

Міністерство освіти і науки України  
Департамент науки і освіти Харківської обласної державної адміністрації  
Комунальний заклад «Харківська обласна Мала академія наук  
Харківської обласної ради»

Відділення фізики і астрономії  
Секція: теоретична фізика

ФУНКЦІЯ ЛАГРАНЖА ЗРАЗКІВ ШАРУВАТОГО НАДПРОВІДНИКА  
СКІНЧЕННИХ РОЗМІРІВ

Роботу виконав:

Бухтатий Антон Євгенійович, учень 11 класу  
Комунального закладу «Харківський ліцей  
№ 161 «Імпульс» Харківської міської ради»

Науковий керівник:

Майзеліс Захар Олександрович, професор  
кафедри теоретичної фізики імені академіка  
І.М. Ліфшиця Харківського національного  
університету імені В.Н. Каразіна, доктор  
фізико-математичних наук, доцент

## ФУНКЦІЯ ЛАГРАНЖА ЗРАЗКІВ ШАРУВАТОГО НАДПРОВІДНИКА СКІНЧЕННИХ РОЗМІРІВ

Бухтатий Антон Євгенійович; Харківське територіальне відділення МАН України, Комунальний заклад «Харківська обласна Мала академія наук Харківської обласної ради», Комунальний заклад «Харківський ліцей № 161 «Імпульс» Харківської міської ради», 11 клас, м. Харків;

Майзеліс Захар Олександрович, професор кафедри теоретичної фізики імені академіка І.М. Ліфшиця Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, доктор фізико-математичних наук, доцент.

Мета роботи полягає у побудові функції Лагранжа для опису сукупної динаміки густини зарядів і електромагнітного поля у зразках шаруватого надпровідника скінченних розмірів.

Отримані результати дозволяють застосовувати підхід Лагранжа для вивчення джозефсон-плазмових хвиль у шаруватому надпровіднику та можуть бути застосовані для побудови електронних пристроїв терагерцевого діапазону.

Завданнями роботи було сконструювати доданки функції Лагранжа системи з урахуванням енергії зарядів у надпровідних шарах зразка та отримати закони дисперсії звичайних та надзвичайних мод у зразку скінченних розмірів.

Теоретично досліджено поширення джозефсонівських плазмових хвиль в обмежених зразках шаруватого надпровідника за допомогою підходу Лагранжа. З базових експериментальних результатів отримано вираз для функції Лагранжа зв'язаної системи надпровідних шарів і електромагнітного поля. Представлено функцію Лагранжа у вигляді суми незалежних внесків, які відповідають звичайним та надзвичайним хвилеводним модам у зразку. Отримано і проаналізовано дисперсійні залежності мод і постійні поширення для хвилеводних мод.

**Ключові слова:** функція Лагранжа, шаруватий надпровідник, нелінійні рівняння, граничні умови, хвилевод, звичайні і надзвичайні моди, дисперсійна залежність.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
<b>РОЗДІЛ 1. ДЖОЗЕФСОН-ПЛАЗМОВІ ХВИЛІ У ШАРУВАТИХ</b>	
<b>НАДПРОВІДНИКАХ .....</b>	<b>6</b>
1.1. Плазмон-поляритони у металах та збудження у надпровідниках .....	6
1.2. Шаруваті надпровідники .....	6
Висновки до розділу 1 .....	8
<b>РОЗДІЛ 2. ФУНКЦІЯ ЛАГРАНЖА ШАРУВАТОГО НАДПРОВІДНИКА</b>	
<b>СКІНЧЕННИХ РОЗМІРІВ .....</b>	<b>9</b>
2.1. Енергія зарядів суцільного надпровідника .....	9
2.2. Градієнтна інваріантність .....	10
2.3. Функція Лагранжа шаруватого надпровідника .....	12
2.4. Функція Лагранжа зразка скінченних розмірів .....	17
Висновки до розділу 2 .....	20
ВИСНОВКИ .....	21
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	22
ДОДАТКИ .....	24
Додаток А .....	24
Додаток Б .....	25
Додаток В .....	26
Додаток Г .....	27

## ВСТУП

*Актуальність роботи.* Шаруватий надпровідник представляє собою анізотропне нелінійне середовище, у якому можуть розповсюджуватися важливі з практичної точки зору електромагнітні збудження, джозефсон-плазмові хвилі. Їх характерні частоти належать до терагерцевого діапазону, характерного для багатьох біологічних систем. З фундаментальної ж точки зору, такі системи представляють інтерес завдяки особливій анізотропії струму у них: у напрямку вздовж надпровідних шарів він описується стандартними рівняннями для суцільних надпровідників, а струм поперек шарів визначається тунелюванням куперівських пар, що призводить до внутрішнього ефекту Джозефсона.

Підхід Лагранжа є одним із базових підходів теоретичної фізики і дозволяє не тільки знаходити власні розв'язки для різних систем, але і досліджувати вимушені збудження, або проводити далі квантування збуджень. Для шаруватих надпровідників широко розповсюджено метод розв'язання електродинамічних рівнянь (рівнянь Максвела і рівнянь для надпровідних шарів), але метод Лагранжа був застосований для аналізу лише нескінченних зразків. У той же час, в експериментальних реалізаціях розміри зразків зазвичай є порівняними з довжиною хвилі збуджень.

Ця робота присвячена побудові і аналізу функції Лагранжа зразка шаруватого надпровідника скінченних розмірів і аналізу мод збуджень за допомогою отримання рівнянь Ейлера-Лагранжа (див. геометрію задачі у додатку А).

*Мета роботи* – побудувати функцію Лагранжа і функцію Гамільтона шаруватого надпровідника скінченних розмірів, отримати дисперсійні співвідношення для мод у таких зразках.

Для досягнення зазначеної мети поставлені наступні *завдання*:

– отримати внесок у функцію Лагранжа, обумовлений енергією зарядів у надпровідних шарах;

- скориставшись умовою градієнтної інваріантності, отримати вирази для енергії взаємодії зарядів з електромагнітним полем;
- врахувати власну енергію електромагнітного поля у зразку і отримати відповідні доданки у функції Лагранжа системи;
- отримати і проаналізувати вираз для функції Лагранжа системи обмеженого розміру;
- розділити можливі збудження у шаруватому надпровіднику на звичайні та надзвичайні моди, які відрізняються своєю поляризацією;
- проаналізувати хвилеводні моди у випадку зразка, обмеженого у двох напрямках, отримати відповідні дисперсійні рівняння.

