МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до організації самостійної роботи
і проведення практичних занять
із навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Модуль 1

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 263 – Цивільна безпека)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2024

Методичні рекомендації до організації самостійної роботи і проведення практичних занять із навчальної дисципліни «Вища математика». Модуль 1 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 263 – Цивільна безпека) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. П. Вороновська. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 76 с.

Укладач канд. пед. наук Л. П. Вороновська

Рецензент

Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендована кафедрою вищої математики і математичного моделювання, протокол № 1 від 30.08.2024

ЗМІСТ

ВСТУП………………………………………………………………… 4
1 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ………………………………. 5
1.1 Короткі теоретичні відомості ………………………………….. 5
1.2 Розв'язання задач…………………………………….................. 7
2 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ……………………………………………………..12
2.1 Короткі теоретичні відомості……………………………………..12
2.2 Методи обчислення границь……………………………….……14
2.2.1 Знаходження границь від дробово-раціональної функції…………14
2.2.2 Знаходження границі від ірраціональної функції……………………16
2.2.3 Перша важлива границя…………………………………………… 18
2.2.4 Друга важлива границя…………………………………..……19
3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ………………21
3.1 Похідна і диференціал функції……………………………………21
3.1.1 Приклади знаходження похідних………………………………..…22
3.1.2 Похідна функції, заданої у параметричній формі……………..…25
3.1.3 Похідна неявно заданої функції ………………………………26
3.1.4 Логарифмічне диференціювання…………………………..…27
3.1.5 Похідні вищих порядків…………………………………………..29
3.2 Правило Лопіталя………………………………………………………30
3.3 Дослідження функції за допомогою похідної ……………………..…33
3.3.1 Зростання і спадання функції ……………………………………33
3.3.2 Максимум і мінімум функції ……………………………...… 34
3.3.3 Опуклість графіка функції. Точки перегину ……………………36
3.3.4 Асимптоти графіка функції ……………………………………..…36
3.3.5 Дослідження функції в цілому……………………..……………38
4 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ………………………………………………..42
4.1 Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла…………..…42
4.2 Властивості невизначеного інтеграла…………………………………42
4.3 Таблиця основних невизначених інтегралів……………………………..43
4.4 Безпосереднє інтегрування………………………………………………..43
4.5 Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки)……………45
4.6 Метод інтегрування частинами…………………………………………47
4.7 Інтегрування раціональних функцій…………………………………….. 50
4.8 Інтегрування ірраціональних функцій…………………………………56
4.9 Тригонометричні підстановки……………………………...................58
4.10 Інтегрування тригонометричних функцій………………………………60
5 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ ………………………………..…..64
5.1 Формула Ньютона-Лейбніца…………………………………………… 64
5.2 Властивості визначеного інтеграла……………………….............. 64
5.3 Заміна змінної у визначеному інтегралі……………………….....66
5.4 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі…………............ 68
5.5 Обчислення площі плоскої фігури………………………………………. 69
5.6 Обчислення довжини дуги плоскої кривої………………………………72
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ……………………………………75

ВСТУП

Методичні рекомендації до організації самостійної роботи і проведення практичних занять з дисципліни «Вища математика» містить основні питання з п'яти розділів вищої математики, які включені до робочої програми дисципліни.

Кожен розділ містить коротке викладення теоретичного матеріалу, велику кількість прикладів та вказівок з поясненнями до їх розв'язання, що при самостійній роботі студентів допомагає з засвоєнням навчального матеріалу.

Методичні рекомендації до організації самостійної роботи і проведення практичних занять з дисципліни «Вища математика» націлені на формування у студентів базового комплексу математичних знань для забезпечення прилеглих дисциплін необхідним математичним апаратом; розвиток аналітичного мислення і вмінь для розв'язування практичних задач зі сфери професійної діяльності, що і є метою вивчення даної навчальної дисципліни.

Методичні рекомендації до організації самостійної роботи і проведення практичних занять з дисципліни «Вища математика» призначений для студентів спеціальності 263 – Цивільна безпека.

1 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ
1.1 Короткі теоретичні відомості

1. *Відстань* d *між точками* $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$ площини знаходять за формулою: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2. Якщо x_1 і y_1 – координати точки A, а x_2 і y_2 – координати точки B, то координати x і y точки С, яка поділяє відрізок АВ в даному відношенні $\lambda = \frac{AC}{CB}$, знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо λ=1, то точка $C(x, y)$ *поділяє відрізок АВ навпіл*, і тоді координати x і y середини відрізка AB знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. *Площу трикутника* за даними координатами вершин $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ обчислюють за формулою:

$$S = \frac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|.$$

4. *Рівняння прямої*:

– *загальне рівняння прямої :* $Ax + By + C = 0$;
– *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:* $y = kx + b$;
– *рівняння прямої у відрізках:* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;
– *рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *у даному напрямку:*

$$y - y_0 = k(x - x_0);$$

– *рівняння прямої, яка проходить через дві точки* $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ *:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

5. *Кут між двома прямими.* Нехай дані дві прямі

$$y = k_1 x + b_1 \text{ і } \quad y = k_2 x + b_2$$

Кутом між двома прямими на площині називають кут θ(Рис. 1) на який необхідно повернути пряму (1) проти годинникової стрілки до збігу із другою прямою (2) і знаходять за формулою:

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

З цієї формули прямують дві умови:

а) умова *паралельності* прямих: $k_1 = k_2$;

б) умова *перпендикулярності* прямих : $k_1 = \frac{-1}{k_2}$.

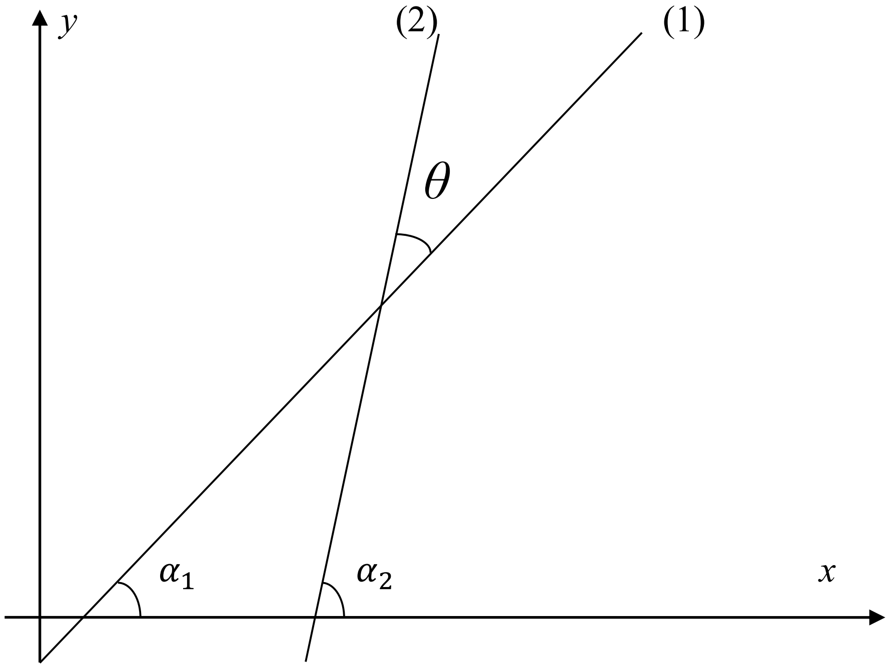

Рисунок 1

6. *Відстань від точки* $A(x_0, y_0)$ *до прямої* $Ax + By + C = 0$ знаходять за формулою

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

1.2 Розв'язання задач

Для трикутника (рис. 2) з вершинами $A(-2,-4)$, $B(-6,3)$, $C(5,1)$ потрібно виконати певні приклади.

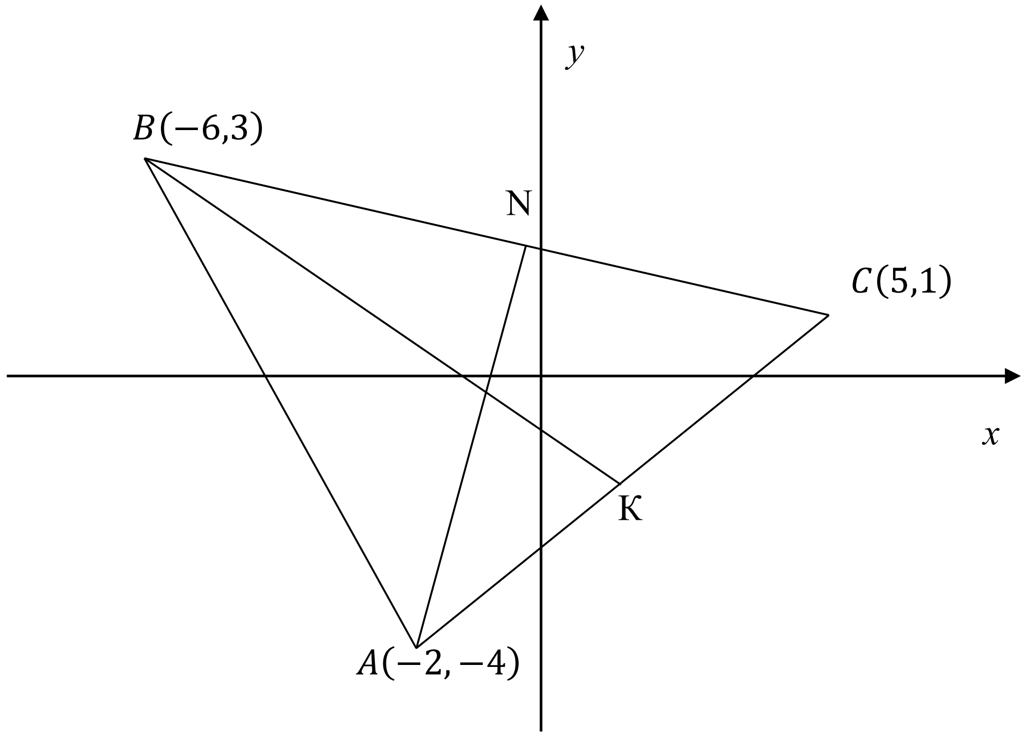

Рисунок 2

Приклад 1. Обчислити довжину сторін трикутника.

Розв'язання. Використаємо формулу: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

$d_{AB}=\sqrt{(-6-(-2))^2+(3-(-4))^2}=\sqrt{(-6+2)^2+(3+4)^2}=\sqrt{65}$ од. д.

$d_{BC}=\sqrt{(5-(-6))^2+(1-3)^2}=\sqrt{(5+6)^2+4}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ од. д.

$d_{AC}=\sqrt{(5-(-2))^2+(1-(-4))^2}=\sqrt{(5+2)^2+(1+4)^2}=\sqrt{74}$ од. д.

Приклад 2. Визначити вид трикутника.

Розв'язання. Вид трикутника можна визначити за його рисунком (рис. 2), або, знаючи довжину сторін, необхідно порівняти квадрат довжини найбільшої сторони з сумою квадратів довжин менших сторін.

Якщо $d_1^2>d_2^2+d_3^2$, то такий трикутник є тупокутним; якщо $d_1^2=d_2^2+d_3^2$, то це прямокутний трикутник і якщо $d_1^2<d_2^2+d_3^2$, то це гострокутний трикутник. У даному прикладі маємо:

$$d_{BC}^2 < d_{AB}^2 + d_{AC}^2; \quad 125 < 65 + 74; \quad 125 < 139.$$

Отже, трикутник гострокутний, різносторонній.

Приклад 3. Обчислити площу трикутника.

Розв'язання. Площа даного трикутника за наведеною вище формулою дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}|(-2-5)(3-1) - (-6-5)(-4-1)| = \frac{1}{2}|-14-55| = \left|\frac{-69}{2}\right|.$$

$$S = 34{,}5 \text{ од. кв.}$$

Приклад 4. Записати рівняння сторін трикутника.

Розв'язання. Рівняння сторони AB: $A(-2,-4), B(-6,3)$. За формулою рівняння прямої, що проходить крізь дві точки, маємо:

$$\frac{x-(-2)}{-6-(-2)} = \frac{y-(-4)}{3-(-4)}$$

Після тотожних перетворень маємо:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}.$$

Рівняння сторін *BC* і *AC* знаходимо так само:

BC: $B(-6{,}3)$, $C(5{,}1)$

$$\frac{x-(-6)}{5-(-6)} = \frac{y-3}{1-3}. \quad \text{Звідси: } y = -\frac{2}{11}x + \frac{21}{11}.$$

AC: $A(-2,-4)$, $C(5{,}1)$

$$\frac{x-(-2)}{5-(-2)} = \frac{y-(-4)}{1-(-4)}. \quad \text{Звідси: } y = \frac{5}{7}x - \frac{18}{7}$$

Приклад 5. Знайти внутрішні кути трикутника.

Розв'язання. Для виконання цього завдання використаємо формулу

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Кут α утворено перетином прямих AB і AC (рис. 2). Отже, враховуючи, що додатний напрям проти годинникової стрілки, маємо:

$$k_1 = k_{AC} = \frac{5}{7}, \qquad k_2 = k_{AB} = -\frac{7}{4}.\ \text{Маємо:}$$

$$tg\alpha = \frac{-\frac{7}{4} - \frac{5}{7}}{1 - \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{4}} = \frac{-\frac{69}{28}}{-\frac{7}{28}} = \frac{69}{7}; \alpha = arctg\frac{69}{7}.$$

Кут β утворено перетином прямих AB і BC (рис. 2). Отже, маємо:

$$k_1 = k_{AB} = -\frac{7}{4}, \qquad k_2 = k_{BC} = -\frac{2}{11}.\ \text{Маємо:}$$

$$tg\beta = \frac{-\frac{2}{11} + \frac{7}{4}}{1 + \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{11}} = \frac{\frac{69}{44}}{\frac{58}{44}} = \frac{69}{58};\ \beta = arctg\frac{69}{58}.$$

Кут γ утворено перетином прямих AC і BC (рис. 2). Отже, маємо:

$$k_1 = k_{BC} = -\frac{2}{11}, \qquad k_2 = k_{AC} = \frac{5}{7}.\ \text{Маємо:}$$

$$tg\gamma = \frac{\frac{5}{7} + \frac{2}{11}}{1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{7}} = \frac{\frac{69}{77}}{\frac{67}{77}} = \frac{69}{67};\ \gamma = arctg\frac{69}{67}.$$

Приклад 6. Знайти рівняння медіани BK.

