МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

В. В. Бізюк

А. В. Якунін

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ В СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ

НАВЧАЛЬНИЙ ДОВІДНИК

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2024

УДК 517:621.3

Бізюк В. В. Диференціальні рівняння з частинними похідними в схемах і таблицях : навчальний довідник (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка) / В. В. Бізюк, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 81 с.
.

Автори: канд. техн. наук, доц. В. В. Бізюк,
канд. техн. наук, доц. А. В. Якунін

Рецензент

Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 12 від 27.06.2024

Навчальний довідник містить теоретичні відомості та приклади, в тому числі для самостійної роботи з розділів вищої математики, які вивчаються в другому семестрі (модуль 2) і в третьому семестрі (модуль 3) за чинною програмою з курсу вищої математики для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальний довідник містить розділи, що відповідають другому та третьому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка. Довідник за змістом максимально наближений до реальних лекцій, теоретичні відомості ілюструються на типових прикладах. Довідковий матеріал та задачі для самостійної роботи можуть бути використані на практичних заняттях і для домашніх завдань.

Довідковий матеріал подано у схемах і таблицях для зручності використання як додаток до складних викладок у підручнику, насиченому теоретичними відомостями, коментарями, зауваженнями й висновками.

Довідковий матеріал та задачі для самостійної роботи можуть бути використані на практичних заняттях і для виконання домашніх завдань.

РОЗДІЛ 1
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

1.1 Диференціальне рівняння з частинними похідними та його розв'язок. Початкові та граничні умови. Крайові задачі. Коректність постановки задач математичної фізики

Диференціальне рівняння
$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0 \qquad (1.1)$$ – ***загальний вигляд*** диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними для функції двох незалежних змінних $u = u(x, y)$.
Розв'язок
Розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними називається будь-яка функція, що при підстановці у диференціальне рівняння замість шуканої функції перетворює його на тотожність. Загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння (ЗДР) містить довільні сталі, число яких дорівнює порядку рівняння. Аналогічно, ***загальний розв'язок*** ДРЧП містить довільні функції, число яких дорівнює порядку цього рівняння. Розв'язок ДРЧП, який входить до складу загального розв'язку при певних фіксованих довільних функціях, називається ***частинним розв'язком***.
Початкові і граничні умови
Усі фізичні явища вивчають, починаючи з деякого моменту часу і у відповідних областях, що мають певні межі, тому для однозначного зображення реального процесу, крім диференціального рівняння, необхідно задати ще ***початкові умови***, що відображають початковий стан процесу, а також ***граничні (крайові, межові) умови***, що вказують на значення шуканої функції та її похідних на межі області визначення процесу.

Задача Коші
Задача відшукування розв’язку ДРЧП у необмеженій області при заданих початкових умовах називається ***задачею Коші (початковою задачею)***. Задача відшукування розв’язку ДРЧП в обмеженій області при заданих початкових і граничних умовах називається ***змішаною крайовою задачею (початково-граничною задачею)***. Задача Коші та змішана крайова задача формулюються для ДРЧП, які виникають при вивчені нестаціонарних процесів, що змінюються з перебігом часу. Рівняння, що описують стаціонарні процеси, не містять часу t, тому для таких рівнянь початкові умови відсутні. Зазначені ДРЧП розв’язуються тільки при граничних умовах.
Задача Діріхле
Задача знаходження розв’язку ДРЧП при відомих значеннях шуканої функції U на межі S області D $$u\big\|_S = f(S) \qquad (1.2)$$ називається ***крайовою задачею Діріхле (першою крайовою задачею)***.
Задача Неймана
Задача знаходження розв’язку ДРЧП при відомих значеннях нормальної похідної (похідної за напрямом зовнішньої нормалі n) $\frac{\partial u}{\partial n}$ на межі S області D $$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_S = f(S) \qquad (1.3)$$ називається ***крайовою задачею Неймана (другою крайовою задачею)***. Якщо на межі S області D задана умова $$\left.\left(\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right\|_S = f(S) \quad , \qquad (1.4)$$ то отримаємо ***третю крайову задачу***. Тут α і β – задані числа.

Коректність постановки задач математичної фізики

Задача математичної фізики називається ***коректно (правильно) поставленою***, якщо: 1) задача має розв'язок; 2) розв'язок задачі єдиний; 3) розв'язок задачі неперервно залежить від початкових і граничних умов (***розв'язок стійкий*** до малих змін початкових і граничних умов).

Задача, що не задовольняє хоча б одну із вказаних умов, називається ***некоректно (неправильно) поставленою***.

Приклад №1.

Перевірити, чи є задана функція $u=\ln\left(x^2+y^2\right)$ розв'язком заданого рівняння $\left(x^2+y^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}+y\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$.

Розв'язання. Знайдемо похідні: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=2x\left(-\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)=-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Підставимо в рівняння:

$$\left(x^2+y^2\right)\left(-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)+x\frac{2y}{x^2+y^2}+y\frac{2x}{x^2+y^2}=0;$$

$0=0$ – істинно.

Приклад №2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=4t^3-2xt+x\quad \left(-\infty<x<+\infty;\quad t>0\right),$$

який задовольняє початкову умову

$$u(x,t)\big|_{t=0}=x^2\quad \left(-\infty<x<+\infty\right)$$

(задача Коші).

Розв'язання. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=4t^3-2xt+x$. Інтегруючи по t, отримаємо загальний розв'язок:

$$u=\int\left(4t^3-2xt+x\right)dt+C(x)=t^4-xt^2+xt+C(x),$$

де $C(x)$ – довільна функція.

Підберемо функцію $C(x)$ так, щоб задовольнялась початкова умова:

$$u(x,t)\big|_{t=0}=C(x);\quad C(x)=x^2 .$$

Отже, шуканий розв'язок $u=t^4-xt^2+xt+x^2$.

Приклад №3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - 3y^2$, де $u = u(x, y)$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\frac{\partial u}{\partial x} = V$. Тоді рівняння набуде такого вигляду: $\frac{\partial V}{\partial y} = 2x - 3y^2$. Інтегруючи за y, маємо:

$$V = \int \left(2x - 3y^2\right) dy = 2xy - y^3 + \overline{C}_1(x),$$

де $\overline{C}_1(x)$ – довільна функція від x. Звідси

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - y^3 + \overline{C}_1(x).$$

Інтегруючи за x, маємо:

$$u = \int \left(2xy - y^3 + \overline{C}_1(x)\right) dx + C_2(y) = x^2 y - y^3 x + \int \overline{C}_1(x) dx +$$
$$+ C_2(y) = x^2 y - xy^3 + C_1(x) + C_2(y),$$

де $C_2(y)$ – довільна функція від y; $C_1(x) = \int \overline{C}_1(x) dx$.

Отже, шуканий розв'язок

$$u = x^2 y - xy^2 + C_1(x) + C_2(y),$$

де $C_1(x)$, $C_2(y)$ – довільні (двічі диференційовні) функції.

1.2 Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними. Основні рівняння математичної фізики

Диференціальне рівняння з частинними похідними називається ***лінійним***, якщо воно лінійне відносно шуканої функції та всіх її частинних похідних.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Gu=F \; - \tag{1.5}$$

загальний вигляд лінійного ДРЧП другого порядку.

Якщо $F=0$, то рівняння називається ***однорідним***, в іншому разі – ***неоднорідним***.

Диференціальне рівняння з частинними похідними називається ***квазілінійним***, якщо воно лінійне відносно всіх похідних найвищого порядку.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \; - \tag{1.6}$$

загальний вигляд квазілінійного ДРЧП другого порядку.

Зрозуміло, що будь-яке лінійне ДРЧП є одночасно квазілінійним.

Залежно від знака ***дискримінанта***

$$\Delta=B^2-AC \tag{1.7}$$

квазілінійне ДРЧП другого порядку (1.6) відноситься до одного з таких трьох типів:

Гіперболічний тип:

1) якщо $\Delta=B^2-AC>0$, то рівняння гіперболічного типу, його канонічний (найпростіший) вигляд такий:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{1.8}$$

Параболічний тип:

2) якщо $\Delta=B^2-AC=0$, то рівняння ***параболічного типу***, його канонічний вигляд такий:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right); \tag{1.9}$$

Еліптичний тип:

3) якщо $\Delta=B^2-AC<0$, то рівняння ***еліптичного типу***, його канонічний вигляд такмй:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{1.10}$$

Найважливіші рівняння математичної фізики вказаних типів:

– одновимірне хвильове рівняння (гіперболічний тип):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \tag{1.11}$$

– одновимірне рівняння теплопровідності (рівняння Фур'є) (параболічний тип):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \tag{1.12}$$

– двовимірне рівняння Лапласа (еліптичний тип):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1.13}$$

Тут a – сталий коефіцієнт.

Розбиття ДРЧП на гіперболічні, параболічні та еліптичні рівняння відповідає розбиттю фізичних процесів на три основні класи: хвильові, дифузійні та стаціонарні. Для рівнянь різних типів по-різному ставляться основні завдання і здебільшого застосовуються різні методи розв'язування.

Тип розглянутих ДРЧП (1.5), (1.6) визначається тільки коефіцієнтами при других похідних і не залежить від інших складових. Якщо коефіцієнти A, B, C сталі, то тип цього рівняння один і той самий у всій області визначення. Якщо коефіцієнти A, B, C змінні, то для рівняння виділяються області його гіперболічності, параболічності та еліптичності.

Приклад №4. Знайти області гіперболічності, параболічності та еліптичності рівняння Трикомі

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Розв'язання. $\Delta = B^2 - AC$; $A = y$; $B = 0$; $C = 1$; $\Delta = 0^2 - y \cdot 1 = -y$.

При $y > 0$, $\Delta = -y < 0$ – рівняння еліптичного типу; при $y < 0$, $\Delta = -y > 0$ – рівняння гіперболічного типу, при $y = 0$, $\Delta = -y = 0$ – рівняння параболічного типу.

1.3. Характеристики. Зведення лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними до канонічного вигляду

Характеристики рівняння

Квазілінійному рівнянню другого порядку (1.6) можна поставити у відповідність його ***характеристичне рівняння***

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0, \qquad (1.14)$$

яке розкладається на два рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B+\sqrt{\Delta}}{A}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{B-\sqrt{\Delta}}{A}, \qquad (1.15)$$

де $\Delta = B^2 - AC$ – дискримінант ДРЧП (1.6).

Інтегральні криві характеристичного рівняння (1.14) (або, що те саме, рівнянь (1.15)) називаються ***характеристиками*** ДРЧП (1.6).

У випадку гіперболічного ДРЧП $(\Delta > 0)$ маємо дві різні сім'ї дійсних характеристик $\varphi(x, y) = C_1$ і $\psi(x, y) = C_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Якщо ДРЧП параболічне $(\Delta = 0)$, то обидва рівняння (1.15) співпадають, при цьому маємо одну сім'ю дійсних характеристик $\varphi(x, y) = C_1$.

Якщо ж ДРЧП еліптичного типу $(\Delta < 0)$, то маємо дві різні сім'ї уявних (комплексно спряжених) характеристик $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1$; $\varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2$, де i – уявна одиниця $(i^2 = -1)$.

Знаходження характеристик рівняння

Приклад №5. Знайти характеристики рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - tgx\,\frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0.$$

Розв'язання. $A=1;\ B=-\cos x;\ C=-\sin^2 x;$

$$\Delta = B^2 - AC = (-\cos x)^2 - 1\left(-\sin^2 x\right) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 > 0.$$

Рівняння гіперболічного типу. Диференціальні рівняння характеристик (1.15) набувають такого вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos x + 1}{1};\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\cos x - 1}{1};$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + 1;\qquad \frac{dy}{dx} = -\cos x - 1.$$

Інтегруючи за змінною x, одержуємо:

$$y = \int(-\cos x + 1)dx + C_1 = -\sin x + x + C_1;$$

$$y = \int(-\cos x - 1)dx + C_2 = -\sin x - x + C_2.$$

Звідси

$$y + \sin x - x = C_1;\quad y + \sin x + x = C_2\ -$$

неявні рівняння характеристик.

Тут $\varphi(x,y) = y + \sin x - x;\quad \psi(x,y) = y + \sin x + x$.

Заміна змінних на основі неявних рівнянь характеристик

Для зведення ДРЧП другого порядку до канонічного вигляду використовується нелінійна заміна незалежних змінних $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ на основі неявних рівнянь характеристик.

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}.$$

Зведення лінійних диференціальних рівнянь до канонічного вигляду
Гіперболічний тип:
1) рівняння гіперболічного типу має дві різні сім'ї дійсних характеристик $\varphi(x,y)=C_1$, $\psi(x,y)=C_2$. Замінивши змінні $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, таке рівняння можна звести до канонічного вигляду: $$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=f\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$
Параболічний тип:
2) рівняння параболічного типу має одну сім'ю дійсних характеристик $\varphi(x,y)=C_1$. Використовується заміна змінних $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, де $\psi(x,y)$ – довільна двічі неперервно диференційована функція, яка задовольняє умову функціональної незалежності функцій $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$: $$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$ У результаті рівняння зводиться до канонічного вигляду: $$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=f\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \text{ або } \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=f\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$
Еліптичний тип:
3) рівняння еліптичного типу має дві різні сім'ї уявних (комплексно спряжених) характеристик $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C_1$, $\varphi(x,y)-i\psi(x,y)=C_2$. Шляхом заміни змінних $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$ таке рівняння зводиться до канонічного вигляду: $$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=f\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$

Гіперболічний тип

Приклад №6. Встановити тип, знайти неявні рівняння характеристик та звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння:

$$\text{а)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\,\frac{\partial u}{\partial y} + y^2 u = 0;$$

Розв’язання.

$A = 1$; $B = 0$; $C = -\sin^2 x$; $\Delta = B^2 - AC = \sin^2 x > 0$ – рівняння гіперболічного типу.

Диференціальні рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{A}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\pm \sin x}{1} = \pm \sin x.$$

Розв’язуючи одержанні рівняння, маємо:

$$y = \pm \int \sin x dx; \quad y = -\cos x + C_1; \quad y = \cos x + C_2.$$

Звідси $y + \cos x = C_1$; $y - \cos x = C_2$ – неявні рівняння характеристик.

