

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА



Я. Б. Форкун, М. Л. Глєбова

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ. ЧАСТИНИ 1, 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
всіх форм навчання зі спеціальності
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)*

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2024

Форкун Я. Б. Теоретичні основи електротехніки. Частина 1, 2. : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / Я. Б. Форкун, М. Л. Глебова ; Харків нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 91 с.

Автори:

канд. техн. наук, доц. Я. Б. Форкун,
канд. техн. наук, доц. М. Л. Глебова

Рецензент

О. Б. Єгоров, кандидат технічних наук, доцент кафедри альтернативної електроенергетики та електротехніки Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою альтернативної електроенергетики та електротехніки, протокол № 14 від 28 червня 2024 р.

Конспект лекцій складено з метою допомогти студентам спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка під час підготовки до практичних занять, лабораторних робіт, екзамену та виконання розрахунково-графічної роботи

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.....	8
1.1 Електричне коло, електрична схема та їх елементи.....	8
1.2 Джерела напруги і струму. Перетворення джерела напруги на джерело струму (і навпаки).....	11
1.3 Основні поняття, що характеризують електричні схеми. Лінійні й нелінійні електричні схеми, розгалужені й нерозгалужені.....	13
1.4 Напруга на ділянці кола. Закон Ома для ділянки кола.....	13
1.5 Закони Кірхгофа.....	15
1.6 Енергетичний баланс в електричних колах постійного струму.....	16
1.7 Потенціальна діаграма.....	17
1.8 Метод контурних струмів.....	18
1.9 Метод вузлових потенціалів.....	21
1.10 Заміна кількох паралельних віток, що містять ЕРС та опори, однією еквівалентною віткою.....	23
1.11 Основні властивості електричних кіл постійного струму.....	24
1.11.1 Поняття входних і взаємних провідностей.....	24
1.11.2 Принцип взаємності.....	26
1.11.3 Принцип компенсації.....	27
1.11.4 Принцип суперпозиції (накладання) і метод накладання.....	27
1.11.5 Принцип лінійності.....	29
1.12 Перетворення зірки опорів у еквівалентний трикутник опорів (і навпаки).....	29
1.13 Двополюсник. Теорема про еквівалентний генератор. Метод еквівалентного генератора для розрахунку струму в одній вітці.....	31
1.14 Передача енергії від активного двополюсника до навантаження.....	34
1.15 Передача енергії по лініях передачі.....	36

2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ	38
2.1 Основні величини, що характеризують синусоїдний струм	38
2.2 Синусоїдний струм активного опору.....	39
2.3 Синусоїдний струм індуктивності.....	40
2.4 Синусоїдний струм ємності.....	42
2.5 Тригонометричний метод розрахунку кіл синусоїдного струму.....	43
2.6 Потужність в колах синусоїдного струму (активна, реактивна, повна).....	45
2.7 Застосування комплексних чисел для розрахунку електричних кіл.....	48
2.8 Форми запису комплексного числа. Дії з комплексними числами.....	49
2.9 Символічний (комплексний) метод розрахунку кіл синусоїдного струму.....	51
2.10 Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі.....	51
2.11 Комплексна провідність, залежність між опором і провідністю ділянки кола.....	52
2.12 Комплексна форма запису потужності. Баланс потужностей у складних колах синусоїдного струму.....	54
2.13 Векторні й топографічні діаграми.....	55
2.14 Умови передачі максимальної потужності від активного двополюсника до навантаження.....	56
2.15 Резонанс у послідовному коливальному контурі.....	57
2.16 Резонанс у паралельному коливальному контурі.....	61
2.17 Складний резонансний коливальний контур.....	64
2.18 Практичне застосування резонансу.....	65
2.19 Поняття падіння і втрати напруги в лініях передачі енергії.....	68
3 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЧОТИРИПОЛЮСНИКІВ.....	70
3.1 Основні поняття і класифікація.....	70
3.2 Основні рівняння чотириполюсника.....	71
3.3 Визначення коефіцієнтів пасивного чотириполюсника	73

3.3.1	Визначення коефіцієнтів чотириполюсника розрахунком.....	73
3.3.2	Визначення коефіцієнтів чотириполюсника експериментальним шляхом.....	76
3.4	Схеми заміщення пасивного чотириполюсника.....	78
3.5	Годографи (кругові й лінійні діаграми).....	79
3.5.1	Лінійні діаграми.....	79
3.5.2	Кругові діаграми.....	81
3.5.3	Кругова діаграма струму для двох послідовно з'єднаних опорів.....	82
4	ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ІЗ ВЗАЄМОІНДУКТИВНИМИ ЗВ'ЯЗКАМИ	83
4.1	Індуктивно зв'язані елементи кола. Поняття взаємної індуктивності	83
4.2	Розрахунок електричних кіл за наявності в них індуктивно зв'язаних котушок.....	85
4.3	Визначення взаємної індуктивності	86
4.4	Паралельне з'єднання котушок із взаємоіндуктивними зв'язками.....	87
	СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	89

ВСТУП

Електротехнікою називають область техніки, що пов'язана з отриманням, розподілом, перетворенням і використанням електричної енергії, або, інакше кажучи, – це широка галузь практичного застосування електромагнітних явищ. «Теоретичні основи електротехніки» (далі – ТОЕ) – дисципліна, яка займається питаннями розрахунку й вивчення явищ, що характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукції магнітного полів. Таким чином, ТОЕ є теоретичною базою для всіх електротехнічних спеціальностей.

Дисципліна складається з трьох частин, причому першу та другу частину вивчають студенти всіх освітніх програм спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, а третю частину – тільки студенти освітніх програм «Електротехнічні системи електроспоживання», «Нетрадиційні та відновлювальні джерела енергії».

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Завдання дисципліни такі:

- навчити основним законам електричних, магнітних і електромагнітних кіл та співвідношенням між електричними величинами в електричних та магнітних колах;
- ознайомити зі структурними елементами й фізичними величинами кіл;
- навчити теорії і методології аналізу електричних кіл постійного та змінного (синусоїдного і несинусоїдного) струмів;
- навчити теорії і методології аналізу симетричних і несиметричних трифазних кіл із синусоїдними й несинусоїдними джерелами енергії;
- навчити теорії і методології аналізу перехідних процесів в електричних колах із зосередженими параметрами;

– ознайомити з основними законами і методами розрахунку нелінійних кіл постійного та змінного струму;

– навчити теорії і методології аналізу електричних кіл з розподіленими параметрами;

– ознайомити з основами теорії електромагнітного поля, у якій розглядаються електромагнітні явища у нерухомих ізотропних середовищах.

Матеріал, який охоплює цей конспект лекцій, відносять до першої частини дисципліни, а саме:

– теорія лінійних електричних кіл постійного струму;

– теорія лінійних однофазних електричних кіл синусоїдного струму;

– основи теорії чотиріполіусників;

– електричні кола із взаємоіндуктивними зв'язками.

Призначений конспект лекцій для студентів усіх форм навчання спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка і підготовлений відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Теоретичні основи електротехніки. Частини 1, 2».

Вивчення курсу «Теоретичні основи електротехніки» потребує знання курсів фізики (розділ «Електрика та магнетизм») і вищої математики (системи лінійних алгебраїчних рівнянь, похідна і інтеграл, диференціальні рівняння, комплексні числа, функціональні ряди, інтегральні перетворення Лапласа, векторна алгебра).

1 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1 Електричне коло, електрична схема та їх елементи

Електричне коло – сукупність пристроїв, призначених для передачі, розподілу і взаємного перетворення електромагнітної та інших видів енергії, по яким може протікати електричний струм. Електромагнітні процеси в електричному колі описують за допомогою понять «струм», «напруга», «електрорушійна сила» (далі – ЕРС), «опір», «провідність», «індуктивність», «ємність».

Основні елементи електричного кола:

- джерела електричної енергії, тобто пристрої, які перетворюють механічну, теплову, хімічну та інші види енергії в електромагнітну (генератор, акумуляторна батарея);
- перетворювачі електромагнітної енергії (трансформатори, перетворювачі частоти);
- пристрої передачі електромагнітної енергії (лінії передачі);
- споживачі електромагнітної енергії, які перетворюють електромагнітну енергію в механічну, теплову, хімічну та інші види (двигуни, лампи розжарювання, резистори).

Кожна група – це безліч різних приладів, що відрізняються за принципом дії та конструкцією.

Електричні кола, в яких процеси отримання електричної енергії в джерелах, передача та перетворення в споживачах відбуваються при незмінних у часі струмах та напругах, називають колами постійного струму.

В курсі ТОЕ електричне коло замінюють розрахунковою схемою заміщення – електричною схемою, яка слугує моделлю реального кола. Електричні схеми будують з ідеалізованих елементів, активних та пасивних, кожний з яких відображає головне (домінуюче) фізичне явище в реальному елементі електричного кола. Кожному елементу схеми відповідає певне графічне зображення.

До пасивних елементів, які є аналогами споживачів електромагнітної енергії, відносять (рис. 1.1):

- опір, який є ідеалізованим елементом, що приблизно замінює резистор, в ньому відбувається перетворення електричної енергії на теплову (вимірюється в Ом);
- ємність, яка є ідеалізованим елементом, що приблизно замінює конденсатор, в ній накопичується енергія електричного поля (вимірюється у Ф);
- індуктивність, яка є ідеалізованим елементом, що приблизно замінює котушку індуктивності, в ній накопичується енергія магнітного поля (вимірюється в Гн).

До активних елементів, які є аналогом джерел електромагнітної енергії, відносять джерела електрорушійної сили та джерела струму (рис. 1.2).

У джерелах ЕРС і джерелах струму під дією сторонніх сил неелектричної природи виникає поділ зарядів, що призводить до появи напруги на затискачах джерела ЕРС або струму на ділянці з джерелом струму. Активні елементи враховують процеси перетворення неелектричних видів енергії в електромагнітну.

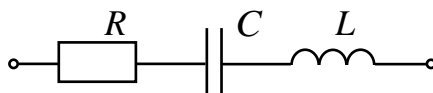


Рисунок 1.1 – Умовні позначення опору, ємності та індуктивності

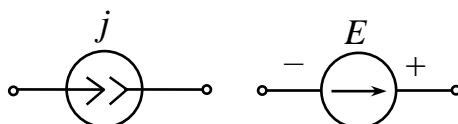


Рисунок 1.2 – Умовні позначення джерела струму та ЕРС

При складанні схеми заміщення в неї вводять ті ідеалізовані схемні елементи, за допомогою яких характеризують основні процеси в реальних елементах кола, а відносно другорядними процесами для розглянутої смуги частот і амплітуд зазвичай нехтують.

Наприклад, резистор для низьких частот можна представити одним резистивним елементом, але для високих частот той самий резистор повинен бути представлений іншою схемою (рис. 1.3, а), у якій мала (паразитна) індуктивність L_n враховує зчеплений із резистором магнітний потік, а мала

паразитна ємність C_n , враховує протікання струму зміщення між затискачами резистора.

Конденсатор на низьких частотах заміщують одним ємнісним елементом, а на високих частотах конденсатор представляють схемою (рис. 1.3, б). У цій схемі резистор R_n враховує втрати в неідеальному діелектрику конденсатора, а L_n – паразитна індуктивність підвідних контактів.

Індуктивну котушку більш повно представляють схемою, зображеною на рисунку 1.3, в. У ній R_n враховує теплові втрати в обмотці і в осерді, а паразитна ємність C_n – струми між витками котушки.

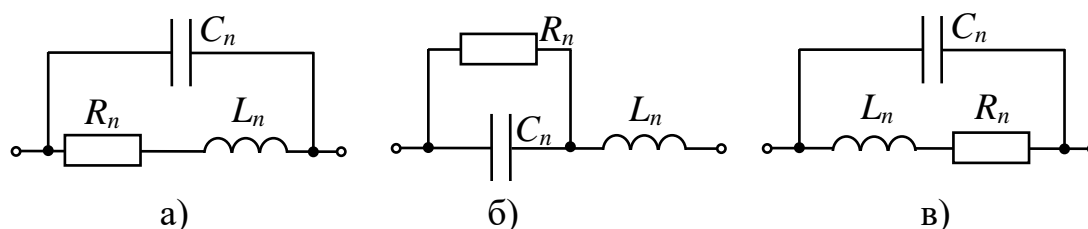


Рисунок 1.3 – Представлення на схемах резистора, конденсатора і котушки

Якщо напруга і струм на всіх елементах реального електричного кола не залежать від просторових координат, то таке коло називають колом із зосередженими параметрами та описують алгебраїчними або звичайними диференціальними рівняннями. Процеси в колах із розподіленими параметрами описують рівняннями в часткових похідних.

Відповідність електричної схеми та електричного кола перевіряють шляхом зіставлення розрахунку з експериментом.

1.2 Джерела напруги і струму. Перетворення джерела напруги на джерело струму (і навпаки)

Джерела енергії є причиною виникнення струмів і напруг в електричних колах. Для аналізу електричних кіл використовують поняття ідеалізованих джерел напруги та струму, які графічно на схемах зображують так, як це показано на рисунку 1.2.

Під ідеалізованим джерелом напруги розуміють таке джерело, напруга на затискачах якого не залежить від струму, що протікає через нього і яке характеризують тільки електрорушійною силою E (рис. 1.4, а). Якщо джерело напруги не ідеалізоване, то воно має внутрішній опір R_0 і напруга на його затискачах залежить від величини струму, що протікає через нього (рис. 1.4, б). На рисунку 1.4, б масштаби за струмом та за напругою вольт-амперної характеристики джерела позначені, як m_U, m_I .

Під ідеалізованим джерелом струму розуміють таке джерело енергії, сила струму якого j не залежить від навантаження, до якого це джерело під'єднане (внутрішній опір такого джерела $R_0 \rightarrow \infty$). Умовне позначення ідеалізованого джерела струму та його вольт-амперна характеристика (далі – ВАХ) представлені на рисунку 1.5.

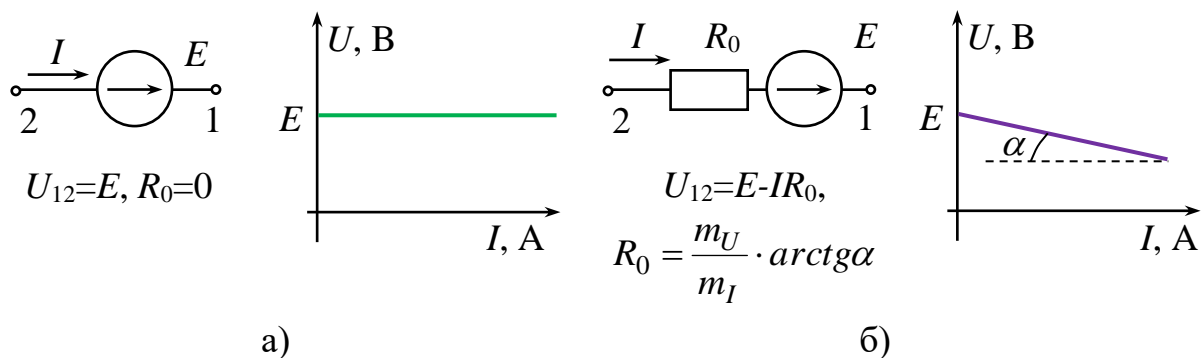


Рисунок 1.4 – Джерело напруги та його ВАХ:
а – ідеальне; б – реальне

Фізично виконати ідеалізовані джерела струму та напруги неможливо.

При розрахунку електричних кіл реальне джерело напруги з ЕРС E_0 та внутрішнім опором R_0 , що з'єднане з навантаженням, можна представити двома схемами (рис. 1.6, а і 1.6, б). Ці схеми еквівалентні щодо потужності, яка споживається навантаженням, і нееквівалентні щодо потужності, яка

споживається внутрішнім опором R_0 . Для схеми рисунку 1.6, а:

$$E = U_{\text{н}} + I_{\text{н}} \cdot R_0; \quad (1.1)$$

$$\frac{E}{R_0} = \frac{U_{\text{н}}}{R_0} + I_{\text{н}}. \quad (1.2)$$

Позначимо:
$$\frac{E}{R_0} = j, \quad (1.3)$$

$$\frac{U_{\text{н}}}{R_0} = I_0. \quad (1.4)$$

З урахуванням (1.3),
$$j = I_0 + I_{\text{н}}. \quad (1.5)$$

Цьому рівнянню відповідає схема, зображена на рисунку 1.6, б, а формулу (1.3) застосовують для переходу від реального джерела напруги до реального джерела струму. І навпаки, для переходу від реального джерела струму до реального джерела напруги користуються формулою

$$E = j \cdot R_0. \quad (1.6)$$

У відношенні енергії, що споживається внутрішнім опором R_0 , ці схеми нееквівалентні, тобто для рисунку 1.6, а – $P_0 = I_{\text{н}}^2 \cdot R_0$, а для рисунку 1.6, б – $P_0 = I_0^2 \cdot R_0$. Потужність, що споживається опором навантаження $R_{\text{н}}$, для обох схем однакова:

$$P_{\text{н}} = I_{\text{н}}^2 \cdot R_{\text{н}}. \quad (1.7)$$

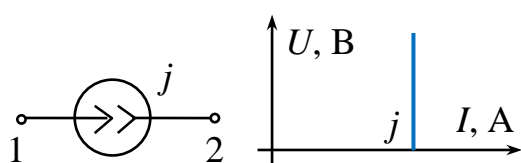


Рисунок 1.5 – Ідеальне джерело струму

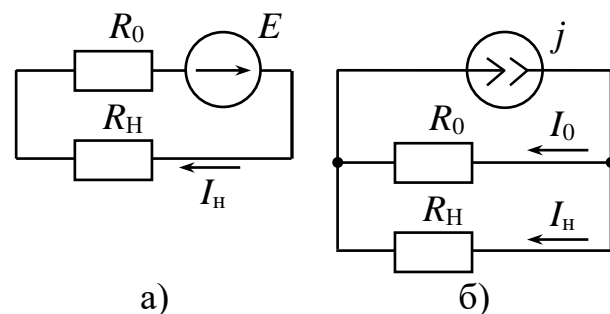


Рисунок 1.6 – Реальні джерела енергії:
а – джерело напруги; б – джерело струму

1.3 Основні поняття, що характеризують електричні схеми.

Лінійні й нелінійні електричні схеми, розгалужені й нерозгалужені

Лінійні електричні схеми – це схеми, всі пасивні елементи яких є лінійними (резистор, ємність, індуктивність), для яких залежність між напругами, струмами, зарядами, магнітними потоками (потокозчепленнями) виражають лінійними функціями такого вигляду:

$$u = R \cdot i, \psi = L \cdot i, q = C \cdot u. \quad (1.8)$$

Якщо електричне коло (схема) має хоча б один нелінійний елемент (діод, стабілітрон, лампа розжарювання та ін.), то воно нелінійне.

Основними топологічними поняттями, що характеризують електричні схеми, є вітка, вузол, контур.

Вітка – ділянка кола, уздовж якої протікає один і той самий струм. Утворюється вітка кількома послідовно з'єднаними елементами – активними і пасивними.

Вузол – точка на схемі, де з'єднуються три і більше вітки. Вітки, приєднані до одних і тих самих вузлів, називаються паралельними.

Контур – будь-який замкнутий шлях, що проходить по декількох вітках.

Розгалуженим електричним колом (схемою) зветься коло (схема), що має три і більше вітки, два і більше вузлів. Нерозгалуженим колом (схемою) називається коло (схема), що має тільки один контур, тобто не має вузлів.

1.4 Напруга на ділянці кола. Закон Ома для ділянки кола

Напруга на ділянці кола – це різниця потенціалів крайніх точок цієї ділянки. За визначенням (рис. 1.7, а),

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b. \quad (1.9)$$

При протіканні через опір R струму I потенціал точки a більший, ніж потенціал точки b ($\varphi_a > \varphi_b$) на величину падіння напруги в опорі R , тобто:

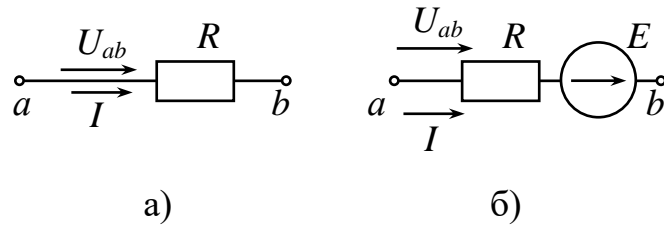


Рисунок 1.7 – Ділянки електричної схеми

$$\varphi_a = \varphi_b + I \cdot R, \quad (1.10)$$

або
$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = I \cdot R. \quad (1.11)$$

Таким чином, закон Ома для ділянки кола, що не має у своєму складі ЕРС (рис. 1.7, а),

$$I = \frac{U_{ab}}{R}. \quad (1.12)$$

Розглянемо ділянку кола, що має у своєму складі ЕРС (рис. 1.7, б). Для цього кола справедливими будуть такі вирази:

$$\left. \begin{array}{l} U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b \\ \varphi_a = \varphi_c + I \cdot R \\ \varphi_c = \varphi_b - E \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_a - \varphi_b = \varphi_c + I \cdot R - \varphi_c - E \Rightarrow U_{ab} = I \cdot R - E. \quad (1.13)$$

Таким чином, закон Ома для ділянки кола, що має у своєму складі ЕРС (рис. 1.5, б), має такий вигляд:

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R}. \quad (1.14)$$

Якщо ділянка кола має у своєму складі кілька ЕРС і також кілька опорів, то закон Ома буде виглядати так:

$$I = \frac{\pm U_{ab} \pm E_k}{\sum R_k}. \quad (1.15)$$

Треба відзначити, що коли напрями ЕРС E_k і напруги U_{ab} збігаються з напрямом струму I на ділянці ab , то в чисельнику беремо E_k і напругу U_{ab} зі знаками «+», і навпаки.

1.5 Закони Кірхгофа

Перший закон Кірхгофа виражає закон збереження заряду, тобто алгебраїчна сума струмів віток, що приєднані до вузла, в будь-який момент часу дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^c \pm I_k = 0, \quad (1.16)$$

де k – номер вітки, яка зв'язана з даним вузлом;

c – кількість віток, приєднаних до вузла.

Якщо деякий струм спрямований до вузла, то він входить у рівняння (1.16) зі знаком «+», спрямований від вузла – зі знаком «-».

Другий закон Кірхгофа виражає закон збереження енергії, тобто алгебраїчна сума напруг ділянок замкнутого контуру дорівнює нулю в будь-який

момент часу:

$$\sum_{i=1}^d U_i = 0, \quad (1.17)$$

де i – номер ділянки, що входить у контур;

d – кількість ділянок контуру з різними напругами.

Здебільшого використовують інше формулювання другого закону Кірхгофа: алгебраїчна сума падінь напруг уздовж контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС уздовж цього самого контуру (знаки ЕРС або падінь напруг залежать від їх напрямів і обраних напрямів обходу контуру).

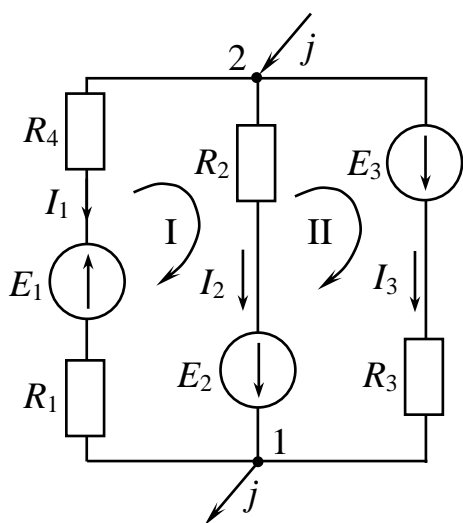


Рисунок 1.8 – Розгалужена електрична схема

За першим законом Кірхгофа для схеми треба скласти « $n-1$ » рівнянь (n – кількість вузлів у схемі).

За другим законом Кірхгофа треба скласти « $m-n+1$ » рівнянь, де m – кількість віток у схемі з невідомими струмами (якщо вітка містить джерело струму, то струм цієї вітки відомий). Отже, система рівнянь за законами Кірхгофа повинна мати стільки рівнянь, скільки невідомих струмів (віток).

Розглянемо приклад складання системи рівнянь за законами Кірхгофа для схеми, зображеної на рисунку 1.8:

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 - I_3 + j = 0 \\ -I_1 \cdot (R_1 + R_4) + I_2 \cdot R_2 = E_1 + E_2 \\ -I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 = -E_2 + E_3. \end{cases} \quad (1.18)$$

Порядок розрахунку струмів схеми за законами Кірхгофа

1. Визначаємо кількість вузлів і віток у схемі, а отже, кількість рівнянь за першим і другим законами Кірхгофа.
2. Довільно вибираємо напрями струмів у вітках і обходу контурів.
3. Складаємо і розв'язуємо систему відносно невідомих струмів.

