828	0,35128	0,09848	-0,00489	0,00006

## 4. АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ

### 4.1. Загальна постановка задачі апроксимації

Задача *апроксимації* (наближення) функцій полягає у тому, щоб для заданої функції  $y = f(x)$  побудувати *апроксимуючу* (наближену) функцію (модель)  $y = F(x)$ , значення якої достатньо близькі до значень даної функції. *Відхилення*  $R(x) = f(x) - F(x)$  характеризує якість наближення.

Наведемо найбільш типові ситуації, коли на практиці виникає така задача:

– функція  $y = f(x)$  задана таблицею значень  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_1 = f(x_1)$ , ...,  $y_n = f(x_n)$  для скінченної множини точок  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , а обчислення  $y = f(x)$  треба зробити в інших точках;

– функція  $y = f(x)$  задана аналітично, але обчислювати її за відповідними формулами важко.

Знаходження апроксимуючої функції  $y = F(x)$  включає наступні етапи:

1) вибір *критерію близькості* вхідної  $y = f(x)$  і наближеної  $y = F(x)$  функцій (вимога збігу значень обох функцій на заданій сукупності точок  $x_0, x_1, \dots, x_n$  – *інтерполяція (колокація)*, мінімізація середньоквадратичного відхилення – *середньоквадратична апроксимація*, мінімізація максимального за модулем відхилення – *рівномірне наближення* та ін.);

2) вибір вигляду наближеної функції  $y = F(x)$  – *структурна ідентифікація (параметризація моделі* – визначення певної параметричної сім'ї функцій  $y = F(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$ , де  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – невідомі коефіцієнти);

3) знаходження за вибраним критерієм оптимальних оцінок параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – *параметрична ідентифікація* (вибір і реалізація методу обчислення з заданою точністю найкращих за певним критерієм значень коефіцієнтів наближеної функції).

Нехай на відрізьку  $[a; b]$  зміни аргументу  $x$  задано одновимір-



ну сітку  $\omega_n = \{x_k : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$  (з нерівномірним, у загальному випадку, кроком  $h_k = x_k - x_{k-1} = \text{var}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ), у всіх вузлах  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  якої відомі значення  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  вхідної функції  $y = f(x)$ . Звичайно припускають, що вузли  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  визначені точно.

Якщо знехтувати похибками у значеннях функції  $y = f(x)$ , то за критерій узгодженості з нею апроксимуючої залежності  $y = F(x)$  можна вибрати вимогу, щоб у всіх вузлах сітки обидві функції давали однакові результати:  $F(x_k) = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

Такий спосіб наближення називають **інтерполяцією**, відповідну модель  $y = F(x)$  – **інтерполяційною функцією**, а точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$  – **вузлами інтерполяції**.

У вузькому смислі задача **інтерполювання** полягає у знаходженні наближених значень  $y = F(x)$  таблично заданої функції  $y = f(x)$  у точках  $x$  **проміжку інтерполювання**  $[a; b] = [x_0, x_n]$ , що не співпадають з вузловими. Якщо ж  $x$  лежить за межами цього проміжку, то відшукання відповідного наближення  $f(x) \approx F(x)$  називають задачею **екстраполювання**.

Зауваження 1. До екстраполяційних наближень треба ставитися дуже обережно, оскільки вони стосуються області з невідомою поведінкою вхідної функції.

Якщо похибки задання вузлових значень функції  $y = f(x)$  суттєві, то вимога обов'язкового збігу з ними відповідних значень моделі  $y = F(x)$  втрачає сенс. Тоді апроксимуючу функцію  $y = F(x)$  можна вибрати з умови, щоб **відхилення (нев'язки)**  $f(x) - F(x)$  у вузлах сітки  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  були найменшими у певному розумінні. Маємо більш загальну постановку задачі апроксимації, розв'язання якої в окремих випадках може привести до виконання системи співвідношень  $R(x_k) = f(x_k) - F(x_k) = 0$ ,  $k = \overline{0, n}$ , що відповідають умовам інтерполяції.

Якщо задача передбачає мінімізацію суми квадратів відхилень

моделі  $y = F(x)$  від вхідної функції  $y = f(x)$  у всіх вузлах сітки:  $\rho_2(f, F) = \sum_{k=0}^n (f(x_k) - F(x_k))^2 \rightarrow \min$ , то говорять про *середньоквадратичну апроксимацію* (наближення за *методом найменших квадратів (МНК)*).

Якщо задача передбачає мінімізацію максимального за модулем відхилення моделі  $y = F(x)$  від вхідної функції  $y = f(x)$  у всіх вузлах сітки:  $\rho_1(f, F) = \max_{k=0, n} |f(x_k) - F(x_k)| \rightarrow \min$ , то говорять про *рівномірне наближення (чебишовську апроксимацію)*.

Зауваження 2. Рівномірне наближення породжує досить складні обчислювальні процедури. На практиці його застосовують, коли треба гарантувати розміщення відхилення  $R(x) = f(x) - F(x)$  у певних жорстких межах:  $|R(x)| = |f(x) - F(x)| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon > 0$ . Найпоширенішою є апроксимація за МНК, несумнівні переваги якої – простота реалізації та високі характеристики якості моделі у більшості практичних застосувань. Одним з її недоліків є переважний внесок у сумарний критерій більших за модулем відхилень. Для його подолання вводять у критерій відповідні вагові множники.

Зауваження 3. Використовують інші критерії близькості, зокрема, мінімізацію суми модулів відхилень:  $\sum_{k=0}^n |f(x_k) - F(x_k)|$ .

Структурна ідентифікація, безсумнівно, є ключовим етапом, від вдалої реалізації якого визначально залежить якість відновлення заданої функції  $y = f(x)$  її наближенням  $y = F(x)$ . На жаль, дотепер не існує системи обґрунтованих методів ефективного її проведення. Можна сформулювати лише деякі рекомендації:

- спиратися на апріорну інформацію про змістовну (фізичну, економічну і т.п.) суть відновлюваної функції;
- проводити попередній аналіз геометричної структури вхідних даних, на яких базується шукана залежність (наявність асимптот, інтервалів монотонності, екстремумів, проміжків опуклості й угнутості, точок перегину і т.п.);
- застосовувати різні прийоми обробки вхідної інформації (згладжування, усереднення, відсів грубих помилок – викидів, лінійні та нелінійні перетворення);
- використовувати експертні оцінки спеціалістів відповідної

предметної області (економіки, фізики, техніки і т.д.).

Як правило, апроксимуюча функція  $y = F(x)$  будується у вигляді узагальненого полінома  $F(x) = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x)$ , де  $\{\varphi_i(x)\}$  – деяка фіксована система лінійно незалежних базисних функцій;  $a_0, a_1, \dots, a_m$  – невідомі коефіцієнти. Базисними системами  $\{\varphi_i(x)\}$  найчастіше служать:

– степеневі функції  $\varphi_i(x) = x^i$  (у цьому випадку  $F(x) = P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$  – алгебраїчний многочлен  $m$ -го степеня з шуканими параметрами  $a_0, a_1, \dots, a_m$ );

– тригонометричні функції  $\{\varphi_i(x)\} = \{\cos ix, \sin ix\}$  (тоді  $F(x) = a_0/2 + \sum_{i=1}^m (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$  – тригонометричний поліном з шуканими параметрами  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$ ).

Для параметризації апроксимуючої залежності  $y = F(x)$  використовують також дробово-раціональні, експоненціальні, логарифмічні та інші функції.

Для реалізації етапу параметричної ідентифікації розроблені досить ефективні процедури, що знайшли відображення у сучасних програмних пакетах символьних обчислень.

## 4.2. Інтерполяція многочленами

Для практики вельми важливим випадком є наближення функції  $f(x)$  інтерполяційним многочленом  $P_n(x)$ . Його застосовують не тільки тоді, коли значення функції  $f(x)$  відомі лише в окремих точках, але й тоді, коли  $f(x)$  відома в кожній точці деякого проміжку  $[a; b]$ , проте її аналітичний вираз настільки складний, що викликає значні труднощі при розв'язуванні конкретної задачі, де приймає участь ця функція. Тоді часто доцільно замінити  $f(x)$  її інтерполяційним многочленом  $P_n(x)$ , що співпадає з  $f(x)$  тільки на деякій системі точок  $x_k \in [a; b]$ ,  $k = \overline{0, n}$ , а в інших точках  $x \in [a; b]$  лише наближено дорівнює  $f(x)$ .

Нехай значення функції  $y = f(x)$  задані в  $n + 1$  різних точках  $x_k \in [a; b]$ , причому  $a = x_0, b = x_n$ , і  $y_k = f(x_k)$  ( $k = \overline{0, n}$ ).

Розглядається інтерполяційна задача: побудувати многочлен  $P_n(x)$  (степеня не вище за  $n$ ), значення якого в  $n + 1$  різних точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  співпадали би зі значеннями в них функції  $f(x)$ :

$$P_n(x_k) = y_k, \text{ де } y_k = f(x_k), \text{ } k = \overline{0, n}.$$

Геометричний зміст: знайти такий многочлен  $P_n(x)$ , графік якого проходить через задані точки  $M_0(x_0; y_0), M_1(x_1; y_1), \dots, M_n(x_n; y_n)$ , що лежать на графіку функції  $y = f(x)$  (рис. 12).

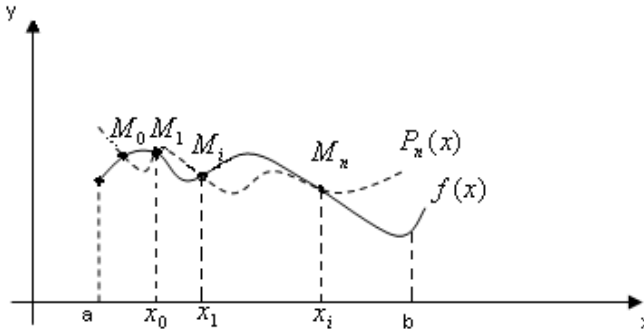


Рис. 12

Теоретичною базою можливості побудови многочлена  $P_n(x)$  при достатньо великій кількості  $n + 1$  вузлів інтерполяції (і відповідному порядку  $n$  многочлена) так, щоб точність наближення була як завгодно високою є

теорема Вейерштрасса. Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a; b]$ , то для будь-якого  $\epsilon > 0$  знайдеться поліном  $P_n(x)$  достатньо високого степеня  $n = n(\epsilon)$  такий, що

$$\max_{x \in [a; b]} |f(x) - P_n(x)| < \epsilon.$$

**Зауваження.** З цієї теореми випливає можливість рівномірного наближення функцій в класі многочленів. Проте навіть коли вдасться побудувати такий многочлен, то, як правило, настільки високого порядку, що його практичне застосування стає нереальним. Крім того, теорема не дає відповіді на питання про існування прийнятого інтерполяційного многочлена для заданої множини точок  $\{x_k; y_k\}_{k=0}^n$  і не вказує способи його побудови.

Якщо інтерполяційний многочлен подати в стандартному вигляді  $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , то невідомі коефіцієнти  $a_0, a_1, \dots, a_n$  можна знайти з системи рівнянь

$$a_0 + a_1x_k + \dots + a_nx_k^n = y_k; \quad k = \overline{0, n}.$$

Оскільки визначник цієї системи при  $x_k \neq x_l, k \neq l, k, l = \overline{0, n}$  відмінний від нуля, то вона має єдиний розв'язок. Знайшовши стандартними процедурами невідомі коефіцієнти  $a_0, a_1, \dots, a_n$  можна записати інтерполяційний поліном  $P_n(x)$ .

Але така побудова цього єдиного інтерполяційного многочлена  $P_n(x)$  при великому числі вузлів інтерполяції викликає значні труднощі, оскільки потрібно розв'язувати систему високого порядку. Далі розглянемо більш прості в практичній реалізації методи синтезу  $P_n(x)$ .

#### 4.2.1. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Відомо багато форм запису єдиного інтерполяційного многочлена  $P_n(x)$ . Розглянемо побудову так званого інтерполяційного полінома Лагранжа.

Нехай досліджувана функція  $f(x)$  задана на відрізку  $[a; b]$  своїми значеннями в  $n+1$  (у загальному випадку, нерівновіддалених) вузлах  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  і  $y_k = f(x_k), k = \overline{0, n}$ .

Наближену функцію  $y = F(x)$  відшукуємо у вигляді інтерполяційного многочлена  $F(x) = L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k P_{n,k}(x)$ , де  $P_{n,k}(x)$

– допоміжний поліном  $n$ -го степеня (*коефіцієнт Лагранжа*) такий, що

$$P_{n,k}(x_j) = \begin{cases} 0, & k \neq j; \\ 1, & k = j. \end{cases}$$

Оскільки точки  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  є коренями многочлена  $P_{n,k}(x)$ , то його можна записати у формі

$$P_{n,k}(x) = A_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n).$$

Прийmemo  $x = x_k$  і враховуючи, що  $P_{n,k}(x_k) = 1$ , дістанемо

$$1 = A_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n),$$

звідки  $A_k = 1/((x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n))$ .

Тоді коефіцієнт Лагранжа  $P_{n,k}(x)$  набуває вигляду

$$P_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)},$$

а інтерполяційний многочлен  $L_n(x)$  можна подати у формі:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)},$$

яку називають *інтерполяційним многочленом (формулою) Лагранжа*.

Коефіцієнти Лагранжа  $P_{n,k}(x)$  і відповідний інтерполяційний многочлен  $L_n(x)$  можна записати у стислому вигляді:

$$P_{n,k}(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = \overline{0, n}; \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Для  $n = 1$  формула Лагранжа має вигляд

$$L_1(x) = y_0(x - x_1)/(x_0 - x_1) + y_1(x - x_0)/(x_1 - x_0)$$

і називається *лінійною інтерполяцією* за Лагранжем.

Для  $n = 2$  отримаємо формулу **квадратичної інтерполяції** за Лагранжем:

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

**Приклад 1.** Для функції  $y = f(x)$ , що задана таблицею

$k$	0	1	2	3
$x_k$	0	0,5	1	2
$y_k$	1	2	3	4

побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа.

□ Степінь многочлена Лагранжа при  $n + 1$  вузлах дорівнює  $n$ . Для нашого прикладу  $n = 3$ , тобто многочлен Лагранжа має третій

порядок. Конкретизуємо формулу  $L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{j \neq k} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ :

$$L_3(x) = \frac{y_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{y_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{y_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Підставимо значення з таблиці в отриману формулу:

$$L_3(x) = \frac{1 \cdot (x-0,5)(x-1)(x-2)}{(0-0,5)(0-1)(0-2)} + \frac{2 \cdot (x-0)(x-1)(x-2)}{(0,5-0)(0,5-1)(0,5-2)} + \frac{3 \cdot (x-0)(x-0,5)(x-2)}{(1-0)(1-0,5)(1-2)} + \frac{4 \cdot (x-0)(x-0,5)(x-1)}{(2-0)(2-0,5)(2-1)} = (31/3)x^3 - (63/2)x^2 + (139/6)x + 1. \blacksquare$$

Коли інтерполяційний многочлен Лагранжа  $L_n(x)$  будують для відомої функції  $f(x)$ , то можна визначити відхилення

$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$  – *залишковий член (похибку) інтерполявання*. Якщо функція  $f(x)$   $(n + 1)$  разів диференційовна на відрізку  $[a; b]$  і  $x, x_0, \dots, x_n \in [a; b]$ , то

$$R_n(x) = \left( f^{(n+1)}(c) / (n+1)! \right) \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

де  $c = c(x)$  – деяка невідома точка з інтервалу  $(a; b)$ .

Тоді абсолютна похибка  $\Delta_y$  має таку оцінку:

$$\Delta_y = |R_n(x)| \leq (M_{n+1} / (n+1)!) \cdot |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|,$$

де  $M_{n+1} = \max_{x \in [a; b]} |f^{(n+1)}(x)|$ .

Зауваження. Аналіз одержаної оцінки показує, що абсолютна похибка інтерполяції в середньому буде тим більша, чим ближче лежить точка  $x$  до лівого чи правого кінця відрізка  $[a; b]$ . Якщо ж використовувати інтерполяційний поліном для наближеного знаходження значення функції поза відрізком  $[a; b]$  (для екстраполяції), то похибка зростає дуже суттєво.

Приклад 2. З якою точністю можна обчислити  $\sqrt{114}$  за допомогою многочлена Лагранжа для функції  $f(x) = \sqrt{x}$ , вибравши за вузли інтерполяції  $a = x_0 = 100$ ,  $x_1 = 121$ ,  $b = x_2 = 144$ ?

□ Знайдемо першу, другу і третю похідні функції  $f(x)$ :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}; \quad f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}.$$

$$\text{Тоді } M_3 = \max_{x \in [100; 144]} |f'''(x)| = \frac{3}{8\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-5}.$$

Для абсолютної похибки  $\Delta_y$  інтерполявання дістаємо оцінку:

$$\Delta_y = |R_2(x)| \leq (M_3 / 3!) \cdot |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| = (3/8) \cdot 10^{-5} \times \\ \times (1/6) |114 - 100)(114 - 121)(114 - 144)| \approx 1,8 \cdot 10^{-3}. \blacksquare$$



#### 4.2.2. Інтерполяційний многочлен Ньютона для нерівновіддалених вузлів

У практичних розрахунках іноді зручніше використовувати інтерполяційні многочлени Ньютона, степені яких можна послідовно змінювати (шляхом задавання нових вузлів  $M_{n+1}(x_{n+1}; y_{n+1})$ ,  $M_{n+2}(x_{n+2}; y_{n+2})$  і т.д. чи відкидання наявних). На відміну від полінома Лагранжа, де при появі додаткових вузлів треба заново знаходити всі коефіцієнти, у многочлені Ньютона просто з'являються нові доданки, а старі залишаються попередніми. Таким чином, формула Ньютона дозволяє легко зменшувати чи збільшувати число вузлів, що використовуються для інтерполяції, без повторення всіх обчислень.

Нехай на відрізку  $[a; b]$  задано одновимірну сітку (з нерівномірним, у загальному випадку, кроком  $h_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ), у всіх вузлах  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  якої відомі значення  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  вхідної функції  $y = f(x)$ . На сітці визначимо **розділені різниці  $m$ -го порядку** ( $m = \overline{1, n}$ ) за допомогою наступних рекурентних співвідношень:

$$m = 1: f(x_k; x_{k+1}) = (f(x_{k+1}) - f(x_k)) / (x_{k+1} - x_k), \quad k = \overline{0, n-1};$$

$$m = \overline{2, n}: f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+m}) = (f(x_{k+1}; x_{k+2}; \dots; x_{k+m}) - f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+m-1})) / (x_{k+m} - x_k), \quad k = \overline{0, n-m}.$$

Зауваження 1.  $f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+m})$  – розділена різниця  $m$ -го порядку у точці  $x_k$  – дає наближене значення відповідно для  $m$ -ї похідної функції  $f(x)$  у цій точці.

Для  $m = 1$  маємо

$$f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} + \frac{f(x_{k+1})}{x_{k+1} - x_k} = f(x_{k+1}; x_k),$$

тобто розділена різниця першого порядку є симетричною функцією двох своїх аргументів  $x_k$  і  $x_{k+1}$ .

Застосовуючи метод математичної індукції, можна довести відповідну властивість для розділеної різниці довільного  $m$ -го порядку, зокрема,

*розділену різницю  $k$ -го порядку ( $k = \overline{1, n}$ ) в точці  $x_0$  можна виразити через значення функції у  $k + 1$  вузлах інтерполяції у вигляді наступної симетричної функції своїх аргументів:*

$$f(x_0; x_1; \dots; x_k) = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_k)}.$$

Далі розглянемо многочлен Лагранжа, який подамо у вигляді

$$N_n(x) = L_n(x) = L_0 + (L_1 - L_0) + (L_2 - L_1) + \dots + (L_n - L_{n-1}).$$

Різниця  $L_k - L_{k-1}$  обертається в нуль у точках  $x_0; x_1; \dots; x_{k-1}$ . Тому  $L_k - L_{k-1} = A_k(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$ , де константу  $A_k$  можна знайти, поклавши  $x = x_k$ . Тоді  $L_k = f(x_k)$  і дістанемо  $f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A_k(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})$ . Звідси, враховуючи формулу інтерполяційного многочлена Лагранжа і одержаний вище вираз для розділеної різниці, маємо  $A_k = f(x_0; x_1; \dots; x_k)$ .

Тоді

$$L_k - L_{k-1} = f(x_0; x_1; \dots; x_k)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}), \quad k = \overline{1, n}.$$

Підставимо отриманий результат у останній вираз для  $L_n(x)$  і дістанемо **інтерполяційний многочлен (формулу) Ньютона для нерівновіддалених вузлів:**

$$\boxed{N_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f(x_0; x_1; \dots; x_n)}.$$

**Зауваження 2.** Похибка даної формули така ж, як і для полінома Лагранжа.

**Зауваження 3.** Ті з вузлів, які лежать ближче до точки інтерлювання  $x$ , мають більший вплив на інтерполяційний многочлен, ніж вузли, що розміщені далеко. Тому доцільно за  $x_0$  і  $x_1$  обрати найближчі до  $x$  вузли, розташовані по різні боки від  $x$ , і провести спочатку інтерполяцію за цими вузлами, а потім поступово залуча-

ти наступні найменш віддалені вузли таким чином, щоб вони розташовувались найбільш симетрично відносно точки  $x$ .

Приклад. Для функції  $y = f(x)$ , що задана на нерівномірній сітці з  $n + 1$  вузлами, де  $n = 3$ , наступною таблицею

$k$	0	1	2	3
$x_k$	-1	-0,5	1	2
$y_k$	1,5	-2	-3,5	1

побудувати інтерполяційний многочлен Ньютона  $N_n(x)$ . Обчислити наближене значення  $\bar{y} = N_n(x)$  функції у точці  $x = 0,5$ .

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Для розділених різниць складемо таблицю вигляду:

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f(x_k; x_{k+1})$	$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2})$	$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}; x_{k+3})$
0	$x_0$	$f(x_0)$	$f(x_0; x_1)$	$f(x_0; x_1; x_2)$	$f(x_0; x_1; x_2; x_3)$
1	$x_1$	$f(x_1)$	$f(x_1; x_2)$	$f(x_1; x_2; x_3)$	—
2	$x_2$	$f(x_2)$	$f(x_2; x_3)$	—	—
3	$x_3$	$f(x_3)$	—	—	—

Дістанемо:

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f(x_k; x_{k+1})$	$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2})$	$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}; x_{k+3})$
0	-1	1,5	-7	3	-0,2667
1	-0,5	-2	-1	2,2	—
2	1	-3,5	4,5	—	—
3	2	1	—	—	—

Конкретизуємо інтерполяційний поліном Ньютона

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) f(x_0; x_1; \dots; x_k)$$

$$\text{для } n = 3: N_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1) \times \\ \times f(x_0; x_1; x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_0; x_1; x_2; x_3).$$

Підставимо значення з таблиці в отриману формулу:

$$N_3(x) = 1,5 + (x + 1)(-7) + (x + 1)(x + 0,5) \cdot 3 + (x + 1)(x + 0,5) \times \\ \times (x - 1)(-0,2667) = -0,2667x^3 + 2,8667x^2 + 4,7667x - 4,1333.$$

Обчислимо наближене значення функції у точці  $x = 0,5$ :

$$\bar{y} = N_3(0,5) = -0,2667 \cdot 0,5^3 + 2,8667 \cdot 0,5^2 + \\ + 4,7667 \cdot 0,5 - 4,1333 = -1,0665. \quad \blacksquare$$

### 4.2.3. Інтерполяційний многочлен Ньютона для рівновіддалених вузлів

Нехай вузли інтерполювання  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  визначені на відрізьку  $[a; b]$  рівномірно зі сталим кроком  $h = x_k - x_{k-1} = \text{const} > 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Тоді можна записати, що  $x_k = x_0 + kh$ ,  $k = \overline{1, n}$ . У всіх вузлах  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  сітки відомі значення  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  відноної функції  $y = f(x)$ .

Введемо поняття скінченних різниць.

**Скінченною різницею першого порядку** функції  $y = f(x)$  у точці  $x_k$  (з кроком  $h$ ) називають величину

$$\Delta f(x_k) = f(x_k + h) - f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k).$$

**Скінченну різницю другого порядку** функції  $y = f(x)$  у точці  $x_k$  визначають зі співвідношення

$$\Delta^2 f(x_k) = \Delta(\Delta f(x_k)) = \Delta f(x_{k+1}) - \Delta f(x_k) = \\ = f(x_{k+2}) - 2f(x_{k+1}) + f(x_k).$$

У загальному випадку **скінченна різниця  $m$ -го порядку** у точці  $x_k$  визначається за рекурентною формулою:

$$\Delta^m f(x_k) = \Delta(\Delta^{m-1} f(x_k)) = \Delta^{m-1} f(x_{k+1}) - \Delta^{m-1} f(x_k).$$

**Зауваження 1.** Розділена і скінченна різниці  $m$ -го порядку у точці  $x_k$  зв'язані залежністю

$$f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+m}) = \Delta^m f(x_0) / (m! h^m).$$

Для інтерполювання функції в околі точки  $x_0$  введемо безрозмірну змінну  $q = (x - x_0) / h$ , звідки  $x = x_0 + qh$ , і, використовуючи формулу  $f(x_0; x_1; \dots; x_k) = \Delta^k f(x_0) / (k! h^k)$ , перетворимо інтерполяційний поліном Ньютона для нерівновіддалених вузлів до форми

$$N_n(x) = f(x_0) + \frac{q}{1!} \Delta f(x_0) + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} \Delta^n f(x_0),$$

яка називається **інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполяції вперед**.

Звідси маємо формули **лінійної** (для  $n = 1$ ) та **квадратичної** (для  $n = 2$ ) **інтерполяції** за Ньютоном, відповідно

$$N_1(x) = f(x_0) + q \Delta f(x_0);$$

$$N_2(x) = f(x_0) + q \Delta f(x_0) + (q(q-1)/2) \Delta^2 f(x_0).$$

Для інтерполювання функції в околі точки  $x_n$  введемо безрозмірну змінну  $q = (x - x_n) / h$ , звідки  $x = x_n + qh$ . За допомогою аналогічних перетворень інтерполяційного полінома Ньютона для нерівновіддалених вузлів, записаного у вигляді

$$N_n(x) = f(x_n) + (x - x_n) f(x_{n-1}; x_n) + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \times \\ \times f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) + (x - x_n) \dots (x - x_1) f(x_0; x_1; \dots; x_n),$$

дістанемо **інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполяції назад**:

$$N_n(x) = f(x_n) + \frac{q}{1!} \Delta f(x_{n-1}) + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 f(x_{n-2}) + \dots$$

$$\boxed{+ \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!} \Delta^n f(x_0) .}$$

Похибку формули Ньютона для інтерполяції вперед і назад оцінюють за співвідношеннями, відповідно:

$$|R_n(x)| \leq (M_{n+1}/(n+1)!)h^{n+1}|q(q-1)(q-2)\dots(q-n)|;$$

$$|R_n(x)| \leq (M_{n+1}/(n+1)!)h^{n+1}|q(q+1)(q+2)\dots(q+n)|.$$

$$\text{Тут } M_{n+1} = \max_{x \in [a;b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Оскільки аналітичний вираз функції  $y = f(x)$ , як правило, невідомий, то вважаючи, що  $\Delta^{n+1} f(x)$  майже сталі, а  $h$  достатньо мале, можна припустити, що  $f^{(n+1)}(x) \approx (\Delta^{n+1} f(x_0))/h^{n+1}$  і  $f^{(n+1)}(x) \approx (\Delta^{n+1} f(x_n))/h^{n+1}$ . Тоді похибки многочленів Ньютона для інтерполяції вперед і назад, відповідно, будуть

$$|R_n(x)| \leq \frac{|q(q-1)(q-2)\dots(q-n)|}{(n+1)!} |\Delta^{n+1} f(x_0)|;$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{|q(q+1)(q+2)\dots(q+n)|}{(n+1)!} |\Delta^{n+1} f(x_n)|.$$

Зауваження 2. Інтерполяцію вперед краще використовувати для інтерполяції ближче до лівого кінця відрізка  $[a;b]$  і для екстраполяції лівіше точки  $x = a$ , а інтерполяцію назад – для інтерполяції ближче до правого кінця відрізка  $[a;b]$  і для екстраполяції правіше точки  $x = b$ .

