

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

для практичних занять,
виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань,
самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

(розділ «СТАТИКА»)

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної форми навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології, 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 263 – Цивільна безпека, 275 – Транспортні технології (за видами))

**Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2024**

Методичні рекомендації для практичних занять, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань, самостійної роботи з навчальної дисципліни «Теоретична механіка» (розділ «Статика») (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної форми навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології, 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 263 – Цивільна безпека, 275 – Транспортні технології (за видами)) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : В. П. Шпачук, А. О. Гарбуз. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 47 с.

Укладачі: д-р техн. наук В. П. Шпачук,
канд. техн. наук А. О. Гарбуз

Рецензент

Т. О. Супрун, кандидат технічних наук, старший викладач кафедри теоретичної і будівельної механіки Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки, протокол № 10 від 19.06.2024

Методичні рекомендації призначені для здобувачів спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології, 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 263 – Цивільна безпека, 275 – Транспортні технології (за видами)). Подано стислий теоретичний матеріал із розділу «Статика», наведено задачі для самостійної роботи та приклади їх розв'язання, вимоги щодо оформлення, засоби та послідовність виконання завдань, список рекомендованих джерел.

ЗМІСТ

Загальні рекомендації.....	4
1 Рівновага плоскої системи сил	5
1.1 Проекція сили на вісь	5
1.2 Алгебраїчний момент сили відносно точки	5
1.3 Пара сил	6
1.4 Розподілені сили	6
1.5 Види в'язей у площині і напрям їх реакцій	7
1.6 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил	8
1.7 Методики розв'язання задач статки	9
1.8 Рівновага системи тіл	11
1.8.1 Завдання для роботи С1 «Визначення реакцій опор складеної конструкції»	14
1.9 Розрахунок плоскої ферми	18
1.9.1 Завдання для роботи С2 «Визначення реакцій опор і зусиль у стержнях плоскої ферми»	21
2 Рівновага просторової системи сил	25
2.1 Момент сили відносно осі	25
2.2 Умови рівноваги довільної просторової системи сил	25
2.3 Види в'язей у просторі і напрям їх реакцій	26
2.4 Визначення реакцій опор твердого тіла	27
2.4.1 Завдання для роботи С3 «Визначення реакцій опор твердого тіла».....	28
2.5 Визначення реакцій стержнів, які підтримують горизонтальну плиту.....	33
2.5.1 Завдання для роботи С4 «Визначення реакцій стержнів, які підтримують горизонтальну плиту».....	35
3 Методичні рекомендації щодо використання ПЕОМ при виконанні розрахунково-графічних завдань «Визначення реакцій опор складеної конструкції» та «Визначення реакцій опор і зусиль у стержнях плоскої ферми».....	39
3.1 Методологія розрахунків	39
3.2 Запуск програми <i>OpenOffice.org Calc</i>	41
3.3 Збереження робочого файлу	41
3.4 Підготовка початкових даних	41
3.5 Обчислення оберненої матриці $[A]^{-1}$	42
3.6 Обчислення значень матриці-стовпця шуканих реакцій опор $[X]$	42
3.7 Збереження файлу з розрахунками на жорсткому диску	43
3.8 Оформлення результатів розрахунків	43
Список рекомендованих джерел	44
Додаток А	45

ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

Ці методичні рекомендації використовуються викладачем під час вивчення курсу теоретичної механіки при проведенні практичних занять і контрольних робіт, а студентами – у процесі самостійної роботи при виконанні розрахунково-графічних завдань.

Терміни здачі завдань і номери варіантів указуються викладачем у плані-графіку виконання самостійної роботи. При розв'язанні задачі, зазначеної в завданні, потрібно використовувати конспект лекцій, рекомендовану літературу і відповідні методичні рекомендації.

Виконуючи розрахунково-графічне завдання, необхідно добре засвоїти основні визначення, положення і відповідні теореми розділу 1.

Під час задачі кожного завдання студент повинен пояснити порядок виконання задачі, знати й чітко формулювати теоретичний матеріал, пов'язаний із розрахунком, уміти розв'язати подібну задачу.

Розрахунково-графічне завдання потрібно оформляти на стандартних аркушах паперу формату А4 (розмір 210 мм × 297 мм) з такими полями: зліва – 20 мм, справа, зверху і знизу – по 5 мм. Записи потрібно робити тільки з одного боку аркуша. На першому аркуші вказати прізвище, групу і номер варіанта, викреслити розрахункову схему і записати умову задачі. Розв'язання задачі навести далі і на наступних аркушах з короткими поясненнями. Зробити перевірку результатів. У кінці навести результати розрахунку.

Наприкінці семестру до всіх розрахунково-графічних завдань потрібно додати титульний аркуш, зброшурувати їх і здати викладачеві.

1 РІВНОВАГА ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ

1.1 Проекція сили на вісь

Проекція сили на вісь – алгебраїчна величина, що дорівнює довжині відрізка між проекціями початку і кінця сили на цю вісь. Проекція має знак «+», якщо вектор сили нахилений у бік додатного напрямку осі, і знак «-», якщо в бік від’ємного напрямку, наприклад (рис. 1.1): $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = -F \sin \alpha$, $T_x = 0$, $T_y = T$.

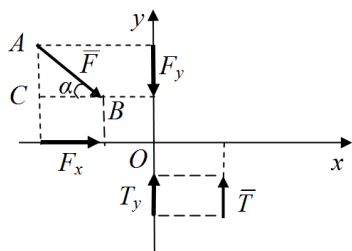


Рисунок 1.1

Величина проекції сили визначається рішенням трикутника ABC , який утворюється початковою силою і лініями, паралельними осям координат. Якщо сила перпендикулярна до осі, то її проекція на цю вісь дорівнює нулю.

Якщо сила розміщується у просторі, то її проекції визначаються так (рис. 1.2):

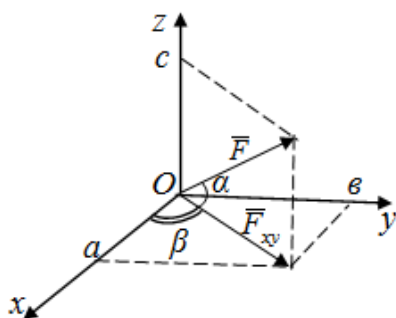


Рисунок 1.2

$$F_x = 0a = F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta,$$

$$F_y = 0b = F_{xy} \cdot \sin \beta = F \cos \alpha \sin \beta,$$

$$F_z = 0c = F \sin \alpha.$$

1.2 Алгебраїчний момент сили відносно точки

При розв’язанні задач у площині S використовують поняття алгебраїчного моменту сили відносно точки.

Правило визначення алгебраїчного моменту $M_0(\vec{F})$ сили \vec{F} відносно точки (O) (рис. 1.3):

- 1) провести лінію дії сили (пряма DE);
- 2) із вибраної точки O провести перпендикуляр на лінію дії сили (його довжина h – плече сили);
- 3) скласти добуток модуля сили на плече ($F \cdot h$);
- 4) обрати знак «+», якщо сила прагне обертати плече сили відносно точки O проти руху годинникової стрілки, і знак «-», якщо за рухом стрілки годинника:

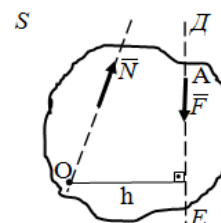


Рисунок 1.3

$$M_0(\vec{F}) = -F \cdot h.$$

Алгебраїчний момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку (тоді плече $h = 0$) і $M_0(\vec{N}) = 0$.

1.3 Пара сил

Парою сил називається система двох сил у площині S , які рівні за величиною, протилежно направлені і не лежать на одній лінії дії.

Схематичне позначення моменту пари сил подане на рисунку 1.4.

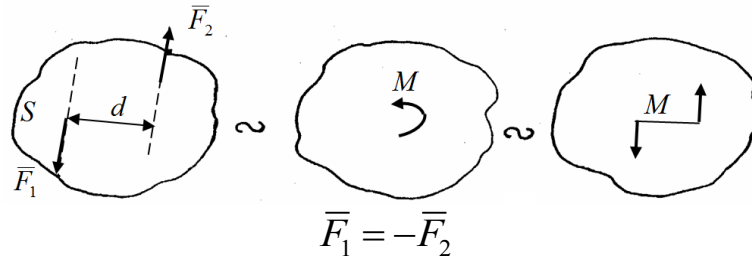


Рисунок 1.4

Плече пари d – найкоротша відстань між лініями дії сил, що становлять пару.

Модуль моменту пари не залежить від вибору точки і дорівнює $M = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d$. Сума проєкцій сил пари на будь-яку вісь дорівнює нулю, тобто її рівнодійна завжди рівна нулю.

1.4 Розподілені сили

Розподілені сили (розподілене навантаження) – система паралельних сил, які діють на кожну точку об'єму, поверхні або лінії (рис. 1.5).

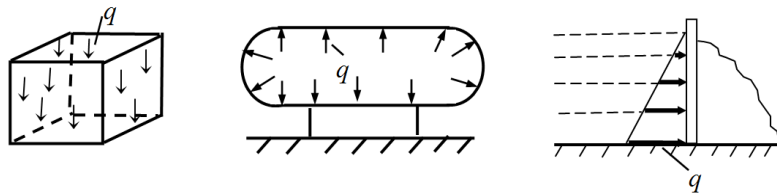


Рисунок 1.5

Плоска система розподілених сил (сили розподілені уздовж лінії) характеризується її інтенсивністю q , тобто силою, яка припадає на одиницю довжини: $[q] = \frac{H}{m}$.

Для розв'язання задач рівноваги розподілені сили зазвичай замінюють рівнодійною \bar{Q} .

Рівномірно розподілені сили: $q = const$.

За модулем рівнодійна такої системи

$$Q = q \cdot a$$

і прикладена посередині відрізка, на який діють розподілені сили (рис. 1.6).

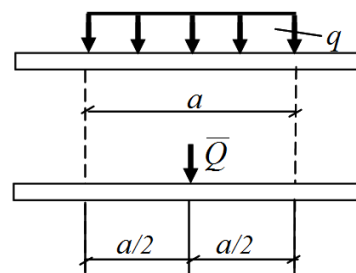


Рисунок 1.6

1.5 Види в'язей у площині і напрям їх реакцій

1. Ідеальна гладенька поверхня.

Реакція направлена перпендикулярно до дотичної у точці торкання тіла і поверхні (рис. 1.7).

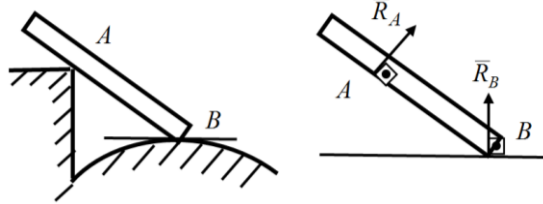


Рисунок 1.7

2. Нитка (трос і т. п.).

Реакція напрямлена уздовж нитки від тіла (рис. 1.8).

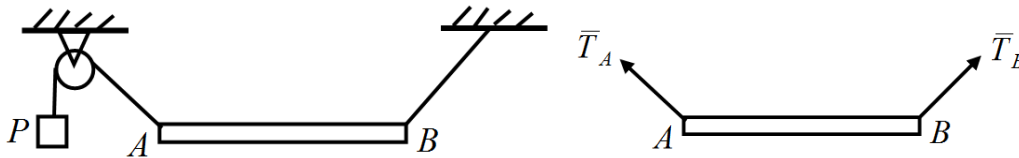


Рисунок 1.8

3. Ідеальний стержень (невагомий стержень з шарнірами на кінцях).

Реакція направлена уздовж осі стержня (лінії, яка з'єднує два шарніри стержня) і може мати будь-який напрям уздовж цієї осі (залежить від того, розтягнутий чи стиснений стержень) (рис. 1.9).

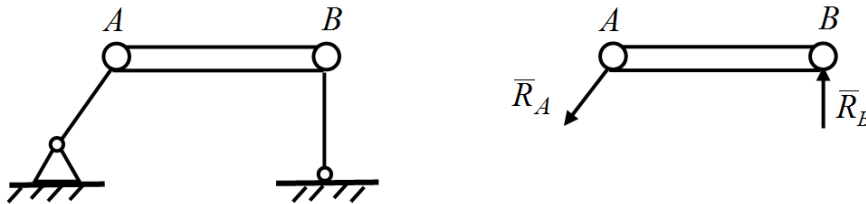


Рисунок 1.9

4. Рухомий шарнір.

Реакція направлена перпендикулярно до поверхні, на яку спираються катки рухомого шарніра, і від поверхні (рис. 1.10).

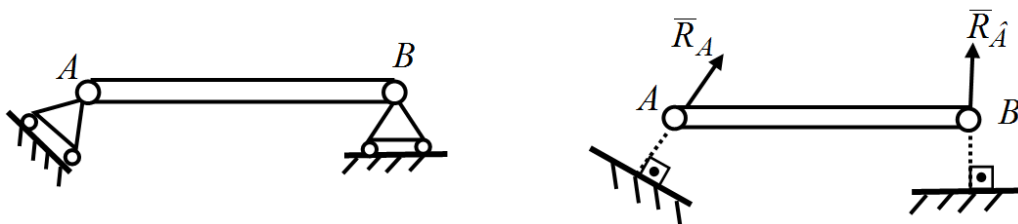


Рисунок 1.10

5. Нерухомий шарнір.

Реакція проходить через вісь шарніра і може мати будь-який напрям у площині рисунка. Під час розв'язання задач реакцію зображають у вигляді двох складових (\bar{X}_A, \bar{Y}_A або \bar{X}_B, \bar{Y}_B), направлених уздовж осей координат (рис. 1.11).

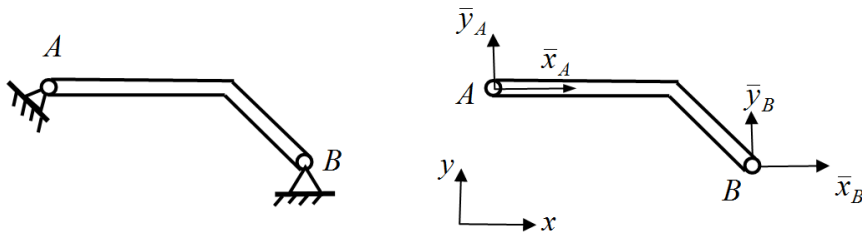


Рисунок 1.11

6. Жорстке заземлення (нерухоме закріплення).

При розв'язанні задач реакції заземлення зображають у вигляді двох складових (\bar{X}_A, \bar{Y}_A) уздовж осей координат і пари сил з моментом M_A (рис. 1.12). Таким чином, заземлення дає три невідомі реакції.

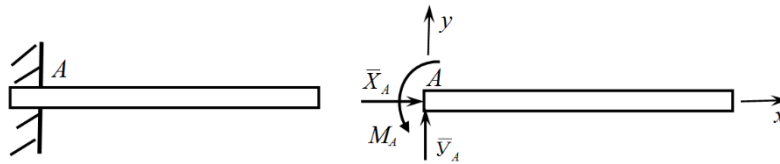


Рисунок 1.12

1.6 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на дві взаємно перпендикулярні осі і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки на площині дорівнювали нулю (аналітичні умови):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i) = 0.$$

Ці рівняння можна подати ще у двох видах, а саме:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0$$

(при цьому вісь Ox не повинна бути перпендикулярною до прямої AB) або

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0$$

(при цьому точки A , B і C не повинні лежати на одній прямій).