1.6 Енергетичний баланс в електричних колах постійного струму

На підставі закону збереження енергії кількість тепла, що виділяється в опорах схеми, повинна дорівнювати енергії, яка постачається за той самий час джерелами енергії, тобто потужність джерел енергії (напруги і струму) дорівнює потужності, що споживається опорами схеми:

$$\sum_{k=1}^h (\pm E_k \cdot I_k) + \sum_{k=1}^s j_k \cdot U_{ab} = \sum_{k=1}^t I_k^2 \cdot R_k, \quad (1.19)$$

де k – поточний індекс;

h – кількість ЕРС у схемі;

s – кількість джерел струму у схемі;

t – кількість опорів у схемі;

U_{ab} – напруга між умовною точкою «а», куди спрямований струм джерела струму j_k , та умовною точкою b , звідки струм джерела струму витікає.

Правило складання балансу таке: якщо напрям джерела ЕРС E_k і напрям струму I_k , що протікає через нього, збігаються, то доданок $E_k \cdot I_k$ беремо зі знаком «+», якщо навпаки – зі знаком «-».

Приклад складання балансу для схеми, зображеної на рисунку 1.8:

$$-E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 + j \cdot U_{21} = I_1^2 \cdot (R_1 + R_4) + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3. \quad (1.20)$$

1.7 Потенціальна діаграма

Потенціальна діаграма – це графік розподілу потенціалу вздовж замкнутого контуру або ділянки кола.

По осі абсцис відкладають опори вздовж контуру, один за одним, починаючи від довільно обраної точки, потенціал якої приймають рівним нулю.

Якщо діаграму будують для довільно обраного контуру схеми і потенціал останньої точки (вона ж є і першою) дорівнює нулю, то це свідчить про правильність визначення струмів (розв’язку задачі).

На осі ординат відкладають потенціали точок контуру.

Розглянемо приклад побудови діаграми для схеми на рисунку 1.9, а:

1. Визначаємо струми на ділянках кола (у нашому випадку – це один струм, бо схема нерозгалужена): $I = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$.

2. Один із потенціалів контуру приймаємо рівним нулю: $\varphi_1 = 0$.

3. Визначаємо потенціали інших точок (потенціал останньої точки, вона ж перша, повинен дорівнювати нулю):

$$\varphi_2 = \varphi_1 + I \cdot R_1;$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 - E;$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 + I \cdot R_2;$$

$$\varphi_1 = \varphi_4 + I \cdot R_3.$$

4. Обираємо масштаби за віссю потенціалів та опорів і будуємо діаграму (рис. 1.9, б).

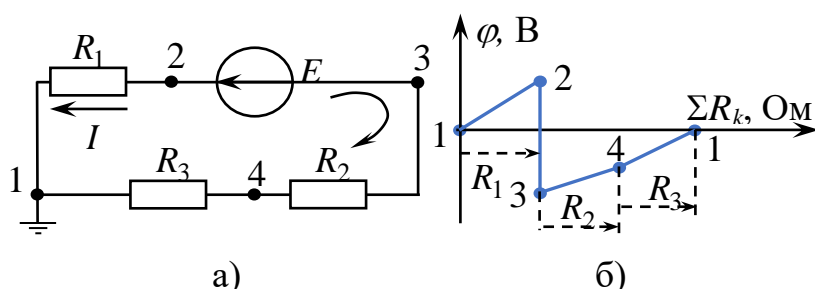


Рисунок 1.9 – Схема (а) та її потенційна діаграма (б)

1.8 Метод контурних струмів

Метод застосовують для розрахунку електричних кіл будь-якої складності. Він дозволяє зменшити кількість рівнянь, які потрібно було б скласти за законами Кірхгофа, а саме з кількості « m » до кількості « $m-n+1$ » (n – кількість вузлів, m – кількість віток у схемі).

Відповідно до цього методу роблять припущення, що в кожному незалежному контурі існує свій контурний струм. Незалежний контур – це контур, що містить хоча б одну вітку, яка не входить в інші контури.

Кількість рівнянь, що потрібно скласти за методом, дорівнює кількості незалежних контурів, або числу рівнянь за другим законом Кірхгофа. Струми віток визначають за допомогою контурних струмів.

Потрібно мати на увазі, що контурний струм – це зручне, але умовне розрахункове поняття, фізично існують лише струми віток.

Розглянемо схему рисунку 1.10, у якій довільно задаємося напрямками струмів у вітках I_1, I_2, I_3 і напрямками контурних струмів I_{11}, I_{22} (за годинниковою стрілкою). Складаємо систему за другим законом Кірхгофа:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_1 + I_{11} \cdot R_4 + I_{11} \cdot R_2 - I_{22} \cdot R_2 = E_1 + E_2 \\ I_{22} \cdot R_3 + I_{22} \cdot R_2 - I_{11} \cdot R_2 = E_3 - E_2 \end{cases}, \quad (1.21)$$

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_4 + R_2) - I_{22} \cdot R_2 = E_1 + E_2 \\ -I_{11} \cdot R_2 + I_{22} \cdot (R_2 + R_3) = E_3 - E_2. \end{cases} \quad (1.22)$$

Позначимо:

$R_{11} = R_1 + R_4 + R_2$ – власний опір першого контуру, дорівнює сумі всіх опорів першого незалежного контуру;

$R_{22} = R_2 + R_3$ – власний опір другого контуру, дорівнює сумі всіх опорів другого незалежного контуру;

$R_{12} = R_{21} = -R_2$ – взаємний опір першого та другого контурів, дорівнює опорі, що належить обом контурам, у нашому випадку – зі знаком «-»;

$E_{11} = E_1 + E_2$; $E_{22} = E_3 - E_2$ – власні ЕРС першого та другого незалежних контурів, які дорівнюють алгебраїчній сумі всіх ЕРС першого та другого незалежного контурів відповідно (знак «+» перед ЕРС E_k означає, що напрям цієї ЕРС збігається з обраним напрямом відповідного контурного струму).

При користуванні цим методом контурні струми доцільно направляти однаково (наприклад, за годинниковою стрілкою), тоді усі опори з різними індексами (R_{12} , R_{23} та ін.) будуть від'ємними.

З огляду на позначення система (1.22) набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} = E_{11} \\ I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} = E_{22} \end{cases} \quad (1.23)$$

Після того як із системи знаходять значення контурних струмів (в цьому випадку – I_{11} , I_{22}), визначають значення струмів віток:

$$I_1 = -I_{11}; \quad I_2 = I_{11} - I_{22}; \quad I_3 = I_{22} \quad (1.24)$$

Якщо в колі є джерело струму, увімкнене в деяку вітку, один із контурних струмів стає відомим (дорівнює струму джерела струму з відповідним знаком) і кількість рівнянь скорочується на одиницю.

Порядок розрахунку за методом контурних струмів

1. Довільно обираємо напрями струмів у вітках кола.
2. Визначаємо кількість рівнянь у системі за методом (кількість незалежних контурів).
3. Обираємо напрями контурних струмів у незалежних контурах.
4. Складаємо систему рівнянь за методом, що містить « $m-n+1$ » рівнянь. Наприклад, якщо схема має три незалежні контури, то і система містить три рівняння:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} + I_{33} \cdot R_{13} = E_{11} \\ I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} + I_{33} \cdot R_{23} = E_{22} \\ I_{11} \cdot R_{31} + I_{22} \cdot R_{32} + I_{33} \cdot R_{33} = E_{33} \end{cases} \quad (1.25)$$

5. Визначаємо власні та взаємні опори незалежних контурів, а також власні ЕРС незалежних контурів.

6. Розв'язуємо систему рівнянь Наприклад для системи (1.25) загальний розв'язок виглядає так:

$$\begin{aligned} I_{11} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{13}}{\Delta} \\ I_{22} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{23}}{\Delta}, \\ I_{33} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{31}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{32}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{33}}{\Delta} \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} - \text{головний визначник системи}; \quad (1.27)$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} - \text{алгебраїчне доповнення, його отримують з}$$

головного визначника системи шляхом викреслювання першого стовця і першого рядка та множення отриманого результату на $(-1)^{1+1}$;

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} - \text{алгебраїчне доповнення, що отримують із}$$

головного визначника системи шляхом викреслювання першого стовця і другого рядка та множення отриманого результату на $(-1)^{1+2}$.

1.9 Метод вузлових потенціалів

У методі вузлових потенціалів (далі – МУП) невідомими є потенціали вузлів схеми, після визначення яких струми віток знаходять за законом Ома. Врахуємо, що завжди можна один із вузлів схеми «заземлити» (потенціал його дорівнює нулю). Саме тому система рівнянь для визначення потенціалів інших вузлів повинна мати « $n-1$ » рівнянь (n – кількість вузлів у схемі). В основі методу – закон Ома та перший закон Кірхгофа. Розглянемо схему на рисунку 1.11, у якій «заземлюємо» вузол 3, тобто $\varphi_3 = 0$.

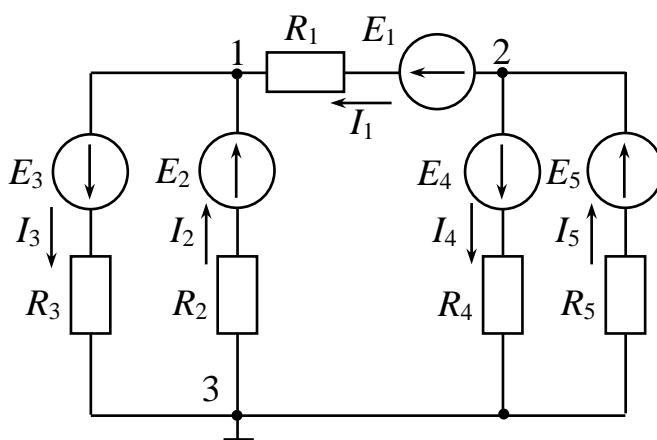


Рисунок 1.11 – Схема для пояснення методу вузлових потенціалів

За першим законом Кірхгофа для вузла 1 та за законом Ома для віток 1, 2, 3

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0, \quad (1.28)$$

$$I_1 = (\varphi_2 - \varphi_1 + E_1) \cdot G_1, \quad (1.29)$$

$$I_2 = (-\varphi_1 + E_2) \cdot G_2, \quad (1.30)$$

$$I_3 = (\varphi_1 + E_3) \cdot G_3, \quad (1.31)$$

де $G_1 = \frac{1}{R_1}$, $G_2 = \frac{1}{R_2}$, $G_3 = \frac{1}{R_3}$ – провідності першої, другої, третьої вітки відповідно.

Підставимо (1.29), (1.30), (1.31) у (1.28). Отримуємо:

$$\varphi_1 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) - \varphi_2 \cdot G_1 = E_2 \cdot G_2 + E_1 \cdot G_1 - E_3 \cdot G_3. \quad (1.32)$$

Якщо скористатися аналогічними міркуваннями для вузла 2, то

$$-\varphi_1 \cdot G_1 + \varphi_2 \cdot (G_1 + G_3 + G_4) = -E_1 \cdot G_1 - E_4 \cdot G_4 + E_5 \cdot G_5. \quad (1.33)$$

Позначимо:

$G_{11} = G_1 + G_2 + G_3$ – власна провідність вузла 1, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що приєднані до вузла 1;

$G_{22} = G_1 + G_4 + G_5$ – власна провідність вузла 2, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що приєднані до вузла 2;

$G_{12} = G_{21} = 1/R_1$ – взаємна провідність вузлів 1 і 2, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що напряду поєднують ці вузли;

$$\sum_1 E_k \cdot G_k = E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 - E_3 \cdot G_3, \quad \sum_2 E_k \cdot G_k = -E_1 \cdot G_1 - E_4 \cdot G_4 + E_5 \cdot G_5 \quad -$$

вузлові струми першого та другого вузлів відповідно.

Добуток $E_i \cdot G_i$ беремо зі знаком «+», якщо ЕРС E_k спрямована до вузла, відносно якого визначається вузловий струм.

Зурахуванням уведених коефіцієнтів рівняння (1.32) і (1.33) будуть виглядати так:

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot G_{11} - \varphi_2 \cdot G_{12} = \sum_1 E_k \cdot G_k \\ -\varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} = \sum_2 E_k \cdot G_k. \end{cases} \quad (1.34)$$

Після визначення із системи (1.34) потенціалів вузлів φ_1 та φ_2 знаходимо струми за рівняннями (1.29) – (1.31), а також за рівняннями (1.35) та (1.36):

$$I_4 = (\varphi_2 + E_4) \cdot G_4, \quad (1.35)$$

$$I_5 = (-\varphi_2 + E_5) \cdot G_5. \quad (1.36)$$

Деякі особливості застосування методу

Припустимо, що в схемі рисунка 1.11 у вітці, де протікає струм I_5 , немає опору R_5 ($R_5 = 0$). Тоді $\varphi_2 = E_5$ і достатньо з першого рівняння системи (1.34) визначити значення потенціалу φ_1 . Струми I_1, I_2, I_3, I_4 розраховують за (1.29) – (1.31) та (1.35), а струм I_5 – за першим законом Кірхгофа для вузла 2.

Якщо в схемі тільки два вузли, то маємо частковий випадок МУП – метод двох вузлів. Наприклад, для схеми рисунка 1.8, якщо $\varphi_2 = 0$, перше рівняння системи (1.34) буде таким:

$$\varphi_1 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) = -E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3. \quad (1.37)$$

Враховуючи, що $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1$, отримуємо вираз для напруги між вузлами 1 і 2:

$$U_{12} = \frac{-E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{\sum_k^{\pm} E_k \cdot G_k}{\sum G_k}. \quad (1.38)$$

Останнє рівняння і є основою методу двох вузлів, за яким спочатку визначають напругу між двома вузлами, а потім – струми за законом Ома.

Порядок розрахунку за методом вузлових потенціалів

1. Довільно обираємо напрями струмів у вітках кола.
2. Потенціал одного з вузлів «заземлюємо», тобто приймаємо його потенціал рівним нулю.
3. Складаємо систему рівнянь за методом, що містить « $n-1$ » рівнянь.
4. Визначаємо власні і взаємні провідності вузлів.
5. Визначаємо вузлові струми.
6. Розв'язуємо систему, тобто визначаємо потенціали вузлів схеми.
7. За законом Ома розраховуємо струми віток.

1.10 Заміна кількох паралельних віток, що містять ЕРС

та опори, однією еквівалентною віткою

Припустимо, що ділянки схем рисунків 1.12, а і 1.12, б еквівалентні щодо струму I та потенціалів вузлів точок a та b . Тоді рівняння для $G_{екв}$ і $E_{екв}$ (отримують за законами Кірхгофа для вузла a і за законом Ома для ділянок кола) буде виглядати так:

$$E_{екв} = \frac{E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3}{(G_1 + G_2 + G_3)}; \quad (1.39)$$

$$G_{екв} = G_1 + G_2 + G_3. \quad (1.40)$$

Якщо деяка ЕРС E_k спрямована в протилежну щодо $E_{екв}$ сторону, то у чисельнику правої частини рівняння (1.39) добуток $E_k \cdot G_k$ обираємо зі знаком мінус.

У випадку, коли між вузлами a і b також увімкнене джерело струму j , то у чисельник правої частини рівняння (1.39) додаємо $+j$, якщо струм джерела струму j спрямований до вузла a , або додаємо $-j$ (якщо навпаки).

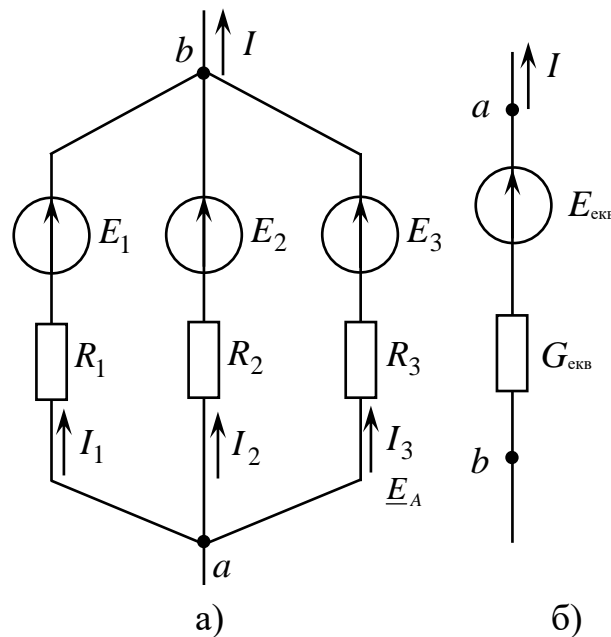


Рисунок 1.12 – Еквівалентна заміна паралельно з’єднаних віток:
а – вихідна схема; б – результат заміни

1.11 Основні властивості електричних кіл постійного струму

1.11.1 Поняття вхідних і взаємних провідностей

Вхідна провідність – відношення струму однієї вітки (вітка має номер n) до ЕРС тієї самої вітки за умови закорочення ЕРС в інших вітках (позначення – G_{nn}).

Взаємна провідність – це відношення струму однієї вітки (вітка має номер n) до ЕРС іншої вітки (вітка має номер m) за умови закорочення ЕРС в інших вітках (позначення – G_{nm}). Визначають вхідні та взаємні провідності розрахунковим і експериментальним шляхом. З поняттям вхідної провідності

пов'язане поняття вхідного опору, тобто відношення ЕРС однієї вітки до струму тієї самої вітки за умови закорочення ЕРС в інших вітках). Наприклад, вхідний опір вітки n

$$R_{\text{вхн}} = \frac{E_n}{I_n} = \frac{1}{G_{nn}}. \quad (1.41)$$

Знайдемо деякі вхідні і взаємні провідності для схеми на рисунку 1.13.

Вихідні дані: $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 4 \text{ Ом}$, $E_1 = 70 \text{ В}$, $E_2 = 30 \text{ В}$, $E_3 = 30 \text{ В}$.

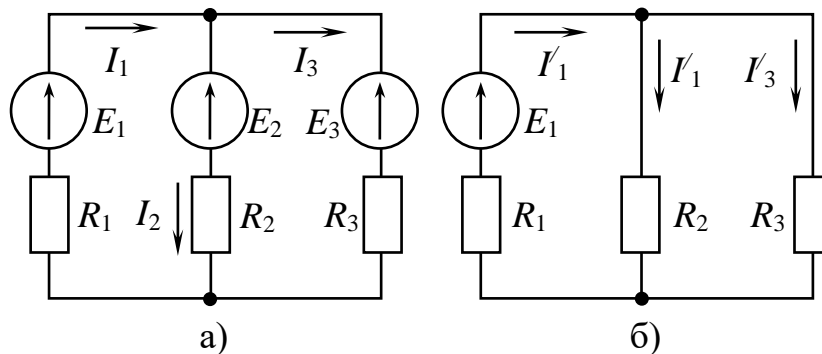


Рисунок.1.13 – Визначення вхідної та взаємної провідностей

Визначити провідності G_{11} , G_{21} , G_{31} .

Закорочуємо ЕРС E_2 , E_3 (рис. 1.13, б).

Визначаємо струми віток:

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = 30 \text{ А}; \quad I'_2 = 20 \text{ А}; \quad I'_3 = 10 \text{ А}.$$

$$\text{Тоді } G_{11} = \frac{I'_1}{E_1} = \frac{30}{70} = 0,4285 \text{ См}; \quad G_{21} = \frac{I'_2}{E_1} = \frac{20}{70} = 0,2857 \text{ См};$$

$$G_{31} = \frac{I'_{31}}{E_1} = \frac{10}{70} = 0,1428 \text{ См}.$$

Здійснюючи аналогічні дії для визначення G_{22} , G_{32} , G_{12} , G_{21} , G_{31} , G_{13} , переконуємося, що $G_{12} = G_{21}$, $G_{31} = G_{13}$, $G_{23} = G_{32}$.

1.11.2 Принцип взаємності

Для будь-якого лінійного кола струм I_k в k -й вітці, який спричинений ЕРС E_m , що розміщується в m -й вітці, буде дорівнювати струму I_m в m -й вітці, що спричинений ЕРС E_k , яка розміщується в k -й вітці, за умови, що $E_k = E_m$ чисельно. Принцип доводиться з рівності $G_{mk} = G_{km}$ і $E_k = E_m$. Тобто, $I_k = E_m \cdot G_{km}$, $I_m = E_k \cdot G_{mk}$, а отже, $I_k = I_m$ (враховуючи, що $E_k = E_m$).

Розглянемо доказ принципу взаємності на прикладі схеми рисунка 1.14.

Джерело ЕРС E розміщується в першій вітці (схема рис. 1.14, а). Звідси $I_3 = E \cdot G_{31}$.

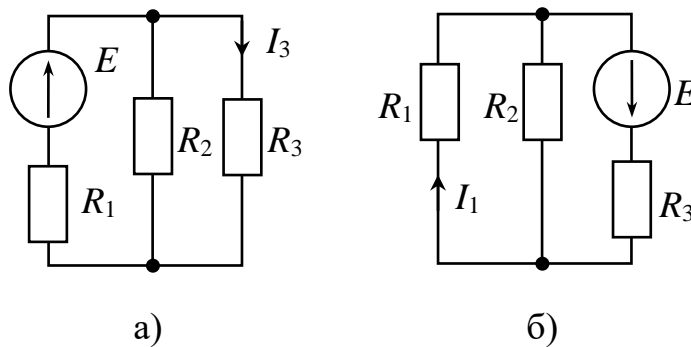


Рисунок 1.14 – Схема для пояснення принципу взаємності

$$I_3 = \frac{E}{\left(R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} \right)} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} = E \cdot G_{31}.$$

Джерело ЕРС E розміщується в третій вітці (схема рис. 1.14, б). Звідси $I_1 = E \cdot G_{13}$.

$$I_1 = \frac{E}{R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{E \cdot R_2}{R_3 \cdot R_1 + R_3 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2} = E \cdot G_{13}.$$

Оскільки $G_{13} = G_{31} = \frac{R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3} \Rightarrow I_3 = I_1$.

1.11.3 Принцип компенсації

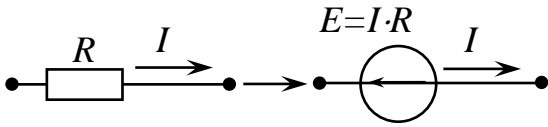


Рисунок 1.15 – Для пояснення принципу компенсації

назустріч струму в цьому опорі (див. рис. 1.15).

У будь-якому електричному колі без зміни розподілу струмів в ньому опір зі струмом, що протікає, може бути замінений на ЕРС, що дорівнює падінню напруги в опорі ($E = I \cdot R$) і спрямована

1.11.4 Принцип суперпозиції (накладання) і метод накладання

Принцип накладання: струм у будь-якій вітці лінійного електричного кола буде дорівнювати алгебраїчній сумі так званих часткових струмів, що спричинені кожною ЕРС окремо. Впливає принцип з лінійності рівнянь, що отримані на основі законів Кірхгофа для електричних кіл з постійними параметрами.

Наприклад, для схеми на рисунку 1.13, а струм

$$I_1 = I_1' - I_1'' - I_1''' , \quad (1.42)$$

де I_1' – частковий струм першої вітки, що викликаний тільки ЕРС E_1 ;

I_1'' – частковий струм першої вітки, що викликаний тільки ЕРС E_2 ;

I_1''' – частковий струм першої вітки, що викликаний тільки ЕРС E_3 .

На кожному етапі визначення часткових струмів залишається тільки одне джерело енергії (інші джерела ЕРС закорочують, а джерела струму вилучають).

З принципу накладання впливає метод накладання.

Порядок розрахунку за методом накладання

(на прикладі схеми рисунка 1.13, а).

1. Довільно спрямовуємо струми у вітках (рис. 1.13, а).
2. Розраховуємо часткові струми від дії кожної ЕРС чи кожного джерела струму окремо. При цьому треба закорочувати інші джерела напруги та

розмикати джерела струму (враховуємо також, що не треба закорочувати внутрішні опори джерел енергії, якщо останні задані).