*Об'єкт досліджень* – зразок шаруватого надпровідника скінченних розмірів.

*Предмет досліджень* – функція Лагранжа збуджень густини заряду і електромагнітного поля у шаруватому надпровіднику скінченних розмірів.

Дослідження використовує класичний *метод* теоретичної фізики, підхід Лагранжа, а також метод використання градієнтної інваріантності системи. Робота представляє собою теоретичне дослідження.

Автором особисто проведені розрахунки функції Лагранжа системи, отримані вирази у граничних випадках, отримані дисперсійні співвідношення, пророблено аналіз отриманих результатів. У роботі вперше отримано функцію Лагранжа зразка скінченних розмірів. Отримані результати можуть бути застосовані для аналізу збуджень у експериментально досліджуваних зразках шаруватого надпровідника.

За результатами роботи подана стаття у журнал «Доповіді НАН України». Автором роботи отримані основні аналітичні результати цієї статті для функції Лагранжа, рівнянь Ейлера-Лагранжа, проаналізовано отримані дисперсійні співвідношення.

## РОЗДІЛ 1

### ДЖОЗЕФСОН-ПЛАЗМОВІ ХВИЛІ У ШАРУВАТИХ НАДПРОВІДНИКАХ

#### 1.1. Плазмон-поляритони у металах та збудження у надпровідниках

Збуреннями густини зарядів у електронній плазмі у провідних матеріалах є плазмони, які є результатом наявності як інерційних, так і пружних властивостей плазми. Дисперсійну залежність для плазмонів можна отримати з загальних принципів, розглядаючи функцію Лагранжа, або функцію Гамільтона системи, при цьому в якості ступенів вільності вибирається густина зарядів. Ці флуктуації матеріальних ступенів вільності у деякому діапазоні частот зв'язані з модами електромагнітного поля, в результаті чого утворюються плазмон-поляритони. У підході Лагранжа спектр таких збуджень може бути отриманий шляхом діагоналізації квадратичної форми, що відповідає повному набору ступенів вільності, як густини зарядів, так і електромагнітного поля [1].

У надпровідниках при розгляді флуктуацій матеріальних ступенів вільності переходять до спряженої до густини координати – фази комплексного параметра порядку надпровідника при температурі, нижчій за критичну температуру  $T_c$ . Такий перехід дозволяє записати відповідну функцію Лагранжу системи і таким чином отримати спектр збуджень [2].

#### 1.2. Шаруваті надпровідники

Останнім часом особливий інтерес представляють шаруваті надпровідники – періодичні структури, які складаються з надпровідних шарів, що чергуються з шарами діелектрика. Найпоширенішими представниками таких високотемпературних надпровідників є природні кристали  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ , в яких товщина надпровідних шарів є  $\sim 0,2$  нм, а товщина діелектричних шарів становить  $\sim 1,5$  нм [3 – 5]. Шаруваті

надпровідники також отримують штучно, наприклад структури  $\text{Nb}/\text{Al}-\text{AlO}_x/\text{Nb}$ , в яких, навпаки, типові товщини надпровідних шарів перевищують товщини шарів діелектрика. Контролюючи ці товщини, можна змінювати характерні частоти структури. Численні експерименти показали, що якщо провідність у площині шарів у шаруватих надпровідниках може бути описана стандартними моделями для суцільних надпровідників, зокрема теорією Лондонів, то у напрямку перпендикулярному до шарів відбувається тунелювання куперівських пар крізь шари діелектрика, завдяки чому струм у цьому напрямку визначається ефектом Джозефсона (див. огляд [5] і посилання в ньому). Анізотропія властивостей шаруватих надпровідників призводить до того, що збудження у таких системах, джозефсонівські плазмові хвилі (ДПХ), мають суттєво різні властивості при поширенні у різних напрямках. Спектр ДПХ обмежений знизу джозефсонівською плазмовою частотою  $\omega_J$ . До таких систем також можна застосувати підхід Лагранжа, використовуючи в якості ступенів вільності фазу параметра порядку у надпровідних шарах і компоненти 4-вектора потенціалу електромагнітного поля. У результаті можна отримати замість одного розв'язку дисперсійного рівняння два.

З експериментальної точки зору ДПХ цікаві тим, що вони відповідають терагерцевому діапазону частот, який є дуже важливим з точки зору можливих застосувань у медицині, біофізиці, тощо, але є складнодосяжним для сучасних електронних та оптичних пристроїв. Особливий для шаруватих надпровідників нелінійний зв'язок між струмом поперек шарів структури і фазою параметра порядку призводить до ряду цікавих ефектів, які можна застосовувати у електронних пристроях терагерцевого діапазону, зокрема зупинка світла, індукована прозорість зразків шаруватого надпровідника [5]. При розгляді обмежених у перерізі хвиль, пучків терагерцевого лазерного випромінювання, виявлена можливість їх самофокусування за рахунок цієї нелінійності [6]. Цікавою можливістю контролювати проходження електромагнітних хвиль крізь зразки шаруватого надпровідника є застосування постійного магнітного поля. Проникаючи частково у зразок, воно змінює фазу параметра порядку і таким чином може впливати за рахунок нелінійності на поширення ДПХ [7].

Вздовж поверхні зразка шаруватого надпровідника можуть поширюватися поверхневі ДПХ, які також набувають особливих рис завдяки нелінійності електродинамічних рівнянь у шаруватих надпровідниках. Такі хвилі можна збудити, наприклад, призмовим методом, і тоді нелінійність проявляється у залежності коефіцієнта відбиття хвилі, що падає крізь призму на поверхню зразка, від амплітуди хвилі [8]. Незважаючи на те, що властивості ДПХ у різних конфігураціях вивчаються інтенсивно протягом останнього десятиріччя, більшість робіт присвячена нескінченним зразкам. Водночас з практичної точки зору дуже важливим є аналіз саме зразків скінченних розмірів, оскільки в реальних експериментах розміри зразків є порядку міліметрів і тому порівняні з довжинами хвиль збуджень. У даній роботі вперше застосовано підхід Лагранжа для отримання дисперсійних залежностей мод у хвилеводі з ідеально провідними стінками із заповненням з шаруватого надпровідника, отримано вирази для функцій Лагранжа та Гамільтона обмежених зразків шаруватого надпровідника.