Розв'язання. Медіана – це відрізок, який сполучає трикутника з серединою його протилежної сторони. Координати точки K (рис. 2) знайдемо за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Маємо: $A(-2, -4), \qquad C(5,1)$, тому отримаємо:

$$x_K = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}, \qquad y_K = \frac{-4+1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Рівняння BK запишемо використовуючи формулу:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Маємо: $B(-6{,}3), K\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Отже $\dfrac{x+6}{\frac{3}{2}+6} = \dfrac{y-3}{-\frac{3}{2}-3}$.

Після тотожних перетворень отримаємо рівняння медіани *BK:*

$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}.$$

Приклад 7. Знайти рівняння висоти AN.

Розв'язання. Висота AN– це перпендикуляр проведений з вершини A до сторони трикутника BC. Отже, для прямих BC і AN виконується умова їх перпендикулярності:

$$k_{AN} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\left(-\frac{2}{11}\right)} = \frac{11}{2}.$$

Рівняння висоти *AN* знаходимо за формулою: $y - y_0 = k(x - x_0)$,

де $k = k_{AN}, A(x_0, y_0)$. Тобто: $k = \dfrac{11}{2}$, $A(-2, -4)$.

Маємо: $y + 4 = \dfrac{11}{2}(x+2)$; $y = \dfrac{11}{2}x + 11 - 4$.

Рівняння висоти AN: $y = \dfrac{11}{2}x + 7$.

Приклад 8. Обчислити довжину висоти CM.

Розв'язання. Довжину висоти CM знайдемо, як відстань від точки $C(x_0, y_0)$ до прямої AB використовуючи формулу:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Для цього представимо рівняння прямої AB в загальному виді:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}; \quad 4y = -7x - 30; \quad 7x + 4y + 30 = 0;$$

де, $A = 7, B = 4, C = 30$. Точка $C(x_0, y_0)$ має координати $x_0 = 5, y_0 = 1$.

Отже: $d = \left|\dfrac{7 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 30}{\sqrt{7^2 + 4^2}}\right| = \dfrac{69}{\sqrt{65}}$ од. д.

Приклад 9. Знайти координати точки перетину медіани BK та висоти AN.

Розв'язання. Позначимо цю точку літерою P (рис. 2). Для знаходження її координат необхідно розв'язати систему рівнянь медіани BK та висоти AN:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} \\ y = \frac{11}{2}x + 7 \end{cases}; \text{ звідси маємо: } -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} = \frac{11}{2}x + 7.$$

Після тотожних перетворень отримаємо: $x = -\frac{76}{61}$.

Знайдене значення x підставимо у перше рівняння і отримаємо:

$$y = \frac{9}{61}$$

Отже, точка перетину медіани і висоти: $P\left(-\frac{76}{61}, \frac{9}{61}\right)$.

Приклад 10. Записати рівняння прямої, яка проходить через вершину трикутника B паралельно до його сторони AC.

Розв'язання. Позначимо рівняння шуканої прямої як BF. За умовою пряма BF паралельна прямій AC, а тому використавши умову паралельності двох прямих знайдемо кутовий коефіцієнт прямої BF:

$$k_{BF} = k_{AC} = \frac{5}{7}.$$

Для прямої BF відомі кутовий коефіцієнт та точка яка належить прямій, а отже використаємо наступне рівняння:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Маємо: $k = \frac{5}{7}, B(6,3)$, тому отримаємо:

$$y - 3 = \frac{5}{7}(x + 6)\ ; \quad y = \frac{5}{7}x + \frac{30}{7} + 3.$$

Рівняння прямої BF: $y = \frac{5}{7}x + \frac{51}{7}$.

2 ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

2.1 Короткі теоретичні відомості

Число A називається *границею функції* $f(x)$ при x, яке прямує до x_0, якщо для будь-якого малого наперед заданого додатного числа ε можна знайти таке додатне δ яке залежить від ε, що при всіх значеннях x, які входять до області визначення функції, відмінних від x_0 і виконуючих умову $|x - x_0| < \delta$, має місце нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Розглянемо необхідні теоретичні відомості з теорії границь:

1. *Нескінченно малі і нескінченно великі функції:*

– функція $f(x)$ називається нескінченно малою при $x \to x_0$, якщо
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0\,;$$
– функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to x_0$, якщо
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

2. *Властивості нескінченно малих функцій:*

– якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ нескінченно малі, то їх сума, різниця та добуток є нескінченно малою;

– якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ нескінченно мала, а функція $\varphi(x)$ – обмежена, то їх добуток $f(x)\varphi(x)$ нескінченно мала.

3. *Властивості нескінченно великих функцій:*

Якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ має скінчену границю ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$), а функція $\varphi(x) -$ нескінченно велика ($\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$) , то:

– їх сума $-$ нескінченно велика, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) + \varphi(x)] = \infty$, а границя відношення $f(x)$ до $\varphi(x)$ дорівнює нулю:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0;$$

– якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ ($b > 0$), а $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ $-$ є нескінченно малою і при цьому $\varphi(x)$ додатна в околиці точки x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$;

– добуток двох нескінченно великих функцій є функція нескінченно велика, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ і $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то $\lim_{x\to x_0} f(x)\varphi(x) = \infty$.

4. *Зв'язок між нескінченно великими і нескінченно малими функціями:*

– якщо $f(x)$ при $x \to x_0$ − нескінченно велика функція, то функція $\frac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала;

– якщо при $x \to x_0$ функція $\varphi(x)$ нескінченно мала, то функція $\frac{1}{\varphi(x)}$ − нескінченно велика, при цьому вважаємо, що в околиці точки x_0 функція $\varphi(x)$ в нуль не обертається.

5. *Правила граничного переходу:*

– якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають скінчені границі, то і їх алгебраїчна сума має границю, яка дорівнює сумі їх границь, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, а $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = b \pm c;$$

– якщо при $x \to x_0$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають границі, то їх добуток також має границю, яка дорівнює добутку їх границь, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, а $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = bc\,;$$

– якщо при $x \to x_0$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають границі і границя функції $\varphi(x)$ не дорівнює нулю, то границя їх відношення існує і дорівнює відношенню їх границь, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, а $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} \varphi(x)} = \frac{b}{c}.$$

2.2 Методи обчислення границь

2.2.1 Знаходження границь від дробово-раціональної функції

Для того щоб знайти границю від дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x \to x_0$ чисельник і знаменник дробу мають границі, рівні нулю (маємо невизначеність $\left|\frac{0}{0}\right|$), необхідно чисельник і знаменник дробу розділити на $x - x_0$ або розкласти на множники і перейти до границі. Вираз $x - x_0$ має назву *«критичний множник»*. Якщо і після цього чисельник і знаменник нового дробу мають границі рівні нулю при $x \to x_0$, то необхідно провести повторне ділення на $x - x_0$.

Розглянемо приклади обчислення границі дробово-раціональної функції.

Приклад 1.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 2x + 8} = \frac{4 - 2 + 2}{4 - 4 + 8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2 - x - 12}{3x^2 - 19x + 28} = \frac{16 - 4 - 12}{48 - 76 + 28} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

За правилом, наведеним вище, розділимо чисельник і знаменник на $x - 4$.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2 - x - 12 & x - 4 \\ \cline{2-2} x^2 - 4x & x + 3 \\ \cline{1-1} -\,3x - 12 & \\ 3x - 12 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3);$$

$$\begin{array}{r|l} -\,3x^2 - 19x + 28 & x - 4 \\ \cline{2-2} 3x^2 - 12x & 3x - 7 \\ \cline{1-1} -\,-7x + 28 & \\ -7x + 28 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$3x^2 - 19x + 28 = (x - 4)(3x - 7);$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(x - 4)(x + 3)}{(x - 4)(3x - 7)} = \lim_{x\to 4}\frac{x + 3}{3x - 7} = \frac{4 + 3}{12 - 7} = \frac{7}{5}.$$

Приклад 3.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^4+2x^3-3x^2-x+10}{x^3+6x^2+x-14}=\frac{16-16-12+2+10}{-8+24-2-14}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$\begin{bmatrix} x^4+2x^3-3x^2-x+10=(x+2)(x^3-3x+5) \\ x^3+6x^2+x-14=(x+2)(x^2+4x-7) \end{bmatrix}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^3-3x+5)}{(x+2)(x^2+4x-7)}=\lim_{x\to-2}\frac{x^3-3x+5}{x^2+4x-7}=\frac{-8+6+5}{4-8-7}=-\frac{3}{11}.$$

Розглянемо декілька задач на знаходження границь дробово-раціональної функції при $x\to\infty$.

При $x\to\infty$ і чисельник, і знаменник дробу функції нескінченно великі. Отже, ми маємо справу з відношенням двох нескінченно великих функцій (маємо невизначеність $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$). В такому випадку необхідно чисельник і знаменник дробу розділити на найвищу степінь x, яка зустрічається в членах дробу.

Приклад 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+6x}{7x^3-4x+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

(найвища степінь x дорівнює 3, тому розділимо кожен елемент дробу на x^3)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{5x^2}{x^3}+\frac{6x}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{7-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}{7-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

Маємо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0, \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}=0, \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0, \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}=0$ (за властивостями нескінченно великих величин).

Приклад 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^5+3x^2-2x+1}{6x^3-9x^2-7x+2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^5}{x^5}+\frac{3x^2}{x^5}-\frac{2x}{x^5}+\frac{1}{x^5}}{\frac{6x^3}{x^5}-\frac{9x^2}{x^5}-\frac{7x}{x^5}+\frac{2}{x^5}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{\frac{6}{x^2}-\frac{9}{x^3}-\frac{7}{x^4}+\frac{2}{x^5}}=\frac{5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^4}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^4}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^5}}=\frac{5}{0}=\infty.$$

Приклад 6.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^3+3x^2-9}{4x^6-7x^5+2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{8x^3}{x^6}+\frac{3x^2}{x^6}-\frac{9}{x^6}}{\frac{4x^6}{x^6}-\frac{7x^5}{x^6}+\frac{2x}{x^6}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x^4}-\frac{9}{x^6}}{4-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8}{x^3}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^4}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9}{x^6}}{4-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^5}}=\frac{0}{4}=0.$$

2.2.2 Знаходження границі від ірраціональної функції

Щоб знайти границю дробу, яка має ірраціональний вираз у випадку, коли і чисельник, і знаменник дробу дорівнює нулю (маємо невизначеність $\left|\frac{0}{0}\right|$), необхідно помножити чисельник і знаменник на вираз спряжений до даного ірраціонального виразу та застосувати формулу різниці квадратів. Многочлени, що входять до дробово-раціональної функції, необхідно розкласти на множники.

Приклад 7.

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9}=\frac{\sqrt{3+6}-3}{9-9}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

(спряженим до виразу $\sqrt{x+6}-3$ є $\sqrt{x+6}+3$, тому помножимо чисельник і знаменник на цей вираз)

$$=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-9}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} = \lim_{x\to3}\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} = \frac{1}{12}.$$

Приклад 8.

$$\lim_{x\to-2}\frac{2+x}{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to-2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{\left(\sqrt{7-x}\right)^2-\left(\sqrt{11+x}\right)^2} = \lim_{x\to-2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{7-x-11-x} =$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{-4-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{-2(2+x)} = -\frac{6}{2} = -3.$$

Приклад 9.

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

(у цьому випадку ми маємо ірраціональні вирази і в чисельнику, і в знаменнику, тому необхідно помножити чисельник і знаменник на відповідні вирази їм спряжені)

$$= \lim_{x\to-3}\frac{\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-3}\frac{\left(\left(\sqrt{x^2+7}\right)^2-\left(\sqrt{7-3x}\right)^2\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-3}\frac{(x^2+7-7+3x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{(x+3-x^2+9)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-3}\frac{(x^2+3x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{-(x^2-x-12)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-3}\frac{x(x+3)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{-(x-4)(x+3)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} = \frac{-3(0+0)}{7(4+4)} = 0.$$

2.2.3 Перша важлива границя

Перша важлива границя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1.$$

При знаходженні границь будемо використовувати наслідки з першої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$$

Приклад 10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-sinx}{x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sinx}{cosx}-sinx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx-sinxcosx}{x^3cosx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sinx(1-cosx)}{x\cdot x^2cosx}=\begin{bmatrix}1-cos2\alpha=2sin^2\alpha\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2cosx}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{x\cdot x\cdot cosx}=\left(\text{помножимо і чисельник і знаменник на}\frac{1}{4}\right)=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\cdot cosx}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1;\lim_{x\to 0}cosx=1\right]=\frac{1}{2}.$$

Приклад 11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{sin^23x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{sin^23x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x\cdot 9x^2}{sin^23x\cdot 9x^2}=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2x}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{9x^2}{sin^23x}=1\end{bmatrix}=\frac{1}{9}.$$

Приклад 12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin5x}{sin3x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{arcsin5x\cdot 15x}{sin3x\cdot 15x}=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin5x}{5x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{sin3x}=1\end{bmatrix}=\frac{5}{3}.$$

Приклад 13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos4x-cos2x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-2sin\dfrac{4x+2x}{2}sin\dfrac{4x-2x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2sin3xsinx}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{3sin3xsinx}{3x\cdot x}=-6\,.$$

2.2.4 Друга важлива границя

В цьому розділі ми розглянемо границі від показниково-степеневої функції $f(x)^{\varphi(x)}$, коли $f(x)\to 1$ і $\varphi(x)\to\infty$; тобто маємо невизначеність $|1^{\infty}|$. Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{kx}=|1^{\infty}|=e^{k}\quad\text{або}\quad\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{k}{x}}=|1^{\infty}|=e^{k}.$$

Число *e* – ірраціональне ($e\approx 2{,}718\,\ldots$), його називають експонентою. Коротко *exp*.