Приклад 1. Функцію  $y = f(x) = e^{2x}$  задано таблицею значень

$k$	0	1	2	3
$x_k$	1,803	1,808	1,813	1,818
$f(x_k)$	36,81839	37,18843	37,56218	37,93968

Обчислити наближене значення  $\bar{y}$  функції у точці  $\bar{x} = 1,805$  за формулою квадратичної інтерполяції  $\bar{y} = N_2(\bar{x})$  і оцінити похибку.

Вказівка. Похибки заокруглення не враховувати. Обчислення здійснювати з точністю до п'яти десяткових знаків після коми.

□ Оскільки точка  $\bar{x} = 1,805$  розміщена ближче до лівого кінця відрізка інтерполяції, то знаходимо  $\bar{q} = (\bar{x} - x_0)/h = 0,4$  і застосуємо формулу квадратичної інтерполяції вперед, використовуючи розміщені по різні боки від цієї точки найближчі три вузла  $x_0$ ,  $x_1$  і  $x_2$  (вузол  $x_3$  участі не приймає):

$$N_2(x) = f(x_0) + q\Delta f(x_0) + (q(q-1)/2) \Delta^2 f(x_0).$$

Обчислимо необхідні скінченні різниці до другого порядку включно при  $h = 0,005$  та запишемо їх у таблицю:

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$\Delta f(x_k)$	$\Delta^2 f(x_k)$
0	1,803	36,81839	0,37004	0,00371
1	1,808	37,18843	0,37375	–
2	1,813	37,56218	–	–

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \bar{y} = N_2(\bar{x}) &= 36,81839 + 0,4 \cdot 0,37004 + \\ &+ (0,4 \cdot (0,4 - 1)/2) \cdot 0,00371 = 36,96596. \end{aligned}$$

Похибка має вигляд  $\Delta_y = |R_2(x)| \leq (M_3/3!)h^3|q(q-1)(q-2)|$ , де  $M_3 = \max_{x \in [1,803; 1,813]} |f'''(x)| = 8e^{3,626}$ . Отже, отримаємо

$$\Delta_y \leq (8e^{3,636}/3!)(0,005)^3 \cdot |0,4 \cdot (0,4 - 1)(0,4 - 2)| \approx 0,3 \cdot 10^{-5}.$$

Значить, у відповіді  $\bar{y} = 36,96596$  всі цифри є вірними. ■

Приклад 2. На відрізку  $[-2; 2]$  задана функція  $y = f(x)$  набом точок  $M_0(-2; -3)$ ,  $M_1(-1; 0)$ ,  $M_2(0; 3)$ ,  $M_3(1; 1)$ , що належать її графіку. Користуючись інтерполяційним поліномом Ньютона третього порядку для інтерполяції назад, знайти наближене значення  $\bar{y} = N_3(\bar{x})$  функції в точці  $\bar{x} = 0,5$ .

□ (Розв'язати самостійно). Відповідь:  $\bar{y} = 2,9375$ . ■

### 4.3. Інтерполяція поліноміальними сплайнами

Якщо вхідна функція має особливості в деяких точках інтервалу інтерполяції, то вона погано наблизатиметься поліномом на всьому цьому проміжку. При роботі з многочленами в процесі обчислень швидко накопичуються похибки заокруглення, що стають значними вже при  $n > 20$ . Крім того, графіки поліномів високих степенів, як правило, мають осциляції.

Для подолання вказаних недоліків можна використовувати кусково апроксимуючі функції, сформовані з локальних многочленів. При цьому необхідно ставити вимоги достатньої гладкості спряження графіків цих поліномів: щоб у кожній точці з'єднання сусідніх ділянок многочлени, які належать лівій та правій ділянкам, і похідні від них до певного порядку співпадали.

Цю задачу розв'язують так звані **поліноміальні сплайни**. Термін **сплайн** походить від англійського *spline* (планка), що означає пружну гнучку лінійку, призначену для проведення гладкої кривої через задані точки.

Сплайн-інтерполяція відрізняється від поліноміальної кращою збіжністю та обчислювальною стійкістю.

Нехай на відрізьку  $[a; b]$  введено одновимірну сітку

$$\omega_n = \{x_k : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}.$$

Функцію  $S_{l,m}(x)$  називають **поліноміальним сплайном степеня  $l$  дефекту гладкості  $m$**  ( $0 \leq m \leq l$ ) на  $[a; b]$ , якщо виконуються умови:

1) функція  $S_{l,m}(x)$  має на  $[a; b]$  неперервні похідні до порядку  $l - m$  включно;

2) На кожному елементарному відрізьку  $[x_{k-1}; x_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$  функція  $S_{l,m}(x)$  є многочленом степеня не вище  $l$ .

Сплайн  $S_{l,m}(x)$  можна розглядати як скінченну сукупність гладко (до похідних  $(l - m)$ -го порядку) склеєних у вузлах  $x_k$ ,

$k = \overline{1, n-1}$  поліномів  $l$ -го степеня  $P_k(x) = \sum_{i=0}^l a_{ki}(x - x_{k-1})^i$ :



$$S_{l,m}(x) = \sum_{k=1}^n P_{lk}(x) (\eta(x - x_{k-1}) - \eta(x - x_k)),$$

де  $a_{ki}$  – сталі коефіцієнти ( $k = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{0, l}$ );  $\eta(t)$  – одинична функція, що визначається формулою  $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Точки  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  називаються **вузлами** сплайна  $S_{l,m}(x)$ , внутрішні з яких  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  служать його **вузлами спряження**, де виконуються умови гладкості:

$$S_{l,m}^{(i)}(x_k - 0) = S_{l,m}^{(i)}(x_k + 0); \quad i = \overline{0, l-m}; \quad k = \overline{1, n-1},$$

тобто  $P_{lk}^{(i)}(x_k) = P_{l(k+1)}^{(i)}(x_k); \quad i = \overline{0, l-m}; \quad k = \overline{1, n-1}.$

**Зауваження 1.** У крайніх вузлах  $x_0$  і  $x_n$  звичайно задаються деякі додаткові умови. Наприклад, **природні крайові (граничні) умови:**  $S_{l,m}^{(l-m)}(x_0) = 0$  і  $S_{l,m}^{(l-m)}(x_n) = 0$ , тобто  $P_{l1}^{(l-m)}(x_0) = 0$  і  $P_{ln}^{(l-m)}(x_n) = 0$ .

**Зауваження 2.** Якщо сплайн використовують для екстраполяції, то покладають:

$$S_{l,m}(x) = P_{l1}(x), \quad x \in (-\infty, x_0) \quad \text{і} \quad S_{l,m}(x) = P_{ln}(x), \quad x \in (x_n, +\infty).$$

**Зауваження 3.** Вибір порядку сплайна, кількості та розміщення вузлів відповідає задачі вибору класу апроксимуючих функцій і для її розв'язування, на жаль, немає точних процедур для всіх можливих випадків. Рекомендується:

- використовувати сплайни невисокого степеня;
- вводити настільки мало вузлів, наскільки це можливо;
- на кожному елементарному проміжку мати не більше однієї точки екстремуму, що лежить поблизу його середини;
- точки перегину повинні знаходитися в околі вузлів.

**Зауваження 4.** На практиці найчастіше застосовуються поліноміальні сплайни невисокого непарного степеня дефекту один. Надалі обмежимося тільки такими сплайнами і термін “дефект” будемо опускати.



Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Побудуємо лінійний інтерполяційний сплайн  $S_1(x)$ . Для цього розіб'ємо відрізок інтерполяції  $[-2;4]$  на  $n = 3$  елементарні відрізки, які визначаються сусідніми числами другого рядка таблиці, і на кожному з них введемо многочлен першого порядку, тобто замінимо частинну дугу кривої  $y = f(x)$  відрізком прямої. Тоді

$$S_1(x) = \begin{cases} P_{11}(x), & x \in [-2;0]; \\ P_{12}(x), & x \in [0;2]; \\ P_{13}(x), & x \in [2;4], \end{cases}$$

де

$$P_{11}(x) = \frac{x - (-2)}{0 - (-2)}(1 - 2,5) + 2,5 = \frac{-3x}{4} + 1 = -0,75x + 1;$$

$$P_{12}(x) = \frac{x - 0}{2 - 0}(3,5 - 1) + 1 = 1,25x + 1;$$

$$P_{13}(x) = \frac{x - 2}{4 - 2}(-2 - 3,5) + 3,5 = -2,75x + 9.$$

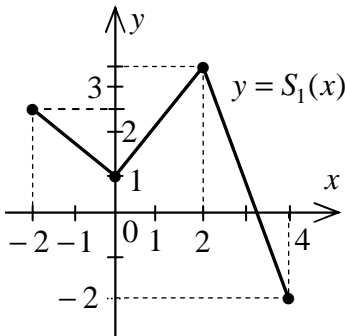


Рис. 13

На рис. 13 зображено графік шуканого лінійного сплайну

$$S_1(x) = \begin{cases} -0,75x + 1, & x \in [-2;0]; \\ 1,25x + 1, & x \in [0;2]; \\ -2,75x + 9, & x \in [2;4]. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. Недоліком лінійного сплайну є різка зміна характеру монотонності у вузлах. Для його подолання можна побудувати квадратичний сплайн  $S_2(x)$ , проте  $S_2(x)$  не

забезпечує плавності зміни кривини у вузлах. (Тому сплайн  $S_2(x)$  не розглядаємо).

Приклад 2. На відрізку  $[-4; 2]$  задана функція  $y = f(x)$  набором точок  $M_0(-4; 2,5)$ ,  $M_1(-2; -1)$ ,  $M_2(0; 1,5)$ ,  $M_3(2; -1)$ , що належать її графіку. Інтерполювати цю функцію лінійним сплайном  $y = S_1(x)$ . Користуючись одержаним сплайном, знайти наближене значення  $\bar{y} = S_1(x)$  функції в точці  $x = -1,5$ .

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ (Розв'язати самостійно). ■

### 4.3.2. Кубічний інтерполяційний сплайн

Якщо на кожному з елементарних відрізків  $[x_{k-1}, x_k]$   $k = \overline{1, n}$  між сусідніми вузлами інтерполяції наближено замінити функцію  $y = f(x)$  многочленом третього порядку

$$P_{3k}(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3 = \\ = a_k + b_k q_k + c_k q_k^2 + d_k q_k^3, \quad q_k = x - x_{k-1},$$

то дістанемо інтерполяцію функції  $f(x)$  **кубічним сплайном**

$$S_3(x) = \sum_{k=1}^n P_{3k}(x) (\eta(x - x_{k-1}) - \eta(x - x_k))$$

з вузлами  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , що співпадають з відповідними вузлами інтерполяції.

Для сплайну  $S_3(x)$  у вузлах спряження  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  виконуються умови гладкості:

$$P_{3k}(x_k) = P_{3(k+1)}(x_k); \quad P'_{3k}(x_k) = P'_{3(k+1)}(x_k); \\ P''_{3k}(x_k) = P''_{3(k+1)}(x_k),$$

а на кінцях відрізка інтерполяції – однорідні граничні умови:

$$P''_{31}(x_0) = 0; \quad P''_{3n}(x_n) = 0.$$

Розглянемо процедуру знаходження коефіцієнтів  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  і  $d_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

З умов інтерполяції  $S_3(x_k) = y_k$  та неперервності сплайну  $P_{3k}(x_k) = P_{3(k+1)}(x_k)$  маємо

$$P_{3k}(x_{k-1}) = a_k = y_{k-1}; \quad P_{3k}(x_k) = a_k + b_k q_k + c_k q_k^2 + d_k q_k^3 = y_k.$$

Знайдемо похідні

$$P'_{3k}(x) = b_k + 2c_k q_k + 3d_k q_k^2; \quad P''_{3k}(x) = 2c_k + 6d_k q_k.$$

З умови неперервності похідних  $S'_3(x)$  і  $S''_3(x)$  маємо

$$b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = b_{k+1}; \quad 2c_k + 6d_k h_k = 2c_{k+1}, \quad h_k = x_k - x_{k-1}.$$

З граничних умов одержуємо  $2c_1 = 0$  і  $2c_n + 6d_n h_n = 0$ .

Таким чином,  $\boxed{a_k = y_{k-1}, k = \overline{1, n}}$ , а для обчислення інших  $3n$  коефіцієнтів  $b_k$ ,  $c_k$  і  $d_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  маємо систему з  $3n$  лінійних рівнянь. Методом вилучення задача зводиться до знаходження  $b_k$  і  $d_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  за рекурентними співвідношеннями:

$$\boxed{b_k = (y_k - y_{k-1})/h_k - h_k (c_{k+1} + 2c_k)/3, \quad k = \overline{1, n-1};}$$

$$\boxed{b_n = (y_n - y_{n-1})/h_n - 2h_n c_n/3};$$

$$\boxed{d_k = (c_{k+1} - c_k)/(3h_k), \quad k = \overline{1, n-1}; \quad d_n = -c_n/(3h_n)}$$

після попереднього розв'язання наступного *різницевого рівняння* для  $c_k$ :

$$\boxed{h_k c_k + 2(h_k + h_{k+1})c_{k+1} + h_{k+1}c_{k+2} = 3((y_{k+1} - y_k)/h_{k+1} - (y_k - y_{k-1})/h_k), \quad k = \overline{1, n-1}}$$

з *різницеви*ми *крайовими умовами*

$$\boxed{c_1 = 0; \quad c_{n+1} = 0},$$

де друга рівність  $c_{n+1} = 0$  еквівалентна системі, що включає умову  $c_n + 3d_n h_n = 0$  і рівняння  $c_{k+1} = c_k + 3d_k h_k$  при  $k = n$ .

Сформульованій *різницевій крайовій задачі* для  $c_k$  відповідає

лінійна система з трьохдіагональною матрицею (ненульовими в ній є тільки елементи головної і двох найближчих сусідніх діагоналей). Такі системи економно розв'язуються **методом прогонки** – модифікацією методу Гауса, що враховує особливості їх структури.

Приклад. Функцію  $y = f(x)$ , що задана на відрізку  $[-2;4]$  таблицею

$k$	0	1	2	3
$x_k$	-2	0	2	4
$y_k = f(x_k)$	2,5	1	3,5	-2

інтерполювати кубічним сплайном  $y = S_3(x)$ . Обчислити значення отриманого кубічного сплайна  $y = S_3(x)$  на відрізку  $[-3;4]$  з кроком  $h_d = 0,5$  (тобто, застосувати інтерполяцію на відрізку  $[-2;4]$  та екстраполяцію за його межами), скласти відповідну таблицю і побудувати графік  $y = S_3(x)$ ,  $x \in [-3;4]$ .

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Вузли інтерполяції  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $n = 3$  розміщені на відрізку  $[a; b] = [-2; 4]$  з рівномірним кроком  $h = (b - a) / n = (4 + 2) / 3 = 2$ . Для інтерполяційного кубічного сплайну

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{31}(x), & x \in [-2; 0]; \\ P_{32}(x), & x \in [0; 2]; \\ P_{33}(x), & x \in [2; 4], \end{cases}$$

де

$$P_{3k}(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3, \quad k = \overline{1, 3},$$

одержуємо наступні розрахункові формули для коефіцієнтів:

$$a_k = y_{k-1}, \quad k = \overline{1, 3}; \quad b_1 = (y_3 - 6y_2 + 24y_1 - 19y_0) / (15h);$$

$$b_2 = (-2y_3 + 12y_2 - 3y_1 - 7y_0) / (15h);$$

$$b_3 = (7y_3 + 3y_2 - 12y_1 + 2y_0) / (15h);$$

$$c_1 = 0; \quad c_2 = (-y_3 + 6y_2 - 9y_1 + 4y_0)/(5h^2);$$

$$c_3 = (4y_3 - 9y_2 + 6y_1 - y_0)/(5h^2);$$

$$d_1 = c_2/(3h); \quad d_2 = (c_3 - c_2)/(3h); \quad d_3 = -c_3/(3h).$$

Обчислимо значення коефіцієнтів:

$$a_1 = y_0 = 2,5; \quad a_2 = y_1 = 1; \quad a_3 = y_2 = 3,5;$$

$$b_1 = (-2 - 6 \cdot 3,5 + 24 \cdot 1 - 19 \cdot 2,5)/(15 \cdot 2) = -1,55;$$

$$b_2 = (-2 \cdot (-2) + 12 \cdot 3,5 - 3 \cdot 1 - 7 \cdot 2,5)/(15 \cdot 2) = 0,85;$$

$$b_3 = (7 \cdot (-2) + 3 \cdot 3,5 - 12 \cdot 1 + 2 \cdot 2,5)/(15 \cdot 2) = -0,35;$$

$$c_1 = 0; \quad c_2 = (-(-2) + 6 \cdot 3,5 - 9 \cdot 1 + 4 \cdot 2,5)/(5 \cdot 2^2) = 1,2;$$

$$c_3 = (4 \cdot (-2) - 9 \cdot 3,5 + 6 \cdot 1 - 2,5)/(5 \cdot 2^2) = -1,8;$$

$$d_1 = 1,2/(3 \cdot 2) = 0,2; \quad d_2 = (-1,8 - 1,2)/(3 \cdot 2) = -0,5;$$

$$d_3 = -(-1,8)/(3 \cdot 2) = 0,3.$$

Отже, кубічний сплайн  $S_3(x)$  для функції  $f(x)$  має вигляд:

$$S_3(x) = \begin{cases} 2,5 - 1,55 \cdot (x+2) + 0,2 \cdot (x+2)^3, & x \in [-2;0]; \\ 1 + 0,85 \cdot x + 1,2 \cdot x^2 - 0,5 \cdot x^3, & x \in [0;2]; \\ 3,5 - 0,35 \cdot (x-2) - 1,8 \cdot (x-2)^2 + 0,3 \cdot (x-2)^3, & x \in [2;4]. \end{cases}$$

Обчислимо таблицю значень  $y = S_3(x)$ :

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_k$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
$S_3(x)$	3,85	3,25	2,5	1,75	1,15	0,85	1	1,6625

$k$	8	9	10	11	12	13	14
$x_k$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$S_3(x)$	2,55	3,2875	3,5	2,9125	1,65	-0,0625	-2

Графік кубічного сплайну  $y = S_3(x)$  на відрізку  $[-3;4]$  зображено на рис. 14. ■

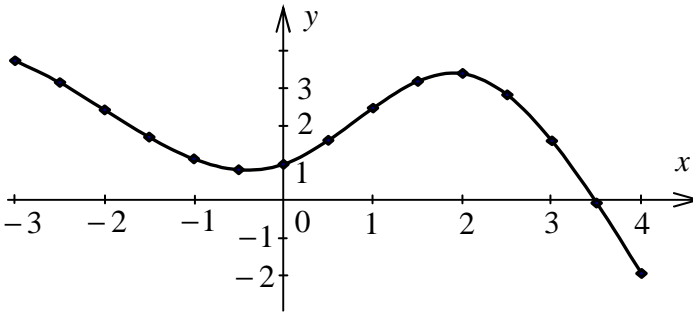


Рис. 14

**Зауваження.** Кубічні сплайни мають дуже важливу властивість, яка обумовлює високу ефективність сплайн-інтерполяції: *серед усіх інтерполяційних функцій  $y = F(x)$ , які неперервні до другої похідної включно на відрізку  $[a;b]$ , саме кубічний сплайн  $y = S_3(x)$  з однорідними крайовими умовами  $S_3''(a) = S_3''(b) = 0$  мінімізує функціонал гладкості  $J(F) = \int_a^b (F''(x))^2 dx$ , тобто кубічний сплайн характеризується найменшою (в смислі вказаного функціоналу) кривиною.*

#### 4.4. Апроксимація за методом найменших квадратів

Наближення за методом найменших квадратів часто застосовують для згладжування табличних функцій, отриманих у результаті експерименту, а також для зменшення обсягу інформації про табличні функції при невисоких вимогах до точності подання їх значень.

Застосування інтерполяції в цьому випадку невиправдане, оскільки значення вхідної функції у вузлах  $y_k = f(x_k)$  є неточними. Інтерполяційна формула повторить всі похибки в експериментальних даних. Крім того, збіг значень у вузлах не гарантує близь-



кості характерів поведінки вхідної  $y = f(x)$  та апроксимуючої  $y = F(x)$  функцій.

**Зауваження 1.** Грубі похибки, що явно спотворюють експериментальні дані, звичайно зникають при повторенні дослідів. Їх відкидають і далі не враховують. Систематичні похибки звичайно дають відхилення в один бік від справжнього значення. Їх можна усунути налагодженням вимірювальної апаратури чи введенням відповідних поправок. Випадкові похибки можуть бути зменшені до як завгодно малої величини багатократним повторенням експериментів. Проте це не завжди доцільно, бо може вимагати великих затрат.

Нехай вхідна функція  $y = f(x)$  задана таблицею значень  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_1 = f(x_1)$ , ...,  $y_n = f(x_n)$  для скінченної множини точок  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Припускаємо, що значення функції  $y_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  відомі з похибками.

Розглянемо застосування методу найменших квадратів у поширеному на практиці випадку лінійної за невідомими параметрами апроксимуючої функції  $y = F(x)$ . Нехай наближена функція подана у вигляді узагальненого многочлена  $F(x) = \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x)$ , де  $\{\varphi_i(x)\}$  – деяка фіксована система лінійно незалежних базисних функцій;  $a_0, a_1, \dots, a_m$  – невідомі коефіцієнти.

Згідно з МНК оптимальні значення коефіцієнтів  $a_0, a_1, \dots, a_m$  визначимо з умови, щоб сума квадратів відхилень (нев'язок)  $\rho_2(a_0, a_1, \dots, a_m)$  значень  $F(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  наближеної функції від відповідних значень  $f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  вхідної функції – була мінімальною:

$$\begin{aligned} \rho_2(a_0, a_1, \dots, a_m) &= \sum_{k=0}^n (f(x_k) - F(x_k))^2 = \\ &= \sum_{k=0}^n \left( f(x_k) - \sum_{i=0}^m a_i \varphi_i(x_k) \right)^2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

У випадку лінійно параметризованої моделі  $y = F(x)$  сума  $\rho_2(a_0, a_1, \dots, a_m)$  є квадратичною функцією відносно шуканих коефіцієнтів, що має єдиний екстремум – мінімум. Оскільки в точці



люються за формулами:

$$a_{ij} = \sum_{k=0}^n x_k^{i+j} \quad (i, j = \overline{0, m}); \quad b_i = \sum_{k=0}^n x_k^i f(x_k). \quad (i = \overline{0, m}).$$

Після визначення коефіцієнтів і правих частин лінійну систему  $AX = B$  можна розв'язати будь-яким з відомих методів, наприклад методом Гауса.

Зауваження 3. Якщо  $F(x) = P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$  – алгебраїчний многочлен  $m$ -го степеня, то при  $m = n$ , як окремий випадок, маємо інтерполяцію за  $n + 1$  вузлами  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ . На практиці для одержання стійкого ефекту згладжування наближену функцію  $F(x)$  вибирають так, що  $m \ll n$  (звичайно,  $m \sim n/3 \div n/2$ ).

Зауваження 4. Коли клас вхідної функції невідомий, то вигляд апроксимуючої функції може бути довільним. Перевага віддається найпростішим лінійно параметризованим моделям, що забезпечують достатню точність. Наближені функції, що нелінійно залежать від шуканих коефіцієнтів, застосовуються значно рідше, оскільки їх параметрична ідентифікація досить складна і вимагає значних зусиль.

Далі розглянемо найбільш поширені випадки поліноміальної апроксимації за МНК за допомогою многочленів до третього порядку включно та кубічного сплайну.

#### 4.4.1. Лінійна апроксимація

Найпростішою (при  $m = 1$ ) є залежність  $F(x) = a_0 + a_1x$  – **лінійна регресія**. Близькість експериментального розподілу точок  $M_0(x_0; y_0)$ ,  $M_1(x_1; y_1)$ , ...,  $M_n(x_n; y_n)$  до **лінії регресії** – прямої  $y = a_0 + a_1x$  легко проглядається після їх побудови в одній прямокутній системі координат.

Зауваження. У ряді випадків до лінійної регресії можна звести інші залежності за допомогою заміни змінних  $u = u(x, y)$  і  $v = v(x, y)$ , у результаті якої експериментальні точки  $M_0(u_0; v_0)$ ,  $M_1(u_1; v_1)$ , ...,  $M_n(u_n; v_n)$  у новій системі координат  $(u, v)$  розміщуються приблизно вздовж деякої прямої.

Для лінійної регресії  $F(x) = a_0 + a_1x$  система необхідних умов екстремуму суми квадратів відхилень  $\rho_2(a_0, a_1)$  набуває вигляду

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^n f(x_k); \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^2 = \sum_{k=0}^n x_k f(x_k). \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо оптимальні МНК-оцінки коефіцієнтів  $a_0$  і  $a_1$ .

Приклад. Функція  $f(x)$  задана таблицею

$k$	0	1	2	3
$x_k$	-3	-1	1	3
$y_k = f(x_k)$	-4,5	2,5	-2	-1,5

Знайти апроксимацію цієї функції  $f(x)$  лінійною регресією  $F(x) = a_0 + a_1x$  за методом найменших квадратів. Обчислити значення отриманої лінійної регресії  $y = a_0 + a_1x$  на кінцях відрізка  $[-3;4]$ , скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньоквадратичне відхилення  $\Delta_{y_s}$  лінійної регресії від заданих значень вхідної функції.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Застосуємо лінійну апроксимацію  $F(x) = a_0 + a_1x$ . Проведемо попередні обчислення і заповнимо таблицю

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$x_k^2$	$x_k f(x_k)$
0	-3	-4,5	9	13,5
1	-1	2,5	1	-2,5
2	1	-2	1	-2
3	3	-1,5	9	-4,5
$\Sigma$	0	-5,5	20	4,5

Складемо і розв'яжемо систему для знаходження невідомих

коефіцієнтів:

$$\begin{cases} a_0(3+1) + a_1 \cdot 0 = -5,5; \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 20 = 4,5; \end{cases} \begin{cases} 4a_0 = -5,5; \\ 20a_1 = 4,5; \end{cases} \begin{cases} a_0 = -1,375; \\ a_1 = 0,225. \end{cases}$$

Отже,  $y = -1,375 + 0,225x$  – шукана лінійна регресія.

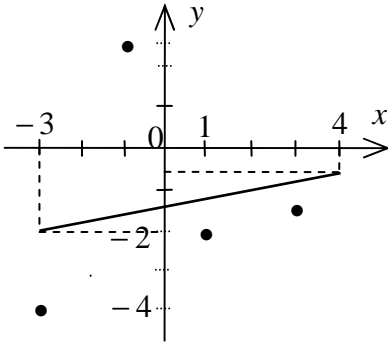


Рис. 15

Обчислимо значення отриманої лінійної апроксимації та складемо відповідну таблицю і побудуємо графік – лінію регресії  $y = -1,375 + 0,225x$  (рис. 15).