## Висновки до розділу 1

Таким чином, підхід Лагранжа є дійсно дієвим інструментом для аналізу спектральних властивостей суцільних середовищ. Шаруваті надпровідники представляють собою сучасні анізотропні середовища, цікаві з фундаментальної точки зору своєю нелінійністю і анізотропією, і з практичної точки зору тим, що допускають збудження у терагерцевому діапазоні частот, важливому для біологічних застосувань. Функція Лагранжа зразків скінченних розмірів не була отримана у літературі і її дослідження дозволить вивчати джозефсон-плазмові хвилі у зразках шаруватих надпровідників у реальних експериментах.



## РОЗДІЛ 2

### ФУНКЦІЯ ЛАГРАНЖА ШАРУВАТОГО НАДПРОВІДНИКА СКІНЧЕННИХ РОЗМІРІВ

#### 2.1. Енергія зарядів суцільного надпровідника

Почнемо з аналізу доданків у функції Лагранжа, які відповідають матеріальним ступеням вільності у випадку ізотропного суцільного надпровідника. Згідно з класичною теорією Гінзбурга-Ландау, енергетичні затрати на формування поля параметра порядку  $\theta$  визначаються його градієнтом [2], тобто густина потенціальної енергії визначається співвідношенням

$$w_{ps} = \frac{D_s}{8} (\nabla \theta)^2, \quad (2.1)$$

де  $D_s$  – ефективна пружність джозефсонівської плазми, яка визначається відношенням концентрації куперівських пар і маси електрона. Тут і далі постійна Планка у формулах опускається. Звичайно, для того, щоб описувати динаміку моди, необхідно також врахувати інерційні доданки у функції Лагранжа. Для цього існує метод, у якому виходячи з мікроскопічних міркувань, переходять від ферміонних ступенів вільності до колективних бозонних, і в результаті отримують «кінетичну» енергію, пропорційну до похідної від фази параметра порядку за часом [1]. У результаті можна записати функцію Лагранжа у такому вигляді:

$$L_s = \frac{1}{8} \int_V \left( \kappa \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - D_s (\nabla \theta)^2 \right) dV, \quad (2.2)$$

де інтегрування виконується за скінченим об'ємом зразка, а  $\kappa$  – стисливість зарядів у надпровіднику. В загальному випадку у  $k$ -просторі  $\kappa$  є функцією хвильового вектора.

Якщо ми знехтуємо цією залежністю для невеликих значень  $k$ , тобто вважатимемо параметр  $\kappa = \kappa_0$  константою, то отримаємо з (2.2) лінійний, «звуковий», закон дисперсії  $\omega = v_s k$ , де швидкість поширення збурень  $v_s = \sqrt{D_s / \kappa_0}$ . Однак, якщо ми врахуємо далеку кулонівську взаємодію між електронами, то функція  $\kappa(k)$ , як показано, наприклад, у [9], може бути представлена у такому вигляді:  $\kappa(k) = \kappa_0 / (1 + V(k)\kappa_0)$ , де  $V(k)$  – кулонівський потенціал. У такому разі закон дисперсії набуває постійного доданка, який відповідає плазмовому порогу,  $\omega^2 = \omega_p^2 + v_s^2 k^2$ , де  $\omega_p^2 = 4\pi e^2 D_s$  – плазмова частота у суцільному надпровіднику.

## 2.2. Градієнтна інваріантність

Функція Лагранжа (2.2) враховує лише матеріальні ступені вільності. У той же час, як зазначалося вище, флуктуації густини зарядів пов'язуються з флуктуаціями електромагнітного поля. Щоб врахувати цей зв'язок необхідно перейти від змінної  $\theta$  до градієнтно-інваріантних ступенів вільності  $\psi_i$ , які визначаються наступним чином:

$$\psi_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{2e}{c} A_0, \quad \psi_{1,2,3} = (\nabla \theta)_{x,y,z} - \frac{2e}{c} A_{x,y,z}, \quad (2.3)$$

де  $A_0$  і  $A_{x,y,z}$  – скалярний і векторний потенціали електромагнітного поля. Змінні  $\psi_i$  відповідають фізично вимірюваним величинам, на відміну від самої фази  $\theta$ , і вони не змінюються при одночасному перенормуванні як потенціалів електромагнітного поля,

$$A_0 \rightarrow A_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t}, \quad A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x_i} \quad (2.4)$$

з довільною функцією координат і часу  $f(x, y, z, t)$ , так і фази  $\theta$ :

$$\theta \rightarrow \theta + \frac{2e}{c} f(x, y, z, t). \quad (2.5)$$

Саме тому вибір змінних  $\psi_i$  в якості ступенів вільності не тільки є більш фізичним, але і призводить до математично простіших виразів.

Отже, замінюючи у функції Лагранжа похідні від фази параметра порядку  $\theta$  на градієнтно-інваріантні змінні  $\psi_i$ , ми отримуємо зв'язок між матеріальними і електромагнітними ступенями вільності. Це означає, наприклад, що закони дисперсії, отримані вище для ізотропного випадку, можуть бути розглянуті з точки зору пов'язаних коливань як густини зарядів, так і електромагнітного поля у надпровіднику. Однак для повного врахування поля цього недостатньо. Необхідно також врахувати власну енергію електромагнітного поля, яка відповідає функції Лагранжа

$$L_{em} = \frac{1}{8\pi} \int_V (\varepsilon \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla A_0 \right)^2 - (\text{rot} \vec{A})^2) dV. \quad (2.6)$$

Зазначимо, що для врахування іонного екранування у цьому виразі введено фонову діелектричну проникність  $\varepsilon$ , на яку помножено перший доданок цього виразу. При розгляді шаруватого надпровідника цей множник відповідає проникності діелектричних прошарків.

Для знаходження повної функції Лагранжа системи слід скласти функцію Лагранжа з (2.2) (в якій виконано перехід від фази  $\varphi$  до градієнтно-інваріантних змінних  $\psi_i$ ) і функцію Лагранжа електромагнітного поля (2.6):

$$L = \int_V \left( \frac{\kappa}{8} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + 2eA_0 \right)^2 - \frac{D_s}{8} (\nabla \theta - \frac{2e}{c} \vec{A})^2 + \frac{\varepsilon}{8\pi} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{8\pi} \nabla A_0 \right)^2 - (\text{rot} \vec{A})^2 \right) dV. \quad (2.7)$$

Цей вираз не є діагональним за ступенями вільності, що відповідає взаємодії густини зарядів і електромагнітного поля. У ньому можна провести калібровку, яка

задовольняє правилам (2.4) і (2.5). Вибір цієї калібровки не впливає на дисперсійні властивості збуджень, але змінює формальне їх представлення. Так, у кулонівській калібровці, де  $\text{div}\vec{A}=0$ , фаза пов'язується з електромагнітним полем лише через скалярний потенціал. Якщо ж ми виберемо вейлівську калібровку, яка визначається вимогою  $A_0=0$ , то з матеріальними ступенями вільності буде пов'язана повздовжня компонента векторного потенціалу. Ми будемо використовувати надалі саме таку калібровку, і замість ступенів вільності електромагнітного поля використовувати змінні  $\psi_i$ .

