Міністерство освіти і науки України
Департамент науки і освіти Харківської облдержадміністрації
Комунальний заклад «Харківська обласна Мала академія наук
Харківської обласної ради»

Відділення математики
Секція: прикладна математика

НЕЯВНІ ЛІНІЙНІ РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ НАД ДЕЯКИМИ КІЛЬЦЯМИ ЛИШКІВ

Роботу виконала:
Кириченко Кирило Володимирович, учень 9 класу Комунального закладу «Харківський ліцей № 89 Харківської міської ради», вихованець Комунального закладу «Харківська обласна Мала академія наук Харківської міської ради Харківської області»
Наукові керівники:
Генералов Микола Віталійович, вчитель математики Харківського приватного навчально-виховного комплексу «Авторська школа Бойка» Харківської області;
Бондаренко Ірина Станіславівна, вчитель математики Комунального закладу «Харківський ліцей № 89 Харківської міської ради», спеціаліст вищої категорії, учитель-методист

Харків – 2024

НЕЯВНІ ЛІНІЙНІ РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ НАД ДЕЯКИМИ КІЛЬЦЯМИ ЛИШКІВ

Кириченко Кирило Володимирович; Харківське територіальне відділення МАН України, Комунальний заклад «Харківська обласна Мала академія наук Харківської обласної ради», Комунальний заклад «Харківський ліцей № 89 Харківської міської ради», 9 клас, м. Харків;

Генералов Микола Віталійович, вчитель математики Харківського приватного навчально-виховного комплексу "Авторська школа Бойка" Харківської області;

Бондаренко Ірина Станіславівна, вчитель математики Комунального закладу «Харківський ліцей № 89 Харківської міської ради», спеціаліст вищої категорії, учитель-методист.

У роботі розглядається наступне лінійне різницеве рівняння:

$$A_k X_{n+k} + A_{k-1} X_{n+k-1} + \cdots + A_1 X_{n+1} + A_0 X_n = F_n, \ \ n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1)$$

де $A_0, \ldots, A_k, F_n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ є відомими елементами комутативного кільця R з одиницею.

Актуальність роботи: розвиток теорії неявних лінійних різницевих рівнянь з коефіцієнтами із комутативних кілець відкрив для дослідження нові цікаві проблеми і задачі. У представленій роботі вперше розглядаються розв'язки неявних лінійних різницевих рівнянь довільного скінченного порядку над кільцем лишків.

Мета роботи: дослідити неявне лінійне різницеве рівняння скінченого порядку над кільцем лишків на розв'язність. Відповідно до поставленої мети в роботі вирішуються такі основні завдання:

1. Вивчити критерій існування розв'язків неявних лінійних різницевих рівнянь першого порядку над кільцем лишків з роботи [5].
2. Визначати критерій розв'язності рівняння (1) над скінченим полем.
3. Визначити алгоритм зведення рівняння (1) над кільцем лишків до системи аналогічних рівнянь над більш простими кільцями.
4. Узагальнити знайдений критерій існування розв'язків рівняння (1) для деяких k та $m \geq 2$.
5. Побудувати приклади розв'язків деяких неявних лінійних різницевих рівнянь над кільцем лишків.

Елементи наукової новизни полягають у тому, що вперше сформульовано та доведено критерій розв'язності рівняння (1) для деяких k і $m \geq 2$ та наведено алгоритм побудови таких розв'язків.

Ключові слова: неявне лінійне різницеве рівняння; критерій розв'язності; кільце лишків

ЗМІСТ

ВСТУП

Останніми роками в Харкові активно проводяться дослідження неявних лінійних різницевих рівнянь з коефіцієнтами з різних скінчених комутативних кілець (див. [1–4]). Як і в теорії класичних різницевих рівнянь над полем дійсних чисел, при розгляді таких рівнянь виникає питання про умови існування їх розв'язків.

У роботі розглядається наступне лінійне різницеве рівняння:

$$A_k X_{n+k} + A_{k-1} X_{n+k-1} + \cdots + A_1 X_{n+1} + A_0 X_n = F_n, \;\; n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

де $A_0, \dots, A_k, F_n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ є відомими елементами комутативного кільця R з одиницею.

У розділі 1 наводяться загальний результат з роботи [5] критерію існування розв'язків різницевого рівняння (1) над кільцем лишків у випадку $k = 1$ (теорема 1.1). У даній роботі цей результат для деяких кілець $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{m}}$ узагальнюється на випадок довільного натурального k та наводиться алгоритм побудови загального розв'язку цього рівняння. У розділі 3 наведено приклад, що ілюструє роботу теореми 3.2 та наведеного алгоритму, а також приклад, у ході якого підтверджено гіпотези 2.1 та 3.2 для деякого випадку.

Актуальність роботи: розвиток теорії неявних лінійних різницевих рівнянь з коефіцієнтами з комутативних кілець відкрив для дослідження нові цікаві проблеми і задачі. У даній роботі вперше розглядаються розв'язки неявних лінійних різницевих рівнянь довільного скінченного порядку над кільцем лишків.

Елементи наукової новизни полягають у тому, що вперше сформульовано та доведено критерій розв'язності рівняння (1) для деяких k і $m \geq 2$ та наведено алгоритм побудови таких розв'язків.

Мета роботи: дослідити неявне лінійне різницеве рівняння скінченого порядку над кільцем лишків на розв'язність.

Для досягнення запланованої мети було поставлено такі **завдання**:

1. Вивчити критерій існування розв'язків неявних лінійних різницевих рівнянь першого порядку над кільцем лишків з роботи [5].

2. Визначати критерій розв'язності рівняння (1) над скінченим полем.

3. Визначити алгоритм зведення рівняння (1) над кільцем лишків до системи аналогічних рівнянь над більш простими кільцями.

4. Узагальнити знайдений критерій існування розв'язків рівняння (1) для деяких k та $m \geq 2$.

5. Побудувати приклади розв'язків деяких неявних лінійних різницевих рівнянь над кільцем лишків.

Об'єкт дослідження – неявне лінійне різницеве рівняння скінченого порядку над кільцем лишків.

Предметом дослідження є умови існування розв'язків неявного лінійного різницевого рівняння скінченого порядку над кільцем $\mathbb{Z}_m$ для довільних k та $m \geq 2$.