Вводимо заміну:

$$\xi = y + \cos x; \quad \eta = y - \cos x.$$

Тоді:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(-\sin x) + \frac{\partial u}{\partial \eta}\sin x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) -$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}\sin x + \sin x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) +$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial x}\sin x = \sin^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\sin^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} +$$

$$+\sin^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \cos x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \cos x\,\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння і одержимо:

$$\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\cos x\frac{\partial u}{\partial\xi}+$$

$$+\cos x\,\frac{\partial u}{\partial\eta}-\sin^2 x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)-\cos x\,\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+y^2u=0\,;$$

$$-4\sin^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-2\cos x\,\frac{\partial u}{\partial\xi}+y^2u=0\,;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}\,\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{y^2}{4\sin^2 x}u\,.$$

За формулами заміни виразимо коефіцієнти рівняння через нові змінні:

$$\cos x=(\xi-\eta)/2;\quad y=(\xi+\eta)/2,\quad y^2=(\xi+\eta)^2/4;$$

$$\sin^2 x=1-\frac{\xi-\eta}{2}=\frac{4-(\xi-\eta)^2}{4}.$$

Остаточно отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=-\frac{\xi-\eta}{4-(\xi-\eta)^2}\,\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{(\xi+\eta)^2}{4\left(4-(\xi-\eta)^2\right)}u\;-$$

канонічний вигляд диференціального рівняння.

Параболічний тип

Приклад №6. Встановити тип, знайти неявні рівняння характеристик та звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння:

б) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+12y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

Розв’язання.

$A=x^2;\ B=-2xy;\ \ C=4y^2;\ \ \Delta=B^2-AC=(-2xy)^2-x^2\ 4y^2=0\ -$ рівняння параболічного типу.

Диференціальне рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{A};\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-2xy}{x^2}=-\frac{2y}{x}.$$

Розв’язавши одержане рівняння, отримаємо:

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int\frac{dx}{x};\quad \ln|y|=-2\ln|x|+\ln C;\quad y=\frac{C}{x^2}.$$

Звідси $yx^2=C$ – неявне рівняння характеристик.

Вводимо заміну $\xi=yx^2$, $\eta=y$ (довільна функція). Тоді:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}2xy+\frac{\partial u}{\partial\eta}0=2xy\frac{\partial u}{\partial\xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}x^2+\frac{\partial u}{\partial\eta}1;$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=2y\left(x\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=4y^2x^2\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2y\frac{\partial u}{\partial\xi};$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=2x\left(y\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=$$

$$=2x^3y\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+2x\frac{\partial u}{\partial\xi};$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=x^2\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}=x^4\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2x^2\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}.$$

Еліптичний тип

Приклад №6. Встановити тип, знайти неявні рівняння характеристик та звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння:

в) $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{4}{y^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{x^3}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0.$

Розв’язання.

$A=\dfrac{1}{x^2};\ B=0;\ C=\dfrac{4}{y^2};\qquad \Delta=B-AC=-\dfrac{4}{x^2y^2}<0$ – рівняння еліптичного типу.

Диференціальні рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{\Delta}}{A};\qquad \frac{dy}{dx}=\pm\frac{2x}{y}i.$$

Розв’язавши одержанні рівняння, отримаємо:

$$ydy=\pm2xidx;\quad \int ydx=\pm2i\int xdx;\quad y^2/2=\pm x^2+C;\quad y^2=\pm2x^2+2C.$$

Звідси $y^2 - 2x^2 i = C_1$; $y^2 + 2x^2 i = C_2$ – неявні рівняння характеристик.

Вводимо заміну $\xi = y^2$; $\eta = 2x^2$. Тоді:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\,0 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,4x = 4x\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\,2y + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,0 = 2y\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + 4\frac{\partial u}{\partial \eta} = 16x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 4\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2y\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial u}{\partial \xi} = 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння і одержимо:

$$x^2\left(4y^2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - 4xy\left(2x^3y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \right.$$

$$\left. + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2x\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + 4y^2\left(x^4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) +$$

$$+ 12y\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}x^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0;$$

$$4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 6x^2y\frac{\partial u}{\partial \xi} + 12y\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{3x^2}{2y}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{3}{y}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

За формулами заміни виразимо коефіцієнти отриманого рівняння через нові змінні $y = \eta$; $x^2 = \xi/\eta$.

Остаточно отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{3\xi}{2\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{3}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} -$$

канонічний вигляд диференціального рівняння.

Якщо вихідне ДРЧП лінійне зі сталими коефіцієнтами, то його канонічний вигляд також лінійний зі сталими коефіцієнтами. У цьому випадку можливе подальше спрощення канонічного рівняння за допомогою заміни невідомої функції

$$u = ve^{\lambda\xi + \mu\eta}, \tag{1.16}$$

де λ і μ – сталі числа, які потрібно визначити. Параметри λ і μ вибирають так, щоб після підстановки (1.16) у канонічне рівняння два його коефіцієнти, наприклад, при перших похідних, перетворилися на нуль.

Еліптичний тип

Приклад №7. Звести до спрощеного канонічного вигляду з відсутніми першими похідними лінійне ДРЧП зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} + 8\frac{\partial u}{\partial y} - 16u = 0 .$$

Розв’язання.

Визначимо тип:

$$A = 1; \quad B = -1; \quad C = 5; \qquad \Delta = B^2 - AC = -4 < 0 .$$

Отже, це рівняння еліптичного типу.

Диференціальні рівняння характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{A}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-1 \pm 2i}{1} = -1 \pm 2i .$$

Розв’язавши одержані рівняння, отримаємо:

$$y = \int (-1 \pm 2i) dx; \qquad y = -(1 \pm 2i)x + C ; \qquad y = -x \pm 2xi + C .$$

Звідси

$$y + x - 2xi = C_1; \qquad y + x + 2xi = C_2 -$$

неявні рівняння характеристик.

Вводимо заміну незалежних змінних:

$$\xi = y + x , \quad \eta = 2x .$$

Тоді:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} .$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння і одержимо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta} - 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) +$$

$$+ 5\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + 8\frac{\partial u}{\partial \xi} - 16u = 0 ;$$

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 12\frac{\partial u}{\partial \xi} + 8\frac{\partial u}{\partial \eta} - 16u = 0 ; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -3\frac{\partial u}{\partial \xi} - 2\frac{\partial u}{\partial \eta} + 4u -$$

канонічний вигляд диференціального рівняння.

Вводимо заміну шуканої функції

$$u = ve^{\lambda\xi+\mu\eta},$$

де λ і μ – сталі, які потрібно визначити.

Знайдемо похідні, що входять в канонічне рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \xi} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda v e^{\lambda\xi+\mu\eta}; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu v e^{\lambda\xi+\mu\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda \frac{\partial v}{\partial \xi} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda \frac{\partial v}{\partial \xi} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda^2 v e^{\lambda\xi+\mu\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu \frac{\partial v}{\partial \eta} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu^2 v e^{\lambda\xi+\mu\eta}.$$

Підставимо знайдені похідні в кожне рівняння і одержимо:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + 2\lambda \frac{\partial v}{\partial \xi} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda^2 v e^{\lambda\xi+\mu\eta} +$$

$$+ \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial \eta} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu^2 v e^{\lambda\xi+\mu\eta} =$$

$$= -3\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda v e^{\lambda\xi+\mu\eta}\right) - 2\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu v e^{\lambda\xi+\mu\eta}\right) + 4ve^{\lambda\xi+\mu\eta};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = -(3+2\lambda)\frac{\partial v}{\partial \xi} -$$

$$-(2+2\mu)\frac{\partial v}{\partial \eta} + \left(4 - \lambda^2 - \mu^2 - 3\lambda - 2\mu\right)v.$$

Виберемо значення λ і μ так, щоб коефіцієнти при перших похідних в одержаному рівнянні дорівнювали нулю:

$$-(3+2\lambda) = 0; \quad -(2+2\mu) = 0.$$

Звідси $\lambda = -\dfrac{2}{3}$; $\mu = -1$.

Отже, після заміни $u = ve^{-\frac{3}{2}\xi-\eta}$ канонічне рівняння набуває спрощеного вигляду:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \left(4 - \left(-\frac{3}{2}\right) - (-1)^2 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) - 2(-1)\right)v;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \frac{49}{4}v,$$

у якому відсутні перші похідні.

Вправи для самостійної роботи
1. Перевірити, чи є задана функція розв'язком заданого рівняння: 1.1. $u = ye^{\frac{x}{y}}$; $\quad x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 1.2. $u = \ln\left(y + e^{-x}\right)$; $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 1.3. $u = \cos y + (y - x)\sin y$; $\quad (x - y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.
2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: 2.1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 2y$. 2.2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = x^2 + y^2 - xy$. 2.3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos y$.
3. Розв'язати задачу Коші: 3.1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = x + t - xt;\; u(x.t)\big\|_{t=0} = x^3$. 3.2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = e^x - \cos xt;\; u(x,t)\big\|_{t=0} = \sin^2 x$. 3.3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \sin(x + t);\quad u(x,t)\big\|_{t=0} = \cos x$.
4. Встановити тип, знайти неявні рівняння характеристик та звести їх до канонічного вигляду диференціальне рівняння: 4.1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \cos^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. 4.2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. 4.3. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 4.4. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
5. Звести канонічну форму лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами до спрощеного вигляду, у якому відсутні перші похідні, за допомогою заміни шуканої функції $u = ve^{\lambda x + \mu y}$: 5.1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -5\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} + 3u$. 5.2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} + 2u$.

РОЗДІЛ 2
ОСНОВНІ РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

2.1 Основні етапи побудови математичної моделі фізичного процесу

Основні етапи побудови математичної моделі (постановки задачі математичної фізики)	
1	Вибір величин, які є визначальними для цього процесу. Як правило, ці величини є функціями багатьох змінних, наприклад, просторових координат і часу
2	Складання диференціального рівняння (системи рівнянь) з частинними похідними відносно шуканої функції (функцій) на основі фізичних принципів і законів із можливими обґрунтованими спрощеннями, які враховують особливості перебігу процесу
3	Виведення додаткових співвідношень (наприклад, початкових і граничних умов) для шуканих величин, які дозволяють з нескінченної множини розв’язків диференціального рівняння вибрати той, який описує цей конкретний процес

2.2 Рівняння коливань струни

Процес коливань характеризується однією функцією $u(x,t)$ – відхиленням точки струни з абсцисою x у момент часу t. При фіксованому значенні t графік функції $u(x,t)$ дає форму (профіль) струни у цей момент часу (рис. 2.1).

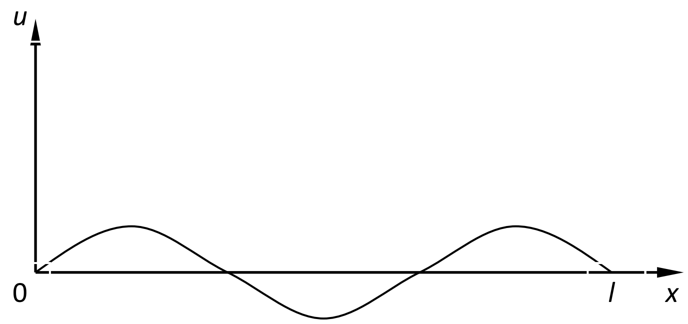

Рисунок 2.1

Виведення рівняння коливань струни

Виділимо довільний елемент струни $[x, x+\Delta x]$, який при коливанні деформується в дугу $\cup M_0\ M_1$ (рис. 2.2). Довжина цієї дуги

$$\Delta l = \int_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx \approx \Delta x,$$

оскільки при малих коливаннях $\frac{\partial u}{\partial x} = o(\Delta x)$. Тобто видовження струни не відбувається. Тоді на підставі закону Гука сила натягу $\vec{T}$ в кожній точці струни спрямована вздовж дотичної до її профілю і не змінюється за величиною, тобто $\left|\vec{T}\right| = T_0 = const$.

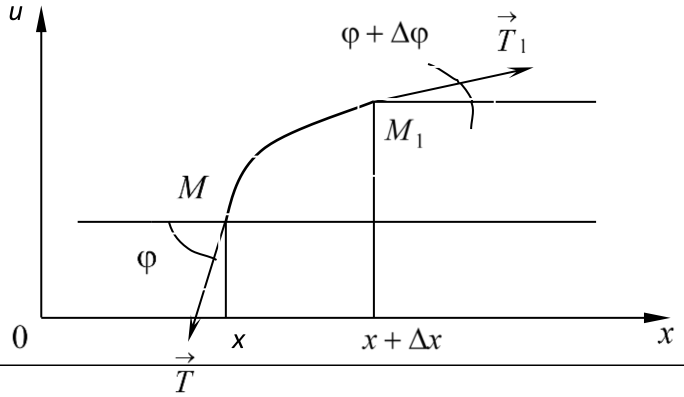

Рисунок 2.2

Проєкція на вісь Ou F_u рівнодійної сил пружності $\vec{F}$, які прикладені до елемента MM_1, $F_u = T_0 \sin(\varphi+\Delta\varphi) - T_0 \sin\varphi$.

Оскільки кут φ малий, то $\sin\varphi \approx \varphi \approx tg\varphi$. Але за геометричним змістом похідної $tg\,\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$. Тоді

$$F_u \approx T_0 \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - T_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = T_0\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right).$$

За формулою Лагранжа скінчених приростів

$$\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x \approx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x, \text{ де } 0<\theta<1.$$

Тоді $F_u \approx T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x$.

Якщо вважати струну однорідною з лінійною густиною $\rho = \rho_0 = const$, то маса елемента $\cup MM_1$ $m = \rho \Delta l \approx \rho_0 \Delta x$. Вертикальне (в напрямі осі Ou) прискорення W довільної точки цього елемента приблизно дорівнює вертикальному прискоренню точки M з координатою x, тобто $W \approx \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ згідно з геометричним змістом другої похідної по t.

Шукане рівняння коливань струни безпосередньо випливає з другого закону Ньютона $mw = F_u$ для елемента $\cup MM_1$ в напрямі осі Ou:

$$\rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \Delta x.$$

Звідси

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (0 < x < l;\ t > 0) - \tag{2.1}$$

одновимірне однорідне хвильове рівняння, де $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho_0}$.

Це рівняння гіперболічного типу і для нього задаються дві ***початкові умови*** (ПУ):

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 < x < l) \text{ (початкове положення струни)},$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (0 < x < l) \text{ (початкова швидкість струни)}.$$

Якщо кінці струни $x = 0$ і $x = l$ жорстко закріплені, то ***граничні умови*** (ГУ):

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad (t > 0).$$

Таким чином, ***математична модель*** (задача математичної фізики) ***вільних*** малих плоских поперечних ***коливань*** однорідної ***струни*** з жорстко закріпленими кінцями, на яку не діють зовнішні сили, має такий вигляд:

$$\text{(ДРЧП)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l;\ t > 0); \tag{2.2}$$

$$\text{(ПУ)} \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (0 < x < l); \tag{2.3}$$

$$\text{(ГУ)} \quad u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0 \quad (t > 0). \tag{2.4}$$

Математична модель (2.2) – (2.4) містить інформацію, яка необхідна для вивчення вільних коливань струни (розв`язок задачі єдиний) і не містить надлишкової, суперечливої інформації (розв`язок задачі існує). Таким чином, змішана крайова задача (2.2) – (2.4) поставлена коректно.