Теорема Варіньйона для плоскої системи сил. Якщо плоска система сил зводиться до рівнодійної, то її момент відносно будь-якої точки O площини дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил системи відносно тієї самої точки:

$$M_0(\bar{R}) = \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i).$$

Цю теорему зручно використовувати для знаходження алгебраїчного моменту сили відносно точки, розкладаючи силу на складові, паралельні осям координат:

$$M_A(\bar{G}) = M_A(\bar{G}_x) + M_A(\bar{G}_y) = -G_x \cdot 1 - G_y \cdot 4;$$

$$M_A(\bar{F}) = M_A(\bar{F}_x) + M_A(\bar{F}_y) = -F_x \cdot 1 + F_y \cdot 7,$$

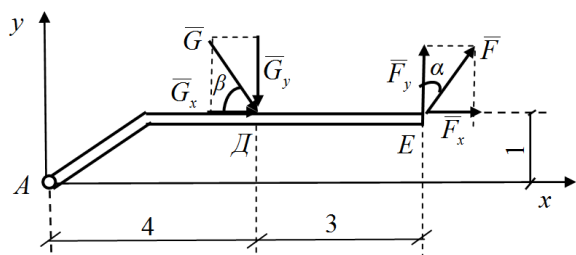


Рисунок 1.13

де величини складових –

$$\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{G}_x, \bar{G}_y:$$

$$F_x = F \cdot \sin \alpha, F_y = F \cdot \cos \alpha,$$

$$G_x = G \cdot \cos \beta, G_y = G \cdot \sin \beta.$$

1.7 Методика розв'язання задач статички

Послідовність дій при розв'язанні задачі на рівновагу твердого тіла має бути такою:

1) вибрати тіло, рівновагу якого треба розглянути, і зобразити його як вільне. Таким буде тіло, до якого прикладені задані сили та реакції в'язей, що визначаються в задачі;

2) зобразити осі координат;

3) показати всі діючі на тіло задані сили і реакції (їх зазвичай спрямовують уздовж координатних осей) відкинутих в'язей.

Якщо є розподілені сили, замінити їх рівнодійною;

4) скласти рівняння рівноваги;

5) розв'язати складені рівняння і проаналізувати одержані результати;

6) скласти перевірочне рівняння.

Приклад. Дано: $P = 1$ кН; $M = 5$ кНм; $q = 2$ кН/м; $\alpha = 30^\circ$. Визначити реакції защемлення в точці А. Розміри на рисунку 1.14 вказані в метрах, P – вага вантажу, M – момент пари сил, q – інтенсивність розподілених сил.

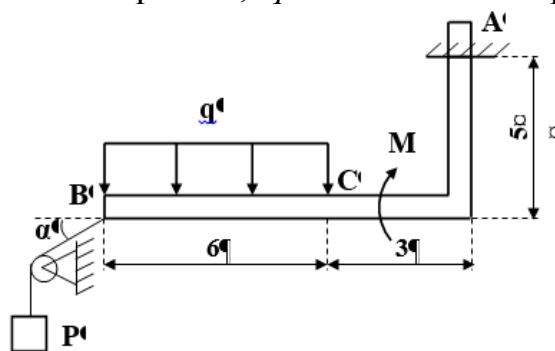


Рисунок 1.14

Розв'язання.

1. Розглянемо рівновагу тіла АВ і зобразимо його як вільне (рис. 1.15).

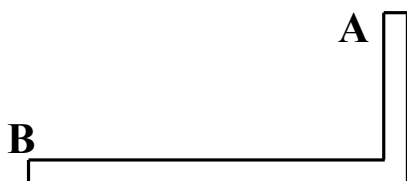


Рисунок 1.15

2. Зобразимо (рис. 1.16) задану пару сил з моментом M , розподілені сили замінимо рівнодійною \bar{Q} , яка прикладена посередині відрізка BC, модуль якої $Q = q \cdot 6 = 12$ кН. У точці B покажемо реакцію нитки \bar{R}_B , яка направлена уздовж нитки від тіла і за модулем дорівнює вазі вантажу P : $R_B = P = 1$ кН. Реакції защемлення в точці A зобразимо у вигляді горизонтальної \bar{X}_A і вертикальної \bar{Y}_A складових і пари сил з моментом $M_{зашц}$.

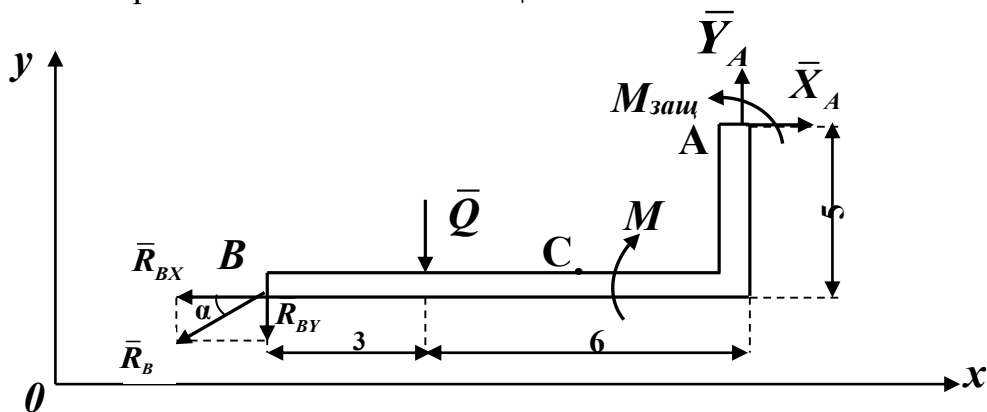


Рисунок 1.16

3. Зобразимо систему координат xOy .

4. Складемо рівняння рівноваги у загальному вигляді:

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad X_A - R_B \cdot \cos(\alpha) = 0,$$

$$\sum_k F_{ky} = 0, \quad Y_A - Q - R_B \cdot \sin(\alpha) = 0,$$

$$\sum_k M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad M_{зашц} - M + Q \cdot 6 + R_{BY} \cdot 9 - R_{BX} \cdot 5 = 0.$$

Оскільки плече сили \bar{R}_B відносно точки A визначити складно, розкладемо її на дві складові $\bar{R}_{BX}, \bar{R}_{BY}$ уздовж осей координат, модулі яких дорівнюють модулям проєкцій сили \bar{R}_B на відповідні осі координат: $R_{BX} = R_B \cdot \cos(\alpha)$, $R_{BY} = R_B \cdot \sin(\alpha)$; скористаємось для сили \bar{R}_B , як рівнодійної складових $\bar{R}_{BX}, \bar{R}_{BY}$, теоремою Варіньйона.

5. Розв'яжемо отриману систему трьох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $X_A, Y_A, M_{зашц}$:

$$X_A = R_B \cdot \cos(\alpha) = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87 \text{ кН},$$

$$Y_A = Q + R_B \cdot \sin(\alpha) = 12 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 12,5 \text{ кН},$$

$$M_{зашц} = M - Q \cdot 6 - R_{BY} \cdot 9 + R_{BX} \cdot 5 = M - Q \cdot 6 - R_B \cdot [9 \cdot \sin(\alpha) - 5 \cdot \cos(\alpha)] =$$

$$= 5 - 72 - 1 \cdot (9 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \approx -67 - 0,15 = -67,15 \text{ кНм},$$

6. Для перевірки складемо рівняння моментів відносно точки В, через яку не проходять лінії дій шуканих реакцій \bar{X}_A, \bar{Y}_A :

$$\sum_k M_B(\bar{F}_k) = 0, M_{защ} - M - Q \cdot 3 + Y_A \cdot 9 - X_A \cdot 5 = -36 - 5 - 67.15 + 112.5 - 4.35 = 112.5 - 112.5 = 0$$

Відповідь: $X_A \approx 0,87$ кН, $Y_A = 12,5$ кН, $M_{защ} = -67,15$ кНм. Знак «-» у значенні момента $M_{защ}$ означає, що в дійсності пара сил в защемленні має напрям у протилежний бік (тобто за стрілкою годинника).

1.8 Рівновага системи тіл

Якщо конструкція складається з кількох твердих тіл, з'єднаних за допомогою в'язей (складена конструкція), то можна розв'язати задачу одним із двох способів (рис. 1.17):

- 1) розглянути рівновагу всієї конструкції і додатково рівновагу одного або кількох окремих твердих тіл, які складають конструкцію;
- 2) початкову конструкцію відразу розчленити на окремі тверді тіла і розглянути рівновагу кожного з них окремо.

Приклад

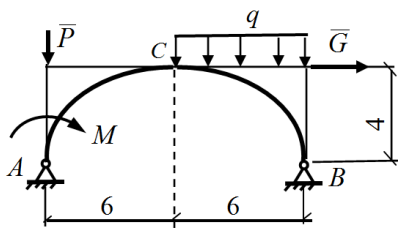


Рисунок 1.17

Дано: $q = 2$ кН/м
 $M = 10$ кН·м
 $P = 5$ кН
 $G = 15$ кН

Визначити: $X_A - ?$ $Y_A - ?$
 $X_B - ?$ $Y_B - ?$
 $X_C - ?$ $Y_C - ?$

Розв'язання.

Спосіб 1:

- 1) розрахункова схема всієї конструкції (рис. 1.18).

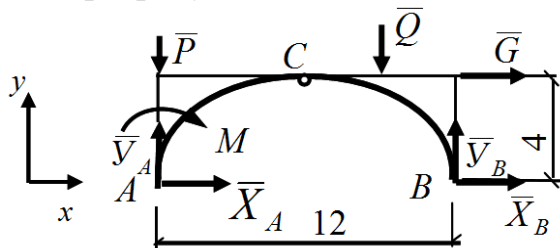


Рисунок 1.18

$$Q = q \cdot 6 = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (кН)},$$

Рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + G + X_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + Y_B - Q - P = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad -G \cdot 4 + Y_B \cdot 12 - Q \cdot 9 - M = 0;$$

- 2) розрахункова схема для тіла AC (рис.1.19).

Рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + X_C = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + Y_C - P = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad Y_C \cdot 6 - X_C \cdot 4 - M = 0,$$

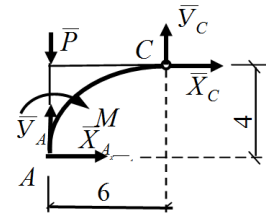


Рисунок 1.19

де \bar{X}_C, \bar{Y}_C – реакції відкинutoї правої частини конструкції.

З отриманих шести рівнянь рівноваги можна визначити шість невідомих реакцій.

З третього рівняння

$$Y_B = \frac{G \cdot 4 + Q \cdot 9 + M}{12} = \frac{15 \cdot 4 + 12 \cdot 9 + 10}{12} = \frac{60 + 108 + 10}{12} = \frac{178}{12} \approx 14,83 \text{ (кН)},$$

з другого

$$Y_A = P + Q - Y_B = 5 + 12 - 14,83 \approx 2,17 \text{ (кН)},$$

з п'ятого

$$Y_C = P - Y_A = 5 - 2,17 \approx 2,83 \text{ (кН)},$$

з шостого

$$X_C = \frac{Y_C \cdot 6 - M}{4} = \frac{2,83 \cdot 6 - 10}{4} = \frac{17 - 10}{4} = 1,75 \text{ (кН)},$$

з четвертого

$$X_A = -X_C = -1,75 \text{ (кН)},$$

з першого

$$X_B = -X_A - G = -(-1,75) - 15 = 1,75 - 15 = -13,25 \text{ (кН)}.$$

Спосіб 2:

3) розрахункова схема лівої частини складеної конструкції (рис. 1.20).

Рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + X'' = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad -m + Y_A + Y'' = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad Y_C \cdot 6 - X_C \cdot 4 - M = 0$$

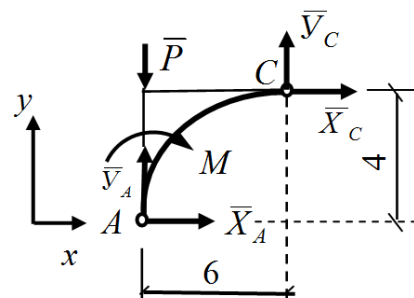


Рисунок 1.20

4) розрахункова схема правої частини.

Рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -X'_C + G + X_B = 0;$$

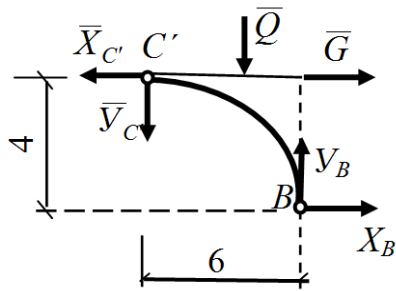


Рисунок 1.21

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad -Y'_C + Y_B - Q = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0;$$

$$X'_C \cdot 4 + Y'_C \cdot 6 - G \cdot 4 + Q \cdot 3 = 0,$$

де X'_C, Y'_C – реакції відкинutoї лівої частини конструкції, які (за аксіомою статички) рівні за модулем реакції X_C, Y_C : $X'_C = X_C, Y'_C = Y_C$ та протилежно направлені.

Визначимо невідомі реакції.

Складемо третє і шосте рівняння:

$$Y_C \cdot 6 - X_C \cdot 4 - M + X'_C \cdot 4 + Y'_C \cdot 6 - G \cdot 4 + Q \cdot 3 = 0$$

$$Y_C \cdot 12 - M - G \cdot 4 + Q \cdot 3 = 0 \Rightarrow$$

$$Y_C = \frac{M + G \cdot 4 - Q \cdot 3}{12} = \frac{10 + 15 \cdot 4 - 12 \cdot 3}{12} = \frac{10 + 60 - 36}{12} = \frac{34}{12} \approx 2,83 \text{ (кН)},$$

з третього рівняння

$$X_C = \frac{Y_C \cdot 6 - M}{4} = \frac{17 - 10}{4} = 1,75 \text{ (кН)},$$

з першого

$$X_A = -X_C = -1,75 \text{ (кН)},$$

з другого

$$Y_A = P - Y_C = 5 - 2,83 \approx 2,17 \text{ (кН)},$$

з четвертого

$$X_B = X'_C - G = 1,75 - 15 = -13,25 \text{ (кН)},$$

з п'ятого

$$Y_B = Y'_C + Q = 2,83 + 12 = 14,83 \text{ (кН)}.$$

Для перевірки визначених величин реакцій X_A, Y_A, X_B, Y_B треба розглянути всю конструкцію як вільне тіло (див. схему 1 у способі 1) і скласти рівняння моментів відносно точки, через яку не проходять лінії дій цих реакцій, наприклад відносно точки С:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) &= P \cdot 6 - Y_A \cdot 6 + X_A \cdot 4 + X_B \cdot 4 + Y_B \cdot 6 - M - Q \cdot 3 = \\ &= 5 \cdot 6 - 2,17 \cdot 6 - 1,75 \cdot 4 - 13,25 \cdot 4 + 14,84 \cdot 6 - 10 - 12 \cdot 3 = \\ &= 30 - 13,02 - 7 - 53 + 89,04 - 10 - 36 = 119,04 - 119,02 = 0,02 \approx 0. \end{aligned}$$

Відповідь: $X_A = -1,75$ кН; $Y_A = 2,17$ кН; $X_B = -13,25$ кН;

$$Y_B = 14,83 \text{ кН}; X_C = 1,75 \text{ кН}; Y_C = 2,83 \text{ кН}.$$

1.8.1 Завдання для роботи С1 «Визначення реакцій опор складеної конструкції»

Визначити реакції опор і тиск у проміжному шарнірі складеної конструкції. Схеми конструкцій наведені на наступних сторінках, розміри задані в метрах. Значення сили P , кута α , інтенсивності розподіленого навантаження q і пари сил M задаються за таблицею 1.1 і рисунками 1.22–1.24.