РОЗДІЛ 1
ЗАГАЛЬНА ІНФОРМАЦІЯ ПРО ЛІНІЙНЕ РІЗНИЦЕВЕ РІВНЯННЯ

1.1. Попередні відомості

Означення 1.1.1. *Кільце* – множина R, у якій введені дві бінарні операції множення «×» та додавання «+», що задовольняють такій системі аксіом:

1. Комутативність додавання:

$a + b = b + a \quad \forall a, b \in R.$

2. Асоціативність додавання:

$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in R.$

3. Існування нейтрального елемента відносно додавання:

$\exists\ 0 \in R: a + 0 = a \quad \forall a \in R.$

4. Існування протилежного елемента відносно додавання:

$\forall a \in R\ \ \exists -a \in R: a + (-a) = 0.$

5. Асоціативність множення:

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \quad \forall a, b \in R.$

6. Дистрибутивність множення:

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad \forall a, b, c \in R,$

$(b + c) \times a = b \times a + c \times a \quad \forall a, b, c \in R.$

Знак множення при цьому можуть пропускати, тобто $a \times b$ можуть записувати як ab.

Означення 1.1.2. Кільце R називається ***комутативним***, якщо множення «×» є комутативним, тобто $a \times b = b \times a \quad \forall a, b \in R$.

Означення 1.1.3. Кільце R називається ***кільцем з одиницею***, якщо $\exists\ e \in R\ \forall a \in R: a \times e = e \times a = a$.

Елемент e називається *одиницею кільця* R.

Означення 1.1.4.

Нехай R – кільце з одиницею. Елемент $a \in R,\ a \neq 0$ називається ***оборотним елементом кільця R***, якщо існує елемент $a^{-1} \in R$ такий, що

$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$$

Елемент a^{-1} називається ***оберненим*** елементом до a.

Означення 1.1.5. Кільце R з одиницею називається ***полем***, якщо будь-який його ненульовий елемент є оборотним.

Означення 1.1.6. $\mathbb{Z}_m$ – кільце класів лишків за модулем m. Елементами кільця лишків є так звані класи лишків $₵a = ₵_m(a)$ за модулем m (символ ₵ є скороченням від слова class). Операції у цьому кільці вводяться наступним чином:

$₵x + ₵y = ₵(x + y) \;\; \forall x, y$

$₵x \times ₵y = ₵(x \times y) \;\; \forall x, y$

Додатково вважаємо, що елемент $₵(a)$ рівний нулю тоді й тільки тоді, коли його представник a націло ділиться на m.

Загальновідомим є наступне твердження. Елемент $₵_m t$ кільця $\mathbb{Z}_m$ $(m > 1)$ є оборотним тоді й тільки тоді, коли НСД$(t, m) = 1$.

1.2. Відомості про лінійне різницеве рівняння першого порядку над кільцем лишків

Розглянемо спочатку лінійне різницеве рівняння скінченного порядку

$$A_k X_{n+k} + A_{k-1} X_{n+k-1} + \cdots + A_1 X_{n+1} + A_0 X_n = F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \tag{1.1}$$

над комутативним кільцем R з одиницею.

Нещодавно у [5, теорема 3.2] сформульовано і доведено критерій розв’язності цього рівняння над кільцем лишків $\mathbb{Z}_m$ для $k = 1$ і довільного $m > 1$. Для цього введено $d =$ НСД(a_0, a_1, m), де $A_0 = ₵(a_0), A_1 = ₵(a_1)$. Як результат, отримано критерій розв’язності такого рівняння. Також у [5, теорема 3.2] наведено формули загального розв’язку у випадку його існування.

Теорема 1.1. Нехай $k = 1$ і $R = \mathbb{Z}_m$ ($m > 1$ є натуральним числом). Справедливі наступні твердження.

1. Рівняння (1.1) має скінченне число розв'язків тоді й тільки тоді, коли $d = 1$.

2. Рівняння (1.1) має нескінченно багато розв'язків тоді й тільки тоді, коли $d \neq 1$ і $d \mid f_n$ при всіх n.

3. Рівняння (1.1) не має розв'язків тоді й тільки тоді, коли $d \nmid f_n$ при деякому n.

Спробуємо узагальнити цей результат на випадок довільного натурального k, додатково отримавши формулу загального розв'язку за умови його існування.

1.3. Рекурентне рівняння над кільцем лишків

Розглянемо рівняння (1.1) у загальному випадку ($k \geq 1, m > 1$ є довільними натуральними числами). Нехай це рівняння є явним, тобто A_k є оборотним елементом кільця $\mathbb{Z}_m$. Поділивши рівняння на A_k, отримуємо явну залежність X_{n+k} від $X_{n+k-1}, \dots, X_{n+1}, X_n$:

$$X_{n+k} = -A_k^{-1}A_{k-1}X_{n+k-1} - \dots - A_k^{-1}A_1X_{n+1} - A_k^{-1}A_0X_n + A_k^{-1}F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Означення 1.3.1. Рівняння виду

$$X_{n+k} = \alpha_{k-1}X_{n+k-1} + \alpha_{k-2}X_{n+k-2} + \dots + \alpha_0X_n + \beta_n, \; n \in \mathbb{Z}_+ \tag{1.2}$$

називають ***лінійним рекурентним рівнянням*** [7, с. 325].

У додатку А надано лістинг програми для знаходження перших членів розв'язку лінійного рекурентного рівняння над кільцем лишків.

Застосовавши формулу (1.2) кілька разів, отримаємо загальний розв'язок $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ рівняння (1.2), що для кожних заданих $X_0, \dots, X_{k-1}$ існує та визначається єдиним чином.

Розв’язання такого рівняння є доволі складним. Наступні твердження щодо послідовності Фібоначчі проілюструють це на прикладі.