<table>
<tr><td colspan="2">Ускладнення розглянутої задачі внаслідок врахування додаткових фізичних факторів приводить до більш складних ДРЧП. Звернемо увагу на два випадки:</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Якщо на струну діють зовнішні поперечні сили з лінійною густиною $p(x,t)$, то маємо одновимірне неоднорідне хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \qquad (0 < x < l;\ t > 0), \tag{2.5}$$

де $f = p/\rho_0$. Це ДРЧП описує вимушені коливання струни.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Якщо лінійна густина струни залежить від координати x (струна неоднорідна) $\rho = \rho(x)$, а зовнішні поперечні сили не діють, то маємо одновимірне однорідне хвильове рівняння зі змінними коефіцієнтами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a^2(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) \qquad (0 < x < l;\ t > 0),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a(x)\frac{da(x)}{dx}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$(0 < x < l;\ t > 0) \tag{2.6}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Поперечні коливання струни не єдиний вид плоских поперечних хвильових рухів. Зокрема, звукові чи електромагнітні хвилі на значній відстані від джерел збудження можна вважати плоскими й описувати їх одновимірними хвильовими рівняннями. Двовимірні та тривимірні хвилі називають, відповідно, циліндричними і сферичними хвилями і описуються двовимірними і тривимірними хвильовими рівняннями.

Перелічимо основні типи хвильових процесів:
1. Звукові хвилі (поздовжні).
2. Електромагнітні хвилі (поперечні).
3. Механічні коливання твердих тіл (поздовжні, поперечні, крутильні).
4. Хвильовий пакет в квантовій механіці.
5. Гравітаційні хвилі (поперечні).
6. Механічні коливання рідини та газу (поперечні та поздовжні).</td></tr>
</table>

2.3 Телеграфні рівняння

Розглянемо (рис. 2.3) довгу однорідну електричну лінію (ланцюг), яка характеризується активним опором R, індуктивністю L, ємністю C і втратою G, де величини R, L, C, G розподілені вздовж лінії неперервно і рівномірно й розраховані на одиницю довжини. Будемо вважати лінію двопровідною. Нехай $i(x,t)$ – сила струму; $u(x,t)$ – напруга.

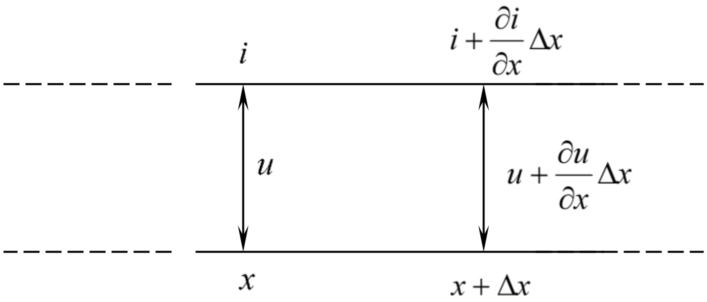

Рисунок 2.3

Для довільного елемента $[x, x + \Delta x]$ маємо: $-\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x$ – сумарне падіння напруги; $iR\Delta x$ – падіння напруги на опорі; $L\dfrac{\partial i}{\partial t}\Delta x$ – електрорушійна сила самоіндукції; $\dfrac{\partial i}{\partial x}\Delta x$ – сумарна зміна сили струму; $C\dfrac{\partial u}{\partial t}\Delta x$ – сила струму зарядки елемента (як конденсатора); $Gu\Delta x$ – сила струму втрати.

Тоді за законом Ома:

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x = iR\Delta x + L\frac{\partial i}{\partial t}\Delta x .$$

Рівняння балансу для сумарної зміни сили струму:

$$\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x + C\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x + Gu\Delta x = 0 .$$

Звідси:

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial t} + Gu = 0 ; \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0 \; – \tag{2.8}$$

система телеграфних рівнянь.

Диференціюючи відповідним чином вирази (2.7), (2.8) і вилучаючи одну з шуканих функцій, можна одержати рівняння, що містить тільки одну з функцій $u(x,t)$ або $i(x,t)$.

Продиференціюємо перше рівняння системи (2.7), (2.8) за змінною x, а друге – за t:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+R\frac{\partial i}{\partial x}+L\frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}=0; \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t}+C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+G\frac{\partial u}{\partial t}=0. \tag{2.10}$$

Знайдемо $\frac{\partial i}{\partial x}$ з другого рівняння системи (2.7) і (2.8), а змішану похідну $\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}$ – із другого рівняння системи (2.9) і (2.10). Підставимо їх в перше рівняння системи (2.9), (2.10) і одержимо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{RG}{LC}u=0. \tag{2.11}$$

Аналогічно, вилучаючи з системи (2.7), (2.8) функцію $u(x,t)$, одержимо:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}-\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+\frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{RG}{LC}i=0. \tag{2.12}$$

Рівняння (2.11), (2.12) також називають ***телеграфними***.

2.4 Рівняння поширення тепла у стержні

Виведення рівняння теплопровідності

Розглянемо (рис. 2.4) тонкий циліндричний однорідний стержень довжини l і сталого поперечного перерізу S. Вісь стержня приймемо за координатну вісь Ox, до того ж лівий кінець стержня співпадає з точкою $x=0$, а правий – із точкою $x=l$. Будемо вважати, що всередині стержня теплові джерела відсутні. Нехай $\rho=const$ – густина речовини стержня; $C=const$ – питома теплоємність; $k=const$ – коефіцієнт теплопровідності. Величиною, яка характеризує процес поширення тепла в стержні, слугує функція $u(x,t)$ – температура стержня в перерізі з абсцисою x у момент часу t.

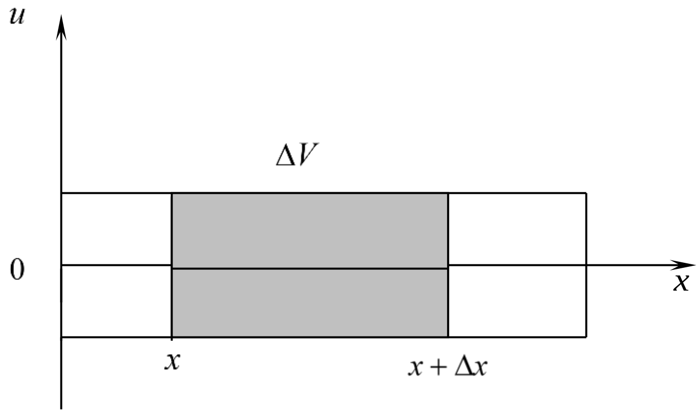

Рисунок 2.4

Аналіз математичної моделі
Це рівняння параболічного типу. На відміну від гіперболічних рівнянь, для рівняння теплопровідності задається тільки одна ***початкова умова***: $$u(x,0)=\varphi(x) \qquad (0<x<l) \quad \text{(початковий розподіл температури)}.$$ Якщо торці стержня підтримуються при певних температурах, то ***граничні умови*** – $$u(0,t)=g_1(t), \quad u(l,t)=g_2(t) \quad (t>0).$$ Якщо торці стержня теплоізольовані, то ***граничні умови такі***: $$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial(l,t)}{\partial x}=0. \qquad (2.13)$$ Таким чином, ***математична модель*** (задача математичної фізики) ***поширення тепла в*** тонкому однорідному циліндричному ***стержні*** довжини l з теплоізольованою бічною поверхнею і заданою температурою на торцях $x=0$, $x=l$ при відсутності внутрішніх джерел тепла має такий вигляд: $$\text{(ДРЧП)} \quad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0<x<l;\ t>0); \qquad (2.14)$$ $$\text{(ПУ)} \qquad u(x,0)=\varphi(x) \qquad (0<x<l); \qquad (2.15)$$ $$\text{(ГУ)} \qquad u(0,t)=g_1(t), \quad u(l,t)=g_2(t) \quad (t>0). \qquad (2.16)$$ Якщо всередині стержня міститься провід з електричним струмом, то опір матеріалу проводу спричиняє виникнення всередині стержня рівномірно розподілених вздовж нього теплових джерел з інтенсивністю $\phi(x,t)$, яка віднесена до одиниці об\`єму і одиниці часу. Тоді отримаємо ***одновимірне неоднорідне рівняння теплопровідності***: $$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad (0<x<l;\ t>0), \qquad (2.17)$$ де $f(x,t)=\dfrac{\phi(x,t)}{c\rho}$.

Нехай, окрім того, бічна поверхня стержня нетеплоізольована і між нею і навколишнім середовищем здійснюється теплообмін, який підлягає закону Ньютона: кількість тепла, яка передається за одиницю часу через одиницю поверхні пропорційна різниці температури стержня $u(x,t)$ і температурі навколишнього середовища u_0. Тоді маємо ***одновимірне однорідне рівняння теплопровідності більш загального вигляду***:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(u - u_0) + f(x,t) \quad (0 < x < l;\; t > 0), \tag{2.18}$$

де $\beta = \alpha\delta/(c\rho S)$; α – коефіцієнт теплообміну; δ – периметр поперечного перерізу стержня.

2.5 Математичні моделі стаціонарних процесів

Вивчення стаціонарних процесів спричиняє ДРЧП еліптичного типу. Наприклад, якщо для двовимірному однорідному рівнянні теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

вважати, що шукана температура u не залежить від часу, то похідна $\frac{\partial u}{\partial t}$ тотожно дорівнює нулю і для знаходження $u(x,y)$ одержуємо ***двовимірне рівняння Лапласа***:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{2.19}$$

яке належить до еліптичного типу.

До зазначеного типу також належить ***двовимірне рівняння Пуассона***:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \tag{2.20}$$

де $f = f(x,y)$.

Для рівнянь еліптичного типу вказують лише граничні умови, тоді як початкові відсутні. Для однозначного обчислення $u = u(x,y)$ не потрібно задавати початковий розподіл шуканої величини u, достатньо знати значення u на межі S області D, у якій вивчається це явище, тобто маємо ***граничну умову***:

$$u(x,y)\big|_S = g(x,y), \quad (x,y) \in S, \tag{2.21}$$

де $g(x,y)$ – відома функція.

Гранична умова (2.21) виникає, коли межа S доступна для спостереження і в кожній її точці величину u можна виміряти.

Якщо ж у довільній точці межі S відома інтенсивність потоку $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ шуканої величини, то маємо ***граничну умову***:

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_S = g(x,y), \quad (x,y)\in S, \tag{2.22}$$

де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до межі S.

Гранична умова може мати комбінований вигляд:

$$\left.\left(\alpha u(x,y)+\beta\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right)\right|_S = g(x,y), \quad (x,y)\in S, \tag{2.23}$$

де $\alpha,\ \beta$ – задані числа.

РОЗДІЛ 3
МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

3.1 Розв'язання задачі Коші для хвильового рівняння методом характеристик

Постановка задачі

Однією з найважливіших задач теорії поширення хвиль служить задача про вільні коливання нескінченної однорідної струни із заданими початковим умовами (граничні умови відсутні). Математично вона формулюється, як ***задача Коші (початкова задача) для одновимірного однорідного хвильового рівняння***.

Знайти розв'язок $u(x,t)$ ДРЧП

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty;\ t > 0), \tag{3.1}$$

який задовольняє початкові умови:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (-\infty < x < +\infty), \tag{3.2}$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – відомі функції.

Постановка такої задачі виправдана тим, що для досить довгої (практично нескінченної) струни, кінці якої розміщені на значній відстані від тієї ділянки, де вивчаються коливання, граничні умови на кінцях струни практично не впливають на режим цієї ділянки.

Для розв'язання задачі Коші (3.1), (3.2) використовується ***метод характеристик (метод біжучих хвиль або метод Д'Аламбера)***, заснований на інтегруванні канонічного вигляду ДРЧП.

Загальна схема методу:

1. Привести вихідне рівняння до канонічного вигляду за допомогою заміни змінних.
2. Проінтегрувати одержане рівняння за новими незалежними змінними.
3. Повернутись до вихідних змінних.
4. Врахувати початкові умови.

Таким чином, розв'язання задачі Коші (3.1), (3.2) розбивається на чотири етапи:	
1	Знаходимо неявні рівняння характеристик: $$\frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;$$ $$A = 1;\ B = 0;\ C = -a^2;\quad \Delta = B^2 - AC = a^2 > 0;$$ $$\frac{dx}{dt} = \frac{B \pm \sqrt{a}}{A};\quad \frac{dx}{dt} = \pm a;\quad \int dx = \pm a \int dt;\quad x = \pm at + C;$$ $$x + at = C_1;\quad x - at = C_2 \ -$$ неявні рівняння характеристик. Вводимо заміну: $\xi = x + at;\ \eta = x - at$. Тоді: $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot at \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot (-a);$$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}\right) - a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \right.$$ $$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}\right) = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot a + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot (-a)\right) - a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot a + \right.$$ $$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(-a)\right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$ $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot 1;$$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} =$$ $$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot 1 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot 1 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot 1 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot 1 = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$ Підставимо вирази для похідних у рівняння (3.1) і після спрощення одержимо: $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \ -$$ канонічний вигляд ДРЧП.

2	Подамо канонічне рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ у вигляді $\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0$, проінтегруємо його за змінною η і одержимо: $$\frac{\partial u}{\partial\xi}=f(\xi),$$ де $f(\xi)$ – довільна диференційована функція від ξ. Інтегруючи останнє рівняння за ξ, одержуємо загальний розв’язок: $$u=f_1(\xi)+f_2(\eta),$$ де $f_1(\xi)=\int f(\xi)d\xi$; $f_1(\xi)$ і $f_2(\eta)$ – довільні функції, які будемо вважати двічі диференційованими.
3	Підставимо в отриманий загальний розв’язок формули заміни $\xi=x+at;\ \eta=x-at$ і одержимо: $$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at). \qquad (3.3)$$
4	Серед розв’язків (3.3) знайдемо частинний розв’язок, який задовольняє початкові умови (3.2). Врахувавши, що за (3.3) $t=0$, відповідно до умови $u(x,0)=\varphi(x)$ маємо: $$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x). \qquad (3.4)$$ Диференціюючи (3.3) за змінною t і беручи до уваги, що $t=0$, за умовою $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)$ маємо: $a\left(f_1'(x)-f_2'(x)\right)=\psi(x)$. (3.5) Інтегруючи одержане співвідношення в межах від 0 до x, знаходимо: $$a\left(f(x)-f_2(x)\right)=\int_0^x\psi(z)dz+C, \qquad (3.6)$$ де C – довільна стала. Із (3.4), (3.5) визначаємо функції: $$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(z)dz+\frac{C}{2a}; \qquad (3.7)$$ $$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(z)dz-\frac{C}{2a}. \qquad (3.8)$$ Підставимо (3.6), (3.7) в (3.3) і одержимо: $$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz- \qquad (3.9)$$ розв’язок задачі Коші. Співвідношення (3.9) називається ***формулою Д’Аламбера***.