Приклад 14.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{4+3x}\right)^{5x-2}=\left[\begin{matrix}\dfrac{3x-1}{4+3x}\to 1,\text{коли } x\to\infty\\ 5x-2\to\infty,\text{коли } x\to\infty\end{matrix}\right]=|1^{\infty}|=$$

(до основи показниково-степеневої функції додамо та віднімемо одиницю)

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1}{4+3x}-1\right)^{5x-2}=$$

(приведемо до єдиного знаменника другий та третій елементи основи)

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1-4-3x}{4+3x}\right)^{5x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{5x-2}=$$

(помножимо степінь на дріб обернену до дробу, яку додаємо до одиниці у основі функції, а потім на таку ж, яку маємо)

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{\frac{4+3x}{-5}\cdot\frac{(-5)}{4+3x}\cdot(5x-2)}=exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-5(5x-2)}{4+3x}\right)$$

$$=exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{10-25x}{4+3x}\right)=exp\left(-\frac{25}{3}\right)$$

Приклад 15.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x-3}\right)^{3x+2} = |1^{\infty}| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-1}{4x-3}-1\right)^{3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-1-4x+3}{4x-3}\right)^{3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{4x-3}\right)^{\frac{4x-3}{2}\cdot\frac{2}{4x-3}\cdot(3x+2)} = exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{4x-3}\right) = \sqrt{e^3}$$

Розглянемо випадок, коли коефіцієнти, які знаходяться в основі функції біля старшого степеня змінної, різні:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{kx} = \left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}$$

У такому випадку є два рішення: 1) якщо $a > c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty} = \infty$

2) якщо $a < c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty} = 0.$

Приклад 16.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x-4}{9x+3}\right)^{x+2} = \left(\frac{7}{9}\right)^{\infty} = 0.$$

Приклад 17.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{2x-6}\right)^{7x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\infty} = \infty.$$

3 ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1 Похідна і диференціал функції

Поняття похідної є одним з основних математичних понять. Похідну широко використовують при розв’язанні інженерних, економічних та управлінських задач, особливо при вивченні швидкості різних процесів.

Визначення. *Похідною функції* $y = f(x)$ в точці x_0 називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $f(x)$позначають одним із символів: $f'(x), y'(x), y', \frac{dy}{dx}$

Отже,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \ .$$

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням.* Функція $y = f(x)$, яка має похідну в кожній точці інтервалу $(a; b)$, називається *диференційованою в цьому інтервалі*.

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ позначається $f'(x_0)$ або $y'(x_0)$.

Правила диференціювання

Нехай функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дві диференційовані в інтервалі (a, b) функції, тоді мають місце наступні правила:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;

4. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;

5. $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$.

Таблиця похідних

1. $(C)' = 0;$ 2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u';$

2а. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$ 2б. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u';$

3. $(a^u)' = a^u \cdot ln\, a \cdot u';$ 3а. $(e^u)' = e^u \cdot u';$

4. $(log_a\, u)' = \frac{1}{u \cdot ln\, a} \cdot u';$ 4а. $(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u';$

5. $(sinu)' = cosu \cdot u';$ 6. $(cosu)' = -sinu \cdot u'$

7. $(tgu)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u';$ 8. $(ctgu)' = \frac{-1}{sin^2 u} \cdot u';$

9. $(arcsinu)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$ 10. $(arccosu)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

11. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$ 12. $(arcctgu)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'.$

3.1.1 Приклади знаходження похідних

Приклад 1. Знайти похідні даних функцій:

а) $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30,$ б) $y = 3sin5x,$

в) $y = tg3x^2,$ г) $y = arccos\sqrt{5x^4 - 3},$ д) $y = \sqrt[5]{(5x^4 - 3x^3 + 7)^4},$

е) $y = cos2x^3 \cdot (5x-2)^{12},$ є) $y = arcctg^5 x \cdot log_5(x^2+2),$ ж) $y = \frac{(4x+2)^2}{e^{sinx}}.$

Розв'язання.

а) $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30$,

дана функція є сумою степеневих функцій і сталої величини. Похідні від степеневих функцій знаходимо за другою формулою в таблиці похідних, пам'ятаючи перше правило диференціювання, похідну сталої величини шукаємо за першою формулою в таблиці:

$$y' = (5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30)' =$$

$$= 40x^7 - 100x^{24} + 15x^4 - 60x^2 + 24x + 7.$$

б) $y = 3sin5x,$

за четвертим правилом диференціювання виносимо сталу за знак похідної, потім використовуємо п'яту формулу з таблиці похідних, де $u = 5x$

$$y' = (3sin5x\ )' = 3 \cdot (sin5x)' = 3 \cdot cos5x \cdot (5x)' = 3 \cdot cos5x \cdot 5 = 15cos5x;$$

в) $y = tg3x^2$, $\quad y' = (tg3x^2\ )' = \frac{1}{cos^2 3x^2} \cdot (3x^2)' = \frac{1}{cos^2 3x^2} \cdot 6x = \frac{6x}{cos^2 3x^2};$

у цьому випадку знаходили похідну, користуючись сьомою формулою таблиці похідних, де $u = 3x^2$;

г) $y = arccos\sqrt{5x^4 - 3}$,

використовуючи десяту формулу таблиці похідних, де $u = \sqrt{5x^4 - 3}$. В свою чергу $u = u(v)$, де $v = 5x^4 - 3$. Отже, знаходимо:

$$y' = \left(arccos\sqrt{5x^4 - 3}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{5x^4 - 3}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{5x^4 - 3}\right)' =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4 - 5x^4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^4 - 3}} \cdot (5x^4 - 3)' = \frac{-10x^3}{\sqrt{4 - 5x^4} \cdot \sqrt{5x^4 - 3}}.$$

д) $y = \sqrt[5]{(5x^4 - 3x^3 + 7)^4}$

запишемо функцію в інший спосіб використовуючи формулу $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ та використаємо другу формулу таблиці похідних:

$$y' = \left(\sqrt[5]{(5x^4 - 3x^3 + 7)^4}\right)' = \frac{4}{5} \cdot (5x^4 - 3x^3 + 7)^{-\frac{1}{5}} \cdot (5x^4 - 3x^3 + 7)' =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot (5x^4 - 3x^3 + 7)^{-\frac{1}{5}} \cdot (20x^3 - 9x^2) = \frac{80x^3 - 36x^2}{5\sqrt[5]{5x^4 - 3x^3 + 7}}.$$

е) $y = cos2x^3 \cdot (5x-2)^{12}$,

спочатку розкладемо похідну за другим правилом диференціювання, потім використаємо формули з таблиці похідних:

$$y' = (cos2x^3)' \cdot (5x-2)^{12} + cos2x^3 \cdot ((5x-2)^{12})' =$$

$$= -sin2x^3 \cdot (2x^3)' \cdot (5x-2)^{12} + cos2x^3 \cdot 12(5x-2)^{11} \cdot (5x-2)' =$$

$$= -6x^2 sin2x^3 \cdot (5x-2)^{12} + 60cos2x^3 \cdot (5x-2)^{11}.$$

є) $y = arcctg^5 x \cdot log_5(x^2+2)$,

знаходимо похідну також, як у прикладі е) :

$$y' = (arcctg^5 x)' \cdot log_5(x^2+2) + arcctg^5 x \cdot \left(log_5(x^2+2)\right)' =$$

$$= 5arcctg^4 x(arcctgx)' log_5(x^2+2) + arcctg^5 x \frac{1}{(x^2+2)ln5}(x^2+2)' =$$

$$= \frac{-5arcctg^4 x \cdot log_5(x^2+2)}{1+x^2} + \frac{2x \cdot arcctg^5 x}{(x^2+5)ln5}.$$

ж) $y = \frac{(4x+2)^2}{e^{sinx}}$,

в цьому прикладі спочатку використовуємо третє правило диференціювання, потім – формули з таблиці похідних:

$$y' = \frac{((4x+2)^2)' \cdot e^{sinx} - (4x+2)^2 \cdot \left(e^{sinx}\right)'}{(e^{sinx})^2} =$$

$$= \frac{2(4x+2)(4x+2)' e^{sinx} - (4x+2)^2 e^{sinx}(sinx)'}{e^{2sinx}} =$$

$$= \frac{e^{sinx}(8(4x+2) - (4x+2)^2 cosx)}{e^{2sinx}} = \frac{(4x+2)(8 - (4x+2)cosx)}{e^{sinx}}$$

3.1.2 Похідна функції, заданої у параметричній формі

Нехай функцію задано у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні і диференційовані, коли параметр $t\epsilon(\alpha;\beta)$. Нехай функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = t(x)$, яка також диференційована (це означає, що у деякій точці $t_0\epsilon(\alpha;\beta)$ похідна $x'_t \neq 0$), тоді має місце формула

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (*)$$

Приклад 2. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$.

Розв'язання. Знаходимо $x'_t = (1 - t^2)' = -2t$ і $y'_t = (t - t^3)' =$

$= 1 - 3t^2$. Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t до формули $(*)$, дістанемо

$$y'_x = \frac{1 - 3t^2}{-2t} = \frac{3t^2 - 1}{2t}.$$

Приклад 3. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$.

Розв'язання. Маємо

$$x'_t = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t до формули $(*)$, дістанемо:

$$y'_x = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}.$$

Приклад 4. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = e^t cost \\ y = e^t sint \end{cases}$.

Розв'язання. Знаходимо x'_t і y'_t :

$$x'_t = e^t cost - e^t sint = e^t(cost - sint);$$

$$y'_t = e^t sint + e^t cost = e^t(sint + cost).$$

$$y'_x = \frac{sint + cost}{cost - sint}.$$

3.1.3 Похідна неявно заданої функції

Якщо функція задана рівнянням $F(x, y) = 0$ (неявно), то для знаходження похідної від y по x необхідно: продиференціювати рівняння за x, вважаючи, що y є функцією від x (тобто $(x)' = 1$, $(y)' = y'$); отримане рівняння потрібно розв'язати відносно y'.

*Приклад 5***.** Знайти y'_x, якщо $y^2 - 3x^5 + 8x^2y^3 - 10 = 0$.

Розв'язання. Диференціюємо функцію по x, вважаючи, що y є функцією від x**:**

$$2yy' - 15x^4 + 16xy^3 + 24x^2y^2y' = 0.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно y':

$$2yy' + 24x^2y^2y' = 15x^4 - 16xy^3, \qquad y'(2y + 24x^2y^2) = 15x^4 - 16xy^3,$$

$$y' = \frac{15x^4 - 16xy^3}{2y + 24x^2y^2}.$$

Приклад 6. Знайти y'_x, якщо $sin2x + cos3y = sin^2y + 1.$

Розв'язання. Диференціюємо функцію по x, вважаючи, що y є функцією від x**:**

$$2cos2x - 3sin3y \cdot y' - 2siny \cdot cosy \cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо рівняння відносно y':

$$y' \cdot (3sin3y + 2siny \cdot cosy) = 2cos2x,$$

$$y' = \frac{2cos2x}{3sin3y + 2siny \cdot cosy}.$$

3.1.4 Логарифмічне диференціювання

Якщо функція $y = f(x)$ становить добуток кількох множників, то перш ніж диференціювати її, можна прологарифмувати цю функцію.

Приклад 7. Знайти y', якщо $y = \sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2x \cdot \sqrt[4]{cosx}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння:

$$lny = ln\left(\sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2x \cdot \sqrt[4]{cosx}\right),$$

$$lny = \frac{1}{5}lnsinx + 2lnarctgx + \frac{1}{4}lncosx,$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності, пам'ятаючи, що $(x)' = 1,\ (y)' = y'$:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5} \cdot \frac{cosx}{sinx} + \frac{2}{arctgx} \cdot \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{-sinx}{cosx},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1 + x^2)} - \frac{tgx}{4},$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1+x^2)} - \frac{tgx}{4}\right),$$

$$y' = \sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2 x \cdot \sqrt[4]{cosx} \cdot \left(\frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1+x^2)} - \frac{tgx}{4}\right).$$

Похідна показниково-степеневої функції

Функція $y = (u(x))^{v(x)}$ називається *показниково-степеневою* функцією. Похідна від неї знаходиться за допомогою логарифмічного диференціювання.

Приклад 8. Знайти y′, якщо $y = (x^2+1)^{sinx}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо задану функцію:

$$lny = ln(x^2+1)^{sinx}, \qquad lny = sinx \cdot ln(x^2+1) \quad ,$$

Диференціюємо обидві частини останнього рівняння:

$$\frac{y'}{y} = cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}.$$

Знаходимо y': $\qquad y' = y \cdot \left(cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right).$

На місце y записуємо вихідну функцію:

$$y' = (x^2+1)^{sinx} \cdot \left(cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right).$$

Приклад 9. Знайти y′, якщо $y = (arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}$.

Розв'язання.

$$lny = ln(arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}, \qquad lny = ln(2x+1) \cdot ln(arctg\sqrt{x}) \quad ,$$

$$\frac{y'}{y} = (ln(2x+1))' \cdot lnarctg\sqrt{x} + ln(2x+1) \cdot \left(lnarctg\sqrt{x}\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(2x+1)'}{2x+1} \cdot lnarctg\sqrt{x} + ln(2x+1) \cdot \frac{\left(arctg\sqrt{x}\right)'}{arctg\sqrt{x}},$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{2x+1}\cdot lnarctg\sqrt{x}+ln(2x+1)\cdot\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{(1+x)\cdot arctg\sqrt{x}}\ ,$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2lnarctg\sqrt{x}}{2x+1}+\frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x)\cdot arctg\sqrt{x}}\,,$$

$$y'=y\cdot\left(\frac{2lnarctg\sqrt{x}}{2x+1}+\frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x)\cdot arctg\sqrt{x}}\right),$$

$$y'=(arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}\cdot\left(\frac{2lnarctg\sqrt{x}}{2x+1}+\frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x)\cdot arctg\sqrt{x}}\right).$$

3.1.5 Похідні вищих порядків

Нехай функція $y=f(x)$ диференційована у проміжку $(a;b)$. Похідна цієї функції $f'(x)$ є функцією аргументу x. Якщо функція $f'(x)$ диференційована у цьому ж проміжку, то її похідна називається *похідною другого порядку* і позначається $f''(x)$ (або y'', $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$). Таким чином, $y''=(y')'$.

Похідна від похідної другого порядку, якщо вона існує, називається *похідною третього порядку* і позначається $f'''(x)$ (або y''', $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$). Таким чином, $y'''=(y'')'$.

Похідною n – го порядку (або *n*-ю похідною, якщо вона існує) називається похідна від похідної (n – 1) порядку:

Таким чином, $$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Похідні, порядок яких вище першого, називають *похідними вищих порядків.*

Приклад 10. Знайти y''', якщо $y=2e^{3x}$.