### 2.3. Функція Лагранжа шаруватого надпровідника

Наступним кроком є врахування анізотропії шаруватого надпровідника. Дійсно, вираз (2.7) відповідає суцільному надпровіднику. Для врахування різної провідності вздовж і поперек шарів надпровідника ми робимо заміну

$$D_s(\nabla\theta)^2 \rightarrow D_c\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 + D_{ab}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right] \quad (2.8)$$

у рівнянні (2.2) і відповідну заміну у (2.7). Тут вважається, що вісь  $z$  направлена перпендикулярно до площини шарів  $xy$ . Зазначимо, що при такій заміні ми нехтуємо дискретною структурою шаруватого надпровідника і лише робимо абстрактне припущення про різну стисливість зарядів у різних напрямках. Це виконується для достатньо малих значень хвильових чисел, або для довжин хвиль, великих порівняно з періодом  $D$  шаруватої структури.

Важливим наслідком заміни (2.8) є те, що тепер у виразі для функції Лагранжа (2.7) зв'язок між коливаннями густини зарядів відбувається не лише з повздовжньою компонентою електричного поля, як в ізотропного випадку, але і з перпендикулярною компонентою. Компонента електричного поля співнапрямлена з напрямком поширення

хвилі у загальному випадку буде викликати струм як вздовж напрямку поширення, так і поперек. Це явище вивчалось для шаруватих надпровідників і проявляється, наприклад, у зміні поляризації електромагнітних хвиль при відбиванні від зразків шаруватого надпровідника [10].

Наслідком того, що значення стисливості зарядів у двох напрямках неоднакові, є і різниця порогових значень частоти збуджень:

$$\omega_J = \frac{4\pi e^2 D_c}{\varepsilon}, \omega_o = \frac{4\pi e^2 D_{ab}}{\varepsilon} \equiv \gamma \omega_J. \quad (2.9)$$

Тут введено параметр анізотропії  $\gamma$  (значення якого є достатньо великим для типових представників шаруватих надпровідників). Перша порогова частота називається джозефсонівською плазмовою частотою і відповідає порогу збудження так званих «надзвичайних» хвиль, електричне поле в яких має компоненту, перпендикулярну шарам надпровідника. Її значення для багатьох шаруватих надпровідників лежить у терагерцевому діапазоні. Друга ж частота,  $\omega_o$ , відповідає порогу збудження так званих «звичайних» хвиль, і її значення для купратних надпровідників є у десятки разів більшим. Слід також зазначити, що в такому підході можна врахувати і різне значення діелектричної проникності  $\varepsilon$  вздовж і поперек шарів, що робиться аналогічним чином.

Як зазначалося, важливою властивістю шаруватих надпровідників є нелінійність електродинамічних рівнянь зв'язку струму, що тече у системі, і градієнтно-інваріантного параметра  $\psi_z$ . Згідно із загальноприйнятою моделлю, струм, що тече у напрямку, перпендикулярному шарам, можна наблизити джозефсонівським виразом [5],

$$j_z \propto \omega_J \sin \psi_z D. \quad (2.10)$$

Це призводить до відповідного нелінійного зв'язку у функції Лагранжа системи. Утримуючи лише доданки, які відповідають ступеням вільності  $\psi_x$  і  $\psi_z$  (що не знижує загальності виразу), отримаємо з (2.7) такий вираз для функції Лагранжа:

$$L = \frac{c^2}{32\pi e^2} \int_V \left( \frac{\varepsilon}{c^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{c^2} \left( \frac{\partial \psi_z}{\partial t} \right)^2 - \frac{\varepsilon \omega_o^2}{c^2} \psi_x^2 + \frac{2\varepsilon \omega_J^2}{c^2 D^2} \cos \psi_z D - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right)^2 - \psi_x \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial z} - \psi_z \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial z} \right) dV. \quad (2.11)$$

Тут замість доданка  $-\omega_J^2 \psi_z^2$  фігурує  $+2\omega_J^2 \cos \psi_z$  так, що його розклад до квадратичного члена дає такий самий результат, а похідна дає синусоїдальний струм (2.10). Також для отримання (2.11) додатково нехтувалося ефектами порушення електронейтральності шарів надпровідника. Це означає, що внесок у електричне поле, обумовлений градієнтом скалярної компоненти  $\psi_0$ , є нехтуваним, що справедливо для більшості шаруватих надпровідників, якщо дебаєвський радіус є достатньо малим порівняно з товщинами шарів.

З функції Лагранжа (2.10) можна отримати рівняння Ейлера-Лагранжа, які є диференціальними рівняннями для знаходження змінних  $\psi_{x,z}$ ,

$$\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + \omega_o^2 \psi_x - \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} + \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} + \frac{\omega_J^2}{D} \sin \psi_z D - \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial z} = 0. \quad (2.12)$$

Бачимо, що вони мають зв'язані хвильові розв'язки, причому характерними частотами збудження «звичайних» мод, збудження змінної  $\psi_x$ , є  $\omega_o$ , а частоти «надзвичайних» мод лежать в області  $\omega_J$ . Якщо виключити з цих рівнянь  $\psi_x$  і обмежитися лише

надзвичайними модами, вважаючи, що  $\omega_o \gg \omega_j$ , приходимо до класичного рівняння для шаруватих надпровідників [11,12], яке отримують з мікроскопічних міркувань,

$$\left(1 - \frac{c^2}{\varepsilon\omega_o^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} + \frac{\sin \psi_z D}{D}\right) - \frac{c^2}{\varepsilon\omega_j^2} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} = 0. \quad (2.13)$$

Як видно, описана тут схема стартує з довільного анізотропного випадку і не прив'язана до конкретної моделі струмів у площині шарів і перпендикулярно їм. Однак до такого ж виразу можна дійти і виходячи з розгляду диференціальних рівнянь для фаз, які можна отримати з рівнянь Максвела, а вже з цього отримати функцію Лагранжа системи. При цьому варто зауважити, що рівняння (2.12) є більш загальними, ніж одне рівняння (2.13), вони описують як «звичайні», так і «надзвичайні» моди. Ці рівняння еквівалентні підходу через рівняння для векторного потенціалу, який було застосовано у [10] для аналізу перетворення поляризації хвиль при відбитті від зразків шаруватого надпровідника.