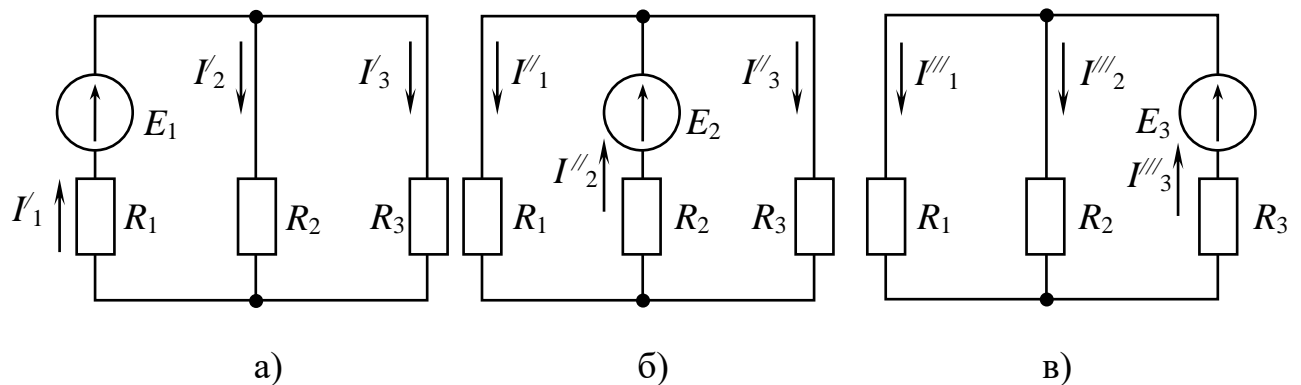


Рисунок 1.16 – Визначення часткових струмів для схеми рисунка 1.13, а

Для схеми (рис. 1.16, а) визначаємо часткові струми від дії ЕРС E_1, E_2, E_3 :

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}, \quad I_2' = I_1' \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3}, \quad I_3' = I_1' \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = I_1' - I_2';$$

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}}, \quad I_1'' = I_2'' \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3}, \quad I_3'' = I_2'' \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = I_2'' - I_1'';$$

$$I_3''' = \frac{E_3}{R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}; \quad I_2''' = I_3''' \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \quad I_1''' = I_3''' \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = I_3''' - I_2'''.$$

3. Алгебраїчно підсумовуємо часткові струми, орієнтуючись при цьому на обрані напрями струмів у вихідній схемі (рис. 1.13, а):

$$I_1 = I_1' - I_1'' - I_1''', \quad I_2 = I_2' - I_2'' + I_2'''; \quad I_3 = I_3' + I_3'' - I_3'''.$$

Частковими струмами не можна користуватися при розрахунку потужностей: $I_1^2 \cdot R_1 \neq I_1'^2 \cdot R_1 + I_1''^2 \cdot R_1 + I_1'''^2 \cdot R_1$.

1.11.5 Принцип лінійності

Якщо в лінійному електричному колі змінюється ЕРС або опір в деякій вітці, то дві величини (струми або напруги) двох будь-яких віток зв'язані одна з одною лінійною залежністю вигляду $y = a + b \cdot x$. Тобто, якщо у схемі рисунка 1.13 змінюється ЕРС E_3 ($0 \leq E_3 \leq \infty$), то можна довести, що струми I_1 та I_2 зв'язані залежністю

$$I_1 = a + b \cdot I_2. \quad (1.43)$$

1.12 Перетворення зірки опорів у еквівалентний трикутник опорів (і навпаки)

Зіркою опорів називається таке з'єднання трьох опорів, при якому всі початки опорів, з'єднані в одну точку (рис. 1.17, а), а трикутником опорів називається таке з'єднання трьох опорів, при якому початок одного опору з'єднується з кінцем іншого (рис. 1.17, б).

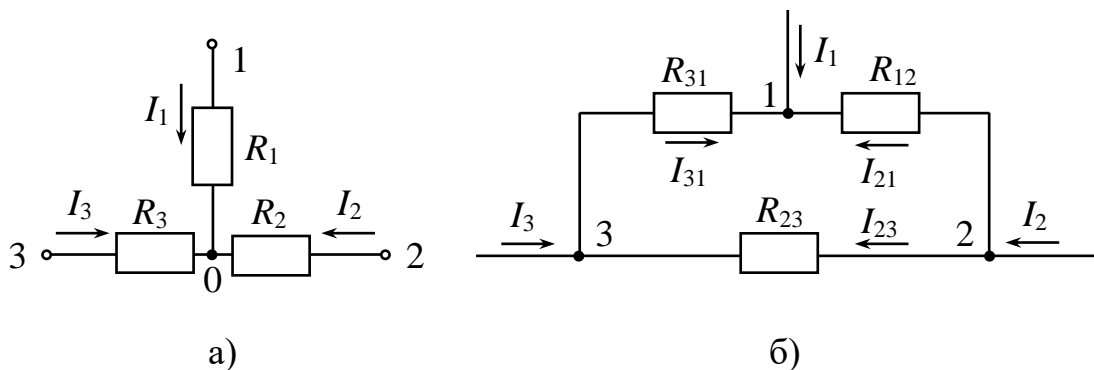


Рисунок 1.17 – Зірка опорів (а) та трикутник опорів (б)

Схеми рисунка 1.17, а і 1.17, б еквівалентні у відношенні струмів I_1 , I_2 , I_3 та потенціалів вузлів точок 1, 2 і 3.

За першим законом Кірхгофа та Ома (рис. 1.7, а)

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0; \quad (1.44)$$

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0) \cdot G_1, \quad (1.45)$$

$$I_2 = (\varphi_2 - \varphi_0) \cdot G_2; \quad (1.46)$$

$$I_3 = (\varphi_3 - \varphi_0) \cdot G_3. \quad (1.47)$$

Підставимо рівняння (1.45), (1.46), (1.47) в (1.44):

$$\varphi_1 \cdot G_1 + \varphi_2 \cdot G_2 + \varphi_3 \cdot G_3 = \varphi_0 \cdot (G_1 + G_2 + G_3). \quad (1.48)$$

Звідси
$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 \cdot G_1 + \varphi_2 \cdot G_2 + \varphi_3 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3}. \quad (1.49)$$

Підставимо (1.49) в (1.45), отримаємо:

$$\begin{aligned} I_1 &= \varphi_1 \cdot G_1 - \frac{\varphi_1 \cdot G_1 + \varphi_2 \cdot G_2 + \varphi_3 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \cdot G_1 = \\ &= \varphi_1 \cdot \left(G_1 - \frac{G_1^2}{G_1 + G_2 + G_3} \right) - \varphi_2 \cdot \frac{G_2 \cdot G_1}{G_1 + G_2 + G_3} - \varphi_3 \cdot \frac{G_3 \cdot G_1}{G_1 + G_2 + G_3}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Розглянемо схему рисунка 1.17, б.

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot G_{12} - (\varphi_3 - \varphi_1) \cdot G_{31} = \varphi_1 \cdot (G_{12} + G_{31}) - \varphi_2 \cdot G_{12} - \varphi_3 \cdot G_{31}. \quad (1.51)$$

Коефіцієнти при потенціалах рівнянь (1.50) будуть ті самі, що й коефіцієнти при таких самих потенціалах рівняння (1.51).

Порівнюємо (1.50) і (1.51), отримаємо:

$$G_{12} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad (1.52)$$

$$G_{31} = \frac{G_3 \cdot G_1}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad (1.53)$$

$$G_{23} = \frac{G_2 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3}. \quad (1.54)$$

Формула (1.54) буде отримана, якщо провести дії, аналогічні розглянутим, але для струму I_2 .

З іншого боку,

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{1}{G_{12}} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 \cdot G_2} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2}{R_3} = \\ &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} = \frac{m}{R_3}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$R_{23} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_2 \cdot G_3} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{R_3}} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} = \frac{m}{R_1}, \quad (1.56)$$

$$R_{31} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 \cdot G_3} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_3}} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} = \frac{m}{R_2}, \quad (1.57)$$

$$\text{де } m = R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1. \quad (1.58)$$

Виразимо опори зірки через допоміжну величину m :

$$R_1 = \frac{m}{R_{23}}, R_2 = \frac{m}{R_{31}}, R_3 = \frac{m}{R_{12}}. \quad (1.59)$$

Підставимо вирази (1.59) у формулу (1.58) для m , отримаємо:

$$m = \frac{m}{R_{23}} \cdot \frac{m}{R_{31}} + \frac{m}{R_{31}} \cdot \frac{m}{R_{12}} + \frac{m}{R_{12}} \cdot \frac{m}{R_{23}} = \left(\frac{m^2}{R_{23} \cdot R_{31}} + \frac{m^2}{R_{31} \cdot R_{12}} + \frac{m^2}{R_{12} \cdot R_{23}} \right) \Rightarrow$$

$$1 = m \cdot \left(\frac{R_{12} + R_{23} + R_{31}}{R_{12} \cdot R_{23} \cdot R_{31}} \right) \Rightarrow m = \frac{R_{12} \cdot R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (1.60)$$

Підставимо (1.60) почергово у вирази (1.59) і отримаємо:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (1.61)$$

Формули (1.55) – (1.57) застосовують для переходу від зірки опорів до трикутника опорів, а формули (1.61) – для переходу від трикутника опорів до зірки.

1.13 Двополюсник. Теорема про еквівалентний генератор.

Метод еквівалентного генератора для розрахунку струму в одній вітці

В електричній схемі завжди можна виокремити одну вітку, а решту схеми, незалежно від її складності, умовно позначити прямокутником з двома вихідними затискачами (рис. 1.18, а). Щодо виділеної вітки ця частина схеми є двополюсником.

Таким чином, двополюсник – це узагальнена назва схеми, що двома вихідними затискачами приєднується до виділеної вітки. Двополюсники бувають активними, якщо мають у своєму складі хоча б одне джерело енергії, та пасивними, якщо не мають у своєму складі джерел енергії.

Теорема про еквівалентний генератор: будь-який активний двополюсник по відношенню до виділеної вітки можна замінити еквівалентним джерелом напруги, ЕРС якого дорівнює напрузі холостого ходу, а внутрішній опір – вхідному опору пасивного двополюсника.

Доведення

У вітку ab ввімкнемо дві рівні, але протилежно спрямовані ЕРС E_1 та E_2 ($E_2 = E_1$) (рис. 1.18, б). Відповідно до принципу накладання (рис. 1.18, в; рис. 1.18, г),

$$I_n = I' + I'' , \quad (1.62)$$

де I' – частковий струм вітки з опором R_n , спричинений ЕРС E_1 і всіма джерелами ЕРС та джерелами струму активного двополюсника;

I'' – частковий струм, спричинений тільки джерелом ЕРС E_2 .

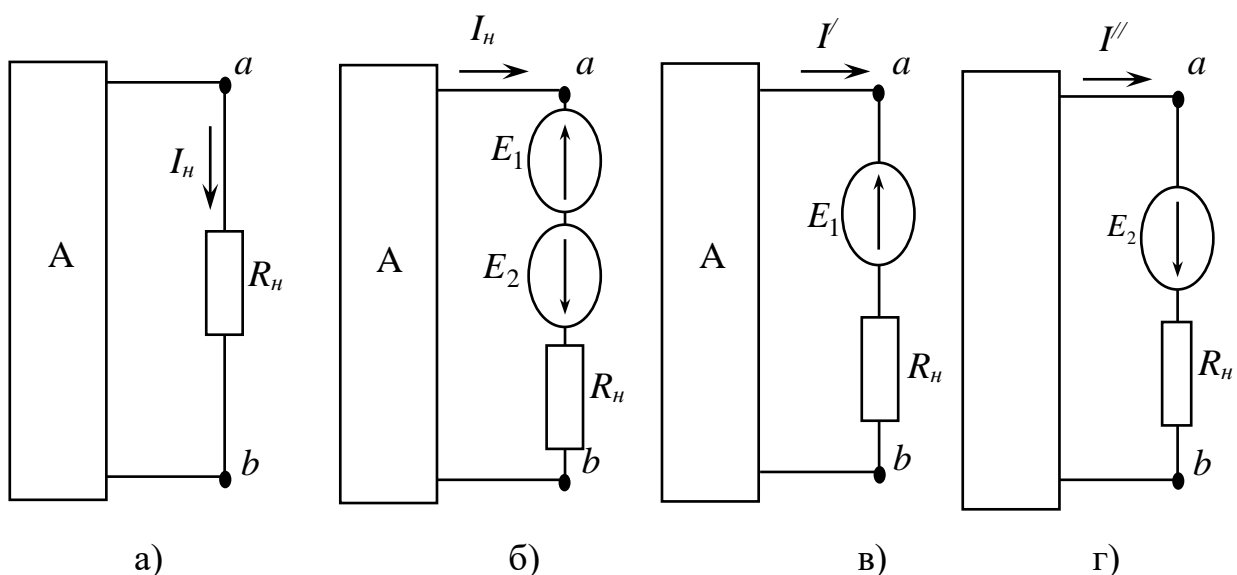


Рисунок 1.18 – Схеми для доведення теореми про еквівалентний генератор

За законом Ома,

$$I' = \frac{U_{ab} - E_1}{R_n}. \quad (1.63)$$

Виберемо E_1 таким чином, щоб $I' = 0$, тобто це буде режим холостого ходу (вітка ab – розімкнута). При цьому зрозуміло, що $E_1 = E_2 = U_{ab} = U_{abxx}$, а струм

$$I_n = I'' = \frac{E_2}{R_n + R_{ex}} \quad (1.64)$$

або

$$I_n = \frac{U_{abxx}}{R_n + R_{ex}}, \quad (1.65)$$

де U_{abxx} – напруга холостого ходу на розімкнутих затискачах ab ;

R_{ex} – вхідний опір двополюсника відносно вхідних затискачів;

R_n – опір вітки ab .

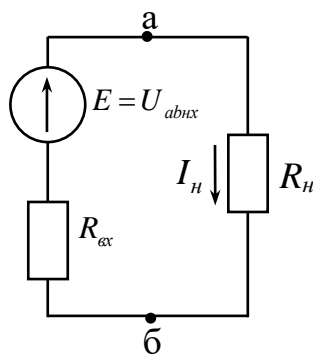


Рисунок 1.19 – Схема, яка відповідає формулі (1.65)

Сукупність ЕРС $E_2 = U_{abxx}$ і внутрішнього опору R_{ex} можна розглядати, як еквівалентний генератор з ЕРС, що дорівнює U_{abxx} , із внутрішнім опором, що дорівнює R_{ex} . Формула (1.65) відповідає схемі на рисунку 1.19. Теорема доведена.

Використовують теорему для розрахунку струму в одній вітці електричного

кола, і цей метод розрахунку за розглянутою теоремою має такі назви:

- еквівалентного генератора;
- активного двополюсника;
- холостого ходу та короткого замикання.

Порядок розрахунку за методом

1. Вилучають опір у тій вітці, де треба визначити струм.
2. Визначають R_{ex} , при цьому закорочують усі ЕРС (якщо у джерела

напруги заданий внутрішній опір, то його не закорочують), і розривають всі джерела струму.

3. Визначають напругу холостого ходу U_{xx} на затискачах розриву.

4. За формулою (1.65) визначають струм.

Приклад розрахунку струму I_2 – для схеми на рисунку 1.20, а за методом еквівалентного генератора наведений нижче.

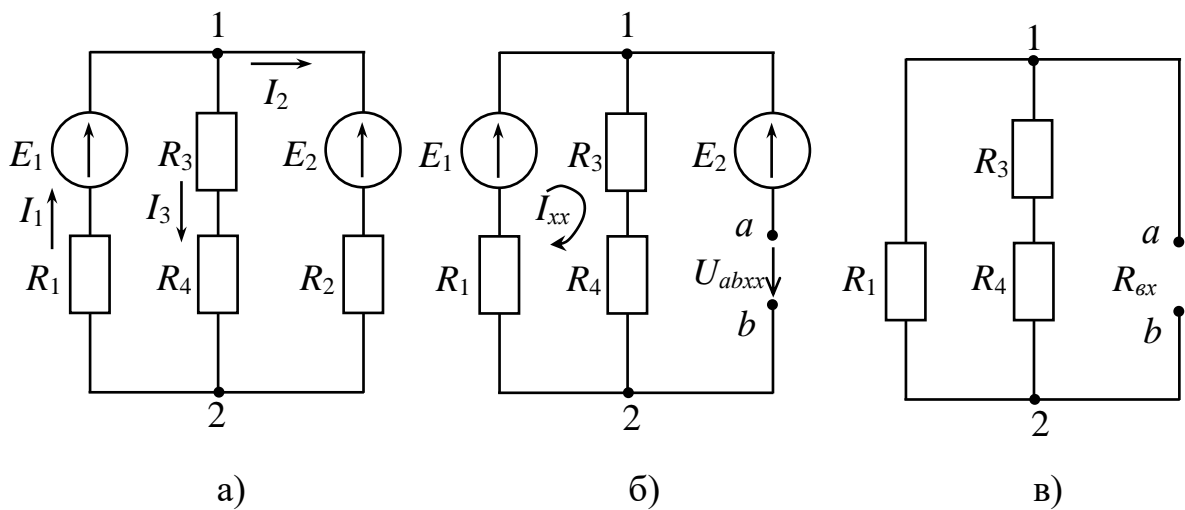


Рисунок 1.20 – Етапи розрахунку методом еквівалентного генератора

$$I_2 = \frac{U_{abxx}}{R_2 + R_{gx}} \quad (\text{схема рис. 1.20, б});$$

$$U_{abxx} = -E_2 + I_{xx} \cdot (R_3 + R_4) \quad (\text{рис. 1.20, а});$$

$$I_{xx} = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R_4} \quad (\text{рис. 1.20, б});$$

$$R_{gx} = \frac{R_1 \cdot (R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4} \quad (\text{рис. 1.20, в}).$$

1.14 Передача енергії від активного двополюсника до навантаження

Припустимо, що навантаження R_H підімкнене до активного двополюсника (рис. 1.18, а), до того ж $R_{gx} = const$, $0 \leq R_H \leq \infty$.

Знайдемо, при якому співвідношенні опорів R_{ex} та $R_{\text{н}}$ буде передаватися максимальна потужність від активного двополюсника до навантаження:

$$P_{\text{н}} = I_{\text{н}}^2 \cdot R_{\text{н}}, \quad (1.66)$$

$$I_{\text{н}} = \frac{U_{\text{abxx}}}{R_{\text{н}} + R_{\text{ex}}}, \quad (1.67)$$

Отже,
$$P_{\text{н}} = \frac{U_{\text{abxx}}^2}{(R_{\text{н}} + R_{\text{ex}})^2} \cdot R_{\text{н}} \quad (1.68)$$

Для визначення максимуму функції $P_{\text{н}} = f(R_{\text{н}})$ потрібно похідну виразу (1.68) дорівняти до нуля:

$$\frac{dP_{\text{н}}}{dR_{\text{н}}} = \frac{U_{\text{abxx}}^2 \cdot \left((R_{\text{н}} + R_{\text{ex}})^2 - 2 \cdot (R_{\text{н}} + R_{\text{ex}}) \cdot R_{\text{н}} \right)}{(R_{\text{н}} + R_{\text{ex}})^4} = 0. \quad (1.69)$$

$$\text{Звідси } (R_{\text{н}} + R_{\text{ex}})^2 - 2 \cdot (R_{\text{н}} + R_{\text{ex}}) \cdot R_{\text{н}} = 0 \Rightarrow R_{\text{ex}}^2 - R_{\text{н}}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$R_{\text{ex}} = R_{\text{н}}. \quad (1.70)$$

Оскільки друга похідна $\frac{d^2 P_{\text{н}}}{dR_{\text{н}}^2}$ від'ємна щодо $\left(\frac{d^2 P_{\text{н}}}{dR_{\text{н}}^2} < 0 \right)$, то умова $R_{\text{ex}} = R_{\text{н}}$

відповідає саме максимуму функції $P_{\text{н}} = f(R_{\text{н}})$.

Підставимо (1.70) в (1.68) і отримаємо максимальну потужність

навантаження:
$$P_{\text{нmax}} = \frac{U_{\text{abxx}}^2}{4 \cdot R_{\text{н}}}. \quad (1.71)$$

Коефіцієнт корисної дії (К.К.Д., η) при $R_{\text{ex}} = R_{\text{н}}$

$$\eta = \frac{P_{\text{н}}}{P_{\text{повн}}} = \frac{U_{\text{abxx}}^2 \cdot R_{\text{н}}}{(R_{\text{н}} + R_{\text{ex}})^2 \cdot U_{\text{abxx}} \cdot I} = \frac{U_{\text{abxx}}^2 \cdot R_{\text{н}} \cdot (R_{\text{н}} + R_{\text{ex}})}{(R_{\text{н}} + R_{\text{ex}})^2 \cdot U_{\text{abxx}}^2} = \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{н}} + R_{\text{ex}}}, \quad (1.72)$$

де $P_{\text{повн}} = U_{\text{abxx}} \cdot I = \frac{U_{\text{abxx}}^2}{R_{\text{н}} + R_{\text{ex}}}$ – повна потужність, що виробляється еквівалентним генератором.

Таким чином, $\eta = 0,5$, якщо $R_{ex} = R_n$. При $R_n > R_{ex}$ – $\eta > 0,5$.

Таким чином, робимо висновок: якщо потужність P_n значна, то працювати з таким низьким К.К.Д. ($\eta = 0,5$) неприпустимо. Але якщо P_n мала (наприклад потужність датчиків пристроїв автоматики), то такий низький К.К.Д. вважають задовільним, оскільки при цьому навантаженню віддається максимально можлива активна потужність.

Узгодження навантаження – це коли вибір величини навантаження R_n дорівнює вхідному опору активного двополюсника (R_{ex}).

1.15 Передача енергії по лініях передачі

Спрощена схема передачі електричної енергії зображена на рисунку 1.21.

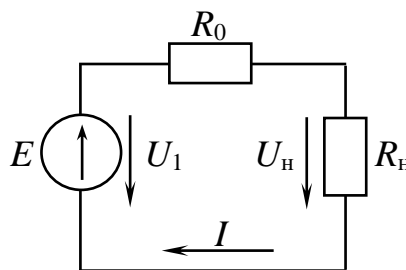


Рисунок 1.21 – Спрощена схема передачі електричної енергії

На схемі використано такі позначення:

- напруга генератора (на початку лінії) U_1 ;
- напруга на навантаженні (кінець лінії) U_n ;
- навантаження наприкінці лінії R_n ;
- опір проводів R_0 .

У реальних лініях передачі коефіцієнт корисної дії (ККД) $\eta = 0,94 - 0,97$, тому U_2 всього на кілька відсотків відрізняється від U_1 .

Криві на рисунку 1.22, що повністю характеризують режим роботи лінії при $U_1 = const$, описують такими залежностями:

1. $P_1 = U_1 \cdot I$ – потужність генератора.

2. $U_H = U_1 - I \cdot R_0$ – напруга на навантаженні.

3. $P_H = P_1 - I^2 \cdot R_0 = U_1 \cdot I - I^2 \cdot R_0 = I \cdot (U_1 - I \cdot R_0)$ – потужність

навантаження.

$$4. \text{ККД} - \eta = \frac{P_H}{P_1} = \frac{U_1 \cdot I - I^2 \cdot R_0}{U_1 \cdot I} = 1 - \frac{I \cdot R_0}{U_1} = \frac{I^2 \cdot R_H}{I^2 \cdot (R_0 + R_H)} = \frac{R_H}{R_0 + R_H}.$$

Чим більшою буде напруга U_1 , тим більшим буде і ККД передачі (високий ККД досягається при виконанні умови $R_0 \ll R_H$).

При $P_2 = const$ з підвищенням напруги U_2 можна зменшити значення струму I , тому втрати у проводах P_{np} знижуються, що дозволяє зменшити переріз проводів:

$$P_{np} = R_0 \cdot I^2 = \rho \cdot \frac{l_{np}}{S_{np}} \cdot \left(\frac{P_2}{U_2} \right)^2, \quad (1.73)$$

де l_{np}, S_{np} – довжина та перетин проводів.

При максимумі потужності навантаження P_H ККД η дорівнює 0,5.