Розв'язання. $y' = 6 \cdot e^{3x}$; $y'' = (6 \cdot e^{3x})' = 18 \cdot e^{3x}$;

$$y''' = (18 \cdot e^{3x})' = 54 \cdot e^{3x}.$$

Приклад 11. Знайти y''' в точці $x_0 = 1$, якщо $y = 7x^5 - 3x^3 + 8x - 4$.

Розв'язання. $y' = 35x^4 - 9x^2 + 8$, $y'' = 140x^3 - 18x$,

$$y''' = 520x^2 - 18,\ y'''(1) = 520 - 18 = 502 .$$

3.2 Правило Лопіталя
(розкриття невизначеностей виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ та $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$)

Теорема (Правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні і диференційовані в околі точки $x_0 = a$, тобто $0 < |x - a| < \varepsilon$, причому $\varphi'(x) \neq 0$, тоді якщо існує скінчена або нескінчена границя відношення похідних $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ при $x \to a$, то відношення функцій має ту ж саму границю, тобто:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left|\frac{0}{0}\right| \text{ або } \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження 1. Твердження теореми залишається в силі, якщо $a = \infty$, тобто: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left|\frac{0}{0}\right|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауваження 2. Існування границі відношення похідних гарантує існування границі відношення функцій. Обернене твердження невірно, оскільки границя відношення функцій може існувати при відсутності границі відношення похідних.

Зауваження 3. Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ будуть відповідати сформульованій теоремі, то можна брати границю відношень других похідних і т.д.. Тобто, правило Лопіталя можна застосовувати послідовно декілька разів.

Зауваження 4. Інші невизначеності необхідно тотожно перетворювати до розглянутих: $\left|\frac{0}{0}\right|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, щоб застосувати правило Лопіталя.

Приклад 12. Знайти границі функцій:

Розв'язання. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(5+3x)}{2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{5+3x}}{2} = \frac{3}{10}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{5x}}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5e^{5x}}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{25e^{5x}}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$;

(Застосували правило Лопіталя двічі)

в) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot lnx = |0\cdot\infty| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{lnx}{{}^1/_{x^2}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{{}^1/_x}{{}^{-2}/_{x^3}} = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0$;

(Виконали тотожнє перетворення $|0\cdot\infty|$ до $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$)

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg2x}{8x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{{}^2/_{1+4x^2}}{8} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4(1+4x^2)} = \frac{1}{4}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1} lnx\cdot ln(x-1) = |0\cdot\infty| = \lim\limits_{x\to 1}\frac{ln(x-1)}{{}^1/_{lnx}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to 1}\frac{{}^1/_{x-1}}{{}^{-1}/_{x\cdot(lnx)^2}} =$

$$-\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(lnx)^2}{x-1} = \left|\frac{0}{0}\right| = -\lim_{x\to 1}\frac{(lnx)^2 + \frac{2xlnx}{x}}{1} = 0;$$

(Виконали тотожнє перетворення і застосували правило Лопіталя двічі)

е) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi - 2arctgx)\cdot lnx = |0\cdot\infty| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{{}^1/_{lnx}} = \left|\frac{0}{0}\right| =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{1+x^2}}{\frac{-1}{x(lnx)^2}} == \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{2x(lnx)^2}{1+x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2(lnx)^2 + 4lnx}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4lnx}{x} + \frac{4}{x}}{2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2(lnx+1)}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 2\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

(Виконали тотожнє перетворення і застосували правило Лопіталя 4 рази).

ж) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = |\infty - \infty| = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} =$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}.$$

(Виконали тотожне перетворення і застосували правило Лопіталя двічі).

Приклад 13. Знайти границі функцій:

Розв'язання. а) $\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = |0^0| = A$,

функція є показниково-степеневою, тому позначимо границю функції як A , та прологарифмуємо її:

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = \lim_{x\to 0}ln(arcsinx)^{tgx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}tgx \cdot lnarcsinx = \lim_{x\to 0}\frac{lnarcsinx}{ctgx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

Отримали границю відношення функцій, до якої можна застосувати правило Лопіталя. Після його застосування маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(lnarcsinx)'}{(ctgx)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-sin^2x}{\sqrt{1-x^2}\cdot arcsinx} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Отже, $lnA = 0$ і тоді $A = e^0 = 1$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = |\infty^0| = A,$

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0}ln(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{lnx}\cdot lnctgx =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{lnctgx}{lnx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{sin^2x\cdot ctgx}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sin^2x\cdot ctgx} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sin^2x\cdot\frac{cosx}{sinx}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx\cdot cosx} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx} = -1,$$

отримали $\ln A = -1$, тоді $A = e^{-1}$.

3.3 Дослідження функції за допомогою похідної

Визначимо загальні правила дослідження функції, які дозволять зробити ескіз графіка функції.

3.3.1 Зростання і спадання функції

Теорема. Для того щоб диференційована на проміжку $(a;b)$ функція $f(x)$ зростала (спадала) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) > 0 (f'(x) < 0)$ при будь – якому $x \in (a;b)$.

Приклад 14. Знайти проміжки зростання і спадання функції

$$y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}.$$

Розв'язання. Знайдемо область визначення функції: $x \neq 4$, тобто $D(y) = (-\infty;4)\cup(4;+\infty)$. Знайдемо похідну цієї функції:

$$y' = \frac{(2x-4)(x-4)-(x^2-4x+1)}{(x-4)^2} = \frac{2x^2-8x-4x+16-x^2+4x-1}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 8x + 15}{(x-4)^2} = \frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)^2}; y' = 0; \frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)^2} = 0.$$

Знаходимо корені похідної: $x = 5$ і $x = 3$. На рисунку 3 зображено інтервали зростання і спадання даної функції.

Знак y':

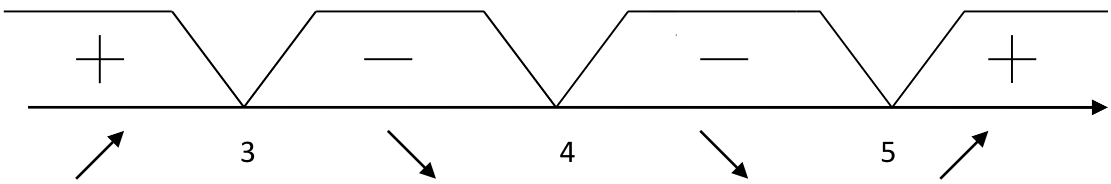

Рисунок 3

Зробимо висновок, що функція зростає при $x \epsilon (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$, функція спадає при $x \epsilon (3; 4) \cup (4; 5)$.

3.3.2 Максимум і мінімум функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і її околі. Точка x_0 називається *точкою максимуму (мінімуму) функції* $f(x)$, якщо значення функції у точці x_0 більше (менше) за її значення в усіх точках деякого околу точки x_0 : $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ $\big($або $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)\big)$, коли $\Delta x > 0$ або $\Delta x < 0$.

Максимум і мінімум функції називають *екстремумами* або *екстремальними значеннями функції.*

Теорема (необхідна умова існування екстремуму). Якщо диференційована функція $f(x)$ має у точці x_0 максимум або мінімум, то необхідно,щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю або не існувала.

Геометрично рівність $f'(x_0) = 0$ означає, що в точці екстремуму функції $f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі *Ox*, а якщо $f'(x_0) = \infty$, то дотична паралельна осі Oy.

Зауважимо, що умова $f'(x_0) = 0$ не є достатньою умовою існування екстремуму. Наприклад, для функції $y = x^3$ її похідна $y' = 3x^2$ дорівнює нулю при $x = 0$, але $x = 0$ не є точкою екстремуму.

Існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, неперервна функція $y = |x|$ в точці $x = 0$ похідної не має, але ця точка є точкою мінімуму.

Значення аргументу, при яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними.*

Теорема (достатня умова існування екстремуму). Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку x_0 диференційованої в деякому околі цієї точки функції $f(x)$ її похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то x_0 – є точкою максимуму; якщо з мінуса на плюс, то x_0 – є точкою мінімуму.

Приклад 15. Знайти критичні точки та проміжки зростання і спадання функції: $y = x^3 - 3x$.

Розв'язання. Нагадуємо, що будь – яке дослідження функції необхідно розпочинати з находження її області визначення. Маємо $D(y) = R$.

Похідна цієї функції: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$.

При переході через точку $x_0 = -1$ похідна функції змінює знак з «+» на «−», тобто в точці $x_0 = -1$ знаходиться максимум функції. При переході через точку $x_0 = 1$ похідна функції змінює знак з «−» на «+», в точці $x_0 = 1$ знаходиться мінімум функції.

Отже, функція $y = x^3 - 3x$ зростає на проміжках $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-1; 1)$. Максимум її знаходиться в точці $x_0 = -1$, мінімум − в точці $x_0 = 1$.

3.3.3 Опуклість графіка функції. Точки перегину

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a; b)$.

Графік функції $f(x)$ називається *опуклим (угнутим)* на проміжку $(a; b)$, якщо усі точки кривої $f(x)$ розташовані нижче (вище) точок дотичної, проведеної у будь – якій точці графіка на цьому проміжку.

Часто опуклі і угнуті функції називають *опуклими вгору і опуклими вниз* відповідно.

Точку графіка функції $f(x)$, у якій змінюється напрямок опуклості, називають *точкою перегину.*

У подальшому вважаємо, що функція $f(x)$ має другу похідну на проміжку $(a; b)$.

Теорема (достатня умова опуклості графіка функції). Якщо друга похідна функції $f"(x) < 0$ $(f"(x) > 0)$ в усіх точках проміжку $(a; b)$, то графік функції опуклий вгору (опуклий вниз) на цьому проміжку.

Теорема (достатня умова існування точок перегину). Якщо друга похідна $f"(x)$ при переході через точку x_0, в якій вона дорівнює нулю або не існує, змінює знак, то ця точка є точкою перегину.

Приклад 16. Дослідити функцію $y = x^5 - 2x + 5$ на опуклість і знайти точки перегину.

Розв'язання. Область визначення $D(y) = R$. Знайдемо першу і другу похідні даної функції: $y' = 5x^4 - 2$, $y" = 20x^3$. Друга похідна дорівнює нулю $y" = 0$ при $x = 0$. Тому $y" > 0$ при $x > 0$; $y" < 0$ при $x < 0$.

Отже, графік функції $y = x^5 - 2x + 5$ є опуклим вгору на проміжку $(-\infty; 0)$ і опуклим вниз на проміжку $(0; \infty)$. Точка (0; 5) є точкою перегину.

3.3.4 Асимптоти графіка функції

Асимптоти дозволяють створити уявлення про поведінку графіка функції при віддалені його точок на нескінченність

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називають пряму, відстань до якої від точки, яка лежить на кривій, прямує нуля, якщо ця точка рухається вздовж графіка функції до нескінченності.

Асимптоти поділяють на два види: вертикальні й похилі (зокрема, горизонтальні).

Пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Рівняння *похилої асимптоти* будемо шукати у вигляді

$$y = kx + b,$$

де $k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x}$, $b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx)$.

Таким чином, якщо існує похила асимптота $y = kx + b$, то k і b знаходять за отриманими формулами. І навпаки: якщо існують скінченні границі в формулах для k і b, то пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою.

Зокрема, якщо $k = 0$, то $b = \lim_{x \to \infty} f(x)$. Тому $y = b$ – рівняння *горизонтальної асимптоти*.

Зауваження. Асимптоти графіка функції можуть бути різними при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$.

Якщо хоча б одна з границь при знаходженні k і b не існує або дорівнює ∞, то похилих асимптот немає.

Приклад 17. Знайти асимптоти графіка функцій $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Розв'язання. Область визначення $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Шукаємо вертикальні асимптоти графіка функції :

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=-\infty\ ; \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty\ ;$$

тому $x=-1$ і $x=1$ є вертикальними асимптотами.

Похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=1\ ,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}==0.$$

Підставляючи $k=1$ і $b=0$ в рівняння $y=kx+b$, отримаємо: $y=x$, це шукана похила асимптота.

3.3.5 Дослідження функції в цілому

При дослідженні графіка функції рекомендується використовувати таку загальну схему:

1) знайти область визначення функції, її точки розриву й проміжки неперервності;
2) дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
3) знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
4) дослідити поведінку функції на нескінченності;
5) знайти інтервали монотонності та екстремуми функції;
6) знайти інтервали опуклості (угнутості) та точки перегину функції;
7) знайти асимптоти графіка функції;

8) побудувати ескіз графіка функції.

Порядок дослідження доцільно обирати згідно з особливостями даної функції.

Приклад 18. Дослідити функцію $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ та побудувати ескіз її графіка:

1. Область визначення: $x \neq \pm 1$; тобто

$$D(y) \,\epsilon\, (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty).$$

Прямі $x = \pm 1$ служать вертикальними асимптотами, тому що

$$\lim_{x\to -1\pm 0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty; \quad \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

2. Обчислимо $y(-x) = \dfrac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = y(x)$, тобто виконується рівність $y(-x) = y(x)$, отже, функція парна і її графік симетричний відносно осі Oy.

3. Точка перетину з віссю Oy: $x = 0; y(0) = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$. Маємо точку $A(0;1)$. Точок перетину з віссю Ox нема. При $y = 0$, рівняння $\frac{1+x^2}{1-x^2} = 0$ не має рішень.

4. Обчислюємо: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$, тобто пряма $y = -1$ служить горизонтальною асимптотою.

Знайдемо похилі асимптоти, які визначаються рівнянням

$$y = kx + b.$$

Знайдемо параметри k та b:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{1-3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{-6x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

Таким чином, отримали горизонтальну асимптоту: $y = -1$.

5. Інтервали монотонності та екстремуми.

Знайдемо $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2};$$

$y'(x) = 0$, якщо $x = 0$ та $y'(x)$ не існує, якщо $x = \pm 1$ тобто критичною є тільки точка $x = 0$, оскільки точки $x = \pm 1$ не належать області визначення функції.

Поведінку функції на інтервалах монотонності згідно знаку похідної показано на рисунку 4.