Просторово-часова інтерпретація формули Д'Аламбера

Дамо просторово-часову інтерпретацію формули Д'Аламбера (3.9). Візьмемо на xOt – площині (рис. 3.1) довільну точку $M_0(x_0;t_0)$ і проведемо через неї дві прямі $x-at=x_0-at_0$, $x+at=x_0+at_0$ – характеристики хвильового рівняння (3.1). Тоді розв'язок задачі Коші $u(x_0;t_0)$ в точці $M_0(x_0;t_0)$ можна розглядати, як середнє значення функції $\varphi(x)$ (початкового відхилення) в точках $x_1=x_0-at_0$ і $x_2=x_0+at_0$ плюс інтеграл з множником $\frac{1}{2a}$ від початкової швидкості $\psi(x)$ в межах від x_1 до x_2.

Якщо $\psi(x)\equiv 0$, то розв'язок задачі Коші (3.1), (3.2) визначається формулою

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right). \tag{3.10}$$

Процес, який описується рівністю (3.10), називається ***поширенням початкового відхилення***. Якщо $\varphi(x)\equiv 0$, то розв'язок задачі Коші (3.1), (3.2) задається формулою

$$u(x,t)=\phi(x+at)-\phi(x-at), \tag{3.11}$$

де $\phi(x)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(z)dz$.

Процес, який описується рівністю (3.11), називається ***поширенням хвиль імпульсу***.

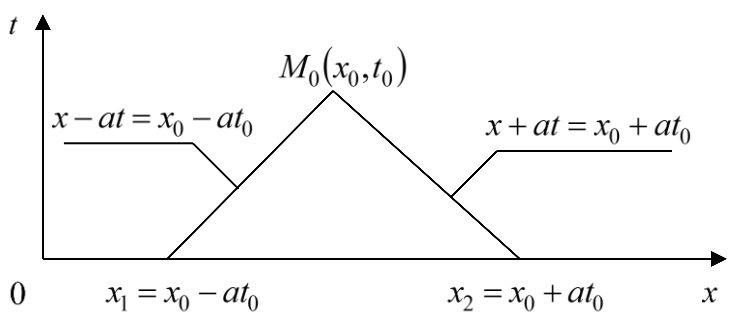

Рисунок 3.1

Приклад

Приклад №8. Розв’язати задачу Коші:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < +\infty;\ t > 0);$$

$$u(x,0) = e^{-x^2}; \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

(процес поширення початкового відхилення).

Розв’язання. За формулою (3.10) одержимо розв’язок цієї задачі:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(e^{-(x+at)^2} + e^{-(x-at)^2}\right).$$

Його можна інтерпретувати так: початкове збурення (зміщення) струни $u(x,0) = e^{-x^2}$ ділиться на дві однакові частини $\frac{1}{2}e^{-x^2}$ і $\frac{1}{2}e^{-x^2}$, кожна з яких поширюється зі швидкістю a у вигляді біжучих хвиль $\frac{1}{2}e^{-(x+at)^2}$ і $\frac{1}{2}e^{-(x-at)^2}$, які рухаються вздовж осі Ox в протилежних напрямах; накладання цих хвиль дає результуючу хвилю. На рисунку 3.2 показано пряму хвилю $\frac{1}{2}e^{-(x-at)^2}$.

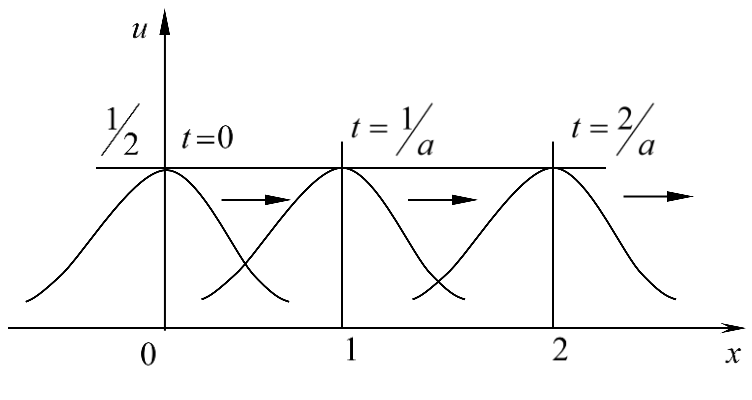

Рисунок 3.2

Приклад №9. Знайти форму нескінченної струни в момент часу $t=\pi/8$, яка описується хвильовим рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

якщо початкова форма струни

$$u\big|_{t=0}=\cos 2x,$$

а початкова швидкість

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sin 2x.$$

Розв’язання.

$$\varphi(x)=\cos 2x;\quad \psi(x)=\sin 2x;\quad a^2=16\ ;\quad a=4.$$

За формулою Д’Аламбера:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\cos 2(x+4t)+\cos 2(x-4t))+\frac{1}{2\cdot 4}\int\limits_{x-4t}^{x+4t}\sin 2z dz=\frac{1}{2}(\cos 2(x+4t)+$$

$$+\cos 2(x-4t))+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}(-\cos 2z)\Big|_{x-4t}^{x+4t}=$$

$$=\cos 2x\cdot\cos 4t+\frac{1}{16}(-\cos 2(x+4t)+$$

$$+\cos 2(x-4t))=\cos 2x\cdot\cos 4t+\frac{1}{8}\sin 2x\sin 4t;$$

$$u\left(x,\frac{\pi}{8}\right)=\cos 2x\cdot\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{8}\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\sin 2x\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{8}\sin 2x.$$

Отже, шуканий розв’язок $u\left(x,\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{8}\sin 2x$.

Приклад №10. Необмежений пружний стержень одержаний сполученням в точці $x=0$ двох напівнескінченних однорідних стержнів. При $x<0$ густина маси, модуль пружності і швидкість поширення малих поздовжніх збурень дорівнюють ρ_1, E_1, a_1, а при $x>0$ вони дорівнюють ρ_2, E_2, a_2. Нехай з області $x<0$ по стержню біжить хвиля $u_1(x,t)=f\left(t-\dfrac{x}{a_1}\right)$ (***падаюча хвиля***). Знайти ***відбиту та заломлену хвилі***. Дослідити розв'язок при $E_2\to 0$ і при $E_2\to+\infty$.

Розв'язання. Для відхилення точок стержня можна написати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=a_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \qquad (-\infty<x<0, \quad t>0); \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \qquad (0<x<+\infty, \quad t>0) \tag{3.13}$$

і початкові умови:

$$u_1(x,0)=f(-x/a_1), \quad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t}=f'(-x/a_1) \quad (-\infty<x<0); \tag{3.14}$$

$$u_2(x,0)=0, \quad \frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t}=0 \qquad (0<x<+\infty). \tag{3.15}$$

До цих рівнянь і початкових умов треба додати ще дві ***умови спряження*** в точці $x=0$:

$$u_1(0,t)=u_2(0,t) \quad (t>0) \tag{3.16}$$

(неперервність зміщень) і

$$E_1\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}=E_2\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} \quad (t>0) \tag{3.17}$$

(неперервність напруг).

Невідомі функції шукаємо у вигляді

$$u_1(x,t)=f_1\left(t-\frac{x}{a_1}\right)+g_1\left(t+\frac{x}{a_1}\right) \quad (-\infty<x<0, \quad t>0); \tag{3.18}$$

$$u_2(x,t)=f_2\left(t-\frac{x}{a_2}\right)+g_2\left(t+\frac{x}{a_2}\right) \quad (0<x<+\infty, \quad t>0). \tag{3.19}$$

Чотири функції $f_1(s)$, $g_1(s)$, $f_2(s)$, $g_2(s)$ визначимо з початкових умов і умов спряження. Використовуючи початкові умови (3.14), (3.15), маємо:

$$f_1\left(-\frac{x}{a_1}\right)+g_1\left(-\frac{x}{a_1}\right)=f\left(-\frac{x}{a_1}\right); \tag{3.20}$$

$$f_1'\left(-\frac{x}{a_1}\right)+g_1'\left(-\frac{x}{a_1}\right)=f_1'\left(-\frac{x}{a_1}\right); \tag{3.21}$$

$$f_2\left(-\frac{x}{a_2}\right)+g_2\left(-\frac{x}{a_2}\right)=0; \tag{3.22}$$

$$f_2'\left(-\frac{x}{a_2}\right)+g_2'\left(-\frac{x}{a_2}\right)=0. \tag{3.23}$$

Позначимо $\frac{x}{a_1}=s$; $\frac{x}{a_2}=r$ і проінтегруємо рівняння (3.21), (3.23), відповідно, за s і r. У результаті маємо дві системи:

$$f_1(-s)+g_1(s)=f(-s) \qquad (-\infty<s<0); \tag{3. 24}$$

$$-f_1(-s)+g_1(s)=-f(-s) \qquad (-\infty<s<0) \tag{3. 25}$$

і також

$$f_2(-r)+g_2(r)=0 \qquad (0<r<+\infty); \tag{3. 26}$$

$$-f_2(-r)+g_2(r)=0 \qquad (0<r<+\infty). \tag{3. 27}$$

Розв’язавши одержані системи (3.24), (3.25) і (3.26), (3.27), знайдемо:

$$f_1(-s)=f(-s), \quad g_1(s)=0 \qquad (-\infty<s<0); \tag{3.28}$$

$$f_2(-r)=0, \qquad g_2(r)=0 \qquad (0<r<+\infty). \tag{3.29}$$

Відповідно до (3.28) і (3.29) шукані функції (3.18), (3.19) набувають такого вигляду:

$$u_1(x,t)=\begin{cases} f\left(t-\frac{x}{a_1}\right)+g_1\left(t+\frac{x}{a_1}\right), & t+\frac{x}{a_1}>0; \\ f\left(t-\frac{x}{a_1}\right), & t+\frac{x}{a_1}<0; \end{cases} \tag{3.30}$$

$$u_2(x,t)=\begin{cases} f_2\left(t-\frac{x}{a_2}\right), & t-\frac{x}{a_2}>0; \\ 0, & t-\frac{x}{a_2}<0. \end{cases} \tag{3.31}$$

Підставимо одержані вирази (3.30) і (3.31) в умови спряження (3.16), (3.17). У результаті маємо:

$$f(t)+g_1(t)=f_2(t) \qquad (t>0); \tag{3.32}$$

$$E_1\left(-\frac{1}{a_1}f'(t)+\frac{1}{a_1}g_1'(t)\right)=E_2\left(-\frac{1}{a_2}f_2{}'(t)\right) \quad (t>0). \tag{3.33}$$

Враховуючи, що $a_1=\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}$; $a_2=\sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$ та інтегруючи (3.33), отримаємо:

$$\sqrt{E_1\rho_1}\left(-f(t)+g_1(t)\right)=\sqrt{E_2\rho_2}\left(-f_2(t)\right). \tag{3.34}$$

Таким чином, об’єднавши (3.32) і (3.34), для знаходження $f_2(t)$ і $g_1(t)$ отримаємо систему рівнянь:

$$f(t)+g_1(t)=f_2(t); \quad \sqrt{E_1\rho_1}\left(-f(t)+g_1(t)\right)=\sqrt{E_2\rho_2}\left(-f_2(t)\right).$$

Звідси

$$g_1(t)=\frac{\sqrt{E_1\rho_1}-\sqrt{E_2\rho_2}}{\sqrt{E_1\rho_1}+\sqrt{E_2\rho_2}}\, f(t); \qquad f_2(t)=\frac{2\sqrt{E_1\rho_1}}{\sqrt{E_1\rho_1}+\sqrt{E_2\rho_2}}\, f(t).$$

Тоді шуканий розв’язок поставленої крайової задачі визначається формулами

$$u_1(x,t)=\begin{cases} f(t-x/a_1)+\left(\sqrt{E_1\rho_1}-\sqrt{E_2\rho_2}\right)/\left(\sqrt{E_1\rho_1}+\right. \\ \left.+\sqrt{E_2\rho_2}\right) f(t+x/a_1), \qquad t+x/a_1>0; \\ f(t-x/a_1), \quad t+x/a_1<0; \end{cases} \tag{3.35}$$

де $-\infty<x<0$;

$$u_2(x,t)=\begin{cases} \left(2\sqrt{E_1\rho_1}\right)/\left(\sqrt{E_1\rho_1}+\sqrt{E_2\rho_2}\right)\times \\ \times f(t-x/a_2), \qquad t-x/a_2>0; \\ 0, \quad t-x/a_2<0, \end{cases} \tag{3.36}$$

де $0<x<+\infty$.

У формулі (3.35) доданок

$$g_1\left(t+\frac{x}{a_1}\right)=\frac{\sqrt{E_1\rho_1}-\sqrt{E_2\rho_2}}{\sqrt{E_1\rho_1}+\sqrt{E_2\rho_2}}\, f\left(t+\frac{x}{a_1}\right), \tag{3.37}$$

де $t+\dfrac{x}{a_1}>0$, є ***відбитою хвилею***.

З виразу (3.37) випливає: якщо $E_1\rho_1=E_2\rho_2$, то відбита хвиля відсутня $g_1\left(t+\dfrac{x}{a_1}\right)=0$; якщо $E_2=0$, то відбита хвиля $g_1\left(t+\dfrac{x}{a_1}\right)=f\left(t+\dfrac{x}{a_1}\right)$; якщо $E_2=+\infty$, то відбита хвиля $g_1\left(t+\dfrac{x}{a_1}\right)=-f\left(t+\dfrac{x}{a_2}\right)$.

Заломлена хвиля – це $u_2(x,t)$ при $t-\dfrac{x}{a_2}>0$.

З виразу (3.36) випливає: якщо $E_2=0$, то заломлена хвиля має вдвічі більшу амплітуду, ніж падаюча хвиля $u_2(x,t)=2f\left(t-\dfrac{x}{a_2}\right)$; якщо $E_2=+\infty$, то заломлена хвиля відсутня $u_2(x,t)=0$.