$x$	-3	4
$y = a_0 + a_1x$	-2,05	-0,475

Знайдемо середньоквадратичне відхилення  $\Delta y_s$ :

$$\begin{aligned} \Delta y_s &= \sqrt{\frac{1}{n+1} \rho_2(a_0, a_1, \dots, a_m)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^n (y_k - a_0 - a_1 x_k)^2} = (1/2) \left( (-4,5 + 2,05)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (2,5 + 1,6)^2 + (-2 + 1,15)^2 + (-1,5 + 0,7)^2 \right)^{1/2} = 2,4584. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

#### 4.4.2. Квадратична апроксимація

Розглянемо випадок  $m = 2$ , коли апроксимуюча функція є квадратичним тричленом  $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Таке наближення називають **квадратичною регресією**. Лінією регресії служить парабола. При цьому система необхідних умов екстремуму суми квадратів відхилень  $\rho_2(a_0, a_1, a_2)$  набуває вигляду

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{k=0}^n x_k + a_2 \sum_{k=0}^n x_k^2 = \sum_{k=0}^n f(x_k); \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^2 + a_2 \sum_{k=0}^n x_k^3 = \sum_{k=0}^n x_k f(x_k); \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k^2 + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^3 + a_2 \sum_{k=0}^n x_k^4 = \sum_{k=0}^n x_k^2 f(x_k). \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо оптимальні значення коефіцієнтів квадратичної апроксимації  $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ .

Приклад. За методом найменших квадратів знайти квадратичну апроксимацію  $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  функції  $f(x)$ , що задана таблицею

$k$	0	1	2	3
$x_k$	-3	-1	1	3
$y_k = f(x_k)$	-4,5	2,5	-2	-1,5

Обчислити значення отриманої квадратичної регресії  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$  на відрізку  $[-3;4]$  з кроком  $h_d = 0,5$ , скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньоквадратичне відхилення  $\Delta y_s$  наближеної функції від заданих значень вхідної функції.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Застосуємо апроксимацію  $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Проведемо попередні обчислення і запишемо результати в таблицю

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$x_k^2$	$x_k f(x_k)$
0	-3	-4,5	9	13,5
1	-1	2,5	1	-2,5
2	1	-2	1	-2
3	3	-1,5	9	-4,5
$\Sigma$	0	-5,5	20	4,5

$k$	$x_k^3$	$x_k^2 f(x_k)$	$x_k^4$
0	-27	-40,5	81
1	-1	2,5	1
2	1	-2	1
3	27	-13,5	81
$\Sigma$	0	-53,5	164

Складемо і розв'яжемо систему для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} a_0 \cdot 4 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 20 = -5,5; \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 20 + a_2 \cdot 0 = 4,5; \\ a_0 \cdot 20 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 164 = -53,5; \end{cases} \begin{cases} a_0 = 0,6563; \\ a_1 = 0,225; \\ a_2 = -0,4063. \end{cases}$$

Отже,  $y = 0,6563 + 0,225x - 0,4063x^2$  – шукана квадратична регресія. Обчислимо значення  $y = 0,6563 + 0,225x - 0,4063x^2$  на відрізьку  $[-3;4]$  з кроком  $h_d = 0,5$  і складемо відповідну таблицю

$k$	0	1	2	3	4
$x_k$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1
$y$	-3,6754	-2,4456	-1,4189	-0,5954	0,0250

$k$	5	6	7	8	9
$x_k$	-0,5	0	0,5	1	1,5
$y$	0,4422	0,6563	0,6672	0,4750	0,0796

$k$	10	11	12	13	14
$x_k$	2	2,5	3	3,5	4
$y$	-0,5189	-1,3206	-2,3254	-3,5334	-4,9445

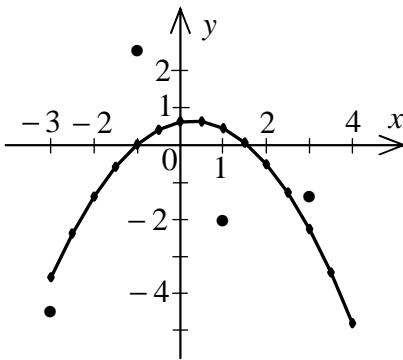


Рис. 16

За даними таблиці будемо графік квадратичної регресії

$$y = 0,6563 + 0,225x - 0,4063x^2 \quad (\text{рис. 16}).$$

Знайдемо середньоквадратичне відхилення  $\Delta y_s$ :

$$\begin{aligned} \Delta y_s &= \sqrt{\frac{1}{n+1} \rho_2(a_0, a_1, \dots, a_m)} = \\ &= \left( \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (y_k - a_0 - a_1 x_k - \right. \end{aligned}$$

$$-a_2x_k^2)^2)^{1/2} = (1/2)\left((-4,5 + 3,6754)^2 + (2,5 - 0,025)^2 + (-2 - 0,475)^2 + (-1,5 + 2,3254)^2\right)^{1/2} = 1,8447. \blacksquare$$

### 4.4.3. Кубічна апроксимація

Розглянемо випадок  $m = 3$ , коли апроксимуюча функція є многочленом третього порядку  $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ . Таке наближення називають **кубічною регресією**. Лінією регресії служить кубічна парабола. При цьому система необхідних умов екстремуму сума квадратів відхилень  $\rho_2(a_0, a_1, a_2, a_3)$  набуває вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(n+1) + a_1 \sum_{k=0}^n x_k + a_2 \sum_{k=0}^n x_k^2 + a_3 \sum_{k=0}^n x_k^3 = \sum_{k=0}^n f(x_k); \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^2 + a_2 \sum_{k=0}^n x_k^3 + a_3 \sum_{k=0}^n x_k^4 = \sum_{k=0}^n x_k f(x_k); \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k^2 + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^3 + a_2 \sum_{k=0}^n x_k^4 + a_3 \sum_{k=0}^n x_k^5 = \sum_{k=0}^n x_k^2 f(x_k); \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k^3 + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^4 + a_2 \sum_{k=0}^n x_k^5 + a_3 \sum_{k=0}^n x_k^6 = \sum_{k=0}^n x_k^3 f(x_k). \end{array} \right.$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо оптимальні значення коефіцієнтів кубічного наближення  $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ .

Приклад. Функція  $f(x)$  задана таблицею

$k$	0	1	2	3	4
$x_k$	-3	-1	0	1	3
$y_k = f(x_k)$	-4,5	2,5	2	-2	-1,5

Знайти апроксимацію цієї функції  $f(x)$  кубічною регресією  $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  за методом найменших квадратів. Обчислити значення отриманої кубічної апроксимації



$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  на відрізку  $[-3;4]$  з кроком  $h_d = 0,5$ , скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньоквадратичне відхилення  $\Delta_{\text{с}}$  наближеної функції від заданих значень вхідної функції.

**Вказівка.** Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Для кубічної апроксимації  $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  проведемо попередні обчислення коефіцієнтів системи необхідних умов екстремуму нев'язки і запишемо результати в таблицю:

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$x_k^2$	$x_k f(x_k)$	$x_k^3$
0	-3	-4,5	9	13,5	-27
1	-1	2,5	1	-2,5	-1
2	0	2	0	0	0
3	1	-2	1	-2	1
4	3	-1,5	9	-4,5	27
$\Sigma$	0	-3,5	20	4,5	0

$k$	$x_k^2 f(x_k)$	$x_k^4$	$x_k^5$	$x_k^3 f(x_k)$	$x_k^6$
0	-40,5	81	-243	121,5	729
1	2,5	1	-1	-2,5	1
2	0	0	0	0	0
3	-2	1	1	-2	1
4	-13,5	81	243	-40,5	729
$\Sigma$	-53,5	164	0	76,5	1460

Сформуємо і розв'яжемо систему для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} a_0 \cdot 5 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 20 + a_3 \cdot 0 = -3,5; \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 20 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 164 = 4,5; \\ a_0 \cdot 20 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 164 + a_3 \cdot 0 = -53,5; \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 164 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1460 = 76,5; \end{cases} \begin{cases} a_0 = 1,1810; \\ a_1 = -2,5938; \\ a_2 = -0,4702; \\ a_3 = 0,3438. \end{cases}$$

Отже,  $y = 1,1810 - 2,5938x - 0,4702x^2 + 0,3438x^3$  – шукана

кубічна регресія. Обчислимо значення отриманого наближення на відріжку  $[-3;4]$  з кроком  $h_d = 0,5$ , складемо відповідну таблицю і побудуємо графік кубічної апроксимації (рис. 17).

$k$	0	1	2	3	4
$x_k$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1
$y$	-4,5520	-0,6451	1,7374	2,8534	2,9608

$k$	5	6	7	8	9
$x_k$	-0,5	0	0,5	1	1,5
$y$	2,3174	1,1810	-0,1905	-1,5392	-2,6073

$k$	10	11	12	13	14
$x_k$	2	2,5	3	3,5	4
$y$	-3,1370	-2,8704	-1,5496	1,0832	5,2858

Знайдемо середньоквадратичне відхилення  $\Delta y_s$  :

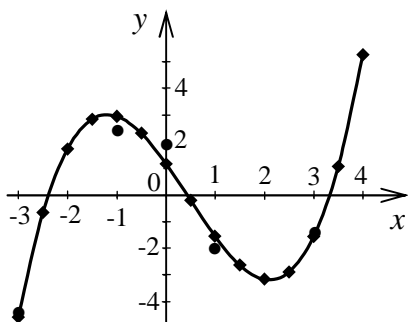


Рис. 17

$$\begin{aligned}
 \Delta y_s &= \sqrt{\frac{1}{n+1} \rho_2(a_0, a_1, \dots, a_m)} = \\
 &= \left( \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^n (y_k - a_0 - \right. \\
 &\quad \left. - a_1 x_k - a_2 x_k^2 - a_3 x_k^3)^2 \right)^{1/2} = \\
 &= \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \left( (-4,5 + 4,5520)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + (2,5 - 2,9608)^2 + (2 - \right. \\
 &\quad \left. - 1,1810)^2 + (-2 + 1,5392)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + (-1,5 + 1,5496)^2 \right)^{1/2} = 0,4692 . \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Зауваження.** Розглянуті приклади підтверджують, що збільшенням порядку  $m$  апроксимуючого многочлена можна зменшити середньоквадратичне відхилення  $\Delta y_s$  і довести його (при  $m = n$ ) до нуля (отримати інтерполяційний поліном). Проте проведені розрахунки також показують зниження при цьому ступеня згладжування,

що може привести до наростання похибок прогнозування за одержаною моделлю (причому не тільки при екстраполяції, а навіть при інтерполяції).

#### 4.4.4. Апроксимація кубічним сплайном

В обчислювальній математиці та в інженерній практиці все частіше застосовується апроксимація сплайнами, коефіцієнти яких знаходяться за МНК.

Знаходження МНК-оцінок параметрів сплайну зводиться до розв'язування задачі на умовний екстремум – пошуку мінімуму суми квадратів відхилень при наявності лінійних обмежень-рівностей. Це вимагає відповідної модифікації обчислювальних процедур методу найменших квадратів. Зокрема, можна з цих рівностей виразити одні з коефіцієнтів через інші та перейти до задачі безумовної оптимізації меншої розмірності.

Розглянемо середньоквадратичну апроксимацію функції  $f(x)$  за допомогою кубічного сплайну  $S_3(x)$  – *кубічної сплайнової регресії*. Обмежимося тільки конкретною задачею.

Приклад. Функція  $f(x)$  задана на відрізку  $[a; b] = [x_0; x_n]$  наступною таблицею значень у  $n + 1$  рівновіддалених вузлах ( $n = 3$ ):

$k$	0	1	2	3
$x_k$	-3	-1	1	3
$y_k = f(x_k)$	-4,5	2,5	-2	-1,5

Методом найменших квадратів знайти апроксимацію цієї функції  $f(x)$  кубічним сплайном

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{31}(x) = a_1 + b_1(x - x_s) + c_1(x - x_s)^2 + d_1(x - x_s)^3, & x \in (-\infty; x_s]; \\ P_{32}(x) = a_2 + b_2(x - x_s) + c_2(x - x_s)^2 + d_2(x - x_s)^3, & x \in [x_s; +\infty) \end{cases}$$

з одним вузлом спряження  $x_s = (a + b)/2$ , в якому виконуються

умови гладкості:

$$P_{31}(x_s) = P_{32}(x_s); P'_{31}(x_s) = P'_{32}(x_s); P''_{31}(x_s) = P''_{32}(x_s),$$

доповнені однорідними граничними умовами на кінцях  $x = x_0$  і  $x = x_n$  відрізка апроксимації:  $P''_{31}(x_0) = 0$ ;  $P''_{32}(x_n) = 0$ .

Обчислити значення отриманої сплайн-апроксимації  $y = S_3(x)$  на відріжку  $[-4; 4]$  з кроком  $h_d = 0,5$ , скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньоквадратичне відхилення  $\Delta_{y_s}$  наближеної функції від заданих значень вхідної функції.

**Вказівка.** Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ З додаткових умов у вузлах  $x_s$ ,  $x_0$  і  $x_n$  випливають наступні співвідношення для коефіцієнтів

$$a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2; \quad 2c_1 = 2c_2;$$

$$2c_1 - 6d_1(b-a)/2 = 0; \quad 2c_2 + 6d_2(b-a)/2 = 0.$$

Введемо позначення

$$h = (b-a)/3; \quad a_1 = a_2 = \bar{a}; \quad b_1 = b_2 = \bar{b}; \quad c_1 = c_2 = \bar{c}.$$

Тоді  $d_1 = -d_2 = (2/9)\bar{c}/h$  і сплайн набуває вигляду

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{31}(x) = \bar{a} + \bar{b}(x - x_s) + \bar{c}(x - x_s)^2 + \left((2/9)\bar{c}/h\right)(x - x_s)^3, & x \in (-\infty; x_s]; \\ P_{32}(x) = \bar{a} + \bar{b}(x - x_s) + \bar{c}(x - x_s)^2 - \left((2/9)\bar{c}/h\right)(x - x_s)^3, & x \in [x_s; +\infty). \end{cases}$$

За МНК оптимальні значення коефіцієнтів  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  і  $\bar{c}$  визначаються як розв'язки системи необхідних умов екстремуму суми квадратів відхилень

$$\begin{cases} 4\bar{a} + (31/9)h^2\bar{c} - y_0 - y_1 - y_2 - y_3 = 0; \\ 10h\bar{b} + 3y_0 + y_1 - y_2 - 3y_3 = 0; \\ (62/9)\bar{a} + (745/81)h^2\bar{c} - 3y_0 - (4/9)y_1 - (4/9)y_2 - 3y_3 = 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\bar{a} = (-4y_0 + 37y_1 + 37y_2 - 4y_3)/46;$$

$$\bar{b} = (-3y_0 - y_1 + y_2 + 3y_3)/(10h); \quad \bar{c} = 9(y_0 - y_1 - y_2 + y_3)/(23h^2).$$

Проведемо обчислення:

$$h = (b - a)/3 = (3 + 3)/3 = 2; \quad x_s = (a + b)/2 = (-3 + 3)/2 = 0:$$

$$\bar{a} = (-4 \cdot (-4,5) + 37 \cdot 2,5 + 37 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1,5))/46 = 0,8043;$$

$$\bar{b} = (-3 \cdot (-4,5) - 2,5 + (-2) + 3 \cdot (-1,5))/(10 \cdot 2) = 0,275;$$

$$\bar{c} = 9 \cdot (-4,5 - 2,5 - (-2) + (-1,5))/(23 \cdot 2^2) = -0,6359;$$

$$(2/9)\bar{c}/h = (2/9) \cdot (-0,6359)/2 = -0,0707.$$

Отже, кубічна сплайн-апроксимація має вигляді:

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{31}(x) = 0,8043 + 0,275x - 0,6359x^2 - \\ \quad - 0,0707x^3, \quad x \in (-\infty; x_s]; \\ P_{32}(x) = 0,8043 + 0,275x - 0,6359x^2 + \\ \quad + 0,0707x^3, \quad x \in [x_s; +\infty). \end{cases}$$

Обчислимо значення отриманого наближення  $y = S_3(x)$  на відрізьку  $[-4; 4]$  з кроком  $h_d = 0,5$  і складемо відповідну таблицю

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5
$y$	-5,9453	-4,9167	-3,8349	-2,7529	-1,7237	-0,8004

$k$	6	7	8	9	10
$x_k$	-1	-0,5	0	0,5	1
$y$	-0,0359	0,5167	0,8043	0,7917	0,5141

$k$	11	12	13	14	15	16
$x_k$	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$y$	0,0246	-0,6237	-1,3779	-2,1849	-2,9917	-3,7453

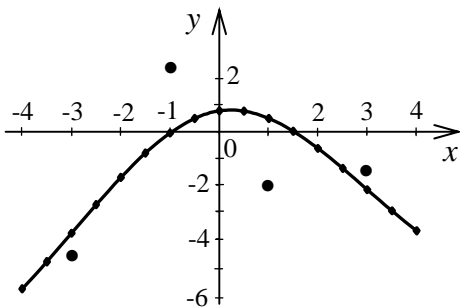


Рис. 18

Графік одержаної кубічної сплайн-апроксимації зображено на рис. 18.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення  $\Delta y_s$ :

$$\begin{aligned} \Delta y_s &= \sqrt{\frac{1}{n+1} \rho_2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} = \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^n (y_k - S_3(x_k))^2}{n+1}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1/2) \left( (-4,5 + 3,8349)^2 + (2,5 + 0,0359)^2 + \right. \\ &\left. + (-2 - 0,5141)^2 + (-1,5 + 2,1849)^2 \right)^{1/2} = 1,8482. \blacksquare \end{aligned}$$

Зауваження 1. Основні рекомендації по вибору порядку  $l$  сплайну  $S_{l,m}(x)$ , кількості та розміщенню його вузлів, які наведені вище для задачі інтерполяції, залишаються справедливими також у більш загальному випадку апроксимації. Їх треба доповнити порадю мати на кожному частинному проміжку між сусідніми вузлами не менше  $l+1$  точок з відомими значеннями вхідної функції, оскільки проблема занадто тісної підгонки сплайн-моделі є реальною загрозою.

Зауваження 2. З точки зору ефективності обчислень краще використовувати подання сплайну  $S_{l,m}(x)$  не через степеневі функції, а за допомогою так званих *базисних сплайнів (B-сплайнів)*. Для ознайомлення з ними слід звернутися до спеціалізованої літератури.

#### 4.4.5. Локальне згладжування даних

Якщо дослідні дані містять суттєві похибки, то доцільно провести їх згладжування (фільтрацію) для одержання більш плавного характеру залежності.

Нехай за результатами дослідження функції  $f(x)$  сформована таблиця її значень  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  у рівновіддалених точках

$x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n$ . Припускається, що величини  $y_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  мають однакову точність.

Для знаходження згладженого значення  $\bar{y}_k$  у точці  $x_k$  вибираємо з обох боків від  $x_k$  по  $m$  точок:  $x_{k-m}, \dots, x_{k-1}$  і  $x_{k+1}, \dots, x_{k+m}$ . За  $2m+1$  значеннями  $y_{k-m}, \dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}$  у виділених точках будемо апроксимуючий многочлен  $l$ -го порядку, користуючись МНК (при цьому  $l < 2m$ ). Значення одержаного полінома в центральній точці  $x_k$  приймаємо за  $\bar{y}_k$ . Процес повторюється для всіх внутрішніх точок. Згладжування значень поблизу кінців відрізка  $[x_0; x_n]$  здійснюється за допомогою крайніх точок.

Для трьох точок при апроксимації многочленом першого порядку одержуємо 
$$\bar{y}_k = (y_{k-1} + y_k + y_{k+1})/3, k = \overline{1, n-1}.$$

Якщо брати по п'ять точок і використовувати середньоквадратичне наближення кубічним поліномом, то дістаємо

$$\bar{y}_k = (-3y_{k-2} + 12y_{k-1} + 17y_k + 12y_{k+1} - 3y_{k+2})/35, k = \overline{2, n-2}.$$

При застосуванні середньоквадратичної апроксимації многочленом п'ятого порядку за “ковзним вікном” з семи точок отримаємо

$$\bar{y}_k = (1/231)(5y_{k-3} - 30y_{k-2} + 75y_{k-1} + 131y_k + 75y_{k+1} - 30y_{k+2} + 5y_{k+3}), k = \overline{3, n-3}.$$

Зауваження. Фільтрація приводить до послаблення високочастотних коливань, майже не змінюючи низькочастотну складову вхідної залежності  $y = f(x)$ . Згладжені величини  $\bar{y}_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ , як правило, достатньою близькі до істинних значень, при цьому ступінь розсіювання їх похибок менша. Проте при цьому сильно зростає кореляція (взаємозалежність) похибок. Крім того, коли функція  $y = f(x)$  не є многочленом  $l$ -го порядку, то відбувається “розмазування” її графіка, що може привести до суттєвого спотворення справжнього характеру залежності  $y = f(x)$ . Тому повторна фільтрація не рекомендується.

## 5. ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІОВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

### 5.1. Чисельне диференціювання

При числовому розв'язуванні багатьох практичних задач часто виникає потреба в обчисленні похідних різних порядків функції  $y = f(x)$ , що задана таблично або складним аналітичним виразом, безпосередньо диференціювати який досить важко. У таких випадках застосовуються наближені методи диференціювання.

Нехай на сітці  $\{x_k : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b\}$  (з нерівномірним, у загальному випадку, кроком  $h_k = x_k - x_{k-1} = \text{var}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ) у всіх вузлах  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  відомі значення  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  вхідної функції  $y = f(x)$ . Необхідно обчислити похідну  $f^{(m)}(x_*)$  у точці  $x_* \in [a; b]$  та оцінити абсолютну похибку  $\Delta$ .

Знайдемо наближення  $f(x) \approx F(x)$ , тобто подамо вхідну функцію  $f(x)$  у вигляді  $f(x) = F(x) + R(x)$ , де за апроксимуючу функцію  $F(x)$  можна взяти, наприклад, часткову суму ряду Тейлора чи інтерполяційний многочлен, а остаточно член  $R(x)$  визначає похибку апроксимації.

Продиференціюємо останню рівність  $m$  разів, покладемо  $x = x_*$  і дістанемо

$$f^{(m)}(x_*) = F^{(m)}(x_*) + R^{(m)}(x_*), \text{ тобто } f^{(m)}(x_*) \approx F^{(m)}(x_*).$$

Величина  $R^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - F^{(m)}(x)$ , що характеризує відхилення наближеного значення похідної від точного, називається **похибкою апроксимації похідної**.

Нехай сітка має сталий крок  $h = x_k - x_{k-1} = \text{const}$ . Тоді похибка  $R^{(m)}$  залежить від  $h$  і її записують у вигляді  $R^{(m)} = O(h^r)$  (тобто  $|R^{(m)}| < Ch^r$ , де  $C > 0$  і  $C$  не залежить від  $h$ ). Показник степеня  $r$  називається **порядком похибки апроксимації похідної (порядком точності апроксимації)**.



### 5.1.1. Застосування інтерполяційних многочленів

Нехай функція  $f(x)$  задана на рівномірній сітці зі сталим кроком  $h$  і може бути апроксимована інтерполяційним многочленом Ньютона (для інтерполяції вперед). Для відшукання похідних у вузлі  $x_k$  запишемо цей поліном за **шаблоном** з  $(m+1)$  вузлів  $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+m}$ :

$$N_m(x) = f(x_k) + (q/1!) \Delta f(x_k) + (q(q-1)/2!) \Delta^2 f(x_k) + \dots + (q(q-1)\dots(q-m+1)/m!) \Delta^m f(x_k), \quad q = (x - x_k)/h.$$

Продиференціюємо одержаний вираз, враховуючи, що для складеної функції  $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{d}{dq}$ , і дістанемо:

$$f'(x) = N'_m(x) \approx \frac{1}{h} \frac{d}{dq} (N_m(x_k + hq)) = \frac{1}{h} \left( \Delta f(x_k) + (2q-1) \times \frac{\Delta^2 f(x_k)}{2!} + (3q^2 - 6q + 2) \frac{\Delta^3 f(x_k)}{3!} + \dots \right); \quad f''(x) \approx \frac{1}{h} \frac{d}{dq} f'(x) = \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 f(x_k) + (q-1) \Delta^3 f(x_k) + (12q^2 + 36q + 22) \frac{\Delta^4 f(x_k)}{4!} + \dots \right).$$

Покладемо  $x = x_k$ , тобто  $q = 0$ , і отримаємо наступні формули для апроксимації першої та другої похідних у вузлі  $x_k$ :

$$f'(x_k) \approx \frac{1}{h} \left( \Delta f(x_k) - \frac{1}{2} \Delta^2 f(x_k) + \frac{1}{3} \Delta^3 f(x_k) - \frac{1}{4} \Delta^4 f(x_k) + \dots \right);$$

$$f''(x_k) \approx \left( 1/h^2 \right) \left( \Delta^2 f(x_k) - \Delta^3 f(x_k) + (11/12) \Delta^4 f(x_k) + \dots \right).$$

Число доданків у цих співвідношеннях залежить від кількості вузлів у вибраному шаблоні.

Приклад. Функція  $f(x) = sh2x$  задана наступною таблицею значень  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  ( $n = 5$ ) на рівномірній сітці з кроком  $h = 0,05$ :

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
$f(x_k)$	0,00000	0,10017	0,20134	0,30452	0,41075	0,52110

Наближено знайти значення похідних  $f'$  і  $f''$  у точці  $x_0 = 0,00$  за шаблоном з п'яти вузлів при заданому кроці  $h = 0,05$ .

□ Складемо таблицю скінчених різниць:

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$\Delta f(x_k)$	$\Delta^2 f(x_k)$	$\Delta^3 f(x_k)$	$\Delta^4 f(x_k)$
0	0,00	0,00000	0,10017	0,00100	0,00101	0,00003
1	0,05	0,10017	0,10117	0,00201	0,00104	0,00003
2	0,10	0,20134	0,10318	0,00305	0,00107	–
3	0,15	0,30452	0,10623	0,00412	–	–
4	0,20	0,41075	0,11035	–	–	–
5	0,25	0,52110	–	–	–	–

Запишемо формули для апроксимації першої та другої похідних у вузлі  $x_0$ , використовуючи шаблон з п'яти вузлів:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h} \left( \Delta f(x_0) - (1/2)\Delta^2 f(x_0) + (1/3)\Delta^3 f(x_0) - (1/4)\Delta^4 f(x_0) \right);$$

$$f''(x_0) \approx \left( 1/h^2 \right) \left( \Delta^2 f(x_0) - \Delta^3 f(x_0) + (11/12)\Delta^4 f(x_0) \right).$$

Тоді дістанемо

$$f'(0) \approx 20 \cdot (0,10017 - 0,0005 + 0,00033667 - 0,0000075) = 1,9999;$$

$$f''(0) \approx 400 \cdot (0,001 - 0,00101 + 0,0000275) = 0,007.$$

Для порівняння наведемо точні значення цих похідних:

$$f'(x) = 2ch2x; \quad f'(0) = 2; \quad f''(x) = 4sh2x; \quad f''(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Застосовуючи інтерполяційний поліном Ньютона, дістаємо вирази для похідних через скінченні різниці. Проте на практиці часто зручніше обчислювати похідні безпосередньо через значення функції  $f(x)$  у вузлах. Для одержання таких формул можна скористатися многочленом Лагранжа.

Знаходження вищих похідних можна звести до послідовного обчислення першої похідної  $f'(x)$ . Розглянемо побудову наближе-

них формул для  $f'(x)$  за допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа з рівномірним розміщенням вузлів.