Варіанти навантажень для роботи С-1 «Визначення реакцій опор складеної конструкції»

Таблиця 1.1 – Вихідні дані до завдання С-1

Номер варіанта	P , кН	M , кНм	q , кН/м	α , град
1	10	20	1	60
2	12	10	4	60
3	8	5	2	45
4	14	8	5	30
5	6	7	3	45
6	10	4	2	60
7	7	5	1	60
8	15	6	4	45
9	12	8	6	45
10	10	4	5	30
11	6	6	0,5	45
12	4	9	2	45
13	8	8	4	60
14	6	6	3	45
15	10	10	5	45
16	14	4	2	30
17	15	10	0,5	30
18	11	6	1	30
19	6	9	0,5	45
20	12	8	3	30
21	10	5	1,5	45
22	8	14	1	45
23	14	9	2	30
24	8	7	4	45
25	6	5	3,5	45
26	10	12	1	30
27	15	7	2	30
28	12	12	3	30
29	10	14	2	60
30	15	10	3	60

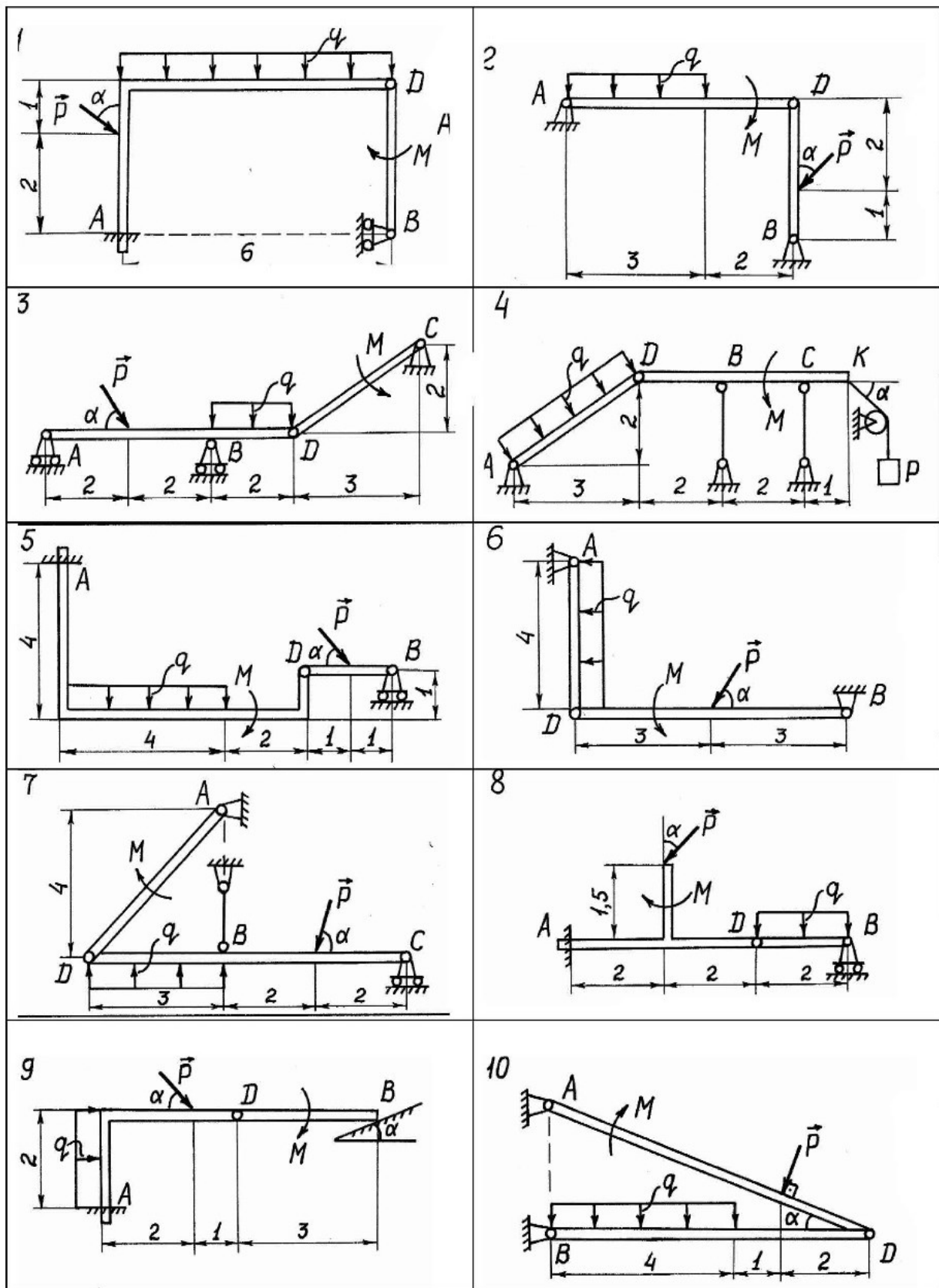


Рисунок 1.22 – Схеми до завдання С-1

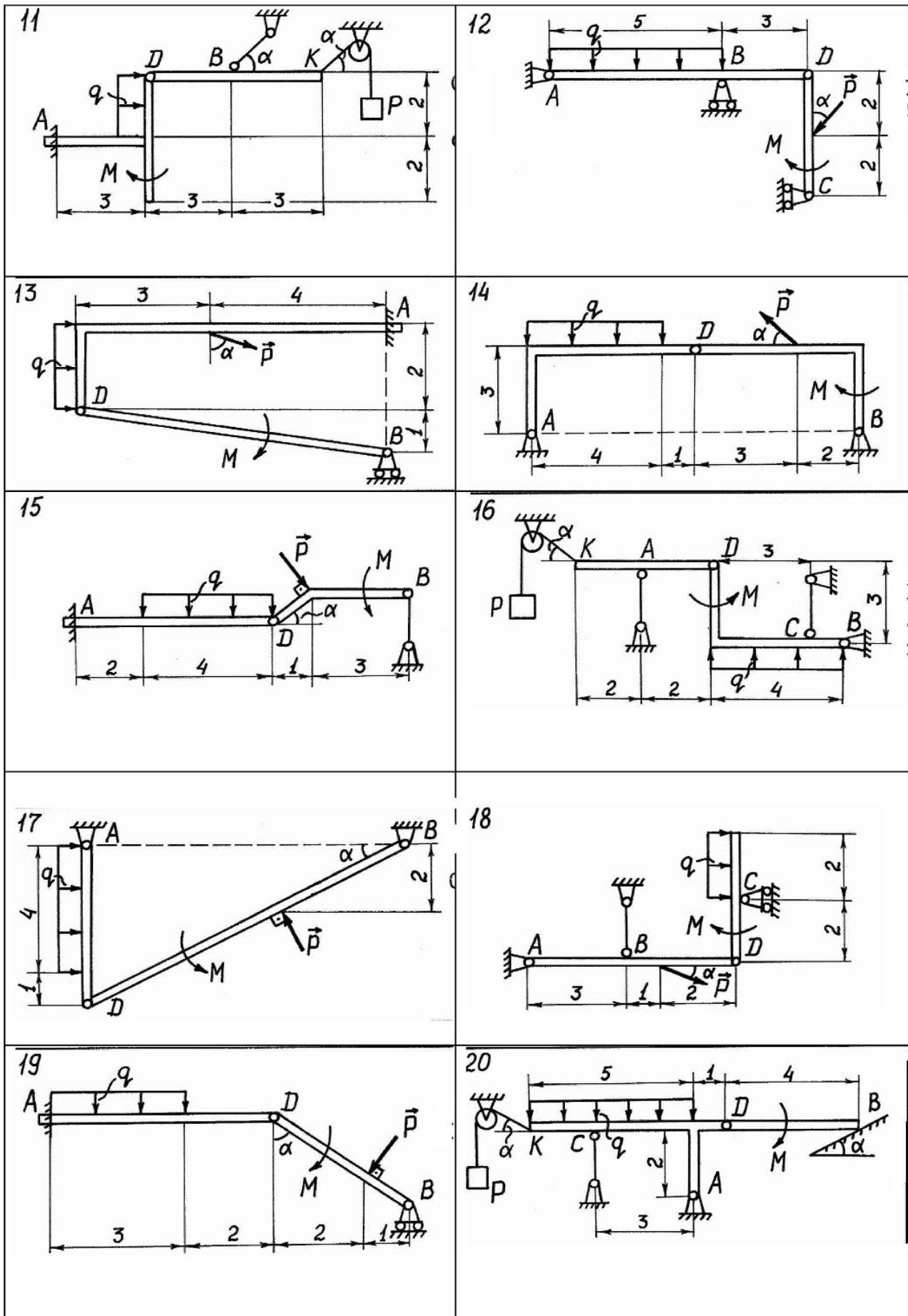


Рисунок 1.23 – Схеми до завдання С-1

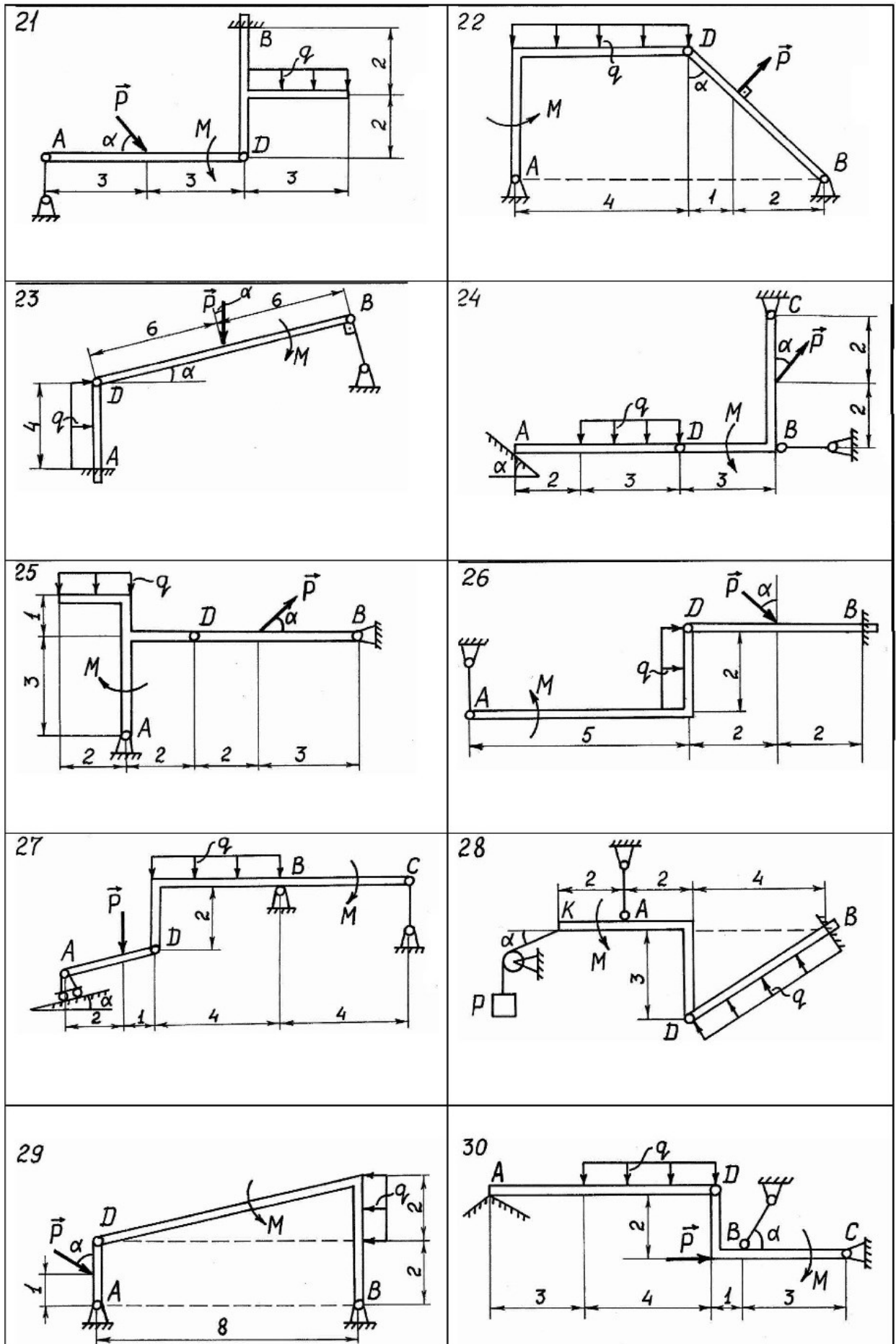


Рисунок 1.24 – Схеми до завдання С-1

1.9 Розрахунок плоскої ферми

Плоска ферма – жорстка конструкція, складена з прямолінійних стержнів, які розташовані в одній площині і з'єднуються між собою і з опорами за допомогою шарнірів. Шарніри називають *вузлами* ферми.

Основні припущення:

- 1) усі зовнішні навантаження на ферму прикладені тільки у вузлах;
- 2) вагою стержнів (порівняно із зовнішніми навантаженнями) і тертям у вузлах нехтують.

Тоді можна вважати, що стержні ферми працюють тільки на розтяг або стиск. Розрахунок ферми зводиться до визначення опорних реакцій і зусиль у її стержнях.

Порядок розрахунку ферми:

1) визначити реакції опор ферми, розглядаючи останню в цілому як тверде тіло. Після визначення реакцій опор обов'язково треба скласти перевірочне рівняння;

2) визначити зусилля у стержнях ферми одним з методів:

– **метод вирізання вузлів**. Цим методом зручно користуватись, якщо треба знайти зусилля в усіх стержнях ферми. Він зводиться до послідовного розглядання умов рівноваги збіжних сил, прикладених до кожного із вузлів. При цьому кількість невідомих зусиль у вузлі не повинна перевищувати двох. Для певності припускають, що всі зусилля направлені від вузла (тобто стержні розтягнуті). Останній вузол зазвичай розглядають для перевірки;

– **метод Ріттера**. Цим методом зручно користуватись, якщо треба знайти зусилля в окремих стержнях ферми, зокрема для перевірочних розрахунків. Згідно з цим методом ферму розділяють на дві частини перерізом, який проходить не більше ніж через три стержні, і розглядають рівновагу однієї з частин. Зусилля в перерізаних стержнях направляють від перерізу (тобто припускають, як і в методі вирізання вузлів, що всі стержні розтягнуті). Далі складають рівняння рівноваги так, щоб у кожне рівняння увійшло тільки одне зусилля стержня, через який пройшов переріз. Для цього складають або рівняння моментів відносно точки площини (а не тільки ферми), через яку проходять лінії дій зусиль двох інших стержнів, які потрапили в переріз, або складають рівняння проєкцій сил, якщо два інші стержні перерізу паралельні, на вісь, яка перпендикулярна до цих паралельних стержнів.