Визначимо знак $y'(x)$:

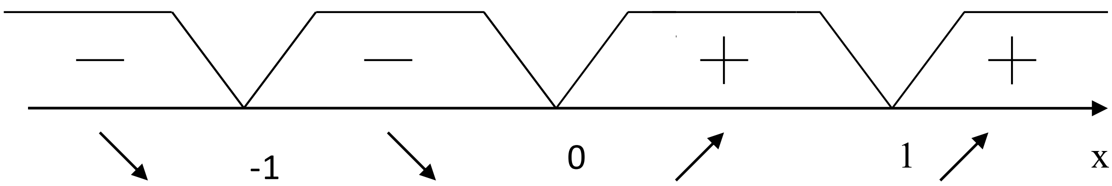

Рисунок 4

На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(-1,\ 0)$ функція спадає, оскільки маємо $y'(x) < 0$.

На інтервалах $(\ 0, 1)$ та $(1, \infty)$ функція зростає, оскільки маємо $y'(x) > 0$.

Зміна знаку похідної при переході через точку $x = 0$, вказує на те, що точка $B(0;1)$ є точкою екстремуму. Це точка мінімуму функції:

$$y_{min} = y(0) = 1.$$

6. Інтервали опуклості і угнутості та точки перегину графіка функції.

Знайдемо другу похідну даної функції:

$$y''(x) = \left(y'(x)\right)' = \left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2 \cdot (1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Знак другої похідної і характер графіка функції на відповідних інтервалах приведені на рисунку 5.

Визначимо знак $y''(x)$:

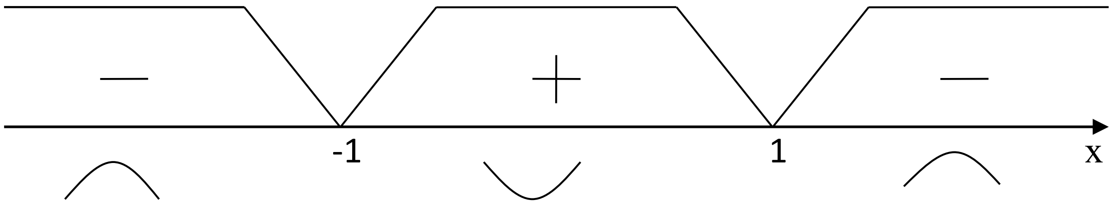

Рисунок 5

На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(1, \infty)$ графік функції опуклий, тому що маємо $y''(x) < 0$. На інтервалі $(-1, 1)$ графік функції угнутий, тому що маємо $y''(x) > 0$. Точок перегину немає.

7. Асимптоти графіка функції знайдені у п.1 і п. 4.

8. Побудуємо ескіз графіка, використовуючи отриману вище інформацію (рис. 6) функції:

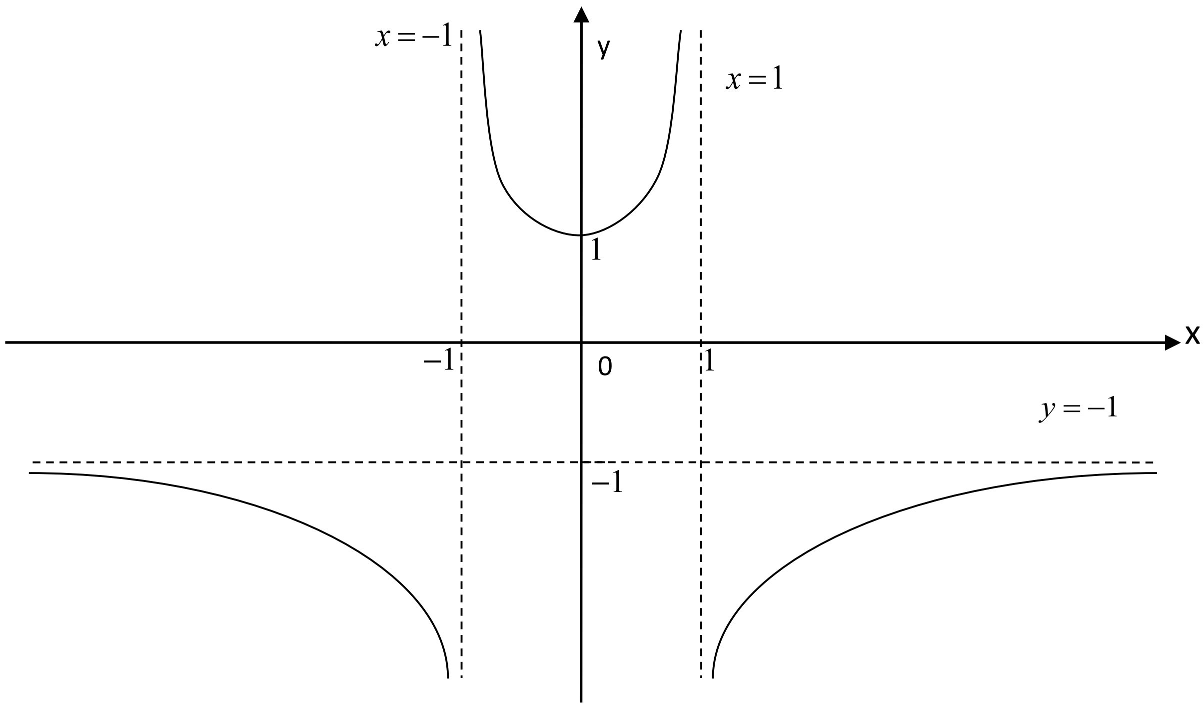

Рисунок 6

4 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

4.1 Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла

Відомо, що однією з основних задач диференційного числення є задача знаходження похідної або диференціала даної функції.

Основною ж задачею інтегрального числення є обернена задача: знаходження функції за похідною або диференціалом. Ця дія називається інтегруванням.

Шукану функцію називають первісною функцією $F(x)$, по відношенню до даної функції $f(x)$.

За означенням, первісною функцією для функції $f(x)$, визначеної на проміжку $(a;b)$, називають функцію $F(x)$, яка визначена на тому самому проміжку і задовольняє умові

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x)dx.$$

Сукупність всіх первісних функції $f(x)$, де $x \epsilon (a;b)$, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на цьому проміжку.

Таким чином, якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

З визначення прямує, що результат інтегрування можна перевірити диференціюванням.

4.2 Властивості невизначеного інтеграла

$(\int f(x)dx)' = f(x)$,

1. $d(\int f(x)dx) \quad = f(x)dx$,
2. $\int dF(x) = F(x) + C$,
3. $\int Cf(x) = C \int f(x)dx$, де $C - const \neq 0$,
4. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$,
5. $\int f(u)du = F(u) + C$, де $u = \varphi(x) -$ диференційована функція від незалежної змінної x.
6. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

4.3 Таблиця основних невизначених інтегралів

1.$\int du = u + C.$

2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1,\ \alpha \epsilon R),\ \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C,\ \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$

3. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C.$

4. $\int a^u = \frac{a^u}{lna} + C, a > 0, a \neq 1, \qquad \int e^u du = e^u + C.$

5. $\int sinu\, du = -cosu + C.$

6. $\int cosu\, du = sinu + C.$

7. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C.$

8. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C.$

9. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C, a \epsilon R, a \neq 0.$

10. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, a \epsilon R, a \neq 0.$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C, |a| > |u|, a \neq 0.$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C.$

Зауважимо, що маємо $\alpha, A\ i\ a -$ сталі, $u -$ незалежна змінна або будь-яка диференційована функція від незалежної змінної.

Є три основні методи інтегрування функцій: безпосереднє інтегрування, метод заміни змінної, метод інтегрування частинами.

4.4 Безпосереднє інтегрування

Під безпосереднім інтегруванням мають на увазі пряме використання таблиці інтегралів.

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл $\int(8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)dx.$

Розв'язання. Скориставшись властивостями 4 і 5 невизначеного інтеграла, будемо мати:

$$\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)dx = \int 8x^7dx - \int 3x^2dx + \int 3xdx + \int 10dx =$$

$$= 8\int x^7dx - 3\int x^2dx + 3\int xdx + 10\int dx.$$

Далі, застосувавши до одержаних інтегралів формулу (1) таблиці знаходимо:

$$\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)dx = 8\frac{x^8}{8} + 3\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 10x + C =$$

$$= x^8 - x^3 + \frac{3x^2}{2} + 10x + C.$$

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл $\int\left(1 - \sqrt{x} - x\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)dx$.

Розв'язання. Спростимо підінтегральний вираз:

$\left(1 - \sqrt{x} - x\right)\left(1 + \sqrt{x}\right) = 1 + \sqrt{x} - \sqrt{x} - x - x - x^{\frac{3}{2}} = 1 - 2x - x^{\frac{3}{2}}$, тоді

$$\int\left(1 - \sqrt{x} - x\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)dx = \int\left(1 - 2x - x^{\frac{3}{2}}\right)dx =$$

$$= \int dx - 2\int xdx - \int x^{\frac{3}{2}}dx = x - 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = x - x^2 - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C.$$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивість 7 та формулу 2 маємо,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}} = \int\frac{dx}{(2-5x)^{\frac{1}{5}}} = \int (2-5x)^{-\frac{1}{5}}dx = \frac{(2-5x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}\cdot(-5)} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt[5]{(2-5x)^4}}{4} + C.$$

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{3x^2+12}$.

Розв'язання. За формулою (9) маємо:

$$\int \frac{dx}{3x^2+12} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + C = \frac{1}{6}arctg\frac{x}{2} + C.$$

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}}dx$.

Розв'язання. За формулою 11 маємо,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5(3-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

4.5 Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки)

Метод заміни змінної застосовують в тих випадках, коли безпосереднє інтегрування не можливо. В таких випадках спробуємо підібрати таку нову змінну, підстановка якої зводить інтеграл до табличного.

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx$.

Розв'язання. Заданий інтеграл можна подати у вигляді:

$$\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{arctg2x}\cdot\frac{2}{1+4x^2}dx = \left|\begin{matrix} u = arctg2x \\ du = \frac{2}{1+4x^2}dx \\ \frac{du}{2} = \frac{1}{1+4x^2}dx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^u \cdot du = \frac{1}{2}e^{arctg2x} + C.$$

Заміну змінної розміщуємо після інтеграла у вертикальних дужках.

Приклад 7. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}} = \frac{1}{6}\int \frac{6x^5dx}{\sqrt{(x^6)^2+7}} = \left|\begin{matrix} t = x^6 \\ dt = 6x^5dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}} =$$

$$= \frac{1}{6} ln\left|t + \sqrt{t^2 + 7}\right| + C = \frac{1}{6} ln\left|x^6 + \sqrt{x^{12} + 7}\right| + C.$$

Приклад 8. Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int 7sin^3xcosxdx$, б) $\int ctgxdx$, в) $\int \frac{dx}{sinx}$.

Розв'язання:

а) $\int 4sin^3xcosxdx = 4\int (sinx)^3cosxdx =$

$$= \left|\begin{matrix} u = sinx \\ du = cosxdx \end{matrix}\right| = 4\int u^3du = 4 \cdot \frac{u^4}{4} + C = (sinx)^4 + C;$$

$$б) \int ctgx\, dx = \int \frac{cosx\, dx}{sinx} = \left|\begin{matrix} u = sinx \\ du = cosxdx \end{matrix}\right| = \int \frac{du}{u} = ln|u| + C$$
$$= ln|sinx| + C,$$

$$в) \int \frac{dx}{sinx} = \int \frac{sinx\, dx}{sin^2x} = \int \frac{sinx\, dx}{1 - cos^2x} = \left|\begin{matrix} u = cosx \\ -du = sinxdx \end{matrix}\right| = \int \frac{-du}{1 - u^2} =$$

$$= \frac{1}{2} ln\left|\frac{u - 1}{u + 1}\right| + C = \frac{1}{2} ln\left|\frac{cosx - 1}{cosx + 1}\right| + C.$$

Приклад 9. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 1}} = \left|\begin{matrix} x + 1 = t^2 \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \end{matrix}\right| = \int \frac{2tdt}{1 + t} = 2\int \frac{t}{t + 1}dt = 2\int \frac{t + 1 - 1}{t + 1}dt =$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{t + 1}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t + 1} = 2t - 2ln|t + 1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x + 1} - 2ln\left|\sqrt{x + 1} + 1\right| + C.$$

Приклад 10. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left| \begin{matrix} e^x+1=t^2 \\ e^x dx = 2tdt \\ dx = \frac{2tdt}{e^x} = \frac{2tdt}{t^2-1} \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2} ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C.$$

4.6 Метод інтегрування частинами

Як вже зазначалося вище, цей метод, як і розглянутий метод підстановки, належить до основних методів інтегрування.

Якщо $u(x)$ і $v(x)$ − диференційовні функції від x, то маємо формулу

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du,$$

яка називається формулою інтегрування частинами, а метод інтегрування, що ґрунтується на застосуванні цієї формули, методом інтегрування частинами.

Отже, методом інтегрування частинами обчислюються інтеграли, що мають підінтегральну функцію:

1. Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на тригонометричну:

$$\int P_n(x)\cdot \begin{matrix} sin(ax+b) \\ cos(ax+b) \\ tg(ax+b) \\ ctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx, \ \ \big(u = P_n(x)\big);$$

Зрозуміло, що береться одна з тригонометричних функцій.

2. Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на показникову:

$$\int P_n(x)a^x dx, \ \big(u = P_n(x)\big)$$

3. Логарифмічна функція:

$$\int \log_a(ax+b)\,dx, \quad (u = \log_a(ax+b));$$

4. Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на логарифмічну:

$$\int P_n(x)\log_a(ax+b)dx; \quad (u=\log_a(ax+b));$$

5. Обернена тригонометрична функція:

$$\int \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx; \quad \left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \right);$$

6. Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на обернену тригонометричну:

$$\int P_n(x) \cdot \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx; \left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \right);$$

і багато-багато інших…

Зауваження. Перший та другий тип інтегралів з даного переліку інтегрується частинами n разів; тобто кількість інтегрування частинами дорівнює степіню многочлена $P_n(x)$.

Приклад 11. Знайти невизначений інтеграл $\int (x-3)e^{2x}dx$.

Розв'язання.

$$\int (x-3)e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x-3, \;\; du = dx \\ dv = e^{2x}dx, \;\; v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = (x-3)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{x-3}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Приклад 12. Знайти невизначений інтеграл $\int x^2 sin3xdx$.