Запишемо інтерполяцію многочленом Лагранжа другого порядку (за *шаблоном* з трьох вузлів  $x_{k-1}$ ,  $x_k$  і  $x_{k+1}$ )

$$L_2(x) = ((x - x_k)(x - x_{k+1})y_{k-1} - 2(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})y_k + (x - x_{k-1})(x - x_k)y_{k+1}) / (2h^2)$$

з залишковим членом

$$R_2(x) = f(x) - L_2(x) = (1/3!)f'''(c(x))(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1}).$$

$$\text{Тоді } f'(x) = L'_2(x) + R'_2(x) = ((2x - x_k - x_{k+1})y_{k-1} - 2(2x - x_{k-1} - x_{k+1})y_k + (2x - x_{k-1} - x_k)y_{k+1}) / (2h^2) + R'_2(x);$$

$$R'_2(x) = (1/3!)f'''(c(x))(3x^2 - 2(x_{k-1} + x_k + x_{k+1})x + x_{k-1}x_k + x_kx_{k+1} + x_{k-1}x_{k+1})$$

Як правило, формули чисельного диференціювання застосовують для обчислення похідних у вузлах  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Підставляючи в одержані вирази послідовно значення  $x_{k-1}$ ,  $x_k$  і  $x_{k+1}$ , маємо:

$$f'(x_{k-1}) = (-3y_{k-1} + 4y_k - y_{k+1}) / (2h) + (h^2/3)f'''(c_{k-1});$$

$$f'(x_k) = (-y_{k-1} + y_{k+1}) / (2h) - (h^2/6)f'''(c_k);$$

$$f'(x_{k+1}) = (y_{k-1} - 4y_k + 3y_{k+1}) / (2h) + (h^2/3)f'''(c_{k+1}),$$

де останні доданки відображають похибку апроксимації похідної;  $c_{k-1}$ ,  $c_k$  і  $c_{k+1}$  – деякі невідомі точки з інтервалу  $(x_{k-1}; x_{k+1})$ .

Якщо скористатися інтерполяційним поліномом Лагранжа четвертого порядку (за шаблоном з п'яти вузлів  $x_{k-2}$ ,  $x_{k-1}$ ,  $x_k$ ,  $x_{k+1}$  і  $x_{k+2}$ ), то одержимо наступні формули для похідних у вузлах:

$$f'(x_{k-2}) = (-25y_{k-2} + 48y_{k-1} - 36y_k + 16y_{k+1} - 3y_{k+2}) / (12h) + (h^4/5)f^{(5)}(c_{k-2});$$

$$f'(x_{k-1}) = (-3y_{k-2} - 10y_{k-1} + 18y_k - 6y_{k+1} + y_{k+2}) / (12h) -$$

$$\begin{aligned}
& -(h^4/20)f^{(5)}(c_{k-1}); \\
f'(x_k) &= (y_{k-2} - 8y_{k-1} + 8y_{k+1} - y_{k+2})/(12h) + (h^4/30)f^{(5)}(c_k); \\
f'(x_{k+1}) &= (-y_{k-2} + 6y_{k-1} - 18y_k + 10y_{k+1} + 3y_{k+2})/(12h) + \\
& \quad + (h^4/20)f^{(5)}(c_{k+1}); \\
f'(x_{k+2}) &= (3y_{k-2} - 16y_{k-1} + 36y_k - 48y_{k+1} + 25y_{k+2})/(12h) + \\
& \quad + (h^4/5)f^{(5)}(c_{k+2}),
\end{aligned}$$

де  $c_i$ ,  $i = \overline{k-2, k+2}$  – деякі невідомі точки з  $(x_{k-2}; x_{k+2})$ .

**Зауваження.** При непарному числі вузлів інтерполяції та парному степені поліному Лагранжа найбільш прості вирази і найменші коефіцієнти у залишкових членах одержуються для похідної у центральному вузлі. Указані співвідношення є **апроксимаціями похідної за допомогою центральних різниць**. Такі скінченно-різницеві наближення широко використовуються на практиці.

### 5.1.2. Уточнення наближеного значення похідної

Порядок точності скінченно-різницевих апроксимацій похідної зростає зі збільшенням числа вузлів, за якими вони будуються. Проте при великому числі використаних вузлів ці співвідношення стають досить громіздкими, що обумовлює значне зростання обчислювальних витрат. Крім того, ускладнюється оцінка похибки апроксимації.

Можна оцінити абсолютну похибку апроксимації похідної й уточнити наближене значення останньої, не змінюючи шаблону, якщо застосувати **метод Рунге (метод подвосення кроку)**.

Нехай  $f'(x)$  – похідна, наближене значення якої треба знайти;  $F'(x, h)$  – її скінченно-різницева апроксимація на рівномірній сітці з кроком  $h$ , що має  $r$ -й порядок точності;  $R'(x, h)$  – похибка апроксимації, головний член якої можна подати у вигляді  $h^r \varphi(x)$ , тобто  $R'(x, h) = h^r \varphi(x) + O(h^{r+1})$ , де  $\varphi(x) \neq 0$ . Тоді

$$f'(x) = F'(x, h) + h^r \varphi(x) + O(h^{r+1}).$$

Скористаємося цим співвідношенням у тій же точці  $x$  при подвоєному кроці  $2h$  і дістанемо

$$f'(x) = F'(x, 2h) + 2^r h^r \varphi(x) + O(2^{r+1} h^{r+1})$$

Прирівнюючи праві частини двох останніх рівностей, знаходимо вираз для головного члена похибки апроксимації

$$h^r \varphi(x) = (F'(x, h) - F'(x, 2h)) / (2^r - 1) + O(h^{r+1}).$$

Звідси для абсолютної похибки  $\Delta_1 = |R'(x, h)|$  апроксимації похідної маємо наближену **першу формулу Рунге**

$$\Delta_1 \approx |F'(x, h) - F'(x, 2h)| / (2^r - 1).$$

Підставляючи вираз для  $h^r \varphi(x)$  у співвідношення для  $f'(x)$  при кроці  $h$ , дістаємо **другу формулу Рунге**

$$f'(x) = F'(x, h) + (F'(x, h) - F'(x, 2h)) / (2^r - 1) + O(h^{r+1}),$$

яка дозволяє за двома наближеннями похідної з кроками  $h$  і  $2h$  з  $r$ -м порядком точності знайти уточнене значення цієї похідної з підвищеним порядком точності  $r+1$ .

Зауваження. Для підтвердження умови  $\varphi(x) \neq 0$  на практиці перевіряють виконання нерівності

$$\left| 2^r (F'(x, h/2) - F'(x, h)) / (F'(x, h) - F'(x, 2h)) - 1 \right| < 0,1,$$

лише у випадку справедливості якої рекомендується застосовувати метод Рунге.

Приклад. Функція  $y = f(x)$  задана на відрізку  $[a; b]$ , де  $a = 1$  і  $b = 3,1$ , наступною таблицею значень  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  ( $n = 7$ ) у рівновіддалених вузлах з кроком  $h = (b - a) / n = 0,3$ :

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_k$	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
$y_k$	-1,15	-1,5	-1,6	-1,8	-1,7	-1,75	-2,05	-2,3

Знайти наближене значення  $f'(x_3)$  похідної  $f'(x)$  у вузлі

$x_3 = 1,9$  за формулою  $f'(x_k) \approx F'(x_k, h) = (-y_{k-1} + y_{k+1})/(2h)$ , що має порядок точності  $r = 2$ :  $R'(x_k, h) = -(h^2/6)f'''(c_k)$ , з кроком  $h = 0,3$ . Користуючись методом Рунге, оцінити абсолютну похибку  $\Delta_1$  апроксимації та уточнити значення похідної  $f'(x_3)$ .

Вказівка. Похибками у вхідних даних і похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до трьох десяткових знаків після коми.

□ При кроці  $h = 0,3$  маємо:

$$f'(x_3) \approx F'(x_3, h) = (-y_2 + y_4)/(2h) = -0,167.$$

Згідно з методом Рунге обчислимо наближене значення  $f'(x_3)$  за тією ж формулою при подвоєному кроці  $2h = 0,6$ :

$$f'(x_3) \approx F'(x_3, 2h) = (-y_1 + y_5)/(4h) = -0,208.$$

Далі знайдемо оцінку абсолютної похибки  $\Delta_1$  і уточнене значення похідної:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |R'(x_k, h)| \approx |(F'(x_3, h) - F'(x_3, 2h))/(2^r - 1)| = \\ &= |(-0,167 + 0,208)/(2^2 - 1)| = 0,014; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x_3) &\approx F'(x_3, h) + (F'(x_3, h) - F'(x_3, 2h))/(2^r - 1) = \\ &= -0,167 + 0,014 = -0,153. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 5.1.3. Вибір оптимального кроку чисельного диференціювання

Повна абсолютна похибка  $\Delta$  знаходження похідної  $f'(x)$  складається з абсолютної похибки  $\Delta_1 = |R'(x, h)|$  власне вибраного методу апроксимації, абсолютної похибки  $\Delta_2$ , зумовленої наближеним заданням значень  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$ , і похибок заокруглення. Припустимо, що задані значення  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  мають однакові граничні абсолютні похибки  $\Delta^*$ , а похибками заокруглення знехтуємо.

Для визначеності розглянемо наступну скінченно-різницеву апроксимацію похідної

$$f'(x_k) \approx (y_{k-2} - 8y_{k-1} + 8y_{k+1} - y_{k+2}) / (12h);$$

$$\Delta_1 = |R'(x, h)| = (h^4 / 30) |f^{(5)}(c_k)|.$$

Залишкову абсолютну похибку  $\Delta_1$  можна оцінити так:

$$\Delta_1 \leq \Delta_1^* = M_5 h^4 / 30, \text{ де } M_5 = \max_{x \in [a; b]} |f^{(5)}(x)|.$$

Гранична сумарна абсолютна похибка  $\Delta_2^*$ , породжена неточністю вхідних даних  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$ , визначається як абсолютна похибка алгебраїчної суми і добутку:

$$\Delta_2^* = (\Delta^* + 8 \cdot \Delta^* + 8 \cdot \Delta^* + \Delta^*) / (12h) = 3\Delta^* / (2h).$$

Гранична повна абсолютна похибка  $\Delta^*(h)$  даної формули чисельного диференціювання знаходиться додаванням  $\Delta_1^*$  і  $\Delta_2^*$ :

$$\Delta^*(h) = \Delta_1^* + \Delta_2^* = M_5 h^4 / 30 + 3\Delta^* / (2h).$$

Перша складова  $\Delta_1^*$  похибки  $\Delta^*(h)$  зменшується зі зменшенням кроку  $h$ , але при цьому зростає її друга складова  $\Delta_2^*$ . Оптимальна величина кроку  $h^*$ , що забезпечує мінімум повної похибки  $\Delta^*(h)$ , визначається з необхідної умови екстремуму  $\Delta^{*'}(h) = 0$ :

$$\Delta^{*'}(h) = 2M_5 h^3 / 15 - 3\Delta^* / (2h^2) = 0; \quad h^* = \sqrt[5]{45\Delta^* / (4M_5)}.$$

Приклад. Функція  $y = f(x)$  задана на відрізку  $[a; b]$ , де  $a = 0,5$  і  $b = 1,1$ , наступною таблицею значень  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  ( $n = 6$ ), що вірні в написаних чотирьох десяткових знаках після коми, у рівновіддалених вузлах з кроком  $h = (b - a) / n = 0,1$ :

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$x_k$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1
$y_k$	0,6193	0,6328	0,6402	0,6514	0,6647	0,6705	0,6619

Знайти наближене значення  $f'(x_3)$  похідної  $f'(x)$  у вузлі  $x_3 = 0,8$  за допомогою скінченно-різницевої апроксимації

$$f'(x_k) \approx (y_{k-2} - 8y_{k-1} + 8y_{k+1} - y_{k+2}) / (12h),$$

яка має порядок точності  $r = 4$ :  $R'(x_k, h) = (h^4 / 30) f^{(5)}(c_k)$ . Оцінити граничну повну абсолютну похибку  $\Delta^*(h)$  і визначити оптимальний крок  $h^*$  чисельного диференціювання.

Вказівка. Похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ За поданим скінченно-різницеvim співвідношенням обчисливо наближення для шуканої похідної:

$$\begin{aligned} f'(x_3) &\approx (y_1 - 8y_2 + 8y_4 - y_5) / (12h) = \\ &= (0,6328 - 8 \cdot 0,6402 + 8 \cdot 0,6647 - 0,6705) / (12 \cdot 0,1) = 0,1319. \end{aligned}$$

Гранична залишкова абсолютна похибка  $\Delta_1^*$  для даного наближення визначається за формулою

$$\Delta_1^* = M_5 h^4 / 30, \text{ де } M_5 = \max_{x \in [a; b]} |f^{(5)}(x)|.$$

Щоб оцінити  $M_5$ , складемо для даної функції  $y = f(x)$  таблицю скінченних різниць:

$k$	$x_k$	$y_k$	$\Delta y_k$	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$	$\Delta^5 y_k$
0	0,5	0,6193	0,0135	- 0,0061	0,0099	- 0,0116	0,0037
1	0,6	0,6328	0,0074	0,0038	- 0,0017	- 0,0079	0,0106
2	0,7	0,6402	0,0112	0,0021	- 0,0096	0,0027	—
3	0,8	0,6514	0,0133	- 0,0075	- 0,0069	—	—
4	0,9	0,6647	0,0058	- 0,0144	—	—	—
5	1	0,6705	- 0,0086	—	—	—	—
6	1,1	0,6619	—	—	—	—	—

$$\text{Дістанемо } M_5 \approx \left(1/h^5\right) \max_{x_k \in [a; b]} |\Delta^5 y_k| = 0,0106 / 0,1^5 = 1060.$$

$$\text{Тоді } \Delta_1^* = 1060 \cdot 0,1^4 / 30 = 0,0035.$$



З умови задачі випливає, що вхідні дані мають однакові граничні абсолютні похибки  $\Delta^* = 0,00005$ . Обчислимо граничну сумарну абсолютну похибку  $\Delta_2^*$ , породжену неточністю вхідних даних:

$$\Delta_2^* = 3\Delta^*/(2h) = 3 \cdot 0,00005 / (2 \cdot 0,1) = 0,0008.$$

Знайдемо граничну повну абсолютну похибку

$$\Delta^*(h) = \Delta_1^* + \Delta_2^* = 0,0035 + 0,0008 = 0,0043.$$

Визначимо оптимальний крок:

$$h^* = \sqrt[5]{45\Delta^*/(4M_5)} = \sqrt[5]{45 \cdot 0,00005 / (4 \cdot 1060)} = 0,0556. \quad \blacksquare$$

## 5.2. Чисельне інтегрування функцій

При математичному моделюванні різноманітних процесів часто виникає потреба в наближених обчисленнях визначеного інтеграла  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ , якщо: а) підінтегральна функція  $f(x)$  задана графічно, таблично чи іншим неаналітичним способом; б) первісна  $F(x)$  не є елементарною функцією; в) первісна  $F(x)$  хоч і є елементарною функцією, але знаходження її значень досить громіздке.

### 5.2.1. Постановка задачі. Способи побудови формул чисельного інтегрування

Постановка задачі. Нехай необхідно знайти наближене значення  $I_n(f)$  визначеного інтеграла  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ , де  $f(x)$  – задана функція.

В основі **чисельних наближених методів** розв'язування цієї задачі лежить подання визначеного інтеграла як границі інтегральної суми

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)h_k,$$

де  $h_k = x_k - x_{k-1} = \text{var}$  – нерівномірний крок сітки (розбиття)

$\omega_n = \{x_k : a = x_0 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$ ;  $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ ,  
 $k = \overline{1, n}$ , причому точки  $x_k$  і  $\xi_k$  вибираються довільно.

Якщо наближення  $I_n(f)$  до інтеграла  $I(f)$  будувати у вигляді аналогічної суми, тобто лінійної комбінації скінченного числа значень підінтегральної функції  $f(x)$ , то дістанемо **квадратурну формулу**

$$I(f) \approx I_n(f) = \sum_{k=0}^n c_k f(x_k),$$

де  $x_k, k = \overline{0, n}$  – **вузли**;  $c_k, k = \overline{0, n}$  – **ваги (коефіцієнти)**.

Методи **чисельного інтегрування** різняться способами вибору вузлів  $x_k$  і ваг  $c_k, k = \overline{0, n}$ , а також наближень для значень підінтегральної функції у вузлах  $f(x_k)$ . Вибрані значення повинні, поперше, мінімізувати (у певному смислі) **похибку (залишковий член)**  $R_n(f) = I(f) - I_n(f)$  квадратурної формули, а по-друге, забезпечити достатню швидкість збіжності обчислювальної процедури.

Зафіксуємо число вузлів  $n$  і будемо підбирати ваги так, щоб квадратурна формула була точною для многочленів якнайвищого степеня  $m$ . Квадратурна формула має  **$m$ -й порядок алгебраїчної точності**, якщо вона дає точний результат для всіх поліномів  $P_m(x)$   $m$ -го степеня, тобто  $R_n(P_m) = 0$  та існує такий многочлен  $P_{m+1}(x)$   $(m+1)$ -го степеня, обчислення якого здійснюється з відмінною від нуля похибкою  $R_n(P_{m+1}) \neq 0$ . Указані умови можна подати в більш зручній для перевірки формі:

$$R_n(x^i) = 0, \quad i = \overline{0, m}; \quad R_n(x^{m+1}) \neq 0.$$

Нехай вузли утворюють сітку  $\Delta_n$  зі сталим кроком  $h$ . Тоді похибка  $R_n(f)$  залежить від  $h$  і її можна подати у вигляді  $R_n(f) = O(h^r)$ , тобто  $|R_n(f)| < Ch^r$ , де  $C > 0$  і  $C$  не залежить від  $h$ . Показник степеня  $r$  називається **порядком точності за кроком  $h$**  квадратурної формули. Квадратурна формула повинна бути такою, щоб для довільної інтегрованої на відрізку  $[a; b]$  функції  $f(x)$

при  $n \rightarrow \infty$  наближене значення  $I_n(f)$  інтеграла збігалось до його точного  $I(f)$ . Тобто, щоб виконувалася умова  $r > 0$ .

### Основні підходи до побудови квадратурних формул:

1) Наближено замінити підінтегральну функцію  $f(x)$  інтерполяційним многочленом  $f(x) \approx P_m(x)$  по деяких вузлах  $x_k$ ,  $k = \overline{0, m}$ , а потім проінтегрувати одержаний поліном. Ці вузли, як правило, фіксовані, причому частина з них може лежати поза відрізком інтегрування  $[a; b]$ . Даний спосіб приводить до квадратурних формул **інтерполяційного типу**.

2) Зафіксувати число вузлів  $n+1$ , а потім підібрати розміщення вузлів  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  і значення коефіцієнтів  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  з умови  $R_n(x^i) = 0$ ,  $i = \overline{0, m}$  так, щоб формула мала найвищий  $m$ -й порядок алгебраїчної точності ( $m < 2n$ ).

3) Якщо відомий клас  $F$  функцій, для яких призначена квадратурна формула, то при фіксованому  $n$  вибір вузлів  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  і коефіцієнтів  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  можна здійснювати з умови досягнення найменшого значення величини  $\overline{R}_n = \sup_{f \in F} R_n(f)$  – точної верхньої

грані значень похибок  $R_n(f)$  для всіх функцій  $f$  даного класу  $F$ . Цей спосіб приводить до квадратурних формул **найвищої точності для даного класу функцій**.

4) Якщо відрізок інтегрування  $[a; b]$  розбити на окремі частини (наприклад, рівномірно), а потім на кожній ділянці використати деяку формулу (невисокого порядку точності), одержану одним з вказаних вище способів, то дістанемо квадратурну формулу **складеного типу**.

Зауваження 1. Квадратурні формули інтерполяційного типу мають алгебраїчний порядок точності  $m \geq n$ .

Зауваження 2. При застосуванні квадратурної формули основний об'єм роботи припадає на обчислення значень підінтегральної функції  $f(x)$  у вузлах, оскільки значення коефіцієнтів  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  табульовані. Тому з формул, які забезпечують задану точність, ре-

комендується вибирати ту, що використовує найменше число вузлів.

Зауваження 3. Якщо кожне значення  $f(x_k)$  підінтегральної функції обчислюється з абсолютною похибкою  $\Delta_f$ , то неусувна абсолютна похибка квадратурної формули може досягти величини  $\Delta_f \sum_{k=0}^n |c_k|$ . Для інтерполяційних формул ця неусувна похибка значно збільшується з ростом  $n$ , оскільки при підвищенні порядку інтерполяційного многочлена  $n \rightarrow \infty$  маємо  $\max_k |c_k| \rightarrow \infty$  і при цьому серед коефіцієнтів  $c_k$  зустрічаються числа обох знаків. Тому не можна застосовувати інтерполяцію поліномом високого степеня. Краще використовувати складені квадратурні формули, що мають малі за абсолютною величиною коефіцієнти.

Зауваження 4. За умови мінімізації впливу похибок значень  $f(x_k)$  підінтегральної функції всі коефіцієнти  $c_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  квадратурної формули повинні бути невід'ємними.

Далі розглянемо найбільш прості квадратурні формули, що у випадку невід'ємної підінтегральної функції  $f(x) \geq 0$  мають ясний геометричний зміст – наближене обчислення площі  $S = \int_a^b f(x) dx$  відповідної криволінійної трапеції при рівномірному розбитті відрізка  $[a; b]$ ,  $a < b$  зі сталим *кроком*  $\Delta x_i = h = (b - a) / n$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Ці співвідношення можна віднести до складених формул інтерполяційного типу.

### 5.2.2. Метод прямокутників

Нехай треба наближено обчислити визначений інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , де функція  $f(x)$  невід'ємна і неперервна на відрізку  $[a; b]$  (рис. 19).

Будемо спиратися на геометричний зміст інтеграла:  $\int_a^b f(x) dx = S$ . Розіб'ємо відрізок  $[a; b]$  на  $n$  рівних частин з

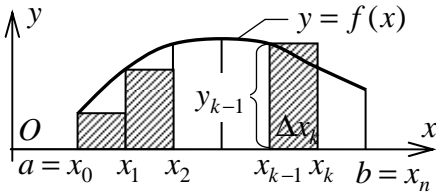


Рис. 19

кроком  $h = (b - a) / n$  точками  $x_0 = a, x_k = x_{k-1} + h, k = \overline{1, n}$ . Кожну  $k$ -у частинну криволінійну трапецію наближено замінимо прямокутником з основою  $\Delta x_k = h$  і висотою  $y_{k-1} = f(x_{k-1})$ , що є значенням

функції  $y = f(x)$  у крайній лівій точці елементарного відрізка  $[x_{k-1}; x_k]$ . Площа цього прямокутника  $\Delta S_k = y_{k-1} h$ . Тоді площа  $S$  всієї криволінійної трапеції:

$$S \approx \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \sum_{k=1}^n y_{k-1} h = h \sum_{k=1}^n y_{k-1}.$$

Маємо **формулу лівих прямокутників** для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\int_a^b f(x) dx \approx ((b - a) / n)(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) + R_n,$$

де  $R_n$  – похибка.

Якщо за висоти частинних прямокутників узяти значення функції  $y = f(x)$  у крайніх правих точках елементарних відрізків  $[x_{k-1}; x_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ , то дістанемо **формулу правих прямокутників**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx ((b - a) / n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n) + R_n,$$

де  $R_n$  – похибка.

Коли функція  $f(x)$  монотонно зростає на відрізку  $[a; b]$ , то формули лівих і правих прямокутників дають наближене значення інтеграла відповідно з недостатчею і з надлишком.

**Зауваження.** Формули прямокутників ґрунтуються на наближенні функції  $f(x)$  кусково-сталою.

Якщо похідна  $f'(x)$  існує й обмежена на відрізку  $[a; b]$ , то істинну абсолютну похибку  $\Delta_n = |R_n|$  обчислення інтеграла за цими формулами можна оцінити граничною абсолютною похибкою

$\Delta_n^*$  за допомогою співвідношення:

$$\Delta_n = |R_n| \leq \Delta_n^* = ((b-a)^2 / (2n)) M_1,$$

де  $M_1 = \max_{x \in [a;b]} |f'(x)|$ . Тобто, похибка формул прямокутників має порядок  $1/n$ . Іншими словами, ці формули характеризуються першим порядком точності:  $\Delta_n^* = O(h^r)$ , де  $r = 1$ .

### 5.2.3. Метод трапецій

Як і в попередньому пункті, розіб'ємо відрізок  $[a;b]$  на  $n$  рівних частин. Сполучимо відрізком кінці кожної частинної дуги даної лінії  $y = f(x)$ , як показано на рис. 20.

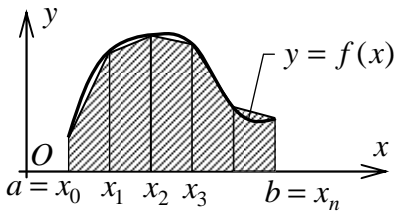


Рис. 20

Кожну  $k$ -у частинну криволінійну трапецію наближено замінимо звичайною трапецією з висотою  $\Delta x_k = h$  і основами  $y_{k-1} = f(x_{k-1})$  та  $y_k = f(x_k)$ , що має площу  $\Delta S_k = (y_{k-1} + y_k)h/2$ .

Тоді площа  $S$  всієї криволінійної трапеції

$$S \approx \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \sum_{k=1}^n (y_{k-1} + y_k)h/2 = h \sum_{k=1}^n (y_{k-1} + y_k)/2.$$

Дістаємо **формулу трапецій** для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = ((b-a)/n) \cdot (y_0/2 + y_1 + \dots + y_{n-1} + y_n/2) + R_n,$$

де  $R_n$  – похибка.

**Зауваження.** Формула трапецій базується на наближенні функції  $f(x)$  кусково-лінійною – вписаною ламаною.

Якщо друга похідна  $f''(x)$  існує й обмежена на відрізку  $[a;b]$ , то істинну абсолютну похибку  $\Delta_n = |R_n|$  обчислення інтеграла за формулою трапецій можна оцінити граничною абсолютною

похибкою  $\Delta_n^*$  за допомогою співвідношення:

$$\Delta_n = |R_n| \leq \Delta_n^* = ((b-a)^3 / (12n^2)) M_2,$$

де  $M_2 = \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|$ . Тобто, похибка формули трапецій має порядок  $1/n^2$ . Іншими словами, ця формула характеризується другим порядком точності:  $\Delta_n^* = O(h^r)$ , де  $r = 2$ .