З рівнянь (2.12) можна отримати закон дисперсії хвиль у загальному випадку. Для цього лінеаризуємо ці рівняння і шукаємо розв'язок у вигляді гармонічних функцій  $\propto \exp(-i(\omega t - (\vec{q}, \vec{r})))$ . У результаті отримаємо:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(\omega_o^2 + \omega_j^2 + \frac{c^2 q^2}{\varepsilon} \pm \sqrt{(\omega_o^2 - \omega_j^2)^2 - 2(\omega_o^2 - \omega_j^2) \frac{c^2 (q_x^2 - q_z^2)}{\varepsilon} + \frac{c^4 q^4}{\varepsilon^2}}). \quad (2.14)$$

У додатку Б цей розв'язок представлено графічно. Корінь, що відповідає знаку «+» у цьому виразі, можна розкласти для невеликих значень компонентів хвильового вектора,

$$\omega_+^2 \approx \omega_o^2 + \frac{c^2 q_z^2}{\varepsilon} \quad (2.15)$$

він відповідає звичайним модам. Другий же корінь можна асимптотично при  $\omega_o \gg \omega_j$  представити у такому вигляді:

$$\omega_-^2 \approx \omega_j^2 + \frac{c^2 q_x^2}{\varepsilon + c^2 q_z^2 / \omega_o^2} \quad (2.16)$$

Він відповідає надзвичайним модам з частотами, близькими до джозефсонівської плазмової частоти.

У виразі (2.11) розподіл  $\psi_{x,z}$  вважається континуальним. Звичайно, якщо розглядаються великі значення хвильового числа  $i$ , відповідно, малі довжини хвиль, це перестає виконуватися. У цьому разі слід дискретизувати модель, вводячи значення параметрів  $\psi_{x,z}$  у кожному шарі.

Знаючи функцію Лагранжа системи (2.11), можна отримати і її функцію Гамільтона. Вводячи узагальнені імпульси згідно зі співвідношеннями

$$P_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial t}, P_z = \frac{\partial \psi_z}{\partial t}, \quad (2.17)$$

отримаємо для функції Гамільтона наступний вираз,

$$H = \frac{c^2}{32\pi e^2} \int_V \left( \frac{\varepsilon}{c^2} (P_x^2 + P_z^2) + \frac{\varepsilon \omega_o^2}{c^2} \psi_x^2 - \frac{2\varepsilon \omega_J^2}{c^2 D^2} \cos \psi_z D + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right)^2 + \psi_x \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial z} + \psi_z \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial z} \right) dV. \quad (2.18)$$

Цей вираз можемо використовувати у підході Гамільтона і отримувати, зокрема канонічні рівняння, або проводити канонічні перетворення у системі, що може бути корисним у різних задачах, пов'язаних з електродинамікою шаруватих надпровідників.



## 2.4. Функція Лагранжа зразка скінченних розмірів

Врахуємо тепер те, що зразок шаруватого надпровідника є скінченним. Зрозуміло, що це призводить до того, що замість розподілених змінних  $\psi_i(\vec{r}, t)$  тепер ми маємо справу зі зліченною множиною мод, які задовольняють граничним умовам на межах зразка. В якості таких граничних умов виберемо умови ідеальної провідності стінок, згідно з якими тангенціальні компоненти електричного поля на границі дорівнюють нулю. Тоді будемо шукати розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned}\psi_{xq}(\vec{r}, t) &= \Psi_{xq}(t) \cos(q_x x) \sin(q_y y) \sin(q_z z), \\ \psi_{yq}(\vec{r}, t) &= \Psi_{yq}(t) \sin(q_x x) \cos(q_y y) \sin(q_z z), \\ \psi_{zq}(\vec{r}, t) &= \Psi_{zq}(t) \sin(q_x x) \sin(q_y y) \cos(q_z z),\end{aligned}\tag{2.19}$$

де ми тепер враховуємо всі три компоненти  $\psi_{x,y,z}$ . Вісь  $z$ , як і раніше, направлена перпендикулярно до шарів надпровідника, а область зразка відповідає діапазонам  $0 \leq x \leq L_x$ ,  $0 \leq y \leq L_y$  і  $0 \leq z \leq L_z$ . Для того, щоб виконувалися граничні умови, необхідно:

$$q_x = \frac{\pi n_x}{L_x}, \quad q_y = \frac{\pi n_y}{L_y}, \quad q_z = \frac{\pi n_z}{L_z},\tag{2.20}$$

де  $n_{x,y,z}$  – цілі ненульові числа, одне з яких може дорівнювати нулю.

Загальний розв'язок тоді матиме вигляд

$$\psi_x = \sum_{n_x, n_y, n_z} \psi_{xq}(\vec{r}, t), \quad \psi_y = \sum_{n_x, n_y, n_z} \psi_{yq}(\vec{r}, t), \quad \psi_z = \sum_{n_x, n_y, n_z} \psi_{zq}(\vec{r}, t),\tag{2.21}$$

тобто представлятиме собою суму по всіх модах системи.

Почнемо наш аналіз з лінійного випадку. Тоді існують дві групи розв'язків рівнянь Ейлера-Лагранжа (2.12), які відповідають звичайним і надзвичайним модам. Функція Лагранжа при цьому розпадається на суму незалежних внесків, які відповідають кожній з мод,

$$L = \sum_{n_x, n_y, n_z} (L_q^{(ord)} + L_q^{(ext)}). \quad (2.22)$$

Розглянемо окремо кожний з них. Звичайні моди не збуджують струм перпендикулярно шарам, і електричне поле в цьому напрямку дорівнює нулю. Дві інші компоненти  $\Psi_x$  і  $\Psi_y$  зв'язані співвідношенням

$$q_x \Psi_x = -q_y \Psi_y. \quad (2.23)$$

Тоді відповідні доданки у функції Лагранжа системи мають вигляд

$$L_q^{(ord)} = \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 - \left( \omega_o^2 + \frac{c^2 q^2}{\varepsilon} \right) \Psi_x^2, \quad (2.24)$$

де  $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$ , а постійний множник перед усім доданком опущений. Цей вираз містить лише змінну  $\Psi_x$ , оскільки  $\Psi_y$  знаходиться за допомогою (2.23). З нього бачимо, що закон дисперсії для цих мод має вигляд

$$\omega^2 = \omega_o^2 + \frac{c^2 q^2}{\varepsilon}. \quad (2.25)$$

Значимо, що вираз (2.24) отримано у припущенні  $\omega_o \gg \omega_j$ . Важливо, що звичайні моди є лінійними, оскільки не супроводжуються струмом поперек шарів.