Приклад (рис.1.25)

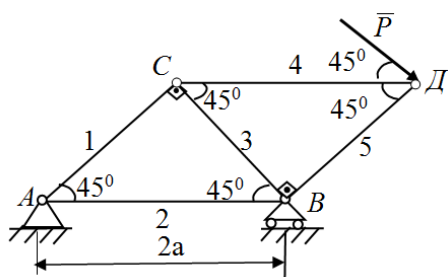


Рисунок 1.25

Дано: $P = 10$ кН

Визначити:

- 1) $X_A - ?$ $Y_A - ?$ $R_B - ?$
- 2) $S_i - ?$ ($i = 1, \dots, 5$)
- 3) $S_2, S_3, S_4 - ?$

Розв'язання:

1. Розглянемо рівновагу ферми і визначимо реакції опор A і B (рис. 1.26):

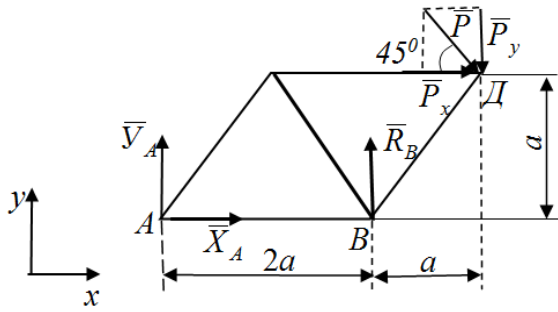


Рисунок 1.26

Величини складових сили \bar{P} :

$$P_x = P \cdot \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ (кН)},$$

$$P_y = P \cdot \sin 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ (кН)}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; X_A + P \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow X_A = -P \cdot \cos 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; R_B \cdot 2a - P_y \cdot 3a - P_x \cdot a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{P_y \cdot 3 + P_x \cdot 1}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 3 + 5\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; Y_A + R_B - P \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_A = P \sin 45^\circ - R_B = 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}.$$

Перевірка: $\sum_{i=1}^n M_D(\bar{F}_i) = -Y_A \cdot 3a + X_A \cdot a - R_B \cdot a =$

$$= -(-5\sqrt{2}) \cdot 3a + (-5\sqrt{2}) \cdot a - 10\sqrt{2} \cdot a = a(15\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2}) = a \cdot 0 = 0.$$

2. Визначимо зусилля у стержнях ферми методом вирізання вузлів:

– розглянемо рівновагу вузла A (рис. 1.27):

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_1 \sin 45^\circ + Y_A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 = -\frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = -\frac{(-5\sqrt{2})}{\sqrt{2}/2} = 10 \text{ (кН)};$$

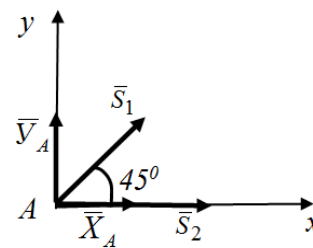


Рисунок 1.27

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; S_1 \cdot \cos 45^\circ + X_A + S_2 = 0 \Rightarrow$$

$$S_2 = -X_A - S_1 \cdot \cos 45^\circ = -(-5\sqrt{2}) - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0;$$

– розглянемо рівновагу вузла C (рис. 1.28):

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -S_1 \sin 45^\circ - S_3 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 = -S_1 = -10 \text{ (кН)};$$

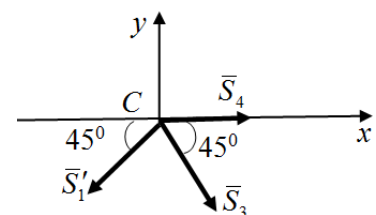


Рисунок 1.28

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S_1 \cdot \cos 45^\circ + S_3 \cos 45^\circ + S_4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$S_4 = S_1 \cdot \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)};$$

(за модулем $\bar{S}'_1 = S_1 = 10$ кН);

– розглянемо рівновагу вузла В (рис. 1.29):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S_2 - S_3 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow$$

$$S_5 = \frac{S_2 + S_3 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{0 - 10 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -10 \text{ (кН)};$$

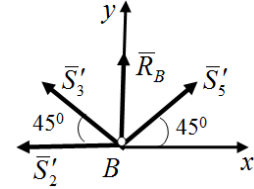


Рисунок 1.29

друге рівняння $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ можна використати для перевірки:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} - S_3 \cdot \sin 45^\circ + R_B + S_5 \sin 45^\circ = 10\sqrt{2} - 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0; =$$

($S'_2 = S_2$; $S'_3 = S_3$);

– для перевірки правильності розрахунків розглянемо останній вузол Д (рис. 1.30):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S_4 - S_5 \cos 45^\circ + P \cos 45^\circ =$$

$$= -10 \cdot \sqrt{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

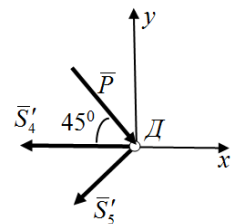


Рисунок 1.30

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -P \cdot \sin 45^\circ - S_5 \sin 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

($S'_4 = S_4$; $S'_5 = S_5$);

– визначимо зусилля у стержнях 2, 3, 4 ферми методом Ріттера (рис. 1.31).

Для цього проведемо переріз через ці стержні і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини ферми:

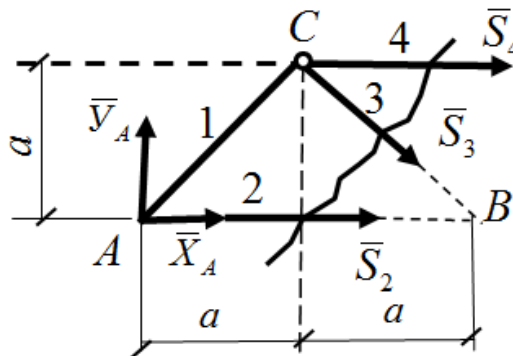


Рисунок 1.31

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_C(\bar{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot a + X_A \cdot a + S_2 \cdot a = 0 \quad \Rightarrow S_2 = Y_A - X_A = -5\sqrt{2} - (-5\sqrt{2}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; Y_A - S_3 \sin 45^\circ = 0$$

$$S_3 = \frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = \frac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = -10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; -Y_A \cdot 2a - S_4 \cdot a = 0 \Rightarrow S_4 = 2Y_A = -2(-5\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)}.$$

Відповідь: 1) $X_A \approx -7$ кН; $Y_A \approx -7$ кН; $R_B = 14$ кН; знак «-» означає, що справжній напрям складових \bar{X}_A, \bar{Y}_A протилежний зображеним на рисунку 1.31;

2) $S_1 = 10$ кН; $S_2 = 0$; $S_3 = -10$ кН; $S_4 \approx 14$ кН; $S_5 = -10$ кН; стержні 1, 2 – розтягнуті; 3, 5 – стиснуті; 4 – не навантажений.

1.9.1 Завдання для роботи С2 «Визначення реакцій опор і зусиль у стержнях плоскої ферми»

Визначити реакції опор ферми, а також зусилля в усіх її стержнях методом вирізання вузлів. Додатково перевірити зусилля у трьох стержнях методом Ріттера. Вагою знехтувати. Схеми ферм наведені на наступних сторінках. Значення зовнішніх сил P, F і номери стержнів для перевірки методом Ріттера задаються за таблицею 1.2 і рисунками 1.32– 1.34.

Варіанти навантаження для роботи С-2 «Визначення реакцій опор і зусиль у стержнях плоскої ферми»

Таблиця 1.2 – Вихідні дані до завдання С-2

Номер варіанта	P , кН	F , кН	a , м	Номер варіанта	P , кН	F , кН	a , м
1	5	20	3	21	10	20	3
2	5	10	4	22	20	20	3
3	10	5	2	23	10	-	3
4	10	30	3	24	10	20	5
5	5	15	2	25	20	15	6
6	10	20	4	26	15	10	4
7	5	10	4	27	20	10	4
8	10	20	4	28	20	20	3
9	20	30	3	29	10	20	3
10	20	10	6	30	10	10	6
11	10	20	4				
12	30	10	3				
13	10	10	4				
14	15	10	4				
15	20	10	2				
16	40	20	6				
17	30	-	2				
18	10	-	6				
19	10	40	3				
20	10	10	5				

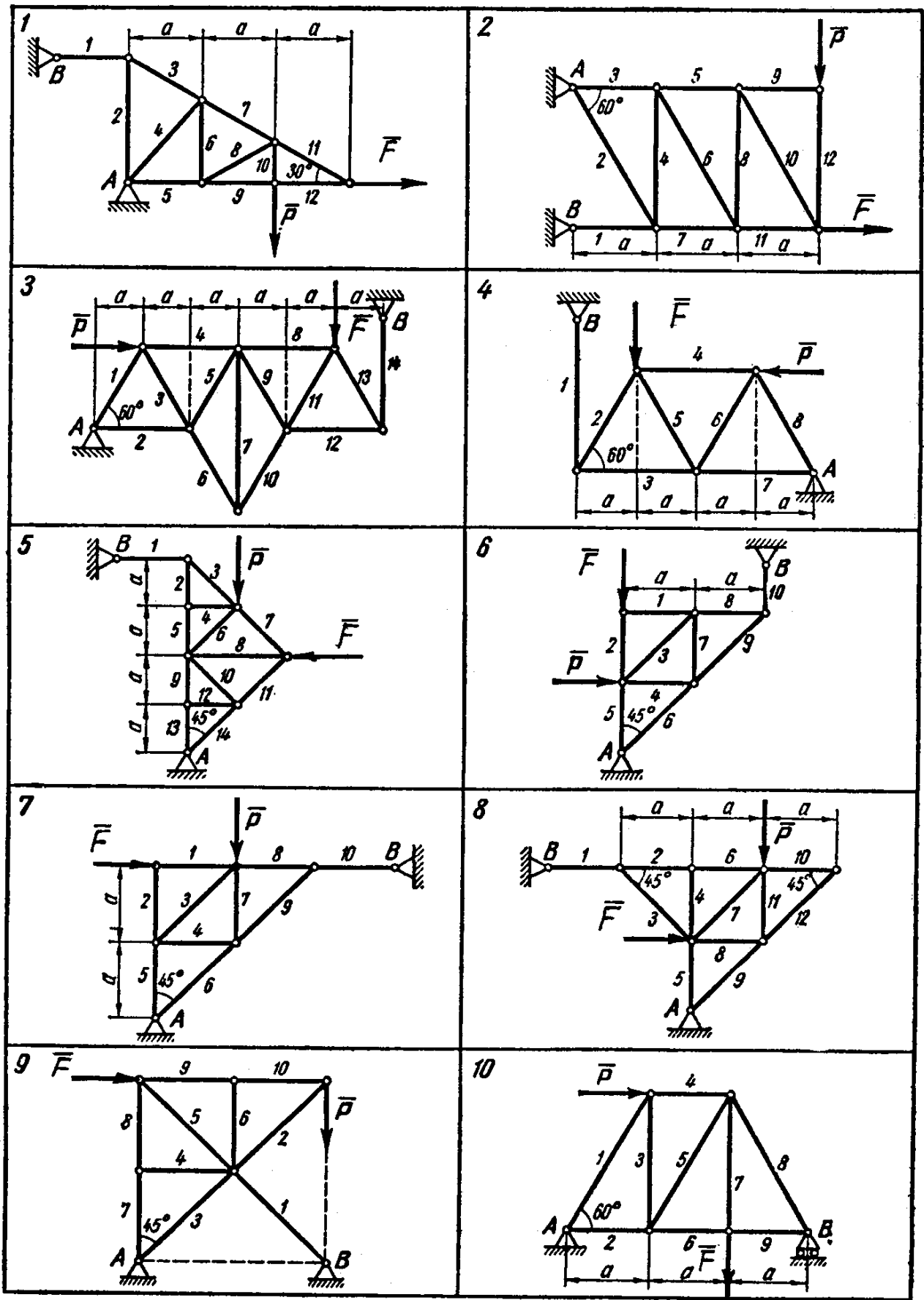


Рисунок 1.32 – Схеми до завдання С-2

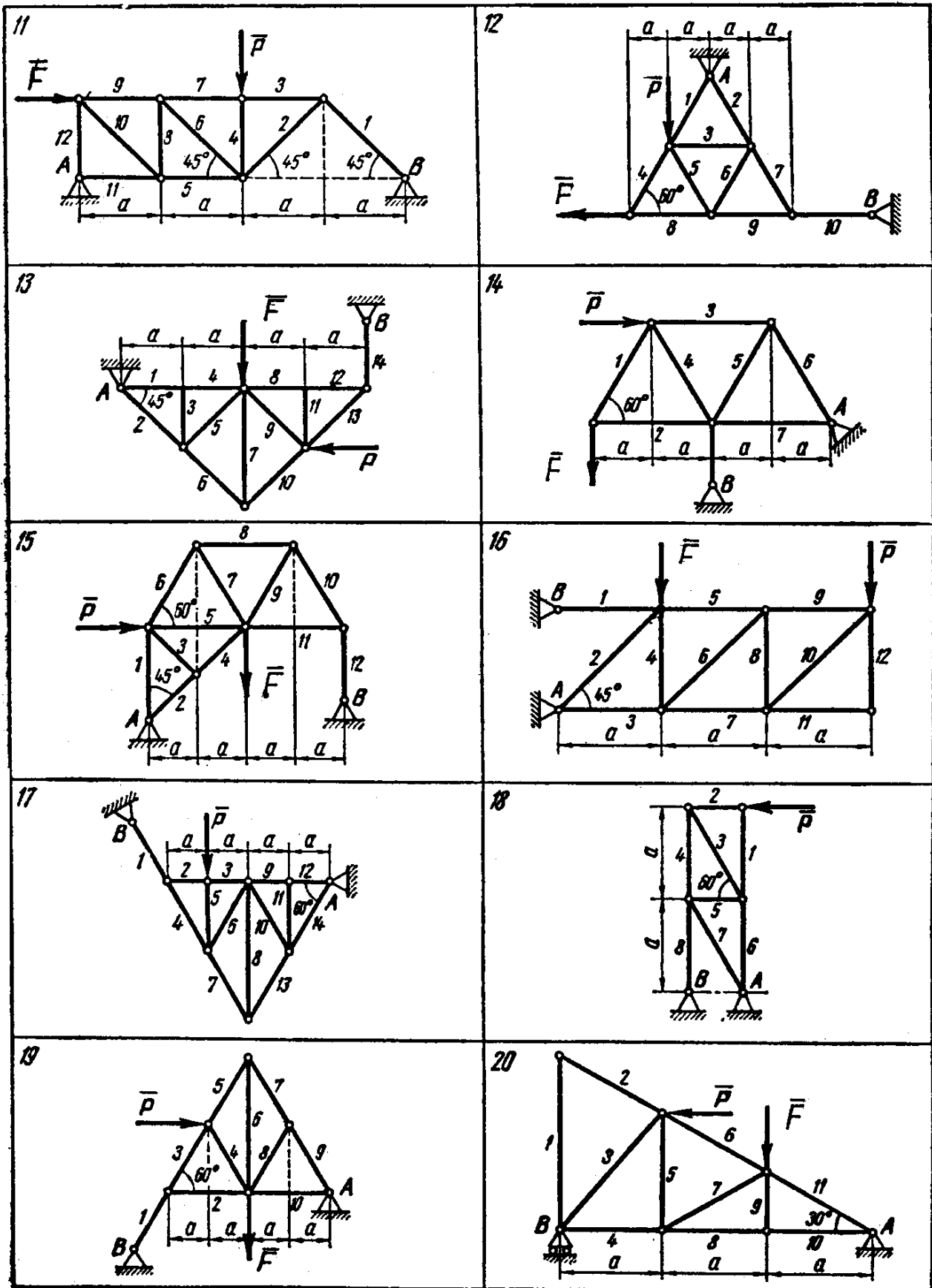


Рисунок 1.33 – Схеми до завдання С-2

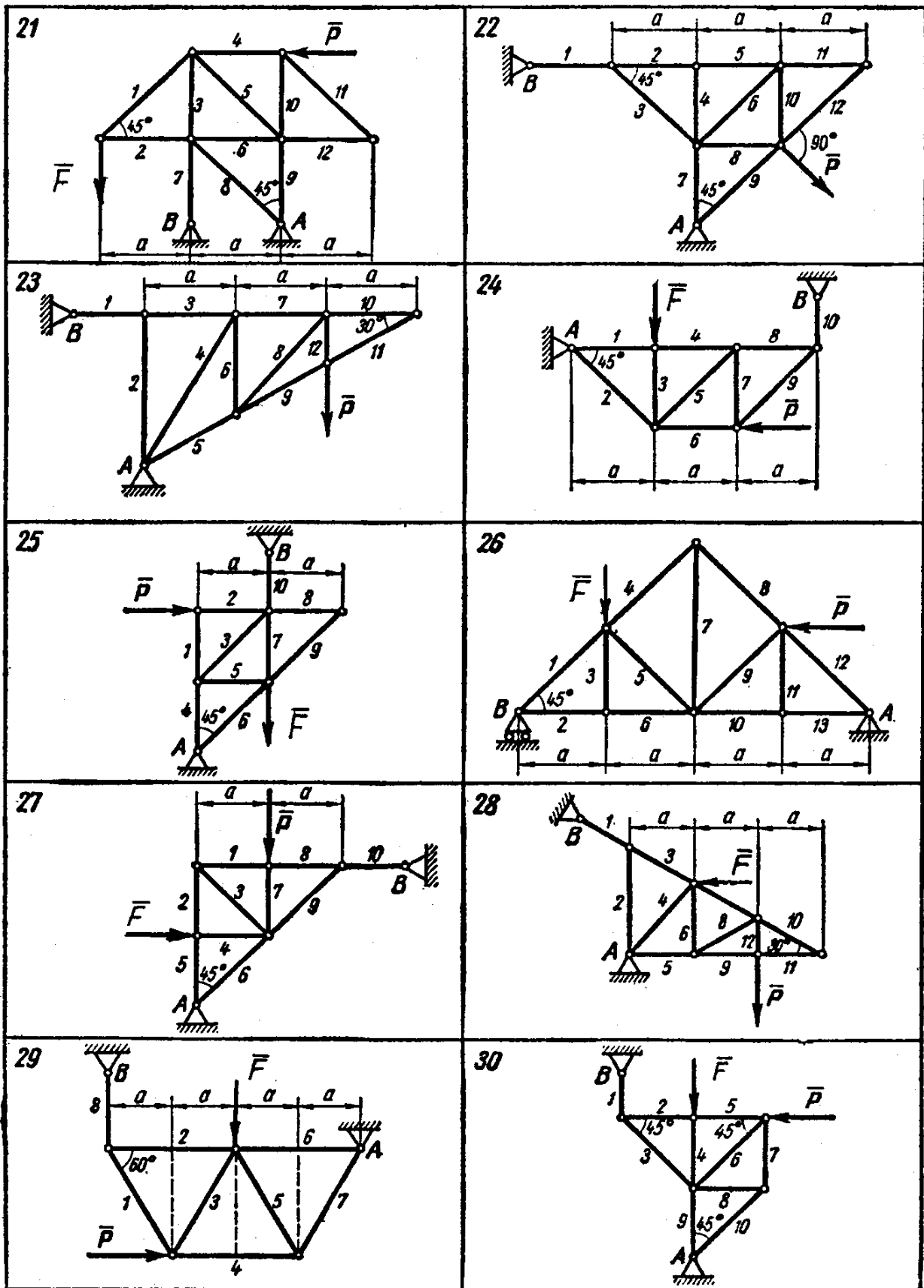


Рисунок 1.34 – Схеми до завдання С-2

2 РІВНОВАГА ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ СИЛ

2.1 Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі z називається проекція на цю вісь вектора моменту сили відносно точки O , що лежить на осі (рис. 2.1).

