Міністерство освіти і науки України
Департамент науки і освіти Харківської облдержадміністрації
Комунальний заклад «Харківська обласна Мала академія наук
Харківської обласної ради»

Відділення: математики
Секція: математика

СТАЛА ЕЙЛЕРА-МАСКЕРОНІ ДЛЯ МОНОТОННОЇ ФУНКЦІЇ

Роботу виконала:
Гончаренко Альона Віталіївна, учениця 10 класу Комунального закладу «Харківський ліцей № 47 Харківської міської ради», вихованка Комунального закладу «Харківська обласна Мала академія наук Харківської міської ради Харківської області»
Наукові керівники:
Гефтер Сергій Леонідович, в.о. завідувача кафедри фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Ткаленко Олена Володимирівна, вчитель математики Комунального закладу «Харківський ліцей № 47 Харківської міської ради», спеціаліст вищої категорії, вчитель-методист

Харків – 2024

СТАЛА ЕЙЛЕРА-МАСКЕРОНІ ДЛЯ МОНОТОННОЇ ФУНКЦІЇ

Гончаренко Альона Віталіївна; Харківське територіальне відділення МАН України, Комунальний заклад «Харківська обласна Мала академія наук Харківської обласної ради», Комунальний заклад «Харківський ліцей № 47 Харківської міської ради», 10 клас, м. Харків;

Гефтер Сергій Леонідович, в.о. завідувача кафедри фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, кандидат фізико-математичних наук, доцент;;

Ткаленко Олена Володимирівна, вчитель математики Комунального закладу «Харківський ліцей № 47 Харківської міської ради», спеціаліст вищої категорії, вчитель-методист

Метою даної роботи було дослідити питання про скінченність аналога сталої Ейлера-Маскероні для спадаючих та зростаючих неперервних функцій.

Основні результати дослідження:

1. Досліджено поняття сталої Ейлера-Маскероні для спадаючих додатних неперервних функцій.

2. Отримано просте й прозоре доведення скінченності сталої Ейлера-Маскероні для спадаючих додатних неперервних функцій, що використовує тільки елементарні властивості числових рядів.

3. Отримана формула для наближеного обчислення сталої Ейлера-Маскероні для спадаючих додатних неперервних функцій з оцінкою абсолютної похибки. Складена програма на мові С++ для наближеного обчислення, та знайдено значення сталої Ейлера-Маскероні для функції з точністю до 10^{-5}.

4. Введено поняття сталої Ейлера-Маскероні для зростаючих необмежених неперервних функцій та доведено нескінченність цієї сталої для функцій $f(x) = x^{\alpha}, \alpha > 0$ і $f(x) = \ln x$.

5. Побудовано приклад зростаючої необмеженої функції, для якої стала Ейлера-Маскероні буде скінченною.

Елементи наукової новизни полягають у тому, що у роботі введені загальні поняття сталої Ейлера-Маскероні для зростаючих неперервних функцій, можливо, вперше доведена нескінченність цієї сталої для функцій

$$f(x) = x^{\alpha}, \alpha > 0 \text{ і } f(x) = \ln x,$$

та побудовано приклад зростаючої необмеженої функції, для якої стала Ейлера-Маскероні буде скінченною.

Ключові слова: спадаюча функція, зростаюча функція, неперервна функція, стала Ейлера-Маскероні

ЗМІСТ

ВСТУП

Стала Ейлера-Маскероні з'являється у багатьох розділах математичного аналізу (див., наприклад, [4], розділ 5.3, [5]). За своїм походженням вона пов'язана з гармонічним рядом та логарифмічною функцією (див. [3], стор. 227 та розділ 2 даної роботи). Тому стандартне доведення існування сталої Ейлера-Маскероні проводиться із застосуванням спеціальних властивостей логарифма ([3], стор. 227). З іншого боку, стала Ейлера-Маскероні має прозорий геометричний зміст. Вона дорівнює нескінченній сумі площ малих криволінійних трапецій, що обмежені знизу графіком функції $f(x) = \frac{1}{x}$ (на рис. 2.1 вони відмічені світло-зеленим кольором).

У представленій роботі досліджено загальне поняття сталої Ейлера-Маскероні для спадаючої додатної неперервної функції та отримано просте доведення її існування, що використовує тільки елементарні властивості числових рядів (див. означення 2.2, наслідок 2.3 та друге доведення теореми 2.1). У третьому розділі роботи отримана формула для наближеного обчислення сталої Ейлера-Маскероні для спадаючих додатних неперервних функцій з оцінкою абсолютної похибки наближення. На мові C++ складена програма для наближеного обчислення, та знайдено значення сталої Ейлера-Маскероні для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ з точністю до 10^{-5}. У четвертому розділі введено поняття сталої Ейлера-Маскероні для зростаючих необмежених неперервних функцій (рис. 4.1) та доведено нескінченність цієї сталої для функцій $\ln x$ і $x^{\alpha}, \alpha > 0$ (теореми 4.4, 4.6). Можливо, що раніше такі обчислення не проводились. У роботі також побудовано приклад зростаючої необмеженої функції, для якої стала Ейлера-Маскероні буде скінченною (приклад 4.7).

Актуальність дослідження: полягає в тому, що, незважаючи на дослідження сталої Ейлера-Маскероні, що проводились, починаючи з 18 ст., у літературі відсутнє просте й прозоре викладення відповідної теорії для довільної спадаючої функції, яке базується тільки на використанні елементарних властивостей числових рядів. Крім того, до цього не вивчався аналог сталої Ейлера-Маскероні для зростаючої необмеженої функції.

Мета роботи: метою даної роботи було дослідити питання про скінченність аналога сталої Ейлера-Маскероні для спадаючих та зростаючих неперервних функцій.