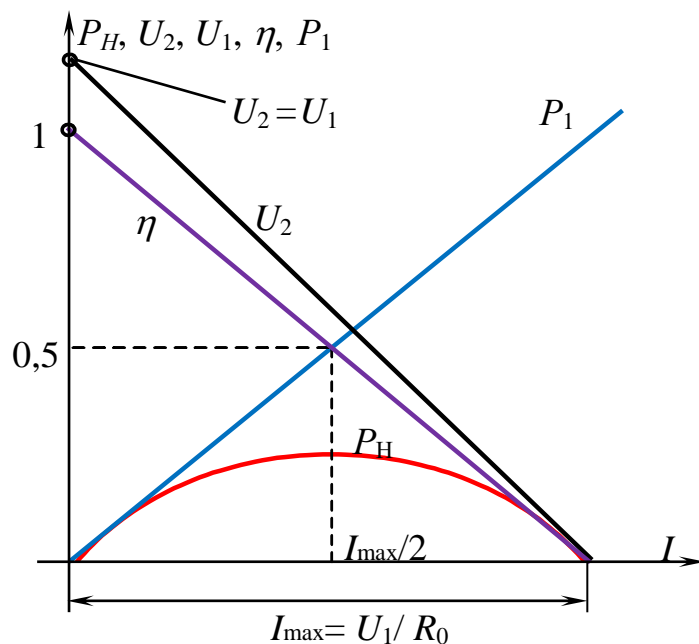


Рисунок 1.22 – Залежності $U_H(I), P_H(I), \eta(I)$

2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

2.1 Основні величини, що характеризують синусоїдний струм

Струм, що змінюється за законом синуса, називається синусоїдним (рис. 2.1). Миттєве значення такого струму

$$i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i) = I_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi_i) = I_m \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi_i\right), \quad (2.1)$$

де I_m – амплітудне, тобто максимальне значення струму, А;

φ_i – початкова фаза, визначає величину зсуву синусоїди відносно початку координат (якщо $\varphi > 0$ синусоїда зсунута вліво, а якщо $\varphi < 0$ – синусоїда зсунута вправо), рад;

T – період, тобто час, за який відбувається одне повне коливання, с;

f – частота коливань, тобто кількість коливань за секунду, $1/\text{с} = \text{Гц}$;

ω – кутова частота, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, рад/с;

$(\omega \cdot t + \varphi_i)$ – фаза, аргумент синуса, характеризує стан коливання, рад.

Якщо у синусоїдних величин однієї частоти однакові початкові фази, то говорять, що такі синусоїдні величини співпадають за фазою; якщо різниця фаз між синусоїдними функціями становить $\pm \pi$, то говорять, що ці функції перебувають у протифазі; якщо різниця фаз між синусоїдними функціями становить $\pm \pi/2$, то говорять, що ці функції перебувають у квадратурі.

Синусоїдні струми відносно низьких частот отримують за допомогою синхронних генераторів, а синусоїдні струми високої частоти (більше десятка кілогерц) – за допомогою напівпровідникових генераторів.

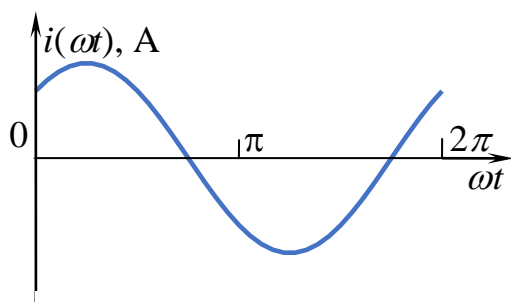


Рисунок 2.1 – Синусоїдний струм

На рисунку 2.1 показана крива миттєвого значення струму (так звана хвильова діаграма), коли початкова фаза додатна ($\varphi > 0$).

Синусоїдна величина характеризується такими значеннями:

- миттєвим;
- амплітудним;

- середнім;
- діючим (ефективним).

Середнє значення синусоїдної величини – це її середнє значення за половину періоду:

$$I_{\text{сеп}} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_m \cdot \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot I_m, \quad I_{\text{сеп}} \approx 0,638 \cdot I_m. \quad (2.2)$$

Діюче (ефективне або середньоквадратичне) значення синусоїдного струму чисельно дорівнює значенню постійного струму, який за час, що дорівнює періоду T , спричиняє виділення такої самої кількості тепла в провіднику з опором R , що і синусоїдний струм за той самий час (T):

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 \cdot \sin \omega t \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m. \quad (2.3)$$

Коефіцієнти, що характеризують синусоїдну функцію:

- коефіцієнт амплітуди $k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2}$;
- коефіцієнт форми $k_f = \frac{I}{I_{\text{сеп}}} = \frac{I_m / \sqrt{2}}{2 / \pi \cdot I_m} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}}$.

2.2 Синусоїдний струм активного опору

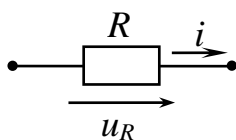


Рисунок 2.2 –
Активний опір

Активний опір резистора R на змінному струмі $R \sim \epsilon$ більшим, ніж активний опір на постійному струмі R_{\sim} , внаслідок явищ концентрації струму в поверхневих шарах провідника (поверхневий ефект) і ефекту близькості. Але будемо вважати, що $R \sim = R_{\sim}$, що є справедливим для частот

порядку сотень кілогерц або навіть кількох мегагерц.

Нехай по активному опору тече синусоїдний струм (рис. 2.2):

$$i = I_m \cdot \sin \omega t. \quad (2.4)$$

За законом Ома,

$$u_R = i \cdot R = I_m \cdot R \cdot \sin \omega t = U_m \cdot \sin \omega t, \quad (2.5)$$

де $U_m = I_m \cdot R$ – амплітудне значення напруги на активному опорі. (2.6)

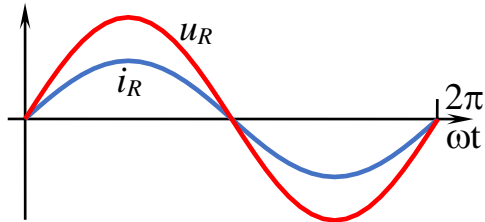


Рисунок 2.3 – Синусоїдний струм та напруга на активному опорі

Як відомо, кут зсуву фаз між напругою і струмом дорівнює різниці початкових фаз напруги та струму:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0 \quad (2.7)$$

З (2.4) та (2.5) бачимо, що струм і напруга на активному опорі співпадають за фазою, а різниця фаз між напругою і струмом дорівнює нулю ($\varphi = 0$) (рис. 2.3).

Швидкість надходження енергії від джерел характеризується потужністю. Миттєва потужність – добуток миттєвої напруги на ділянці електричного кола (схеми) та миттєвого струму. Для активного опорі

$$p_R = u_R \cdot i_R = U_m \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot \omega t)). \quad (2.8)$$

Таким чином, бачимо, що миттєва потужність в активному опорі має постійну складову $\frac{U_m \cdot I_m}{2}$, та змінну складову $\left(-\frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos(2\omega t) \right)$ з частотою в два рази більшою, ніж частота синусоїдного струму.

Активна потужність – це середнє значення миттєвої потужності за період:

$$P_R = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} p_R dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = U \cdot I = I^2 \cdot R. \quad (2.9)$$

2.3 Синусоїдний струм індуктивності

Будь-яка обмотка (катушка) має індуктивність і активний опір. На схемі катушку зазвичай позначають так, як це показано на рисунку 2.4. У ній R

дозволяє врахувати при розрахунках теплові втрати в обмотці і в осерді, а індуктивність L – явища самоіндукції і накопичування енергії магнітного поля.

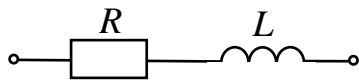


Рисунок 2.4 – Схема заміщення котушки

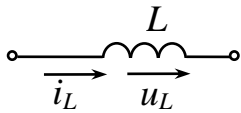


Рисунок 2.5 – Індуктивність

Виокремимо зі схеми рисунка 2.4 тільки одну індуктивність (рис. 2.5). Нехай по котушці тече синусоїдний струм

$$i = I_m \cdot \sin \omega t. \quad (2.10)$$

Тоді, відповідно до закона електромагнітної індукції в котушці наводиться ЕРС:

$$e_L = -L \cdot \frac{di}{dt} = -\omega \cdot L \cdot I_m \cdot \cos(\omega t) = -\omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin\left(\omega t + 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right). \quad (2.11)$$

Додатний напрям ЕРС співпадає зі струмом, а напруга на індуктивності

$$u_L = -e_L = L \cdot \frac{di}{dt} = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin\left(\omega t + 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) = U_{mL} \cdot \sin\left(\omega t + 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \quad (2.12)$$

де $X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$ – індуктивний опір, Ом; (2.13)

$$U_{mL} = I_m \cdot \omega \cdot L = I_m \cdot X_L. \text{ – амплітудне значення напруги на } X_L. \quad (2.14)$$

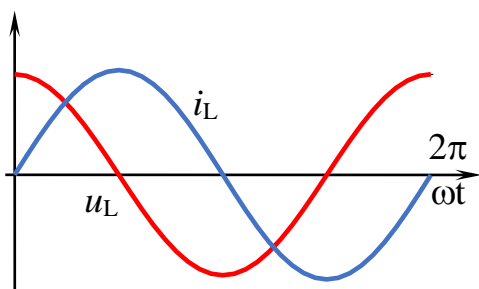


Рисунок 2.6 – Синусоїдний струм та напруга на L

З (2.10) та (2.12) бачимо, що напруга на індуктивності випереджає струм через неї на 90° (кут зсуву фаз φ між напругою і струмом дорівнює 90°). Тобто, якщо $u_L = 0$, то i_L досягає максимального значення (і навпаки) (рис. 2.6).

Миттєва потужність індуктивності може мати додатний знак – тоді індуктивність накопичує енергію, що береться з джерела, і від’ємний знак – індуктивність віддає енергію до джерела.

Активна потужність індуктивності – це середнє значення миттєвої: потужності за період T :

$$P_L = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p_L dt = 0. \quad (2.15)$$

2.4 Синусоїдний струм ємності

Схема заміщення конденсатора представлена на рисунку 2.7. На ньому ємність C дозволяє врахувати процес заряду конденсатора і накопичення енергії електричного поля, а паралельно ввімкнений резистор R враховує втрати у неідеальному діелектрику конденсатора. Виокремимо зі схеми рисунка 2.7 одну ємність (рис. 2.8).

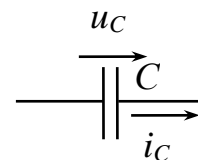
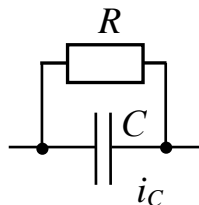


Рисунок 2.7 – Схема заміщення конденсатора Рисунок 2.8 – Ємність на схемах конденсатора

Якщо напруга на ємності u_C постійна, струм через неї

$$i_C = \frac{dq}{dt} = 0. \quad (2.16)$$

Припустимо, що до ємності прикладена синусоїдна напруга:

$$u_C = U_{mC} \cdot \sin(\omega t). \quad (2.17)$$

Тоді ємність періодично перезаряджається, що супроводжується протіканням через неї зарядного струму:

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt} = \frac{d(C \cdot U_{mC} \cdot \sin(\omega t))}{dt} = \omega \cdot C \cdot U_{mC} \cdot \cos(\omega t) = \\ &= \frac{1}{X_C} \cdot U_{mC} \cdot \sin\left(\omega t + 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) = I_{mC} \cdot \sin\left(\omega t + 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

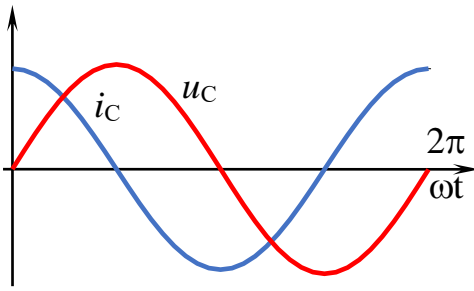


Рисунок 2.9 – Синусоїдний струм та напруга на L

де $I_{mC} = \frac{U_{mC}}{1/\omega \cdot C} = \frac{U_{mC}}{X_C}$ – амплітудне значення струму через ємність, (2.19)

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \text{ – ємнісний опір,} \quad (2.20)$$

З (2.17) і (2.18) ми бачимо, що струм ємності випереджає напругу на ній на 90° (різниця фаз між напругою і струмом φ дорівнює -90°) (рис. 2.9). Тобто, якщо $u_C = 0$, то струм i_C сягає максимального значення (і навпаки).

Миттєва потужність ємності (може мати додатний і від’ємний знаки):

$$p_C = u_C \cdot i_C = U_{mC} \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega t). \quad (2.21)$$

Активна потужність ємності

$$P_C = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p_C dt = 0. \quad (2.22)$$

2.5 Тригонометричний метод розрахунку кіл синусоїдного струму

Розглянемо послідовне з’єднання активного опору, ємності та індуктивності (рис. 2.10). Нехай до кола прикладена синусоїдна напруга

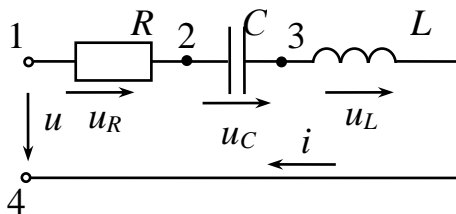


Рисунок 2.10 – Послідовний коливальний контур

$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ і протікає синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin \omega t$.

За другим законом Кірхгофа для миттєвих значень,

$$u = u_R + u_C + u_L. \quad (2.23)$$

З урахуванням раніше розглянутого (пункти 2.3, 2.4, 2.5),

$$u = I_m \cdot R \cdot \sin(\omega t) - I_m \cdot X_C \cdot \cos(\omega t) + I_m \cdot X_L \cdot \cos(\omega t), \text{ або}$$

$$U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cdot (R \cdot \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \cdot (X_L - X_C)). \quad (2.24)$$

Позначимо $X = X_L - X_C$ – повний реактивний опір кола. (2.25)

Тоді $R \cdot \sin(\omega t) + X \cdot \cos(\omega t) = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = Z \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, (2.26)

де $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ – кут зсуву фаз між напругою u і струмом i ; (2.27)

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ – модуль повного опора кола. (2.28)

Отже, вираз (2.22) можна записати так:

$$U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cdot Z \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.29)$$

$$\text{або } - U_m = I_m \cdot Z. \quad (2.30)$$

Розглянемо схему рисунка 2.11, яка є паралельним з'єднанням трьох елементів – активного опору, ємності й індуктивності.

Напруга та струм на вході кола – $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$, $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$.

За першим законом Кірхгофа, струм на вході кола

$$i = i_R + i_C + i_L. \quad (2.31)$$

З урахуванням раніше розглянутого (пункти 2.3, 2.4, 2.5) струми віток

$$i_R = U_m \cdot G \cdot \sin(\omega t), \quad (2.32)$$

$$i_C = U_m \cdot B_C \cdot \cos(\omega t) = U_m \cdot \omega \cdot C \cdot \cos(\omega t), \quad (2.33)$$

$$i_L = -U_m \cdot B_L \cdot \cos(\omega t), \quad (2.34)$$

де $G = \frac{1}{R}$ – активна провідність; (2.35)

$B_C = \omega \cdot C$ – реактивна ємнісна провідність; (2.36)

$B_L = \frac{1}{\omega \cdot L}$ – реактивна індуктивна провідність. (2.37)

Тоді вираз (2.29) має такий вигляд:

$$I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cdot [G \cdot \sin(\omega t) - (B_L - B_C) \cdot \cos(\omega t)], \quad (2.38)$$

$$\text{або } I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cdot \sqrt{G^2 + B^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi), \quad (2.39)$$

$$\text{де } \varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G} = \arctg \frac{B}{G} \text{ – кут зсуву фаз між напругою і струмом,} \quad (2.40)$$

$$B = B_L - B_C \text{ – реактивна провідність.} \quad (2.41)$$

Застосуємо позначення (повна провідність

кола):

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}. \quad (2.42)$$

Отримаємо закон Ома:

$$I_m = U_m \cdot Y. \quad (2.43)$$

Формули (2.25), (2.27), (2.28), (2.30),

(2.35), (2.36), (2.37), (2.40), (2.41), (2.42), (2.43) –

основа для розрахунку найпростіших кіл синусоїдного струму тригонометричним методом.

2.6 Потужність у колах синусоїдного струму (активна, реактивна, повна)

Припустимо, що до ділянки кола прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin \omega t$. Синусоїдний струм ділянки – $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$.

Миттєва потужність при цьому

$$p = u \cdot i = U_m \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U \cdot I \cdot (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)). \quad (2.44)$$

Як відомо, активна потужність – це середнє значення миттєвої потужності p за період T , тобто енергія, що виділяється за одиницю часу у вигляді теплоти на ділянці кола, що містить опір R :

$$P = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p \, dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos \varphi \cdot 2 \cdot \pi = U \cdot I \cdot \cos \varphi, \quad (2.45)$$

де $\cos \varphi$ – коефіцієнт потужності.

Активна потужність виконує корисну роботу (наприклад, освітлення, обігрів, робота електродвигунів) і вимірюється у ватах (Вт), тобто є тією частиною електричної енергії, яка перетворюється на інші форми енергії (механічну, теплову, світлову тощо) для виконання корисної роботи. У системах змінного струму напруга і струм можуть бути зсунуті по фазі, і активна потужність є тією частиною потужності, яка відповідає за корисну роботу, враховуючи цей зсув. Вона є основною характеристикою будь-якого електричного пристрою, що споживає електроенергію для виконання конкретних функцій (наприклад, лампа перетворює електричну енергію на світло і тепло, а електродвигун – на механічну роботу). Розуміння активної потужності є ключовим для ефективного планування та управління енергоспоживання у різних електричних системах та мережах.

При розрахунках синусоїдних кіл застосовують поняття так званої реактивної потужності:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi. \quad (2.46)$$

Реактивна потужність – це складова електричної потужності в системах змінного струму, яка не виконує корисної роботи, але необхідна для підтримки електромагнітних полів у індуктивних та ємнісних елементах системи. Реактивна потужність виникає внаслідок наявності індуктивних (катушки, трансформатори) та ємнісних (конденсатори) елементів у системі електропостачання і описує коливання енергії між джерелом і споживачем, зокрема в індуктивних (катушки) і ємнісних (конденсатори) компонентах. В індуктивних елементах енергія зберігається в магнітному полі, а в ємнісних – в електричному полі. Ці компоненти періодично віддають і приймають енергію у систему знову.

Таким чином, фізичний зміст реактивної потужності – це енергія, що передається від джерела на реактивні елементи приймача, а потім повертається цими елементами знову до джерела протягом одного періоду коливань, віднесена до цього періоду. Реактивна потужність додатна при струмі, що відстає (активне-індуктивне навантаження, $\varphi > 0$) і від’ємна при струмі, що випереджає (активно-ємнісне навантаження, $\varphi < 0$). Тобто індуктивність можна умовно розглядати як споживача реактивної енергії, а ємність – як її генератора.

Оскільки електричні машини й апарати конструюють для роботи на певні значення струмів і напруг, то їх характеризують не активною, що залежить від $\cos \varphi$, а повною потужністю (вимірюється у ВА):

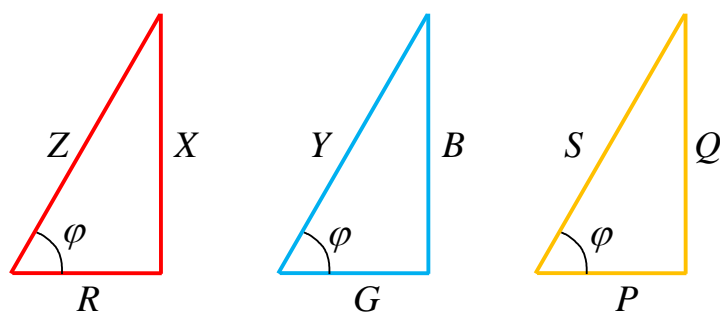
$$S = U \cdot I. \quad (2.47)$$

Повна потужність показує ту активну потужність, яку джерело енергії може віддати споживачеві, якщо останній працює при $\cos \varphi = 1$. Тому зрозуміло, що повна потужність дорівнює найбільшому значенню активної потужності при заданих значеннях напруги та струму.

Зв’язок між усіма трьома видами потужностей такий:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (2.48)$$

Трикутники опорів, провідностей і потужностей представлені на рисунку 2.12.



$$\varphi = \arctg(X / R) \quad \varphi = \arctg(B / G) \quad \varphi = \arctg(Q / P)$$

Рисунок 2.12 – Трикутники опорів, провідностей і потужностей

2.7 Застосування комплексних чисел для розрахунку електричних кіл

Розрахунок електричних кіл суттєво полегшується, якщо зображувати синусоїдні величини векторами, або комплексними числами.

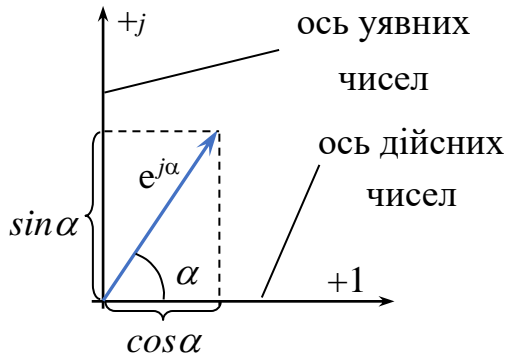


Рисунок 2.13 –
Комплексна площина

Відповідно до формули Ейлера комплексне число

$$e^{j\cdot\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha. \quad (2.49)$$

На комплексній площині число зображується вектором, що має одиничну довжину та складає з віссю дійсних чисел кут α (рис. 2.13). Проекція $e^{j\cdot\alpha}$ на вісь дійсних чисел дорівнює $\cos\alpha$, а на вісь уявних чисел – $\sin\alpha$ ($j = \sqrt{-1}$ – уявна

одиниця).

Якщо замість числа $e^{j\cdot\alpha}$ розглянути число $I_m \cdot e^{j\cdot\alpha}$, то, відповідно до формули Ейлера – $I_m \cdot e^{j\cdot\alpha} = I_m \cdot \cos\alpha + j \cdot I_m \cdot \sin\alpha$, і на комплексній площині воно зображується вектором, що має довжину I_m і також становить із віссю дійсних чисел кут α (α – від 0 до $2\cdot\pi$). Припустимо, що $\alpha = \omega \cdot t + \varphi$, тоді

$$I_m \cdot e^{j\cdot(\omega t + \varphi)} = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi). \quad (2.50)$$

де $I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ – дійсна частина;

$I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ – коефіцієнт при уявній одиниці j .

Таким чином, синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ можна уявити, як проекцію вектора $I_m \cdot e^{j\cdot(\omega t + \varphi)}$, що обертається з кутовою швидкістю ω , на вісь уявних чисел. Якщо синусоїдна функція повністю характеризується амплітудою і початковою фазою при відомій частоті, то початкове положення вектора $I_m \cdot e^{j\cdot(\omega t + \varphi)} = I_m \cdot e^{j\cdot\varphi} \cdot e^{j\cdot(\omega t)}$ повністю визначає синусоїдну функцію $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, а комплексне число $\underline{I}_m = I_m \cdot e^{j\cdot\varphi}$ називається комплексною

амплітудою струму ($e^{j\omega t}$ – оператор обертання). Векторне зображення синусоїдних величин для нульового моменту часу дає наочну картину взаємного розташування комплексних амплітуд синусоїдних функцій і дозволяє легко проводити прості операції.

На комплексній площині додатні кути відкладаються проти годинникової стрілки, від'ємні – за годинниковою стрілкою від осі дійсних чисел.

Розглянемо приклад розв'язання задачі на комплексній площині.

Для схеми рисунка 2.14, а задані струми в паралельних вітках (А)

$$i_1 = 10 \cdot \sin\left(\omega t - 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \quad i_2 = 5 \cdot \sin\left(\omega t + 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

Потрібно знайти струм i .

За першим законом Кірхгофа, $i = i_1 + i_2$. Комплексні амплітуди струмів у паралельних вітках – $\underline{I}_{m1} = 10 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ}$, $\underline{I}_{m2} = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}$ (А).

Будуємо на комплексній площині вектори, що зображують струми i_1 , i_2 (рис. 2.13, б), та складаємо їх для отримання загального струму i .

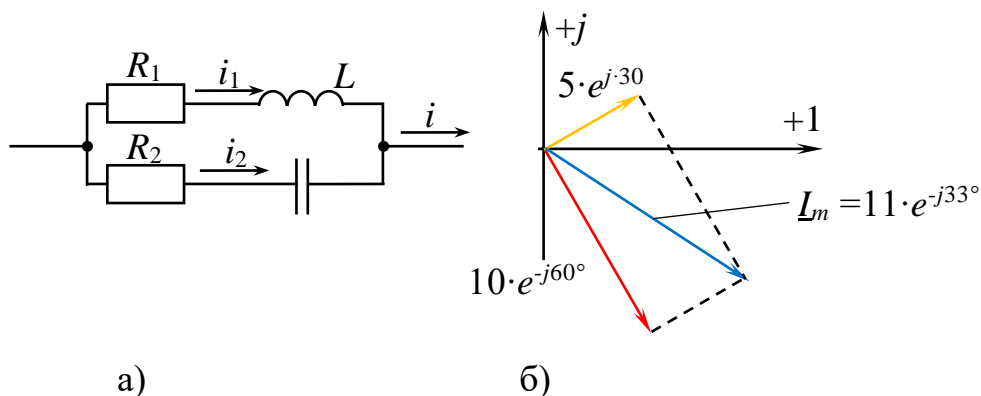


Рисунок 2.14 – Приклад розв'язання задачі на комплексній площині:

а – схема; б – діаграма на комплексній площині

2.8 Форми запису комплексного числа. Дії з комплексними числами

Існують чотири форми запису комплексних чисел:

– показова – $\underline{I}_m = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}$;

– полярна – $\underline{I}_m = 5 \angle 30^\circ$;

– алгебраїчна – $\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,5$ (4,33 – дійсна частина, $j \cdot 2,5$ – уявна частина);

– тригонометрична – $\underline{I}_m = 5 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ$, як перехід від полярної форми ($\underline{I}_m = 5 \cdot \angle 30^\circ$) до алгебраїчної ($\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,5$).