Другий набір доданків у загальній функції Лагранжа (2.22), який відповідає надзвичайним модам, має більш складну структуру. Він відповідає ситуації, коли магнітне поле лежить у площині шарів надпровідника, і виконується такий зв'язок компонент  $\Psi_x$  та  $\Psi_y$ :

$$q_x \Psi_y = q_y \Psi_x. \quad (2.26)$$

Тоді з рівнянь Ейлера-Лагранжа (2.12) отримуємо в лінійному наближенні такий зв'язок компонент  $\Psi_z$  і  $\Psi_x$ :

$$\Psi_z = \left( \frac{q_z}{q_x} + \frac{c^2 \omega_o^2}{\varepsilon q_x q_z} \right) \Psi_x. \quad (2.27)$$

Тоді відповідні доданки у функції Лагранжа матимуть вигляд:

$$L_q^{(ext)} = \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 - \left( \omega_J^2 + \frac{c^2 (q_x^2 + q_y^2)}{\varepsilon + c^2 q_z^2 / \omega_o^2} \right) \Psi_x^2. \quad (2.28)$$

Закон дисперсії надзвичайних мод має вигляд

$$\omega^2 = \omega_J^2 + \frac{c^2 (q_x^2 + q_y^2)}{\varepsilon + c^2 q_z^2 / \omega_o^2}. \quad (2.29)$$

Бачимо, що характерні частоти поширення таких хвиль є значно меншими за рахунок меншого значення  $\omega_J$  порівняно з  $\omega_o$ . Зауважимо, що надзвичайні моди є нелінійними, див. докладніше у додатку В. У хвилеводі аналіз проводиться аналогічно, але шуканою величиною є константа розповсюдження (див. додаток Г).

Зазначимо, що, знаючи функцію Лагранжа системи (2.22), яка представляє собою суму незалежних доданків, які відповідають різним модам, ми не лише маємо всю інформацію про дисперсійні властивості системи. Тепер підхід Лагранжа може бути застосований для, наприклад, аналізу вимушених коливань у системі. Для цього зовнішні електромагнітні поля, які змінюються у часі і у просторі, слід розкласти за нормальними модами системи (які описані вище), у результаті чого отримаємо «проекції» цього зовнішнього впливу на різні моди, а отже, розв'язуючи відповідні рівняння Ейлера-Лагранжа, отримаємо розв'язок для вимушених коливань. Аналогічно це можна зробити і у підході Гамільтона, використовуючи вираз (2.18).

Ще одним напрямком застосування отриманих виразів для функцій Лагранжа та Гамільтона може бути квантування джозефсонівських плазмових хвиль. З точки зору практичних застосувань це може бути корисним для вивчення так званого макроскопічного квантового тунелювання, яке можна спостерігати для достатньо малих обмежених зразків при низьких температурах. Технічно для проведення квантування можна скористатися стандартним методом вторинного квантування, переходячи до операторів народження та знищення відповідних бозонів. Отримані лагранжіан та гамільтоніан системи тоді дозволять знаходити швидкість тунелювання.

## Висновки до розділу 2

Отже, отримано вирази для енергії зарядів у шаруватому надпровіднику, які з урахуванням градієнтної інваріантності дозволили описати взаємодію зарядів з електромагнітним полем. З урахуванням енергії електромагнітного поля у зразку, були отримані вирази для функцій Лагранжа і Гамільтона. Для зразків скінченних розмірів було проаналізовано структуру функції Лагранжа, отримані відповідні доданки і знайдено частоти відповідних збуджень. Для хвилеводу, заповненого шаруватим надпровідником, отримано вирази для постійної поширення.

## ВИСНОВКИ

Таким чином, у роботі:

- 1) отримано функцію Лагранжа і функцію Гамільтона для шаруватого надпровідника, обмеженого у просторі;
- 2) виходячи з загального випадку анізотропного середовища, вирази узагальнені на випадок специфічної нелінійності, характерної для шаруватих надпровідників;
- 3) використовуючи підхід Лагранжа, отримано дисперсійні співвідношення для джозефсонівських плазмових хвиль, які можуть поширюватися у обмежених зразках шаруватого надпровідника;
- 4) розглянуто випадки обмежених у всіх трьох напрямках зразків і хвилеводу, заповненого шаруватим надпровідником;
- 5) у залежності від взаємної орієнтації осі хвилеводу і шарів надпровідника отримано постійну поширення в залежності від частоти збудження для різних мод системи.

Отримані результати мають інтерес з фундаментальної точки зору, оскільки дозволяють узагальнити підхід Лагранжа на системи шаруватих надпровідників. Практичний інтерес має дослідження збуджень у шаруватих надпровідниках, оскільки це дозволяє будувати терагерцеві електронні пристрої з можливістю точного контролю їх параметрів.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