Для досягнення поставленої мети були поставлені такі **завдання:**

1. Ознайомитись з розділами математичного аналізу, що пов'язані з класичною сталою Ейлера-Маскероні.

2. Довести існування аналога сталої Ейлера-Маскероні для спадаючих додатних неперервних функцій.

3. Отримати формулу для наближеного обчислення аналога сталої Ейлера-Маскероні для спадаючих додатних неперервних функцій, написати на мові С++ відповідну програму, та наближено обчислити цю сталу для функції $f(x)=1/\sqrt{x}$.

4. Дослідити питання про скінченність аналога сталої Ейлера-Маскероні для зростаючих неперервних функцій.

Практичне значення роботи: результати роботи можна використовувати при викладанні елементів математичного аналізу в математичних класах ліцеїв та на перших курсах університетів.

Елементи наукової новизни полягають у тому, що у роботі введено загальне поняття сталої Ейлера-Маскероні для зростаючих неперервних функцій, можливо, вперше доведена нескінченність цієї сталої для функцій $f(x) = x^{\alpha}, \alpha > 0$ і $f(x) = \ln x,$ та побудовано приклад зростаючої необмеженої функції, для якої стала Ейлера-Маскероні буде скінченною.

Об'єкт дослідження – стала Ейлера-Маскероні для спадаючих та зростаючих неперервних функцій.

Предметом дослідження – питання про скінченність аналога сталої Ейлера-Маскероні для спадаючих та зростаючих неперервних функцій.

Методи дослідження: загальні методи математичного аналізу, елементарні методи теорії числових рядів.

РОЗДІЛ 1
ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Границя числової послідовності [3, Глава 6]

Означення 1.1.1

Число a називають границею числової послідовності (a_n), якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий номер n_0, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

Теорема 1.1.2

Теорема Вейєрштрасса. Кожна зростаюча і обмежена зверху (спадна й обмежена знизу) послідовність має скінченну границю.

Означення 1.1.3

Нехай (x_n) – числова послідовність. Говорять, що послідовність (x_n) прямує до $+\infty$, якщо виконується наступна умова: для довільного числа $E > 0$ існує такий номер $n_E \epsilon \mathbb{N}$, що для будь-якого більшого номера $(n > n_E)$ виконується нерівність $x_n > E$.

1.2. Границя та неперервність функції [3, Глава 6]

Означення 1.2.1

Число a називають границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \dots\ x_n, \dots$ значень арумента функції f таких, $x_n \neq x_0$, для всіх $n \in \mathbb{N}$, відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значень функції збігається до числа a.

Означення 1.2.2

Функцію f називають неперервною в точці x_0, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_{2,\dots} x_{n,\dots}$ значень арумента функції f відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значень функції збігається до числа $f(x_0)$.

1.3. Число Ейлера [3, §5]

Означення 1.3.1

Число e або число Ейлера – це фундаментальна математична константа, що є основою натурального логарифма. Її значення дорівнює приблизно 2,71828. Число e визначається як наступна границя: $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Цей вираз бере свій початок із вивчення складних відсотків.

1.4. Числові ряди [3, Глава 7]

Означення 1.4.1

Нехай $\{a_n; n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел. Числовим рядом називають такий вираз:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Таким чином, числовий ряд – це формально нескінченна сума.

Але цей вираз поки що точного сенсу не має, бо нескінченну кількість додавань здійснити не можна.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Число a_n називається n-им членом, а число s_n – n-ою частковою сумою числового ряду (1) і позначається символом:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n.$$

Якщо послідовність (s_n) прямує до певного дійсного числа, то ряд називають збіжним, якщо ж вона не має скінченної границі, то такий ряд є розбіжним.

Теорема 1.4.2

Якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

збігається, то $a_n \to 0, n \to \infty$.

Теорема 1.4.3

Якщо ряд (1.1) збігається, то

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} \to 0, n \to \infty \ .$$

Приклад

Гармонічний ряд. Так називається ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Доведемо, що цей ряд розбігається. Використаємо теорему 1.4.3. При $n \geq 0$:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Отже$s_{2n} - s_n$ не прямує до 0. Оскільки послідовність $\{s_n : n \geq 1\}$ зростає і не має границі, то $s_n \to +\infty$, $n \to \infty$. Проте, зростання s_n із зростанням n відбувається дуже повільно. Треба звернути увагу, що члени гармонічного ряду збігаються до 0.

Ознаки порівняння рядів

Припустимо, що члени рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{1.2}$$

задовольняють умову: $0 \leq a_n \leq b_n, n \leq 1$. Тоді із збіжності ряду (1.2) випливає збіжність ряду (1.1) (із розбіжності ряду (1.2) випливає розбіжність ряду (1.1).

Критерій збіжності рядів

Нехай члени ряду $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ (1.1) задовольняють умову $\forall n \epsilon \mathbb{N}: a_n \geq 0$. Ряд (1.1) збігається тоді і тільки тоді, коли послідовність його часткових сум $\{s_n : n \geq 1\}$ обмежена.

Якщо $a_n \geq 0$ і ряд (1.1) розбігається, то $s_n \to +\infty$. Тому природньо вважати, що в цьому випадку

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

РОЗДІЛ 2
ІСНУВАННЯ СТАЛОЇ ЕЙЛЕРА-МАСКЕРОНІ

Теорема 2.1

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[1;+\infty)$, спадаюча на цьому проміжку, є неперерною, приймає лише додатні значення на цьому проміжку та $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Для $1 \le a < b$ позначимо за $S_{[a;b]}(f)$ площу криволінійної трапеції, що відповідає графіку функції на проміжку $[a;b]$. Тоді існує скінченна границя

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(f(1)+f(2)+\cdots+f(n)-S_{[1;n+1]}(f)\Big). \tag{2.1}$$

Наведемо два доведення цієї теореми. У першому з них безпосередньо використовується теорема Вейєрштрасса про монотонне обмеження послідовності Друге доведення є більш коротким та прозорим і використовує лише загальні прості твердження з теорем числових рядів (див. п. 1.4).