Дії над комплексними числами:

– множення проводять у полярній або показовій формі:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z} = 5 \cdot \angle 30^\circ \cdot 15 \cdot \angle -40^\circ = 75 \cdot \angle -10^\circ, \text{ В};$$

– ділення проводять також у полярній або показовій формі:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{75 \cdot \angle -10^\circ}{15 \cdot \angle -40^\circ} = 5 \angle 30^\circ, \text{ А};$$

– складання або віднімання проводять в алгебраїчній формі:

$$\underline{I}_{m1} = 10 \angle (-60^\circ) = 10 \cdot \cos(-60^\circ) + j \cdot 10 \cdot \sin(-60^\circ) = 5 - j \cdot 8,66,$$

$$\underline{I}_{m2} = 5 \angle 30^\circ = 10 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 4,33 + j \cdot 2,5,$$

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2} = 5 - j \cdot 8,66 + 4,33 + j \cdot 2,5 = 9,33 - j \cdot 6,16.$$

Перехід від алгебраїчної до полярної форми має деякі особливості (рис. 2.15).

Наприклад, якщо вектор, що зображує комплексне число, розміщується в першій або четвертій чвертях комплексної площини, перехід проводять так:

$$\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot \angle \left(\arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)^\circ = 5 \angle 30^\circ \text{ (перша чверть)};$$

$$\underline{I}_m = 4,33 - j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot \angle \left(-\arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)^\circ = 5 \angle (-30^\circ) \text{ (четверта чверть)}.$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число, розміщується в другій чверті комплексної площини, перехід проводять так:

$$\underline{I}_m = -4,33 + j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot \angle \left(180^\circ - \arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)^\circ = 5 \angle 150^\circ.$$

Якщо ж вектор, що зображує комплексне число, розміщується в третій чверті комплексної площини, перехід проводять так:

$$\underline{I}_m = -4,33 - j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot \angle \left(- \left(180^\circ - \arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right) \right) = 5 \angle (-150)^\circ .$$

Множення вектора на уявне число j означає його поворот на 90° проти годинникової стрілки; а множення на $(-j)$ – поворот на 90° за годинниковою стрілкою ($\frac{1}{j} = -j$).

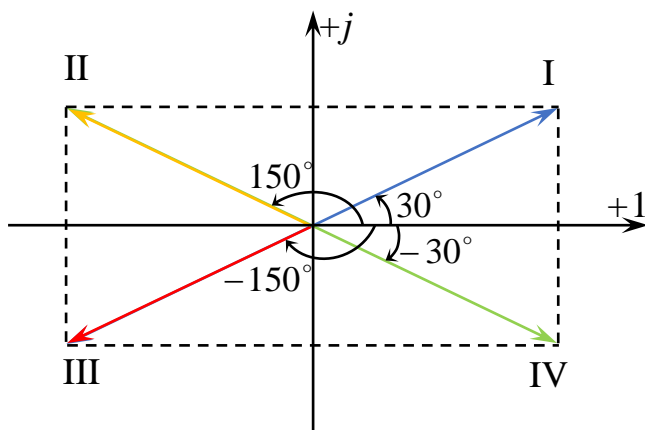


Рисунок 2.15 – Вектори на комплексній площині

2.9 Символічний (комплексний) метод розрахунку електричних кіл синусоїдного струму

Суть символічного методу полягає в тому, що роблять перехід від системи інтегрально-диференціальних рівнянь, складених для миттєвих значень струмів і напруг, до системи алгебраїчних рівнянь, що складені відносно комплексних струмів, ЕРС і напруг. Синусоїдна величина зображується комплексним числом (символом), що заміщує її, при цьому операція диференціювання замінюється множенням на $j\omega$, а інтегрування – діленням на $j\omega$.

2.10 Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі

Розглянемо просту електричну схему (рис. 2.10), до якої прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$ і в якій тече синусоїдний струм

$i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$. Інтегрально-диференціальне рівняння, що характеризує стан електричного кола (другий закон Кірхгофа) має такий вигляд:

$$u = u_R + u_L + u_C = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i_C dt. \quad (2.51)$$

Алгебраїчне рівняння, складене відносно комплексів струмів та напруг, тобто другий закон Кірхгофа в комплексній формі,

$$\underline{U}_m = R \cdot \underline{I}_m + j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}_m - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \underline{I}_m = \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC}. \quad (2.52)$$

Застосуємо позначення відповідно для індуктивного, ємнісного, повного реактивного опору та модуля повного опору:

$$X_L = \omega \cdot L, \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}, \quad X = X_L - X_C, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (2.53)$$

Тоді рівняння (2.52) набуває такого вигляду:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \left(R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) \right) = \underline{I}_m \cdot (R + j \cdot (X_L - X_C)) = \underline{I}_m \cdot Z \angle \varphi, \quad (2.54)$$

$$\text{де } \underline{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C) = Z \angle \varphi - \text{комплекс повного опору кола}, \quad (2.55)$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} - \text{кут зсуву фаз між напругою і струмом}. \quad (2.56)$$

Таким чином, закон Ома в комплексній формі –

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z}. \quad (2.57)$$

Розглянемо коло (рис. 2.11), до якого прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, і на вході тече синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t)$. Перший закон Кірхгофа для миттєвих значень струмів в інтегрально-диференціальній формі

$$i = i_R + i_L + i_C = \overbrace{u \cdot G}^{i_R} + \overbrace{\frac{1}{L} \cdot \int u \cdot dt}^{i_L} + \overbrace{C \cdot \frac{du}{dt}}^{i_C}. \quad (2.58)$$

Алгебраїчне рівняння, складене відносно комплексів струму і напруг, тобто перший закон Кірхгофа в комплексній формі, виглядає так:

$$\underline{I}_m = \underline{U}_m \cdot G + \frac{\underline{U}_m}{j \cdot \omega \cdot L} + \frac{\underline{U}_m}{\left(-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}\right)} = \underline{I}_{mR} + \underline{I}_{mL} + \underline{I}_{mC} . \quad (2.59)$$

Висновки:

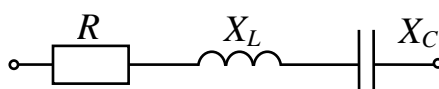
– алгебраїчна сума комплексних струмів у вузлі дорівнює нулю: $\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0$;

– алгебраїчна сума комплексних напруг уздовж замкнутого контуру дорівнює алгебраїчній сумі комплексних ЕРС – $\sum_{k=1}^n \underline{U}_k = \sum_{k=1}^m \underline{E}_k$;

– оскільки всі розглянуті раніше методи розрахунку електричних кіл постійного струму базуються на законах Кірхгофа та Ома, усі ці методи можуть бути використані для розрахунку кіл синусоїдного струму при застосуванні комплексної форми запису струмів, напруг, ЕРС тощо.

2.11 Комплексна провідність, залежність між опором і провідністю ділянки кола

Комплексною провідністю ділянки кола називають відношення комплексу струму до комплексу напруги на тій самій ділянці кола:



$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z} \cdot e^{j\varphi}} = Y \cdot e^{-j\varphi} = G - j \cdot B, \quad (2.60)$$

Рисунок 2.16 – Ділянка електричного кола

де G – активна провідність;

$B = B_L - B_C$ – реактивна провідність.

Знайдемо G і B , якщо відомі R , $X = X_L - X_C$ (рис. 2.16):

$$\underline{Y} = G - j \cdot B = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{R - j \cdot X}{(R + j \cdot X) \cdot (R - j \cdot X)} = \frac{R - j \cdot X}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \cdot \frac{X}{R^2 + X^2}. \quad (2.61)$$

$$\text{Тобто, } G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2}. \quad (2.62)$$

Знайдемо R і X , якщо відомі G і B :

$$\underline{Z} = R + j \cdot X = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{G + j \cdot B}{(G - j \cdot B) \cdot (G + j \cdot B)} = \frac{G + j \cdot B}{G^2 + B^2} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \cdot \frac{B}{G^2 + B^2}. \quad (2.63)$$

$$\text{Таким чином, } R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{Y^2}. \quad (2.64)$$

2.12 Комплексна форма запису потужності.

Баланс потужностей у складних колах синусоїдного струму

Припустимо, напруга і струм на ділянці кола – $\underline{U} = U \cdot e^{j \cdot \varphi_u}$, $\underline{I} = I \cdot e^{j \cdot \varphi_i}$.

Кут зсуву фаз між напругою і струмом – $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

Комплексом повної потужності називають

$$\tilde{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot e^{j \cdot \varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j \cdot \varphi_i} = U \cdot I \cdot e^{j \cdot \varphi} = P + j \cdot Q = U \cdot I \cdot \cos \varphi + j \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi, \quad (2.65)$$

де $\underline{I}^* = I \cdot e^{-j \cdot \varphi_i}$ – спряжене комплексне значення струму \underline{I} .

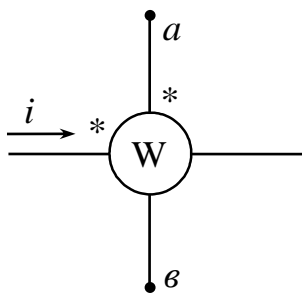


Рисунок 2.17 –
Ватметр

Вимірювання потужності здійснюють ватметром (рис. 2.17), наприклад, електродинамічної системи. Ватметр має дві котушки: одна – нерухома, підімкнена послідовно до ділянки кола, де вимірюють потужність, і має малий опір; друга – рухома, підімкнена паралельно до ділянки кола, де вимірюють потужність, має великий опір.

Знак «*» ставлять на кінцях однойменних затискачів. Ватметр, зображений на рисунку 2.16, вимірює

$$\operatorname{Re} \left[\tilde{S} \right] = \operatorname{Re} \left[\underline{U}_{av} \cdot \underline{I}^* \right] = U_{av} \cdot I \cdot \cos \left(\underline{U}_{av} \wedge \underline{I} \right).$$

У будь-якому колі повинен дотримуватися баланс як активних, так і

пасивних потужностей, тобто сума потужностей, що віддаються джерелами, повинна дорівнюватись сумі всіх потужностей, що приймаються споживачами:

$$\sum_{k=1}^n P_{k\text{джер}} = \sum_{k=1}^m P_{k\text{спож}}; \quad \sum_{k=1}^n Q_{k\text{джер}} = \sum_{k=1}^m Q_{k\text{спож}} \quad (2.66)$$

2.13 Векторні й топографічні діаграми

Векторні діаграми – сукупність на комплексній площині векторів синусоїдних величин, що розглядаються, із дотриманням їх взаємної орієнтації.

Топографічна діаграма – сукупність точок на комплексній площині, які зображують комплексні потенціали однойменних точок на електричній схемі.

Якщо потенціали точок зображувати не точками, а векторами, то отримуємо векторно-топографічну діаграму.

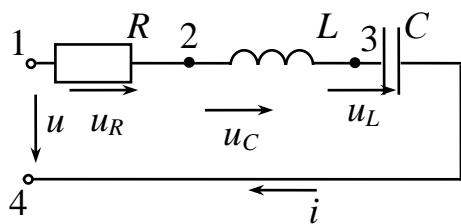


Рисунок 2.18 – Послідовне з'єднання R, L, C

Хвильова (часова) діаграма – крива миттєвого значення струму або напруги.

Розглянемо порядок побудови векторно-топографічної діаграми на прикладі схеми (рис. 2.18):

– розраховуємо комплекс струму \underline{I}_m ;

– визначаємо модулі напруг на окремих ділянках кола:

$$U_{mR} = I_m \cdot R, \quad U_{mL} = I_m \cdot X_L, \quad U_{mC} = I_m \cdot X_C;$$

– вибираємо масштаби за струмом і за напругою m_I, m_U ;

– позначаємо точки на схемі (1–4);

– останню точку (точка 4 в нашому випадку) розташовуємо на початку координат, обхід робимо за можливістю назустріч струму (для рис. 2.18 – від останньої точки 4 до першої точки 1); при цьому враховуємо, що напруга на активному опорі співпадає зі струмом за

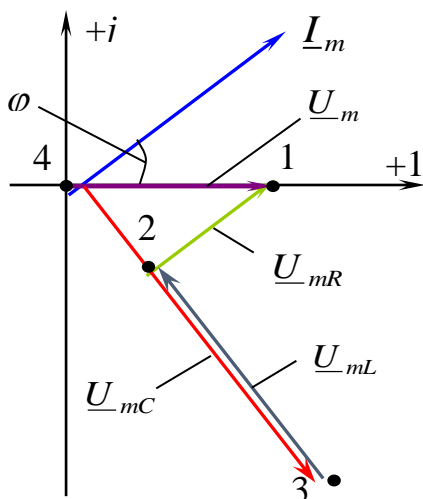


Рисунок 2.19 – Векторно-топографічна діаграма

фазою, напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на 90° , напруга на ємності відстає від струму на 90° . На рисунку 2.19 наведено приклад побудови діаграми для схеми рисунка 2.18 у випадку активно-ємнісного характеру схеми (струм I_m випереджає вхідну напругу, $\underline{U}_m = \underline{U}_{m14}$ на кут φ).

2.14 Умови передачі максимальної потужності від активного двополюсника до навантаження

При передачі сигналів, особливо слабких, від джерела до навантаження потрібно забезпечити максимальну потужність цього сигналу в навантаженні методом підбору параметрів навантаження.

До затискачів $11'$ активного двополюсника підімкнене навантаження (рис. 2.20). При цьому $\underline{Z}_0 = R_0 + j \cdot X_0$ – вхідний опір активного двополюсника з боку затискачів $11'$, а $\underline{Z}_n = R_n + j \cdot X_n$ – опір навантаження.

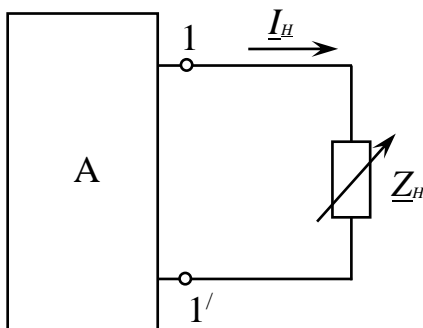


Рисунок 2.20 – Активний двополюсник

За теоремою про еквівалентний генератор струм навантаження

$$\underline{I}_n = \frac{\underline{U}_{11'}}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_0} = \frac{\underline{U}_{11'}}{(R_n + R_0) + j \cdot (X_n + X_0)}. \quad (2.67)$$

Активна потужність навантаження

$$P_n = I_n^2 \cdot R_n. \quad (2.68)$$

Підставимо (2.67) у (2.68) і отримаємо:

$$P_n = \frac{U_{11'xx}^2}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_0} = \frac{U_{11'xx}^2 \cdot R_n}{((R_n + R_0) + j \cdot (X_n + X_0))^2}. \quad (2.69)$$

Зрозуміло: якщо $X_n = -X_0$, при будь-якому значенні R_n струм I_n прагне до максимального значення. При цьому

$$P_n = \frac{U_{11'xx}^2 \cdot R_n}{(R_n + R_0)^2}. \quad (2.70)$$

Візьмемо від функції (2.70) похідну по R_H і дорівняємо її нулю:

$$\frac{dP_H}{dR_H} = \frac{U^2_{11'_{xx}} \cdot \left((R_H + R_0)^2 - 2 \cdot R_H \cdot (R_H + R_0) \right)}{(R_H + R_0)^4} = \frac{U^2_{11'_{xx}} \cdot (R_0^2 - R_H^2)}{(R_H + R_0)^4} = 0 \Rightarrow$$

$$R_0^2 - R_H^2 = 0,$$

$$R_0 = R_H. \quad (2.71)$$

Таким чином, активна потужність P є максимальною, якщо $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_H^*$, тобто умовою передачі максимальної активної потужності від активного двополюсника до навантаження є рівність вхідного опору активного двополюсника \underline{Z}_0 в комплексній формі спряженому комплексу опору навантаження \underline{Z}_H^* .

2.15 Резонанс у послідовному коливальному контурі

Резонансний режим – це режим роботи кола, що містить хоча б одну індуктивність і хоча б одну ємність, під час якого вхідний опір є чисто активним.

Розрізняють два резонансні режими:

- резонанс напруг;
- резонанс струмів.

Резонанс напруг – це режим роботи кола, що містить послідовно з'єднані ємності й індуктивності, під час якого вхідний реактивний опір дорівнює нулю, а струм на вході співпадає за фазою із вхідною напругою. Резонанс напруг відбувається в так званому послідовному коливальному контурі (рис. 2.10). У такому контурі індуктивний опір компенсується ємнісним, тобто $X = X_L - X_C = 0$, $\underline{Z}_{\text{вх}} = R$, та сумарна реактивна потужність $Q = 0$.

Домогтися резонансу можна, змінюючи частоту, ємність, індуктивність, або декілька параметрів одночасно.

Вводимо такі поняття:

1) резонансна частота ω_0 (частота, за якої відбувається резонанс), яка

$$\text{визначається з умови } X_L = X_C \Rightarrow \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}; \quad (2.72)$$

2) хвильовий (характеристичний) опір – це ємнісний або індуктивний опір при резонансі, тобто

$$\rho = \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad (2.73)$$

3) добротність контуру – відношення напруги на ємності (або напруги на індуктивності) до вхідної напруги, яка показує, у скільки разів напруга на ємності чи напруга на індуктивності більша за напругу на вході в момент резонансу:

$$q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 \cdot L \cdot I}{I \cdot R} = \frac{\rho}{R}. \quad (2.74)$$

При резонансі енергія магнітного поля дорівнює енергії електричного поля і відбувається постійний перехід енергії магнітного поля в енергію електричного. Сума миттєвих значень енергії магнітного w_m і електричного полів w_e – це значення миттєвої енергії електромагнітного поля:

$$w_{em} = w_m + w_e = \frac{L \cdot i^2}{2} + \frac{C \cdot u_c^2}{2}, \quad (2.75)$$

де $i = I_m \cdot \sin \omega_0 t$.

Миттєва напруга на ємності

$$\begin{aligned} u_C &= U_{Cm} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_{Cm} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = -\frac{I_m}{\omega_0 \cdot C} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \\ &= -\rho \cdot I_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = -\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Миттєве значення загального запасу електромагнітної енергії в резонансному режимі – величина постійна:

$$w_{em} = \frac{L \cdot I_m^2}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t) + \frac{L}{C} \cdot \frac{C}{2} \cdot I_m^2 \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t) = \frac{L \cdot I_m^2}{2} = \frac{C \cdot U_m^2}{2}. \quad (2.77)$$

Таким чином, зменшення енергії електричного поля супроводжується збільшенням енергії магнітного поля, і навпаки.

Частотні характеристики послідовного коливального контуру – це залежності різних параметрів контуру від частоти (рис. 2.21):

$$X_L = \omega \cdot L = f(\omega); \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = f(\omega); \quad X = X_L - X_C = f(\omega); \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2} = f(\omega).$$

Залежності ефективного (або амплітудного) значення струму або напруг на окремих елементах кола (L, C, R) від частоти вхідної напруги при її незмінній амплітуді називають резонансними характеристиками. Рівняння для резонансних характеристик такі (рис. 2.22):

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} = f(\omega); \quad U_L = I \cdot \omega \cdot L = \frac{U \cdot \omega \cdot L}{\sqrt{R^2 + X^2}} = f(\omega);$$

$$U_C = I \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{U}{\omega \cdot C \cdot \sqrt{R^2 + X^2}} = f(\omega).$$

Фазочастотна характеристика – це залежність кута зсуву фаз від частоти:

$$\varphi = f(\omega) = \arctg \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}. \quad (2.78)$$

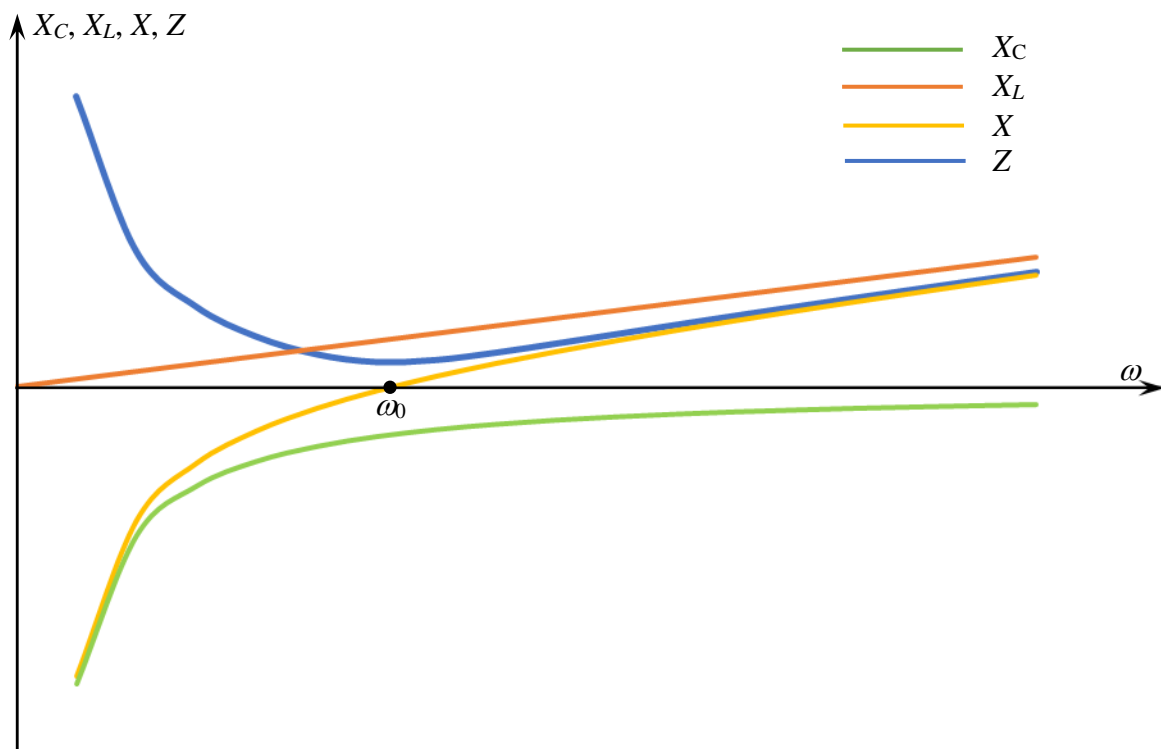


Рисунок 2.21 – Частотні характеристики

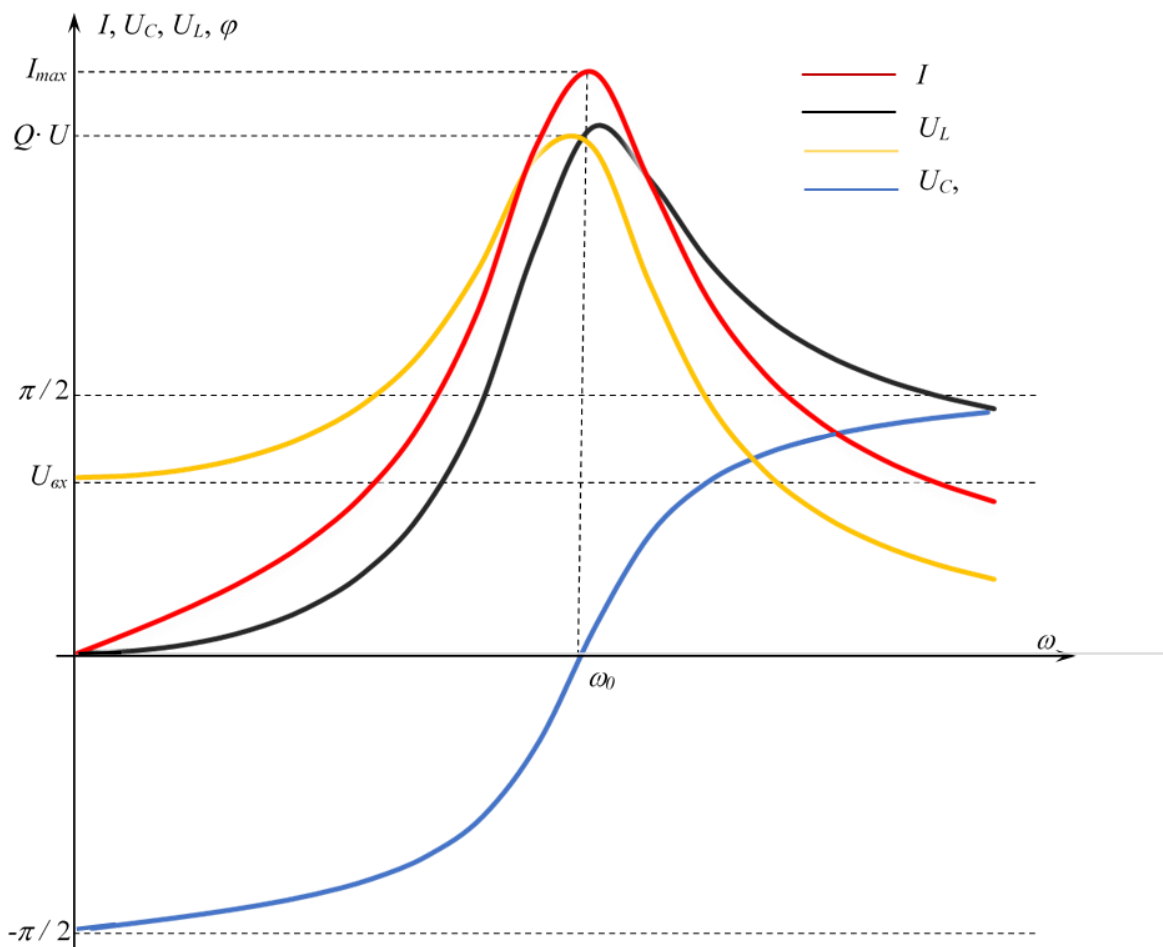


Рисунок 2.22 – Фазочастотна та резонансні характеристики

2.16 Резонанс у паралельному коливальному контурі

Резонанс струмів – це режим роботи кола, що містить паралельне з'єднання ємності й індуктивності, за якого вхідна реактивна провідність дорівнює нулю, а струм співпадає за фазою з напругою на вході кола. Під час резонансу струми струми в паралельних вітках можуть бути значно більшими, ніж в загальній вітці, індуктивна реактивна провідність компенсується ємнісною.