Послідовність Фібоначчі – це послідовність $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, що задовольняє лінійному різницевому рівнянню $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$ над полем дійсних чисел і для якої $x_0 = 0, x_1 = 1$ [7, с. 325]. Ця послідовність тісно пов’язана із числом $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Формула Біне [7, с. 328] виражає загальний член послідовності Фібоначчі через φ, n:

$$x_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}} \ (n \geq 1).$$

Розглянувши аналогічне рівняння над кільцем лишків, отримаємо наступну формулу: якщо $X_{n+2} = X_n + X_{n+1}$ над кільцем лишків за модулем m, то $X_n = ₵_m(x_n)$. Для $m = 6$ перелічимо перші 100 членів послідовності $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, для спрощення запису замість класу запишемо його представник: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, 5, 5, 4, 3, 1, 4, 5, 3, 2, 5, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, 5, 5, 4, 3, 1, 4, 5, 3, 2, 5, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, 5, 5, 4, 3, 1, 4, 5, 3, 2, 5, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 0, 5, 5, 4, 3, 1, 4, 5, 3, 2, 5, 1, 0, 1, 1, 2. Можна помітити тут повторюваність з періодом 24.

І це лише рівняння Фібоначчі – одне з найпростіших рекурентних рівнянь другого порядку. Алгоритм розв’язання довільного рекурентного рівняння над кільцем лишків наразі невідомий. Висунемо гіпотезу, що може допомогти в розв’язанні довільного рекурентного рівняння.

Гіпотеза 1.2. Якщо β_n визначає стаціонарну послідовність, то розв’язок довільного рекурентного рівняння (1.2) над кільцем лишків за модулем m є періодичним, тобто існує $T > 0$ таке, що для довільного цілого невід’ємного n вірною є рівність $X_{n+T} = X_n$.

За [8, теорема 1], у випадку, коли $\beta_n = 0$ при всіх β_n, гіпотеза 1.2 справедлива.

У додатку Б надано лістинг програми, що встановлює періодичність скінченної послідовності $\{X_n\}_{n=0}^{N}$ для малого N.

.

РОЗДІЛ 2
ЛІНІЙНЕ РІЗНИЦЕВЕ РІВНЯННЯ НАД КІЛЬЦЯМИ ЛИШКІВ У ВИПАДКУ ВІЛЬНОГО ВІД КВАДРАТІВ МОДУЛЮ

2.1. Постановка завдання

Розглянемо рівняння (1.1) довільного скінченного порядку над кільцем лишків за модулем m ($m > 1$ є натуральним числом з канонічним розкладом на прості множники $m = p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$). Для його розв'язання ми зробимо наступне.

1. Сформулюємо та доведемо критерій розв'язності рівняння (1.1) над полем.

2. Опишемо алгоритм переходу від рівняння над кільцем $\mathbb{Z}_m$ до системи рівнянь аналогічного типу над кільцями $\mathbb{Z}_{p_i^{s_i}}$, $i = 1; \ldots ; r$.

3. Сформулюємо та доведемо критерій розв'язності рівняння (1.1) над $\mathbb{Z}_m$, де m дорівнює добутку попарно різних простих чисел.

2.2. Лінійне різницеве рівняння скінченного порядку над полем

Розглянемо спочатку випадок простого m.

Уведемо позначення: g – найбільше ціле число, що не більше за k і для якого $A_g \neq 0$. Якщо такого g не існує, вважаємо $g = 0$.

Теорема 2.1. Розглянемо рівняння (1.1) над кільцем $\mathbb{Z}_p$, де p є простим числом. Справедливі наступні твердження.

1. Якщо $A_k \neq 0$, то для кожних $X_0, \ldots, X_{k-1} \in \mathbb{Z}_p$ існує єдиний розв'язок послідовності (1.1), що визначається як розв'язок відповідного рекурентного рівняння.

2. Якщо $m = 0$, $A_0 = 0$ і $F_n \neq 0$ при деякому n, то рівняння (1.1) не має розв'язку.

3. Якщо $m = 0$, $A_0 = 0$ і $F_n = 0$ для всіх n, то будь-яка послідовність елементів кільця $\mathbb{Z}_p$ є розв'язком рівняння (1.1).

Доведення. Нехай $A_k \neq 0$. Тоді елемент A_k оборотний, і загальний розв'язок рівняння (1.1) визначається як розв'язок відповідного рекурентного рівняння (див. підрозділ 1.3).

Далі нехай $m_0 = 0$ і $A_0 = 0$. Рівняння (1.1) має вигляд $0 = F_n, n \in \mathbb{Z}_+$, подальше доведення є тривіальним.

2.3. Перехід від рівняння над кільцем лишків до системи рівнянь над більш простими кільцями

Розглянемо канонічний розклад числа m на прості множники: $p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ ($k_1, \dots, k_r$ натуральні). Введемо позначення $m_i = p_i^{k_i}$, і коефіцієнти $A_{i,j} = ¢_{m_i}(a_j)$, $X_{i,n} = ¢_{m_i}(x_n)$, $F_{i,n} = ¢_{m_i}(f_n)$ ($j = 0, \dots, k$, $i = 1, \dots, r$, $n \in \mathbb{Z}_+$).

Сформулюємо та доведемо лему – аналог [5, лема 2.1] для довільного натурального k.

Лема 2.2. Нехай $m = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ – канонічний розклад числа на прості множники, тобто $p_1, \dots, p_r$ є попарно різними простими числами і $k_1, \dots, k_r$ є натуральними числами. Тоді рівняння (1.1) над кільцем $\mathbb{Z}_m$ еквівалентне системі рівнянь

$$A_{i,k}X_{i,n+k} + A_{i,k-1}X_{i,n+k-1} + \dots + A_{i,1}X_{i,n+1} + A_{i,0}X_{i,n} = F_{i,n}, \; n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.1}$$

$i = 1, \dots, r$, — кожне з яких розглядається над кільцем $\mathbb{Z}_{m_i}$. При цьому якщо для кожного i послідовність $\{X_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$ є загальним розв'язком відповідного рівняння (2.1) і $X_{i,n} = ¢_{m_i}(x_{i,n})$, то загальний розв'язок $\{X_n\}$ рівняння (1.1) визначено рівністю

$$X_n = ¢_m\left(\sum_{i=1}^{r} x_{i,n} \cdot t_i \cdot \frac{m}{m_i}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.2}$$

де $\complement_{m_i}(t_i) = \left(\complement_{m_i}\left(\frac{m}{m_i}\right)\right)^{-1}$.

Доведення. Покажемо, що рівність (1.1) виконано тоді й тільки тоді, коли для кожного $i = 1; \dots; r$ виконано рівність (2.1).

Через S позначимо різницю правої і лівої частин рівності (1.1). Для елемента $S = \complement_m s$ множини $\mathbb{Z}_m$ уведемо позначення $S_i = \complement_{m_i} s$. Покажемо, що $S = 0$ тоді й тільки тоді, коли для кожного $i = 1; \dots; r$ вірною є рівність $S_i = 0$.