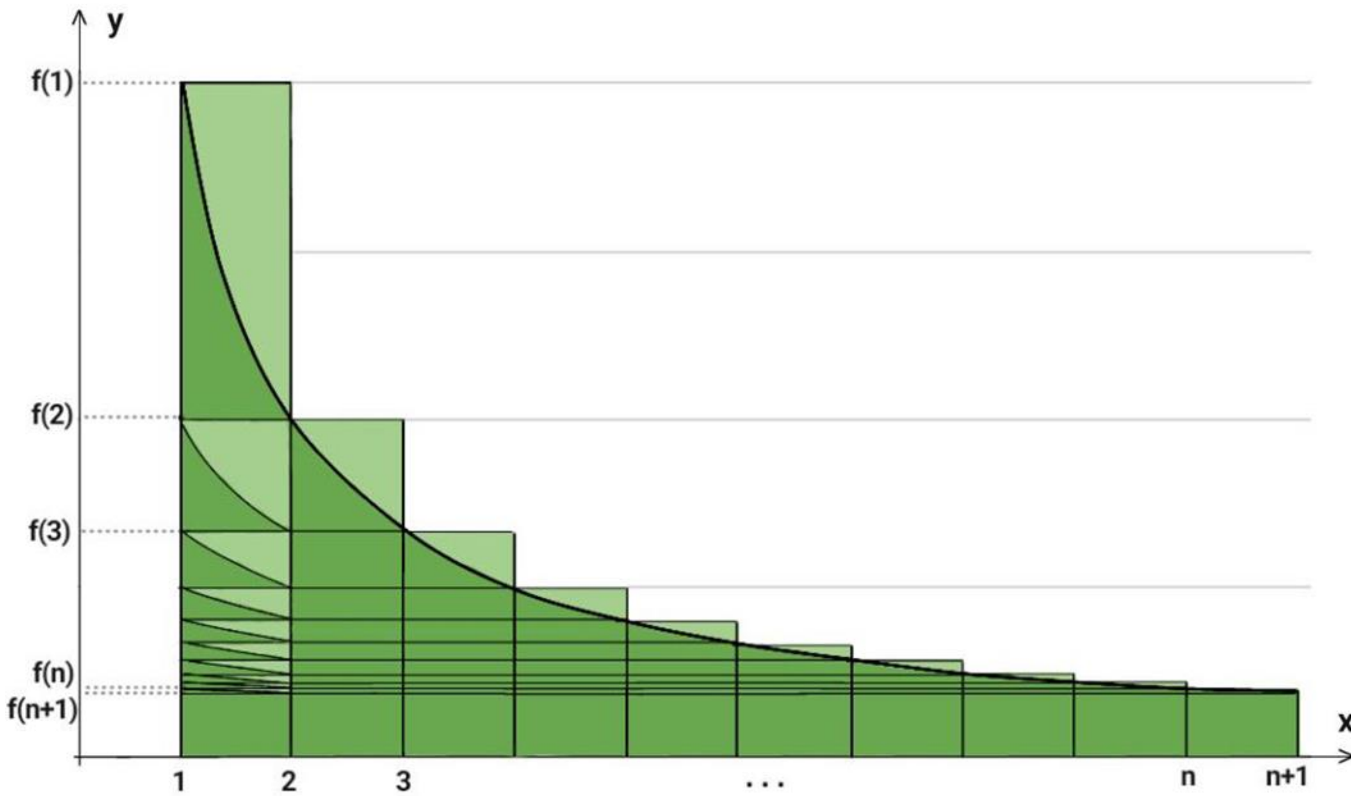

Рис. 2.1

Перше доведення

Розглянемо послідовність $x_n = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) - S_{[1;n+1]}(f)$ та покажемо, що ця послідовність зростає і обмежена зверху.

Оскільки $S_{[1;n+1]}(f) = S_{[1;2]}(f) + S_{[2;3]}(f) + \cdots + S_{[n;n+1]}(f)$, то

$x_n = \left(f(1) - S_{[1;2]}(f)\right) + \left(f(2) - S_{[2;3]}(f)\right) + \cdots + \left(f(n) - S_{[n;n+1]}(f)\right).$

Відмітимо, що $f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n) -$ це площі прямокутників, основами яких є відрізки $[1; 2], [2; 3], [3; 4], \dots, [n; n+1]$, а висоти – це значення функції f у натуральних точках $1, 2, 3, \dots, n$. Оскільки функція f спадає на проміжках $[1; 2], [2; 3], [3; 4], \dots, [n; n+1]$, то всі доданки у сумі x_n є додатними (див. рис. та властивості інтеграла [3, §3, п. 3.2]). Тому послідовність x_n є зростаючою. З іншого боку, всі доданки $f(2) - S_{[2;3]}(f)$, $f(3) - S_{[3;4]}(f)$, …, $f(n) - S_{[n;n+1]}(f)$ є площами малих криволінійних трапецій, які після паралельного переносу можна розмістити у прямокутнику з основою $[1,2]$ і висотою $f(1)$ (на рис. 2.1 вони відмічені світло-зеленим кольором).

З огляду на це, отримуємо, що $x_n < f(1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, послідовність x_n зростає і обмежена зверху. Тому за теоремою Вейєрштраса вона має скінченну границю.

Друге доведення

Існування скінченої границі (3) еквівалентно збіжності наступного ряду:

$$\left(f(1) - S_{[1;2]}(f)\right) + \left(f(2) - S_{[2;3]}(f)\right) + \left(f(3) - S_{[3;4]}(f)\right) + \cdots, \qquad (2.2)$$

доданки якого є площами малих криволінійних трапецій (рис. 1). Тобто $\gamma(f)$ є сумою площ всіх малих криволінійних трапецій, що виділені на рис. 2.1 світло-зеленим кольором.