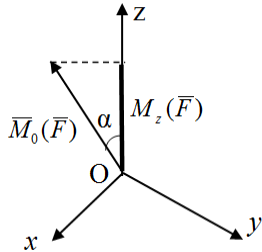


Рисунок 2.1

$$M_z(\bar{F}) = [\bar{M}_0(\bar{F})]_z = M_0(\bar{F}) \cdot \cos \alpha.$$

Момент сили відносно осі характеризує обертальну дію сили навколо цієї осі.

Правило визначення моменту сили \bar{F} відносно осі z (рис. 2.2):

1. Провести площину S , перпендикулярну до осі z , і знайти точку перетину осі з площиною O .
2. Спроектувати силу на проведену площину (\bar{F}_{xy} – проекція сили \bar{F} на площину).

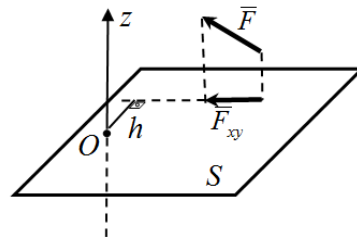


Рисунок 2.2

3. Знайти момент сили \bar{F}_{xy} відносно точки O перетину осі з площиною S :

$$M_0(\bar{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h.$$

Обрати знак «+», якщо з додатного кінця осі z зрозуміло, що сила \bar{F}_{xy} прагне обертати площину S навколо осі проти руху годинникової стрілки, і знак «-», якщо за стрілкою годинника.

$$M_z(F) = M_0(\bar{F}_{xy}).$$

У нашому випадку $M_z(\bar{F}) = F_{xy} \cdot h$.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:

- а) сила паралельна осі (в цьому випадку проекція сили на площину $\bar{F}_{xy} = 0$);
- б) лінія дії сили перетинає вісь (при цьому плече $h = 0$).

2.2 Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи одночасно дорівнювали нулю (геометричні умови):

$$\bar{F}_0 = 0 \quad \bar{M}_0 = 0,$$

або суми проєкцій усіх сил на кожну з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю (аналітичні умови):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i) = 0.$$

2.3 Види в'язей у просторі і напрям їх реакцій

1. Для ідеальної гладенької поверхні, нитки, ідеального стержня, рухомого шарніра реакції зображуються за тими самими правилами, як і у площині (див. розділ 1.5).

2. *Нерухомий (сферичний) шарнір.*

Реакція проходить через вісь шарніра і може мати будь-який напрям у просторі. При розв'язанні задач реакції зображують у вигляді трьох складових ($\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$), направлених уздовж осей координат (рис. 2.3).

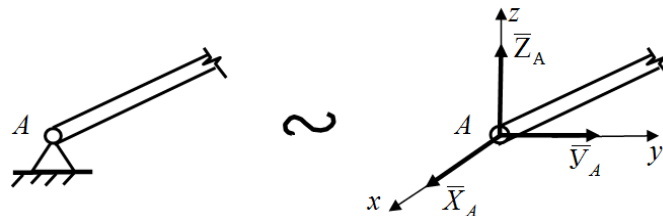


Рисунок 2.3

3. *Підшипник (трубка) (A), петля (B)* (рис. 2.4).

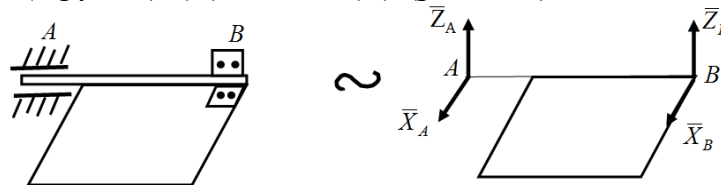


Рисунок 2.4

Реакція підшипника і петлі лежить у площині, перпендикулярній до осі підшипника або петлі (пряма АВ), і можуть мати будь-який напрям у цій площині. При розв'язанні задач реакції зображують у вигляді двох складових (\bar{X}_A, \bar{Z}_A або \bar{X}_B, \bar{Z}_B) уздовж осей координат, які перпендикулярні до осі підшипника (петлі).

4. *Підп'ятник (закрита з одного боку трубка)* (рис. 2.5).

Реакція підп'ятника може мати будь-який напрям у просторі. При розв'язанні задач реакцію зображують у вигляді трьох складових ($\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$), дві з яких перпендикулярні до осі підп'ятника, а одна направлена уздовж його осі від закритого боку трубки.

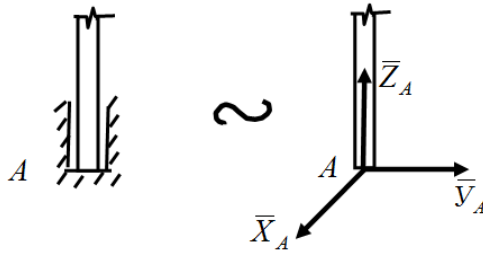


Рисунок 2.5

2.4 Визначення реакцій опор твердого тіла

Приклад (рис. 2.6)

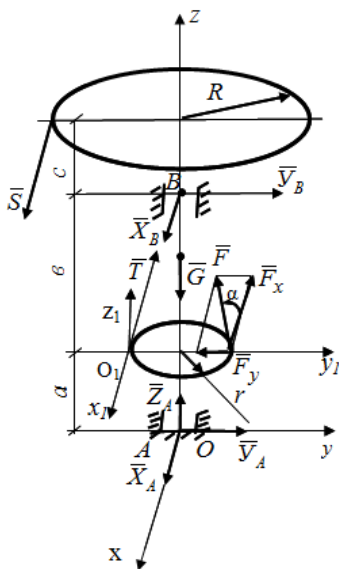


Рисунок 2.6

$$\begin{aligned}
 T &= 4 \text{ кН}, \quad F = 2 \text{ кН}, \\
 G &= 3 \text{ кН}, \quad \alpha = 30^\circ, \\
 R &= a = c = 15 \text{ см}, \quad b = 20 \text{ см}, \\
 r &= 10 \text{ см}, \quad \vec{S}, \vec{T} \text{ и } \vec{F} \perp 0_z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_A - ?, \quad Y_A - ?, \quad Z_A - ?, \\
 X_B - ?, \quad Y_B - ?, \quad Z_B - ?, \quad S - ?
 \end{aligned}$$

Розв'язання:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S + X_B - T - F_x + X_A = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_B - F_y + Y_A = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad Z_A - G = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{0x}(\vec{F}_i) = 0; \quad F_y \cdot a - Y_B \cdot (a + b) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{0y}(\vec{F}_i) = 0; \quad S \cdot (a + b + c) + X_B(a + b) - T \cdot a - F_x \cdot a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{0z}(\vec{F}_i) = 0; \quad S \cdot R - T \cdot r + F_x \cdot r = 0.$$

З отриманих шести рівнянь рівноваги можна визначити шість невідомих реакцій, враховуючи, що:

$$F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,732 \text{ (кН)},$$

$$F_y = F \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ (кН)};$$

з шостого рівняння

$$S = \frac{T \cdot r - F_x \cdot r}{R} = \frac{4 \cdot 10 - 1,732 \cdot 10}{15} = \frac{40 - 17,32}{15} = \frac{22,68}{15} \approx 1,512 \text{ (кН)};$$

з п'ятого

$$X_B = \frac{T \cdot a + F_x \cdot a - S \cdot (a + b + c)}{a + b} = \frac{4 \cdot 15 + 1,732 \cdot 15 - 1,512 \cdot 50}{35} =$$

$$= \frac{60 + 25,98 - 75,5}{35} = \frac{10,48}{35} \approx 0,299 \text{ (кН)};$$

з четвертого

$$Y_B = \frac{F_y \cdot a}{a + b} = \frac{1 \cdot 15}{15 + 20} = 0,428 \text{ (кН)};$$

з третього $Z_A = G = 3 \text{ (кН)}$;

з другого $Y_A = F_y - Y_B = 1 - 0,429 = 0,572 \text{ (кН)}$;

з першого $X_A = T + F_x - S - X_B = 4 + 1,732 - 1,512 - 0,299 \approx 3,921 \text{ (кН)}$.

Для перевірки одержаних величин реакцій в'язей можна скласти рівняння моментів відносно осей системи координат $M_1 x_1 y_1 z_1$, осі якої є паралельними осям початкової системи координат xyz .

Наприклад:

$$\sum_{i=1}^n M_{0, x_1}(\bar{F}_i) = Y_A \cdot a + Z_A \cdot r - Y_B \cdot b - G \cdot r =$$

$$= 0,571 \cdot 15 + 3 \cdot 10 - 0,429 \cdot 20 - 3 \cdot 10 = 8,565 - 8,58 = -0,015 \approx 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{0, y_1}(\bar{F}_i) = S \cdot (c + b) + X_B \cdot b - X_A \cdot a =$$

$$= 1,512 \cdot 35 + 0,299 \cdot 20 - 3,921 \cdot 15 = 58,9 - 58,82 = 0,08 \approx 0.$$

Відповідь: $X_A = 3,921 \text{ кН}$, $Y_A = 0,572 \text{ кН}$, $Z_A = 3 \text{ кН}$,

$X_B = 0,299 \text{ кН}$, $Y_B = 0,428 \text{ кН}$, $S = 1,512 \text{ кН}$.

2.4.1 Завдання для роботи СЗ «Визначення реакцій опор твердого тіла»

Визначити реакції опор конструкції. Схеми конструкцій наведені на наступних сторінках. Значення зовнішніх сил Q , T , U , а також розміри a , b , c , r , R задаються за рисунками 2.7–2.8.

Примітка 1. Вважати, що у варіантах 16, 18, 22–27, 30 петлі не заважають переміщенню рами уздовж АВ (табл. 2.1).

Примітка 2. У варіантах 20, 21, 28 поверхні, які торкаються, вважати абсолютно гладенькими (табл. 2.1).

Варіанти навантажень для роботи С-3
«Визначення реакцій опор твердого тіла»

Таблиця 2.1 – Вихідні дані до завдання С-3

Номер варіанта	Сили, кН			Розміри, см				
	Q	P	G	a	b	c	R	r
1	2	12	20	20	30	10	15	5
2	4	8	2	20	10	30	10	10
3	6	–	4	15	15	20	-	15
4	3	4	2	30	20	40	15	10
5	5	8	3	30	40	20	20	15
6	1	4	2	40	30	20	20	10
7	-	3	1	30	10	5	18	6
8	4	6	3	20	40	15	20	10
9	5	8	3	20	15	10	30	40
10	1	4	2	30	40	20	20	10
11	–	2	1	20	30	15	15	10
12	4	2	1	25	20	8	15	10
13	10	4	5	40	30	20	25	15
14	–	2	1	30	90	20	30	10
15	3	5	2	60	20	40	20	5
16	4	–	2	50	30	–	–	–
17	2	–	1	15	10	20	20	5
18	6	–	2	60	40	60	–	–
19	–	8	2	20	30	40	20	15
20	4	–	–	60	40	20	–	–
21	2	–	–	40	60	30	–	–
22	–	–	5	20	50	30	–	–
23	–	–	4	40	30	50	–	–
24	5	–	2	–	–	–	–	–
25	–	–	3	50	50	60	–	–
26	–	4	1	20	60	40	–	–
27	–	–	1	50	30	10	–	–
28	2	–	6	30	10	50	–	–
29	–	4	3	15	20	15	15	10
30	–	–	4	40	30	10	–	–