### 5.2.4. Метод Симпсона (парабол)

Розіб'ємо відрізок  $[a;b]$  на парне число  $n = 2m$  рівних частин з кроком  $h = (b-a)/n$  точками  $x_0 = a$ ,  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_1 + h$ , ...,  $x_{2i-1} = x_{2i-2} + h$ ,  $x_{2i} = x_{2i-1} + h$ , ...,  $x_n = b$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

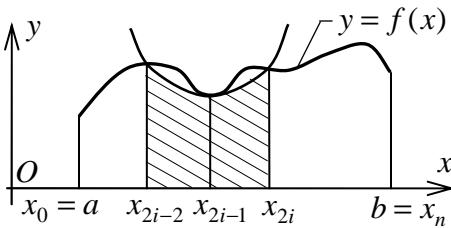


Рис. 21

Як показано на рис. 21, дві сусідні елементарні криволінійні трапеції, що спираються на спарені відрізки  $[x_{2i-2}; x_{2i-1}]$  і  $[x_{2i-1}; x_{2i}]$ , наближено замінимо однією криволінійною трапецією, обмеженою зверху дугою вертикальної параболу

$y = A_i(x - x_{2i-1})^2 + B_i(x - x_{2i-1}) + C_i$ . Ця парабола проходить через три верхні вершини даних частинних трапецій, що породжує лінійну алгебраїчну систему, з якої однозначно знаходяться невідомі коефіцієнти  $A_i, B_i, C_i$ :

$$A_i = (y_{2i-2} - 2y_{2i-1} + y_{2i}) / (2h^2); \quad B_i = (y_{2i} - y_{2i-2}) / (2h);$$

$$C_i = y_{2i-1}.$$

Тоді площа  $\Delta S_{pi}$  елементарної параболічної трапеції:

$$\Delta S_{pi} = \int_{-h}^h (A_i(x - x_{2i-1})^2 + B_i(x - x_{2i-1}) + C_i) dx = (h/3) \times$$

$$\times (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}).$$

Підсумовуючи  $\Delta S_{pi}$  за всіма  $i = \overline{1, m}$ , дістаємо наближений вираз для площі  $S$  всієї криволінійної трапеції:

$$S \approx \sum_{i=1}^m \Delta S_{pi} = \sum_{i=1}^m (h/3)(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}).$$

Маємо **формулу Симпсона (формулу парабол)** для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = ((b-a)/(3n)) \cdot (y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})) + R_n,$$

де  $R_n$  – похибка.

Зауваження. В основі формули Симпсона лежить неперервне кусково-параболічне наближення підінтегральної функції  $f(x)$  вписаною лінією.

Якщо на відрізку  $[a; b]$  існує обмежена четверта похідна  $f^{IV}(x)$ , то істинна абсолютна похибка  $\Delta_n = |R_n|$  обчислення інтеграла за формулою парабол оцінюється граничною абсолютною похибкою  $\Delta_n^*$  так:

$$\Delta_n = |R_n| \leq \Delta_n^* = ((b-a)^5 / (180n^4)) M_4,$$

де  $M_4 = \max_{x \in [a; b]} |f^{IV}(x)|$ . Тобто, похибка формули Симпсона має порядок  $1/n^4$ . Іншими словами, ця формула характеризується четвертим порядком точності:  $\Delta_n^* = O(h^r)$ , де  $r = 4$ .

Зауваження 4. Усі розглянуті формули тим точніші, чим густіше розбиття:  $R_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . При одному й тому ж значенні  $n$  формула Симпсона – найбільш точна з них. При практичному застосуванні чисельного інтегрування треба віддати перевагу формулі парабол, коли підінтегральна функція  $f(x)$  досить гладка, тобто має неперервні похідні високих порядків. Якщо ж функція



$f(x)$  має лише кусково-гладку першу похідну, то кращою може бути формула трапецій. У загальному випадку, ефективність тієї чи іншої квадратурної формули залежить від поведінки функції  $f(x)$  та її похідних на відрізку інтегрування.

Приклад 1. Обчислити наближено визначений інтеграл  $I = \int_0^1 (x+2)^{-1} dx$ , застосовуючи при  $n = 4$  формули: а) лівих прямокутників, б) трапецій, в) Симпсона. Оцінити допущені абсолютні похибки. Обчислення проводити з округленням до п'ятого десяткового знака після коми. Одержані результати порівняти з точним значенням інтеграла, обчисленим за формулою Ньютона – Лейбниця:

$$I = \int_0^1 (x+2)^{-1} dx = \ln|x+2| \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 \approx 0,40547.$$

□ Розіб'ємо заданий відрізок інтегрування  $[0;1]$  на  $n = 4$  рівних частин точками  $x_0 = a = 0$ ,  $x_1 = 0,25$ , ...,  $x_4 = b = 1$ . Обчислимо значення  $y_0, y_1, \dots, y_4$  підінтегральної функції  $y = 1/(x+2)$ , що відповідають указаним точкам, і запишемо результат у таблицю:

$k$	0	1	2	3	4
$x_k$	0	0,25	0,5	0,75	1
$y_k$	0,5	0,44444	0,4	0,36364	0,33333

а) Знайдемо значення інтеграла за допомогою формули лівих прямокутників:

$$I_n \approx ((b-a)/4)(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = ((1-0)/4) \times (0,5 + 0,44444 + 0,4 + 0,36364) = 1,70808/4 \approx 0,42702.$$

Знайдемо і порівняємо граничну  $\Delta_n^*$  та істинну  $\Delta_n = |I - I_n|$  абсолютні похибки.

Щоб обчислити граничну абсолютну похибку  $\Delta_n^*$ , знайдемо похідну підінтегральної функції:  $y' = -1/(x+2)^2$ . Найбільше за

модулем значення цієї похідної на відрізку  $[0;1]$  дорівнює  $M_1 = |y'(0)| = 0,25$ . Тоді  $\Delta_n^* = ((1-0)^2 / (2 \cdot 4)) \cdot 0,25 \approx 0,03125$ .

Істинна абсолютна похибка  $\Delta_n = |0,40547 - 0,42702| \approx 0,02155$ . Можемо перекоонатися, що істинна похибка не перевищує граничної:  $\Delta_n = 0,02155 < 0,03125 = \Delta_n^*$ .

б) Обчислимо наближене значення інтеграла за формулою трапецій:

$$I_n \approx ((b-a)/4) \cdot (y_0/2 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4/2) = ((1-0)/4) \times \\ \times (0,5/2 + 0,44444 + 0,4 + 0,36364 + 0,33333/2) \approx 0,40619.$$

Знайдемо граничну  $\Delta_n^*$  та істинну  $\Delta_n$  абсолютні похибки і порівняємо їх:

$$y''(x) = 6/(x+2)^4; \quad M_2 = |y''(0)| = 0,25;$$

$$\Delta_n^* = ((1-0)^3 / (12 \cdot 4^2)) \cdot 0,25 \approx 0,0013;$$

$$\Delta_n = |0,40547 - 0,40619| \approx 0,00072; \quad \Delta_n < \Delta_n^*.$$

в) Обчислимо наближене значення визначеного інтеграла за формулою Симпсона:

$$I_n \approx ((b-a)/(3 \cdot 4)) \cdot (y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) = \\ = ((1-0)/(3 \cdot 4)) \cdot (0,5 + 0,33333 + 4 \cdot (0,44444 + \\ + 0,36364) + 2 \cdot 0,4) = 4,86565/12 \approx 0,40547$$

Знайдемо граничну  $\Delta_n^*$  та істинну  $\Delta_n$  абсолютні похибки і порівняємо їх:

$$y^{IV} = 24/(x+2)^5; \quad M_4 = |y^{IV}(0)| = 0,75;$$

$$\Delta_n^* = ((1-0)^5 / (180 \cdot 4^4)) \cdot 0,75 \approx 0,00002;$$

$$\Delta_0 = |0,40547 - 0,40547| \approx 0,00000; \quad \Delta_n < \Delta_n^*.$$

Порівнюючи результати обчислень, можна зробити висновок, що найближче до точного значення інтеграла, як очікувалося, дає

формула парабол. ■

Приклад 2. Застосовуючи формулу Симпсона, обчислити наближено визначений інтеграл  $I = \int_0^1 x^3 e^{x^3} dx$  з точністю до  $\varepsilon = 0,001$ .

□ За умовою треба знайти значення інтеграла до третього десяткового знака після коми (з точністю  $\varepsilon = 0,001$ ). Тому обчислення будемо проводити з округленням до четвертого (запасного) знака після коми.

Продиференціюємо підінтегральну функцію  $y = x^3 e^{x^3}$ :

$$y' = 3e^{x^3} (x^5 + x^2); \quad y'' = 3e^{x^3} (3x^7 + 8x^4 + 2x); \quad y''' = 6e^{x^3} (9x^9 + 45x^6 + 38x^3 + 2); \quad y^{IV} = 3e^{x^3} (27x^{11} + 216x^8 + 384x^5 + 120x^2).$$

Оскільки четверта похідна  $y^{IV} > 0$  і на відрізку інтегрування  $[0;1]$  її похідна (п'ята)

$$y^{(5)} = 3e^{x^3} (81x^{13} + 945x^{10} + 2880x^7 + 2280x^4 + 240x) \geq 0,$$

то  $|y^{IV}| = y^{IV}$  монотонно зростає і набуває найбільшого значення при  $x = 1$ :

$$M_4 = \max_{x \in [0;1]} |y^{IV}(x)| = y^{IV}(1) = 2241e \approx 6091,6655.$$

Отже, гранична абсолютна похибка:

$$\Delta_n^* = ((1-0)^5 / (180n^4)) M_4 \approx 33,8426/n^4.$$

Нерівність  $\Delta_n^* \leq \varepsilon$  розв'язуємо підбором:

$$33,8426/n^4 \leq 0,001; \quad n = 14: 33,8426/14^4 < 0,0009 < 0,001;$$

а при  $n = 13$ :  $33,8426/13^4 > 0,0011 > 0,001$ , отже при  $n \geq 14$  виконується нерівність  $\Delta_n^* < 0,001$ .

Візьмемо  $n = 20$ . Такий вибір виправданий тим, що при цьому значенні  $n$  крок інтегрування  $h$  буде скінченним десятковим

дробом:  $h = 1/20 = 0,05$ . Таким чином, розіб'ємо відрізок інтегрування  $[0;1]$  на  $n = 20$  рівних частин точками  $x_0 = a = 0$ ,  $x_1 = 0,05$ ,  $x_2 = 0,1$ , ...,  $x_{20} = b = 1$ . Обчислимо значення  $y_0, y_1, \dots, y_{20}$  підінтегральної функції  $y = x^3 e^{x^3}$  у відповідних точках і занесемо результат у таблицю:

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
$y_k$	0	0,0001	0,001	0,0034	0,0081	0,0159

$k$	6	7	8	9	10	11	12
$x_k$	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6
$y_k$	0,0277	0,0448	0,0682	0,0998	0,1416	0,1965	0,2681

$k$	12	13	14	15	16	17
$x_k$	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85
$y_k$	0,2681	0,3614	0,4833	0,6433	0,8534	1,1349

$k$	18	19	20
$x_k$	0,9	0,95	1
$y_k$	1,5112	2,0208	2,7183

Далі за формулою парабол знайдемо наближене значення інтеграла:

$$\begin{aligned}
 I_n \approx & ((b-a)/(3 \cdot 20)) \cdot (y_0 + y_{20} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11} + \\
 & + y_{13} + y_{15} + y_{17} + y_{19}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10} + y_{12} + y_{14} + \\
 & + y_{16} + y_{18})) = (1/60) \cdot (0 + 2,7183 + 4(0,0001 + 0,0034 + \\
 & + 0,0159 + 0,0448 + 0,0998 + 0,1965 + 0,3614 + 0,6433 + 1,1349 + \\
 & + 2,0208) + 2 \cdot (0,001 + 0,0081 + 0,0277 + 0,0682 + 0,1416 + \\
 & + 0,2681 + 0,4833 + 0,8534 + 1,5112)) = 0,458785 \approx 0,459. \blacksquare
 \end{aligned}$$

### 5.2.5. Вибір кроку інтегрування і практична оцінка похибки

Величина кроку  $h$  повинна бути такою, щоб забезпечити задану точність  $\varepsilon$  обчислення за прийнятою квадратурною формулою, не допускаючи при цьому значних перевитрат обчислювальних ресурсів. Розглянемо основні способи вибору кроку інтегрування. При цьому похибками значень функції у вузлах і похибками заокруглення знехтуємо.

Вибір кроку за аналітичною оцінкою залишкового члена. Нехай потрібно обчислити інтеграл з точністю  $\varepsilon$  за квадратурною формулою, для якої відомий аналітичний вираз граничної абсолютної похибки  $\Delta_h^*$ , що служить оцінкою залишкового члена  $R_n$ :  $|R_n| \leq \Delta_h^*$ . Вибирають крок  $h$  таким, щоб виконувалась нерівність  $\Delta_h^* < \varepsilon$ .

Практична оцінка похибки і вибір кроку за правилом Рунге. В аналітичні вирази оцінки похибки розглянутих квадратурних формул входять величини  $M_r = \max_{x \in [a; b]} |f^{(r)}(x)|$  ( $r = 1$  – для формул лівих і правих прямокутників,  $r = 2$  – для формули трапецій,  $r = 4$  – для формули Симпсона), знаходження яких нерідко приводить до громіздких обчислень або взагалі неможливе. Тоді можна скористатися методом Рунге (методом подвоєння кроку), який розглянутий вище в пункті 5.1. Згідно з ним обчислюють інтеграл  $I$  за вибраною квадратурною формулою два рази: спочатку з кроком  $2h$ , потім з кроком  $h$ , тобто подвоюють число  $n$ . Як результат отримують два значення інтеграла  $I_{2h}$  та  $I_h$ . Для наближеної оцінки граничної абсолютної похибки використовують першу формулу Рунге

$$\Delta_h^* \approx |I_h - I_{2h}| / (2^r - 1).$$

Якщо  $\Delta_h^* \approx |I_h - I_{2h}| / (2^r - 1) < \varepsilon$ , то  $h$  – шукане значення кроку. При цьому за другою формулою Рунге знаходять уточнене значення інтеграла

$$I_{ym} \approx I_h + (I_h - I_{2h}) / (2^r - 1).$$

Якщо ж  $\Delta_h^* \approx |I_h - I_{2h}| / (2^r - 1) \geq \varepsilon$ , то розрахунок повторюють з вдвічі меншим кроком  $h/2$  і т.д.

За початковий крок можна прийняти  $h \approx \sqrt[r]{\varepsilon}$ .

Зауваження 1. Для підтвердження можливості застосування методу Рунге до прийнятої квадратурної формули на практиці перевіряють справедливість нерівності

$$\left| 2^r (I_{h/2} - I_h) / (I_h - I_{2h}) - 1 \right| < 0,1.$$

Зауваження 2. Розглянуті вище квадратурні формули прямокутників, трапецій і парабол зручні тим, що при зменшенні вдвоє кроку  $h$  всі обчислені раніше значення підінтегральної функції можуть бути використані повторно.

Приклад. Знайти наближено за формулою Симпсона визначений інтеграл  $I = \int_0^1 \frac{2x dx}{1+x^2}$ , поклавши  $n = 8$ . Оцінити граничну абсолютну

похибку  $\Delta_h^*$  одержаного наближення  $I_h$ , користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку). За цим же методом знайти уточнене наближене значення інтеграла  $I_{ym}$ . Обчислити абсолютну похибку  $\Delta_{ym}$  цього наближення  $I_{ym}$ , одержавши точне значення інтеграла  $I$  за формулою Ньютона – Лейбниця.

Вказівка. Похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до сьомого десяткового знака після коми.

□ Розіб'ємо заданий відрізок інтегрування  $[0;1]$  на  $n = 8$  рівних частин з кроком  $h = (b - a) / n = (1 - 0) / 8 = 0,125$  точками  $x_k$ ,  $k = \overline{0, n}$  і обчислимо відповідні значення  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  підінтегральної функції  $f(x)$ . Запишемо результат у таблицю:

$k$	0	1	2	3	4
$x_k$	0	0,125	0,25	0,375	0,5
$y_k$	0,0000000	0,2461538	0,4705882	0,6575342	0,8000000

$k$	5	6	7	8
$x_k$	0,625	0,75	0,875	1
$y_k$	0,8988764	0,9600000	0,9911504	1,0000000

Далі за формулою парабол при кроці  $h = 0,125$  дістанемо наближені значення інтеграла  $I_h$  і  $I_{2h}$  :

$$I_h = (h/3) \cdot (y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)) = \\ = (0,125/3) \cdot (0 + 1 + 4(0,2461538 + 0,6575342 + 0,8988764 + \\ + 0,9911504) + 2(0,4705882 + 0,8 + 0,96)) = 0,6931682 ;$$

$$I_{2h} = (2h/3) \cdot (y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) = (2 \cdot 0,125/3) \cdot (0 + \\ + 1 + 4(0,4705882 + 0,96) + 2 \cdot 0,8) = 0,6935294 .$$

Тоді за першою формулою Рунге

$$\Delta_h^* \approx \frac{|I_h - I_{2h}|}{2^r - 1} = \frac{|0,6931682 - 0,6935294|}{2^4 - 1} = 0,0000241 .$$

Оскільки  $\Delta_h^* \approx 0,0000241 < 0,5 \cdot 10^{-4}$ , то значення  $I_h$  повинно бути вірним до четвертого знака після коми.

Знайдемо уточнене значення інтеграла  $I_{ym}$  за другою формулою Рунге:

$$I_{ym} \approx I_h + (I_h - I_{2h}) / (2^r - 1) = 0,6931682 + (0,6931682 - \\ - 0,6935294) / (2^4 - 1) = 0,6931441 .$$

За формулою Ньютона – Лейбниця обчислимо точне значення інтеграла  $I$  :

$$I = \int_0^1 \frac{2x dx}{1+x^2} = \left| u = 1+x^2; du = 2x dx; u_1 = 1; u_2 = 2 \right| = \int_1^2 \frac{du}{u} = \\ = \ln |u| \Big|_1^2 = \ln 2 = 0,6931472 .$$

Тоді

$$\Delta_{ym} = |I - I_{ym}| = |0,6931472 - 0,6931441| = 0,0000031 . \blacksquare$$

### 5.2.6. Чисельне інтегрування методом Монте-Карло

Згідно з *методом статистичних випробувань (методом Монте-Карло)* розглядається деяка випадкова величина  $\eta$ , *математичне сподівання* якої  $M[\eta]$  дорівнює шуканій величині  $z$ :  $M[\eta] = z$ . Проводиться серія  $n$  незалежних випробувань випадкової величини  $\eta$  і одержується *вибірка* – послідовність випадкових чисел  $\eta_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , за якою обчислюється *вибіркове середнє*

$$\bar{\eta}_n = (1/n) \sum_{k=1}^n \eta_k$$

– статистична оцінка  $M[\eta]$ . Тоді за наближене значення  $z_n$  шуканої величини  $z$  приймається вказана оцінка:

$$z_n = \bar{\eta}_n = (1/n) \sum_{k=1}^n \eta_k.$$

Зазначимо, що при  $n > 10$  з досить близькою до одиниці ймовірністю  $P$  ( $P \approx 0,997$ ) для абсолютної похибки  $\Delta_n = |z - z_n|$  (за відомим правилом “трех сигм”) справджується нерівність

$$\Delta_n < 3\sigma_n / \sqrt{n}, \text{ де } \sigma_n = \sqrt{(1/(n-1)) \sum_{k=1}^n (\eta_k - \bar{\eta}_n)^2}$$

– статистична оцінка *середнього квадратичного відхилення* випадкової величини  $\eta$ .

Нехай необхідно знайти наближене значення  $I_n(f)$  визначеного інтеграла  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ . Перейдемо до нової змінної  $t$  за допомогою рівності  $x = a + (b - a)t$  і одержимо

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = (b - a) \int_0^1 \varphi(t) dt, \text{ де } \varphi(t) = f(a + (b - a)t).$$

Розглянемо рівномірно розподілену на відрізку  $[0; 1]$  випадкову величину  $v$  зі щільністю розподілу  $p_v(t)$ :

$$p_v(t) = \begin{cases} 1, & x < 0 \text{ або } x > 1; \\ 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Тоді функція  $\eta = \varphi(v)$  також буде випадковою величиною. За



означенням математичного сподівання дістанемо

$$M[\eta] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) p_v(t) dt = \int_0^1 \varphi(t) \cdot 1 dt = \int_0^1 \varphi(t) dt.$$

Читаючи цю рівність справа наліво, приходимо до висновку: визначений інтеграл  $\int_0^1 \varphi(t) dt$  дорівнює математичному сподіванню випадкової величини  $\eta = \varphi(v)$ . Тоді за методом Монте-Карло дістанемо:

$$\int_0^1 \varphi(t) dt \approx \bar{\eta}_n = (1/n) \sum_{k=1}^n \eta_k = (1/n) \sum_{k=1}^n \varphi(v_k).$$

Звідси для початкового інтеграла  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$  одержимо наближену рівність

$$I(f) = (b-a) \int_0^1 \varphi(t) dt \approx ((b-a)/n) \sum_{k=1}^n \varphi(v_k)$$

$$\text{або } \boxed{I_n(f) = ((b-a)/n) \sum_{k=1}^n f(x_k)},$$

де  $\boxed{x_k = a + (b-a)v_k}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ;  $v_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  – незалежні реалізації рівномірно розподіленої на відрізку  $[0;1]$  випадкової величини  $v$ .

Відповідно гранична абсолютна похибка  $\Delta_n^*$  цього наближення  $I_n(f)$  визначається з імовірністю  $P \approx 0,997$  за формулою

$$\boxed{\Delta_n^* = 3 \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n ((b-a)f(x_k) - I_n(f))^2}}.$$

Зауваження 1. Для генерації послідовності незалежних випадкових величин  $v_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  найчастіше використовуються спеціальні комп'ютерні процедури – **датчики випадкових чисел**, що формують серії псевдовипадкових чисел, які мають властиві випадковим величинам статистичні характеристики.

Зауваження 2. Перевагою розглянутого методу чисельного інтегрування є те, що його точність не залежить від гладкості підінтегральної функції, Недолік такого способу полягає в імовірнісному характері результату.

Приклад. Поклавши  $n = 22$ , за методом Монте-Карло знайти наближене значення  $I_n$  визначеного інтеграла  $I = \int_0^2 (1/(1+x^2))dx$  і відповідну граничну абсолютну похибку  $\Delta_n^*$ . Обчислити абсолютну похибку  $\Delta_n$  цього наближення  $I_n$ , одержавши точне значення інтеграла  $I$  за формулою Ньютона – Лейбніца.

Вказівка. Похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ За допомогою генератора випадкових чисел сформуємо послідовність  $v_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , де  $n = 22$ , знайдемо відповідні точки  $x_k = a + (b - a)v_k = 0 + (2 - 0)v_k = 2v_k$ , в яких обчислимо значення підінтегральної функції  $y_k = f(x_k) = 1/(1+x_k^2)$ . Складемо таблицю:

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$v_k$	0,158	0,105	0,343	0,918	0,807	0,097	0,168	0,719
$x_k$	0,316	0,210	0,686	1,836	1,614	0,194	0,336	1,438
$y_k$	0,909	0,958	0,680	0,229	0,277	0,964	0,899	0,326

$k$	8	9	10	11	12	13	14	15
$v_k$	0,945	0,560	0,198	0,420	0,361	0,600	0,964	0,314
$x_k$	1,890	1,120	0,396	0,840	0,722	1,200	1,928	0,628
$y_k$	0,219	0,444	0,864	0,586	0,657	0,410	0,212	0,717

$k$	16	17	18	19	20	21	22
$v_k$	0,677	0,305	0,273	0,449	0,318	0,033	0,892
$x_k$	1,354	0,610	0,546	0,898	0,636	0,066	1,784
$y_k$	0,353	0,729	0,770	0,554	0,712	0,996	0,239

За методом Монте-Карло знаходимо:

$$I_n = ((b - a)/n) \sum_{k=1}^n y_k = ((2 - 0)/22) \cdot (0,909 + 0,958 + 0,680 +$$

$$\begin{aligned}
 &+ 0,229 + 0,277 + 0,964 + 0,899 + 0,326 + 0,219 + 0,444 + 0,864 + \\
 &+ 0,586 + 0,657 + 0,410 + 0,212 + 0,717 + 0,353 + 0,729 + 0,770 + \\
 &+ 0,554 + 0,712 + 0,996 + 0,239 = 1,246 ;
 \end{aligned}$$

$$\Delta_n^* = 3 \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n ((b-a)f(x_k) - I_n)^2} = 0,280 .$$

За формулою Ньютона – Лейбниція обчислимо точне значення інтеграла  $I$  :

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^2 = \arctg 2 = 1,107 .$$

Знайдемо абсолютну похибку  $\Delta_n$  одержаного наближення  $I_n$  :

$$\Delta_n = |I - I_n| = |1,107 - 1,246| = 0,139 . \quad \blacksquare$$

## 6. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

### 6.1. Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

Нехай *звичайне диференціальне рівняння першого порядку*  $F(x, y(x), y'(x)) = 0$  можна подати у *нормальній формі*

$$y'(x) = f(x, y(x)) .$$

Його *розв'язком* є диференційовна функція  $y(x)$ , що при підстановці в рівняння перетворює його у вірну тотожність. На рис. 22 наведено графік розв'язку диференціального рівняння, який називається *інтегральною кривою*.

Геометричною інтерпретацією похідної  $y'(x)$  у кожній точці  $(x, y)$  є тангенс кута  $\alpha$  нахилу дотичної до інтегральної кривої, що проходить через цю точку, тобто:  $k = \operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$  (рис. 22).

Рівняння  $y'(x) = f(x, y(x))$  має цілу сім'ю розв'язків *–за-*

**загальний розв'язок**  $y = y(x, C)$ , де  $C$  – довільна стала. При конкретному значенні  $C$  із загального розв'язку одержуємо **частинний розв'язок**. Щоб виділити один певний частинний розв'язок, диференціальне рівняння найчастіше доповнюють **початковою умовою**  $y(x_0) = y_0$ , де  $x_0$  – задане **початкове значення аргументу**, а  $y_0$  – відповідно задане **початкове значення функції**.

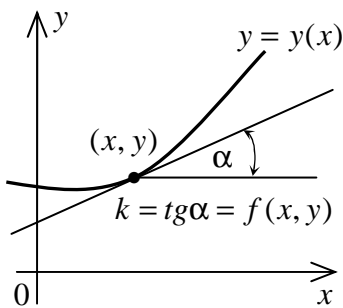


Рис. 22

**Задача Коші** полягає у тому, щоб відшукати функцію  $y = y(x)$ , яка задовольняє рівнянню  $y'(x) = f(x, y(x))$  і початковій умові  $y(x_0) = y_0$ . Геометричний зміст цієї задачі: знайти інтегральну криву  $y = y(x)$ , що проходить через задану точку  $M(x_0, y_0)$ . Звичайно визначають розв'язок задачі Коші на відрізку, який розташований праворуч від

початкового значення  $x_0$ , тобто для  $x \in [x_0, X]$ , де  $X > x_0$ .

**Теорема.** Нехай права частина  $f(x, y)$  диференціального рівняння  $y'(x) = f(x, y(x))$  визначена і неперервна при  $x_0 \leq x \leq X$ ,  $-\infty < y < +\infty$  і задовольняє **умові Ліпшиця** для  $y$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

де  $L$  – деяка константа (**стала Ліпшиця**), а  $y_1, y_2$  – довільні значення. Тоді для кожного початкового значення  $y_0$  існує єдиний розв'язок  $y(x)$  задачі Коші для  $x \in [x_0, X]$ . (Без доведення).

**Зауваження 1.** Ця теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші неконструктивна – не вказує способу побудови існуючого розв'язку.

**Приклад.** Розв'язати аналітично задачу Коші: знайти частинний розв'язок диференціального рівняння  $y' = x/y^2$ , який задовольняє заданій початковій умові  $y(0) = 1$ .

Обчислити значення  $y(x_k)$  отриманого аналітичного розв'яз-

ку  $y(x)$  на відрізку  $[0;1]$  у рівновіддалених вузлах  $x_k = x_{k-1} + h$ ;  $x_0 = 0$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $n = 10$  зі сталим кроком  $h = 0,1$ , скласти відповідну таблицю і побудувати графік аналітичного розв'язку  $y = y(x)$ .