Відмітимо, що n-та мала криволінійна трапеція міститься у прямокутнику

$$Q_n = \{(x; y): x \epsilon [n: n+1], y \in [f(n+1); f(n)]\}.$$

Тому

$$f(n) - S_{[n;n+1]}(f) \leq f(n) - f(n+1),$$

а ряд $\big(f(1) - f(2)\big) + \big(f(2) - f(3)\big) + \cdots + \big(f(n) - f(n+1)\big) + \cdots$ збігається, оскільки $f(n) \to 0$.Тому за ознакою порівняння буде збігатися і ряд (4).

Теорему доведено.

Означення 2.2

Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє всі умови з теореми 2.1.

Сталою Ейлера-Маскероні $\gamma(f)$ для функції f будемо називати границю:

$$\gamma(f) = \lim_{n\to\infty}\Big(f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - S_{[1;n+1]}(f)\Big).$$

Відмітимо, що існування такої сталої гарантується теоремою 2.1.

Наслідок 2.3

Якщо функція f задовольняє всі умови з теореми 2.1, то

$$\gamma(f) = \Big(f(1) - S_{[1;2]}(f)\Big) + \Big(f(2) - S_{[2;3]}(f)\Big) + \cdots + \Big(f(n) - S_{[n;n+1]}(f)\Big) + \cdots.$$

Приклад 2.4

Класична константа Ейлера-Маскероні [3, стор. 227]

Класичною константою Ейлера-Маскероні буде константа Ейлера-Маскероні для функції $f(x) = \frac{1}{x}$. Маємо:

$$S_{[1;n+1]}(f) = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x|_1^{n+1} = \ln(n+1).$$

Тому:

$$\gamma(f) = \lim_{n\to\infty}\Big(f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - S_{[1;n+1]}(f)\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right).$$

Відмітимо, що $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \ln 1 = 0$.

Тому $\gamma(f) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$.

Приклад 2.5

Константа Ейлера-Маскероні для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Формула знаходження площі криволінійної трапеції під графіком $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на проміжку $[1; n+1]$:

$$S_{[1:n+1]}(f) = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^{n+1} = 2\sqrt{n+1} - 2.$$

Функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ відповідає всім умовам з теореми 2.1, отже, існує така границя:

$$\gamma(f) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - (2\sqrt{n+1} - 2)\right).$$

У наступному розділі ми знайдемо наближене значення константи Ейлера-Маскероні для $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Варто відзначити, що у прикладах 2.3 і 2.4

$$\lim_{n\to\infty}\big(f(1) + f(2) + \cdots + f(n)\big) = +\infty.$$

З урахуванням теореми 2.1, для доведення цього достатньо перевірити, що

$$\lim_{n\to\infty} S_{[1;n+1]}(f) = +\infty.$$

У прикладі 2.3 маємо, що $f(x) = \frac{1}{x}$,

$$S_{[1;n+1]}(f) = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x|_1^{n+1} = \ln(n+1) \to +\infty.$$

Таким чином

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

(це вже було доведено іншим методом у розділі 1.4.).

Аналогічно, у прикладі 2.4 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$S_{[1:n+1]}(f) = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^{n+1} = 2\sqrt{n+1} - 2 \to +\infty.$$

Розглянемо таку ситуацію, коли константа Ейлера-Маскероні може бути знайдена більш просто.

Наслідок 2.6

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\big(f(1)+f(2)+\dots+f(n)\big)$, то існує і скінченна границя

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{[1;n+1]}(f)$ і $\gamma(f)=\lim\limits_{n\to\infty}\big(f(1)+f(2)\dots+f(n)\big)-\lim\limits_{n\to\infty} S_{[1;n+1)}(f)$.

Доведення

За теоремою 2.1 існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+\dots+f(n)-S_{[1;n+1]}(f)\right)$$

Оскільки $S_{[1;n+1]}(f)$=

= $f(1)+f(2)+\dots+f(n)-\left(f(1)+f(2)+\dots+f(n)--S_{[1;n+1]}(f)\right)$,

то за теоремою про границю різниці, існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_{[1;n+1)}(f)$.

Тепер ми ще раз застосовуємо теорему про границю різниці і отримуємо, що:

$$\gamma(f)=\lim_{n\to\infty}\big(f(1)+f(2)+\dots+f(n)\big)-\lim_{n\to\infty} S_{[1;n+1]}(f).$$

Приклад 2.7

Константа Ейлера-Маскероні для функції $f(x)=\frac{1}{\mathrm{x}^2}$

Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\big(f(1)+f(2)+\dots+f(n)\big)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=$$

$=\frac{\pi^2}{6}$ [див. 4, ст. 269],

$$\lim_{n\to\infty} S_{[1;n+1]}=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Тому: $\gamma(f)=\frac{\pi^2}{6}-1\approx 0{,}64493$.