Якщо $S = 0$, то s ділиться на m, зокрема s ділиться на m_i при кожному $i = 1; \dots; r$, тому $S_i = 0$ при кожному i. Справедливе й обернене твердження: якщо $S_i = 0$ при кожному i, тоді s ділиться на m_i при кожному i. Оскільки числа m_i взаємно прості, то це означає, що s ділиться і на добуток чисел m_i, тобто на m. Звідси випливає, що $S = 0$.

Оскільки S_i дорівнює різниці лівої та правої частин рівності (2.1), завершено доведення леми, окрім формули (2.2). Формула (2.2) наводиться наприклад у [6, вправа 5 підрозділу 7.6], і випливає із означення $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, і китайської теореми про лишки. А саме, існує єдиний розв'язок X_n для кожних заданих $X_{1,n}, \dots, X_{r,n}$. Для послідовності, що визначена формулою (2.2),

$$\complement_{m_i}(x_n) = \complement_{m_i} x_{i,n} \cdot \complement_{m_i} t_i \cdot \complement_{m_i} \frac{m}{m_i} = \complement_{m_i} x_{i,n} = X_{i,n},$$

отже вона і є єдиним елементом, що задовольняє рівності $\complement_{m_i}(x_n) = X_{i,n}$. Лему доведено.

2.4. Лінійне різницеве рівняння над кільцями лишків за модулем, вільним від квадратів

У цьому підрозділі, користуючись результатами підрозділів 2.2 і 2.3, сформулюємо і доведемо критерій розв'язності рівняння (1.1) над кільцем $\mathbb{Z}_m$ для m, вільного від квадратів (тобто такого m, що дорівнює добутку попарно різних простих чисел) та опишемо алгоритм знаходження загального розв’язку такого рівняння.

Для кожного i позначимо: N_i дорівнює найбільшому w, для якого $A_{i,w} \neq 0$. Якщо такого w не існує, то $N_i = 0$.

Теорема 2.3. Нехай число m дорівнює добутку попарно різних простих чисел $p_1, \dots, p_r$. Справедливі наступні твердження:

1. Рівняння (1.1) має скінченне число розв'язків тоді й тільки тоді, коли $N_i > 0$ для кожного i. Кількість розв’язків відповідного рівняння (1.1) дорівнює $p_1^{N_1} \dots p_r^{N_r}$ і не перевищує m^k. Кожне $\{X_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$ (а саме кожний розв’язок відповідного рівняння (2.1)) визначається як розв’язок відповідного рекурентного рівняння над кільцем $\mathbb{Z}_{m_i}$.

2. Рівняння (1.1) має нескінченно багато розв’язків тоді і тільки тоді, коли $N_i = 0$ для деякого i, причому для кожного i якщо $N_i = 0$, то $F_{i,n} = 0$ при всіх n. За такими координатами i будь-яка послідовність $\{X_{i,n}\}_{n=0}^{\infty}$ елементів кільця $\mathbb{Z}_{m_i}$ є розв’язком відповідного рівняння (2.1), а за іншими i відповідні рівняння (2.1) явні.

3. Рівняння (1.1) не має розв’язків тоді і тільки тоді, коли існує таке i, що $N_i = 0$ і $F_{i,n} \neq 0$ для деякого n.

Доведення. За лемою 2.2, рівняння (1.1) рівносильне системі

$$\begin{cases} A_{0,k}X_{0,n+k} + A_{0,k-1}X_{0,n+k-1} + \dots + A_{0,1}X_{0,n+1} + A_{0,0}X_{0,n} = F_{0,n}, & n \in \mathbb{Z}_+, \\ \vdots \\ A_{r,k}X_{r,n+k} + A_{r,k-1}X_{r,n+k-1} + \dots + A_{r,1}X_{r,n+1} + A_{r,0}X_{r,n} = F_{r,n}, & n \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

Нехай $N_i > 0$ для кожного i. Це означає, що для кожного i існує k, для якого $A_{i,k} \neq 0$. Оскільки A_{i,N_i} є ненульовим за означенням числа N_i і рівняння розглядається над полем, то цей коефіцієнт оборотний, отже рівняння є явним. За твердженням 1 теореми 2.1, явне рівняння має скінченне число розв’язків (а саме, $p_i^{N_i}$ розв’яків). Тому число розв’язків рівняння (1.1) дорівнює $p_1^{N_1} \dots p_r^{N_r}$, зокрема не перевищує $(p_1 \dots p_r)^k = m^k$. Достатність твердження 1 доведено.

Нехай існує i, для якого $N_i = 0$. Для кожного такого i відповідне рівняння (2.1) має вигляд $F_{i,n} = 0$. Подальше випливає із твердження 3 теореми 2.1: якщо $N_i = 0$ і

$F_{i,n} \neq 0$ при деякому n, то відповідно рівняння (2.1) не має розв'язку, а отже і рівняння (1.1) не має розв'язку. Якщо ж $F_{i,n} = 0$ при всіх таких i, то будь-яка послідовність відповідного кільця є розв'язком відповідного рівняння (2.1). Для інших i розв'язки рівнянь (2.1) визначаються, як і для першого твердження теореми, як розв'язки лінійних рекурентних рівнянь. Достатність тверджень 2 і 3 доведено.

Тепер припустимо, що рівняння (1.1) має скінченне число розв'язків. Якщо $d \neq 1$, то, за вище доведеним, рівняння (1.1) або не має розв'язку, або має нескінченно багато розв'язків. Отже, $d = 1$, що доводить твердження 1. Аналогічно доводяться твердження 2 і 3. Теорему доведено повністю.

РОЗДІЛ 3
АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ НАД КІЛЬЦЕМ ЛИШКІВ

3.1. Алгоритм розв'язання лінійного різницевого рівняння скінченного порядку над $\mathbb{Z}_{p^2}$

Тут і надалі p позначає просте число.

Розглянемо неявне лінійне різницеве рівняння (1.1) над кільцем лишків за модулем m.

Для кожного класу лишків позначимо його представника відповідною малою літерою. Наприклад $₵_m b = B$.