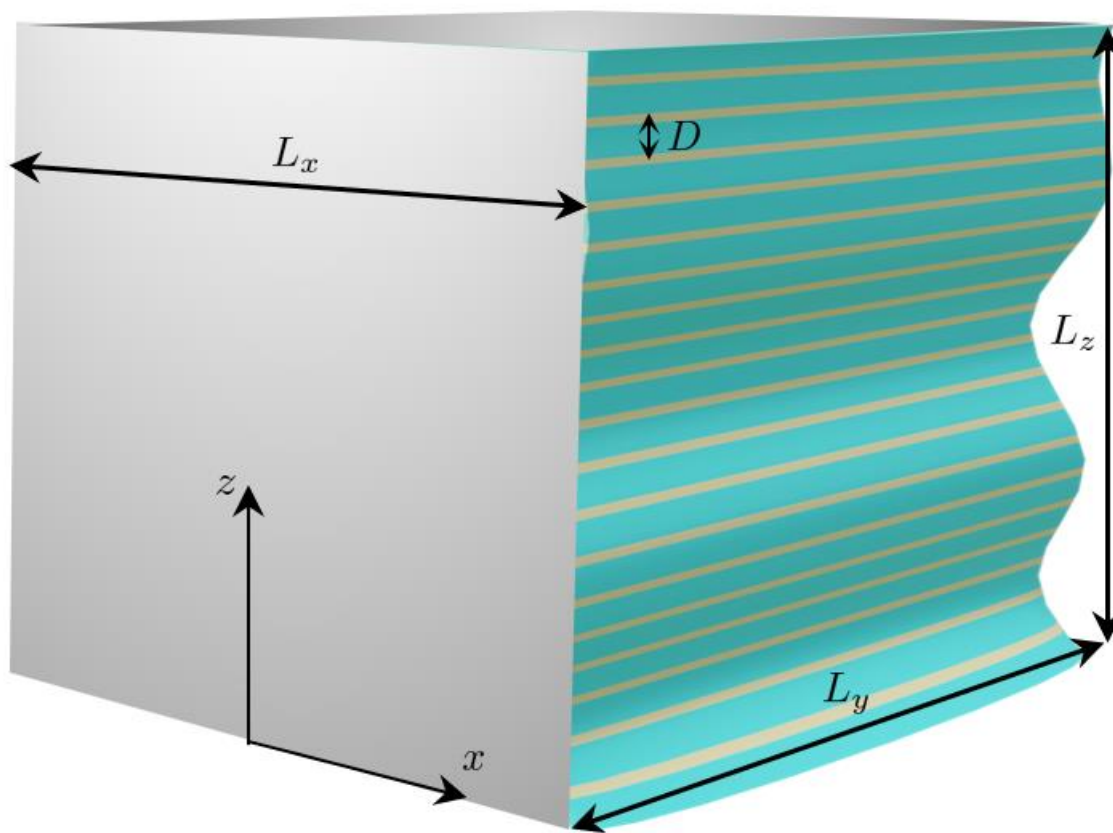
1. Gabriele F. Castellani C. Benfatto L. Generalized plasma waves in layered superconductors: A unified approach. *Phys. Rev. Res.* 2022. 4 (2). P. 023112.
2. De Palo S. Castellani C. Di Castro C. Chakraverty B. K. Effective action for superconductors and BCS-Bose crossover. *Phys. Rev. B.* 1999. 60 (1). P. 564.
3. Kleiner R. Steinmeyer F. Kunkel G. Muller P. Intrinsic Josephson effects in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  single crystals. *Phys. Rev. Lett.* 1992. 68 (15). P. 2394.
4. Kleiner R. Muller P. Intrinsic Josephson effects in high-Tc superconductors. *Phys. Rev B.* 1994. 49 (2). P. 1327.
5. Savel'ev S. Yampol'skii V.A. Rakhmanov A.L. Nori F. Terahertz Josephson plasma waves in layered superconductors: spectrum generation nonlinear and quantum phenomena. *Rep. Prog. Phys.* 2010. 73 (2). P. 026501.
6. Ovcharenko H.V. Maizelis Z.A. Apostolov S.S. Yampol'skii V.A. Nonlinear focusing of terahertz laser beam using a layered superconductor. *Phys. Rev. B.* 2022. 106 (17). P. 174511.
7. Rokhmanova T. Apostolov S. S. Kvitka N. Yampol'skii V. A. Effect of a dc magnetic field on the anomalous dispersion of localized Josephson plasma modes in layered superconductors. *Low Temp. Phys.* 2018. 44 (6). P. 552.
8. Apostolov S.S. Maizelis Z.A. Sorokina M.A. Yampol'skii V.A. Nori F. Self-induced tunable transparency in layered superconductors. *Phys. Rev. B.* 2010. 82 (14). P. 144521.
9. Anderson P. W. Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.* 1958. 112 (6). P. 1900.
10. Apostolov S.S. Rokhmanova T.N. Khankina S.I. Yakovenko V.M. Yampol'skii V.A. Transformation of the polarization of THz waves by their reflection and transmission through a finite layered superconductor. *Low Temp. Phys.* 2012. 38 (9). P. 880.
11. Sakai S. Bodin P. Pedersen N.F. Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices. *J. Appl. Phys.* 1993. 73 (5). P. 2411.

12. Artemenko S.N. Remizov S.V. Stability, collective modes and radiation from sliding Josephson vortex lattice in layered superconductors. *Physica C*. 2001. 362 (1). P. 200.