Приклад 2.8

Константа Ейлера-Маскероні для функції $f(x)=e^{-x}$

Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\big(f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\big)=\lim_{n\to\infty}(e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-n})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{1}{\mathrm{e}^2}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^n}\right)=\frac{\frac{1}{\mathrm{e}}}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}},$$

$$\lim_{n\to\infty}S_{[1;n+1]}=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-x}\big|_1^{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-(n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Тому:

$$\gamma(f)=\frac{1}{\mathrm{e}-1}-\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)}.$$

Оскільки e $\approx 2{,}718282,$ то $\gamma\approx 0{,}21409.$

Приклад 2.9

Константа Ейлера-Маскероні для функції $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\big(f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\big)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{[1:n+1]}(f)\right)=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1}\frac{dx}{x(x+1)}=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(lnx|_1^{n+1}-ln(x+1)|_1^{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(ln\frac{n+1}{n+2}+ln\,2\right)=ln\,2,$$

тобто $\gamma(f)=1-\ln 2\approx 0{,}30685.$

РОЗДІЛ 3
НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ СТАЛОЇ ЕЙЛЕРА-МАСКЕРОНІ

Точне значення для сталої Ейлера-Маскероні для фунцції $f(x)$ дає границя

$$\gamma(f) = \lim_{n\to\infty}\Big(f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - S_{[1;n+1]}(f)\Big)$$

або сума ряду

$$\Big(f(1) - S_{[1;2]}(f)\Big) + \Big(f(2) - S_{[2;3]}(f)\Big) + \cdots + \Big(f(n) - S_{[n;n+1]}(f)\Big) + \cdots.$$

Але можна розглянути наближену формулу для її обчислення:

$$\gamma(f) \approx \ f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - S_{[1;n+1]}(f).$$

Оцінимо абсолютну похибку цієї формули.

Оцінка похибки

Відмітимо, що $\left|\gamma(f) - \Big(f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - S_{[1;n+1]}(f)\Big)\right| =$

$$= \gamma(f) - \Big(f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - S_{[1;n+1]}(f)\Big) =$$

$$= \Big(f(n+1) - S_{[\mathrm{n+1;n+2}]}(f)\Big) + \Big(f(\mathrm{n}+2) - S_{[\mathrm{n+2;n+3}]}(f)\Big) +$$

$$+ \Big(f(n+3) - S_{[n+3;n+4]}(f)\Big) + \cdots.$$

І це число дорівнює сумі площ малих криволінійних трапецій, що містяться у прямокутнику з основою $[1;2]$ і висотою $f(n+1)$, тому абсолютна похибка нашого наближеного значення не більше ніж $f(n+1)$.

Знаходження класичної сталої Ейлера-Маскероні

Спочатку знайдемо наближене значення класичної сталої Ейлера-Маскероні для декількох n.

Знаходити ми будемо за допомогою програми, написаною мовою C++.

```cpp
#include <iostream>

#include <iomanip>

#include <cmath>

using namespace std;

int main()
{
    double n,k;                          // оголошуємо змінні: n-кількість значень функції, f-значення функції
    cin>>n;                              // вводимо з клавіатури число n (n→+∞)
    double c=0.0;                        // оголошуємо змінну, у якій буде зберігатися сума значень функції
    for (int i=1;i<=n;++i){              // додаємо цикл, який допоможе порахувати сумму значень функції на проміжку [1;n]
        k=1.0/i;                         // вираховуємо значення функції f при x=i
        c+=k;                            // додаємо це значення до суми
    }                                    // закінчуємо цикл
    cout<<setprecision(40)<<c-log(n+1);// рахуємо за формулою сталу Ейлера-Маскероні та виводимо її на екран

    return 0;
}
```

Рис. 3.1

Результати цієї програми

Значення числа n	1000	10000	100000	1000000
Стала для цього числа	0.576716	0.577165	0.577210	0.57721

Рис. 3.2

Для значення $n=10^6$ абсолютна похибка в даному випадку не перевищує $f(n+1) = f(10^6+1) \approx 10^{-6}$.

Знаходження сталої Ейлера-Маскероні для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Сталу для f(x)=1/√x також будемо знаходити за допомогою програми на мові C++, для декількох n,, де найбільш точним значенням буде наближена стала для $n=10^{10}$.

```cpp
#include <iostream>

#include <iomanip>

#include <cmath>

using namespace std;

int main()
{
    long double n,f;                     // оголошуємо змінні: n-кількість значень функції, f-значення функції
    cin>>n;                              // вводимо з клавіатури число n (n→+∞)
    long double sum=0.0;                 // оголошуємо змінну, у якій буде зберігатися сума значень функції
    for (long long int i=1;i<=n;++i){    // додаємо цикл, який допоможе порахувати сумму значень функції на проміжку [1;n]
        f=1.0/sqrt(i);                   // вираховуємо значення функції f при x=i
        sum+=f;                          // додаємо це значення до суми
    }                                    // закінчуємо цикл
    cout<<setprecision(40)<<sum-2*sqrt(n+1)+2;// рахуємо за формулою сталу Ейлера-Маскероні та виводимо її на екран

    return 0;

}
```

Рис. 3.3

Результати:

Значення числа n	10000000	100000000	1000000000	1000000000(
Стала для цього числа	0.53948	0.53959	0.53962	0.5396

Рис. 3.4

Для значення n=10^{10} абсолютна похибка в даному випадку не перевищує $f(n+1) = f(10^{10}+1) \approx \frac{1}{\sqrt{10^{10}}} = 10^{-5}$.

РОЗДІЛ 4
ВИПАДОК ЗРОСТАЮЧОЇ ФУНКЦІЇ

Розглянемо випадок, коли функціє не є спадною, а навпаки, є зростаючою. Ми не знаємо, чи існує аналог сталої Ейлера-Маскероні взагалі, отже дослідимо це на прикладах декількох функцій.