Позначимо: $d = \text{НСД}(a_k, a_{k-1}, \dots, a_0, m)$ (обираємо d додатним).

Для кожного класу $T = A_i$ і у випадку, коли $T = F_n$, нехай відповідна велика літера зі штрихом (′) позначає $₵_{\frac{m}{d}}\left(\frac{t}{d}\right)$, і нехай запис X'_n позначає $₵_{\frac{m}{d}}(x_n)$.

Якщо $d|f_n$ при всіх n, розглянемо рівняння

$$A'_k X'_{n+k} + \dots + A'_1 X'_{n+1} + A'_0 X'_n = F'_n,\ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.1}$$

над кільцем $\mathbb{Z}_{m'}$, де $m' = \frac{m}{d}$, відносно послідовності $\{X'_n\}_{n=0}^{\infty}$. Зауважимо, що $\text{НСД}(a'_k, \dots, a'_1, a'_0, m') = \text{НСД}(a_k, \dots, a_1, a_0, m)/d = 1$.

Сформулюємо і доведемо твердження, що допоможе нам зводити розв'язання рівняння (1.1) до розв'язання рівняння (3.1). Це твердження є аналогічним [5, лема 3.1].

Лема 3.1. Нехай виконано наступні умови:

- $m > 1$ і k є натуральними числами.
- $d|f_n$ при всіх n.
- Послідовність $\{X'_n\}_{n=0}^{\infty}$ є загальним розв'язком рівняння (3.1).

Тоді загальний розв'язок $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ рівняння (1.1) визначено рівністю

$$X_n = ₵_m(x'_n + m'l_n),\ l_n \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Зауваження. Зокрема, при $d = 1$ лема 3.1 є вірною, але не є цікавою для розгляду.

Доведення. Зазначимо, що рівняння (1.1) еквівалентне $\frac{LS(1.1)-RS(1.1)}{m} \in \mathbb{Z}$, де LS, RS позначаєть ліву і праву частини відповідно. Після скорочення дробу на d маємо $\frac{LS(1.1)/d-RS(1.1)/d}{m/d} \in \mathbb{Z}$, що еквівалентно (3.1). Для того, щоб була виконана рівність $X'_n = ₵_{m'}(x_n)$, обов'язковою є єдина умова: $₵_{m'}(x_n) = ₵_{m'}(x'_n)$. Це означає, що $x_n - x'_n$ націло ділиться на m', тобто воно дорівнює $m'l$ для деякого цілого l. Іншими словами, $x_n = x'_n + m'l$, звідки $₵_m(x_n) = ₵_m(x'_n + m'l)$. Рівність (3.2) доведено, лему доведено.

Нехай $m = p^2$. У ході доведення наступної теореми отримаємо алгоритм знаходження усіх можливих розв'язків рівняння (1.1). Отримана множина розв'язків може містити сторонні, тому треба для кожної отриманої послідовності виконати перевірку, яка і покаже, чи є дана послідовність розв'язком.

Теорема 3.2. Нехай $m = p^2$. Справедливі наступні твердження.

1. Якщо $d = 1$, то рівняння (1.1) або не має розв'язку, або має скінченне число розв'язків.

2. Якщо f_n не ділиться на d при деякому n, то рівняння (1.1) не має розв'язку.

3. Якщо $d \neq 1$ і $d \mid f_n$ при всіх n, то у випадку існування розв'язку рівняння (3.1) рівняння (1.1) має нескінченно багато розв'язків.

Доведення. Розглянемо випадок $d = 1$. Покажемо, що рівняння (1.1) має скінченне число розв'язків.

Оскільки $d = 1$, то існує $i \in \{1; \dots; r\}$, при якому НСД$(a_i, p) = 1$. Позначимо числом j найбільше ціле i, для якого НСД$(a_i, p) = 1$. Елемент A_j оборотний, поділимо обидві частини рівняння (1.1) на A_j. Якщо рівняння (1.1) явне, то рекурентне рівняння вже отримано, воно має рівно p^{2k} розв'язків (оскільки $X_0, X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathbb{Z}_m$ обираються довільними). Якщо є рівняння (1.1) неявне, то старший коефіцієнт рівняння (1.1) є необоротним. Рівняння (1.1) набуває вигляду:

$$₵p \cdot V_n + X_{n+j} + Y_n = F_n, n \in \mathbb{Z}_+.$$

$$\text{Тут } V_n = \sum_{t=1}^{N} \alpha_t X_{n+j+t}, Y_n = \sum_{t=0}^{j-1} \beta_t X_{n+t}, N = k - j, \alpha_t, \beta_t \in \mathbb{Z}_m.$$

Вважаємо, що $\sum_{t=0}^{-1}(\gamma X_{n+t}) = 0$, наприклад якщо $j = 0$, то $Y_n = 0$.

Із записаного випливає

$$X_{n+j} = -₵p \cdot V_n - Y_n + F_n \text{ при всіх } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.3}$$

Застосувавши (3.3) кілька разів, отримаємо:

$$X_{n+j} = -₵p \cdot \left(\sum_{t=1}^{N} \alpha_t (-₵p \cdot V_{n+t} - Y_{n+t} + F_{n+t}) \right) - Y_n + F_n =$$

$$= ₵p \cdot \sum_{t=1}^{k-j} \alpha_t Y_{n+t} - Y_n - ₵p \cdot \sum_{t=1}^{k-j} \alpha_t F_{n+t} + F_n, n \in \mathbb{Z}_+ \tag{3.4}$$

Тут використано рівність $(₵p)^2 = 0$. У сумі

$$\sum_{t=1}^{k-j} \alpha_t Y_{n+t} = \sum_{t=1}^{k-j} \alpha_t \left(\sum_{w=0}^{j-1} \beta_w X_{n+t+w} \right)$$

після розкриття всіх дужок фігурують лише елементи $X_{n+1+0}, \dots, X_{n+(k-j)+(j-1)}$, серед яких найбільшим індексом є число $n + k - 1$. Із цих міркувань та формули (3.4) випливає, що X_{n+j} явним чином лінійно залежить від $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+k-1}$ (та відомих параметрів).

$$X_{n+j} = ₵p \cdot \sum_{t=1}^{k-j} \alpha_t \left(\sum_{w=0}^{j-1} \beta_w X_{n+t+w} \right) - \sum_{t=0}^{j-1} \beta_t X_{n+t} - ₵p \cdot \sum_{t=1}^{k-j} \alpha_t F_{n+t} + F_n \qquad (3.5)$$