□ Розв'яжемо задану задачу Коші аналітично. Дане рівняння допускає відокремлення змінних:  $y^2 dy = x dx$ . Далі проінтегруємо ліву і праву частини:  $y^3/3 = x^2/2 + C/3$ . Звідси дістанемо  $y = \sqrt[3]{1,5x^2 + C}$  – загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Підставимо у нього початкову умову  $y(0) = 1$ :  $1 = \sqrt[3]{C}$   $\Rightarrow C = 1$ . Тоді  $y = \sqrt[3]{1,5x^2 + 1}$  – шуканий частинний розв'язок.

Обчислимо значення  $y(x_k)$  отриманого аналітичного розв'язку  $y(x)$  на відрізку  $[0;1]$  у рівновіддалених вузлах з кроком  $h = 0,1$  і складемо відповідну таблицю:

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y(x_k)$	1	1,005	1,0196	1,0431	1,0743	1,1120

$k$	6	7	8	9	10
$x_k$	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y(x_k)$	1,1548	1,2016	1,2515	1,3035	1,3572

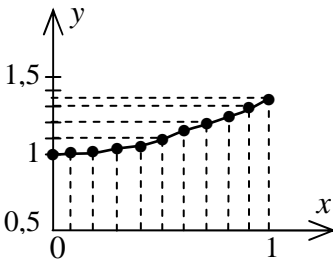


Рис. 23

Побудуємо інтегральну криву – графік аналітичного розв'язку  $y = y(x)$  (рис. 23), сполучивши послідовні точки плавною лінією. ■

Зауваження 2. Досі невідомі загальні методи точного аналітичного розв'язування диференціальних рівнянь. Тому до більшості з них застосовні тільки наближені методи.

## 6.2. Метод послідовних наближень.

### Поняття про чисельні методи розв'язування задачі Коші

**Метод послідовних наближень (метод Пікара)** відноситься до **наближених аналітичних способів** розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ . За цим методом здійснюється перехід до еквівалентного **інтегрального рівняння**

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,$$

яке розв'язується за допомогою послідовних наближень аналогічно методу простих ітерацій розв'язування скінченних рівнянь.

Шуканий розв'язок  $y(x)$  знаходиться як границя послідовності функцій  $y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x), \dots$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x),$$

де  $y_0(x) = y_0$ ;  $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt$ ;  $y_2(x) = y_0 +$

$$+ \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt; \dots; \boxed{y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt}.$$

Абсолютна похибка  $\Delta_n = |R_n(x)| = |y(x) - y_n(x)|$  оцінюється за співвідношенням

$$\Delta_n = |R_n(x)| = |y(x) - y_n(x)| \leq \Delta_n^* = M(KC)^n / (Kn!),$$

де  $|\partial f / \partial y| \leq K$ ;  $|f(x, y)| \leq M$ ;  $|x - x_0| \leq A$ ;  $|y - y_0| \leq B$ ;  
 $C = \min\{A, B/M\}$ .

Практично число необхідних ітерацій  $n$  визначається з умови  $\max_{x \in [x_0; X]} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \varepsilon$ , де  $[x_0; X]$  – відрізок, на якому розв'язується задача Коші;  $\varepsilon$  – максимально допустима абсолютна похибка обчислень.

Приклад. Методом Пікара знайти третє наближення  $y_3(x)$  до розв'язку задачі Коші:  $y' = y/x^2 - 4x$ ,  $y(1) = -1$ .

□ За умовою  $y_0(x) = -1$ . Далі за методом Пікара знаходимо:

$$y_1(x) = -1 + \int_1^x (-1/t^2 - 4t) dt = -1 + (1/t - 2t^2) \Big|_1^x = 1/x - 2x^2;$$

$$y_2(x) = -1 + \int_1^x (1/t^3 - 2 - 4t) dt = -1 + \left( -1/(2t^2) - 2t - 2t^2 \right) \Big|_1^x =$$

$$= 7/2 - 1/(2x^2) - 2x - 2x^2; \quad y_3(x) = -1 + \int_0^x \left( 7/(2t^2) - 1/(2t^4) - \right.$$

$$\left. - 2/t - 2 - 4t \right) dt = -1 + \left( -7/(2t) + 1/(6t^3) - 2 \ln |t| - 2t - 2t^2 \right) \Big|_1^x =$$

$$= 19/3 - 7/(2x) + 1/(6x^3) - 2 \ln |x| - 2x - 2x^2. \quad \blacksquare$$

**Зауваження 1.** Метод Пікара особливо зручний, коли відповідні інтеграли обчислюються аналітично (в замкненій формі), проте для інтегрування можна використовувати також квадратурні формули. Із-за складності обчислень на практиці цей метод застосовується для знаходження лише декількох перших наближень.

Навіть для простих диференціальних рівнянь першого порядку не завжди можна отримати аналітичний розв'язок. Тому значне застосування мають чисельні методи розв'язування, що дозволяють визначити наближені значення шуканого розв'язку  $y(x)$  на відрізку  $[x_0, X]$  у **вузлах**  $x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  деякої одновимірної **сітки**  $\omega_n = \{x_k : x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = X\}$  з нерівномірним, у загальному випадку, **кроком**  $h_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . При цьому **наближений розв'язок** отримують у вигляді **сіткової функції**  $y_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , що задається таблицею, в якій кожному вузлу  $x_k$  сітки  $\omega_n$  відповідає наближене значення розв'язку  $y_k \approx y(x_k)$ .

Чисельні методи розв'язування задачі Коші діляться на: **однокрокові** та **багатокрокові**, **явні** та **неявні**.

**Однокроковий метод** використовує дані про розв'язок  $y(x)$  тільки в одній попередній точці. Проте деякі з них передбачають обчислення значень правої частини  $f(x, y)$  у проміжних точках.

**А  $m$ -кроковий метод** для обчислення поточного значення

розв'язку  $y_k$  потребує даних про розв'язок у  $m$  попередніх точках  $x_{k-i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m \geq 1$ .

В **явних методах** поточне значення розв'язку виражається в явній формі і знаходиться безпосередньо через його відомі значення на попередніх кроках за допомогою скінченного числа операцій. (Ці методи не потребують ітерацій).

У **неявних методах** знаходження поточного значення розв'язку зводиться до наближеного розв'язування скінченного рівняння. Звичайно, для цього застосовують метод простих ітерацій або метод Ньютона.

Нехай  $y(x)$  – точний розв'язок задачі Коші, а  $y_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  – її наближений чисельний розв'язок. **Глобальною похибкою** (або просто **похибкою**) чисельного методу називають сіткову функцію  $R_k = y(x_k) - y_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , задану у вузлах  $x_k$  сітки  $\omega_n$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . За **абсолютну похибку** приймають величину  $\Delta_n = \max_{1 \leq k \leq n} |R_k|$ . **Локальною похибкою** на  $k$ -му кроці **однокроково-го методу** називають  $l_k = \tilde{y}_k - y(x_k)$ , де  $\tilde{y}_k$  – чисельний розв'язок, отриманий при умові, що за наближення  $y_{k-1}$  до розв'язку на попередньому кроці взято його точне значення:  $y_{k-1} = y(x_{k-1})$ . **Локальною похибкою** на  $k$ -му кроці  **$t$ -крокового методу** називають величину  $l_k = \tilde{y}_k - y(x_k)$ , де  $\tilde{y}_k$  – чисельний розв'язок, одержаний при умові, що за наближення  $y_{k-i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$  до розв'язку на  $t$  попередніх кроках взято його точні значення:  $y_{k-i} = y(x_{k-i})$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ .

Для оцінки якості наближення на відрізку  $[x_0; x_n]$  також використовується **середньоквадратичне відхилення**  $\sigma_n$  наближених значень  $y_k$  розв'язку від точних  $y(x_k)$ , яке обчислюється за формулою

$$\sigma_n = \sqrt{(1/n) \sum_{k=1}^n (y(x_k) - y_k)^2}.$$

Чисельний метод розв'язування задачі Коші називається **збіж-**



*ним*, якщо при необмеженому згущенні сітки  $\omega_n$  абсолютна похибка  $\Delta_n$  прямує до нуля:  $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_n = 0$ , де  $h = \max_{1 \leq k \leq n} h_k$ .

Чисельний метод має *r-й порядок точності* ( $r > 0$ ), якщо для абсолютної похибки  $\Delta_n$  справджується оцінка  $\Delta_n \leq Ch^r$ , де  $C$  – деяка додатна стала.

Зауваження 2. Похибка наближеного розв'язку тим чи іншим чисельним методом виражається через похідні шуканого розв'язку, які наперед невідомі. Крім того, попередні оцінки похибки, як правило, є сильно завищеними. Тому на практиці у випадку рівномірної сітки двічі проводять розрахунки за однією й тією ж схемою  $r$ -го порядку точності при кроках  $h$  і  $2h$ . Як результат отримують відповідно два наближення  $y(x, h)$  і  $y(x, 2h)$  до точного розв'язку  $y(x)$ . Використовуючи першу формулу Рунге, для оцінки граничної абсолютної похибки  $\Delta_n^*$  наближеного розв'язку  $y(x, h)$  на густішій сітці можна дістати співвідношення

$$\Delta_n^* \approx \left( \frac{1}{2^r - 1} \right) \max_x |y(x, h) - y(x, 2h)|,$$

де максимум береться за всіма співпадаючими вузлами  $x$  обох сіток. Часто застосовують також більш грубу оцінку

$$\Delta_n^* \approx \max_x |y(x, h) - y(x, 2h)|.$$

### 6.3. Чисельні явні однокрокові методи розв'язування задачі Коші

#### 6.3.1. Явний метод Ейлера

*Явний метод Ейлера* є найпростішим чисельним методом розв'язування задачі Коші.

Нехай треба розв'язати задачу Коші  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  на відрізку  $x \in [x_0, X]$ , де  $X > x_0$ . Візьмемо сталий крок  $h = (X - x_0)/n$  і побудуємо рівномірну сітку з вузлами  $x_k = x_0 + kh$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

У кожному вузлі  $x_{k-1}$ ,  $k=1, \dots, n$  замінимо похідну  $y'$  скінченною різницею вперед  $y'_{k-1} \approx (y_k - y_{k-1})/h$ , а праву частину  $f(x, y)$  обчислимо в точці  $(x_{k-1}, y_{k-1})$ . Тоді на кожному елементарному відрізку  $[x_{k-1}, x_k]$  дістанемо наближену рівність

$$(y_k - y_{k-1})/h = f(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k=1, \dots, n.$$

Звідси отримаємо  $y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1})$  ( $k=1, \dots, n$ ) – **різницеве рівняння**, що служить наближенням даного диференціального рівняння з локальною похибкою другого порядку:  $l_k = O(h^2)$ . Абсолютна похибка має перший порядок:  $\Delta_n = O(h)$ .

Додаючи початкову умову  $y_0 = y(x_0)$ , одержимо **різницеву задачу Коші**, що апроксимує відповідну диференціальну задачу.

Таким чином, метод Ейлера задається розрахунковими формулами:

$$y_k = y_{k-1} + \Delta y_k, \quad \Delta y_k = hf(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k=1, \dots, n$$

і забезпечує перший порядок точності ( $r=1$ ).

**Геометрична інтерпретація:** якщо кожну пару сусідніх точок  $M_{k-1}(x_{k-1}; y_{k-1})$  і  $M_k(x_k; y_k)$ ,  $k=1, \dots, n$  сполучити відрізком прямої, то шукана інтегральна крива  $y = y(x)$ , що проходить через точку  $M_0(x_0; y_0)$ , наближено замінюється **ламанною Ейлера**  $M_0M_1M_2 \dots M_n$ . Кожна ланка  $M_{k-1}M_k$  цієї ламаної має напрям, який співпадає з напрямом дотичної в точці  $M_{k-1}$  до тієї інтегральної кривої, що проходить через цю точку.

**Зауваження.** Описаний метод Ейлера – явний і однокроковий зі сталою довжиною кроку  $h$ . Він досить грубий і використовується, в основному, для отримання орієнтовних значень шуканого розв'язку.

**Приклад.** Чисельно розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння  $y' = x/y^2$  з початковою умовою  $y(0) = 1$  на відрізку  $[0; 1]$  з кроком  $h = 0,1$  методом Ейлера і побудувати графік наближеного розв'язку  $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ . Знайти середньоквадратичне від-

хилення  $\sigma_n$  наближених значень  $y_k$  розв'язку від точних  $y(x_k)$ .

За формулою Рунге оцінити граничну абсолютну похибку  $\Delta_n^*$ .

**Вказівка.** Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Оскільки  $f(x, y) = x/y^2$ ,  $y(0) = 1$ , то за методом Ейлера маємо:

$$y_0 = y(x_0) = y(0) = 1; f(x_0, y_0) = 0; \Delta y_1 = 0,1 \cdot 0 = 0;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1 = 1; f(x_1, y_1) = 0,1/1 = 0,1; \Delta y_2 = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01;$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_2 = 1 + 0,01 = 1,01; f(x_2, y_2) = 0,2/1,01^2 = 0,1961;$$

$$\Delta y_3 = 0,1 \cdot 0,1961 = 0,0196; y_3 = y_2 + \Delta y_3 = 1,01 + 0,0196 = 1,0296; f(x_3, y_3) = 0,2/1,0296^2 = 0,283; \Delta y_4 = 0,1 \cdot 0,283 = 0,0283; y_4 = y_3 + \Delta y_4 = 1,0296 + 0,0283 = 1,0579;$$

$$f(x_4, y_4) = 0,4/1,0579^2 = 0,3574; \Delta y_5 = 0,1 \cdot 0,3574 = 0,0357;$$

$$y_5 = y_4 + \Delta y_5 = 1,0579 + 0,0357 = 1,0936; f(x_5, y_5) = 0,5 : 1,0936^2 = 0,4181; \Delta y_6 = 0,1 \cdot 0,4180 = 0,0418; y_6 = y_5 + \Delta y_6 = 1,0936 + 0,0418 = 1,1354; f(x_6, y_6) = 0,6/1,1354^2 = 0,4654; \Delta y_7 = 0,1 \cdot 0,4654 = 0,0465; y_7 = y_6 + \Delta y_7 = 1,1354 + 0,0465 = 1,1819; f(x_7, y_7) = 0,7/1,1819^2 = 0,5011; \Delta y_8 = 0,1 \cdot 0,5011 = 0,0501; y_8 = y_7 + \Delta y_8 = 1,1819 + 0,0501 = 1,2320;$$

$$f(x_8, y_8) = 0,8/1,232^2 = 0,5271; \Delta y_9 = 0,1 \cdot 0,5271 = 0,0527;$$

$$y_9 = y_8 + \Delta y_9 = 1,232 + 0,0527 = 1,2847;$$

$$f(x_9, y_9) = 0,9/1,2847^2 = 0,5453; \Delta y_{10} = 0,1 \cdot 0,5453 = 0,0545;$$

$$y_{10} = y_9 + \Delta y_{10} = 1,2847 + 0,0545 = 1,3392.$$

Одержані значення запишемо у таблицю:

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y_k$	1	1	1,01	1,0296	1,0579	1,0936
$f(x_k, y_k)$	0	0,1	0,1961	0,283	0,3574	0,4181

$k$	6	7	8	9	10
$x_k$	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y_k$	1,1354	1,1819	1,2320	1,2847	1,3392
$f(x_k, y_k)$	0,4654	0,5011	0,5271	0,5453	–

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 24), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення  $\sigma_n$  наближених значень  $y_k$  розв'язку  $y = y(x)$  від точних  $y(x_k)$ , які візьмемо з прикладу пункту 6.1:

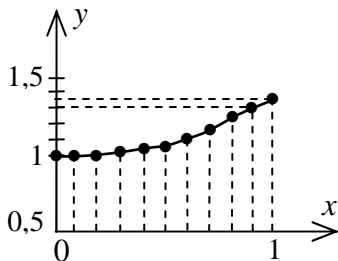


Рис. 24

$$\begin{aligned} \sigma_n = & \left( (1/10)((1,005 - 1)^2 + \right. \\ & + (1,0196 - 1,01)^2 + (1,0431 - \\ & - 1,0296)^2 + (1,0743 - 1,0579)^2 + \\ & + (1,112 - 1,0936)^2 + (1,1548 - \\ & - 1,1354)^2 + (1,2016 - 1,1819)^2 + \\ & + (1,2515 - 1,2320)^2 + (1,3035 - \\ & - 1,2847)^2 + (1,3572 - 1,3392)^2 \left. \right)^{1/2} \approx 0,0167. \end{aligned}$$

Аналогічно провівши розрахунки наближеного розв'язку з подвоєним кроком  $2h = 0,2$  (зробіть це самостійно), за формулою Рунге дістанемо оцінку граничної абсолютної похибки:

$$\begin{aligned} \Delta_n^* \approx & \left( 1/(2^1 - 1) \right) \max \{ |1,01 - 1|, |1,0579 - 1,04|, \\ & |1,1354 - 1,114|, |1,232 - 1,2107|, |1,3392 - 1,3199| \} \approx 0,02. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 6.3.2. Явний метод Рунге – Кутта

Серед методів високої точності одним з найпоширеніших є *метод Рунге – Кутта*. Він базується на розвиненні шуканого розв'язку  $y(x)$  в ряд Тейлора в околі точки  $x = x_k$  до членів  $r$ -го порядку включно. Не відтворюючи громіздкі доведення, приведемо розрахункові формули *явного методу Рунге – Кутта четвертого порядку точності* ( $r = 4$ ) для випадку сталого кроку інтегрування:

$$\begin{aligned}y_k &= y_{k-1} + \Delta y_k, \quad \Delta y_k = (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6; \\K_1 &= h f(x_{k-1}, y_{k-1}); \quad K_2 = h f(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_1/2); \\K_3 &= h f(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_2/2); \\K_4 &= h f(x_{k-1} + h, y_{k-1} + K_3), \quad k = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Зауваження 1. Метод Рунге – Кутта легко реалізувати, проте він потребує додаткових обчислень правих частин  $f(x, y)$  у проміжних точках інтервалу  $[x_{k-1}, x_k]$ . Цей метод є однокроковим, оскільки не використовує інформації про значення розв'язку у попередніх вузлах, крім найближчого.

Зауваження 2. Метод Ейлера можна розглядати як окремий простий варіант методу Рунге – Кутта.

Зауваження 3. Метод Рунге – Кутта, як і метод Ейлера, можна перенести на випадок системи звичайних диференціальних рівнянь.

Приклад. Чисельно розв'язати вказану задачу Коші на відрізку  $[0; 1]$  з кроком  $h = 0,1$  методом Рунге–Кутта четвертого порядку точності та побудувати графік наближеного розв'язку  $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ . Знайти середньоквадратичне відхилення  $\sigma_n$  наближених значень  $y_k$  розв'язку від точних  $y(x_k)$ .

а)  $y' = x/y^2, \quad y(0) = 1$ ;    б)  $y' = y^2/(x^2 + 1), \quad y(0) = -1$ .

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ а) Проведемо обчислення за методом Рунге – Кутта й одержані значення занесемо у таблицю:

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$K_1$	–	0,0000	0,0099	0,0192	0,0276	0,0347
$K_2$	–	0,0050	0,0147	0,0236	0,0313	0,0378
$K_3$	–	0,0050	0,0146	0,0235	0,0312	0,0377
$K_4$	–	0,0099	0,0192	0,0276	0,0347	0,0404
$\Delta y_k$	–	0,0050	0,0146	0,0235	0,0312	0,0377
$y_k$	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0743	1,1120

$k$	6	7	8	9	10
$x_k$	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$K_1$	0,0404	0,0450	0,0485	0,0511	0,0530
$K_2$	0,0429	0,0469	0,0499	0,0521	0,0537
$K_3$	0,0428	0,0468	0,0499	0,0521	0,0537
$K_4$	0,0450	0,0485	0,0511	0,0530	0,0543
$\Delta y_k$	0,0428	0,0468	0,0499	0,0521	0,0537
$y_k$	1,1548	1,2016	1,2515	1,3036	1,3573

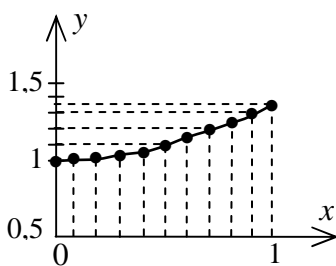


Рис. 25

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 25), сполучивши поспідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення  $\sigma_n$  наближених значень  $y_k$  розв'язку  $y = y(x)$  від точних  $y(x_k)$ , які візьмемо з прикладу пункту 6.1. Дістанемо  $\sigma_n \approx 0,0000$ .

б) Розв'язати самостійно. Точний аналітичний розв'язок одержується методом відокремлення змінних і має вигляд

$$y = -1/(\arctg x + 1). \blacksquare$$

## 6.4. Чисельні багатокрокові методи розв'язування задачі Коші

### 6.4.1. Явний чотирикроковий метод Адамса

Якщо в диференціальне рівняння  $y' = f(x, y)$  підставити його частинний розв'язок  $y = y(x)$ , що задовольняє початковій умові  $y(x_0) = y_0$ , то одержимо вірну тотожність  $y' = f(x, y(x))$ , де права частина є складеною функцією  $x$ :  $F(x) = f(x, y(x))$ . Для екстраполяції справа в околі кожного вузла  $x_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  рівномірної сітки зі сталим кроком  $h$  наближено замінимо цю функцію  $F(x) = f(x, y(x))$  інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполяції назад:

$$f(x, y(x)) \approx N_k(x) = f(x_k, y_k) + \frac{q}{1!} \Delta f(x_{k-1}, y_{k-1}) + \frac{q(q+1)}{2!} \times \\ \times \Delta^2 f(x_{k-2}, y_{k-2}) + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+k-1)}{k!} \Delta^k f(x_0, y_0),$$

де  $y_k = y(x_k)$ ,  $q = (x - x_k)/h$ ,  $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Проінтегруємо одержану тотожність на кожному елементарному відрізку  $[x_{k-1}, x_k]$ , застосовуючи вказані наближення, і дістанемо

$$y_k = y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x)) dx \approx y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} N_{k-1}(x) dx = y_{k-1} + \\ + h \int_0^1 N_{k-1}(x_{k-1} + qh) dq = y_{k-1} + h \int_0^1 (f(x_{k-1}, y_{k-1}) + \\ + q \Delta f(x_{k-2}, y_{k-2}) + (1/2)q(q+1) \Delta^2 f(x_{k-3}, y_{k-3}) + (1/6)(q+1) \times \\ \times (q+2) \Delta^3 f(x_{k-4}, y_{k-4}) + \dots) dq = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}) + \\ + (h^2/2) \Delta f(x_{k-2}, y_{k-2}) + (5h^3/12) \Delta^2 f(x_{k-3}, y_{k-3}) + \\ + (3h^4/8) \Delta^3 f(x_{k-4}, y_{k-4}) + \dots$$

Якщо обмежитися скінченними різницями третього порядку і виразити їх через значення функції, то після зведення подібних чле-

нів отримаємо розрахункові формули **явного чотирикрокового методу Адамса**

$$y_k = y_{k-1} + \Delta y_k; \quad \Delta y_k = (h/24)(55f(x_{k-1}, y_{k-1}) - 59 \times \\ \times f(x_{k-2}, y_{k-2}) + 37f(x_{k-3}, y_{k-3}) - 9f(x_{k-4}, y_{k-4})), \quad k = 4, 5, \dots,$$

що має четвертий порядок точності.

Зауваження 1. Якщо обмежитися двома членами у многочлені Ньютона, то отримаємо явний метод Ейлера.

Зауваження 2. Метод Адамса порівняно з методом Рунге – Кутта тієї ж точності є більш економічним, оскільки на кожному кроці потрібно обчислювати лише одне значення правої частини, а не чотири. Проте цей метод незручний тим, що неможливо розпочати розрахунки, маючи лише одне відоме значення  $y(x_0) = y_0$ . Для запуску методу Адамса потрібно додатково визначити  $y_1$ ,  $y_2$  і  $y_3$ , наприклад, тим же методом Рунге – Кутта. Це суттєво ускладнює процедуру. Крім того, на відміну від однокрокових, більшість багатокрокових методів, включаючи метод Адамса, не дозволяє легко змінювати крок  $h$  у процесі обчислень.

Приклад. Чисельно розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння  $y' = x/y^2$  з початковою умовою  $y(0) = 1$  на відрізку  $[0;1]$  з кроком  $h = 0,1$  чотирикроковим методом Адамса і побудувати графік наближеного розв'язку  $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ . Знайти середньоквадратичне відхилення  $\sigma_n$  наближених значень  $y_k$  розв'язку від точних  $y(x_k)$ .

Вказівка. Необхідні для запуску методу Адамса значення  $y_1$ ,  $y_2$  і  $y_3$  попередньо знайти за допомогою методу Рунге – Кутта (використати результати прикладу з пункту 6.3.2). Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ З умови задачі маємо  $f(x, y) = x/y^2$ ,  $y_0 = 1$ , а приклад з пункту 6.3.2 додатково дає значення  $y_1 = 1,0050$ ,  $y_2 = 1,0196$  і  $y_3 = 1,0431$ , одержані за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами



методу Адамса й отримані значення занесемо у таблицю:

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y_k$	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0742	1,1118
$f(x_k, y_k)$	0	0,0990	0,1924	0,2757	0,3466	0,4045
$\Delta y_k$	–	–	–	–	0,0311	0,0376

$k$	6	7	8	9	10
$x_k$	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y_k$	1,1546	1,2014	1,2513	1,3034	1,3571
$f(x_k, y_k)$	0,4501	0,4850	0,5109	0,5298	–
$\Delta y_k$	0,0428	0,0468	0,0499	0,0521	0,0537

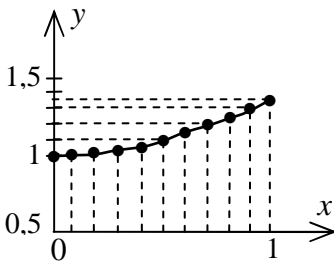


Рис. 26

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 26), сполучивши поспідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення  $\sigma_n$  наближених значень  $y_k$  розв'язку  $y = y(x)$  від точних  $y(x_k)$ , які візьмемо з прикладу пункту 6.1. Дістанемо  $\sigma_n \approx 0,0001$ . ■

#### 6.4.2. Метод прогнозування і корекції Хеммінга

Ідея методів *прогнозування та корекції* (*предиктор – коректор*) полягає у тому, що кожний крок розбивається на два етапи: спочатку за допомогою явного методу (*предиктор*) за відомими значеннями розв'язку в попередніх вузлах знаходять його грубе наближення  $y_k^{(0)}$  в новому  $k$ -му вузлі (*прогнозування*), а потім, використовуючи неявний метод (*коректор*), ітераційно уточнюють отримане значення  $y_k^{(1)}$ ,  $y_k^{(2)}$ , ... (*корекція*).

Розглянемо одну зі схем. Для прогнозування застосуємо явний

двокроковий метод другого порядку

$$y_k^{(0)} = y_{k-2} + 2h f(x_{k-1}, y_{k-1}).$$

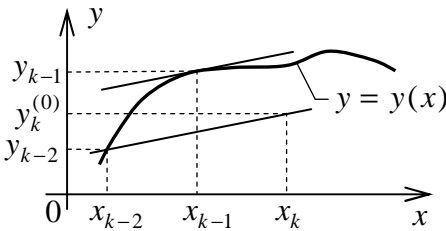


Рис. 27

Геометрична інтерпретація: визначаємо нахил інтегральної кривої в точці  $(x_{k-1}, y_{k-1})$ , а за ним – приріст функції на подвоєному кроці  $2h$  (рис. 27).

Для запуску методу (визначення  $y_1$ ) можна використати метод Рунге – Кутта.