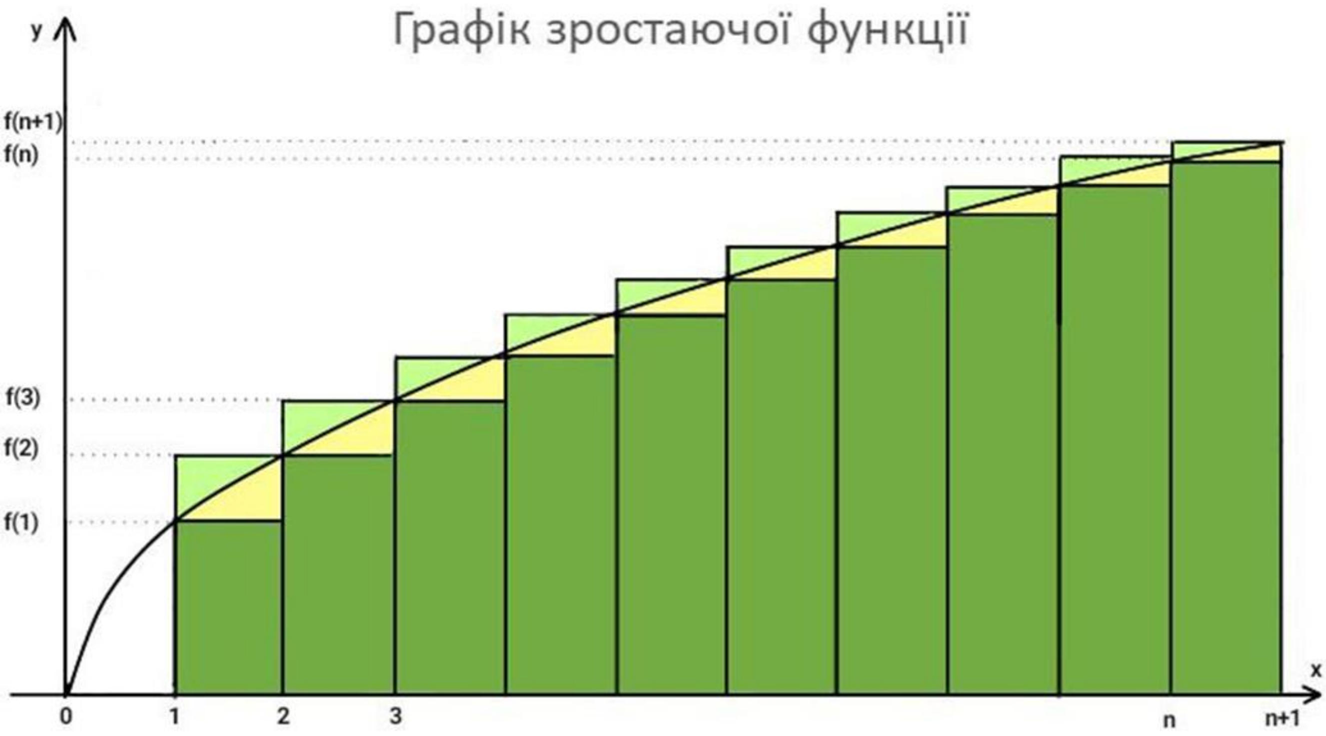

Рис. 4.1

Сталою Ейлера-Маскероні, за умови що вона існує, для зростаючої функції природньо вважати таку границю:

$$\gamma(f) = \lim_{n\to\infty} \Big(f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(n+1) - S_{[1;n+1]}(f)\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \big(f(k+1) - S_{[k;k+1]}\big).$$

Тобто це буде сума площ малих криволінійних трапецій, що позначені на малюнку світло-зеленим кольором.

Маємо два варіанти: коли ця функція обмежена зверху, і коли прямує до $+\infty$.

Випадок, коли функція обмежена зверху деяким числом b

Якщо функція $f(x)$ обмежена зверху деяким числом b, то можна довести, що стала Ейлера-Маскероні буде існувати і дорівнюватиме сталій для функції $g(x) = -f(x) + b$, що спадає і є додатною.

Але більш цікавим є випадок, коли функція не обмежена зверху.

Випадок, коли функція $f(x)$ не обмежена зверху

Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна на проміжку $[1; +\infty)$, зростає на цьому проміжку і $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Зразу відмітимо різницю між зростаючими та спадаючими функціями (див. друге доведення, теореми 2.1).

Теорема 4.1

Розглянемо прямокутник P_k=$\{(x, y): k \le x \le k+1, f(k) \le y \le f(k+1)\}$, де $k = 1,2, \dots n$. Тоді сума площ всіх цих прямокутників нескінченна, тобто

$$S(P_1) + S(P_2) + \dots + S(P_n) \to +\infty.$$

Доведення

Тепер маємо

$$S(P_1) + S(P_2) + \dots + S(P_n) = f(2) - f(1) + f(3) - f(2) + \dots + f(n+1) - f(n) =$$
$$= f(n+1) - f(1) \to +\infty.$$

Приклад 4.2

Стала Ейлера-Маскероні для функції $f(x) = x$

Функція $f(x) = x$ є, мабуть, найпростішою зростаючою функцією.

Стала Ейлера-Маскероні буде у даному випадку дорівнювати сумі площ n рівнобедрених прямокутних трикутників з одиничними катетами і площами, що дорівнюють 0,5.

Отже $\gamma(f) = \lim_{n\to\infty}(0.5n) = +\infty$.

Приклад 4.3

Стала Ейлера-Маскероні для функції $f(x) = \ln x$

Функція $f(x) = \ln x$ також є зростаючою, спробуємо знайти сталу Ейлера-Маскероні і для неї.

Теорема 4.4

Якщо $f(x) = \ln x$, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n+1) - S_{[n;n+1]}(f)\right)$ розбігається, тобто $\gamma(f) = +\infty$.

Доведення

Оскільки первісною для функції $f(x) = \ln x$ буде функція $F(x) = x\ln x - x$, то:

$$f(n+1) - S_{[n;n+1]}(f) = \ln(n+1) - \int_{n}^{n+1} \ln x \, dx = \ln(n+1) - (x\ln x - x)|_{n}^{n+1} =$$

$$= 1 - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Доведемо допоміжну нерівність $\ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ для $x > 0$.