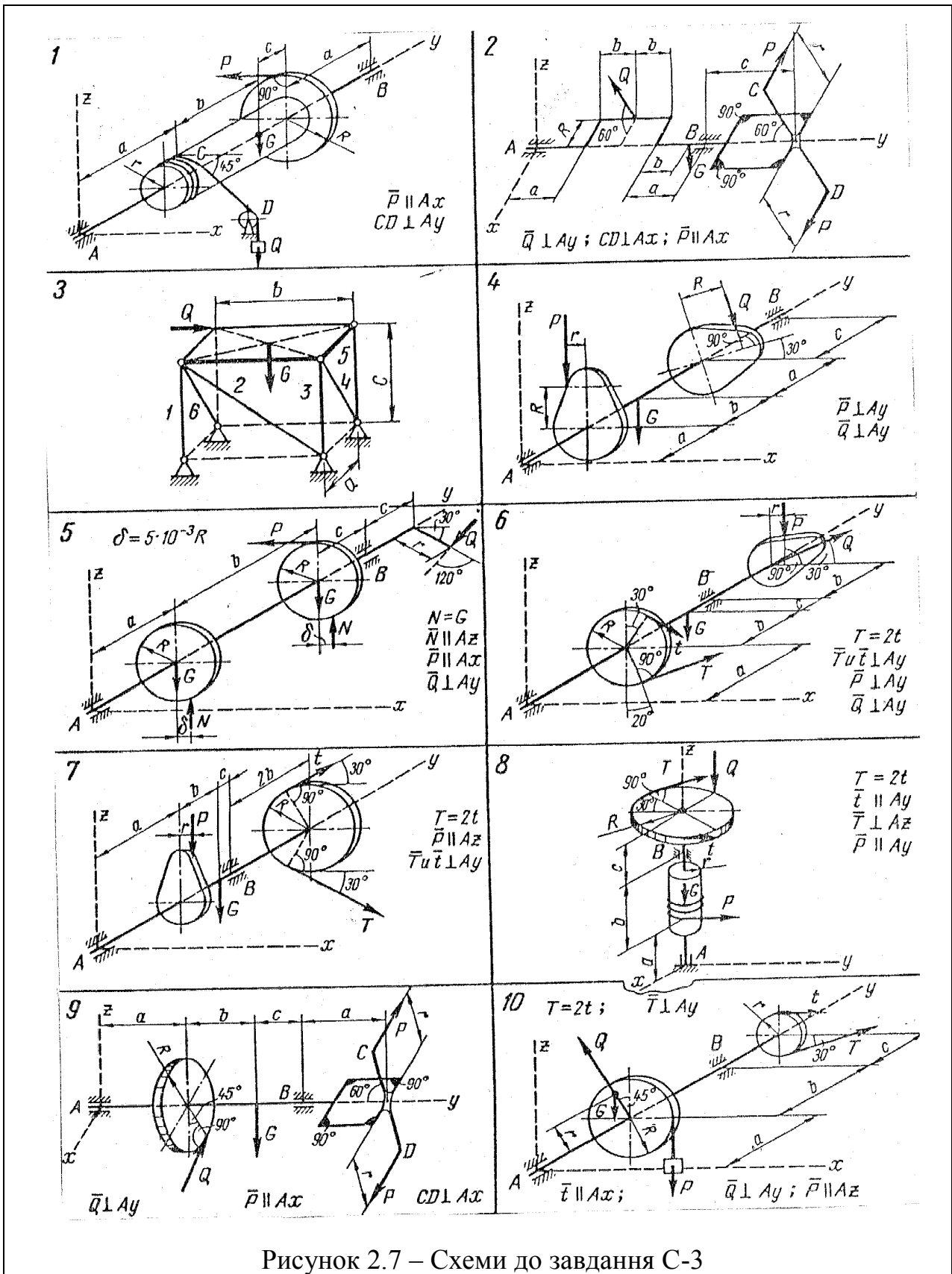
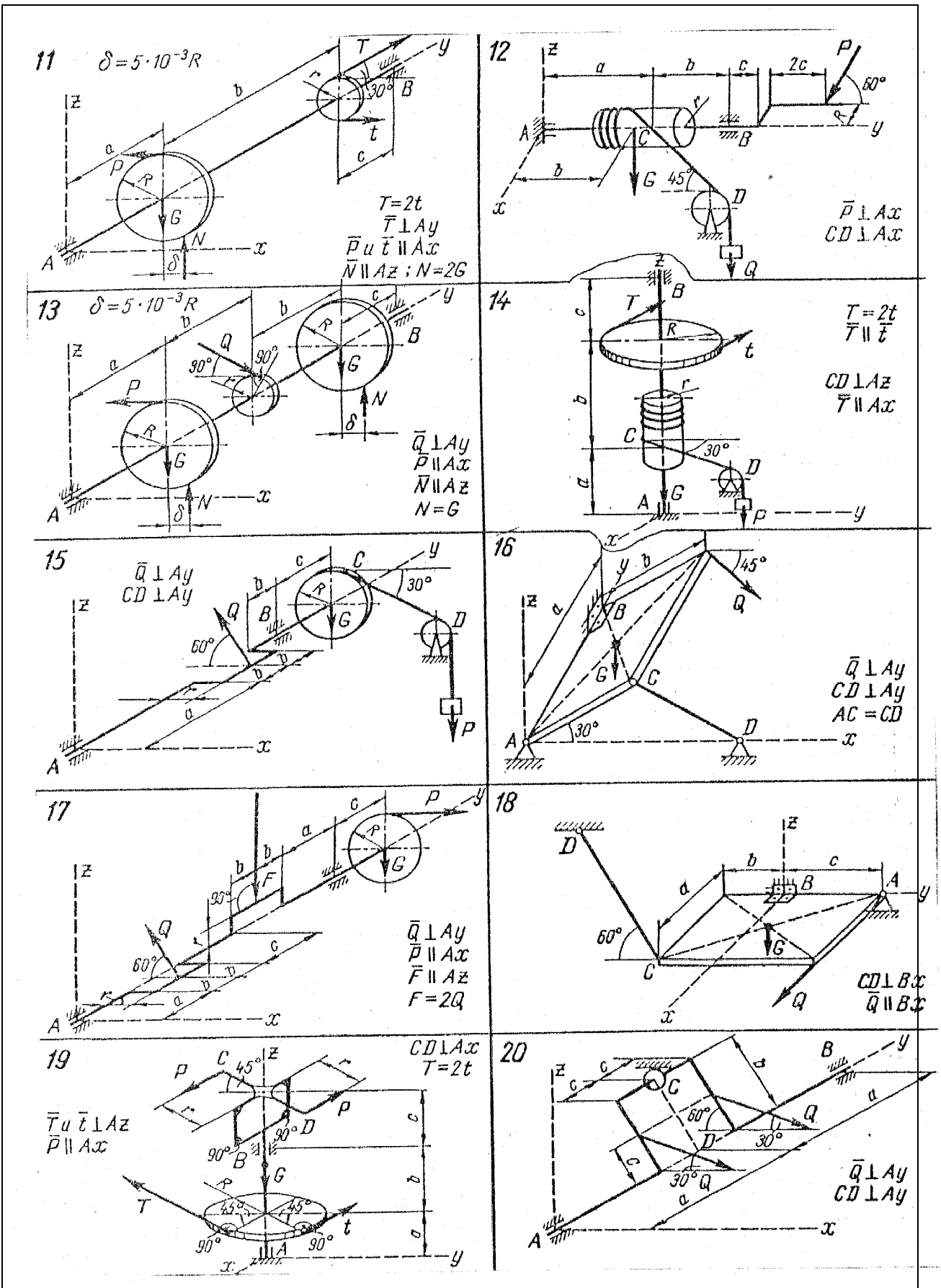


Рисунок 2.7 – Схеми до завдання С-3



Продовження рисунка 2.7

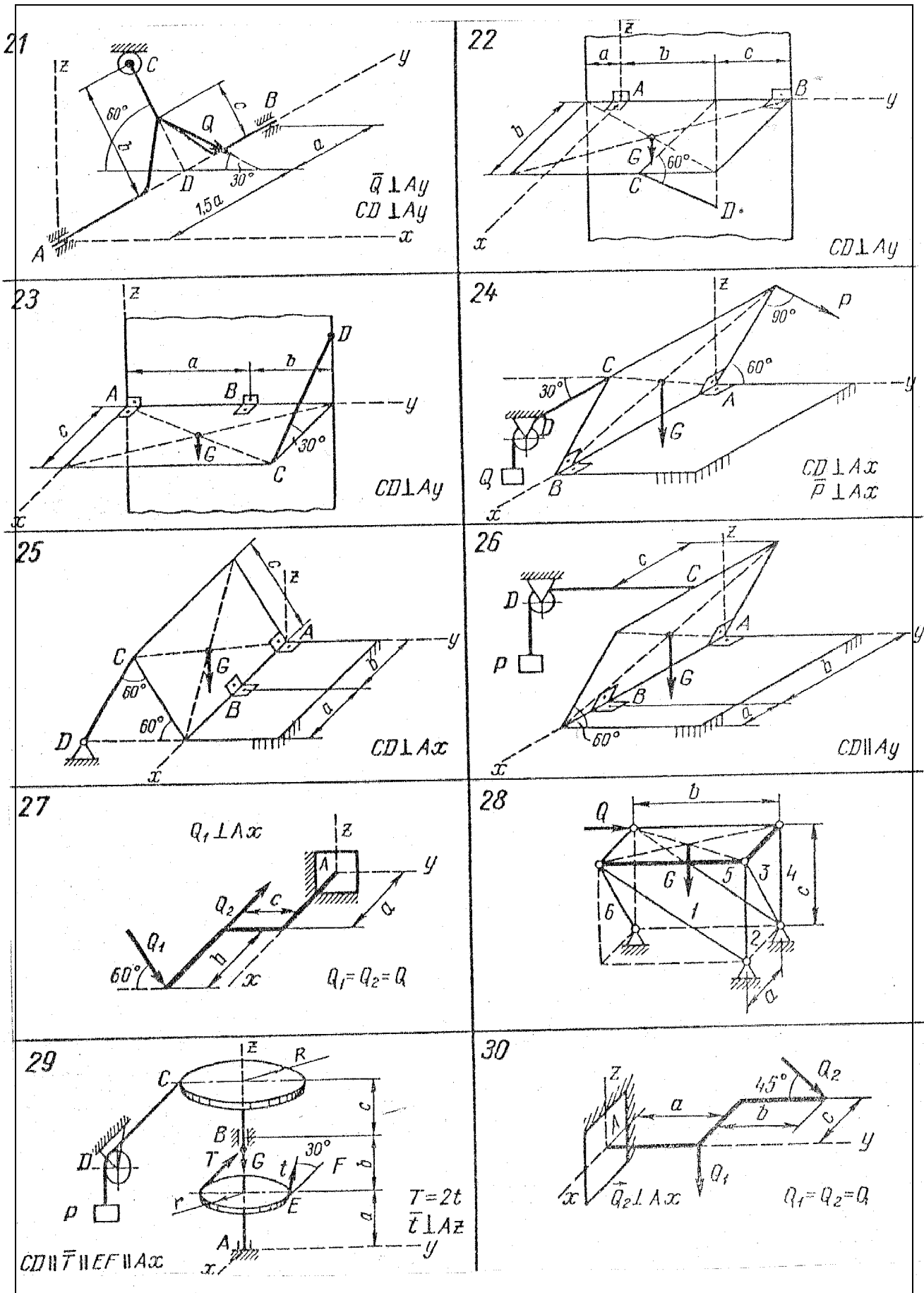


Рисунок 2.8 – Схеми до завдання С-3

2.5 Визначення реакцій стержнів, які підтримують горизонтальну плиту

Приклад (рис. 2.9)

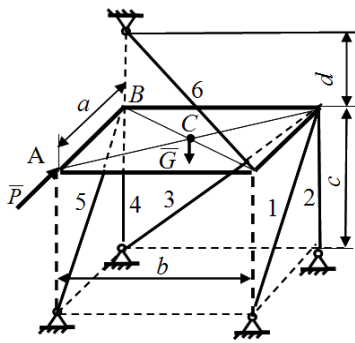


Рисунок 2.9

$$\begin{aligned} G &= 6 \text{ кН}, m = 10 \text{ кН}, \\ a &= 3 \text{ м}, b = 3 \text{ м}, c = 4 \text{ м}, \\ d &= 3 \text{ м} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= ?, S_2 = ?, S_3 = ?, \\ S_4 &= ?, S_5 = ?, S_6 = ? \end{aligned}$$

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу плити ABCD вагою G (рис. 2.10). На неї діє зовнішня сила \bar{P} . У даному випадку в'язями є стержні 1–6. Їх дію на плиту

запишемо реакціями $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \bar{S}_4, \bar{S}_5, \bar{S}_6$, які направляємо від вузлів (припускаємо, що стержні розтягнуті). Вибираємо осі координат так, щоб вони перетинали найбільшу кількість стержнів (це точка O). Зусилля \bar{S}_6 зручно розкласти на складові $\bar{S}_{6x}, \bar{S}_{6y}, \bar{S}_{6z}$, паралельні осям координат.

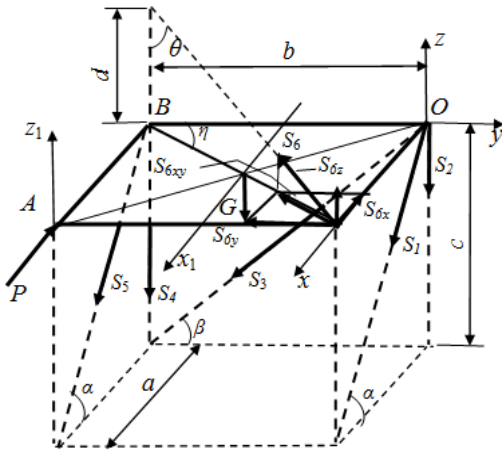


Рисунок 2.10

Їх модулі будуть такими:

$$\begin{aligned} S_{6x} &= S_6 \cdot \sin \theta \sin \eta; \\ S_{6y} &= S_6 \cdot \sin \theta \cos \eta; \\ S_{6z} &= S_6 \cdot \cos \theta. \end{aligned}$$

Складаємо шість рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; \quad S_1 \cdot \cos \alpha + S_5 \cdot \cos \alpha - S_{6x} - P = 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; \quad -S_3 \cdot \cos \beta - S_{6y} = 0; \\ \sum F_{kz} &= 0; \quad -S_1 \cdot \sin \alpha - S_2 - S_3 \cdot \sin \beta - S_4 - S_5 \cdot \sin \alpha + S_{6z} - G = 0; \\ \sum M_x(\bar{F}_k) &= 0; \quad G \cdot \frac{b}{2} + S_4 \cdot b + S_5 \cdot \sin \alpha \cdot b = 0; \end{aligned}$$

$$\sum M_y(\bar{F}_k) = 0; \quad G \cdot \frac{a}{2} - S_{6z} \cdot a = 0;$$

$$\sum M_z(\bar{F}_k) = 0; \quad -P \cdot b - S_{6y} \cdot a + S_5 \cdot \cos \alpha \cdot b = 0.$$

Для розв'язання рівнянь рівноваги треба визначити синуси і косинуси кутів $\theta, \eta, \alpha, \beta$, користуючись заданими розмірами a, b, c, d :

$$\sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}; \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{3}{5};$$

$$\sin \beta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}; \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{3}{5};$$

$$\sin \eta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos \eta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{9+9+9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \quad \cos \theta = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

З отриманих рівнянь рівноваги (1) – (6) визначимо невідомі зусилля:

З 5-го рівняння

$$S_{6z} = \frac{G}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (кН)}, \text{ тому } S_6 = \frac{S_{6z}}{\cos \theta} = \frac{3}{1/\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \approx 5,2 \text{ (кН)};$$

з 6-го рівняння

$$S_5 = \frac{P \cdot b + S_{6y} \cdot a}{b \cdot \cos \alpha} = \frac{10 \cdot 3 + 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3}{3 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{(30+9) \cdot 5}{9} \approx 21,7 \text{ (кН)};$$

з 4-го рівняння

$$S_4 = -\frac{G}{2} - S_5 \cdot \sin \alpha = -\frac{6}{2} - \frac{39 \cdot 5}{9} \cdot \frac{4}{5} = -3 - 17,36 = -20,36 \text{ (кН)};$$

з 2-го рівняння

$$S_3 = -\frac{S_{6y}}{\cos \beta} = -\frac{3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{5}} = -5 \text{ (кН)};$$

з 1-го рівняння

$$S_1 = \frac{P + S_{6x} - S_5 \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{10 + 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{195}{9} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{10 + 3 - 13}{\frac{3}{5}} = 0;$$

з 3-го рівняння

$$S_2 = -S_1 \sin \alpha - S_3 \sin \beta - S_4 - S_5 \sin \alpha - G + S_{6z} =$$

$$= 0 + 5 \cdot \frac{4}{5} + 20,36 - 17,36 - 6 + 3 = 4 \text{ (кН)}.$$

Для перевірки складемо рівняння моментів, наприклад, відносно осі x_1 , яка проходить через центр ваги плити:

$$\sum M_{x_1} (\bar{F}_k) = +S_5 \sin \alpha \cdot \frac{b}{2} + S_4 \cdot \frac{b}{2} - S_1 \sin \alpha \cdot \frac{b}{2} - S_2 \cdot \frac{b}{2} - S_3 \sin \beta \cdot \frac{b}{2} +$$

$$+ S_{6z} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b}{2} \left(S_5 \sin \alpha + S_4 - S_1 \sin \alpha - S_2 - S_3 \sin \beta - S_{6z} \right) =$$

$$= \frac{b}{2} \left(17,36 - 20,36 + 3 - 0 - 4 + 5 \cdot \frac{4}{5} \right) \approx \frac{b}{2} \cdot 0 \approx 0.$$

Відповідь: $S_1 = 0$; $S_2 = 4$ кН; $S_3 = -5$ кН; $S_4 = -20,36$ кН; $S_5 = 21,7$ кН; $S_6 = 5,2$ кН. Стержень 1 – не навантажений; стержні 2, 5, 6 – розтягнуті; стержні 3, 4 – стиснуті.