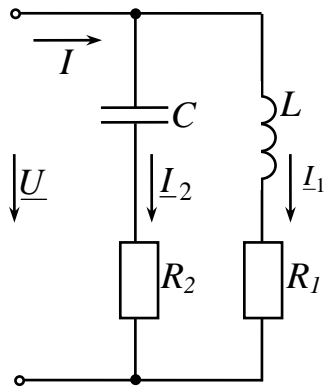


Рисунок 2.23 –
Реальний
паралельний контур

$$B = B_L - B_C = 0. \quad (2.79)$$

Реактивна потужність при цьому також дорівнюватиме нулю: $Q = Q_L - Q_C = 0$. Отримати резонанс струмів можна шляхом змінювання частоти, ємності й індуктивності.

Розглянемо реальний паралельний коливальний контур (рис. 2.23), на вхід якого подається синусоїдна напруга $u_C = U_m \cdot \sin(\omega t)$. Знайдемо модулі струмів за допомогою поняття провідності:

$$I = U \cdot Y, \quad I_1 = U \cdot Y_1, \quad I_2 = U \cdot Y_2, \quad (2.80)$$

де $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$; $Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2}$; $Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2}$ – загальна провідність та провідності віток.

Активні провідності віток:

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = \frac{R_2}{Z_2^2}. \quad (2.81)$$

Повна активна провідність кола:

$$G = G_1 + G_2. \quad (2.82)$$

Реактивні провідності віток:

$$B_1 = B_L = \frac{\omega \cdot L}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{\omega \cdot L}{Z_1^2}; \quad B_2 = B_C = \frac{1/\omega \cdot C}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot Z_2^2}. \quad (2.83)$$

Повна реактивна провідність кола:

$$B = B_L - B_C. \quad (2.84)$$

Під час резонансу ($B=0$) – $Y_0 = \sqrt{(G_1 + G_2)^2} = G_1 + G_2$, тому загальний струм має мінімальне значення:

$$I_0 = U \cdot Y_0 = U \cdot (G_1 + G_2). \quad (2.85)$$

Знайдемо резонансну частоту ω_0 з умови $B = B_L - B_C = 0$:

$$\frac{\omega_0 \cdot L}{R_1^2 + (\omega_0 \cdot L)^2} = \frac{1/(\omega_0 \cdot C)}{R_2^2 + (1/\omega_0 \cdot C)^2}. \quad (2.86)$$

Із (2.86) резонансна частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (2.87)$$

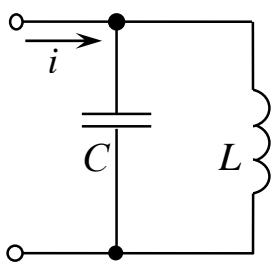
З останнього виразу бачимо, що резонанс можливий у таких випадках:

– коли $\sqrt{\frac{L}{C}} > R_1$ та $\sqrt{\frac{L}{C}} > R_2$;

– коли $\sqrt{\frac{L}{C}} < R_1$ та $\sqrt{\frac{L}{C}} < R_2$;

– коли $\sqrt{\frac{L}{C}} = R_1 = R_2 = \rho$, маємо так званий некерований резонанс

(можливий за будь-якої частоти), тому що вхідний опір активний.



$$Z_{\text{ex}} = \frac{(\rho + j \cdot \rho) \cdot (\rho - j \cdot \rho)}{(\rho + j \cdot \rho) + (\rho - j \cdot \rho)} = \frac{\rho^2 - j^2 \cdot \rho^2}{2 \cdot \rho} = \frac{2 \cdot \rho^2}{2 \cdot \rho} = \rho.$$

Якщо $R_1 \approx 0$ та $R_2 = 0$, то струм на вході прагне до нуля, а вхідний опір – до нескінченності ($i \rightarrow 0$, $Z_{\text{ex}} \rightarrow \infty$). Контури, у яких R_1 та R_2 малі порівняно з

Рисунок 2.24 – Контур з малими втратами

$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$, називаються контурами з малими втратами (рис. 2.24).

Для контурів з малими втратами

– резонансна частота така сама, як і для послідовного коливального

контурі – $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$;

– добротність контуру – $q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I}$; (2.88)

– хвильова провідність – $\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}}$. (2.89)

Залежність струму I від кутової частоти ω для схеми на рисунку 2.23 зображена на рисунку 2.25 (резонансна характеристика).

Фазочастотна характеристика, тобто залежність кута зсуву фаз φ між напругою та струмом на вході кола від кутової частоти ω для тієї самої схеми, показана на рисунку 2.26. Якщо ω прагне до нуля, значення φ наближається до 0, а при $\omega = \omega_0$ кут зсуву дорівнює нулю.

Залежності параметрів B_L , B_C , B від частоти ω , тобто частотні характеристики для ідеального контуру (рис. 2.24) будуть такими (рис. 2.27).

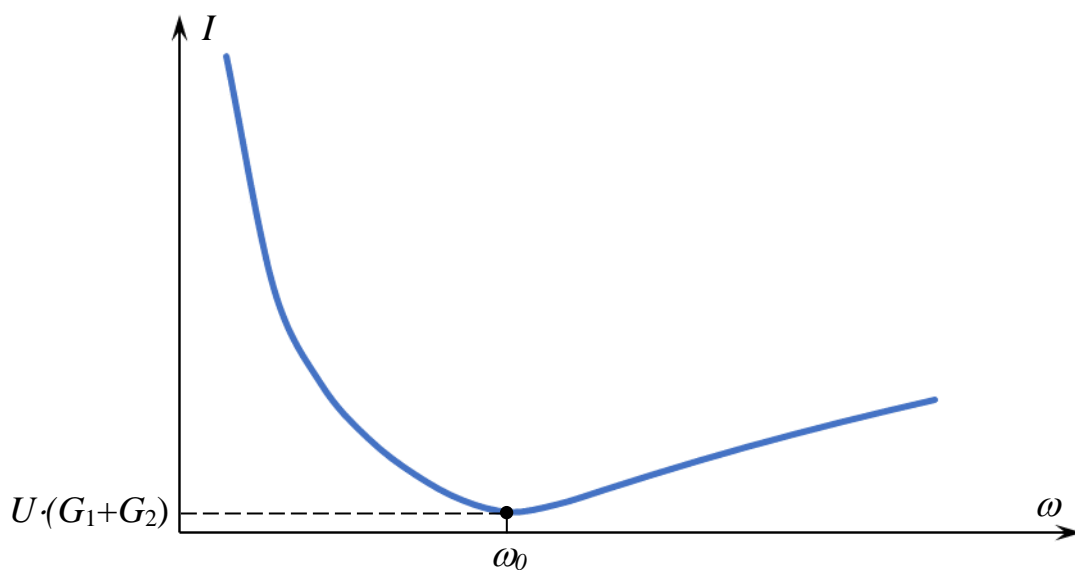


Рисунок 2.25 – Резонансна характеристика для схеми рисунка 2.23

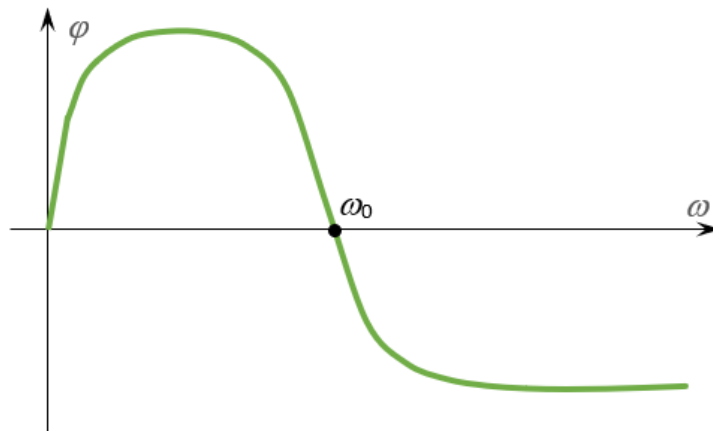


Рисунок 2.26 – Фазочастотна характеристика для схеми рисунка 2.24

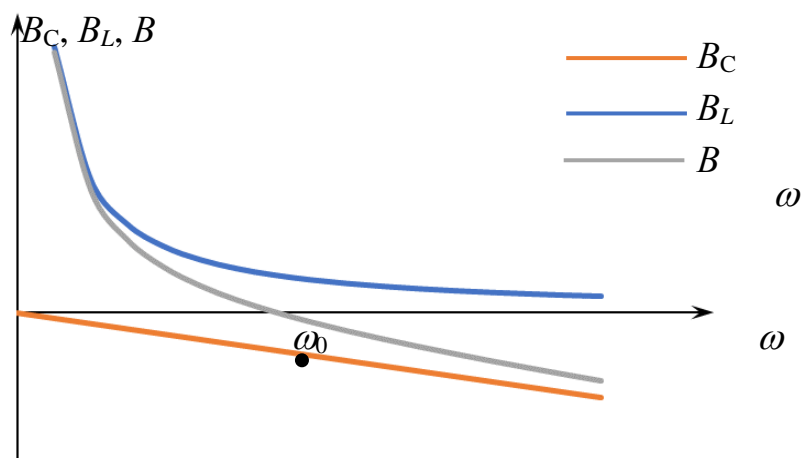


Рисунок 2.27 – Частотні характеристики для схеми рисунка 2.24

2.17 Складний резонансний коливальний контур

Складним резонансним коливальним контуром називають контур, у якому можуть виникнути як резонанс струмів, так і резонанс напруг (рис. 2.28).

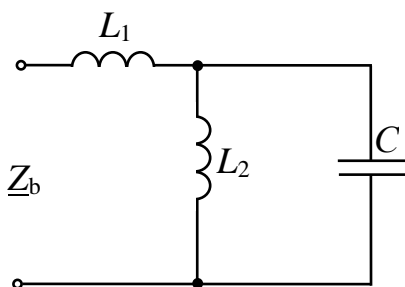


Рисунок 2.28 –
Реальний коливальний
контур

З умов виникнення резонансу струмів і напруг випливає, що резонансними будуть частоти, які перетворюють вхідний реактивний опір X в нуль (тоді $B = \frac{1}{X} = \infty$), або вхідну реактивну провідність B в нуль (тоді $X = \frac{1}{B} = \infty$).

Вхідний опір для схеми рисунка 2.28:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= j \cdot \omega \cdot L_1 + \frac{j \cdot \omega \cdot L_2 \cdot \left(-j \frac{1}{\omega \cdot C} \right)}{j \cdot \omega \cdot L_2 - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}} = \\ &= j \cdot \left[\omega \cdot L_1 - \frac{\omega \cdot L_2 \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}}{\left(\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)} \right] = j \cdot \left[\omega \cdot L_1 - \frac{\omega \cdot L_2}{\omega^2 \cdot L_2 \cdot C - 1} \right] = j \cdot X. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що $X \rightarrow \infty$, коли $\omega^2 \cdot L_2 \cdot C - 1 = 0 \Rightarrow$ частота резонансу струмів для схеми на рисунку 2.28:

$$\omega_p(I) = \frac{1}{\sqrt{L_2 \cdot C}}. \quad (2.90)$$

З іншого боку, $X \rightarrow 0$, якщо $\omega^3 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot C - \omega \cdot L_1 - \omega \cdot L_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega^2 = \frac{L_1 + L_2}{L_1 \cdot L_2 \cdot C}$. Тоді частота резонансу напруг для схеми на рисунку 2.25

$$\omega_p(U) = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 \cdot L_2 \cdot C}}. \quad (2.91)$$

Робимо висновок, що електрична схема (рис. 2.28) має дві резонансні частоти – $\omega_p(I)$ та $\omega_p(U)$.

2.18 Практичне застосування резонансу

Електричний резонанс використовується в багатьох галузях техніки та науки. Наведемо деякі з них.

1. Радіо та телебачення:

– використовується в радіоприймачах і телевізорах для виділення потрібної частоти з багатьох доступних частот (тюнер);

– резонансні контури застосовуються для фільтрації сигналів певної частоти (фільтри).

2. Комунікаційні системи:

– використання резонансу для покращення прийому та передачі сигналів (антени);

– у радіопередавачах для генерації високочастотних сигналів (коливальні контури).

3. Медичні прилади:

– використовується ядерний магнітний резонанс для створення зображень внутрішніх структур тіла (магнітно-резонансна томографія, МРТ);

– у медичних дослідженнях для діагностики різних захворювань використовуються резонансні частоти.

4. Енергетика:

– використання резонансних явищ для бездротового заряджання пристроїв, таких як смартфони та електромобілі (безпровідна передача енергії);

– для підвищення ефективності передачі електроенергії (резонансні трансформатори).

5. Автомобільна промисловість:

– використання резонансу для бездротового заряджання електромобілів (індуктивні зарядні системи);

– резонансні датчики для вимірювання різних параметрів, таких як рівень палива або тиск в шинах (датчики).

6. Акустика:

– використовується для покращення якості звуку (резонансні колонки);

– резонансні явища застосовуються для покращення чутливості та якості звуку (мікрофони та гучномовці).

7. Електроніка:

– використовується в генераторах, що генерують синусоїдальні сигнали для різних цілей (коливальні контури);

– резонансні кола використовуються для стабілізації частоти в осциляторах (стабілізація частоти).

8. Наукові дослідження – вивчення резонансних явищ допомагає в розумінні фізичних процесів та створенні нових технологій.

9. Для підвищення коефіцієнта потужності $\cos \varphi$, тобто компенсації кута зсуву фаз.

Як відомо, коефіцієнт потужності ($\cos \varphi$) – це співвідношення між активною потужністю (яка використовується для виконання корисної роботи) та повною потужністю (див. формулу (2.48)). Низький коефіцієнт потужності означає, що в системі більше реактивної потужності, що призводить до більших втрат енергії та неефективного використання електричної системи. Тобто для кращого використання електричних машин і апаратів бажано мати більш

високий коефіцієнт потужності $\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I_H}$, тобто намагатися отримати

менший зсув за фазою між струмом і напругою. Високий $\cos \varphi$ також необхідний для зменшення втрат під час передачі енергії по лініях електропередачі, бо якщо підвищувати $\cos \varphi$, то струм, від якого залежить

рівень втрат у проводах, зменшується $\left(I_H = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi} \right)$.

Для підвищення коефіцієнта потужності, що є важливим завданням для підвищення ефективності електроенергетичних систем, використовують різні методи компенсації кута зсуву фаз. Вибір методу компенсації залежить від конкретних умов та вимог системи. Використання конденсаторних батарей, синхронних двигунів та активних фільтрів дозволяє ефективно компенсувати реактивну потужність, знижуючи втрати енергії та підвищуючи ефективність роботи електричних мереж.

Розглянемо докладніше один з найбільш поширених методів компенсації реактивної потужності, який саме пов'язаний із поняттям резонансу – метод використання конденсаторної батареї. Заснований він на тому, що банки конденсаторів генерують реактивну потужність, протилежну за знаком до реактивної потужності індуктивних навантажень (наприклад, електродвигунів), що і дозволяє компенсувати зсув фаз. Перевагами такого методу є простота встановлення, низька вартість, ефективність у більшості випадків, а

недоліками – обмежена регульованість, бо вона не підходить для навантажень зі швидко змінюваною реактивною потужністю.

На практиці конденсаторну батарею під'єднують паралельно до індуктивних елементів (наприклад, до асинхронних двигунів) (рис. 2.29) (I_H – струм навантаження).

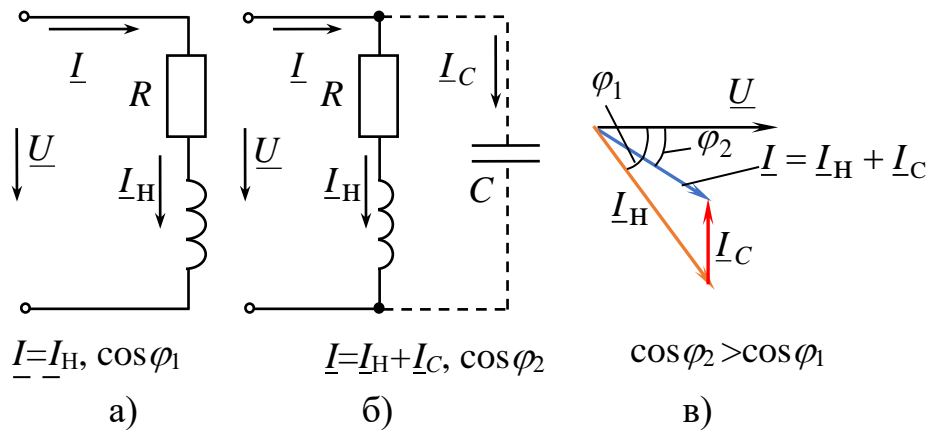


Рисунок 2.29 – Компенсація кута зсуву фаз:
 а – схема без компенсації; б – схема з компенсацією;
 в – пояснення за допомогою векторної діаграми

Електричний резонанс дозволяє ефективно використовувати енергію, підвищувати точність і ефективність різних систем і приладів, що робить його невіддільною частиною сучасних технологій. Але якщо резонанс не передбачений спеціально, він може призвести до перенапруги або надструму, що пошкоджує конденсатори, котушки індуктивності та трансформатори, електротехнічні пристрої, спричинить пробій ізоляції, а в електричних системах спричинить небажане споживання енергії та зниження ефективності роботи пристроїв, у радіотехніці – інтерференцію та збої в роботі пристроїв.

2.19 Поняття падіння і втрати напруги в лініях передачі енергії

Лінія передачі має активний $R_{л}$ і індуктивний $X_{л}$ опори, навантаження також активно-індуктивне – $\underline{Z}_H = R_H + j \cdot X_H$.

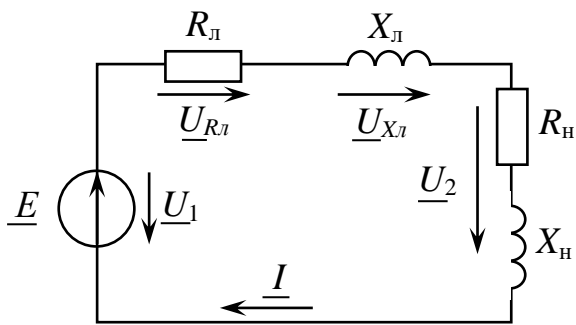


Рисунок 2.30 – Лінія передачі електроенергії

опорі лінії $-\underline{U}_{L_l} = j \cdot X_l \cdot \underline{I}$.

Під падінням напруги \underline{U}_l розуміють модуль геометричної різниці векторів \underline{U}_1 та \underline{U}_2 . На векторній діаграмі (рис. 2.31) – це відрізок $[CB]$. Довжина цього відрізка – $|CB| = I \cdot \sqrt{R_l^2 + X_l^2}$.

Втрата напруги дорівнює різниці модулів напруги на початку й наприкінці лінії – $|\underline{U}_1| - |\underline{U}_2| = |CA| - |BA|$.

З діаграми на рисунку 2.31 зрозуміло, що падіння напруги більше, ніж втрата напруги.

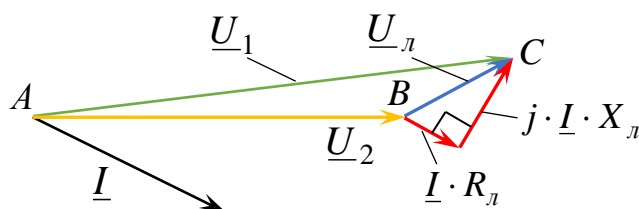


Рисунок 2.31 – Діаграма для пояснення понять падіння та втрати напруги

Спрощена схема лінії передачі зображена на рисунку 2.30, на якому позначено:

- напруга на початку і наприкінці лінії, відповідно, $\underline{U}_1, \underline{U}_2$;
- падіння напруги в активному опорі лінії – $\underline{U}_{R_l} = \underline{I} \cdot R_l$;
- падіння напруги в індуктивному

3 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЧОТИРИПОЛЮСНИКІВ

3.1 Основні поняття і класифікація

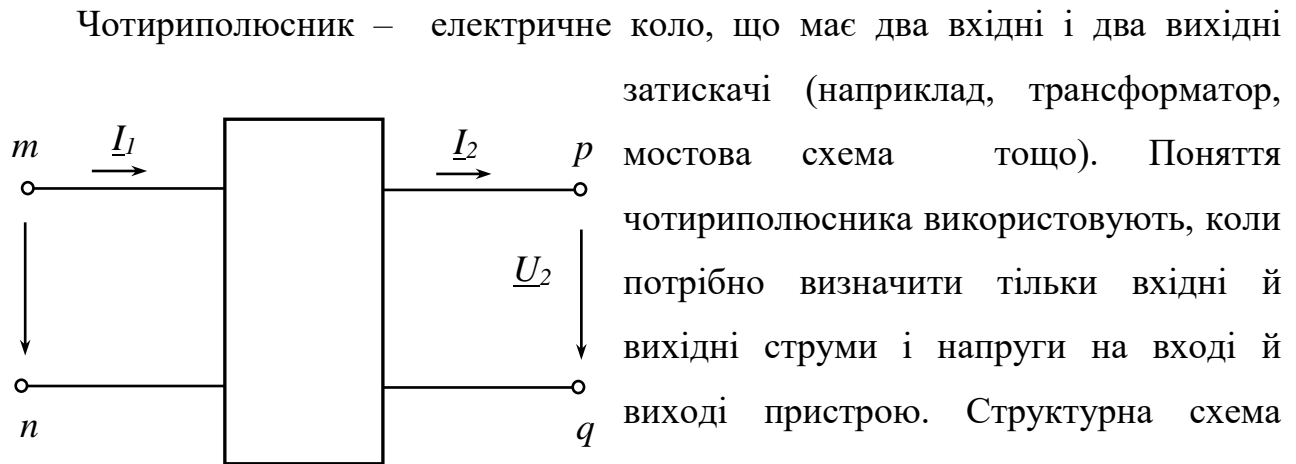


Рисунок 3.1 – Чотириполюсник

- вхідні затискачі m та n , до яких під'єднане джерело живлення;
- вихідні затискачі p та q , до яких під'єднане навантаження;
- вхідні струм та напруга I_1 , U_1 ;
- вихідні струм та напруга I_2 , U_2 .

Таким чином, чотириполюсник – передаточна ланка між джерелом живлення і навантаженням, які можуть змінюватися, але елементи чотириполюсника та схема їх внутрішнього з'єднання, залишаються незмінними.