Для цього розглянемо функцію $g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)$. Тоді

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2) = \frac{1 - (1 - x + x^2)(1 + x^2)}{1+x} = \frac{1 - (1 + x^3)}{1+x} = \frac{-x^3}{1+x}$$

тобто $g'(x) < 0$ для всіх $x > 0$. Тому функція $g(x)$ спадає на всьому проміжку $[0; +\infty)$.

Зокрема, $g(x) < g(0) = 0$, за умови, що $x > 0$.

Маємо:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right) < 0,$$

тобто

$$1 - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots < +\infty$, а $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = +\infty$, то ряд із загальним членом $\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2}$ розбігається. Тому за ознакою порівняння буде розбігатися і ряд з загальним членом $1 - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Теорему доведено.

Приклад

Стала Ейлера-Маскероні для функції $f(x) = \sqrt{x}$

Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$ і покажемо, що стала Ейлера-Маскероні для цієї функції також буде некінченною.

Теорема 4.5

Якщо $f(x) = \sqrt{x}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(f(n+1) - S_{[n;n+1]}(f)\right)$ розбігається, тобто $\gamma(f) = +\infty$.

Доведення

Маємо:

$$f(n+1) - S_{[n;n+1]}(f) = \sqrt{n+1} - \int\limits_{n}^{n+1} \sqrt{x}\, dx = \sqrt{n+1} - \frac{2}{3} x^{3/2}\Big|_{n}^{n+1} =$$

$$= \sqrt{n+1} - \frac{2}{3}\left((n+1)^{3/2} - n^{3/2}\right) = \sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1} - \frac{2}{3}\left(n^{3/3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2} - n^{3/2}\right) =$$

$$= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2n}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2} + \frac{2n}{3}\right) = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2n}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \frac{2n}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2n}{3}\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{3}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \frac{2n}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{n}\left(\frac{1-2n}{3}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \frac{2n}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{n}\left(\left(\frac{1}{2} - n\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}} + n\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{n}\left(n - \left(n - \frac{1}{2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{2}{3}n^{3/2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}n^{3/2}\frac{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(1 + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{1 + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}} =$$

$$= \frac{2}{3}n^{3/2}\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1 + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{2}{3}n^{3/2}\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1 + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}} =$$

$$= \frac{2}{3} n^{3/2} \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4n^3}\right)}{1 + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{2}{3} n^{3/2} \frac{\frac{3}{4n^2} - \frac{1}{4n^3}}{1 + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3n}}{1 + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}.$$

Таким чином, $f(n+1) - S_{[n;n+1]}(f) = \frac{1}{n} \cdot y_n$, де

$$y_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3n}}{1 + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{n}}},$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-0}{1+(1-0)\sqrt{1+0}} = \frac{1}{4}.$$

Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty \quad (\text{див. приклад } 2.5),$$

то за наслідком з ознаки порівняння ми отримуємо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n+1) - S_{[n;n+1]}(f)\right) = +\infty (\text{див. } [3], \text{стор } 226).$$

Теорему доведено.

Приклади 4.2 і 4.5 допускають наступне узагальнення.

Теорема 4.6

Якщо $f(x) = x^\alpha, \alpha > 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n+1) - S_{[n;n+1]}(f)\right)$ розбігається, тобто $\gamma(f) = +\infty$.

Доведення теореми базується на наступному допоміжному твердженні, при доведення якого, у свою чергу, використовується правило Лопіталя для знаходження границь функцій [3, теорема 1 на стор. 144].

Лема. Для кожного дійсного числа α є правильною наступна рівність $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n(\alpha)}{n^2}$, де $c_n(\alpha) \to \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$, $n \to \infty$.

Доведення леми. За допомогою правила Лопіталя отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}}{2}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1-\frac{\alpha}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1-\frac{\alpha}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2},$$

тобто

$$n^2\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{\alpha}-1-\tfrac{\alpha}{n}\right)=\tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}b_n(\alpha),\ \text{де}\ b_n(\alpha)\to 1.$$

Отже

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{\alpha}-1-\tfrac{\alpha}{n}=\tfrac{c_n(\alpha)}{n^2},\ \text{де}\ c_n(\alpha)=\tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}b_n(\alpha)\to\tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}.$$

Лему доведено.

Доведення теореми 4.6

Маємо:

$$f(n+1)-S_{[n;n+1]}(f)=(n+1)^{\alpha}-\int_n^{n+1}x^{\alpha}\,dx=(n+1)^{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\Big|_n^{n+1}=$$

$$=(n+1)^{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}((n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1})=$$

$$=n^{\alpha}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}\left(n^{\alpha+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}\right)=$$

$$=n^{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-\frac{n}{\alpha+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}+\frac{n}{\alpha+1}\right)=$$

$$=n^{\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{c_n(\alpha)}{n^2}-\frac{n}{\alpha+1}(1+\frac{\alpha+1}{n}+\frac{c_n(\alpha+1)}{n^2})+\frac{n}{\alpha+1}\right)=$$

$$=n^{\alpha}\left(\frac{\alpha}{n}-\frac{c_n(\alpha+1)}{(\alpha+1)n}+\frac{c_n(\alpha)}{n^2}\right)=n^{\alpha}\left(\frac{\alpha(\alpha+1)-c_n(\alpha+1)}{(\alpha+1)n}+\frac{c_n(\alpha)}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{n^{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha(\alpha+1)-c_n(\alpha+1)}{(\alpha+1)}+\frac{c_n(\alpha)}{n}\right)=\frac{d_n(\alpha)}{n^{1-\alpha}},$$

де $d_n(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha+1)-c_n(\alpha+1)}{(\alpha+1)} + \frac{c_n(\alpha)}{n} \to \frac{\alpha(\alpha+1)-\frac{(\alpha+1)\alpha}{2}}{(\alpha+1)} = \frac{\alpha}{2}$. Оскільки $\alpha > 0$, то $1-\alpha < 1$. З огляду на те, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ розбігається при $p \leq 1$, ми отримуємо за наслідком з ознаки порівняння $[3, \text{стор.} 226]$, що розбігається й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(\alpha)}{n^{1-\alpha}}$.