2.5.1 Завдання для роботи С4 «Визначення реакцій стержнів, які підтримують горизонтальну плиту»

Визначити реакції стержнів, які підтримують тонку горизонтальну плиту вагою \bar{G} при дії на неї уздовж сторони АВ зовнішньої сили \bar{P} . Схеми конструкцій наведені на наступних сторінках. Значення сил G, P і розміри a, b, c, d плити задаються за таблицею 2.2 і рисунками 2.11–2.13..

Варіанти навантажень для роботи С-4 «Визначення реакцій стержнів, які підтримують горизонтальну плиту»

Таблиця 2.2 – Вихідні дані до завдання С-5

Номер варіанта	P	G	Геометричні розміри, м			
	кН		a	b	c	d
1	25	20	8	2,5	3,5	1
2	30	28	5,5	5	3,5	–
3	20	18	4	4,5	3,5	–
4	30	28	7	4	3,5	1
5	35	32	8	4	4	–
6	25	22	9	2,5	4,5	–
7	22	20	4	5	3	1,5
8	35	30	5,5	5,5	4	–
9	40	36	6	6	4	–
10	10	8	8,5	2,5	3,5	2,0
11	25	20	3	2,5	1,5	–
12	35	33	6	5,5	3	1
13	25	24	9,5	2,5	3,5	–
14	35	33	5	7	4	–
15	40	35	5	7	4	–
16	15	14	3,5	4,0	3	–
17	25	20	8,0	2,5	3,5	–
18	35	30	5,5	6	4	–
19	25	20	4,0	5,0	4,0	–
20	33	35	5,5	6,0	4,0	–
21	30	28	7,0	4,0	4,0	1,0
22	20	16	5,5	3,0	3,0	–
23	25	20	4,0	5,0	3,0	1,5
24	30	28	7,0	4,0	4,0	–
25	35	30	5,0	6,0	4,0	–
26	25	20	8,0	2,5	3,5	1,0
27	35	33	5,5	6,0	3,0	–
28	25	30	5,0	6,0	3,0	1,5
29	35	30	5,0	5,5	4,0	–
30	25	20	4,0	5,0	4,0	–

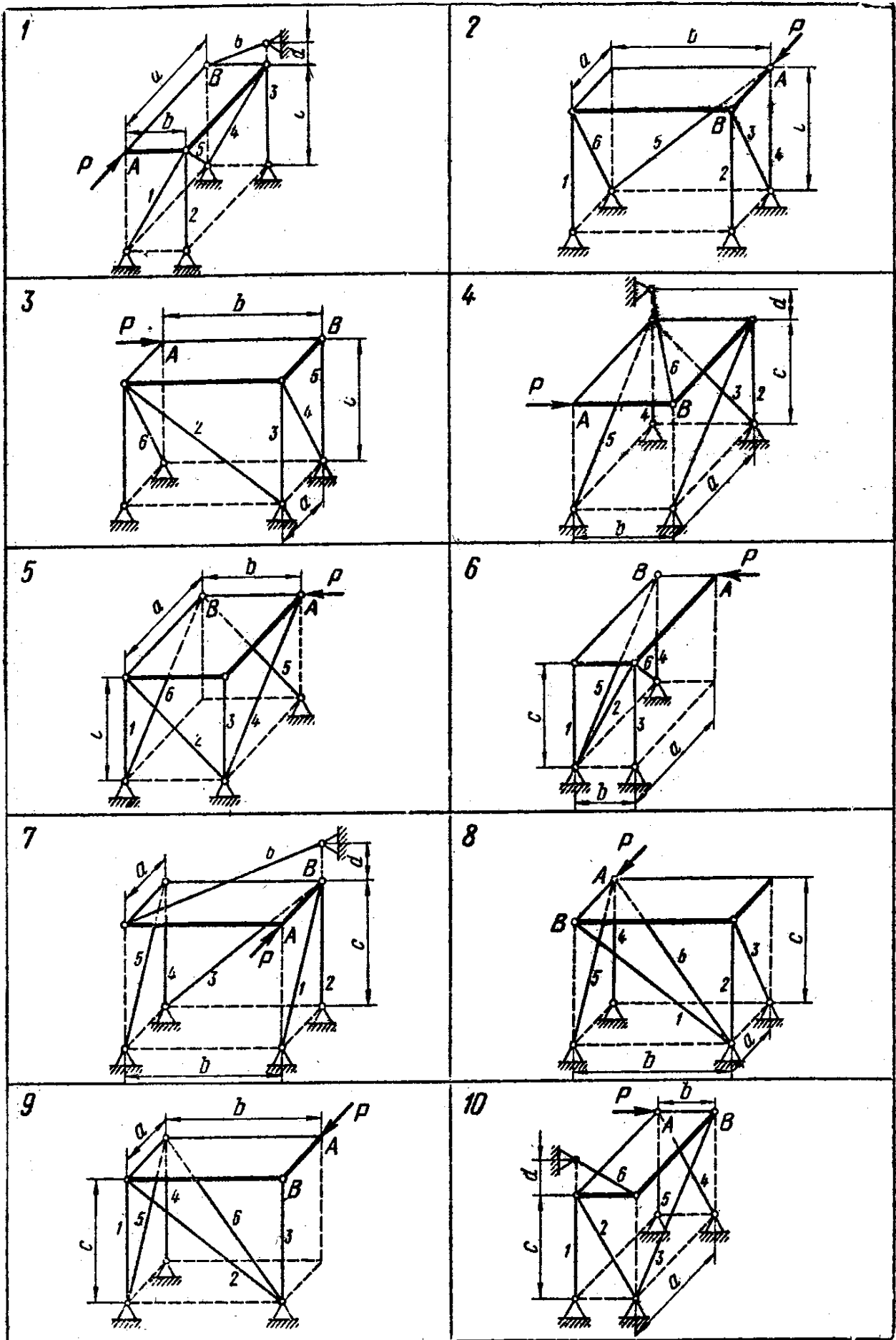


Рисунок 2.11 – Схеми до завдання С-5

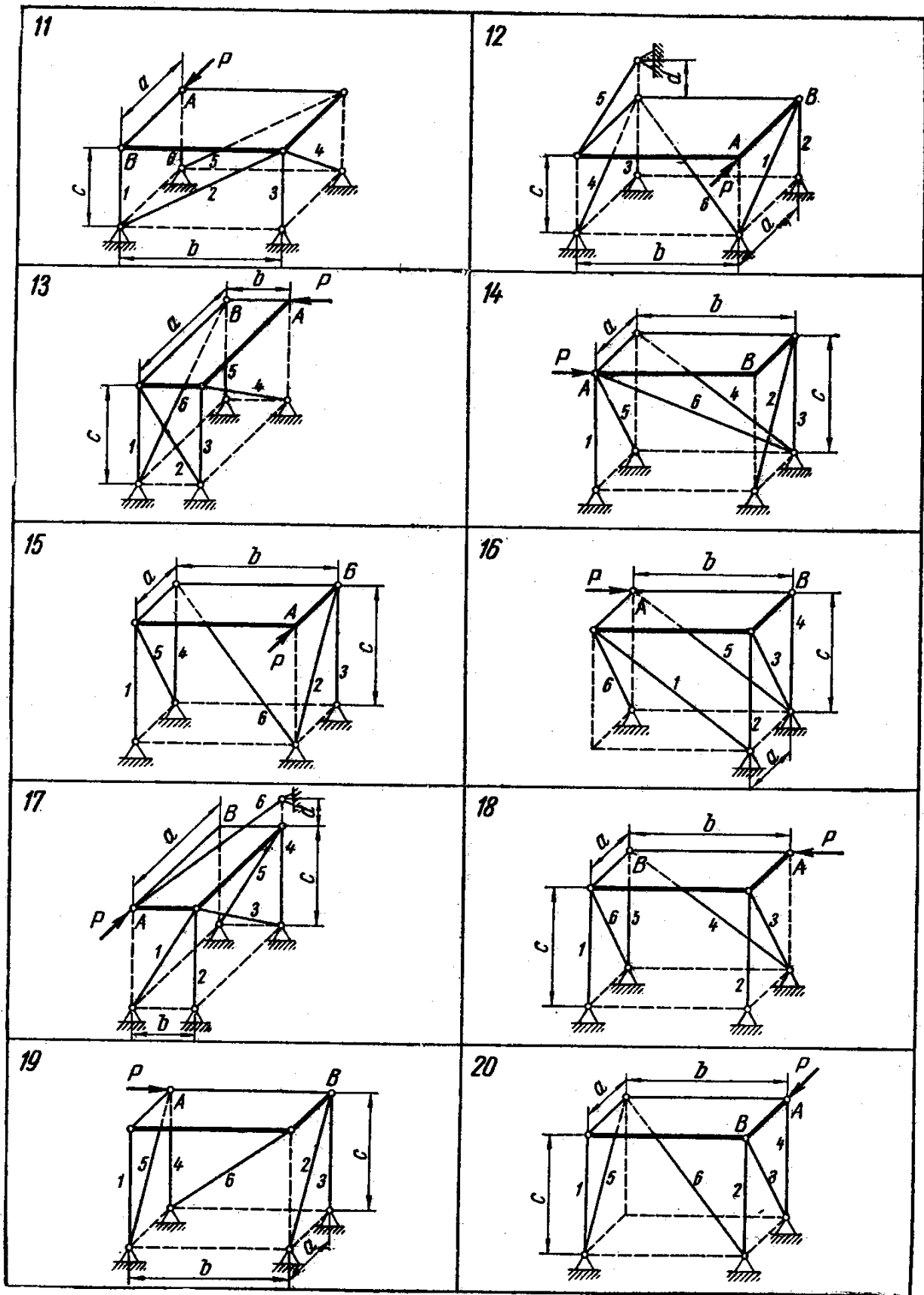


Рисунок 2.12 – Схеми до завдання С-5

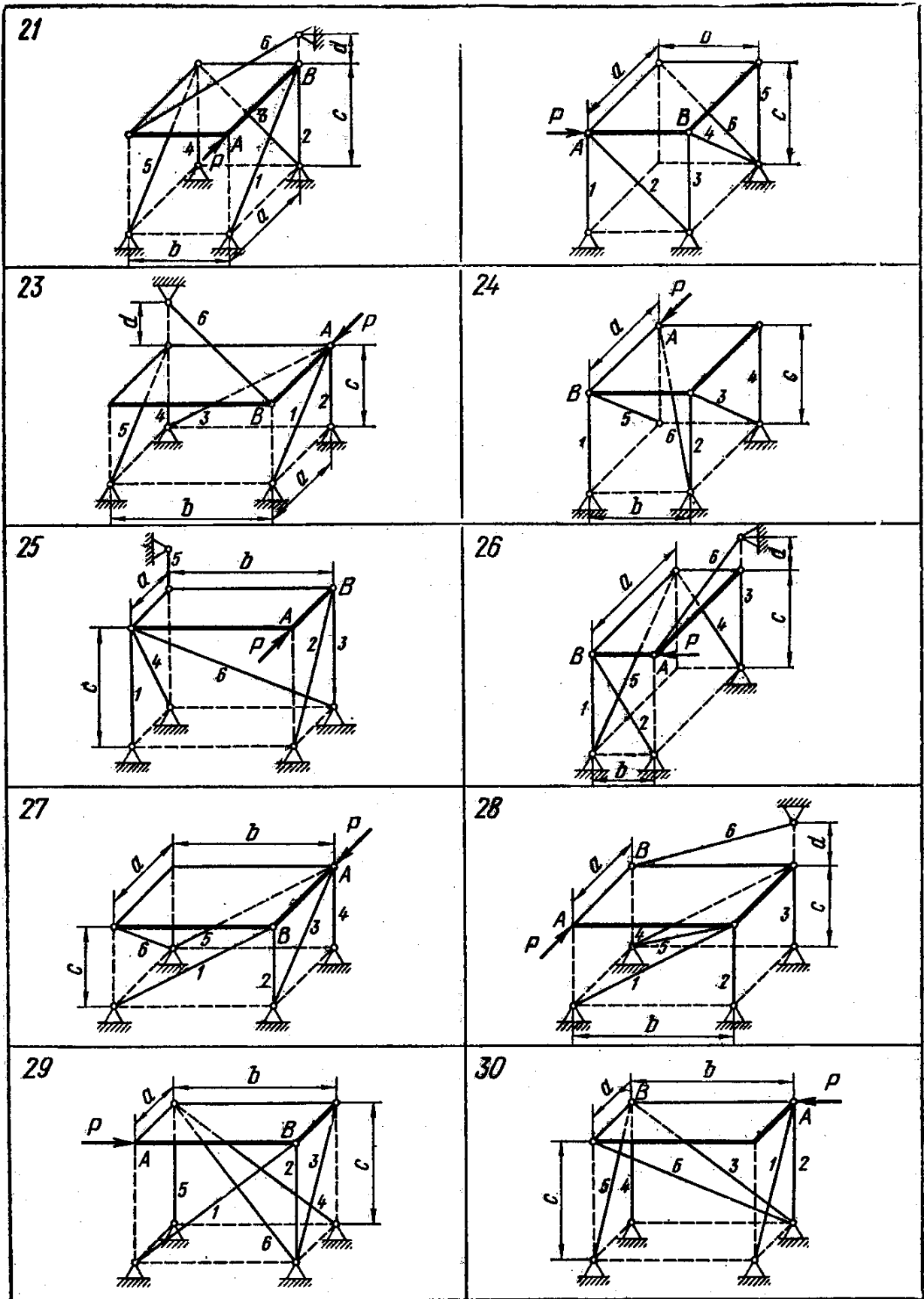


Рисунок 2.13 – Схеми до завдання С-5

3 МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКОРИСТАННЯ ПЕОМ ПРИ ВИКОНАННІ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ «ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР СКЛАДЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ» ТА «ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ ОПОР І ЗУСИЛЬ У СТЕРЖНЯХ ПЛОСКОЇ ФЕРМИ»

Для перевірки вірогідності результатів розв'язання системи алгебраїчних рівнянь рівноваги складеної конструкції при визначенні реакцій в'язей та розв'язання системи алгебраїчних рівнянь рівноваги вузлів плоскої ферми використовується ПЕОМ. Розрахунки виконуються у програмі *MS Excel* пакету *MS Office* або *OpenOffice.org Calc* пакету *OpenOffice.org.2.0.4*.

3.1 Методологія розрахунків

Для розв'язання системи алгебраїчних рівнянь рівноваги використовується метод, згідно з яким рівняння рівноваги записуються у матричній формі

$$[A] \cdot [X] = [B],$$

де $[A]$ – квадратна матриця коефіцієнтів при невідомих реакціях опор;

$[X]$ – матриця-стовпець невідомих реакцій опор;

$[B]$ – матриця-стовпець правих частин алгебраїчної системи рівнянь, у яку входять задані силові фактори.