Класифікацію чотириполюсників здійснюють так:

- за принципом лінійності (лінійні й нелінійні);
- за схемою внутрішніх поєднань (Г-подібні, Т-подібні, П-подібні (рис. 3.2));
- активні, які мають у своєму складі хоча б одне джерело енергії, і пасивні (не мають у своєму складі джерел енергії);
- автономні і неавтономні (якщо автономний чотириполюсник відімкнути від решти схеми, то хоча б на одній парі затискачів існуватиме напруга);
- симетричні (змінування місцями джерела живлення і навантаження не змінить струмів на вході й виході чотириполюсника) і несиметричні.

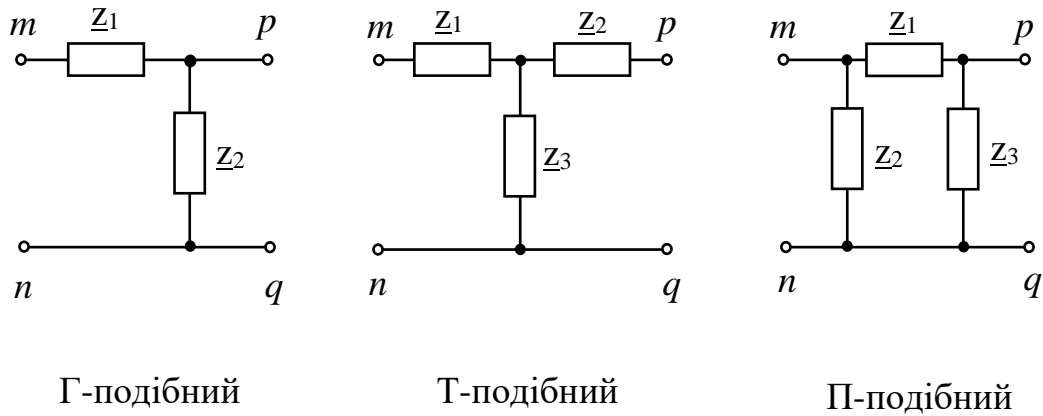


Рисунок 3.2 – Типи чотириполіусників

3.2 Основні рівняння чотириполіусника

Для будь-якого лінійного пасивного чотириполіусника існують основні рівняння, що пов'язують струм \underline{I}_1 і напругу \underline{U}_1 на вході зі струмом \underline{I}_2 і напругою \underline{U}_2 на виході. Розглянемо так звану А-форму запису системи основних рівнянь чотириполіусника, для якої характерними є саме такі напрями струмів і напруг, які показано на рисунку 3.1:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A \cdot \underline{U}_2 + B \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = C \cdot \underline{U}_2 + D \cdot \underline{I}_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

де A, B, C, D – комплексні коефіцієнти, що залежать від значень елементів чотириполіусника, їх характеру, типу внутрішнього з'єднання, частоти та визначають розрахунком і експериментом.

Коефіцієнти чотириполіусника пов'язані співвідношенням

$$A \cdot D - B \cdot C = 1. \quad (3.2)$$

Доведемо, що рівняння (3.1) існують.

Відповідно до теореми про компенсацію можна замінити опір \underline{Z}_H із струмом \underline{I}_2 на ЕРС \underline{E}_2 , що дорівнює $\underline{E}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_H$ і спрямована назустріч струму \underline{I}_2 (рис. 3.3, а). Запишемо вирази для струмів \underline{I}_1 та \underline{I}_2 , використовуючи метод суперпозиції та поняття вхідних і взаємних провідностей:

$$\underline{I}_1 = \underline{E}_1 \cdot \underline{Y}_{11} - \underline{E}_2 \cdot \underline{Y}_{12}, \quad (3.3)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{E}_1 \cdot \underline{Y}_{21} - \underline{E}_2 \cdot \underline{Y}_{22}. \quad (3.4)$$

де \underline{Y}_{11} , \underline{Y}_{22} – власні провідності вхідної і вихідної віток;

$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ – взаємні провідності вхідної (першої) і вихідної (другої) віток.

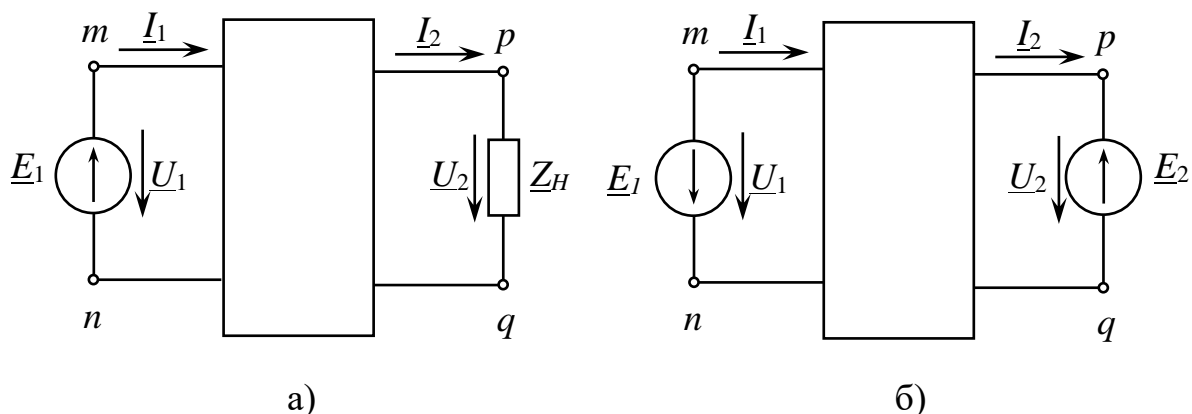


Рисунок 3.3 – Доведення існування рівнянь (3.1)

З (3.4) виразимо \underline{E}_1 :

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_2 \cdot \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} + \underline{I}_2 \cdot \frac{1}{\underline{Y}_{12}}. \quad (3.5)$$

Підставимо отриманий вираз (3.5) в рівняння (3.3):

$$\underline{I}_1 = \underline{E}_2 \cdot \frac{\underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}} + \underline{I}_2 \cdot \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}. \quad (3.6)$$

Уведемо позначення:

$$A = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}}; \quad B = \frac{1}{\underline{Y}_{12}}; \quad C = \frac{\underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}}; \quad D = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}. \quad (3.7)$$

Розмірності коефіцієнтів такі: A і D – безрозмірні величини, C вимірюється в См, B вимірюється в Ом.

Для симетричного чотириполюсника – $A = D$.

З урахуванням уведених позначень і того, що $\underline{U}_1 = \underline{E}_1$, $\underline{U}_2 = \underline{E}_2$, можна переписати рівняння (3.5) та (3.6) у такому вигляді:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A \cdot \underline{U}_2 + B \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = C \cdot \underline{U}_2 + D \cdot \underline{I}_2 \end{cases}. \quad (3.8)$$

Підставимо вирази (3.7) для коефіцієнтів A , B , C , D в рівняння (3.2) та переконаємось у виконанні співвідношення (3.2):

$$A \cdot D - D \cdot C = \frac{Y_{22} \cdot Y_{11}}{Y_{12}^2} - \frac{Y_{22} \cdot Y_{11} - Y_{12}^2}{Y_{12}^2} = 1.$$

Якщо поміняти місцями \underline{E}_1 і \underline{Z}_H та зробити ті самі операції, то отримаємо систему основних рівнянь чотириполюсника, коли його живлення здійснюється з боку вихідних затискачів:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = D \cdot \underline{U}_1 + B \cdot \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = C \cdot \underline{U}_1 + A \cdot \underline{I}_1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Існують також інші форми запису рівнянь чотириполюсника – H , Y , Z , G , B . Наприклад, для Y -форми напрям струму \underline{I}_1 такий самий, як і для A -форми, а напрям \underline{I}_2 – протилежний A -формі. Y -форма запису має такий вигляд:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = Y_{11} \cdot \underline{U}_1 + Y_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = Y_{21} \cdot \underline{U}_1 + Y_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{cases}, \quad (3.10)$$

$$\text{де } Y_{11} = \frac{D}{B}; Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{B}; Y_{22} = \frac{A}{B}. \quad (3.11)$$

Таким чином, якщо з чотирьох величин \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{U}_1 , \underline{U}_2 дві величини відомі, то інші визначаються з основних рівнянь чотириполюсника за умови відомих коефіцієнтів.

Форма A застосовується в теорії кругових діаграм, форми Y , Z – у теорії синтезу кіл, параметри схем заміщення транзисторів представляють у H -формі.

3.3 Визначення коефіцієнтів пасивного чотириполюсника

3.3.1 Визначення коефіцієнтів чотириполюсника розрахунком

Для визначення коефіцієнтів розрахунком повинні бути відомі схема з'єднання елементів чотириполюсника і параметри його елементів.

Отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів. Основні рівняння, як відомо, мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A \cdot \underline{U}_2 + B \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = C \cdot \underline{U}_2 + D \cdot \underline{I}_2 \end{cases}.$$

Припустимо, що струм $\underline{I}_2 = 0$ (режим холостого ходу на виході),

$$\text{тоді } \begin{cases} \underline{U}_{1xx} = A \cdot \underline{U}_{2xx} \\ \underline{I}_{1xx} = C \cdot \underline{U}_{2xx} \end{cases}, \text{ звідки } \frac{\underline{U}_{1xx}}{\underline{I}_{1xx}} = \frac{A}{C} = \underline{Z}_{1xx}, \quad (3.12)$$

де \underline{Z}_{1xx} – вхідний опір чотириполосника в режимі холостого ходу на виході.

Припустимо, що напруга $\underline{U}_2 = 0$ (режим короткого замикання на виході),

$$\text{тоді } \begin{cases} \underline{U}_{1kz} = B \cdot \underline{I}_{2kz} \\ \underline{I}_{1kz} = D \cdot \underline{I}_{2kz} \end{cases}.$$

Звідси

$$\frac{\underline{U}_{1kz}}{\underline{I}_{1kz}} = \frac{B}{D} = \underline{Z}_{1kz}, \quad (3.13)$$

де \underline{Z}_{1kz} – вхідний опір чотириполосника в режимі короткого замикання на виході.

Основні рівняння чотириполосника, коли його живлення здійснюється з боку вихідних затискачів, як відомо, мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = D \cdot \underline{U}_1 + B \cdot \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = C \cdot \underline{U}_1 + A \cdot \underline{I}_1 \end{cases}.$$

Припустимо, що на вході коротке замикання $\underline{U}_1 = 0$,

$$\text{тоді } \begin{cases} \underline{U}_{2kz} = B \cdot \underline{I}_{1kz} \\ \underline{I}_{2kz} = A \cdot \underline{I}_{1kz} \end{cases}.$$

Звідси

$$\frac{\underline{U}_{2kz}}{\underline{I}_{2kz}} = \frac{B}{A} = \underline{Z}_{2kz}, \quad (3.14)$$

де \underline{Z}_{2kz} – вихідний опір чотириполосника в режимі короткого замикання на вході при живленні з боку виходу.

Виразимо всі коефіцієнти через коефіцієнт A :

$$C = \frac{A}{\underline{Z}_{1\text{нх}}}; \quad B = A \cdot \underline{Z}_{2\text{кз}}; \quad D = \frac{B}{\underline{Z}_{1\text{кз}}} = \frac{A \cdot \underline{Z}_{2\text{кз}}}{\underline{Z}_{1\text{кз}}}. \quad (3.15)$$

Скористаємося рівнянням (3.2), в яке підставимо рівняння (3.15):

$$A^2 \cdot \frac{\underline{Z}_{2\text{кз}}}{\underline{Z}_{1\text{кз}}} - A^2 \cdot \frac{\underline{Z}_{2\text{кз}}}{\underline{Z}_{1\text{нх}}} = 1 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1\text{кз}} \cdot \underline{Z}_{1\text{нх}}}{\underline{Z}_{2\text{кз}} \cdot (\underline{Z}_{1\text{нх}} - \underline{Z}_{1\text{кз}})}}. \quad (3.16)$$

Таким чином, якщо відомі опори $\underline{Z}_{2\text{кз}}$, $\underline{Z}_{1\text{нх}}$, $\underline{Z}_{1\text{кз}}$, то за формулами (3.16), (3.15) знаходять усі коефіцієнти чотириполюсника.

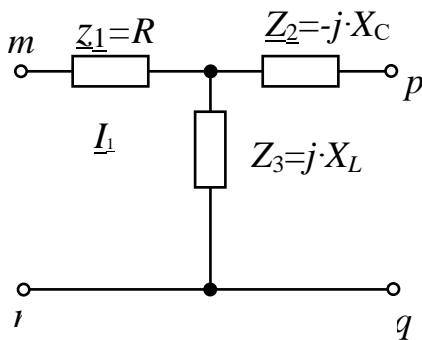


Рисунок 3.4 –
Т-подібний
чотириполюсник

Розглянемо приклад (рис. 3.4).

Нехай для Т-подібного чотириполюсника (рис. 3.4) відомі параметри його елементів:

$$R = 100 \text{ Ом}, \quad X_L = 200 \text{ Ом}, \quad X_C = 100 \text{ Ом}.$$

Визначимо коефіцієнти A, B, C, D :

1. Живлення з боку входу, режим холостого ходу на виході:

$$\underline{Z}_{1\text{нх}} = R + j \cdot X_L = 100 + j \cdot 200 = 224 \angle 63,4^\circ \text{ Ом}.$$

2. Живлення з боку входу, коротке замикання на виході:

$$\underline{Z}_{1\text{кз}} = R + \frac{j \cdot X_L \cdot (-j \cdot X_C)}{j \cdot (X_L - X_C)} = 100 + \frac{20000}{j \cdot 100} = 100 - j \cdot 200 = 224 \angle -63,4^\circ \text{ Ом}.$$

3. Живлення з боку виходу, коротке замикання на вході:

$$\underline{Z}_{2\text{кз}} = -j \cdot X_C + \frac{R \cdot j \cdot X_L}{R + j \cdot X_L} = -j \cdot 100 + \frac{j \cdot 20000}{100 + j \cdot 200} = 77,3 - j \cdot 61,3 = 98,6 \angle -38,4^\circ \text{ Ом}.$$

4. За формулами (3.15), (3.16) визначаємо коефіцієнти:

$$A = \sqrt{\frac{224 \angle -63,4^\circ \cdot 224 \angle 63,4^\circ}{98,6 \angle -38,4^\circ \cdot (224 \angle 63,4^\circ - 224 \angle -63,4^\circ)}} = 1,128 \angle -25,8^\circ;$$

$$B = A \cdot \underline{Z}_{2кз} = 1,128 \angle -25,8^\circ \cdot 98,6 \angle -38,4^\circ = 111,22 \angle -64,2^\circ \text{ Ом};$$

$$C = A / \underline{Z}_{1нх} = \frac{1,128 \angle -25,8^\circ}{224 \angle 63,4^\circ} = 0,005 \angle -89,2^\circ \text{ См};$$

$$D = B / \underline{Z}_{1кз} = \frac{111,22 \angle -64,2^\circ}{224 \angle -63,4^\circ} = 0,5 \angle -0,8^\circ.$$

Перевірка

$$A \cdot D - B \cdot C = 1,128 \angle -25,8^\circ \cdot 0,5 \angle -0,8^\circ - 111,22 \angle -64,2^\circ \cdot 0,005 \angle -89,2^\circ = \\ = 0,564 \angle -26,4^\circ - 0,5561 \angle -153,4^\circ = 0,505 - j \cdot 0,25 + 0,5 + j \cdot 0,249 \approx 1.$$

3.3.2 Визначення коефіцієнтів чотириполюсника експериментальним шляхом

Схема для експериментального визначення коефіцієнтів чотириполюсника зображена на рисунку 3.5.

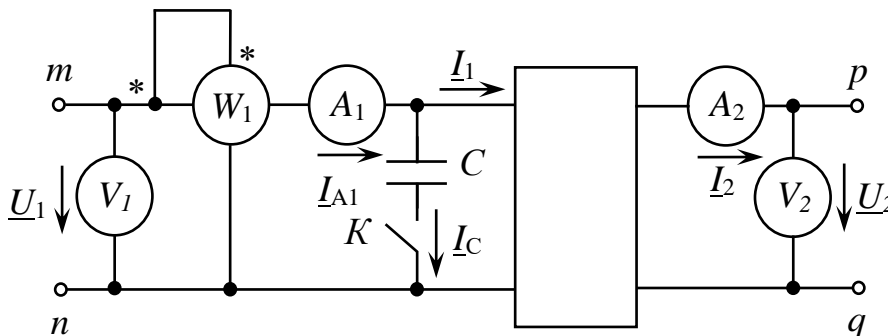


Рисунок 3.5 – Експериментальна схема для визначення коефіцієнтів чотириполюсника

Розглянемо етапи визначення коефіцієнтів чотириполюсника:

1. Режим холостого ходу (живлення з боку входу чотириполюсника):

– модуль опору $Z_{1xx} = \frac{U_{1xx}}{I_{1xx}} = \frac{\text{показання вольтметра } V_1}{\text{показання амперметра } A_1};$

– модуль кута зсуву фаз

$$\varphi_{1xx} = \arccos \frac{P_{1xx}}{U_{1xx} \cdot I_{1xx}} = \arccos \frac{\text{показання ватметра } W_1}{(\text{показання амперметра } A_1) \cdot (\text{показання вольтметра } V_1)}.$$

2. Режим короткого замикання (живлення зі сторони входу):

$$- \text{модуль опору } Z_{1кз} = \frac{U_{1кз}}{I_{1кз}} = \frac{\text{показання вольтметра } V_1}{\text{показання амперметра } A_1};$$

- модуль кута зсуву фаз

$$\varphi_{1кз} = \arccos \frac{P_{1кз}}{U_{1кз} \cdot I_{1кз}} = \arccos \frac{\text{показання ватметра } W_1}{(\text{показання амперметра } A_1) \cdot (\text{показання вольтметра } V_1)}.$$

3. Режим короткого замикання на вході (живлення зі сторони виходу, при проведенні цього досліду ватметр W_2 треба ввімкнути в вихідне коло), при цьому:

$$- \text{модуль опору } Z_{2кз} = \frac{U_{2кз}}{I_{2кз}} = \frac{\text{показання вольтметра } V_2}{\text{показання амперметра } A_2};$$

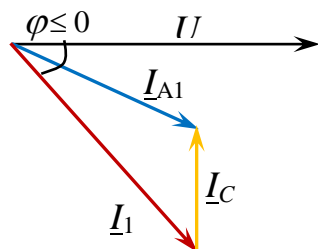
- модуль кута зсуву фаз

$$\varphi_{2кз} = \arccos \frac{P_{2кз}}{U_{2кз} \cdot I_{2кз}} = \arccos \frac{\text{показання ватметра } W_2}{(\text{показання амперметра } A_2) \cdot (\text{показання вольтметра } V_2)}.$$

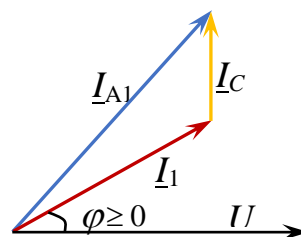
Знаки кутів $\varphi_{1хх}$, $\varphi_{1кз}$, $\varphi_{2кз}$ визначають за допомогою замикання ділянки «ключ – конденсатор» на кожному етапі. При цьому, якщо при замиканні ключа K покази амперметра A_1 зменшуються, то це означає, що характер відповідного опору активно-індуктивний і кут має знак «+», а якщо при замиканні ключа K покази амперметра A_1 збільшуються, то характер відповідного опору активно-ємнісний і кут має знак «-». Суть цього моменту ілюструють векторні діаграми, зображені на рисунку 3.6. При цьому, якщо ключ K незамкнутий, то $\underline{I}_{A1} = \underline{I}_1$, а у випадку, коли ключ K замкнутий, $\underline{I}_{A1} = \underline{I}_1 + \underline{I}_C$.

R - L опір, $I_{A1} \leq I_1$

R - C опір, $I_{A1} \geq I_1$



а)



б)

Рисунок 3.6 – Векторні діаграми: а – активно-індуктивний характер; б – активно-ємнісний характер

3.4 Схеми заміщення пасивного чотириполюсника

Будь-який складний чотириполюсник можна замінити більш простим (Т- або П-подібним) і за цієї заміни три опори схеми $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ повинні бути такими, щоб схема заміщення мала такі самі коефіцієнти A, B, C, D , що й вихідний чотириполюсник.

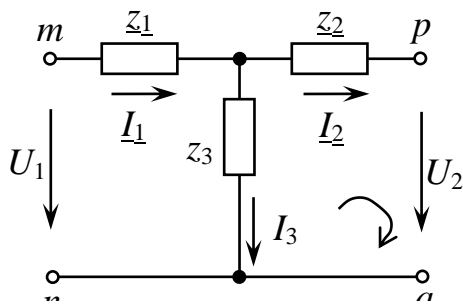


Рисунок 3.7 –

Т-подібний чотириполюсник

Нехай деякий складний чотириполюсник з коефіцієнтами A, B, C, D треба замінити Т-подібним чотириполюсником (рис. 3.7).

Знайдемо, якими саме мають бути опори $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, щоб коефіцієнти A, B, C, D залишались незмінними. Рівняння за першим і другим законами Кірхгофа для рисунку 3.7:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0 \\ \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{I}_3 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{U}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = \underline{I}_3 \\ \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{U}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (3.17)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_3} \cdot \underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \cdot \underline{I}_2. \quad (3.18)$$

Порівняємо друге рівняння системи (3.1) і рівняння (3.18). Зрозуміло, що

$$C = \frac{1}{\underline{Z}_3}, \quad D = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}. \quad (3.19)$$

Для зовнішнього контуру

$$\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{U}_2 - \underline{U}_1 = 0, \quad (3.20)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2. \quad (3.21)$$

Підставимо рівняння (3.18) в (3.21):

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \frac{\underline{U}_2 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} + \underline{I}_2 \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2. \quad (3.22)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\right) + \underline{I}_2 \cdot \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right). \quad (3.23)$$

Порівняємо перше рівняння системи (3.1) і рівняння (3.23). Зрозуміло, що

$$A = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}, \quad B = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}. \quad (3.24)$$

Таким чином, із (3.19) та (3.24)

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{C}, \quad \underline{Z}_1 = \frac{A-1}{C}, \quad \underline{Z}_2 = \frac{D-1}{C}. \quad (3.25)$$

Формули (3.25) використовують для розрахунку опорів $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ Т-подібного чотириполюсника, коли відомі коефіцієнти вихідного чотириполюсника.

3.5 Годографи (кругові й лінійні діаграми)

Багато практичних задач потребують дослідження залежності струмів та напруг електричного кола від змінювання різних факторів (змінювання значення певного пасивного елемента, наприклад, при незмінних значеннях усіх інших вихідних даних). Окрім аналітичних методів, використовують і графічні, тобто побудову годографів (діаграм). Годограф – геометричне місце кінців векторів, що зображують різні величини. Годографи можуть мати форму дуги кола – тоді вони називаються круговими діаграмами, або форму прямої лінії – тоді це лінійні діаграми.

3.5.1 Лінійні діаграми

Розглянемо ділянку схеми на рисунку 3.8. Побудуємо геометричне місце кінців вектора, що зображує комплексний опір цієї ділянки $\underline{Z} = R + j \cdot X_L$ у



Рисунок 3.8 – Ділянка електричної схеми

двох випадках змінювання параметрів:

- $0 \leq R \leq \infty$;
- $0 \leq X_L \leq \infty$.

Годографом у першому випадку є пряма, яка паралельна осі дійсних чисел і проходить через точку з координатами $(0; X_L)$ (рис. 3.9, а). Годографом у другому випадку є пряма, яка паралельна осі уявних чисел і проходить через точку з координатами $(R; 0)$ (рис. 3.9, б).

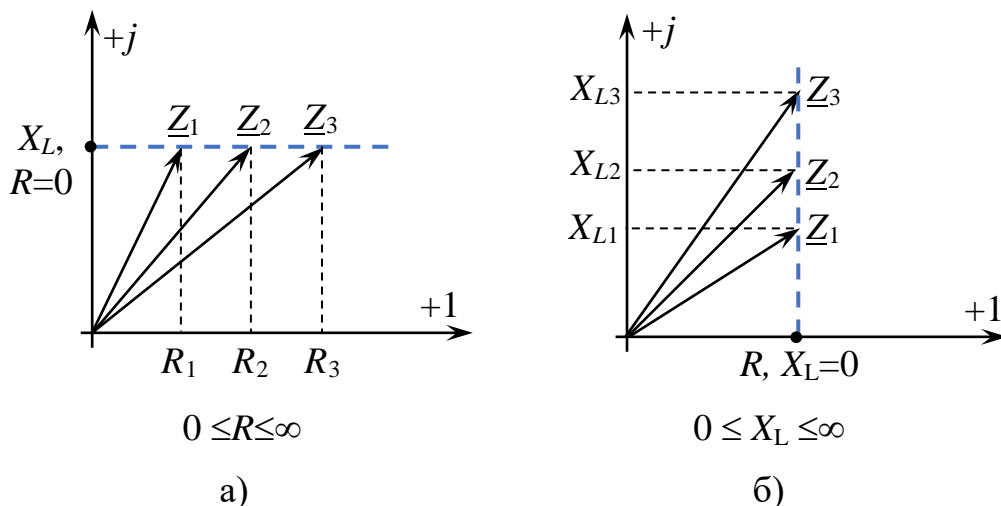


Рисунок 3.9 – Годографи для ділянки схеми на рисунку 3.8:
а – $X_L = \text{const}$; б – $R = \text{const}$

Розглянемо інший приклад побудови лінійної діаграми для струму $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ (схема на рис. 3.10) за умов $U_{ab} = \text{const}$; $R, X_L = \text{const}$; $X_C = \text{var}$.