Розв'язання.

$$\int x^2 sin3xdx = \begin{vmatrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = sin3xdx, & v = \int sin3xdx = -\frac{1}{3}cos3x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2cos3x - \int \left(-\frac{1}{3}cos3x\right)2xdx = -\frac{1}{3}x^2cos3x + \frac{2}{3}\int xcos3xdx.$$

До останнього інтегралу знову застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int xcos3xdx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = cos3xdx, & v = \int cos3xdx = \frac{1}{3}sin3x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}xsin3x - \frac{1}{3}\int sin3xdx = \frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x.$$

Таким чином, маємо:

$$\int x^2 sin3xdx = -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{9}xsin3x + \frac{2}{27}cos3x + C.$$

Приклад 13. Знайти невизначений інтеграл $\int x^3 lnxdx$.

Розв'язання.

$$\int x^3 lnxdx = \left| \begin{matrix} u = lnx, & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3dx, & v = \int x^3dx = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{x^4}{4}lnx - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^4}{4}lnx - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{x^4}{4}lnx - \frac{1}{16}\cdot x^4 + C.$$

Приклад 14. Знайти невизначений інтеграл $\int x \cdot arctgxdx$.

Розв'язання.

$$\int x \cdot arctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx\right) =$$

Отриманий інтеграл – це інтеграл від раціонального дробу, який має степінь чисельника яка дорівнює степені знаменника, тому необхідно виділити цілу частину шляхом доповнення чисельника до виду знаменника.

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1 + x^2}{1 + x^2} dx + \int \frac{dx}{1 + x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int dx + \int \frac{dx}{1 + x^2}\right) = \frac{1}{2}(x^2 \cdot acrtgx - x + arctgx) + C.$$

4.7 Інтегрування раціональних функцій

Нагадаємо, що раціональною функцією називається функція виду $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ $-$ алгербаїчні многочлени ступеня n та m з дійсними коефіцієнтами, які не мають спільних коренів, причому $Q_m(x) \neq 0$.

Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо степінь многочлена $P_n(x)$ менший, ніж степінь многочлена $Q_m(x)$, тобто якщо $n < m$ і неправильним раціональним дробом в протилежному випадку, тобто якщо $n \geq m$.

Неправильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n \geq m)$ можна завжди подати у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

де $T(x)$ – ціла раціональна функція (многочлен) і $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ $(k < m)$ $-$ правильний раціональний дріб.

Як інтегрується ціла раціональна функція відомо. Тепер розглянемо інтегрування правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n < m)$.

Правила інтегрування раціонального дробу

Покажемо, як інтегруються елементарні раціональні дроби (їх називають найпростішими) наступних трьох типів:

перший: $\frac{A}{x-a}$;

другий: $\frac{A}{(x-a)^k}$, де k – ціле число, $k > 1$;

третій: $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, де $b^2 - 4ac < 0$, тобто квадратний тричлен не має дійсних коренів.

У всіх трьох випадках вважаємо, що *A, B, a, b, c* – дійсні числа.

Інтеграли від перших двох найпростіших дробів обчислюємо безпосередньо:

$$\int \frac{A}{x-a}\, dx = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\, dx = A\,\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C, \text{ де } k \neq 1.$$

Інтеграл від елементарного дробу третього типу $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\, dx$ розглянемо далі на прикладах.

Приклад 15. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{4x^2+4x+10}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу III типу, де $A = 0$, $B = 1$, $b^2 - 4ac = -146 < 0$. Виділивши повний квадрат ($a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$) із квадратного тричлена $4x^2 + 4x + 10 =$

$$= \left| \begin{matrix} a^2 = 4x^2, a = 2x \\ 2ab = 4x, \;\; b = \dfrac{4x}{2a} = \dfrac{4x}{4x} = 1 \end{matrix} \right| =$$

$= 4x^2 + 4x + 1 - 1 + 10 = (2x+1)^2 + 9$, одержимо табличний інтеграл (9).

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+10} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+9} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{2x+1}{3} + C = \frac{1}{6}arctg\frac{2x+1}{3} + C.$$

Приклад 16. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{3x-4}{4x^2-3x+1} dx$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо також інтеграл від елементарного дробу третього типу, де $A = 3$, $B = -4$, $b^2 - 4ac = -7 < 0$. Так, як старший степінь чисельника на одиницю нижчий степеню знаменника, то за методом заміни змінної необхідно за нову змінну взяти весь знаменник $u = 4x^2 - 3x + 1$, знайти диференціал $du = (8x-3)dx$ і доповнити чисельник до вигляду отриманого du шляхом алгебраїчних перетворень:

$$3x-4=3\left(x-\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{8}\left(8x-3+3-\frac{32}{3}\right)=\frac{3}{8}(8x-3)-\frac{23}{24},\qquad \text{тоді}$$

$$\int\frac{3x-4}{4x^2-3x+1}dx=\int\frac{\frac{3}{8}(8x-3)-\frac{23}{24}}{4x^2-3x+1}dx=\frac{3}{8}\int\frac{8x-3}{4x^2-3x+1}dx-$$

$$-\frac{23}{24}\int\frac{dx}{4x^2-3x+1}=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-\frac{23}{96}\int\frac{dx}{x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-\frac{23}{96}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{9}{64}}=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-$$

$$-\frac{23}{96}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{7}{64}}=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-\frac{23}{96}\cdot\frac{1}{2\frac{\sqrt{7}}{8}}ln\left|\frac{x-\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{7}}{8}}{x-\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{7}}{8}}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1|-\frac{23}{24\sqrt{7}}ln\left|\frac{8x-3-\sqrt{7}}{8x-3+\sqrt{7}}\right|+C.$$

Приклад 17. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{x-1}{x^2+x-6}dx$.

Розв'язання. За схемою, розглянутою у попередньому прикладі маємо,

$$\int\frac{x-1}{x^2+x-6}dx=\left|\begin{matrix}u=x^2+x-6\\du=(2x+1)dx\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}}{x^2+x-6}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x-6}dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}ln|x^2+x-6|-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}\right|+C=\frac{1}{2}ln|x^2+x-6|-$$

$$-\frac{3}{10}ln\left|\frac{2x+1-5}{2x+1+5}\right|=\frac{1}{2}ln|x^2+x-6|-\frac{3}{10}ln\left|\frac{2x-4}{2x+6}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}ln|x^2+x-6|-\frac{3}{10}ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C=$$

$$= ln|x-2|\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\right)+ln|x+3|\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\right)+C =$$
$$=\frac{1}{5}ln|x-2|+\frac{4}{5}ln|x+3|+C.$$

Розглянемо метод інтегрування інших типів раціональних дробів, а саме *метод невідомих коефіцієнтів.* За допомогою цього метода навчимося інтегрувати раціональні дроби трьох типів (класифікація проводиться за коренями знаменника):

***I тип.* Корені знаменника дійсні і різні.**

Приклад 18. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

Розв'язання. Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більший, ніж степінь знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$\begin{array}{l|l} -\begin{array}{l} x^5+x^4-8 \\ \underline{x^5-4x^3} \end{array} & \begin{array}{l} x^3-4x \\ \hline x^2+x+4 \end{array} \text{ (ціла частина)} \\ \qquad -\begin{array}{l} x^4+4x^3-8 \\ \underline{4x^3-16x} \end{array} & \\ \qquad\qquad -\begin{array}{l} 4x^3-4x^2-8 \\ \underline{4x^3-16x} \end{array} & \\ \qquad\qquad\qquad 4x^2+16x-8 \text{ (залишок).} & \end{array}$$

Далі подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу, тобто

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}, \qquad \text{тоді}$$

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дробу

$x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$ має три прості корені: $x=0, x=2$ і $x=-2$, то його можна подати у вигляді суми трьох дробів першого типу, тобто

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Приведемо дроби до спільного знаменника, прирівнюємо чисельники:

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Коефіцієнти A, B і C знайдемо способом підстановки в тотожність частинних значень x, в якості яких доцільно взяти корені знаменника, тобто

$$\begin{array}{r|l} x=0 & -2=-4A, \\ x=2 & 10=8B, \\ x=-2 & -6=8C, \end{array}$$

звідки $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{5}{4}$, $C=-\frac{3}{4}$. Таким чином:

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}$$,а шуканий інтеграл

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2ln|x|+5ln|x-2|-3ln|x+2|+C.$$

***II тип.* Корені знаменника дійсні, але серед них є кратні.**

Приклад 19. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx$.

Розв'язання. Переконаємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що многочлен

$$(x-1)(x^3-4x^2+3x)=x(x-1)(x^2-4x+3)=$$

$$=x(x-1)(x-1)(x-3)=x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких два $x=0$ і $x=3$ є простими, а $x=1$ – двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D:

$$x^2-2x+3=A(x-3)(x-1)^2+Bx(x-1)^2+$$

$$+Cx(x-3)+Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом (підстановкою коренів знаменника в отриману тотожність та порівняння коефіцієнтів, які знаходяться біля однакового степеню змінної)

$$\begin{array}{r|l} x=0 & 3=-3A, \\ x=3 & 6=12B, \\ x=1 & 2=-2C, \\ x^3 & 0=A+B+D. \end{array}$$

Звідси: $A=-1, B=\frac{1}{2}, C=-1, D=\frac{1}{2}$, отже,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},$$

$$\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=ln|x|+\frac{1}{2}ln|x-3|+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}ln|x-1|+C\,.$$

Ш тип. **Серед коренів знаменника є комплексні.**

Приклад 20. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx.$

Розв'язання. Переконуємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що $x^2-2x+10=0$, $D=4-40=-36<0$, маємо

$$\frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+10}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C:

$$4x-10=A(x^2-2x+10)+(Bx+C)(x+2).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{c|c} x=-2 & -18=18A, \\ x^2 & 0=A+B, \\ x^0 & -10=10A+2C, \end{array}$$

звідки: $A=-1, B=1, C=0$, отже:

$$\frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} = -\frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2-2x+10}.$$

Маємо,

$$\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx = \int \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2-2x+10}\right)dx =$$

$$= -\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{x}{x^2-2x+10}dx = \begin{vmatrix} u = x^2-2x+10 \\ du = (2x-2)dx \end{vmatrix} =$$

$$= -ln|x+2| + \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{x^2-2x+10}dx =$$

$$= -ln|x+2| + \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}dx + \int \frac{dx}{x^2-2x+10} =$$

$$= -ln|x+2| + \frac{1}{2}ln|x^2-2x+10| + \int \frac{dx}{(x-1)^2+9} =$$

$$= -ln|x+2| + \frac{1}{2}ln|x^2-2x+10| + \frac{1}{3}arctg\frac{x-1}{3} + C.$$

4.8 Інтегрування ірраціональних функцій

1. **Інтеграли виду** $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_p}{n_p}}\right)dx$, де $R-$ раціональна функція, m_i і n_i- натуральні числа $(i=1,2,\dots,p)$. Даний інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $x=t^k$, де $k-$ найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i=1,2,\dots,p)$.

2. **Інтеграли виду** $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right]dx$, де $R-$раціональна функція, m_i і n_i- натуральні числа $(i=1,2,\dots,p)$ і визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

($a, b, c, d -$ сталі дійсні числа). Цей інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

де $k -$ найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$.

Приклад 21. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від дробових степенів x. Отже, маємо інтеграл першого виду від ірраціональної функції. Маємо $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 4$, тому $k = 12$ (найменше спільне кратне чисел 2, 3 і 4). Тобто

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^{12} \\ dx = 12 \cdot t^{11}dt \\ t = \sqrt[12]{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^6}{t^8 - t^3} 12 \cdot t^{11}dt = 12 \int \frac{t^{17}}{t^3(t^5-1)}dt =$$

$$12 \int \frac{t^{14}dt}{t^5 - 1} = I$$

Отримали інтеграл від неправильного раціонального дробу. Вилучаємо цілу частину і остачу діленням многочленів за допомогою кута:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} t^{14} \\ t^{14} - t^9 \end{array} & \underline{t^5 - 1} \\ \hline \quad -\begin{array}{l} t^9 \\ t^9 - t^4 \end{array} & t^9 + t^4 \\ \hline \quad t^4 & \end{array}$$

Отже, $$I = 12 \int \left(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5 - 1} \right) dt = 12 \left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5} \int \frac{5t^4dt}{t^5 - 1} \right) =$$

$$= \frac{6}{5}\left(t^{10} + 2t^5 + \frac{2}{5} ln|t^5 - 1| \right) + C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно будемо мати:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + \frac{2}{5} ln\left| \sqrt[12]{x^5} - 1 \right| \right) + C.$$

Приклад 22. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2} - \sqrt{5x+1}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл другого виду від ірраціональної функції. Маємо: $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, тому $k = 6$. Зробимо підстановку:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2} - \sqrt{5x+1}} = \left| \begin{array}{c} 5x+1 = t^6 \\ x = \frac{1}{5}(t^6 - 1) \\ dx = \frac{6}{5} t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{6}{5} t^5 dt}{t^4 - t^3} = \frac{6}{5} \int \frac{t^5 dt}{t^3(t-1)} = I$$

Скоротивши дріб і поділивши чисельник на знаменник, отримаємо:

$$I = \frac{6}{5} \int \frac{t^2 dt}{t-1} = \frac{6}{5} \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = \frac{6}{5}\left(\frac{t^2}{2} + t + ln|t-1|\right) + C.$$

Оскільки $t = \sqrt[6]{5x+1}$, то повертаючись до змінної x, будемо мати

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2} - \sqrt{5x+1}} = \frac{6}{5}\left(\frac{\sqrt[3]{5x+1}}{2} + \sqrt[6]{5x+1} + ln\left|\sqrt[6]{5x+1} - 1\right|\right) + C.$$

4.9 Тригонометричні підстановки

Інтеграли виду

$$\boldsymbol{\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx, \int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx, \ \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx}$$

зводяться до інтегралів від раціональної відносно $sinx$ і $cosx$ функції за допомогою відповідної тригонометричної підстановки:

1. Для знаходження інтеграла виду $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$, застосовують підстановку $x = a \cdot sint$ (або $x = a \cdot cost$).

2. Для знаходження інтеграла виду $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$, застосовують підстановку $x = a \cdot tgt$ (або $x = a \cdot ctgt$).