Наприклад, система рівнянь рівноваги складеної конструкції буде визначатися так:

$$\begin{aligned} X_A + X_C &= 0, \\ Y_A + Y_C - P &= 0, \\ -4X_C + 6Y_C - M &= 0, \\ X_B - X_C + G &= 0, \\ Y_B - Y_C - Q &= 0, \\ 4X_C + 6Y_C - 4G + 3Q &= 0, \end{aligned}$$

де $P = 5$, $M = 10$, $G = 15$, $Q = 12$ – задані силові фактори, записуються у такому вигляді:

$$\begin{aligned} X_A + X_C &= 0, \\ Y_A + Y_C &= 5, \\ -4X_C + 6Y_C &= 10, \\ X_B - X_C &= 15, \\ Y_B - Y_C &= 12, \\ 4X_C + 6Y_C &= 4 \cdot 15 - 3 \cdot 12 = 60 - 36 = 24. \end{aligned}$$

Система рівнянь рівноваги вузлів плоскої ферми визначимо так:

$$\begin{aligned} \text{вузол А:} \quad & X_A + S_1 \cos 45 + S_2 = 0, \\ & Y_A + S_1 \sin 45 = 0, \\ \text{вузол С:} \quad & -S_1 \cos 45 + S_3 \cos 45 + S_4 = 0, \\ & -S_1 \sin 45 - S_3 \sin 45 = 0, \\ \text{вузол В:} \quad & -S_2 - S_3 \cos 45 + S_5 \cos 45 = 0, \\ & R_B + S_3 \sin 45 + S_5 \sin 45 = 0, \end{aligned}$$

вузол D:
$$-S_4 - S_5 \cos 45 = -P \cos 45,$$

$$-S_5 \sin 45 = P \sin 45.$$

де $P=10$ – заданий силовий фактор, а значення тригонометричних функцій $\cos 45 = 0,7$, $\sin 45 = 0,7$ записуються у такому вигляді:

$$X_A + S_1 \cdot 0,7 + S_2 = 0,$$

$$Y_A + S_1 \cdot 0,7 = 0,$$

$$-S_1 \cdot 0,7 + S_3 \cdot 0,7 + S_4 = 0,$$

$$-S_1 \cdot 0,7 + S_3 \cdot 0,7 = 0,$$

$$-S_2 - S_3 \cdot 0,7 + S_5 \cdot 0,7 = 0,$$

$$R_B + S_3 \cdot 0,7 + S_5 \cdot 0,7 = 0,$$

$$-S_4 - S_5 \cdot 0,7 = -7,$$

$$-S_5 \cdot 0,7 = 7,$$

Матрична форма запису системи рівнянь складеної конструкції набуде такого вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \\ X_C \\ Y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \\ -15 \\ 12 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Матрична форма запису системи рівнянь плоскої ферми набуде такого вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,7 & 0 & 0,7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,7 & 0 & -0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0,7 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ R_B \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Якщо обидві частини рівняння прямої матриці помножити зліва на обернену матрицю $[A]^{-1}$, отримаємо такий розв'язок:

$$[X] = [A]^{-1} \cdot [B].$$

Таким чином, для отримання розв'язку системи алгебраїчних рівнянь плоскої ферми необхідно:

- 1) сформуувати матрицю коефіцієнтів при невідомих реакціях опор $[A]$ і матрицю-стовпець правих частин $[B]$;
- 2) обчислити обернену матрицю $[A]^{-1}$;
- 3) отримати матрицю-стовпець шуканих реакцій опор $[X]$ як результат добутку оберненої матриці $[A]^{-1}$ на матрицю-стовпець правої частини $[B]$.

3.2 Запуск програми OpenOffice.org Calc

Для запуску програми можна використати один з двох способів:

- 1) якщо на робочому столі або на панелі задач ОС Windows є ярлик запуску програми *OpenOffice.org Calc* двічі клацнути лівою кнопкою миші (2ЛК) по цьому ярлику;
- 2) клацнути лівою кнопкою миші (1ЛК) по кнопці «Пуск» на панелі задач, у головному меню підвести курсор миші до стрічки «Програми», у меню другого рівня – до стрічки *OpenOffice.org.2.0.4*, у меню третього рівня клацнути 1ЛК – по стрічці *OpenOffice.org Calc*.

За декілька секунд на екрані з'явиться робоче вікно програми *OpenOffice.org Calc*.

3.3 Збереження робочого файлу

Відкритий файл програми *OpenOffice.org Calc* з прізвищем студента доцільно до початку роботи зберегти у папку з прізвищем викладача. Для цього необхідно скористатися пунктом головного меню програми «Файл» і стрічкою «Зберегти як». У вікні «Збереження документа» зробити 2ЛК на папці з прізвищем викладача, а у полі «Ім'я файла» ввести своє прізвище, після чого клацнути 1ЛК по кнопці «Зберегти».

3.4 Підготовка початкових даних

Для прикладу розв'язання складеної конструкції:

- у комірки A1 і H1 ввести назви для матриць, що будуть формуватися: «матриця коефіцієнтів при реакціях опор» і «матриця правих частин» відповідно;
- у комірки A2-F2 ввести позначення шуканих реакцій опор;
- у комірки A3-F8 ввести значення матриці коефіцієнтів при невідомих реакціях опор $[A]$;
- у комірки H3-H8 ввести значення матриці-стовпця правих частин $[B]$;

Для прикладу розв'язання плоскої ферми:

- у комірки A1 і I1 ввести назви для матриць, що будуть формуватися: «матриця коефіцієнтів при реакціях опор і зусиллях у стержнях» і «матриця правих частин» відповідно;

- у комірки A2-H2 ввести позначення шуканих реакцій опор і зусиль у стержнях;
- у комірки A3-H10 ввести значення матриці коефіцієнтів при невідомих реакціях опор і зусиллях у стержнях [A];
- у комірки J3-J10 ввести значення матриці-стовпця правих частин [B].

3.5 Обчислення оберненої матриці [A]⁻¹

Етапи обчислення:

- у комірку A9 (A12) ввести назву «Обернена матриця»;
- встановити курсор на комірку A10 (A13), з якої буде починатись обернена матриця;
- клацнути ЛК на іконці « f_x » у стрічці формул, по якій викликається «Майстер функцій»;
- у вікні «Майстер функцій» вибрати в полі «Категорія» значення «Масив», у полі «Функції» відмітити функцію «MINVERSE», яка обчислює обернену матрицю, і клацнути по кнопці «Далі»;
- у центральній частині вікна «Майстер функцій» з'явиться поле, в яке треба ввести діапазон комірок початкової матриці [A]. Для цього можна клацнути на кнопку зі стрілкою, розміщену праворуч від цього поля (вона мінімізує розміри вікна «Майстер функцій»), помітити мишею або клавішами зі стрілками при натиснутій клавіші «Shift» комірки A3-F8 (A3-H10) матриці коефіцієнтів, знов клацнути на кнопку зі стрілкою, розміщену праворуч від поля (вона максимізує розміри вікна «Майстер функцій»);
- клацнути по кнопці «ОК» «Майстра функцій». У комірках A10-F15 (A13 -H20) з'являться коефіцієнти оберненої матриці [A]⁻¹.

3.6 Обчислення значень матриці-стовпця шуканих реакцій опор [X]

Етапи обчислення:

- у комірку H9 (I12) ввести назву «Матриця розв'язків»;
- встановити курсор на комірку H10 (J13), з якої буде починатися матриця-стовпець шуканих реакцій опор;
- клацнути ЛК на іконці « f_x » у стрічці формул, по якій викликається «Майстер функцій»;
- у вікні «Майстер функцій» у полі «Категорія» вибрати значення «Масив», у полі «Функції» відмітити функцію «MMULT», яка обчислює добуток двох матриць, і клацнути по кнопці «Далі»;
- у центральній частині вікна «Майстер функцій» з'являться два поля, у перше з яких треба ввести діапазон комірок оберненої матриці [A]⁻¹: A10- F15 (A13- H20), а у друге – діапазон комірок матриці-стовпця правих частин [B]: H3-H8 (J3-J10). Для цього потрібно послідовно у кожному з двох полів клацнути на кнопці зі стрілкою, яка розміщується праворуч від цього поля (вона мінімізує розміри вікна «Майстер функцій»), помітити мишею або клавішами зі стрілками

при натиснутій клавіші «Shift» потрібні комірки, знов клацнути на кнопку зі стрілкою, розміщеною праворуч від поля (вона максимізує розміри вікна «Майстер функцій»);

- клацнути по кнопці «ОК» «Майстра функцій». У комірках H10-H15 (J13-J20) з'являться результати розрахунків шуканих реакцій опор;
- у комірці G10-G15 (I13-I20) ввести позначення шуканих реакцій опор зі знаками рівності, які потрібно вирівняти по правому краю комірок;
- послідовно виділити усі матриці і проставити в них границі комірок.

3.7 Збереження файлу з розрахунками на жорсткому диску

Для збереження файлу на жорсткому диску можна скористатися пунктом головного меню програми «Файл» і стрічкою «Зберегти» (або відповідною іконкою на панелі інструментів).

Для збереження файлу на дискеті потрібно скористатися пунктом головного меню програми «Файл» і стрічкою «Зберегти як». У вікні «Збереження документа» у полі «Папка» вибрати стрічку «Диск С», у полі «Тип файлу» вибрати стрічку «Microsoft Office 2010», після чого клацнути ЛК по кнопці «Зберегти».

3.8 Оформлення результатів розрахунків

Сторінку з результатами розрахунків потрібно надрукувати на будь-якому принтері і додати до РГЗ.

Приклади оформлення робочого аркуша файлу і сторінка розрахунків наведені на рисунку 3.1 (складена конструкція) і рисунку 3.2 (пласка ферма) відповідно.

Матриця коефіцієнтів при реакціях опор										Матриця правих частин									
X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_C	Y_C					X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_C	Y_C				
1	1	0	0	0	1	0				0									
2	0	1	0	0	0	0				0									
3	0	0	1	0	0	0				0									
4	0	0	0	1	0	0				0									
5	0	0	0	0	1	0				0									
6	0	0	0	0	0	1				0									
7	0	0	0	0	0	0				0									
8	0	0	0	0	0	0				0									
Обернена матриця										Матриця розв'язків									
10	1	0	0	0,125	0	0	-0,125	X_A	-1,75	10	1	0	0	0,125	0	0	-0,125	Y_A	-2,17
11	0	1	0	-0,08333	0	0	-0,08333	X_B	-13,25	11	0	1	0	0	0	0	0	Y_B	-7,00
12	0	0	0,125	1	0	0	0,125	X_C	14,83	12	0	0	0,08333	0	0	0,08333	X_C	14,83	
13	0	0	0	0	1	0	0	X_C	1,75	13	0	0	0	0,125	0	0	0,125	X_C	1,75
14	0	0	0	0	0	1	0	Y_C	2,83	14	0	0	0,08333	0	0	0,08333	Y_C	2,83	

Рисунок 3.1 – Результати розрахунку реакцій опор складеної конструкції

Матриця коефіцієнтів при реакціях опор і зусиллях у стержнях										Матриця правих частин									
X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5			X_A	Y_A	R_B	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5		
1	1	0	0	0,7	1	0	0			0									
2	0	1	0	0,7	0	0	0			0									
3	0	0	0	-0,7	0	0,7	1	0		0									
4	0	0	0	0,7	0	-0,7	0	0		0									
5	0	0	0	0	-1	-0,7	0	0,7		0									
6	0	0	0	0	0	0	-1	-0,7		0									
7	0	0	1	0	0	0,7	0	0,7		0									
8	0	0	0	0	0	0	-1	-0,7		0									
9	0	0	0	0	0	0	0	0		0									
10	0	0	0	0	0	0	0	0		0									
Обернена матриця коефіцієнтів при реакціях опор і зусиллях у стержнях										Матриця розв'язків									
12	1	0	0	1	0	1	0	1	0	12	1	0	0	0,5	0,5	0	0	0,5	0,5
13	0	1	0,5	0,5	0	0	0	0,5	0,5	13	0	1	0,5	0,5	0	0	0,5	0,5	
14	0	0	-0,5	0,5	0	1	-0,5	1,5	0	14	0	0	-0,71429	0,71429	0	0	-0,71429	0,71429	
15	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0,5	15	0	0	0	0	0	0	-0,5	0,5	
16	0	0	0,71429	0,71429	0	0	0	0,71429	0,71429	16	0	0	0	0	0	0	0,71429	0,71429	
17	0	0	-0,5	0,5	-1	0	-0,5	0,5	0	17	0	0	-0,5	0,5	-1	0	-0,5	0,5	
18	0	0	0,71429	0,71429	0	0	0,71429	0,71429	0	18	0	0	0,71429	0,71429	0	0	0,71429	0,71429	
19	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	19	0	0	0	0	0	0	-1	1	
20	0	0	0	0	0	0	0	-1,42857	0	20	0	0	0	0	0	0	-1,42857	0	

Рисунок 3.2 – Результати розрахунку реакцій опор і зусиль у стержнях плоскої ферми

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Теоретична механіка : підручник / І. В. Кузьо, В. П. Шпачук, Н. М. Ванькович та ін. – Харків : Фоліо, 2017. – 780 с.
2. Путята Т. В. Методика розв'язання задач з теоретичної механіки / Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлін. – 2-ге вид. – Київ : Радянська школа, 1955. – 391 с.
3. Павловський М. О. Теоретична механіка / М. О. Павловський. – Київ, 2002. – 510 с.
4. Теоретична механіка. Статика [Електрон. ресурс] : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології, 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 263 – Цивільна безпека, 275 – Транспортні технології (за видами) / В. П. Шпачук, А. О. Гарбуз. – Електрон. текст. дані. – Харків. нац. ун-т міськ. гос-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 220 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/46326/1/120%D0%9B%20%D0%9A%D0%9B%20%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%202017_3.pdf, вільний (дата звернення: 22.08.2024). – Назва з екрана.
5. Теоретична механіка [Електрон. ресурс] : навч.-метод. посіб. і завд. для контр. і самост. робіт / В. П. Шпачук, А. О. Гарбуз ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 134 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/62007/1/2021%2015%D0%9D%20%D0%BF%D0%B5%D1%87%20%D0%9D%D0%A2%D0%9F%20%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%20%D0%9C%D0%B5%D1%85%202022.pdf>, вільний (дата звернення: 22.08.2024). – Назва з екрана.

ДОДАТОК А

Основні формули тригонометрії

Функції одного кута

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{scs}^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{csc}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{csc} \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \cdot \operatorname{sec} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Функції суми та різниці двох кутів

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

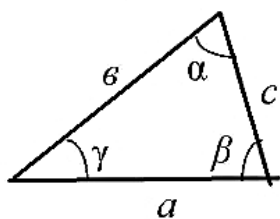
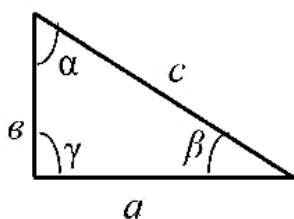
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

Розв'язання трикутників



Прямокутний трикутник

$$\gamma = 90^\circ$$

$$a = c \cdot \sin \alpha \quad b = c \cdot \sin \beta \quad a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$a = c \cdot \cos \beta \quad b = c \cdot \cos \alpha \quad b = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Будь-який трикутник

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \checkmark$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad \checkmark$$

R – радіус кола, що є описаним

$$a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad \checkmark$$

$$P = \frac{a + b + c}{2} \quad (\text{напівпериметр})$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{b \cdot c}} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{P \cdot (P-a)}{b \cdot c}} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{P \cdot (P-a)}}$$

S – площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \sqrt{P(P-a) \cdot (P-b) \cdot (P-c)} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Функції подвійного і половинного кута

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Функції від'ємного кута

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Сума і різниця функцій 2-х кутів

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \qquad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \qquad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Формули зведення

функції	Даний кут						
	$90 - \alpha$	$90 + \alpha$	$180 - \alpha$	$180 + \alpha$	$270 - \alpha$	$270 + \alpha$	$360 - \alpha$
\sin	$+\cos \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
\cos	$+\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\sin \alpha$	$+\cos \alpha$

Значення тригонометричних функцій для кутів 1^ї чверті

$\alpha =$	0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin \alpha$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Електронне навчальне видання

Методичні рекомендації
для практичних занять,
виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань,
самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

(розділ «СТАТИКА»)

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної форми навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології, 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 263 – Цивільна безпека, 275 – Транспортні технології (за видами))

Укладачі: **ШПАЧУК** Володимир Петрович,
ГАРБУЗ Алла Олегівна

Відповідальний за випуск *В. О. Скляр*
Редактор *О. А. Норик*
Комп'ютерне верстання *А. О. Гарбуз*

План 2024, поз. 110М

Підп. до друку 12.09.2024. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 2,7.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Черноглазівська (Маршала Бажанова), 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office @kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.