Оскільки ми не можемо стверджувати, що цей перехід є рівносильним, то при розв'язанні рівняння таким способом треба робити перевірку підстановкою. Це рівняння є лінійним різницевим порядку не вище за $k-1$ над тим самим кільцем, що і початкове рівняння. Перенесемо в ліву його частину все, що містить X_n, інше перенесемо у праву частину. Покажемо, що для отриманого рівняння також виконано рівність $d=1$ (де d визначається через коефіцієнти цього рівняння). Віднявши від правої частини рівності (3.5) ліву, отримаємо, що коефіцієнт перед X_{n+j} в отриманому рівнянні дорівнює $\pm₵(1-pl)$ для деякого l, тому є оборотним. Звідси випливає, що для отриманого рівняння $d=1$. Повторюючи вище зазначений алгоритм до отриманого рівняння, не більше ніж за $k-j$ кроків отримаємо явне рекурентне рівняння. Воно має рівно p^{2j} розв'язків. Згадавши, що у випадку оборотного старшого коефіцієнта рівняння (1.1) має p^{2k} розв'язків, отримаємо: якщо $d=1$, то рівняння (1.1) має рівно щонайбільше p^{2j} розв'язків (менше, якщо при застосуванні алгоритму отримано зайві розв'язки). Твердження 1 доведено.

Нехай $d \nmid f_n$ при деякому n. Для цього n позначимо ліву частину рівності (1.1) через S_1, а праву через S_2. Тоді $s_1 - s_2$ націло ділиться на m, а отже ця різниця націло ділиться на d – натуральний дільник числа m. Оскільки a_i кратне d при всіх $i \in \{1; \dots; r\}$, то s_1 кратне d. Отже, s_2 також кратне d. Але $s_2 - f_n$ кратне d, а f_n не кратне d – отримано протиріччя. Звідси випливає, що (1.1) не має розв'язку. Твердження 2 доведено.

Нехай $d \neq 1$ і $d \mid f_n$ при всіх n. За лемою 3.1, якщо існує розв'язок рівняння (3.1), то загальний розв'язок рівняння (1.1) визначено рівністю (3.2), де $X'_n = ₵_{\frac{m}{d}}(x'_n)$ є загальним розв'язком рівняння (3.1). Твердження 3 доведено.

Теорему доведено.

Ґрунтуючись на тому, що у [5, теорема 3.2] схожий алгоритм ніколи не давав зайвих розв'язків, висунемо наступну гіпотезу.

Гіпотеза 3.2. У доведенні теореми 3.2 перехід від (3.3) до (3.5) є рівносильним.

Із гіпотези 3.2 випливає, що при застосуванні алгоритму, описаного у теоремі 3.1, розв'язки загублені не будуть.

Гіпотеза 3.3. Нехай $m > 1$ і k є довільними натуральними числами. Справедливі наступні твердження.

1. Рівняння (1.1) має скінченне число розв'язків тоді й тільки тоді, коли $d = 1$. При цьому кількість розв'язків дорівнює $m_1^{j_1} \dots m_r^{j_r}$, де $j_i = \max\{w\colon \text{НСД}(a_w, p_i) = 1\}$. Кількість розв'язків не перевищує m^k.
2. Рівняння (1.1) не має розв'язку тоді й тільки тоді, коли f_n не ділиться на d при деякому n.
3. Рівняння (1.1) має нескінченно багато розв'язків тоді й тільки тоді, коли $d \neq 1$ і $d \mid f_n$ при всіх n.

Якщо гіпотеза 3.2 є вірною, то нескладно показати, що гіпотеза 3.3 є вірною принаймні при $m = p^2$, і, відповідно, при наступному канонічному розкладі числа m на прості множники: $m = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$, де $1 \le k_i \le 2$ при кожному i.

3.2. Алгоритм розв'язання деяких лінійних різницевих рівнянь над кільцем лишків

Розглянемо приклад застосування теореми 3.2 і розв'язання рівняння (1.1) над деяким кільцем лишків. Для спрощення запису у ньому позначку класу ми опустимо, зокрема ₵2 $\cdot X_n$ позначимо як $2X_n$.

Приклад 3.1. Розглянемо рівняння

$$6X_{n+3} + 3X_{n+2} + 5X_{n+1} + 4X_n = (-1)^{n+1},\ n \in \mathbb{Z}_+ \tag{3.6}$$

над кільцем $\mathbb{Z}_9$.

Скористаємось теоремою 3.1. Визначимо коефіцієнти рівняння (3.6): $A_3 = 6, A_2 = 3, A_1 = 5, A_0 = 4, F_n = (-1)^{n+1}$.

Оскільки $d = \text{НСД}(6{,}3{,}5{,}4{,}9) = 1$, то, за теоремою 3.1, рівняння (3.6) або не має розв'язку, або має скінченне число розв'язків (якщо гіпотеза 3.1 є вірною, то рівняння (3.6) має рівно $p^{2j} = 9$ розв'язків).

Скористаємось алгоритмом, описаним у доведенні теоремі 3.1, для визначення загального розв'язку рівняння (3.6).

Тут $j = 1$, $A_j = 5$. Після множення на $A_j^{-1} = 2$ рівняння (3.6) приймає наступний вигляд:

$$X_{n+1} = -3X_{n+3} + 3X_{n+2} + X_n - 2\,(-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.7}$$

Застосувавши рівність (3.7) декілька разів, отримаємо наступну рівність:

$$X_{n+1} = -3(-3X_{n+5} + 3X_{n+4} + X_{n+2} - 2\,(-1)^{n+2}) + \\ +3(-3X_{n+4} + 3X_{n+3} + X_{n+1} - 2\,(-1)^{n+1}) + X_n - 2\,(-1)^n,$$

яка після спрощень набуває вигляду:

$$X_{n+1} = -3X_{n+2} + 3X_{n+1} - 3\,(-1)^{n+2} + 3\,(-1)^{n+1} + X_n - 2\,(-1)^n.$$