Довільно спрямовуємо вхідну напругу \underline{U}_{ab} (вертикально).

Струм \underline{I}_1 відстає від \underline{U}_{ab} на кут $\varphi = \text{arctg} \frac{X_L}{R}$.

Струм \underline{I}_2 випереджає \underline{U}_{ab} на кут 90° . Годограф у цьому випадку – лінія pq .

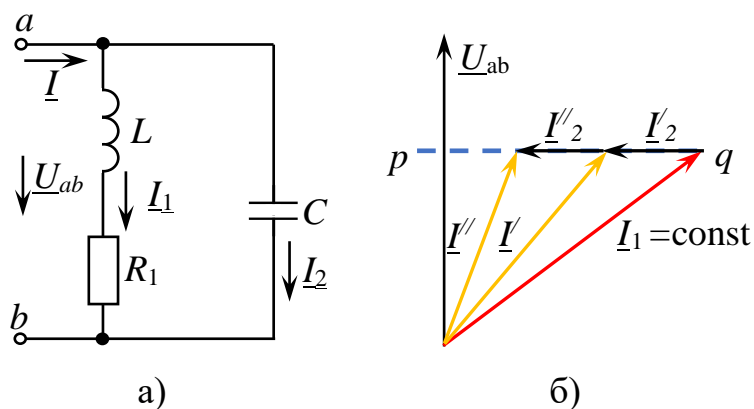


Рисунок 3.10 – Схема і годограф струму:
а – схема; б – годограф струму \underline{I}

Робимо такий висновок. Нехай деяка комплексна величина визначається рівнянням вигляду $\underline{N} = \underline{A} + \underline{B}$, причому $\underline{A} = A \cdot e^{j\alpha} = const$, $\underline{B} = B \cdot e^{j\beta}$ – змінна комплексна величина, для якої $\beta = const$ (незмінний напрям), $0 \leq |\underline{B}| \leq \infty$ (змінна довжина), α, β – кути комплексних величин \underline{A} та \underline{B} відносно осі дійсних чисел. Тоді на комплексній площині вектор \vec{N} , що є сумою двох векторів \vec{A} та \vec{B} , графічно представляє пряму лінію. Інакше кажучи, рівняння $\underline{N} = \underline{A} + \underline{B}$ на комплексній площині є рівнянням прямої, що проходить під кутом β до осі дійсних чисел через кінець вектора \vec{A} .

3.5.2 Кругові діаграми

Розглянемо провідність ділянки кола (рис. 3.8) – $\underline{Y} = \frac{1}{R + j \cdot X_L}$, коли:

- а) $0 \leq R \leq \infty, X_L = const$;
- б) $0 \leq X_L \leq \infty, R = const$.

Годографом у випадку а) є дуга кола, що проходить через початок координат, як це показано на рисунку 3.11, а. У випадку б) годографом також є дуга кола, що проходить через початок координат – рисунок 3.11, б.

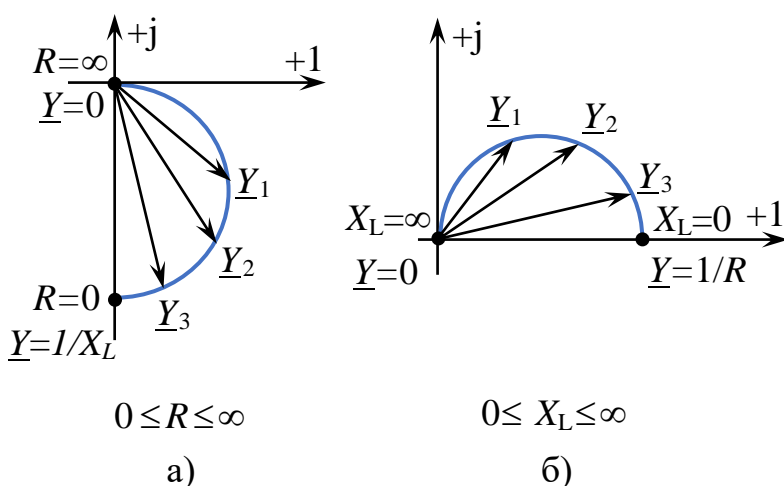


Рисунок 3.11 – Годографи провідності для ділянки схеми рисунка 3.8:

а – $X_L = const$, б – $R = const$

Робимо такий висновок. Величина, яка є зворотною до лінійної функції $\vec{N} = \vec{A} + \vec{B}$, на комплексній площині представляє дугу кола, що проходить через початок координат. Її рівняння:

$$\vec{W} = \frac{1}{\vec{A} + \vec{B}} = \frac{1/\vec{A}}{1 + \frac{\vec{B}}{\vec{A}}} = \frac{\vec{C}}{1 + K \cdot e^{j \cdot \delta}}; \quad (3.26)$$

$$\vec{C} = \frac{1}{\vec{A}}; \quad \vec{B} = B \cdot e^{j \cdot \beta};$$

$$\vec{A} = A \cdot e^{j \cdot \alpha};$$

$$\frac{\vec{B}}{\vec{A}} = \frac{B}{A} \cdot e^{j \cdot (\beta - \alpha)} = K \cdot e^{j \cdot \delta}.$$

Тобто рівняння дуги кола, що проходить через початок координат на комплексній площині має вигляд $\vec{W} = \frac{\vec{C}}{1 + K \cdot e^{j \cdot \delta}}$, а рівнянням дуги кола, що не

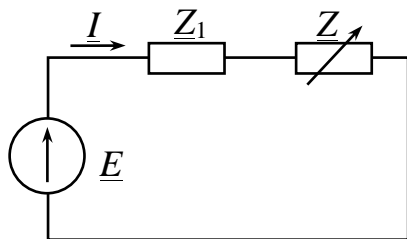
проходить через початок координат на комплексній площині є вираз

$$\vec{W} = \vec{W}_L + \frac{\vec{C}}{1 + K \cdot e^{j \cdot \delta}} \quad (\vec{W}_L - \text{вектор, який поєднує початок координат з дугою}).$$

3.5.3 Кругова діаграма струму для двох послідовно з'єднаних опорів

Розглянемо схему рисунка 3.12, на якій $\underline{Z}_1 = Z_1 \cdot e^{j\varphi_1} = \text{const}$, $\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$, де $Z = \text{var}$, $\varphi = \text{const}$.

Доведемо, що струм \underline{I} буде мати кругову



діаграму

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}} = \frac{\underline{E} / \underline{Z}_1}{1 + \underline{Z} / \underline{Z}_1}. \quad (3.27)$$

$$\text{Позначимо } \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1} = \underline{I}_{кз}, \quad (3.28)$$

Також врахуємо, що

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_1} = \frac{Z}{Z_1} \cdot e^{j \cdot (\varphi - \varphi_1)} = \frac{Z}{Z_1} \cdot e^{j \cdot \delta}, \quad (3.29)$$

де $\delta = \varphi - \varphi_1$.

Таким чином,

$$\underline{I} = \frac{\underline{I}_{кз}}{1 + \frac{Z}{Z_1} \cdot e^{j \delta}}. \quad (3.30)$$

Якщо порівняти (3.30) і (3.26), то буде зрозуміло, що (3.30) – рівняння дуги кола, що проходить через початок координат на комплексній площині.

4 ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ІЗ ВЗАЄМОІНДУКТИВНИМИ ЗВ'ЯЗКАМИ

4.1 Індуктивно зв'язані елементи кола. Поняття взаємної індуктивності

Якщо змінування струму в одному елементі кола призводить до появи ЕРС в іншому елементі кола, то говорять, що ці два елементи індуктивно зв'язані, а ЕРС, що виникає при цьому, називається ЕРС взаємної індукції (e_M). Електричні кола, у яких, крім ЕРС самоіндукції наводяться ЕРС взаємної індукції, називаються індуктивно- або магнітозв'язаними колами. На відміну від взаємної індукції, явище самоіндукції – це наведення в якомусь контурі ЕРС при зміні струму, що протікає саме по цьому контуру.

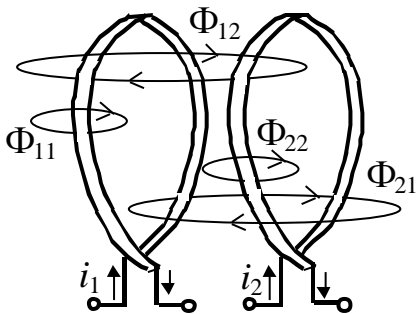


Рисунок 4.1 – Індуктивно зв'язані елементи

Нехай є дві котушки (рис. 4.1), умовно представлені у вигляді двох витків і віддалені одна від одної на деяку відстань. По котушках протікають синусоїдні струми i_1 і i_2 . Витки першої котушки (зліва) зв'язані з магнітним потоком самоіндукції Φ_1 :

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}, \quad (4.1)$$

де Φ_{11} – частина магнітного потоку Φ_1 , який замикається, проходячи тільки через перший контур;

Φ_{12} – частина потоку Φ_1 , який замикається, проходячи і через другий контур.

Аналогічно для другого контуру (котушки)

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}. \quad (4.2)$$

Зрозуміло, що кожна котушка зчеплена з двома магнітними потоками – самоіндукції і взаємоіндукції.

Повне поточоз'єднання 1-го і 2-го контурів:

$$\psi_{1п} = w_1 \cdot (\Phi_1 \pm \Phi_{21}) = \psi_{11} \pm \psi_{21}, \quad \psi_{2п} = w_2 \cdot (\Phi_2 \pm \Phi_{12}) = \psi_{22} \pm \psi_{12}, \quad (4.3)$$

де w_1, w_2 – число витків першого та другого контурів.

Знак «+» у формулі (4.3) ставиться в тому випадку, коли потік самоіндукції, створений струмом власного контуру, і потік взаємної індукції направлені однаково (узгоджено). У іншому випадку, коли потік самоіндукції і потік взаємної індукції мають протилежні напрями (зустрічні), у формулі (4.3) ставлять знак «-».

При розрахунках електричних кіл із взаємоіндуктивними зв'язками вводять поняття взаємної індуктивності M (вимірюється в Гн), яка дозволяє при розрахунках врахувати явище взаємоіндукції і явище накопичення енергії в магнітному полі індуктивно зв'язаних котушок. Для нашого випадку (рис. 4.1)

$$M = M_{12} = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \frac{\Psi_{12}}{i_1}. \quad (4.4)$$

Взаємна індуктивність M залежить від взаємного розташування котушок, їх геометричних розмірів, числа витків і від значення μ (відносна магнітна проникність осердя). M може бути визначена за допомогою експерименту.

Коефіцієнт індуктивного зв'язку між двома контурами з індуктивностями L_1 і L_2 і взаємною індуктивністю M :

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}. \quad (4.5)$$

Коефіцієнт індуктивного зв'язку теоретично дорівнює одиниці ($k=1$), якщо весь потік, що створюється першим контуром, буде зчеплений з другим контуром. Зрозуміло, що $k \leq 1$ і залежить від взаємного розташування контурів, тобто зміна індуктивного зв'язку досягається переміщенням однієї котушки відносно іншої.

Зазначимо також, що M може бути більше L_1 (або L_2), але не може бути більше L_1 , і L_2 одночасно.

4.2 Розрахунок електричних кіл за наявності в них індуктивно зв'язаних котушок

При складанні рівнянь для індуктивно зв'язаних кіл необхідно знати узгоджено або зустрічно направлені потоки самоіндукції і взаємоіндукції (або узгоджено або зустрічно ввімкнені котушки), тобто знати напрям намотування витків котушок і напрям струму в них.

Котушки ввімкнені узгоджено, якщо струми в них однаково орієнтовані щодо однойменних затискачів, які на схемах позначаються «*» або «•». При узгодженому ввімкненні котушок ЕРС самоіндукції і взаємоіндукції додаються.

На прикладі схеми рисунка 4.2 розглянемо методику складання рівнянь за законами Кірхгофа для розрахунку електричного кола із взаємоіндуктивними зв'язками (нехай увімкнення котушок узгоджене):

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ i_1 \cdot R_1 + \frac{1}{C_1} \cdot \int i_1 dt + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2 dt + i_2 \cdot R_2 = e_1, \\ i_3 \cdot R_3 + L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2 dt - i_2 \cdot R_2 = e_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

де $L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_3}{dt}$ – падіння напруги в першій котушці;

$L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt}$ – падіння напруги в другій котушці.

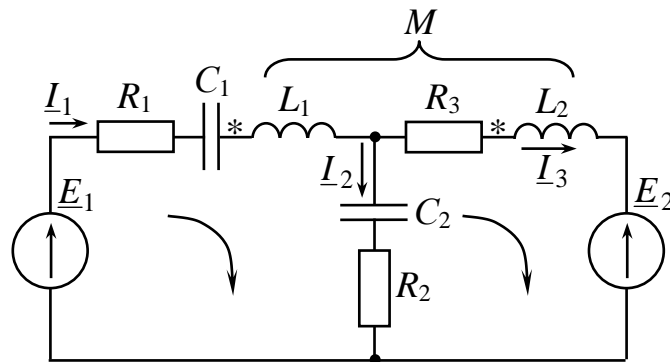


Рисунок 4.2 – Електричне коло із взаємоіндуктивними зв'язками

Перейдемо до системи рівнянь у комплексній формі:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \\ \underline{I}_1 \cdot \left(R_1 - j \cdot \frac{1}{\omega C_1} + j \cdot \omega L_1 \right) + \underline{I}_2 \cdot \left(R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} \right) + \underline{I}_3 \cdot j\omega M = \underline{E}_1 \\ \underline{I}_1 \cdot j\omega M + \underline{I}_3 \cdot (R_3 + j \cdot \omega L_2) - \underline{I}_2 \cdot \left(R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2} \right) = \underline{E}_2. \end{cases} \quad (4.7)$$

Величина $X_M = \omega \cdot M$ – реактивний опір взаємної індуктивності, Ом.

Величина $\underline{Z} = j \cdot \omega \cdot M$ – комплексний опір взаємної індуктивності.

4.3 Визначення взаємної індуктивності

Розглянемо рисунок 4.3 – послідовне ввімкнення двох індуктивно зв'язаних котушок.

Нехай увімкнення котушок узгоджене. За другим законом Кірхгофа,

$$i \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di}{dt} + M \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \cdot \frac{di}{dt} + M \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R_2 = e, \quad (4.8)$$

або в комплексній формі – $\underline{I} \cdot \left[R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 + 2 \cdot M) \right] = \underline{E}. \quad (4.9)$

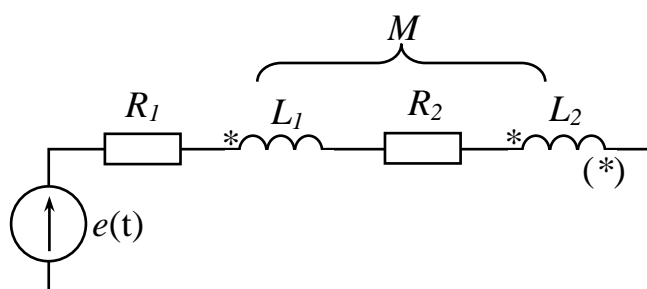


Рисунок 4.3 – Послідовне ввімкнення двох індуктивно зв'язаних котушок

Таким чином, комплексний опір кола в цьому випадку

$$\underline{Z}_{\text{узг}} = R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 + 2 \cdot M) = R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot X_{\text{узг}}. \quad (4.10)$$

Нехай увімкнення котушок зустрічне (*). За другим законом Кірхгофа,

$$i \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di}{dt} - M \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \cdot \frac{di}{dt} - M \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R_2 = e, \quad (4.11)$$

$$\text{або в комплексній формі} - \underline{I} \cdot [R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 - 2 \cdot M)] = \underline{E} . \quad (4.12)$$

Комплексний опір кола в цьому випадку

$$\underline{Z}_{\text{зустр}} = R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot (L_1 + L_2 - 2 \cdot M) = R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot X_{\text{зустр}} . \quad (4.13)$$

Отже, $X_{\text{узг}} - X_{\text{зустр}} = 4 \cdot \omega \cdot M = 4 \cdot X_M$, звідки:

$$M = \frac{X_{\text{узг}} - X_{\text{зустр}}}{4 \cdot \omega} . \quad (4.14)$$

Вираз (4.14) використовують для визначення взаємної індуктивності M експериментальним шляхом.

Розглянемо векторні діаграми для узгодженого (рис. 4.4) та зустрічного (рис. 4.5) ввімкнення котушок для схеми рисунка 4.3.

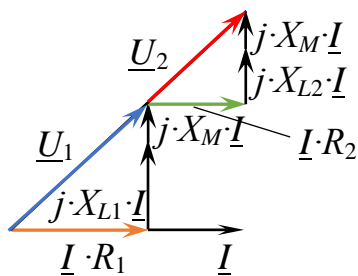


Рисунок 4.4 – Діаграма при узгодженому ввімкненні котушок

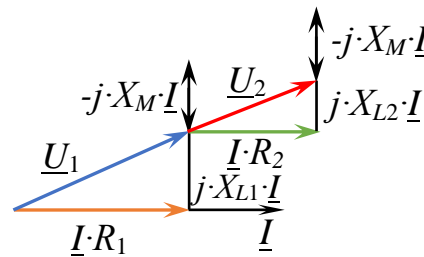


Рисунок 4.5 – Діаграма при зустрічному ввімкненні котушок

4.4 Паралельне з'єднання котушок із взаємніндуктивними зв'язками

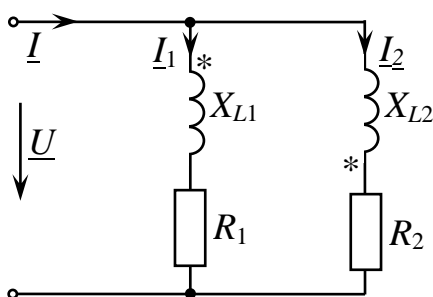


Рисунок 4.6 – Паралельне з'єднання котушок

Розрахунок електричних кіл з індуктивно зв'язаними котушками в загальному випадку здійснюють за законами Кірхгофа, але існує і так звана «розв'язка» таких кіл, що дозволяє використовувати всі методи розрахунку.

На схемі рисунку 4.6 паралельно з'єднані котушки ввімкнені зустрічно.

Система рівнянь за законами Кірхгофа в цьому випадку має такий вигляд:

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \underline{U} = \underline{I}_1 \cdot R_1 + j \cdot \underline{I}_1 \cdot X_{L1} - j \cdot \underline{I}_2 \cdot X_M \\ \underline{U} = \underline{I}_2 \cdot R_2 + j \cdot \underline{I}_2 \cdot X_{L2} - j \cdot \underline{I}_1 \cdot X_M. \end{cases} \quad (4.15)$$

З другого та третього рівняння системи «вилучаємо» той струм, який безпосередньо не має до нього відношення:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I} - \underline{I}_2, \underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1 \\ \underline{U} = \underline{I}_1 \cdot R_1 + j \cdot \underline{I}_1 \cdot X_{L1} - j \cdot (\underline{I} - \underline{I}_1) \cdot X_M \\ \underline{U} = \underline{I}_2 \cdot R_2 + j \cdot \underline{I}_2 \cdot X_{L2} - j \cdot (\underline{I} - \underline{I}_2) \cdot X_M \end{cases}, \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \underline{U} = \underline{I}_1 \cdot R_1 + j \cdot \underline{I}_1 \cdot X_{L1} - j \cdot \underline{I} \cdot X_M + j \cdot \underline{I}_1 \cdot X_M \\ \underline{U} = \underline{I}_2 \cdot R_2 + j \cdot \underline{I}_2 \cdot X_{L2} - j \cdot \underline{I} \cdot X_M + j \cdot \underline{I}_2 \cdot X_M \end{cases}, \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \underline{U} = -j \cdot \underline{I} \cdot X_M + \underline{I}_1 \cdot R_1 + j \cdot \underline{I}_1 \cdot (X_{L1} + X_M) \\ \underline{U} = -j \cdot \underline{I} \cdot X_M + \underline{I}_2 \cdot R_2 + j \cdot \underline{I}_2 \cdot (X_{L2} + X_M) \end{cases}. \quad (4.18)$$

З урахуванням системи рівнянь (4.18) електрична схема рисунка 4.6 після «розв'язки» набуває такого вигляду (рис. 4.7).

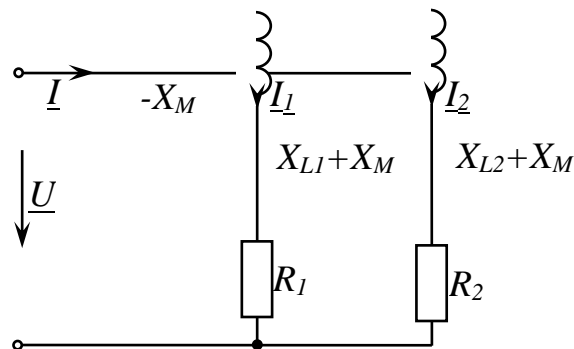


Рисунок 4.7 – Схема рисунка 4.6 після «розв'язки»

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Теоретичні основи електротехніки : підручник : у 3 т. / В. С. Бойко, В. В. Бойко, Ю. Ф. Видолоб та ін. ; за заг. ред. І. М. Чиженка, В. С. Бойка. – Київ : ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2004. – Т. 1: Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. – 272 с.

2. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки : навчальний посібник для студентів електротехнічних та електромеханічних спеціальностей вищих навчальних закладів / А. Ю. Воробкевич, В. С. Маляр, Р. Я. Совин, М. О. Соколовський, П. Г. Стахів, О. І. Шегедин ; за ред. А. Ю. Воробкевича, О. І. Шегедина. – Львів : Новий Світ-2000, 2020. – 224 с.

3. Маляр В. С. Теоретичні основи електротехніки. Електричні кола : навч. посіб. / В. С. Маляр. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2012. – 312 с.

5. Форкун Я. Б. Теоретичні основи електротехніки. Частина 1, 2. Теоретичні основи електротехніки. Частина 3 [Електрон. ресурс] : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти усіх форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / Я. Б. Форкун, М. Л. Глебова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 111 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/61748/>, вільний (дата звернення: 12.07.2023). – Назва з екрана.

ПІСЛЯМОВА

Отже, Ви, шановний студенте, закінчили ознайомлення з нашим текстом лекцій з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки. Частина 1, 2».

У ньому були розглянуті теми, які вивчають в першому модулі дисципліни:

- лінійні електричні кола постійного струму;
- лінійні електричні кола синусоїдного струму;
- теорія чотириполосників;
- електричні кола із взаємоіндуктивними зв'язками.

При цьому автори намагалися забезпечити доступність викладення матеріалу і зрозумілість тексту для читача. Звісно, текст лекцій не претендує на вичерпність у висвітленні основ сучасної теоретичної електротехніки. Але ми сподіваємося, що він відповідає поставленій меті – забезпечити набуття знань, що є необхідними для подальшого успішного вивчення другої та третьої частини дисципліни ТОЕ й усіх спеціальних електротехнічних дисциплін у вищому навчальному закладі, а в майбутньому допоможе при вирішенні технічних завдань у практичній діяльності.

Електронне навчальне видання

**ФОРКУН Яна Борисівна,
ГЛІБОВА Марина Леонідівна**

«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ. ЧАСТИНИ 1, 2»,

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
всіх форм навчання зі спеціальності
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)*

Відповідальний за випуск *Я. Б. Форкун*

Редактор *О. А. Норик*

Комп'ютерне верстання *Я. Б. Форкун*

План 2024, поз. 110Л

Підп. до друку 09.09.2024. Формат 60 × 84/16.

Ум. друк. арк. 5,3.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Черноглазівська (Маршала Бажанова), 17, Харків, 61002.

Електронна адреса: office@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.