3.2 Розв'язання першої крайової задачі для одновимірного хвильового рівняння методом відокремлення змінних

<table>
<tr><td colspan="2">

Розв`язок хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

на всій прямій $-\infty < x < +\infty$ за формулою Д'Аламбера зображується у вигляді суперпозиції двох біжучих хвиль, які поширюються в протилежних напрямах. Якщо розглядати це рівняння на обмеженому проміжку $0 < x < l,$ то біжучих хвиль вже не буде, оскільки вони будуть взаємодіяти з межами області. Замість них виникають інші, які називаються ***стоячими хвилями***.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

***Метод відокремлення змінних (метод стоячих хвиль або метод Фур`є)*** – один із найбільш ефективних аналітичних способів розв`язання змішаних (початково-граничних) крайових задач для широкого кола лінійних ДРЧП. Зазвичай його застосовують тоді, коли і рівняння, і граничні умови є лінійними й однорідними. В багатьох випадках він дозволяє будувати розв`язки змішаних задач і для неоднорідних ДРЧП з неоднорідними граничними умовами.

Суть методу відокремлення змінних полягає у відшукуванні розв`язку крайової задачі у вигляді ряду Фур`є за деякою ортогональною системою функцій, пов`язаних із цією задачею.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Загальна схема методу для випадку одновимірного однорідного лінійного ДРЧП гіперболічного (чи параболічного) типу:</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Знаходження всієї нескінченної множини нетривіальних (ненульових) розв'язків спеціального вигляду добутку функцій $u(x,t) = X(x)T(t)$, кожна з яких залежить тільки від одного аргументу, з урахуванням однорідних граничних умов. У результаті ДРЧП розщеплюється на звичайні диференціальні рівняння, кожне з яких включає лише одну функцію-співмножник. Потім знаходять розв'язки цих звичайних диференційних рівнянь, які задовольняють виділені нульові граничні умови на межі досліджуваної області</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Побудова на основі принципу суперпозиції розв'язку однорідного лінійного ДРЧП, який задовольняє як граничні, так і початкові умови, у вигляді нескінченного ряду, що формується з одержаної на першому етапі послідовності елементарних розв`язків. Варто зазначити, що в класичному припущенні цей ряд повинен бути рівномірно збіжним разом із рядами, які одержують із нього диференціюванням необхідну кількість разів за незалежними змінними. Відповідний розв`язок називається класичним. Якщо зазначена умова не виконується, то відповідний розв`язок називається узагальненим.</td></tr>
</table>

Задача про вільні коливання однорідної струни

Розглянемо задачу про вільні коливання однорідної струни довжини l з жорстко закріпленими кінцями $x=0$, $x=l$. Припустимо, що середовище опору не чинить і зовнішні сили на струну не діють. Математично вона формулюється як ***перша крайова задача (задача Діріхле) для одновимірного однорідного хвильового рівняння***:

– знайти розв`язок $u(x,t)$ ДРЧП

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0<x<l, \quad t>0), \tag{3.38}$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x,0)=\varphi(x); \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x) \ (0<x<l) \tag{3.39}$$

і однорідні граничні умови першого типу

$$u(0,t)=0; \quad u(l,t)=0 \qquad (t>0), \tag{3.40}$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – відомі функції; a, l – відомі числа, $a>0$, $l>0$.

Згідно з методом відокремлення змінних розв'язання задач (3.38) – (3.40) розбивається на два етапи.

Знаходження нескінченної послідовності елементарних розв`язків, що задовольняють однорідні граничні умови.

Шукаємо ненульові розв'язки у вигляді

$$u(x,t)=X(x)T(t), \tag{3.41}$$

де $X(x)$ – функція тільки від x, а $T(t)$ – функція тільки від t.

Підставимо (3.41) в рівняння (3.38) і одержимо:

$$X(x)T''(t)=a^2\,X''(x)T(t).$$

Відокремимо змінні в цьому рівнянні, поділивши обидві його частини на $a^2X(x)\,T(t)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{3.42}$$

Рівність (3.42) двох відношень, кожне з яких залежить тільки від x чи тільки від t, можлива лише у випадку, коли обидва відношення дорівнюють одній і тій самій сталій величині. Позначимо її через λ:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda .$$

Звідси отримаємо два звичайні диференційні рівняння:

$$X''-\lambda X=0; \qquad T''-a^2\lambda T=0, \tag{3.43}$$

де λ – довільне дійсне число (***параметр розщеплення***).

Розв`яжемо рівняння (3.43) для трьох можливих випадків значень параметра розщеплення λ.

а) Якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, тоді:

$$X'' + \beta^2 X = 0; \quad k^2 + \beta^2 = 0; \quad k_{1,2} = \pm\beta i;$$

$$X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x); \tag{3.44}$$

$$T'' + a^2\beta^2\, T = 0; \quad k^2 + a^2\beta^2 = 0; \quad k_{1,2} = \pm a\beta i;$$

$$T = C\cos(a\beta t) + D\sin(a\beta t). \tag{3.45}$$

б) Якщо $\lambda = 0$, тоді:

$$X'' = 0; \quad X' = A; \quad X = Ax + B; \tag{3.46}$$

$$T'' = 0; \quad T' = C; \quad T = Ct + D.$$

в) Якщо $\lambda = \beta^2 > 0$, тоді:

$$X'' - \beta^2 X = 0; \quad k^2 - \beta^2 = 0; \quad k_{1,2} = \pm\beta; \quad X = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}; \tag{3.47}$$

$$T'' - a^2\beta^2 T = 0; \quad k^2 - a^2\beta^2 = 0; \quad k_{1,2} = \pm a\beta; \quad T = Ce^{a\beta t} + De^{-a\beta t}.$$

Через довільність сталих A, B, C, D, λ маємо нескінченну множину розв'язків рівняння (3.38).

Виділимо з неї підмножину розв'язків, які задовольняють граничні умови (3.40).

Підставивши вираз (3.41) у граничні умови (3.40), отримаємо:

$$X(0)T(t) = 0; \quad X(l)T(t) = 0 \quad (t > 0).$$

Оскільки для ненульових розв`язків (3.41)

$$T(t) \neq 0 \quad (t > 0), \qquad \text{то} \qquad X(0) = 0; \quad X(l) = 0.$$

Таким чином, крайова задача для звичайного диференціального рівняння:

$$\text{(ЗДР)} \qquad X'' - \lambda X = 0 \qquad (0 < x < l); \tag{3.48}$$

$$\text{(ГУ)} \qquad X(0) = 0; \quad X(l) = 0 \tag{3.49}$$

дає змогу відібрати ненульові розв`язки (3.41), які задовольняють граничні умови (3.40). Значення $\lambda$, для якого крайова задача (3.48), (3.49) має ненульовий розв`язок, називається ***власним значенням (власним числом)***, а відповідний розв'язок $X(x)$ – ***власною функцією***. Множина всіх власних значень називається ***спектром***, а задача (3.48), (3.49) про відшукування спектра й відповідної йому ***системи власних функцій – спектральною задачею або задачею Штурма – Ліувілля***. Зазначимо, що *власні функції визначаються з точністю до сталого множника*.

Розглянемо три можливих випадки значень параметра розщеплення λ:

а) якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, то загальний розв`язок рівняння (3.48) визначається формулою (3.44). Підставивши його у граничні умови (3.49), отримаємо:

$$A = 0; \quad A\cos(\beta l) + B\sin(\beta l) = 0.$$

Звідси $B\sin(\beta l) = 0$. Якщо прийняти, що $B = 0$, то отримаємо нульовий розв`язок: $X(x) = 0$, тому треба вважати, що $\sin(\beta l) = 0$.

Розв`язавши одержане тригонометричне рівняння, знайдемо власні значення:

$$\beta l = \pi n,\ n \in Z; \quad \beta_n = \frac{\pi n}{l}; \quad \lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2}; \quad n = 1,2,... \tag{3.50}$$

і відповідні їм власні функції: $X_n(x) = B_n \sin\dfrac{\pi n x}{l}, \quad n = 1,2,...,$ (3.51)

де B_n – довільна стала, відмінна від нуля.

Зазначимо, що в (3.50), (3.51) нема необхідності розглядати значення $n = 0, -1, -2, ...$. При $n = 0$ маємо нульовий розв`язок $X_0(x) = 0$, а при $n = -1, -2, ...$ власні функції відрізняються тільки знаком від знайдених $X_n(x)$ і тому не поповнюють набір власних функцій (3.51) новими ***лінійно незалежними функціями***.

У цьому випадку функція $T(t)$ визначається формулою (3.45), яка з врахуванням (3.50) набуває такого вигляду:

$$T_n(t) = C_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + D_n \sin\frac{\pi n a t}{l}, \quad n = 1,2,..., \tag{3.52}$$

де C_n, D_n – довільні сталі.

Відповідно, маємо ненульові розв`язки вигляду (3.41) вхідного ДРЧП (3.38), які задовольняють однорідні граничні умови (3.40):

$$U_n(x,t) = \sin\frac{\pi n x}{l}\left(a_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin\frac{\pi n a t}{l}\right), \ n = 1,2,..., \tag{3.53}$$

де a_n, b_n– довільні сталі, причому сталі B_n, C_n, D_n введено до складу a_n, b_n;

б) якщо $\lambda = 0$, то загальний розв`язок рівняння (3.48) має вигляд (3.46). Підставившчи його в граничні умови(3.49), одержимо:

$$B = 0; \quad Al + B = 0.$$

Звідси $A = 0; B = 0$, тобто маємо нульовий розв`язок $X(x) = 0$;

в) якщо $\lambda = \beta^2 > 0$, то загальний розв`язок рівняння (3.48) має вигляд (3.47). Підставивши його в граничні умови (3.49), отримаємо систему для знаходження A і B: $\quad A + B = 0; \quad Ae^{\beta l} + Be^{-\beta l} = 0$.

Оскільки $\beta \neq 0$, то звідси одержимо: $A = 0; B = 0$. Тобто при будь-якому $\lambda = \beta^2 > 0$ крайова задача (3.48), (3.49) має нульовий розв`язок $X(x) = 0$.

Знаходження розв`язку, який задовольняє як граничні, так і початкові умови

Оскільки задане ДРЧП (3.38) і граничні умови (3.40) лінійні і однорідні, то згідно з принципом суперпозиції сума його розв'язків також є розв'язком. Більш того, функція $u(x,t)$, яка задається рядом

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nat}{l}+b_n\sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}, \qquad (3.54)$$

також є розв'язком, який задовольняє однорідні граничні умови.

Для знаходження коефіцієнтів a_n, b_n скористаємося початковими умовами (3.39). Одержимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{\pi nx}{l}=\varphi(x) \quad (0<x<l); \qquad (3.55)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi na}{l}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}=\psi(x) \quad (0<x<l). \qquad (3.56)$$

Співвідношення (3.55), (3.56) можна розглядати, як розвинення відомих функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ в ряди Фур`є за синусами на проміжку $[0;\, l]$. Вважаючи, що умови розвитку цих функцій у ряд Фур`є виконані (наприклад, функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ задовольняють умови Діріхле на відрізку $[0;\, l]$), скористаємося відомими формулами для коефіцієнтів Фур'є:

$$f(x)=\sum_{n=`}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi nx}{l}; \qquad A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$$

і отримаємо:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx; \qquad (3.57)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \qquad (3.58)$$

Отже, розв`язок крайової задачі (3.38) – (3.40) записується у вигляді функціонального ряду (3.54), коефіцієнти якого визначаються за формулами (3.57), (3.58).

Під час розв’язування крайової задачі методом відокремлення змінних важлива однорідність граничних умов, до того ж ці умови можуть бути не тільки першого типу:

$$u(0,t)=0; \qquad u(l,t)=0 \quad (t>0),$$

а й другого:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0 \qquad (t>0)$$

чи третього

$$\alpha u(0,t)+\beta\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0; \qquad \gamma u(l,t)+\delta\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0.$$

Якщо граничні умови ненульові, то заміною змінних задачу треба попередньо звести до випадку однорідних (нульових) граничних умов.

Звісно, диференціальне рівняння і початкові умови при цьому дещо ускладнюються.

Якщо треба розв`язати крайову задачу для неоднорідного ДРЧП з однорідними граничними умовами, то її розв’язок шукають у вигляді функціонального ряду за власними функціями $X_n(x)$ відповідної однорідної задачі (***метод розкладання за власними функціями***).

Розв’язок змішаної крайової задачі (3.38) – (3.40), який визначається формулою (3.54), можна подати у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi nx}{l}\sin\left(\frac{\pi nat}{l}+\alpha_n\right), \tag{3.59}$$

де

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}; \tag{3.60}$$

$$\sin\alpha_n=\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}; \qquad \cos\alpha_n=\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}. \tag{3.61}$$

Кожний член

$$u_n(x,t)=A_n\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\left(\frac{\pi nat}{l}+\alpha_n\right)$$

розкладу (3.59) – це так звана ***стояча хвиля або власне коливання***. Сталі A_n і α_n називаються, відповідно, ***амплітудою*** і ***початковою фазою*** стоячої хвилі $u_n(x,t)$. Кожна точка струни з фіксованою абсцисою x здійснює гармонічні коливання $u(x,t)$ з амплітудою $A_n \sin\frac{\pi nx}{l}$, різною для різних точок струни, і з однаковими ***частотою*** $w_n = \dfrac{\pi n a}{l}$ і ***початковою фазою*** α_n (рис. 3.3).

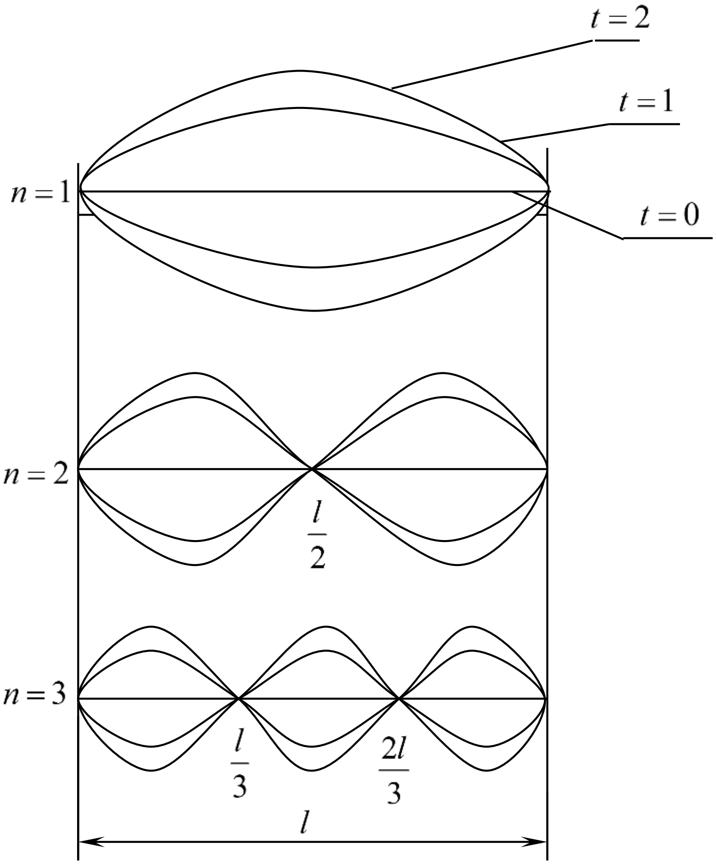

Рисунок 3.3

Приклад №11. Знайти закон коливань струни з довжиною l, яка розміщена на відрізку $[0;l]$, якщо в початковий момент струні надають форми синусоїди $\varphi(x) = A\sin\dfrac{2\pi}{l}x$, а потім її відпускають без початкової швидкості. Кінці струни закріплені, зовнішні сили відсутні.