Або, інакше,

$$-2X_{n+1} = -3X_{n+2} + X_n + (-3 - 3 - 2)(-1)^n,$$

що після множення на $-2^{-1} = -5$ має вигляд

$$X_{n+1} = 6X_{n+2} - 5X_n - 5(-1)^n.$$

Застосувавши цю рівність повторно, отримаємо

$$X_{n+1} = 6(6X_{n+3} - 5X_{n+1} - 5(-1)^{n+1}) - 5X_n - 5(-1)^n.$$

Звідси випливає явне рівняння:

$$(1 + 30)X_{n+1} = -5X_n + (30 - 5)(-1)^n.$$

Помноживши його на $31^{-1} = 7$, маємо рекурентну залежність

$$X_{n+1} = X_n + 4\,(-1)^n.$$

Отримане рівняння можна розв'язати, скориставшись формулою із п. 1 [5, теорема 3.2]:

$$X_n = B^{-n}A^nX_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^iB^{-i-1}F_{n-i-1} = X_0 + 4\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i-1}.$$

Перевіримо його підстановкою в (3.7):

$$X_{n+1} + 3X_{n+3} - 3X_{n+2} - X_n + 2\,(-1)^n = (1 + 3 - 3 + 1)X_0 +$$

$$+4\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i} + 3\cdot 4\sum_{i=0}^{n+2}(-1)^{n+2-i} - 3\cdot 4\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{n-i-1} - 4\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i-1} +$$

$$+2\,(-1)^n = 4\sum_{i=0}^{n}(1 + 3 + 3 + 1)(-1)^{n-i} + 12((-1)^1 + (-1)^0) -$$

$$-12(-1)^0 - 4\cdot(-(-1)^{-1}) + 2(-1)^n = -4\sum_{t=0}^{n}(-1)^t - 12 - 4 + 2(-1)^n.$$

Якщо n непарне, то $\sum_{t=0}^{n}(-1)^t = 0$ і значення виразу з минулого рядка дорівнює нулю. Якщо n парне, то $\sum_{t=0}^{n}(-1)^t = (-1)^n = 1$ і значення того самого виразу дорівнює $-4-12-4+2=0$. Таким чином отримано, що загальний розв'язок рівняння (3.6) має вигляд

$$X_n = X_0 + 4\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i-1}, \qquad n \geq 1,$$

де X_0 — довільний елемент кільця $\mathbb{Z}_9$. Відповідно, кількість розв'язків рівняння (3.6) дорівнює 9, що підтверджує гіпотези 3.2, 3.3 для цього рівняння.

Наступний приклад демонструє успішне застосування алгоритму, описаного у доведенні теореми 3.1, до деякого лінійного різницевого рівняння скінченного порядку над кільцем лишків.

Приклад 3.2. Розглянемо рівняння

$$1215X_{n+5} - 810X_{n+4} + 315X_{n+3} - 80X_{n+1} + 41X_n = F_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.8)$$

$F_n = ₵_{1620}\big(405 - 324\, s_n + 1540\,((-2)^{n+1})\big)$, S_n довільна, над кільцем $\mathbb{Z}_{1620}$.

За гіпотезою 3.3, оскільки $d = \text{НСД}(1215{,}810{,}315{,}80{,}41{,}365) = 5$, то рівняння (3.8) або не має розв'язку, або існує нескінченно багато його розв'язків. Скористаємось лемою 2.2 і перейдемо до системи рівнянь. Позначимо $R_1 = \mathbb{Z}_4, R_2 = \mathbb{Z}_5, R_3 = \mathbb{Z}_{81}$. За лемою 2.2, рівняння (3.8) еквівалентне системі

$$\begin{cases} 3X_{1,n+5} + 2X_{1,n+4} - 3X_{1,n+3} + X_{1,n} = 1, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \\ 0X_{2,n} = F_{2,n}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \\ 72X_{n+3} + X_{n+1} - 40X_n = (-2)^{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Перше рівняння розглядається над R_1, друге — над R_2, третє — над R_3.

Якщо f_n не ділиться на 5 при деякому n, то друге рівняння системи не має розв'язку, тому рівняння (3.8) не має розв'язку. Нехай f_n кратне 5 при кожному n.

У випадку справедливості гіпотези 3.2 рівняння (3.8) має нескінченно багато розв'язків. Перевіримо це твердження на вірність.

Перше рівняння системи є явним і після еквівалентних перетворень має вигляд

$$X_{1,n+5} = 2X_{1,n+4} + X_{1,n+3} + X_{1,n} + 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \tag{3.9}$$

над кільцем $\mathbb{Z}_4$. Це рівняння є рекурентним порядку 5, тому має рівно $4^5 = 1024$ розв'язки. Для визначення розв'язку цього рівняння треба задати елементи $X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathbb{Z}_4$.

Розв'язком другого рівняння системи є довільна послідовність елементів $\mathbb{Z}_5$.

До третього рівняння системи розглянемо трохи більш загальний випадок. Рівняння

$$X_{n+1} = BX_{n+k} + \varphi X_n + F_n, \; n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.10}$$

Тут $B \neq 0, B^2 = 0, k > 1$. Покажемо, що після пониження порядку рівняння не будуть отримані зайві корені.

$$X_{n+1} = B(\varphi X_{n+k-1} + F_{n+k-1}) + \varphi X_n + F_n.$$

Підставляючи отримане у (3.10), маємо наступне:

$$B(\varphi X_{n+k-1} + F_{n+k-1}) + \varphi X_n + F_n - B(\varphi X_{n+k-1} + F_{n+k-1}) - \varphi X_n - F_n = 0.$$

Зокрема, рівносильний перехід до явного рівняння.

У даному прикладі $k = 3$ і $B = 9, \varphi = 40, F_n = (-2)^{n+1}$.

Після пониження порядку $B = 36$, $F_n = (-2)^{n+1}(9(-2)^{3-1} + 1)$. Після другого пониження рівняння явне і має вигляд

$$X_{n+1} = 36 \cdot 40\, X_{n+1} + 40\, X_n + 37(36\, (-2)^{2-1} + 1)(-2)^{n+1}.$$

Звідси випливає

$$(1-63)X_{n+1} = 40X_n + 37 \cdot (1-72)(-2)^{n+1};$$

$$X_{n+1} = 64 \cdot 40X_n + 46 \cdot 64\,(-2)^{n+1}. \qquad (3.11)$$

Розв’язок рекурентного рівняння (3.11), за п. 1 [5, теорема 3.2], визначається формулою

$$X_n = B^{-n}A^nX_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^iB^{-i-1}F_{n-i-1} = 49^nX_0 + 28\sum_{i=0}^{n-1} 49^i(-2)^{n-i}.$$

Отже це є розв’язком рівняння (3.10).