Корекцію проведемо за формулою

$$y_k^{(1)} = y_{k-1} + (h/2) \left( f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^{(0)}) \right).$$

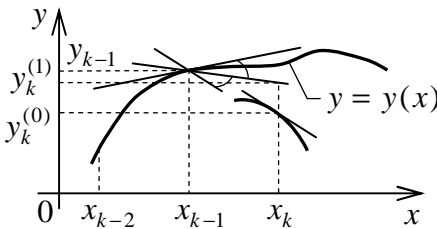


Рис. 28

Геометрична інтерпретація: визначаємо нахили інтегральних кривих в точках  $(x_{k-1}, y_{k-1})$  і  $(x_k, y_k^{(0)})$ . Обчислюємо середній нахил і, виходячи з точки  $(x_{k-1}, y_{k-1})$ , визначаємо нове наближення  $y_k^{(1)}$  (рис. 28).

Зауваження. Корекцію можна продовжити ітераційним процесом

$$y_k^{(i)} = y_{k-1} + (h/2) \left( f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^{(i-1)}) \right), \quad i = 1, 2, \dots$$

до виконання умови  $|y_k^{(i+1)} - y_k^{(i)}| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – наперед задана точність корекції.

Дослідимо похибку розглянутого двокрокового методу прогнозування і корекції. Розкладемо функцію  $y(x)$  в ряд Тейлора в околі точки  $x = x_{k-1}$ :

$$y(x) = y_{k-1} + y'_{k-1}(x - x_{k-1}) + (1/2) y''_{k-1}(x - x_{k-1})^2 +$$

$$+ (1/6) y'''_{k-1} (x - x_{k-1})^3 + \dots$$

Поклавши в цьому розкладі  $x = x_k$  і  $x = x_{k-2}$ , відповідно дістанемо:

$$y_k = y_{k-1} + h y'_{k-1} + (h^2/2) y''_{k-1} + (h^3/6) y'''_{k-1} + \dots;$$

$$y_{k-2} = y_{k-1} - h y'_{k-1} + (h^2/2) y''_{k-1} - (h^3/6) y'''_{k-1} + \dots$$

Віднімемо з першої рівності другу й отримаємо формулу прогнозування

$$y_k - y_{k-2} = 2h y'_k + (h^3/3) y'''_{k-1} + \dots$$

із залишковим членом (локальною похибкою прогнозування)

$$l_k^{(np)} = (h^3/3) y'''_{k-1} + \dots$$

Формула корекції одержується з рівності

$y_k = y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t, y(t)) dt$ , в якій інтеграл наближено обчислюється за формулою трапецій (див. пункт 6.5)

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t, y(t)) dt \approx (h/2) (f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)),$$

що породжує локальну похибку  $l_k^{(kop)} = (h^3/3) y'''_{k-1} + \dots$

Таким чином, даний метод прогнозування та корекції має другий порядок точності.

На практиці частіше застосовують більш точний **чотирикроковий метод прогнозування і корекції Хеммінга**:

$$\begin{aligned} y_k^{(0)} = & y_{k-4} + (4h/3) (2f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2}) + \\ & + 2f(x_{k-3}, y_{k-3})); \quad y_k = (1/8) (9y_{k-1} - y_{k-3}) + (3h/8) \times \\ & \times (f(x_k, y_k^{(0)}) + 2f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2})); \quad k = 4, 5, 6, \dots, \end{aligned}$$

де корекція обмежується однією ітерацією.

Приклад. Чисельно розв'язати вказану задачу Коші на відрізку  $[0;1]$  з кроком  $h = 0,1$  чотирикроковим методом прогнозування і корекції Хеммінга і побудувати графік наближеного розв'язку  $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ . Знайти середньоквадратичне відхилення  $\sigma_n$  наближених

значень  $y_k$  розв'язку від точних  $y(x_k)$ .

а)  $y' = x/y^2$ ,  $y(0) = 1$ ; б)  $y' = (3 + 2x)e^{-x} - y$ ,  $y(0) = 1$ .

**Вказівка.** Необхідні для запуску методу Хеммінга значення  $y_1$ ,  $y_2$  і  $y_3$  попередньо знайти за допомогою методу Рунге – Кутта (використати результати прикладу з пункту 6.3.2). Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ а) З умови задачі маємо  $f(x, y) = x/y^2$ ,  $y_0 = 1$ , а додаткові значення  $y_1 = 1,0050$ ,  $y_2 = 1,0196$  і  $y_3 = 1,0431$  дістаємо з прикладу пункту 6.3.2, де вони одержані за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами методу прогнозування і корекції Хеммінга й отримані значення занесемо у таблицю:

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y_k$	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0743	1,1120
$f(x_k, y_k)$	0	0,0990	0,1924	0,2757	0,3466	0,4044
$y_k^{(0)}$	–	–	–	–	1,0743	1,1120
$f(x_k, y_k^{(0)})$	–	–	–	–	0,3466	0,4044

$k$	6	7	8	9	10
$x_k$	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y_k$	1,1548	1,2016	1,2514	1,3035	1,3572
$f(x_k, y_k)$	0,4499	0,4848	0,5109	0,5297	0,5429
$y_k^{(0)}$	1,1547	1,2016	1,2514	1,3036	1,3572
$f(x_k, y_k^{(0)})$	0,4500	0,4848	0,5109	0,5296	0,5429

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 29), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення  $\sigma_n$  наближених

значень  $y_k$  розв'язку  $y = y(x)$  від точних  $y(x_k)$ , які візьмемо з прикладу пункту 6.1. Дістанемо

$$\sigma_n \approx 0,0000.$$

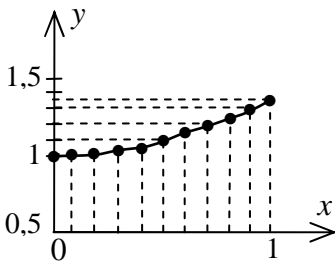


Рис. 29

б) Розв'язати самостійно. Точний аналітичний розв'язок даного лінійного диференціального рівняння одержується за допомогою підстановки Бернуллі та має вигляд

$$y = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}. \blacksquare$$

### 6.5. Поняття про неявні різницеві методи

Приклад неявного методу можна отримати, якщо на кожному елементарному інтервалі  $[x_{k-1}, x_k]$  перейти від диференціального рівняння  $y' = f(x, y)$  до еквівалентного інтегрального

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx,$$

де інтеграл наближено обчислити за формулою трапецій. Дістанемо

$$y_k = y_{k-1} + (h/2)(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)).$$

Розв'язуючи це скінченне рівняння, можна визначити  $y_k$  – наближене значення шуканого розв'язку  $y(x_k)$ . При цьому за початкове наближення  $y_k^{(0)}$  розв'язку звичайно приймається його значення у попередньому вузлі:  $y_k^{(0)} = y_{k-1}$ .

Цей метод є однокроковим і забезпечує другий порядок точності. Він дозволяє проводити обчислення з нерівномірним кроком і не потребує спеціальних прийомів для початку обчислення.

Але у нього є серйозні недоліки. По-перше, невідомо, чи має рівняння  $y_k = y_{k-1} + (h/2)(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k))$  дійсний корінь, тобто чи має задача розв'язки. Наприклад, нехай  $f(x, y) = y^2 - y$  і  $y(0) = 2$ , тоді на першому кроці дістаємо квадратне рівняння  $y_1 = 2 + (h/2)(2 + y_1^2 - y_1)$ , що при  $h > 2/7$  не має

дійсних коренів. Тобто, якщо крок  $h$  – великий, то коренів немає.

По-друге, якщо корінь існує, то як його знайти? Як правило, розв'язати різницеве рівняння аналітично неможливо. Треба застосувати наближені ітераційні методи. Метод Ньютона, як один з найефективніших, використовувати небажано, оскільки для цього треба диференціювати праву частину  $f(x, y)$ . Простий і дуже надійний метод ділення навпіл не узагальнюється на системи рівнянь. Тому найчастіше застосовується метод простих ітерацій

$$y_k^{(i)} = y_{k-1} + (h/2) \left( f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^{(i-1)}) \right), \quad i = 1, 2, \dots$$

Але він збігається до кореня тільки при умові  $h|f(x, y)| < 2$ , тобто при достатньо малому кроці. Якщо ж у процесі обчислень значення правої частини  $f(x, y)$  зростають, то ітераційний процес може припинити збігатись.

Від розбіжності ітерацій можна позбавитись і при цьому зменшити об'єм обчислень, якщо завчасно зафіксувати число ітерацій  $m$  і розглядати співвідношення

$$y_k^{(i)} = y_{k-1} + (h/2) \left( f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^{(i-1)}) \right), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

як самостійну явну схему. Тоді питання про існування кореня не виникає;  $y_k = y_k^{(m)}$  завжди визначається, навіть якщо різницеве рівняння  $y_k = y_{k-1} + (h/2) \left( f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k) \right)$  дійсного кореня не має або такий корінь неєдиний.

Зауваження 1. Неявні методи з фіксованим числом ітерацій мало відрізняються від явних методів Рунге – Кутта і є зручними тільки для деяких нестандартних задач.

Зауваження 2. Для вибору числа ітерацій  $m$  існує емпіричне правило: якщо неявну схему  $r$ -го порядку точності розв'язати методом послідовних наближень, то при  $m = 1$  одержимо схему першого порядку точності, при  $m = 2$  – другого, ..., при  $m = r$  –  $r$ -го порядку точності. Подальше збільшення числа ітерацій  $m$  не підвищує порядку точності.

Приклад. Чисельно розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння  $y' = x/y^2$  з початковою умовою  $y(0) = 1$  на відріжку  $[0; 1]$  з кроком  $h = 0,1$  **двокроковим неявним методом Адамса**,

що задається формулою

$$y_k = y_{k-1} + (h/12)(5f(x_k, y_k) + 8f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2})),$$

$$k = 2, 3, \dots,$$

використовуючи при кожному  $k = 2, 3, \dots$  метод послідовних наближень

$$y_k^{(0)} = y_{k-1}; \quad y_k^{(i)} = y_{k-1} + (h/12)(5f(x_k, y_k^{(i-1)}) + 8f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2})), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

з фіксованим числом ітерацій  $m = 2$ . Побудувати графік наблизеного розв'язку  $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ . Знайти середньоквадратичне відхилення  $\sigma_n$  наблизених значень  $y_k$  розв'язку від точних  $y(x_k)$ .

**Вказівка.** Необхідне для запуску методу значення  $y_1$  попередньо знайти за допомогою методу Рунге – Кутта (використати результати прикладу з пункту 6.3.2). Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ З умови задачі маємо  $f(x, y) = x/y^2$ ,  $y_0 = 1$ , а приклад з пункту 6.3.2 додатково дає значення  $y_1 = 1,0050$ , одержане за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами вказаного двокрокового неявного методу Адамса й отримані значення занесемо у таблицю:

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y_k^{(0)} = y_{k-1}$	–	–	1,0050	1,0196	1,0431	1,0743
$f(x_k, y_k^{(0)})$	–	–	0,1980	0,2886	0,3676	0,4332
$y_k^{(1)}$	–	–	1,0199	1,0436	1,0752	1,1132
$f(x_k, y_k^{(1)})$	–	–	0,1923	0,2755	0,3460	0,4035
$y_k = y_k^{(2)}$	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0743	1,1119
$f(x_k, y_k)$	0	0,0990	0,1924	0,2757	0,3466	0,4044

$k$	6	7	8	9	10
$x_k$	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y_k^{(0)} = y_{k-1}$	1,1119	1,1547	1,2015	1,2513	1,3033
$f(x_k, y_k^{(0)})$	0,4853	0,5250	0,5542	0,5748	0,5887
$y_k^{(1)}$	1,1562	1,2032	1,2532	1,3053	1,3589
$f(x_k, y_k^{(1)})$	0,4488	0,4835	0,5094	0,5282	0,5415
$y_k = y_k^{(2)}$	1,1547	1,2015	1,2513	1,3033	1,3569
$f(x_k, y_k)$	0,4500	0,4849	0,5109	0,5299	0,5431

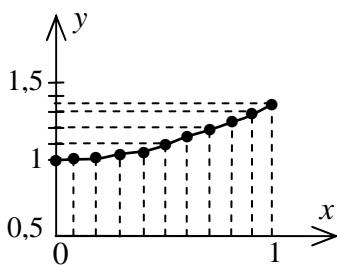


Рис. 30

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 30), сполучивши по-спідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення  $\sigma_n$  наближених значень  $y_k$  розв'язку  $y = y(x)$  від точних  $y(x_k)$ , які візьмемо з прикладу пункту 6.1. Дістанемо  $\sigma_n \approx 0,0001$ . ■

## 7. Контрольні запитання

1. Що таке математична модель об'єкта?
2. Який розв'язок задачі називається стійким за вхідними даними?
3. Що таке коректно (правильно) поставлена математична задача?
4. Що розуміють під чисельним (числовим, обчислювальним) методом?
5. Який метод називається прямим? Ітераційним?
6. Дайте означення однокрокового і багатокрокового ітераційного методу.
7. За якими характеристиками розрізняються чисельні методи?
8. Що означає  $p$ -й порядок збіжності ітераційного методу?



9. При якій умові ітераційний метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії?
10. Що називається наближеним числом?
11. Що називається похибкою наближення? Укажіть основні джерела похибок. Дайте класифікацію похибок.
12. Дайте означення абсолютної та відносної похибки.
13. У яких формах записуються наближені числа? Що таке значущі цифри? Які з них називаються вірними (правильними) у вузькому і широкому сенсі?
14. Сформулюйте правило симетричного заокруглювання.
15. Як за записом наближеного числа оцінити його абсолютну та відносну похибку?
16. У чому полягає пряма задача теорії похибок?
17. Як обчислюються лінійні оцінки похибки функції?
18. Як обчислюються лінійні оцінки похибок арифметичних операцій? Наведіть відповідні правила підрахунку цифр.
19. У чому полягає обернена задача теорії похибок? Сформулюйте принципи рівних впливів, рівних абсолютних похибок, рівних відносних похибок.
20. У чому полягає локалізація (відокремлення) дійсного кореня скінченного рівняння? Які способи для цього застосовують?
21. Наведіть основні критерії закінчення ітераційного процесу уточнення кореня.
22. У чому суть методу поділу навпіл (дихотомії, бісекції)? Наведіть його переваги та недоліки.
23. У чому полягає метод хорд (пропорційних частин)? Запишіть його розрахункову формулу. Дайте геометричну інтерпретацію.
24. У чому суть методу простих ітерацій? Запишіть достатню умову його збіжності. Дайте геометричну інтерпретацію.
25. У чому полягає метод Ньютона (метод дотичних, метод лінеаризації)? Запишіть його розрахункову формулу. Дайте геометричну інтерпретацію. Запишіть достатню умову його збіжності.
26. У чому полягає метод січних? Запишіть його розрахункову формулу. Дайте геометричну інтерпретацію. Порівняйте цей метод з методом Ньютона.
27. У чому полягає задача апроксимації (наближення) функцій?
28. Який спосіб наближення називають інтерполяцією?
29. У чому полягає задача екстраполяції?

30. Що розуміють під середньоквадратичною апроксимацією (наближенням за методом найменших квадратів)? У чому відмінність цього методу від інтерполяції?
31. Сформулюйте рекомендації щодо проведення структурної ідентифікації моделі.
32. Як здійснюється інтерполяція многочленами? Запишіть інтерполяційний поліном Лагранжа.
33. Як оцінюється похибка інтерполювання?
34. Що таке скінченні та розділені різниці. Запишіть інтерполяційний поліном Ньютона для нерівновіддалених вузлів.
35. Запишіть інтерполяційні многочлени Ньютона для інтерполяції вперед і назад для випадку рівновіддалених вузлів. Який з цих поліномів треба застосовувати на початку проміжку інтерполяції, а який – у кінці?
36. Яку функцію називають поліноміальним сплайном степеня  $l$  дефекту гладкості  $m$  ?
37. У чому переваги сплайн-інтерполяції порівняно з інтерполяційними многочленами? Дайте геометричну інтерпретацію лінійного і кубічного інтерполяційних сплайнів.
38. Коли застосовують апроксимацію за методом найменших квадратів? Чому цей метод найбільш ефективний у випадку моделі, що лінійна відносно параметрів?
39. Наведіть приклади поліноміальної апроксимації за методом найменших квадратів.
40. Як здійснюється апроксимація кубічним сплайном за методом найменших квадратів?
41. Як здійснюється згладжування (фільтрація) дослідних даних за допомогою апроксимуючого многочлена?
42. Коли застосовується чисельне диференціювання?
43. Як наближено знаходяться похідні за допомогою інтерполяційних многочленів?
44. Як за методом Рунге (методом подвоєння кроку) оцінити похибку апроксимації похідної й уточнити її значення?
45. Як здійснюється вибір оптимального кроку чисельного диференціювання?
46. Сформулюйте основні підходи до побудови квадратурних формул.
47. Запишіть розрахункові формули методу лівих і правих прямокутників.

48. Запишіть розрахункову формулу методу трапецій.
49. Наведіть формулу Симпсона (формулу парабол) чисельного інтегрування.
50. Як здійснюється вибір кроку інтегрування за аналітичною оцінкою залишкового члена?
51. Як практично оцінюється похибка чисельного інтегрування за правилом Рунге?
52. У чому полягає метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло)? Як він застосовується для наближеного обчислення визначеного інтеграла?
53. Як ставиться задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку?
54. Дайте геометричну інтерпретацію розв'язку задачі Коші та його похідної.
55. У чому полягає метод послідовних наближень (метод Пікара) наближеного обчислення визначеного інтеграла?
56. Що таке локальна і глобальна похибки чисельного методу розв'язування задачі Коші?
57. Як за правилом Рунге практично оцінюється похибка наближеного розв'язку?
58. Запишіть розрахункову формулу явного методу Ейлера. Який його порядок точності? Яка геометрична інтерпретація цього методу?
59. Запишіть розрахункові формули явного методу Рунге – Кутта четвертого порядку точності.
60. Наведіть розрахункові формули явного чотирикрокового методу Адамса. Порівняйте цей метод з методом Рунге – Кутта тієї ж точності.
61. У чому суть методів прогнозування та корекції (предиктор – коректор)?
62. Запишіть розрахункові формули чотирикрокового методу прогнозування і корекції Хеммінга.
63. Наведіть приклад неявного методу розв'язування задачі Коші.
64. У чому полягають недоліки неявних методів? Які підходи застосовуються для їх усунення?
65. На чому ґрунтується вибір числа ітерацій при практичній реалізації неявного методу розв'язування задачі Коші?

## 8. Індивідуальні завдання до самостійної роботи

**Завдання 1.** Знайти абсолютну  $\Delta_u$  і відносну  $\delta_u$  похибки обчислення значення даної функції  $u = f(x, y, z)$ , якщо  $x = 0,18 \pm 0,005$ ,  $y = 1,27 \pm 0,01$ ,  $z = 2,16 \pm 0,008$ .

№ в-та	Функція $u = f(x, y, z)$	№ в-та	Функція $u = f(x, y, z)$
1	$u = (x^2 + z) \ln y$	16	$u = (x/z^2) \operatorname{arctg} y$
2	$u = (x/z^2) \sin y$	17	$u = (y^2 - 3x) \ln(z-1)$
3	$u = (z^3 - x) \ln y$	18	$u = (x/y^2) \operatorname{arctg} z$
4	$u = (y^3/z) \cos x$	19	$u = (y^3 + z) \ln(2y - x)$
5	$u = (z^2 - 2y) \ln(x + y)$	20	$u = (y^2/z) \sin(x + y)$
6	$u = \sqrt{y^2 + xz} \sin y$	21	$u = (x/z^2) \sqrt{z^3 - 3y}$
7	$u = (x^2 + 3y) \ln(z-1)$	22	$u = \sqrt{y^3 + x} \cos(z-2y)$
8	$u = \sqrt{z-x^3} \cos(10x-y)$	23	$u = (y^3/z) \sin(x+z)$
9	$u = \sqrt{y^2 + x} \ln(z-y)$	24	$u = \sqrt{y-x^3} \sin(x+z)$
10	$u = (z-x^2) \operatorname{arctg}(y/z)$	25	$u = \sqrt{x} \ln(2z-y^2)$
11	$u = (y^2/z) \sqrt{x^3 + z}$	26	$u = \sqrt{z^2 - x} \ln(y+xz)$
12	$u = \sqrt{y-x^3} \cos(z-2y)$	27	$u = (z/y^2) \sqrt{z^3 - 2x}$
13	$u = (x/y^2) \sqrt{z^3 - 2y}$	28	$u = x^2 \ln(z^2 - 3y)$
14	$u = (x+y^2) \operatorname{arctg}(z/y)$	29	$u = (y^2/z) \cos x$
15	$u = x^3 z \ln(2z-y)$	30	$u = (x^2 + z) \operatorname{arctg} y$

**Завдання 2.** Дано рівняння  $f(x) = 0$ . Виконати наступне:

1. Подати задане рівняння у вигляді  $f_1(x) = f_2(x)$ . Знайти найменший за модулем дійсний корінь  $x^*$  рівняння наближено

графічно як абсцису найближчої до осі  $Oy$  точки перетину графіків  $y = f_1(x)$  і  $y = f_2(x)$ . Вказати проміжок ізоляції  $[a_0; b_0]$  цього кореня, де  $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ . Уточнити найменший за модулем корінь  $x^*$  рівняння  $f(x) = 0$  вказаним далі методом.

1. Методом поділу навпіл за формулою

$$x_k = (a_{k-1} + b_{k-1})/2; \quad k = 1, 2, \dots; \quad f(a_{k-1}) f(b_{k-1}) < 0,$$

де  $[a_{k-1}; b_{k-1}]$  – попередній проміжок ізоляції кореня. Якщо  $f(x_k) = 0$ , то покласти  $x^* = x_k$  і закінчити обчислення. Якщо  $f(x_k) \cdot f(a_{k-1}) > 0$ , то покласти  $a_k = x_k$ ;  $b_k = b_{k-1}$ ;  $k := k + 1$  і продовжити обчислення. Якщо  $f(x_k) \cdot f(b_{k-1}) > 0$ , то покласти  $a_k = a_{k-1}$ ;  $b_k = x_k$ ;  $k := k + 1$  і продовжити обчислення.

2. Методом хорд (пропорційних частин) за формулою

$$x_k = a_{k-1} - \frac{f(a_{k-1}) \cdot (b_{k-1} - a_{k-1})}{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})}; \quad f(a_{k-1}) f(b_{k-1}) < 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де  $[a_{k-1}; b_{k-1}]$  – попередній проміжок ізоляції кореня. Якщо  $f(x_k) = 0$ , то покласти  $x^* = x_k$  і закінчити обчислення. Якщо  $f(x_k) \cdot f(a_{k-1}) > 0$ , то покласти  $a_k = x_k$ ;  $b_k = b_{k-1}$ , інакше –  $a_k = a_{k-1}$ ;  $b_k = x_k$ . Далі присвоїти  $k := k + 1$  і продовжити обчислення.

3. Модифікованим методом простих ітерацій за формулою

$$x_k = \varphi(x_{k-1}); \quad k = 1, 2, \dots,$$

подавши задане рівняння  $f(x) = 0$  у вигляді  $x = \varphi(x)$ , де  $\varphi(x) = x + \alpha f(x)$ ,  $\alpha$  – параметр, значення якого підбирається експериментально з умови збіжності  $|\varphi'(x)| < 1$  (звичайно, з діапазону  $|\alpha| = 0,1 \div 1$ ). За початкове наближення  $x_0$  кореня  $x^*$  прийняти значення, отримане графічно.

4 Модифікованим методом Ньютона (методом дотичних) за формулою

$$x_k = x_{k-1} - \alpha f(x_{k-1}) / f'(x_{k-1}); \quad k = 1, 2, \dots,$$

де  $\alpha$  – параметр, значення якого підбирається експериментально (звичайно, з діапазону  $\alpha = 0,1 \div 1$ ). За початкове наближення  $x_0$  кореня  $x^*$  прийняти довільне значення  $x$  з проміжку ізоляції  $[a_0; b_0]$ , для якого виконується умова  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$  (зокрема, за  $x_0$  можна взяти значення, отримане графічно, або один з кінців відрізка ізоляції  $[a_0; b_0]$ , якщо додержується дана умова).

Критерій закінчення ітераційного процесу визначається виконанням хоча б однієї з умов:

– досягнення заданої точності за аргументом  $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ , де  $\delta > 0$  – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного значення кореня,  $\delta = 0,01$ ;

– досягнення заданої точності за функцією:  $|f(x_k)| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon > 0$  – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного нульового значення  $f(x_k)$  функції  $f(x)$ ,  $\varepsilon = 0,001$ ;

– досягнення заданого максимально допустимого числа ітерацій  $k_{\max}$ ,  $k_{\max} = 5$ .

**Вказівка.** Усі обчислення проводити з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми. Усі графіки побудувати в одній системі координат.

№ в-та	Рівняння $f(x) = 0$	№ в-та	Рівняння $f(x) = 0$
1	$0,5 - 0,3x \lg(1+x) - 0,5x = 0$	16	$0,4 - 0,3 \sin x - 0,6x^3 = 0$
2	$0,4 - 0,2 \arctg x - 0,5x^3 = 0$	17	$0,4 - 0,1x \sin x - 0,5x = 0$
3	$0,6 - 0,1x \arctg x - 0,7x = 0$	18	$0,5 - 0,6x - 0,2 \cdot 2^x = 0$
4	$0,2 + 0,1 \cos x - 0,4x^3 = 0$	19	$0,4 - 0,5x - 0,1x \cdot 2^x = 0$
5	$0,3 - 0,2 \lg(1+x) - 0,4x^3 = 0$	20	$0,3 - 0,1x \cdot 2^x - 0,6x^5 = 0$
6	$0,5 + 0,3x \sin x - 0,6x^3 = 0$	21	$0,1x \cos x - 0,3x + 0,2 = 0$

7	$0,2 + 0,2x \sin x - 0,3x^3 = 0$	22	$0,2 + 0,2 \cdot 2^{-x} - 0,5x = 0$
8	$0,5 - 0,3 \lg(1+x) - 0,5x^3 = 0$	23	$0,2 \sin x - 0,5x^3 + 0,4 = 0$
9	$0,5 - 0,2x \lg(1+x) - 0,6x = 0$	24	$0,2 + 0,2 \sin x - 0,3x = 0$
10	$0,3 - 0,1x \cos x - 0,4x^3 = 0$	25	$0,3 - 0,1 \cdot 2^x - 0,4x^3 = 0$
11	$0,3 - 0,2 \lg(1+x^3) - 0,4x = 0$	26	$0,4 + 0,2 \sin x - 0,5x^5 = 0$
12	$0,4 - 0,2 \lg(1+x^2) - 0,5x^3 = 0$	27	$0,5 + 0,2 \sin x - 0,7x^3 = 0$
13	$0,4 - 0,3 \lg(1+x) - 0,5x^5 = 0$	28	$0,4 - 0,2 \cos x - 0,5x^5 = 0$
14	$0,3 + 0,1x \sin x - 0,4x^3 = 0$	29	$0,4 - 0,1 \cdot 2^x - 0,6x^5 = 0$
15	$0,2 - 0,1 \arctg x - 0,3x^5 = 0$	30	$0,3 + 0,2 \sin x - 0,4x^5 = 0$

**Завдання 3.** Функція  $f(x)$  задана на відрізку  $[x_0; x_n]$  своїми значеннями в  $n+1$  рівновіддалених вузлах інтерполяції  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n$  згідно таблиці відповідного варіанта, де  $n=3$ , крок між вузлами  $h = (x_n - x_0)/n$ . У прямокутній системі координат  $Oxy$  побудувати задані в цій таблиці точки  $(x_k, y_k)$ ,  $y_k = f(x_k)$ ,  $k=0,1,2,\dots,n$ . Указаним далі методом визначити функцію  $F(x)$ , яка служить наближенням для вхідної функції  $f(x)$ :  $f(x) \approx F(x)$ .