Теорему повністю доведено.

Наведемо тепер приклад зростаючої необмеженої функції, для якої стала Ейлера-Маскероні буде скінченною. Ця функція буде кусково-лінійною.

Приклад 4.7

На малюнку показано графік функції $f(x)$ на відрізку $[n; n+1]$. На цьому відрізку її можна визначити такими формулами:

$$f(x) = \begin{cases} n + (2^n - 1)(x - n), x \in \left[n; n + \frac{1}{2^n}\right] \\ n + \frac{2^n - 1}{2^n} + \frac{x - n - \frac{1}{2^n}}{2^n - 1}, x \in \left[n + \frac{1}{2^n}; n + 1\right] \end{cases}.$$

Відмітимо, що $f(n) = n$ і $f(n+1) = n+1$.

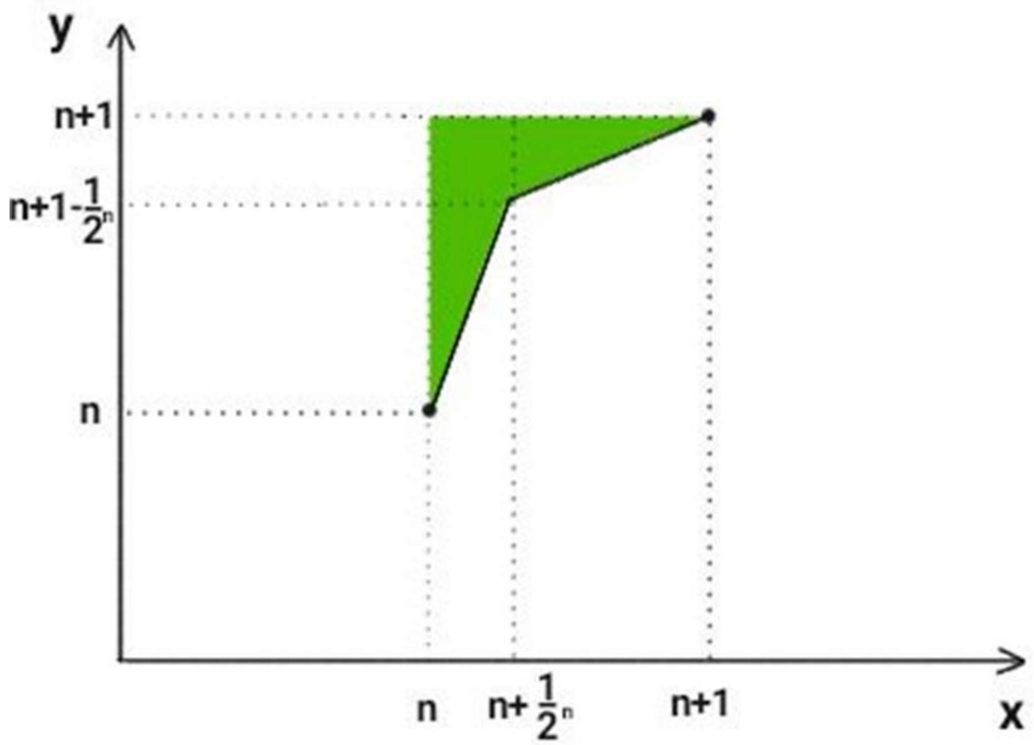

Рис. 4.2

Бачимо, що $f(n+1) - S_{[n;n+1]}(f)$ складається з площ двох рівних прямокутних трикутників та площі квадрата. Отже, маємо:

$$f(n+1) - S_{[n;n+1]}(f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n}.$$

Тому $\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(n+1) - S_{[n;n+1]}(f)\right) < +\infty$, тобто $\gamma(f)$ є скінченною.

ВИСНОВКИ

У представленій роботі отримані наступні результати:

1. Досліджено загальне поняття сталої Ейлера-Маскероні для спадаючих додатних неперервних функцій.

2. Отримано просте й прозоре доведення скінченності сталої Ейлера-Маскероні для спадаючих додатних неперервних функцій, яке використовує лише елементарні властивості числових рядів.

3. Отримана формула для наближеного обчислення сталої Ейлера-Маскероні для спадаючих додатних неперервних функцій, з оцінкою аболютної похибки. Написана програма на мові С++ для наближеного обчислення, із точністю до 10^{-5}.

4. Введено поняття сталої Ейлера-Маскероні для зростаючих додатних неперервних функцій, та доведено нескінченність цієї сталої для функцій

$$f(x) = x^{\alpha}, \alpha > 0 \text{ і } f(x) = \ln x.$$

5. Побудовано приклад зростаючої необмеженої функції, для якої стала Ейлера-Маскероні буде скінченною.

6. У подальших дослідженнях передбачається частково описати ті функції, для яких стала Ейлера-Маскероні є скінченною.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. А.Г. Мерзляк, Д.А., Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір., Алгебра і початки аналізу, проф. рівень, підручник для 10 класу. – Видавництво: Харків, “Гімназія” , 2018.

2. А.Г. Мерзляк, Д.А., Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір., Алгебра і початки аналізу, проф. рівень, підручник для 11 класу. – Видавництво: Харків, “Гімназія” , 2019.

3. Дороговцев А.Я., Математичний аналіз, ч. I . – К.; Либідь, 1994.

4. Дороговцев А.Я., Математичний аналіз, ч. I I . – К.; Либідь, 1994.

5. https://uk.wikipedia.org/wiki/Стала_Ейлера_—_Маскероні#cite_ref-47