3. Для знаходження інтеграла виду $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$, застосовують підстановку $x = \frac{a}{cost}$ $\left(\text{або } x = \frac{a}{sint}\right)$.

Приклад 23. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл першого типу, тому:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}} = \left| \begin{matrix} x = 4sint \\ dx = 4costdt \\ t = acrsin\frac{x}{4} \end{matrix} \right| = \int \frac{16sin^2t \cdot 4costdt}{\sqrt{16-16sin^2t}} = \int \frac{64sin^2tcostdt}{4\sqrt{1-sin^2t}} =$$

$$= 16\int \frac{sin^2tcostdt}{\sqrt{cos^2x}} = 16\int \frac{sin^2tcostdt}{cost} =$$

$$= 16\int sin^2tdt = 8\int (1-cos2t)dt =$$

$$= 8t - 4sin2t + C.$$

Враховуючи, що

$$sin2t = 2sint \cdot cost = 2sint \cdot \sqrt{1-sin^2t} = 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot \sqrt{1-\frac{x^2}{16}} = \frac{x}{8}\sqrt{16-x^2}\,,$$

остаточно будемо мати

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}} = 8acrsin\frac{x}{4} - \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + C.$$

Приклад 24. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$.

Розв'язання. Даний інтеграл другого типу, тому:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \left| \begin{matrix} x = 3tgt \\ dx = \frac{3dt}{cos^2t} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{3dt}{cos^2t}}{\sqrt{(9+9tg^2t)^3}} = \int \frac{\frac{dt}{cos^2t}}{\sqrt{\left(1+\frac{sin^2t}{cos^2t}\right)^3}} =$$

$$= \int \frac{dt}{cos^2t\sqrt{\left(\frac{cos^2t+sin^2t}{cos^2t}\right)^3}} = \int \frac{cos^3tdt}{cos^2t} = \int costdt = sint + C.$$

Оскільки $sint = tgt \cdot cost = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}} = \frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$, то остаточно отримаємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + C.$$

4.10 Інтегрування тригонометричних функцій

І. Інтеграли виду $\int sin^m x \cdot cos^n x dx$.

1. Якщо m і $n -$ цілі числа і принаймні одне з цих чисел є непарним додатним числом, наприклад $m = 2k + 1$, то

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2k+1} x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2k} x \cdot sinx \cdot cos^n x dx =$$

$$= \int (sin^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinx dx = \int (1 - cos^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinxdx \end{matrix} \right| = -\int (1 - t^2)^k \cdot t^n \cdot dt.$$

Якщо ж непарним буде число $n = 2p + 1 > 0$, то необхідно застосувати підстановку $t = sinx$.

2. Якщо обидва показники m і $n -$ парні невід'ємні числа (зокрема один з них може бути рівним нулю), то доцільно застосувати формули зниження степеню:

$$sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x), \quad cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos2x).$$

3. Якщо обидва показники – парні, причому принаймні один із них від'ємний, то потрібно виконати заміну $tgx = t$ або $ctgx = t$. Тоді: $x = arctgt$ ($x = arcctgt$), $dx = \frac{dt}{t^2+1} \left(dx = -\frac{dt}{t^2+1} \right)$.

ІІ. Інтеграли виду $\int sinax \cdot cosbxdx$, $\int cosax \cdot cosbxdx$, $\int sinax \cdot sinbxdx$.

Щоб знайти ці інтеграли, необхідно перейти від добутку тригонометричних функцій до суми за відомими формулами:

$$sinax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)\,x + \sin(a-b)\,x),$$
$$cosax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)\,x + \cos(a-b)\,x),$$
$$sinax \cdot sinbx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)\,x - \cos(a+b)\,x).$$

ІІІ. Інтеграли виду $\int R(sinx, cosx)dx$, де $R -$ раціональна функція від $sinx$ і $cosx$. За допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки $tg\frac{x}{2} = t \ (-\pi < x < \pi)$ інтеграл зводиться до інтегралу від раціональної функції. При цьому

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Зауважимо, що іноді замість підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ зручніше зробити підстановку $ctg\frac{x}{2} = t$.

Варто також визначити, що в силу своєї універсальності підстановка $tg\frac{x}{2} = t$ часто приводить до занадто громіздких викладок, що ускладнює знаходження інтеграла. Тому в окремих випадках доцільно застосовувати інші підстановки, які також раціоналізують інтеграл. Наприклад:

1. Якщо виконується рівність

$$R(-sinx, cosx) \equiv -R(sinx, cosx),$$

то застосуємо підстановку $cosx = t$.

2. Якщо виконується рівність

$$R(sinx, -cosx) \equiv -R(sinx, cosx),$$

то застосуємо підстановку $sinx = t$.

3. Якщо виконується рівність

$$R(-sinx, -cosx) \equiv R(sinx, cosx),$$

то застосовуємо підстановку $tgx = t$, при цьому,

$$sinx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad x = arctgt, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Приклад 25. Знайти невизначений інтеграл $\int cos^4x \cdot sin^5xdx$.

Розв'язання. Маємо $m = 5, n = 4$. Враховуючи, що m непарне, виконаємо перетворення:

$$\int cos^4x \cdot sin^5xdx = \int cos^4x \cdot sin^4x \cdot sinxdx = \int cos^4x \cdot (sin^2x)^2 \cdot sinxdx =$$

$$= \int cos^4x \cdot (1 - cos^2x)^2 \cdot sinxdx = \begin{vmatrix} t = cosx \\ dt = -sinxdx \\ sinxdx = -dt \end{vmatrix} = -\int t^4(1 - t^2)^2\, dt =$$

$$= -\int t^4(1 - 2t^2 + t^4)dt = \int (2t^6 - t^4 - t^8)dt = \frac{2t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{2cos^7x}{7} - \frac{cos^5x}{5} - \frac{cos^9x}{9} + C.$$

Приклад 26. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx$.

Розв'язання. Маємо $m = 2, n = -4 < 0$ і парне, тому

$$\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx = \begin{vmatrix} t = tgx, x = arctgt, dx = \dfrac{dt}{1 + t^2} \\ sin^2x = \dfrac{t^2}{1 + t^2}, cos^2x = \dfrac{1}{1 + t^2} \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{t^2}{1 + t^2}}{\frac{1}{(1 + t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3x}{3} + C.$$

Приклад 27. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{cos^3x}{\sqrt[3]{sin^4x}}dx$.

Розв'язання. Маємо $m = -\frac{4}{3}, n = 3 > 0$ і непарне, тому

$$\int \frac{cos^3x}{\sqrt[3]{sin^4x}}dx = \int \frac{cos^2x}{\sqrt[3]{sin^4x}} \cdot cosxdx = \int \frac{1 - sin^2x}{\sqrt[3]{sin^2x}} \cdot cosxdx =$$

$$= \begin{vmatrix} sinx = t \\ cosxdx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{1 - t^2}{t^{2/3}} \cdot dt = \int t^{-2/3}\, dt - \int t^{4/3}\, dt = 3t^{1/3} - \frac{3t^{7/3}}{7} + C =$$

$$= 3t^{1/3}\left(1 - \frac{t^2}{7}\right) + C = 3sin^{1/3}x\left(1 - \frac{sin^2x}{7}\right) + C.$$

Приклад 28. Знайти невизначений інтеграл $\int sin^4x \cdot cos^2xdx$.

Розв'язання. В нашому прикладі $m = 4, n = 2$ обидва додатні і парні, тобто маємо

$$\int sin^4x \cdot cos^2xdx = \int sin^2x \cdot sin^2x \cdot cos^2xdx = \int sin^2x \cdot (sinx \cdot cosx)^2dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - cos2x) \cdot \frac{1}{4} sin^2 2xdx = \frac{1}{8}\int sin^2 2xdx - \frac{1}{8}\int cos2x \cdot sin^2 2xdx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1 - cos4x)\, dx - \frac{1}{16}\int sin^2 2x \cdot d(sin2x) =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{sin4x}{64} - \frac{1}{16}\cdot\frac{sin^3 2x}{3} + C = \frac{x}{16} - \frac{sin4x}{64} - \frac{sin^3 2x}{48} + C.$$

Приклад 29. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{sinxsin2x}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{sinx \cdot sin2x} = \int \frac{dx}{2sin^2 x \cdot cosx}$.

Якщо в виразі $\frac{1}{2sin^2 x \cdot cosx}$ замінити $cosx$ на $-cosx$, то дріб змінить знак на протилежний, тому маємо застосувати підстановку $sinx = t$.

$$\int \frac{dx}{sinx \cdot sin2x} = \int \frac{dx}{2sin^2 x \cdot cosx} = \left| \begin{matrix} t = sinx, & x = arcsint \\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, & cosx = \sqrt{1-t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{1 - t^2 + t^2}{t^2(1-t^2)} dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= -\frac{1}{2t} - \frac{1}{4} ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -\frac{1}{2sinx} - \frac{1}{4} ln\left|\frac{sinx - 1}{sinx + 1}\right| + C.$$

Приклад 30. Знайти невизначений інтеграл $\int sin4x \cdot cos3xdx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу

$sinax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)\, x + \sin(a-b)\, x)$, одержимо

$$\int sin4x \cdot cos3xdx = \frac{1}{2}\int (sin7x + sinx)\, dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{cos7x}{7} - \frac{1}{2}\cdot cosx + C =$$

$$= -\frac{cos7x}{14} - \frac{cosx}{2} + C.$$

5 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

5.1 Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $F(x)$ $-$ будь-яка первісна для $f(x)$ на цьому відрізку, то має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Формула має назву формули Ньютона-Лейбніца. Вона є основною формулою інтегрального числення. Для зручності її записують у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

5.2 Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

4. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)\,)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.

5. Якщо $f(x) -$ інтегровна функція на відрізку $[a,b]$ і $f(x) \geq 0$ для $x \epsilon [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ − інтегровні функції на відрізку $[a,b]$ і $f(x) \le \varphi(x)$ для $x \epsilon [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx.$$

7. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$ і $a < c < b$, то ця функція інтегровна і на відрізках $[a,c]$ і $[\mathrm{c},b]$, причому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Приклад 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(10+2x)^4}$.

Розв'язання. Скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца, одержимо:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(10+2x)^4} = \int_{-1}^{1} (10+2x)^{-4}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(10+2x)^{-3}}{-3}\bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(10+2x)^3}\bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{(10+2)^3} - \frac{1}{(10-2)^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\frac{8-27}{13824} = \frac{19}{82944}.$$

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$.

Розв'язання. Виконаємо алгебраїчні перетворення у підінтегральній функції:

$$\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy = \int_4^9 \frac{(\sqrt{y}+1)(\sqrt{y}-1)}{\sqrt{y}+1}dy = \int_4^9 (\sqrt{y}-1)dy =$$

$$= \left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - y\right)\Bigg|_4^9 = \frac{2\cdot 9^{\frac{3}{2}}}{3} - 9 - \frac{2\cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} + 4 = 18 - 9 - \frac{16}{3} + 4 = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}.$$

Приклад 3. Обчислити визначений інтеграл $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

Розв'язання. Доповнимо підкореневий вираз до повного квадрату:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = arcsin\frac{x-2}{3}\Big|_2^5 =$$

$$= arcsin\frac{5-3}{3} - arcsin\frac{2-2}{3} = arcsin1 - arcsin0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

5.3 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $x = \varphi(t) -$ функція неперервна зі своєю похідною першого порядку на відрізку $[\alpha,\beta]$, причому $a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) \leq \varphi(\beta) = b$ для $\alpha \leq t \leq \beta$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Цю формулу називають формулою заміни змінної для визначеного інтеграла.

Із поданого випливає, що функція $x = \varphi(t)$ на відрізку $[a,b]$ повинна бути монотонною або іншими словами всі значення функції $\varphi(t)$ повинні знаходитися на відрізку $[a,b]$.

Зауважимо, що заміна змінної у визначеному інтегралі вимагає обережності і обов'язкового виконання усіх перерахованих умов, накладених на функцію $x = \varphi(t)$.

Зазначимо також, що виконавши заміну змінної у визначеному інтегралі для його обчислення, немає необхідності повертатися до початкової змінної, досить лише знайти межі інтегрування для нової змінної. Для цього до рівності $x = \varphi(t)$ замість x підставляємо по черзі нижню межу a і верхню межу b інтегрування і розв'язуємо рівняння $a = \varphi(t)$ і $b = \varphi(t)$. Знайдені значення t і будуть відповідно нижньою α і верхньою β межами для нової змінної інтегрування. Якщо кожне з рівнянь $a = \varphi(t)$ і $b = \varphi(t)$ задовольняє не одно, а декілька значень t, то за α і β можна прийняти будь-яке з них. Однак вільність вибору обмежується вимогою, щоб значення функції $\varphi(t)$ не виходили із відрізка $[a,b]$, на якому визначена и неперервна підінтегральна функція $f(x)$.

Приклад 4. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}}$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінної:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}} = \left| \begin{array}{c} t = 1 + lnx, dt = \dfrac{dx}{x} \\ t_в = 1 + lne^3 = 1 + 3 = 4 \\ t_н = 1 + ln1 = 1 + 0 = 1 \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 =$$

$$= 2\left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = 2(2 - 1) = 2.$$

Приклад 5. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінної:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \left| \begin{array}{c} x^2 - 1 = t^2 \\ 2xdx = 2tdt \\ xdx = tdt \\ 1 - 1 = t^2, t_н = 0 \\ 4 - 1 = t^2, t_в = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} \cdot xdx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{t^2+1} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = (t - arctgt)\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{3} - arctg\sqrt{3} + arctg0 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Приклад 6. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx}$.

Розв'язання. Скористаємося універсальною тригонометричною підстановкою:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx} = \left| \begin{array}{ll} t = tg\dfrac{x}{2}, & x = 2arctgt \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, & cosx = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ t_н = tg0 = 0, & t_в = tg\dfrac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{2 + 2t^2 + 1 - t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg0\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5.4 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[a, b]$, то

$$\int_a^b u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot du$$

Цю формулу називають формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Застосування цієї формули мало чим відрізняється від застосування відповідної формули для невизначеного інтеграла. Тому обмежимося розв'язанням кількох прикладів.

Приклад 7. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, cosxdx$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, cosxdx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = cosxdx, & v = sinx \end{vmatrix} = (x\, sinx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot sin\frac{\pi}{2} - 0 + cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + cos\frac{\pi}{2} - cos0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Приклад 8. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 \frac{lnx\, dx}{x^5}$.