Розв`язання. З математичної точки зору маємо змішану крайову задачу – знайти розв’язок однорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, \quad t > 0),$$

який задовольняє початкові умови:

$$u(x,0) = A\sin\left((2\pi x)/l\right); \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (0 < x < l)$$

і однорідні граничні умови першого типу:

$$u(0,t) = 0; \qquad u(l,t) = 0 \qquad (t > 0).$$

За формулами (3.57) і (3.58) знаходимо:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l A\sin\frac{2\pi}{l}x\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\begin{cases}0, & n\neq 2;\\ A, & n=2;\end{cases}\quad b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}dx=0.$$

Тоді, згідно з (3.54), одержимо шуканий розв`язок

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nat}{l}+b_n\sin\frac{\pi nat}{l}\right)\times$$

$$\times\sin\frac{\pi nx}{l}=A\cos\frac{2\pi at}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}.$$

Приклад №12. Посередині вільної струни, кінці якої закріплені в точках $x=0$, $x=l$ в початковий момент часу $t=0$ ударяють плоским молоточком шириною h і надають відповідній ділянці струни початкової швидкості v_0. Визначити форму струни в довільний момент часу t, якщо початкове відхилення струни відсутнє.

Розв`язання. Математично маємо змішану крайову задачу – знайти розв`язок однорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad (0<x<l,\quad t>0),$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x,0)=0;\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=v_0\quad \left(\frac{l}{2}-\frac{h}{2}\le x\le\frac{l}{2}+\frac{h}{2}\right);$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0\qquad \left(0<x<\frac{l}{2}-\frac{h}{2};\quad \frac{l}{2}+\frac{h}{2}<x<l\right)$$

і однорідні граничні умови:

$$u(0,t)=0;\qquad u(l,t)=0\qquad (t>0).$$

За формулами (3.57) і (3.58) знаходимо:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}dx=0;$$

$$b_n=\frac{2}{\pi na}\int_{(l-h)/2}^{(l+h)/2} v_0\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{4v_0 l}{\pi^2 n^2 a}\sin\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi nh}{2l}.$$

Тоді, згідно з (3.54), одержимо шуканий розв’язок

$$u(x,t)=\frac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi nh}{2l}\sin\frac{\pi nat}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Приклад №13. Провідник завдовжки l вкритий такою ізоляцією, що втрати через його поверхню відсутні. Початкове значення сили струму в провіднику дорівнює нулю $i(x,0)=0$, а початкова напруга задається формулою $u(x,0)=E_0\sin\frac{3\pi x}{2l}$. Обидва кінці провідника ізольовані. Знайти силу струму $i(x,t)$ в кожній точці провідника в довільний момент часу.

Розв`язання. Сила струму $i(x,t)$ задовольняє телеграфне рівняння (2.12). Оскільки за умовою задачі втрати через ізоляцію і активний опір відсутні, тобто $G=0$ і $R=0$, то це рівняння переходить в однорідне хвильове рівняння $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$, де $a^2=\frac{1}{LC}$; L – індуктивність; C – ємність провідника.

З першого рівняння (2.7) системи (2.7), (2.8) маємо:

$$\frac{\partial i}{\partial t}=-\frac{1}{L}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{R}{L}i.$$

Оскільки з умови задачі

$$i(x,0)=0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial x}=\frac{3\pi E_0}{2l}\cos\frac{3\pi x}{2l},$$

то одержимо:

$$\frac{\partial i(x,0)}{\partial t}=-\frac{3\pi E_0}{2lL}\cos\frac{3\pi x}{2l}.$$

Оскільки кінці провідника ізольовані, то шукана функція $i(x,t)$ задовольняє однорідні граничні умови

$$i(0,t)=0, \quad i(l,t)=0.$$

Таким чином, задача допускає таке математичне формулювання: знайти розв’язок однорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2},$$

який задовольняє початкові умови $i(x,0)=0$; $\frac{\partial i(x,0)}{\partial t}=-\frac{3\pi E_0}{2lL}\cos\frac{3\pi x}{2l}$

і однорідні граничні умови $i(0,t)=0, \quad i(l,t)=0$.

За формулами (3.57), (3.58) знаходимо:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}dx=0; \quad b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\left(-\frac{3E_0\pi}{2lL}\cos\frac{3\pi x}{2l}\right)\sin\frac{\pi ns}{l}dx=\frac{12E_0}{aL(4n^2-9)}.$$

Тоді, згідно з (3.54), одержимо шуканий розв’язок

$$i(x,t)=\frac{12E_0}{aL}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-9}\sin\frac{\pi nat}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Приклад №14. Вимушені коливання однорідної струни, кінці якої $x=0$ і $x=l$ жорстко закріплені, описуються хвильовим рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),$$

де вільний член, що відображає неперервно розподілену збуджуючу силу, задається рівністю

$$f(x,t)=x\sin\omega t\,.$$

Знайти відхилення точок струни $u(x,t)$ при вимушених коливаннях, якщо початкові відхилення і швидкості дорівнюють нулю. Опором середовища знехтувати. Тут a і l – відомі величини.

Розв’язання. Математична постановка задачі виглядає так:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\sin\omega t \quad (0<x<l,\quad t>0);$

(ПУ) $u(x,0)=0;\quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \quad (0<x<l);$

(ГУ) $u(0,t)=0;\quad u(l,t)=0 \quad (t>0).$

Основна ідея розв’язання цієї задачі полягає в розкладі вільного члена $f(x,t)=x\sin\omega t$ і шуканої функції $u(x,t)$ на відповідні ряди за власними функціями $X_n(x)=\sin\dfrac{\pi nx}{l}$ задачі Штурма – Ліувілля (3.48), (3.49):

$$f(x,t)=x\sin\omega t=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l};$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Одержані співвідношення є розвитком відповідних функцій у ряди Фур’є за синусами на проміжку $[0;\,l]$. Оскільки функція $f(x,t)$ відома, то обчислимо коефіцієнти $f_n(t)$ її неповного ряду Фур`є:

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{l}\sin\omega t\int_0^l x\sin\frac{\pi nx}{l}dx=$$

$$=\left|\tilde{u}=x;\ d\tilde{u}=dx;\ d\tilde{v}=\sin\frac{\pi nx}{l}dx;\ \tilde{v}=-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{l}\right|=$$

$$=\frac{2}{l}\sin\omega t\left(-\frac{lx}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{l}\Bigg|_0^l+\frac{l}{\pi n}\int_0^l\cos\frac{\pi nx}{l}dx\right)=$$

$$=\frac{2\sin\omega t}{l}\left(-\frac{l^2}{\pi n}\cos\pi n+\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{l}\Bigg|_0^l\right)=\frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\omega t\,.$$

Для знаходження коефіцієнтів $T_n(t)$ підставимо в ДРЧП отримані розвинення. У результаті маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)X_n(x)=a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n''(x)+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x).$$

Оскільки згідно з рівнянням (3.48) $X_n''(x)=\lambda_n X_n(x)$, то одержимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t)-a^2\lambda_n T_n(t)-f_n(t)\right)X_n(x)=0,$$

де $\lambda_n=-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}$ – власні числа задачі Штурма – Ліувілля.

Система власних функцій $X_n(x)=\sin\frac{\pi n x}{l}$ $(n=1,\ 2,\ ...)$ лінійно незалежна, тому рівність останнього ряду нулю можлива тільки в тому випадку, коли всі коефіцієнти при $X_n(x)$ дорівнюють нулю. Звідси маємо диференціальні рівняння:

$$T_n''(t)-a^2\lambda_n T_n(t)-f_n(t)=0\quad(n=1,\ 2,\ ...).$$

Підставимо розклад $u(x,t)$ в початкові умови:

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{\pi n x}{l}=0;\quad \sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\sin\frac{\pi n x}{l}=0.$$

Звідси

$$T_n(0)=0,\quad T_n'(0)=0\quad(n=1,\ 2,\ ...).$$

Таким чином, кожна функція $T_n(t)$ визначається, як розв’язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння:

(ЗДР) $\qquad T_n''(t)-a^2\lambda_n T_n(t)=f_n(t),$

(ПУ) $\qquad T_n(0)=0;\quad T_n'(0)=0,$

де $\lambda_n=-\frac{\pi^2 n^2}{l^2};\quad f_n(t)=\frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\omega t.$

Розв’яжемо поставлену задачу Коші за допомогою характеристичного рівняння:

$$T_n''+\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}T_n=\frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\omega t;\quad k^2+\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}=0;\quad k=\pm\frac{\pi n a}{l}i;$$

$$\overline{T}_n=C_1\cos\frac{\pi n a}{l}t+C_2\sin\frac{\pi n a}{l}t.$$

Якщо частота вимушених коливань не співпадає ні з однією з власних частот, тобто $\omega \neq \frac{\pi n a}{l}$, тоді:

$T_{n*} = A\cos\omega t + B\sin\omega t$; $\quad T'_{n*} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$;

$T''_{n*} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$;

$$-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t + \frac{\pi^2 n^2 a}{l^2}\times(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = \frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\omega t;$$

$\cos\omega t: \quad -A\omega^2 + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}A = 0$;

$\sin\omega t: \quad -B\omega^2 + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}B = \frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}$.

Звідси $\quad A = 0; \quad B = \frac{2l^3(-1)^{n+1}}{\pi n(\pi^2 n\ a^2 - \omega^2 l^2)}$.

Тоді

$$T_n(t) = \overline{T} + T_{n*} = C_1\cos\frac{\pi n a}{l}t + C_2\sin\frac{\pi n a}{l}t + \frac{2l^3(-1)^{n+1}}{\pi n(\pi^2 n^2 a^2 - \omega^2 l^2)}\sin\omega t.$$

Якщо частота вимушених коливань співпадає з однією з власних частот, тобто $\omega = \frac{\pi n a}{l}$ при деякому значенні n_p з множини $n = 1, 2, \ldots$ (***явище резонансу***), то в цьому випадку ЗДР набуває такого вигляду:

$$T''_n + \omega^2 T_n = \frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\omega t.$$

Тоді:

$T_{n*} = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)t$;

$T'_{n*} = A\cos\omega t + B\sin\omega t + (-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t)t$;

$$T''_{n*} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t - A\omega\sin\omega t + \\ + B\omega\cos\omega t + (-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t)t;$$

$$-2A\omega\sin\omega t + 2B\omega\cos\omega t + (-A\omega^2\cos\omega t - \\ - B\omega^2\sin\omega t)t + \omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t)t = \frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\omega t;$$

$\cos\omega t: \quad 2B\omega = 0$;

$\sin\omega t: \quad -2A\omega = \frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}$.

Звідси

$$B = 0; \qquad A = -\frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n \omega}.$$

Тоді

$$T_n(t) = \overline{T}_n + T_{n*} = C_1 \cos\frac{\pi n a}{l} t +$$

$$+ C_2 \sin\frac{\pi n a}{l} t - \frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n \omega} t \cos\omega t.$$

Враховуючи початкові умови

$$T_n(0) = 0; \qquad T_n'(0) = 0,$$

знаходимо значення довільних сталих C_1, C_2.

При відсутності резонансу $(\omega \neq \pi n a / l)$:

$$T_n(0) = 0 : \qquad C_1 = 0;$$

$$T_n'(0) = 0 : \qquad C_2 \frac{\pi n a}{l} + \frac{2 l^3 (-1)^{n+1} \omega}{\pi n \left(\pi^2 n^2 a^2 - \omega^2 l^2\right)} = 0.$$

Звідси

$$C_1 = 0; \qquad C_2 = -\frac{2 l^4 \omega (-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2 \left(\pi^2 n^2 a^2 - \omega^2 l^2\right)}.$$

Тоді

$$T_n = -\frac{2 l^4 \omega (-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2 \left(\pi^2 n^2 a^2 - \omega^2 l^2\right)} \sin\frac{\pi n a}{l} t +$$

$$+ \frac{2 l^3 (-1)^n}{\pi n \left(\pi^2 n^2 a^2 - \omega^2 l^2\right)} \sin\omega t.$$

За наявності резонансу $\left(\omega = \frac{\pi n a}{l}\right.$ при $\left. n = n_p = \frac{\omega l}{\pi a}\right)$:

$$T_n(0) = 0 : \qquad C_1 = 0;$$

$$T_n'(0) = 0 : \qquad C_2 \frac{\pi n a}{l} - \frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n \omega} = 0.$$

Звідси

$$C_1 = 0; \qquad C_2 = \frac{l(-1)^{n+1}}{\left(\frac{\pi n a}{l}\right) \pi n \omega} = \frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n \omega^2}.$$

Тоді

$$T_n(t)=\frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n\omega^2}\sin\omega t-\frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n\omega}t\,\cos\omega t\,.$$

Таким чином, при відсутності резонансу ($\omega\neq\pi na/l$) шуканий розв’язок має такий вигляд:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,X_n(x)=\frac{2l^3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\left(\pi^2n^2a^2-\omega^2l^2\right)}\times$$

$$\times\left(\sin\omega t-\frac{l\omega}{\pi n}\sin\frac{\pi na}{l}t\right)\sin\frac{\pi nx}{l}\,.$$

Відповідно, за наявності резонансу ($\omega=\dfrac{\pi na}{l}$ при $n=n_p=\dfrac{\omega l}{\pi a}$) коливання резонансної частоти необмежено зростають за амплітудою, тому для достатньо віддалених моментів часу $t>>0$ справедливо таке:

$$u(x,t)\approx u_{np}(x,t)\approx\frac{l(-1)^{n_p}}{\pi n_p\omega}\,t\,\cos\omega t\cdot\sin\frac{\pi n_p x}{l}=$$

$$=\frac{(-1)^{(\omega l)/(\pi a)}a}{\omega^2}t\,\cos\omega t\cdot\sin\frac{\omega x}{a}\,.$$

Приклад №15. Розв'язати крайову задачу:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u-2t \qquad (0<x<2;\ \ t>0);$

(ПУ) $\quad u(x,0)=0; \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \quad (0<x<2);$

(ГУ) $\quad u(0,t)=2t; \quad u(2,t)=0 \qquad (t>0).$

Розв'язання. Невідому функцію $u(x,t)$ будемо шукати у вигляді

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t),$$

де $v(x,t)=t(2-x)$ – функція, що задовольняє задані граничні умови.