При цьому загальний розв’язок рівняння (3.8) визначається за (2.2):

$$X_n = ₵_{1620}\left(x_{1,n} \cdot t_1 \cdot \frac{m}{m_1} + x_{2,n} \cdot t_2 \cdot \frac{m}{m_2} + x_{3,n} \cdot t_3 \cdot \frac{m}{m_3}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $₵_4(t_1) = \left(₵_4(405)\right)^{-1} = 1$, нехай $t_1 = 1$.

$₵_5(t_2) = \left(₵_5(324)\right)^{-1} = ₵_5(4)$, оберемо $t_2 = 4$.

$₵_{81}(t_3) = \left(₵_{81}(20)\right)^{-1} = ₵_3(77)$, оберемо $t_3 = 77$.

$$X_n = ₵_{1620}\left(405x_{1,n} + 1296\,x_{2,n} + 1540\,x_{3,n}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де послідовності визначені вище.

Наведемо перші 100 членів деякого розв’язку рівняння (3.9). Оберемо у ньому $X_{1,0} = X_{1,1} = X_{1,2} = X_{1,3} = 0, X_{1,4} = 1$, отримаємо розв'язок рівняння (3.9), що обчислений за допомогою програми із додатку А: 0, 0, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 0. Спостерігається повторюваність із періодом 10, що узгоджується з гіпотезою 1.2.

ВИСНОВКИ

У роботі отримані наступні результати:

- Доведено критерій розв'язності лінійного різницевого рівняння скінченного порядку над кільцем лишків за модулем, що є вільним від квадратів.
- Наведено алгоритм розв'язання деяких лінійних різницевих рівнянь над кільцем лишків.
- Наведено приклади побудови розв'язків за допомогою даного алгоритму.
- Висунуто гіпотезу щодо періодичності розв'язків рекурентного рівняння над кільцем лишків і перевірено її для декількох випадків.
- У подальших дослідженнях планується вивчити лінійне різницеве рівняння скінченного порядку над іншими комутативними кільцями і спробувати узагальнити наразі наявні результати на випадок довільного порядку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Martseniuk V., Gefter S., Piven' A. Uniqueness Criterion and Cramer's Rule for Implicit Higher Order Linear Difference Equations Over Z. Progress on Difference Equations and Discrete Dynamical Systems. ICDEA 2019. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 341. Springer, Cham. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-60107-2_16

2. Марценюк В.В. Чи існують нетривіальні неявні узагальнені числа Фібоначчі? Конкурс науково-дослідницьких робіт МАН (Харків – Київ) відділення: математика, секція: математика, 2018–2019 навч. рік – 40 с.

3. Гуркіна О.М. "Періодичні та поліноміальні розв'язки неявного різницевого рівняння 1-го порядку". Конкурс науково-дослідницьких робіт МАН, Харків-Київ, відділення: математики, секція: математика, 2021–2022 навч. рік.

4. Сергушенков В.А. Вироджені геометричні прогресії у числових кільцях. Конкурс науково-дослідницьких робіт МАН, Харків — відділення: математика, секція: математика, 2021–2022 навч. рік.

5. M. V. Heneralov and A. L. Piven', Implicit Linear Difference Equation over Residue Class Rings, 2023. http://arxiv.org/abs/2301.13704.

6. Dummit D.S., Foote R.M.: Abstract Algebra. 3rd ed., John Wiley and Sons, Inc. (2004).

7. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір, — Х. : Гімназія, 2017. — 416 с. — іл.

8. Z. Eva, G. Hermann, Computing the Cycle Structure of Finite Linear Systems, IFAC PapersOnLine 53-2 (2020), Legrstuhl D für Mathematik, RWTH Aechen University, 52062 Aachen, German, 2020. — p. 4316–4321.

ДОДАТКИ

Додаток А

Лістинг програми для знаходження перших членів розв'язку лінійного рекурентного рівняння над кільцем лишків

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: utf-8 -*-
# Provide function: `recurrence`

import math  # reserve
from functools import cache as f_cache

__import__("sys").setrecursionlimit(100_000)

@f_cache
def _recurrence(n, ai, order, _base, fn):
    # Internal function
    if 0 <= n < order:  # Базовий випадок
        return _base[n]
    return sum(ai[i]*_recurrence(n-i-1, ai, order, _base, fn=fn) for i
in range(order)) + fn(n)

def recurrence(n: int, ai: 'Items' = 'auto', order: int = 'auto',
_base='default', fn: 'Seq' = 0, pmod: int = 0):
    """Приклад: _20fibs = list(map(lambda n: recurrence(n, order=2),
range(20)))"""
    if order == 'auto' and ai == 'auto':
        raise TypeError("Input ai::tuple")
    if order == 'auto':
        order: int = len(ai)
    if ai == 'auto':
        ai = (1,)*order
    else:
        assert len(ai) <= order
    ai: tuple = tuple(ai)
    assert type(order) is int
    if _base == 'default': _base = tuple([0]*(order-1) + [1])
    if type(fn) is int or type(fn) is float:  # type() is "Number"
        _fn = fn
        fn = lambda _: _fn
    return (a := _recurrence(n, ai, order, _base, fn)) % pmod if pmod
else a
```

Додаток Б

Лістинг програми, що встановлює періодичність скінченної послідовності $\{X_n\}_{n=0}^{N}$ для малого N

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: utf-8 -*-
# Provide function: `search_period`

import math  # reserve
from functools import cache as f_cache

__import__("sys").setrecursionlimit(100_000)

def search_period(seq: 'function', modulo: int, minperiod=10,
numiters=1):
    # Hints:
    # * numiters=1 seems to be usually enough
    # * minperiod is better to set at least to order+2
    # * minperiod defaults 10. Period may be less!
    period = minperiod
    cond = lambda _from, period: any((seq(n+period) - seq(n)) % modulo
for n in range(_from, _from+period))
    for i in range(numiters):
        while cond(minperiod+i*period, period):
            period += 1
            if not period % 100: print(f'currently validating period
{period}')
        print('#{} finished on {}'.format(i, period))
                        return period
```