## ДОДАТКИ

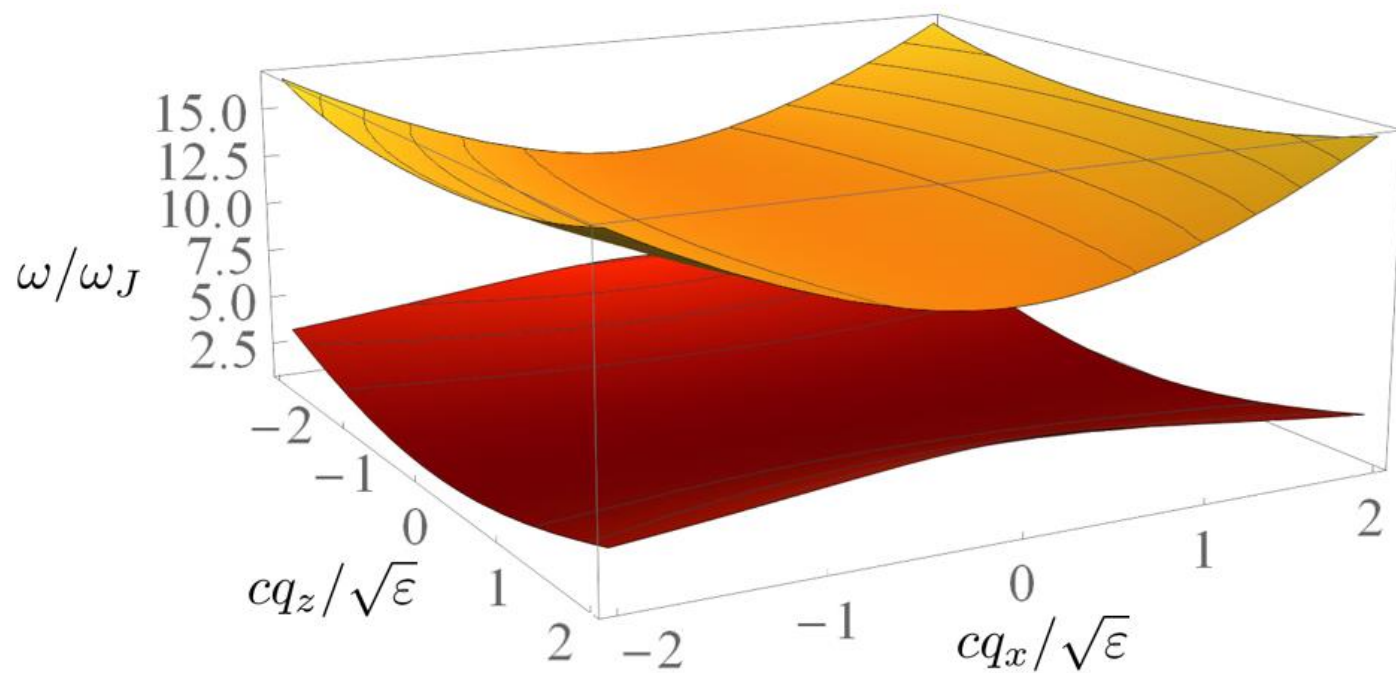
## Додаток А

Геометрія задачі про зразок шаруватого надпровідника скінченних розмірів





## Дисперсійні поверхні мод



## Роль нелінійності у задачі

На відміну від звичайних мод, надзвичайні моди є нелінійними, що пов'язано з доданком  $\sim \cos\psi_z D$  у функції Лагранжа. Врахувати цю нелінійність можна, розв'язуючи рівняння Ейлера-Лагранжа (2.12). Як і в інших нелінійних задачах, в принципі це може привести до кількох ефектів. По-перше, частота нелінійної надзвичайної моди починає залежати від амплітуди хвилі. Для головної поправки методом послідовних наближень отримаємо такий вираз:

$$\omega_{nl}^2 = \omega_j^2 + \frac{c^2(q_x^2 + q_y^2)}{\varepsilon + c^2 q_z^2 / \omega_o^2} - \frac{3\beta\omega_j^2 D^2}{32} A^2,$$

де  $A$  – амплітуда моди,  $\beta = 9/4$  для мод з  $q_z \neq 0$  і  $\beta = 3$  при  $q_z = 0$ .

Іншим ефектом нелінійності є генерація старших гармонік. У нашому випадку генеруються непарні гармоніки, а їх амплітуда мала у міру малості нелінійних доданків, наприклад  $A_3 \propto A^3$ . Ще одним ефектом нелінійності є взаємодія мод. Дійсно, представлення (2.22) функції Лагранжа у вигляді суми незалежних доданків справедливе лише у лінійному наближенні. Однак при слабкій нелінійності цей зв'язок також слабкий, і у головному наближенні отримані результати є вірними.

### Моди у хвилеводі, заповненому шаруватим надпровідником

Розглянемо хвилі у зразку, обмеженому лише у двох напрямках, тобто у хвилеводі. Ця ситуація має важливий практичний інтерес, і аналіз буде дещо відрізнятися в залежності від можливої геометрії задачі, оскільки тепер з'являється виділений напрямок вздовж хвилеводу. Розглянемо, наприклад, випадок поширення звичайних мод, коли вісь  $z$  напрямлена вздовж осі хвилеводу. Тоді замість стоячих хвиль (2.19) у всіх трьох напрямках матимемо хвилеводну моду, що поширюється вздовж осі  $z$ :

$$\begin{aligned}\psi_{xq}(\vec{r}, t) &= \Psi_{xq} \cos(q_x x) \sin(q_y y) \sin(q_z z - \omega t), \\ \psi_{yq}(\vec{r}, t) &= -\frac{q_x}{q_y} \Psi_{xq} \sin(q_x x) \cos(q_y y) \sin(q_z z - \omega t), \\ \psi_{zq}(\vec{r}, t) &= 0.\end{aligned}$$

При цьому для заданої частоти і для фіксованих номерів моди  $n_x$  і  $n_y$  маємо такий вираз для постійної поширення  $q_z$ :

$$q_z = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega^2 - \omega_o^2)}{c^2} - \frac{\pi^2 n_x^2}{L_x^2} - \frac{\pi^2 n_y^2}{L_y^2}}.$$

Якщо ж зразок має таку геометрію, що вісь хвилеводу  $x$  лежить у площині шарів надпровідника, то для звичайної моди отримаємо аналогічним чином

$$q_x = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega^2 - \omega_o^2)}{c^2} - \frac{\pi^2 n_y^2}{L_y^2} - \frac{\pi^2 n_z^2}{L_z^2}}.$$

Бачимо, що ці вирази цілком аналогічні, звичайні моди лінійні і можуть поширюватися лише при частотах, які перевищують  $\omega_o$ .

У випадку ж надзвичайних мод нелінійність впливає на дисперсійні властивості. Якщо вісь хвилеводу перпендикулярна шарам надпровідника, матимемо для постійної поширення моди таке співвідношення:

$$q_z = \sqrt{\frac{\omega_o^2}{\omega^2 - \omega_J^2} \left( \frac{\pi^2 n_x^2}{L_x^2} + \frac{\pi^2 n_y^2}{L_y^2} \right) \left( 1 - \frac{3\beta}{32} \frac{\omega_J^2}{\omega^2 - \omega_J^2} D^2 A^2 \right) - \frac{\varepsilon \omega_o^2}{c^2}}.$$

Бачимо, що нелінійність зменшує порогове значення для частот, при яких може поширюватися хвиля. У випадку шарів, паралельних осі хвилеводу, маємо такий асимптотичний вираз:

$$q_x = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_J^2}{c^2} \left( \varepsilon + \frac{\pi^2 n_z^2}{L_z^2 \omega_o^2} \right) \left( 1 + \frac{3\beta}{32} \frac{\omega_J^2}{\omega^2 - \omega_J^2} D^2 A^2 \right) - \frac{\pi^2 n_y^2}{L_y^2}}.$$

У цьому випадку знову нелінійність полегшує проходження збуджень вздовж хвилеводу, але тепер постійна поширення збільшується. Бачимо, що на відміну від випадку звичайних мод, для надзвичайних мод дві взаємні орієнтації вісі хвилеводу і площини шарів призводять до різної структури виразів для постійної розповсюдження.