Тоді функція $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$ задовольняє відповідність нульових граничних умов

$$w(0,t)\backslash=w(2,t)=0,$$

диференціальному рівнянню

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+w-tx$$

і наступним початковим умовам

$$w(x,0)=0; \quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t}=x-2.$$

Щоб знайти функцію $w(x,t)$, розв'яжемо допоміжну задачу:

Знайти ненульовий розв'язок ДРЧП

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+w$$

спеціального вигляду $w(x,t)=X(x)T(t)$, який задовольняє однорідні граничні умови

$$w(0,t)=0; \quad w(2,t)=0.$$

Підставляючи $w=X(x)T(t)$ в ДРЧП, одержимо:

$$T''X=X''T+XT; \quad \frac{T''}{T}-1=\frac{X''}{X}=-\lambda,$$

де $\lambda>0$ – параметр розщеплення. Звідси отримаємо два звичайні диференціальні рівняння:

$$X''+\lambda X=0; \qquad T''+(\lambda-1)T=0.$$

З граничних умов

$$w(0,t)=0; \quad w(2,t)=0$$

і рівності $w=X(x)T(t)$ випливає, що: $X(0)T(t)=0; \quad X(2)T(t)=0.$

Звідси

$$X(0)=0; \quad X(2)=0.$$

Таким чином, приходимо до задачі Штурма – Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0; \\ X(0) = 0; \;\; X(2) = 0. \end{cases}$$

Власні значення і власні функції $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$, $X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Тоді з рівняння $T'' + (\lambda - 1)T = 0$ маємо: $T_n(t) = A_n \cos\mu_n t = B_n \sin\mu_n t$,

де $\mu_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 - 1}$, $n = 1, 2, \ldots$; A_n, B_n – довільні сталі.

Функції $w_n(x,t) = (A_n \cos\mu_n t + B_n \sin\mu_n t)\sin\frac{\pi n x}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ є розв'язками допоміжної задачі.

Тепер розв'яжемо дві наступні крайові задачі.

1) (ДРЧП) $\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} + \overline{w}$ $\quad (0 < x < 2; \;\; t > 0)$;

(ПУ) $\overline{w}(x,0) = 0$; $\frac{\partial \overline{w}(x,0)}{\partial t} = x - 2$ $\quad (0 < x < 2)$;

(ГУ) $\overline{w}(0,t) = 0$; $\overline{w}(2,t) = 0$ $\quad (t > 0)$;

2) (ДРЧП) $\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \tilde{w} - t\,x$ $\quad (0 < x < 2; \;\; t > 0)$;

(ПУ) $\tilde{w}(x,0) = 0$, $\frac{\partial \tilde{w}(x,0)}{\partial t} = 0$ $\quad (0 < x < 2)$;

(ГУ) $\tilde{w}(0,t) = 0$; $\tilde{w}(2,t) = 0$ $\quad (t > 0)$.

Згідно з принципом суперпозиції $w(x,t) = \overline{w}(x,t) + \tilde{w}(x,t)$.

Розв'язок першої задачі задається рядом

$$\overline{w}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\mu_n t + b_n \sin\mu_n t)\sin\frac{\pi n x}{2},$$

де коефіцієнти a_n і b_n визначаються за формулами:

$$a_n = \int_0^2 \overline{w}(x,0)\sin\frac{\pi n x}{2}dx = 0; \quad b_n = \frac{1}{\mu_n}\int_0^2 \frac{\partial \overline{w}(x,0)}{\partial t}\sin\frac{\pi n x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{\mu_n}\int_0^2 (x-2)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{4}{n\pi\mu_n}.$$

Отже,

$$\overline{w}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{n\pi\mu_n}\right)\sin\mu_n t + \sin\frac{n\pi x}{2} = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\mu_n}\sin\mu_n t + \sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Розв’язок другої задачі шукаємо у вигляді розкладу за власними функціями задачі Штурма – Ліувілля:

$$\tilde{w}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{T}_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{T}_n(t)\sin\frac{\pi nx}{2}.$$

Вільний член $f(x,t)=-tx$ також розкладаємо за власними функціями:

$$f(x,t)=-tx=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Останнє співвідношення є розкладом відомої функції $f(x,t)=-tx$ в ряд Фур’є за синусами на проміжку $[0;2]$. Обчислимо $f_n(t)$ коефіцієнти цього ряду:

$$f_n(t)=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-t\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=-t\left(-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=\frac{4t(-1)^n}{n\pi}.$$

Підставивши одержані розклади у відповідне ДРЧП і початкові умови, приходимо до задачі Коші:

(ЗДР) $\quad T_n''+\mu_n{}^2T_n=\dfrac{4t\left(-1^n\right)}{n\pi}\quad (t>0);$

(ПУ) $\quad T_n(0)=0,\quad T_n'(0)=0.$

Знайдемо розв’язок цієї задачі за допомогою характеристичного рівняння:

$$k^2+\mu_n^2=0;\quad k=\pm\mu_n i;\quad \overline{T}_n=C_1\cos\mu_n t+C_2\sin\mu_n t;$$

$$T_{n*}=At+B;\quad T_{n*}'=A;\quad T_{n*}''=0;\quad \mu_n^2(At+B)=\frac{4(-1)^n}{\pi n};$$

$$t:\qquad \mu_n^2A=\frac{4(-1)^n}{\pi n};$$

$$t^0:\qquad \mu_n^2B=0.$$

Звідси $\qquad A=\dfrac{4(-1)^n}{\pi n\mu_n^2};\quad B=0.$

Тоді $\qquad T_n=\overline{T}_n+T_{n*}=C_1\cos\mu_n t+C_2\sin\mu_n t+\dfrac{4(-1)^n t}{\pi n\mu_n^2}.$

З початкових умов знаходимо значення довільних сталих C_1, C_2:

$T_n(0)=0$: $C_1=0$; $\qquad T_n'(0)=0$: $C_2\mu_n+\dfrac{4(-1)^n}{\pi n\mu_n^2}=0$.

Звідси $C_1=0$; $C_2=-\dfrac{4(-1)^n}{\pi n\mu_n^3}$.

Тоді

$$T_n(t)=-\frac{4(-1)^n}{\pi n\mu_n^3}\sin\mu_n t+\frac{4(-1)^n t}{\pi n\mu_n^2}.$$

Отже,

$$\tilde{w}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4(-1)^n}{\pi n\mu_n^3}\sin\mu_n t+\frac{4(-1)^n t}{\pi n\mu_n^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\mu_n t-\sin\mu_n t)}{n\mu_n^3}\sin\frac{n\pi x}{2};$$

$$w(x,t)=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\mu_n}\sin\mu_n t\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\mu_n t-\sin\mu_n t)}{n\mu_n^3}\sin\frac{n\pi x}{2}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\mu_n t-\sin\mu_n t-(-1)^n\sin\mu_n t}{n\mu_n^3}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Тоді

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)=t(2-x)+\frac{4}{\pi}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\mu_n t-\mu_n^2\sin\mu_n t-(-1)^n\sin\mu_n t}{n\mu_n^3}\sin\frac{n\pi x}{2}\ -$$

шуканий розв’язок вхідної крайової задачі.

3.3 Розв'язання другої крайової задачі для одновимірного рівняння теплопровідності методом відокремлення змінних

Розглянемо задачу про поширення тепла в однорідному стержні довжини l, всередині якого відсутні теплові джерела, а бічна поверхня теплоізольована. Припустимо, що початковий розподіл при $t=0$ температури $u(x,t)$ у стержні

$$u(x,0)=\varphi(x) \quad (0<x<l),$$

де $\varphi(x)$ – відома функція, а обидва кінці стержня $x=0$ і $x=l$ теплоізольовані, тобто теплові потоки через них відсутні:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0\,; \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0 \quad (t>0).$$

Математично ця задача формулюється як ***друга крайова задача (задача Неймана) для одновимірного рівняння теплопровідності***:

Знайти розв'язок $u(x,t)$ ДРЧП

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0<x<l;\ t>0), \tag{3.62}$$

який задовольняє початкову умову

$$u(x,0)=\varphi(x) \quad (0<x<l) \tag{3.63}$$

і однорідні граничні умови другого типу

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0 \quad (t>0), \tag{3.64}$$

де $\varphi(x)$ – відома функція; a, l – відомі числа, $a>0$, $l>0$.

На першому етапі розв'язання задачі методом відокремлення змінних шукаємо ненульові розв'язки однорідного рівняння (3.62), які задовольняють однорідні граничні умови (3.64) у вигляді добутку функцій

$$u(x,t)=X(a)T(t). \tag{3.65}$$

Використовуючи відокремлення змінних у рівнянні (3.62) і граничних умовах (3.64) (зробіть це самостійно), отримаємо звичайне диференціальне рівняння для знаходження функції $T(t)$

$$T'(t)-\lambda a^2T(t)=0 \tag{3.66}$$

і крайову задачу Штурма – Ліувілля

$$X''(x)-\lambda X'(x)=0 \quad (0<x<l); \tag{3.67}$$

$$X'(0)=X'(l)=0 \tag{3.68}$$

для знаходження функції $X(x)$ і довільної сталої λ.

Якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, то загальний розв'язок цього рівняння визначається за формулою (3.44):

$$X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x),$$

де A і B – довільні сталі.

Із граничних умов (3.68) маємо:

$X'(0) = 0$: $\quad B = 0$;

$X'(l) = 0$: $\quad -A\beta\sin(\beta l) + B\beta\cos(\beta l) = 0$.

Звідси

$$B = 0; \quad A\sin\beta l = 0.$$

Якщо прийняти, що $A = 0$, то одержимо нульовий розв'язок $X(x) \equiv 0$. Тому треба прийняти

$$\sin\beta l = 0.$$

Розв'язуючи одержане тригонометричне рівняння, знаходимо власні значення:

$$\beta l = \pi n, \quad \beta_n = \frac{\pi n}{l} \quad (n \in Z);$$

$$\lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{3.69}$$

і відповідні їм власні функції:

$$Xn(x) = A_n\cos\frac{\pi n x}{l} \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{3.70}$$

де A_n – довільна стала, відмінна від нуля.

Якщо $\lambda = 0$, то загальний розв'язок рівняння (3.67) визначається формулою (3.46):

$$X(x) = Ax + B,$$

де A і B – довільні сталі.

Граничні умови (3.68) дозволяють знайти тільки довільну сталу A:

$$X'(0) = 0: \quad A = 0;$$

$$X'(l) = 0: \quad A = 0.$$

Звідси

$$X(x) = B.$$

Тоді $.\lambda_0 = 0$ – власне значення; $X_0(x) = A_0$ – відповідна власна функція. Тут A_0 – довільна стала, відмінна від нуля.

Якщо $\lambda=\beta^2>0$, то загальний розв'язок рівняння (3.67) визначається формулою (3.47):

$$X(x)=Ae^{\beta x}+Be^{-\beta x},$$

де A і B – довільні сталі.

Підставляючи його в граничні умови (3.68), отримаємо систему для знаходження A і B:

$$X'(0)=0: \qquad A\beta-B\beta=0;$$

$$X'(l)=0: \qquad A\beta e^{\beta l}-B\beta e^{\beta l}=0.$$

Оскільки $\beta\neq 0$, то одержимо:

$$A=0; \quad B=0.$$

Тобто, при будь-якому значенні $\lambda=\beta^2>0$ крайова задача (3.67), (3.68) має тільки нульовий розв'язок

$$X(x)\equiv 0.$$

Таким чином, об'єднуючи всі можливі випадки λ, маємо послідовність власних значень

$$\lambda_n=-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \quad (n=0,1,2,...) \tag{3.71}$$

і відповідних власних функцій

$$X_n(x)=A_n\cos\frac{\pi n x}{l} \quad (n=0,1,2,...). \tag{3.72}$$

При $\lambda=\lambda_n$ диференціальне рівняння (3.66) набуває такого вигляду:

$$T_n'(t)+\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}T_n(t)=0 \quad (n=0,1,2,...).$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\int\frac{dT_n}{T_n}=-\int\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}dt; \qquad \ln T_n=-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t+\ln C_n;$$

$$T_n=C_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t} \quad (n=0,1,2,...). \tag{3.73}$$

Підставивши функції (3.72) і (3.73) у формулу (3.65), знайдемо послідовність ненульових розв'язків рівняння (3.62), які задовольняють однорідні граничні умови (3.64):

$$u_n(x,t)=a_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t}\cos\frac{\pi n x}{l}, \tag{3.74}$$

де a_n – довільна стала, до того ж сталі A_n і C_n введено до складу a_n.

На другому етапі методу відокремлення змінних будується розв'язок ДРЧП (3.62), який задовольняє як граничні (3.64), так і початкові (3.63) умови. За загальною схемою методу такий розв'язок формується у вигляді функціонального ряду:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t}\cos\frac{\pi n x}{l}. \tag{3.75}$$

Коефіцієнти ряду (3.75) a_n, $n=0,1,2,...$ знаходять за початковою умовою (3.63):

$$u(x,0)=\varphi(x): \qquad \varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi n x}{l}. \tag{3.76}$$

Розглядаючи співвідношення (3.76) як розвинення заданої функції $\varphi(x)$ у ряд Фур'є за косинусами на відрізку $[0;l]$ і користуючись відомими формулами для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є, отримаємо:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx \quad (n=0,1,2,...). \tag{3.77}$$

Отже, розв'язок другої крайової задачі (3.62) – (3.64) записується у вигляді функціонального ряду (3.75), коефіцієнти якого обчислюються за формулою (3.77).