1. Знайти інтерполяцію функції  $f(x)$  многочленом стандартного вигляду третього порядку  $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ , де значення коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2, a_3$  визначаються як розв'язки системи

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = y_0; \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1; \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2; \\ a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3. \end{cases}$$

2. Знайти інтерполяцію функції  $f(x)$  за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа третього порядку

$$L_3(x) = \frac{y_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{y_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ + \frac{y_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Обчислити значення інтерполяційного многочлена Лагранжа  $L_3(x)$  на відрізку  $[-4;4]$  з кроком  $h_d = 0,5$ , скласти відповідну таблицю і побудувати графік  $y = L_3(x)$ .

3. На кожному з елементарних відрізків  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  між сусідніми вузлами наближено замінити функцію  $f(x)$  відрізком прямої (лінійною функцією)

$$P_{1k}(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}(y_k - y_{k-1}) + y_{k-1}$$

і отримати інтерполяцію функції  $f(x)$  ламаною – лінійним сплайном

$$S_1(x) = \begin{cases} P_{11}(x), & x \in (-\infty, x_1]; \\ P_{12}(x), & x \in [x_1, x_2]; \\ P_{13}(x), & x \in [x_2, +\infty) \end{cases}$$

з  $n-1=2$  вузлами спряження  $x_k$ ,  $k = 1, 2$ , що співпадають з відповідними вузлами інтерполяції.

Побудувати графік лінійного інтерполяційного сплайна  $y = S_1(x)$ , сполучивши сусідні вузли відрізком прямої.

4. На кожному з елементарних відрізків  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  між сусідніми вузлами наближено замінити функцію  $f(x)$  многочленом третього порядку

$$P_{3k}(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3 = \\ = a_k + b_k q_k + c_k q_k^2 + d_k q_k^3, \quad q_k = x - x_{k-1}$$



і отримати інтерполяцію функції  $f(x)$  кубічним сплайном

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{31}(x), & x \in (-\infty, x_1]; \\ P_{32}(x), & x \in [x_1, x_2]; \\ P_{33}(x), & x \in [x_2, +\infty) \end{cases}$$

з  $n-1=2$  вузлами спряження  $x_k$ ,  $k=1,2$ , що співпадають з відповідними вузлами інтерполяції. Розрахункові формули для коефіцієнтів:

$$a_k = y_{k-1}, \quad k = \overline{1,3}; \quad b_1 = (y_3 - 6y_2 + 24y_1 - 19y_0)/(15h);$$

$$b_2 = (-2y_3 + 12y_2 - 3y_1 - 7y_0)/(15h);$$

$$b_3 = (7y_3 + 3y_2 - 12y_1 + 2y_0)/(15h);$$

$$c_1 = 0; \quad c_2 = (-y_3 + 6y_2 - 9y_1 + 4y_0)/(5h^2);$$

$$c_3 = (4y_3 - 9y_2 + 6y_1 - y_0)/(5h^2);$$

$$d_1 = c_2/(3h); \quad d_2 = (c_3 - c_2)/(3h); \quad d_3 = -c_3/(3h).$$

Обчислити значення отриманого кубічного сплайна  $S_3(x)$  на відрізку  $[-4;4]$  з кроком  $h_d = 0,5$ , скласти відповідну таблицю і побудувати графік кубічного інтерполяційного сплайна  $y = S_3(x)$ .

5. Знайти апроксимацію функції  $f(x)$  методом найменших квадратів за допомогою лінійної функції (лінійної регресії)  $F(x) = a_0 + a_1x$ , де оптимальні значення коефіцієнтів  $a_0$ ,  $a_1$  визначаються як розв'язки системи

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^n y_k; \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^2 = \sum_{k=0}^n x_k y_k. \end{cases}$$

Обчислити значення отриманої лінійної регресії  $y = a_0 + a_1x$  на кінцях відрізка  $[-4;4]$ , скласти відповідну таблицю і побудувати графік лінійної регресії. Знайти середньоквадратичне відхилення

$\Delta y_s$  лінійної регресії  $y = a_0 + a_1x$  від заданих значень функції  $y_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  за формулою

$$\Delta y_s = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\right) \sum_{k=0}^n (y_k - (a_0 + a_1x_k))^2}.$$

6. Знайти апроксимацію функції  $f(x)$  методом найменших квадратів за допомогою квадратичної функції (квадратичної регресії)  $f(x) \approx F(x) = P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , де оптимальні значення коефіцієнтів  $a_0$ ,  $a_1$  і  $a_2$  визначаються як розв'язки системи

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{k=0}^n x_k + a_2 \sum_{k=0}^n x_k^2 = \sum_{k=0}^n y_k; \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^2 + a_2 \sum_{k=0}^n x_k^3 = \sum_{k=0}^n x_k y_k; \\ a_0 \sum_{k=0}^n x_k^2 + a_1 \sum_{k=0}^n x_k^3 + a_2 \sum_{k=0}^n x_k^4 = \sum_{k=0}^n x_k^2 y_k. \end{cases}$$

Обчислити значення отриманої квадратичної регресії  $y = a_0x^2 + a_1x + a_2$  на відрізку  $[-4; 4]$  з кроком  $h_d = 0,5$ , скласти відповідну таблицю і побудувати графік квадратичної регресії  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Знайти середньоквадратичне відхилення  $\Delta y_s$  квадратичної регресії  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$  від заданих значень функції  $y_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  за формулою

$$\Delta y_s = \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\right) \sum_{k=0}^n (y_k - (a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2))^2}.$$

7. Знайти апроксимацію функції  $f(x)$  методом найменших квадратів за допомогою кубічного сплайна (кубічної сплайнової регресії)

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{31}(x) = a_1 + b_1(x - x_s) + c_1(x - x_s)^2 + d_1(x - x_s)^3, & x \in (-\infty; x_s]; \\ P_{32}(x) = a_2 + b_2(x - x_s) + c_2(x - x_s)^2 + d_2(x - x_s)^3, & x \in [x_s; +\infty) \end{cases}$$

з одним вузлом спряження  $x_s = (a + b)/2$ .

Введемо позначення  $a_1 = a_2 = \bar{a}$ ;  $b_1 = b_2 = \bar{b}$ ;  $c_1 = c_2 = \bar{c}$ .

Тоді  $d_1 = -d_2 = (2/9)\bar{c}/h$  і сплайн набуває вигляду

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{31}(x) = \bar{a} + \bar{b}(x - x_s) + \bar{c}(x - x_s)^2 + \left((2/9)\bar{c}/h\right)(x - x_s)^3, & x \in (-\infty; x_s] ; \\ P_{32}(x) = \bar{a} + \bar{b}(x - x_s) + \bar{c}(x - x_s)^2 - \left((2/9)\bar{c}/h\right)(x - x_s)^3, & x \in [x_s; +\infty). \end{cases}$$

Розрахункові формули для оптимальних значень коефіцієнтів

$$\bar{a} = (-4y_0 + 37y_1 + 37y_2 - 4y_3)/46;$$

$$\bar{b} = (-3y_0 - y_1 + y_2 + 3y_3)/(10h); \quad \bar{c} = 9(y_0 - y_1 - y_2 + y_3)/(23h^2).$$

Обчислити значення отриманої кубічної сплайнової регресії  $y = S_3(x)$  на відрізку  $[-4; 4]$  з кроком  $h_d = 0,5$ , скласти відповідну таблицю і побудувати графік сплайнової регресії. Знайти середньоквадратичне відхилення  $\Delta y_s$  сплайнової регресії  $y = S_3(x)$  від заданих значень функції  $y_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  за формулою

$$\Delta y_s = \sqrt{(1/(n+1)) \sum_{k=0}^n (y_k - S(x_k))^2}.$$

**Вказівка.** Усі обчислення проводити з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми. Усі графіки побудувати в одній системі координат.

№ в- та	$k$	0	1	2	3	№ в- та	$k$	0	1	2	3
		1	$x_k$	-2	0			2	4	16	$x_k$
$y_k$	3		2	0	-1	$y_k$	-2	1	0		2
2	$x_k$	-3	-1	1	3	17	$x_k$	-2	0	2	4
	$y_k$	-1	-2	3	5		$y_k$	3	2	0	-2

3	$x_k$	-2	0	2	4	18	$x_k$	-4	-2	0	2
	$y_k$	-1	2	1	0		$y_k$	-2	-1	0	1
4	$x_k$	-4	-2	0	2	19	$x_k$	-2	0	2	4
	$y_k$	-1	2	1	-3		$y_k$	-3	-2	0	-1
5	$x_k$	-3	-1	1	3	20	$x_k$	-4	-2	0	2
	$y_k$	0	2	-2	3		$y_k$	2	0	1	-1
6	$x_k$	-4	-2	0	2	21	$x_k$	-2	0	2	4
	$y_k$	-3	-1	1	0		$y_k$	3	0	-2	2
7	$x_k$	-4	-2	0	2	22	$x_k$	-3	-1	1	3
	$y_k$	0	-2	1	3		$y_k$	-1	2	0	-2
8	$x_k$	-2	0	2	4	23	$x_k$	-4	-2	0	2
	$y_k$	-2	1	-1	2		$y_k$	3	2	-1	1
9	$x_k$	-3	-1	1	3	24	$x_k$	-2	0	2	4
	$y_k$	3	0	-2	-1		$y_k$	-3	-1	0	2
10	$x_k$	-2	0	2	4	25	$x_k$	-3	-1	1	3
	$y_k$	-3	-1	0	1		$y_k$	2	-2	0	-1
11	$x_k$	-4	-2	0	2	26	$x_k$	-2	0	2	4
	$y_k$	-2	1	-1	0		$y_k$	3	2	-1	0
12	$x_k$	-3	-1	1	3	27	$x_k$	-4	-2	0	2
	$y_k$	2	3	0	-1		$y_k$	3	2	-1	-2
13	$x_k$	-2	0	2	4	28	$x_k$	-3	-1	1	3
	$y_k$	-3	-2	0	2		$y_k$	-2	-3	0	2
14	$x_k$	-4	-2	0	2	29	$x_k$	-2	0	2	4
	$y_k$	3	1	-1	0		$y_k$	2	3	-1	0
15	$x_k$	-2	0	2	4	30	$x_k$	-4	-2	0	2
	$y_k$	2	-1	1	-2		$y_k$	2	0	-1	3

**Завдання 4.** Функція  $y = f(x)$  задана на відрізку  $[x_0; x_n]$  своїми значеннями  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  в  $n + 1$  рівновіддалених вузлах  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n$ ,  $n = 3$  згідно таблиці відповідного варіанта з попереднього завдання 3, крок між вузлами  $h = (x_n - x_0)/n$ . Знайти наближене значення  $f'(x_*)$  похідної  $f'(x)$  у відповідній точці  $x_*$  згідно наступній таблиці

№ в-та	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_*$	-1	-2	-1	-3	-2	-3	-3	-1	-2	-1
№ в-та	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_*$	-3	-2	-1	-3	-1	-3	-1	-3	-1	-3
№ в-та	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$x_*$	-1	-2	-3	-1	-2	-1	-3	-2	-1	-3

використовуючи інтерполяційний многочлен Ньютона третього порядку (для інтерполяції вперед)

$$N_3(x) = f(x_0) + q\Delta f(x_0) + (q(q-1)/2)\Delta^2 f(x_0) + (q(q-1)(q-2)/6)\Delta^3 f(x_0), \quad q = (x - x_0)/h.$$

**Вказівка.** Похибками у вхідних даних і похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

**Завдання 5.** Дано визначений інтеграл  $I = \int_a^b f(x) dx$ .

1. Обчислити заданий інтеграл аналітично за формулою Ньютона – Лейбниця. Прийняти результат аналітичного розрахунку  $I$  за точне значення інтеграла.

2. Обчислити значення підінтегральної функції  $f(x)$  на відрізку інтегрування  $[a; b]$  у рівновіддалених вузлах  $x_k = x_{k-1} + h$ ,  $x_0 = a$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $n = 8$  з кроком  $h = (b - a)/n$ . Скласти відповідну таблицю і побудувати графік  $y = f(x)$ .

3. Використовуючи отримані значення  $y_k = f(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  підінтегральної функції, обчислити наближено заданий інтеграл, застосовуючи при  $n = 8$  формули: а) лівих прямокутників, б) правих прямокутників, в) трапецій, г) Симпсона. Для кожного використаного методу оцінити граничну абсолютну похибку  $\Delta_h^*$  одержаного наближення  $I_h$  і знайти уточнене наближене значення інтеграла  $I_{ym}$ , користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку):

$$\Delta_h^* \approx |I_h - I_{2h}| / (2^r - 1); \quad I_{ym} \approx I_h + (I_h - I_{2h}) / (2^r - 1),$$

де  $r$  – порядок точності відповідного методу ( $r = 1$  – для формул лівих і правих прямокутників,  $r = 2$  – для формули трапецій,  $r = 4$  – для формули Симпсона). Обчислити абсолютну похибку  $\Delta_{ym}$  цього наближення  $I_{ym}$ :  $\Delta_{ym} = |I - I_{ym}|$ .

Вказівка. Похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до сьомого десяткового знака після коми.

№ в- та	$\int_a^b f(x) dx$	№ в- та	$\int_a^b f(x) dx$	№ в- та	$\int_a^b f(x) dx$
1	$\int_1^4 \frac{\ln(16+x)}{x^3} dx$	11	$\int_1^4 \frac{\sqrt{16+x^2}}{x^3} dx$	21	$\int_1^4 \frac{\arctg x}{x^2} dx$
2	$\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x+10}}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$	12	$\int_1^4 \frac{\sqrt{16x^2-1}}{x^2} dx$	22	$\int_1^4 \frac{\arctg x}{\sqrt{x^3}} dx$
3	$\int_1^4 \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx$	13	$\int_1^4 \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^2} dx$	23	$\int_1^4 \arctg \sqrt{x} dx$
4	$\int_1^4 \frac{\ln(17-\sqrt{x})}{\sqrt{x^3}} dx$	14	$\int_1^4 \frac{\ln(\sqrt{x}+8)}{\sqrt{x^3}} dx$	24	$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+9}{x+4} dx$
5	$\int_1^4 \frac{\ln(16+x^2)}{x^3} dx$	15	$\int_1^4 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$	25	$\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$

6	$\int_1^4 \frac{\arctg \sqrt{x}}{x} dx$	16	$\int_1^4 \frac{16 - \sqrt{x^3}}{\sqrt{x} + 1} dx$	26	$\int_1^4 \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} dx$
7	$\int_1^4 \frac{x + 16}{(x + 1)\sqrt{x}} dx$	17	$\int_1^4 \frac{\ln(24 + \sqrt{x})}{x^2} dx$	27	$\int_1^4 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$
8	$\int_1^4 \frac{16 - \sqrt{x}}{(x + 1)\sqrt{x}} dx$	18	$\int_1^4 \frac{\ln(x^3 + 8)}{x^2} dx$	28	$\int_1^4 \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$
9	$\int_1^4 \frac{\arctg \sqrt{x}}{x^2} dx$	19	$\int_1^4 \frac{\ln(16 + x^2)}{x^2} dx$	29	$\int_1^4 x^3 \ln^2 x dx$
10	$\int_1^4 \frac{\sqrt{x} + 10}{(x + 1)\sqrt{x}} dx$	20	$\int_1^4 \frac{\ln(2x^2 - 1)}{x^2} dx$	30	$\int_1^4 \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} dx$

**Завдання 6.** Поставлена задача Коші: знайти частинний розв'язок диференціального рівняння  $y' = f(x, y)$ , який задовольняє початковій умові  $y(0) = y_0$ . Розв'язати задачу Коші аналітично. Прийняти результат аналітичного розрахунку  $y = y(x)$  за точний розв'язок. Обчислити значення  $y(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$  отриманого аналітичного розв'язку  $y = y(x)$  на відріжку  $[0; 1]$  у рівновіддалених вузлах  $x_k = x_{k-1} + h$ ,  $x_0 = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $n = 10$  з кроком  $h = 0,1$ . Скласти відповідну таблицю і побудувати графік аналітичного розв'язку  $y = y(x)$ . Чисельно розв'язати задачу Коші на відріжку  $[0; 1]$  з кроком  $h = 0,1$  указаним далі методом. Для кожного використаного методу отримані наближені значення  $y_k$ ;  $k = \overline{0, n}$ ,  $n = 10$  занести у відповідну таблицю і побудувати графік наближеного розв'язку  $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ . Знайти середньоквадратичне відхилення  $\sigma_n$  наближених значень  $y_k$  розв'язку від точних  $y(x_k)$  за формулою  $\sigma_n = \sqrt{(1/n) \sum_{k=1}^n (y(x_k) - y_k)^2}$ .

1. Методом Ейлера за формулами:

$$y_k = y_{k-1} + \Delta y_k, \quad \Delta y_k = h f(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n.$$

2. Методом Рунге – Кутта четвертого порядку точності за формулами:

$$y_k = y_{k-1} + \Delta y_k, \quad \Delta y_k = (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6;$$

$$K_1 = h f(x_{k-1}, y_{k-1}); \quad K_2 = h f(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_1/2);$$

$$K_3 = h f(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_2/2);$$

$$K_4 = h f(x_{k-1} + h, y_{k-1} + K_3), \quad k = 1, \dots, n.$$

3. Чотирикроковим методом Адамса за формулами:

$$y_k = y_{k-1} + \Delta y_k; \quad \Delta y_k = (h/24)(55f(x_{k-1}, y_{k-1}) - 59 \times \\ \times f(x_{k-2}, y_{k-2}) + 37f(x_{k-3}, y_{k-3}) - 9f(x_{k-4}, y_{k-4})), \quad k = 4, 5, \dots$$

4. Чотирикроковим методом прогнозування і корекції Хеммінга за формулами:

$$y_k^{(0)} = y_{k-4} + (4h/3) (2f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2}) + \\ + 2f(x_{k-3}, y_{k-3})); \quad y_k = (1/8) (9y_{k-1} - y_{k-3}) + (3h/8) \times \\ \times (f(x_k, y_k^{(0)}) + 2f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2})); \quad k = 4, 5, 6, \dots$$

**Вказівка.** Необхідні для запуску чотирикрокових методів Адамса та Хеммінга значення  $y_1$ ,  $y_2$  і  $y_3$  попередньо знайти за допомогою методу Рунге – Кутта (використати результати з пункту 1 цього завдання). Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

№ в-та	$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0$	№ в-та	$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0$
1	$y' = -\frac{2xy}{x^2 + 1}; \quad y(0) = -2$	16	$y' = \frac{y^4}{3(x+1)^2}; \quad y(0) = 1$
2	$y' = \frac{y^3 + 1}{3y^2(x+1)}; \quad y(0) = 1$	17	$y' = \frac{y^2 + 1}{2y(x+1)}; \quad y(0) = 1$



3	$y' = 6xe^{-x} - y; y(0) = 0$	18	$y' = x^2y^4; y(0) = -1$
4	$y' = e^{-x} - y; y(0) = 1/2$	19	$y' = e^x - y; y(0) = 0$
5	$y' = y - e^x \sin x; y(0) = 1$	20	$y' = 2xy^2; y(0) = -1$
6	$y' = -\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+1}}; y(0) = 1$	21	$y' = -\frac{3x^2y^2}{2\sqrt{x^3+1}}; y(0) = 1$
7	$y' = \frac{2x(y^3+1)}{3y^2(x^2+1)}; y(0) = 1$	22	$y' = \frac{y^2-1}{2y(x+1)}; y(0) = 2$
8	$y' = \frac{2x\sqrt{y}}{\sqrt{x^2+1}}; y(0) = 1$	23	$y' = \frac{\sqrt{y^2+3}}{y\sqrt{x+1}}; y(0) = 1$
9	$y' = -\frac{y^4}{2}\sqrt{x}; y(0) = 1$	24	$y' = \frac{y}{x+1}; y(0) = 1$
10	$y' = -\frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{x+1}}; y(0) = 1$	25	$y' = -\frac{y^{-2}}{(x+1)^4}; y(0) = 1$
11	$y' = -\frac{y^2}{x^2+1}; y(0) = 1$	26	$y' = \frac{y^4}{(x+1)^4}; y(0) = 1$
12	$y' = -\frac{2\sqrt{y^3}}{x+1}; y(0) = 1$	27	$y' = \frac{2xy^4}{(x^2+1)^4}; y(0) = 1$
13	$y' = -\frac{x^3y^3}{\sqrt{x^4+1}}; y(0) = 1$	28	$y' = \frac{y^2}{(x+1)^3}; y(0) = 1$
14	$y' = \frac{x\sqrt{y^2+3}}{y\sqrt{x^2+4}}; y(0) = 1$	29	$y' = \frac{-xy^4}{3\sqrt{x^2+1}}; y(0) = 1$
15	$y' = \frac{x(y^2+3)}{y(x^2+4)}; y(0) = 1$	30	$y' = -\frac{2xy^2}{x^2+1}; y(0) = 1$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
3. Волков Е.А. Численные методы. – СПб.: Лань, 2004. – 248 с.
4. Данилович В.П. Чисельні методи в задачах та вправах. – К.: ІСДО, 1995. – 247 с.
5. Данилович В., Кутнів М. Чисельні методи. – Львів: Кальварія, 1998. – 224 с.
6. Задачин В.М. Чисельні методи в інформатиці. – Х.: ХНЕУ, 2008. – 187 с.
7. Кветний Р.Н. Основы моделирования та обчислювальних методів. – Вінниця: ВНТУ, 2007. – 150 с.
8. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2006. – 480 с.
9. Литвин О.М., Лобанова Л.С. Математичні методи та моделі в розрахунках на ПЕОМ. – Х.: УПА, 2002. – 132 с.
10. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
11. Орвис В.Д. Excel для ученых, инженеров и студентов. – К.: Юниор, 1999. – 528 с.
12. Панюкова Т.А. Численные методы. – М.: URSS, 2010. – 224 с.
13. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений. – СПб.: Политехника, 2001. – 239 с.
14. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
15. Фадеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента. – СПб.: Лань, 2008. – 128 с.
16. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
17. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. – К.: Вид. група ВНУ, 2006. – 480 с.
18. Чабан В.Й. Чисельні методи. – Львів: НТУ “Львівська політехніка”, 2001. – 186 с.

## З М І С Т

Передмова . . . . .	3
1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИМИ МЕТОДАМИ. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ . . . . .	4
1.1. Математична задача та її розв'язок . . . . .	4
1.2. Чисельні методи. Загальні поняття . . . . .	5
2. НАБЛИЖЕНІ ЧИСЛА. ПОХИБКИ ТА ЇХ ОБЧИСЛЕННЯ . . . . .	8
2.1. Джерела похибок. Класифікація похибок . . . . .	9
2.2. Абсолютна та відносна похибки . . . . .	10
2.3. Форми запису наближених даних . . . . .	11
2.4. Похибки округлення . . . . .	14
2.5. Пряма задача теорії похибок. Похибка функції. Похибки арифметичних операцій . . . . .	16
2.6. Обернена задача теорії похибок . . . . .	21
3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ДІЙСНИХ КОРЕНІВ СКІНЧЕННИХ РІВНЯНЬ . . . . .	26
3.1. Дослідження рівняння і відокремлення коренів . . . . .	26
3.2. Методи уточнення наближених значень коренів . . . . .	29
3.2.1. Метод поділу навпіл (дихотомії, бісекції) . . . . .	30
3.2.2. Метод хорд (пропорційних частин) . . . . .	33
3.2.3. Метод простих ітерацій . . . . .	36
3.2.4. Метод Ньютона (метод дотичних, метод лінеаризації) . . . . .	40
3.2.5. Метод січних . . . . .	45
4. АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ . . . . .	48
4.1. Загальна постановка задачі апроксимації . . . . .	48
4.2. Інтерполяція многочленами . . . . .	51
4.2.1. Інтерполяційний многочлен Лагранжа . . . . .	53
4.2.2. Інтерполяційний многочлен Ньютона для нерівновіддалених вузлів . . . . .	57
4.2.3. Інтерполяційний многочлен Ньютона для рівновіддалених вузлів . . . . .	60
4.3. Інтерполяція поліноміальними сплайнами . . . . .	64
4.3.1. Лінійний інтерполяційний сплайн . . . . .	66
4.3.2. Кубічний інтерполяційний сплайн . . . . .	68
4.4. Апроксимація за методом найменших квадратів . . . . .	72

4.4.1. Лінійна апроксимація . . . . .	75
4.4.2. Квадратична апроксимація . . . . .	77
4.4.3. Кубічна апроксимація . . . . .	80
4.4.4. Апроксимація кубічним сплайном . . . . .	83
4.4.5. Локальне згладжування даних . . . . .	86
<b>5. ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ . . . . .</b>	<b>88</b>
5.1. Чисельне диференціювання . . . . .	88
5.1.1. Застосування інтерполяційних многочленів . . . . .	89
5.1.2. Уточнення наближеного значення похідної . . . . .	92
5.1.3. Вибір оптимального кроку чисельного диференціювання . . . . .	94
5.2. Чисельне інтегрування функцій . . . . .	97
5.2.1. Постановка задачі. Способи побудови формул чисельного інтегрування . . . . .	97
5.2.2. Метод прямокутників . . . . .	100
5.2.3. Метод трапецій . . . . .	102
5.2.4. Метод Симпсона (парабол) . . . . .	103
5.2.5. Вибір кроку інтегрування і практична оцінка похибки . . . . .	109
5.2.6. Чисельне інтегрування методом Монте-Карло . . . . .	112
<b>6. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ . . . . .</b>	<b>115</b>
6.1. Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку . . . . .	115
6.2. Метод послідовних наближень. Поняття про чисельні методи розв'язування задачі Коші . . . . .	118
6.3. Чисельні явні однокрокові методи розв'язування задачі Коші . . . . .	121
6.3.1. Явний метод Ейлера . . . . .	121
6.3.2. Явний метод Рунге – Кутта . . . . .	125
6.4. Чисельні багатокрокові методи розв'язування задачі Коші . . . . .	127
6.4.1. Явний чотирикроковий метод Адамса . . . . .	127
6.4.2. Метод прогнозування і корекції Хеммінга . . . . .	129
6.5. Поняття про неявні різницеві методи . . . . .	133
7. Контрольні запитання . . . . .	136
8. Індивідуальні завдання до самостійної роботи . . . . .	140
Список літератури . . . . .	154

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**ДАНИЛЕВСЬКИЙ** Микола Прокопович,  
**ЯКУНІН** Анатолій Вікторович,  
**КУЗНЕЦОВА** Ганна Анатоліївна

**ЕЛЕМЕНТИ**  
**ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ**

**з дисципліни “Вища математика II”**  
(для студентів 1 курсу денної та 2 курсу заочної форм  
навчання за напрямками підготовки 6.030504 “Економіка  
підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”)

**з дисципліни “Вища математика”**  
(для студентів 2 курсу денної форми навчання  
за напрямом підготовки 6.050702 “Електромеханіка”)

Відповідальний за випуск *С. О. Станішевський*  
Редактор *З. І. Зайцева*  
Комп’ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2009, поз. 70Л

Підп. до друку 1.12.2011

Друк на ризографі

Тираж 100 пр.

Формат 60x84 1/16

Ум. друк. арк. 9,0

Зам. №

Видавець і виготовлювач:  
Харківська національна академія міського господарства,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002  
Електронна адреса: [rektorat@ksame.kharkov.ua](mailto:rektorat@ksame.kharkov.ua)  
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:  
ДК № 4064 від 12.05.2011