Розв'язання.

$$\int_1^2 \frac{lnx\, dx}{x^5} = \begin{vmatrix} u = lnx, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^5}, & v = -\dfrac{1}{4x^4} \end{vmatrix} = \left(-\frac{lnx}{4x^4}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{4x^4}\right)\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{ln2}{64} + \frac{1}{4}\cdot\int_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{ln2}{64} - \frac{1}{16x^4}\Big|_1^2 = -\frac{ln2}{64} - \frac{1}{256} + \frac{1}{16} = \frac{15 - 2ln2}{256}.$$

5.5 Обчислення площі плоскої фігури

1. Випадок прямокутних координат.

Нагадаємо, що плоска фігура, обмежена прямими $y=0, x=a, x=b$ і графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a,b]$ функції $y=f(x)$ (рис. 1), називається криволінійною трапецією.

Площа криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $y=f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$ і відрізком осі *Ox*, обчислюється за формулою

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Якщо плоска фігура обмежена кривими $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, причому на відрізку $[a;b]$ $f_1(x)\le f_2(x)$ (рис.7), то її площу визначають за формулою

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx.$$

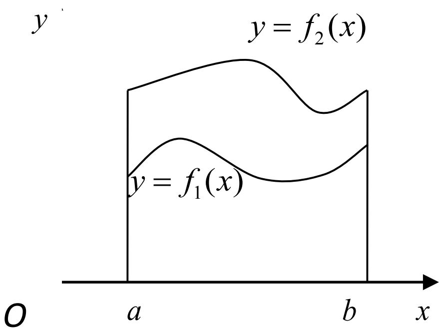

Рисунок 7

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмежену лініями

$$y=x^2 \text{ і } y=4.$$

Розв'язання. Фігура має вигляд , зображений на рисунку 8, де $y=x^2$ – парабола, а $y=4$ – пряма лінія:

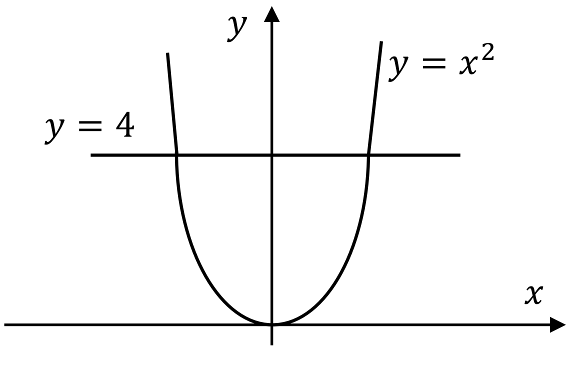

Рисунок 8

$$S=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}=$$

$$8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}=16-\frac{16}{3}=\frac{32}{3}\ \ (\text{од}^2)$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x + 1$ і $x - y - 1 = 0$.

Розв'язання. Рівняння $y^2 = 2x + 1$ визначає параболу, а рівняння $x - y - 1 = 0$ − пряму лінію (рис. 9).

Розв’язуючи систему рівнянь

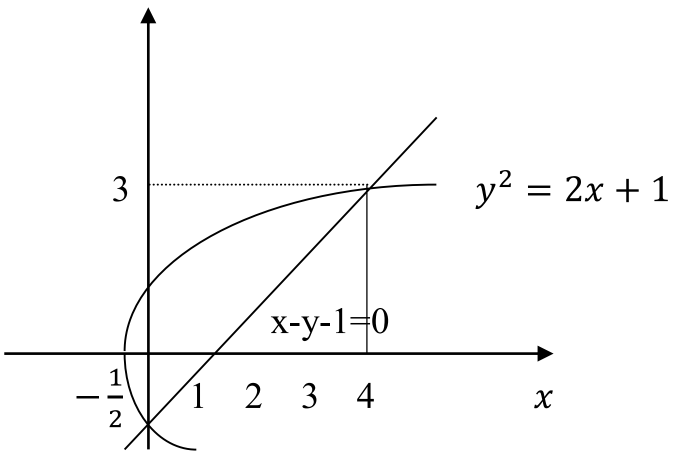

Рисунок 9

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 1, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$$

Знайдемо точки перетину прямої і параболи: $A(0; -1)$ $B(4; 3)$.

Обчислимо площу фігури, скориставшись формулою:

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\, dy$$

де $x_2 = y + 1$ − лінія, що обмежує фігуру справа, $x_1 = \frac{y^2-1}{2}$ − лінія, що обмежує фігуру зліва і $-1 \le y \le 3$, одержимо:

$$S = \int_{-1}^{3} \left(y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2} \right) dx = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{3y}{2} \right) \Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{16}{3} \text{ (од}^2\text{)}.$$

2. Випадок параметричного задання функції.

Нехай криволінійна трапеція обмежена кривою, яка задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t\epsilon[\alpha; \beta]$$

(де $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$) і ці параметричні рівняння визначають деяку функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Отже:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Приклад 3. Обчислити площу першої арки циклоїди:

$$\begin{cases} x = 3(t - sint), \\ y = 3(1 - cost). \end{cases}$$

Розв'язання. При $t\epsilon[0; 2\pi]$ визначається траєкторія руху точки першої арки циклоїди, отже:

$$S = \int_{0}^{2\pi} 9\,(1 - cost)(1 - cost)dt = 9\int_{0}^{2\pi} (1 - 2cost + cos^2 t)\,dt =$$

$$= 9\left(\frac{3}{2}t - 2sint + \frac{1}{4}sin2t\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = 27\pi \ \ (\text{од}^2).$$

3. Випадок полярної системи координат.

Визначимо площу криволінійного сектора, тобто плоскої фігури, яка обмежена неперервною лінією $r = r(\varphi)$ і двома радіус – векторами $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ (рис.10).

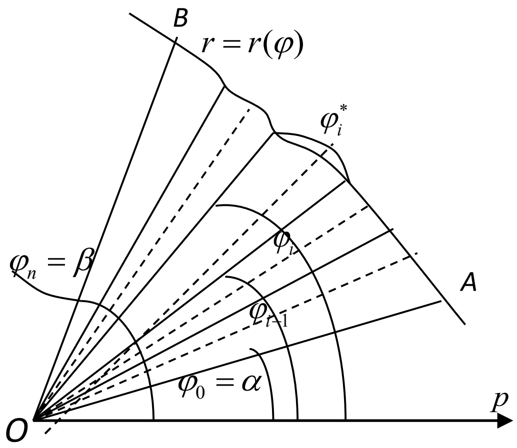

Рисунок 10

Розіб'ємо криволінійний сектор *OAB* радіус – векторами $\varphi = \alpha = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi = \varphi_n$ на n частин довільним чином. Площу сектора ΔS_i ($i = 1,2, \ldots, n$), що відповідає проміжку кутів $[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$, визначимо як площу сектора круга з радіусом $r(\varphi^*)$, де $\varphi^*\epsilon[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$, тобто

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}r^2(\varphi^*)\Delta\varphi_i$$

$$(\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1})$$

Отже, формула площі криволінійного сектора має такий вигляд:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, яка обмежена лемніскатою Бернуллі $r = 2\sqrt{2cos2\varphi}$ (рис. 11).

Розв'язання. Якщо полярний кут змінюється від 0 до $\pi/4$, то радіус – вектор описує область, площа якої дорівнює чверті шуканої площі. Отже,

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 8\cos 2\varphi \, d\varphi = 16 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 8 \text{ (од}^2\text{)}.$$

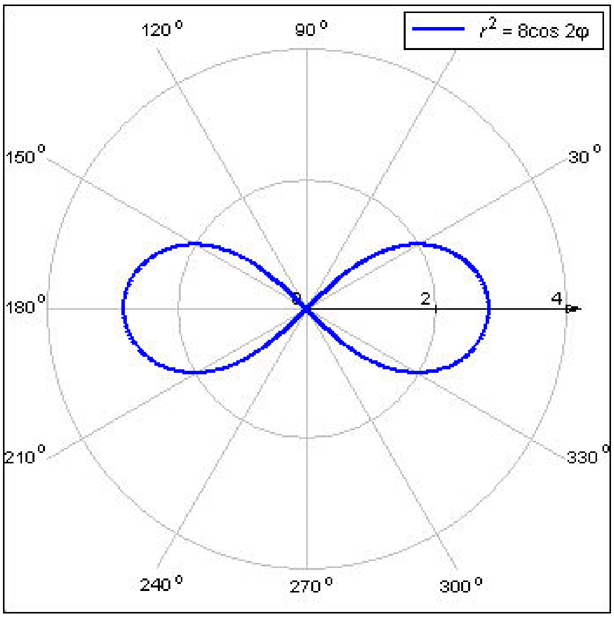

Рисунок 11

5.6 Обчислення довжини дуги плоскої кривої

1. Випадок прямокутних координат. Нехай в прямокутних координатах дана плоска крива *AB*, рівняння якої $y = f(x)$, де $a \le x \le b$ (рис. 12).

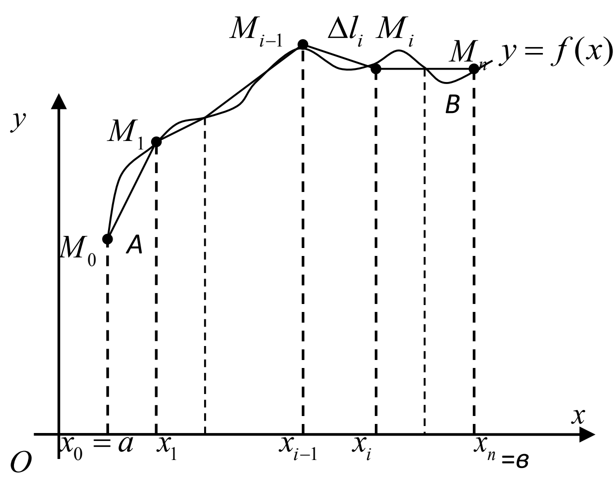

Рисунок 12

Під довжиною дуги кривої AB розуміють границю, до якої прямує довжина ламаної, що вписана в цю дугу, коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля.

Нехай функція $y = f(x)$ та її похідна неперервні на відрізку $[a, b]$. Тоді довжина дуги кривої $y = f(x)$ дорівнює:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Приклад 5. Обчислити довжину дуги кривої $y = ln\left(\frac{5x}{2}\right)$, якщо $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

Розв'язання. Довжина дуги:

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{5x} \cdot \frac{5}{2}\right)^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \left| \begin{matrix} x = tgt \\ dx = \dfrac{dt}{cos^2 t} \\ t_{\text{в}} = arctg\sqrt{8} \\ t_{\text{н}} = \dfrac{\pi}{3} \end{matrix} \right| = \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \frac{cost}{cost \cdot sint} \cdot \frac{dt}{cos^2 t} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \frac{sintdt}{sin^2 t cos^2 t} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \frac{d(cost)dt}{(cos^2 t - 1)cos^2 t} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \left(\frac{1}{cos^2 t - 1} - \frac{1}{cos^2 t}\right) d(cost)dt = \left(\frac{1}{2} ln\left|\frac{cost - 1}{cost + 1}\right| + \frac{1}{cost}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}}$$

Звернемо увагу на те, що $cost = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 t}}$, тобто $\cos\left(arctg\sqrt{8}\right) = = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(arctg\sqrt{8})}} = \frac{1}{3}$, отримаємо:

$$l = \frac{1}{2} ln\left|\frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1}\right| + 3 - \frac{1}{2} ln\left|\frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1}\right| - 2 = \frac{1}{2} ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} ln\frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{2} ln\frac{3}{2} + 1 \text{ (од.)}.$$

2. Випадок параметричного задання кривої.

Якщо крива задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t\epsilon[\alpha; \beta],$$

де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервні функції з неперервними похідними і $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тоді довжина l кривої *AB* визначається за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Приклад 6. Обчислити довжину дуги лінії $x = 3cost,\ y = 3sint,$ $t\epsilon[0; 2\pi]$.

Розв'язання. $x' = -3sint, y' = 3cost$, отже:

$$l = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{9sin^2t + 9cos^2t}\, dt = 3\int_{0}^{2\pi} dt = 3t|_0^{2\pi} = 6\pi.$$

3. Випадок полярної системи координат.

Нехай крива *AB* задана рівнянням $r = r(\varphi)$ у полярних координатах, де функції $r(\varphi)$ і $r'(\varphi)$ неперервні при $\alpha \le \varphi \le \beta$. Отже, формула довжини дуги кривої має вигляд:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

Приклад 7. Знайти довжину дуги кардіоїди$r = a(cos\varphi + 1),\ \varphi\epsilon[0, 2\pi]$.

Розв'язання. За формулою довжини дуги кривої у полярній системі координат маємо:

$$l = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\ d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\left(a(cos\varphi + 1)\right)^2 + (a(-sin\varphi))^2}\, d\varphi =$$

$$= a\int_{0}^{2\pi} \sqrt{2 + 2cos\varphi}\, d\varphi = a\int_{0}^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2cos^2\frac{\varphi}{2}}\ d\varphi = 2a\int_{0}^{2\pi} cos\frac{\varphi}{2}\ d\varphi =$$

$$= 4a\ sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{0}^{2\pi} = 8a.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вороновська Л. П. Вища математика. Модуль 1 : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 263 – Цивільна безпека [Електрон. ресурс] / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2023. – 114 с. – Електрон. текст. дані. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/63201/, вільний (дата звернення: 28.10.2024). – Назва з екрана.

2. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНУМГ, 2015. – 255 с.

3. Зайцев Є. П. Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Є. П. Зайцев. – Київ : Алерта, 2017. – 574 с.

4. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.

5. Лозовий Б. Л. Практикум з вищої математики. : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Лозовий Б. Л., Пушак Я. С., Шабат О. Є. – 3-тє вид. – Київ : Магнолія, 2021. – 285 с.

Електронне навчальне видання

ВОРОНОВСЬКА Лариса Петрівна

Методичні рекомендації
до організації самостійної роботи
і проведення практичних занять
із навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Модуль 1

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 263 – Цивільна безпека)

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп’ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2024, поз. 101М

Підп. до друку 28.10.2024. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 4,5.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська (Маршала Бажанова), 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.