Для випадку першої крайової задачі для одновимірного однорідного рівняння теплопровідності

$$(\text{ДРЧП}) \quad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0<x<l, \quad t>0); \tag{3.78}$$

$$(\text{ПУ}) \quad u(x,0)=\varphi(x) \quad (0<x<l); \tag{3.79}$$

$$(\text{ГУ}) \quad u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 \quad (t>0) \tag{3.80}$$

застосування методу відокремлення змінних дозволяє знайти її розв'язок у вигляді ряду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t}\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{3.81}$$

де

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx. \tag{3.82}$$

Приклад №16. Розв'язати крайову задачу:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0<x<2,\ t>0);$

(ПУ) $u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1; \\ 2-x, & 1\le x<2; \end{cases}$

(ГУ) $u(0,t)=0,\quad u(2,t)=0\quad (t>0).$

Розв'язання. У цій задачі $a^2=1,\ l=2$. Згідно з (3.81) шуканий розв'язок записується у вигляді такого ряду:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{4}t}\sin\frac{\pi n x}{2},$$

де коефіцієнти b_n обчислюються за формулою (3.82):

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx=\int_0^1 x\sin\frac{\pi n x}{2}dx+$$

$$+\int_1^2 (2-x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx=\frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Оскільки

$$\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases} (-1)^m, & n=2m-1,\ m=1,2,...; \\ 0, & n=2m,\ m=1,2,..., \end{cases}$$

то шуканий розв'язок можна подати у вигляді ряду

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2}e^{-\frac{\pi^2(2m-1)^2}{4}t}\sin\frac{\pi(2m-1)x}{2}.$$

3.4 Розв’язання першої крайової задачі для рівняння Лапласа у крузі методом відокремлення змінних. Інтегральна формула Пуассона

Нехай у крузі радіуса ρ_0 з центром у початку координат треба знайти розв’язок $u(\rho,\varphi)$ ***рівняння Лапласа (в полярних координатах)***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \quad \left(0<\varphi<2\pi;\quad 0<\rho<\rho_0\right), \tag{3.83}$$

який задовольняє ***граничну умову***

$$u(\rho_0,\varphi)=g(\varphi) \quad (0<\varphi<2\pi), \tag{3.84}$$

а також ***додаткові умови***:

$u(\rho,\varphi)$ – неперервна функція в крузі $0\le\rho\le\rho_0$;

$u(\rho,\varphi)$ – періодична функція відносно φ з періодом 2π, тобто $u(\rho,\varphi+2\pi)=u(\rho,\varphi)$.

Тут φ – полярний кут; ρ – полярний радіус; $g(\varphi)$ – відома періодична функція періоду 2π.

Розв’язок ***першої крайової задачі (задачі Діріхле) для рівняння Лапласа у крузі*** шукаємо методом відокремлення змінних у вигляді

$$u=R(\rho)\phi(\varphi). \tag{3.85}$$

Підставляючи (3.85) у рівняння Лапласа (3.83), маємо:

$$\phi(\varphi)R''(\rho)+\frac{1}{\rho}\phi(\varphi)R'(\rho)+\frac{1}{\rho^2}\phi''(\varphi)R(\rho)=0;$$

$$\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)}=-\frac{\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=-\lambda,$$

де $\lambda\ge 0$.

Зазначимо, що при $\lambda<0$ розв’язок неперіодичний.

$$\phi''(\varphi)+\lambda\phi(\varphi)=0;\quad \rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0.$$

Якщо $\lambda=0$, то $\phi''(\varphi)=0;\quad \phi(\varphi)=A\varphi+B;$

$$\rho^2R''(\varphi)+\rho R'(\varphi)=0;\quad R'(\rho)=v(\rho);\quad \rho v'+v=0;$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{d\rho}{\rho};\quad \ln v=-\ln\rho+\ln C;\quad v=\frac{C}{\rho};$$

$$R'(\rho)=\frac{C}{\rho};\quad R(\rho)=C\int\frac{d\rho}{\rho};\quad R(\rho)=C\ln\rho+D;$$

$$u_0(\rho,\varphi)=(A\varphi+B)(C\ln\rho+D),$$

де A, B, C, D – довільні сталі.

Оскільки функція $u_0(\rho,\varphi)$ – періодична, то $A=0$. Із неперервності функції $u_0(\rho,\varphi)$ у центрі круга при $\rho=0$ маємо $C=0$.

Отже, $$u_0(\rho,\varphi)=\frac{A_0}{2}, \tag{3.86}$$
де A_0 – довільна стала, в яку введено B і D.

Якщо $\lambda>0$, то

$$\phi''(\varphi)+\lambda\phi(\varphi)=0;\quad k^2+\lambda=0;\quad k=\pm\sqrt{\lambda}i;$$

$$\phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi;$$

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0;\quad R(\rho)=\rho^{\alpha};$$

$$\rho^2\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}+\rho\alpha\rho^{\alpha-1}-\lambda\rho^{\alpha}=0;$$

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha-\lambda=0;\quad \alpha^2-\lambda=0;\quad \alpha=\pm\sqrt{\lambda};\quad R(\rho)=C\rho^{-\sqrt{\lambda}}+D\rho^{\sqrt{\lambda}};$$

$$u(\rho,\varphi)=\left(A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi\right)\left(C\rho^{-\sqrt{\lambda}}+D\rho^{\sqrt{\lambda}}\right),$$

де A, B, C, D – довільні сталі.

Оскільки розв'язок $u(\rho,\varphi)$ неперервний у центрі круга при $\rho=0$, то $C=0$. Тоді

$$u(\rho,\varphi)=\left(a\cos\sqrt{\lambda}\varphi+b\sin\sqrt{\lambda}\varphi\right)\rho^{\sqrt{\lambda}},$$

де a, b – довільні сталі.

Знайдений розв'язок має період $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$. Цей період дорівнює 2π або ціле число разів міститься в 2π тоді і тільки тоді, коли $\sqrt{\lambda}$ – ціле додатне число, тобто

$$\sqrt{\lambda}=n;\ \lambda_n=n^2\quad (n=1,2,...).$$

Отже,

$$u_n(\rho,\varphi)=(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\rho^n. \tag{3.87}$$

Згідно з принципом суперпозиції довільна сума знайдених функцій (3.86), (3,87) і навіть ряд

$$u(\rho,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)\rho^n \tag{3.88}$$

також буде розв'язком рівняння (3.83).

Довільні сталі a_0, a_n, b_n $(n=1,2,...)$ знаходимо з граничної умови (3.84):

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+\ln\sin n\varphi\right)\rho_0^n=g(\varphi);$$

$$g(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\rho_0{}^n\cos n\varphi+b_n\rho_0^n\sin n\varphi\right).$$

Розглядаючи останній вираз, як розклад функцій $g(\varphi)$ в ряд Фур'є і використовуючи формули для коефіцієнтів ряду Фур'є, одержимо:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi; \quad a_n = \frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi d\varphi; \tag{3.89}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin n\varphi d\varphi. \tag{3.90}$$

Знайдений розв'язок (3.88) можна подати в інтегральній формі. Для цього підставимо вирази для коефіцієнтів (3.89) і (3.90) у ряд (3.88). Тоді, використовуючи формулу Ейлера

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

і формулу суми нескінченно спадної геометричної прогресії

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = a_0 \frac{1}{1-x},$$

одержимо:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \times$$

$$\times\int_0^{2\pi} g(\varphi)(\cos n\theta\cos n\varphi + \sin n\theta\sin n\varphi)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{\rho}{\rho_0}e^{i(\varphi-\theta)}\cdot\frac{1}{1-\frac{\rho}{\rho_0}e^{i(\varphi-\theta)}} + \frac{\rho}{\rho_0}e^{-i(\varphi-\theta)}\cdot\frac{1}{1-\frac{\rho}{\rho_0}e^{-i(\varphi-\theta)}}\right)g(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{\rho e^{i(\varphi-\theta)}}{\rho_0 - \rho e^{i(\varphi-\theta)}} + \frac{\rho e^{-i(\varphi-\theta)}}{\rho_0 - \rho e^{-i(\varphi-\theta)}}\right)g(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0^2 - \rho^2}{\rho_0^2 - 2\rho_0\rho\cos(\varphi-\theta) + \rho^2}g(\theta)d\theta.$$

Розв'язок задачі Діріхле (3.83), (3.84) в одержаній формі

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0^2 - \rho^2}{\rho_0^2 - 2\rho_0\rho\cos(\varphi-\theta) + \rho^2}g(\theta)d\theta \tag{3.91}$$

називається ***інтегральною формулою Пуассона***.

Приклад №17. Знайти розподіл електростатичного потенціалу $u(\rho,\varphi)$ на однорідній тонкій круглій пластинці радіуса $\rho_0=1$, якщо потенціал на її межі задається формулою

$$u(1,\varphi)=\cos^2\varphi.$$

Розв'язання. Маємо крайову задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі. Знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \quad (0<\rho<1,\quad 0<\varphi<2\pi),$$

який задовольняє крайову умову

$$u(1,\varphi)=\cos^2\varphi \quad (0<\varphi<2\pi).$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді ряду (3.88). За формулами (3.89), (3.90) знаходимо коефіцієнти ряду:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{4\pi}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi}=1;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi\cdot 1^n}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cos n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\cos n\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\varphi d\varphi+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(2\varphi+n\varphi)+$$

$$+\cos(n\varphi-2\varphi))d\varphi=\frac{\sin n\varphi\Big|_0^{2\pi}}{2n\pi}+\frac{\sin(n+2)\varphi\Big|_0^{2\pi}}{4(n+2)\pi}+$$

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}\varphi\Big|_0^{2\pi}, & n=2;\\ \dfrac{\sin(n-2)\varphi\Big|_0^{2\pi}}{4(n-2)\pi}, & .n\neq 2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & n=2;\\ 0, & .n\neq 2;\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi_0 1^n}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\sin n\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin n\varphi d\varphi+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\sin(n+2)\varphi+\sin(n-2)\varphi)d\varphi=0.$$

Тоді

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2\cos 2\varphi \quad (0<\rho<1,\quad 0<\varphi<2\pi) -$$

шуканий розв'язок.

3.5 Застосування операційного числення для розв'язання задач

Загальна схема розв'язання задач математичної фізики операційним методом	
1	Застосовуючи ***перетворення Лапласа*** по одній з незалежних змінних (як правило, по t), перейти від вихідного ДРЧП до звичайного диференціального ***рівняння-зображення***
2	Розв'язати одержане ***зображуюче рівняння*** за допомогою того чи іншого методу (можна знову застосувати те чи інше перетворення) і знайти зображення шуканого розв'язку
3	За допомогою ***формул обернення*** чи ***таблиць відповідності оригіналів та їх зображень*** перейти від зображення до оригіналу шуканого розв'язку

Приклад №18. Розв'язати крайову задачу для однорідного хвильового рівняння за допомогою операційного методу:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l;\ t > 0);$

(ПУ) $u(x,0) = 0; \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = A_0 \sin \dfrac{\pi x}{l} \quad (0 < x < l);$

(ГУ) $u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0 \qquad (t > 0),$

де $a,\ A_0,\ l$ – відомі величини; $a > 0,\ \ l > 0$.

Розв'язання. Нехай $u(x,t) \doteqdot U(x,p)$. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} \doteqdot \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \doteqdot pU - u(x,0) = pU;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteqdot p^2 U - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = p^2 U - A \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$U(0,p) = 0; \quad U(l,p) = 0.$$

Підставивши одержані вирази в ДРЧП, переходимо до зображувального рівняння:

$$p^2 U - A_0 \sin \frac{\pi x}{l} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{A_0}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Розв'язуємо одержане лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами за допомогою характеристичного рівняння:

$$k^2-\frac{p^2}{a^2}=0;\quad k=\pm\frac{p}{a};\qquad \overline{U}(x,p)=C_1 e^{-\frac{p}{a}x}+C_2 e^{\frac{p}{a}x};$$

$$U_*=A\cos\frac{\pi x}{l}+B\sin\frac{\pi x}{l};\qquad U_*'=-A\frac{\pi}{l}\sin\frac{\pi x}{l}+B\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi x}{l};$$

$$U_*''=-\frac{\pi^2 A}{l^2}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{\pi^2 B}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l};$$

$$-\frac{\pi^2 A}{l^2}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{\pi^2 B}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{p^2 A}{a^2}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{p^2 B}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l}=-\frac{A_0}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l};$$

$$\cos\frac{\pi x}{l}:\qquad -\frac{\pi^2 A}{l^2}-\frac{p^2 A}{a^2}=0;$$

$$\sin\frac{\pi x}{l}:\qquad -\frac{\pi^2 B}{l^2}-\frac{p^2 B}{a^2}=-\frac{A_0}{a^2};$$

$$A=0;\qquad B=\frac{A_0 l^2}{\pi^2 a^2+p^2 l^2};$$

$$U=\overline{U}+U_*=C_1 e^{-\frac{p}{a}x}+C_2 e^{\frac{p}{a}x}+\frac{A_0 l^2}{\pi^2 a^2+p^2 l^2}\sin\frac{\pi x}{l}\ -$$

загальний розв'язок лінійного ЗДР.

Знаходимо значення довільних сталих C_1 і C_2 з граничних умов:

$$U(0,p)=0:\qquad C_1+C_2=0;$$

$$U(l,p)=0:\qquad C_1 e^{-\frac{p}{a}l}+C_2 e^{\frac{p}{a}l}=0;$$

$$C_1=0;\qquad C_2=0.$$

Тоді

$$U(x,p)=\frac{A_0 l^2}{\pi^2 a^2+p^2 l^2}\sin\frac{\pi x}{l}=\frac{A_0}{p^2+(\pi a/l)^2}\sin\frac{\pi x}{l}\ -$$

зображення шуканого розв'язку.

За таблицями відповідності оригіналів та їх зображень знаходимо:

$$U(x,p)=\frac{A_0 l}{\pi a}\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\frac{\frac{\pi a}{l}}{p^2+(\pi a/l)^2}\ \risingdotseq\ u(x,t)=\frac{A_0 l}{\pi a}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi a t}{l}$$

$$(0<x<l,\ t>0).$$

Приклад №19. Операційним методом знайти обмежений розв'язок крайової задачі для однорідного рівняння теплопровідності:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0<x<+\infty;\ t>0);$

(ПУ) $u(x,0)=0\quad (0<x<+\infty);$

(ГУ) $u(0,t)=u_0\delta_0(t)\quad (t>0),$

де $\delta_0(t)$ – одинична імпульсна дельта-функція Дірака; a, u_0 – задані числа, $a>0$.

Розв'язання. Нехай $u(x,t)\risingdotseq U(x,\rho)$. Тоді:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\risingdotseq\frac{\partial U}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\risingdotseq\frac{\partial^2 U}{\partial x^2};\quad \frac{\partial u}{\partial t}\risingdotseq pU-u(x,0)=pU;\quad \delta_0(t)\risingdotseq 1;\quad U(0,p)=u_0.$$

Підставляючи одержані вирази в ДРЧП, переходимо до зображуючого рівняння:

$$pU=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2};\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{p}{a^2}U=0.$$

Розв'язуємо одержане звичайне лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$k^2-\frac{p}{a^2}=0;\quad k=\pm\frac{\sqrt{p}}{a};\quad U=C_1e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+C_2e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Оскільки за умовою задачі функція $U(x,p)$ обмежена при $x\to+\infty$, то $C_2=0$. Тоді $U=C_1e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$.

Значення C_1 знайдемо з граничної умови:

$$U(0,p)=u_0:\qquad C_1=u_0.$$

Отже,

$$U(x,p)=u_0e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\ -$$

зображення шуканого розв'язку.

Використавши таблиці відповідності оригіналів та їх зображень, одержимо:

$$U(x,p)=u_0e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\risingdotseq u_0\cdot\frac{x}{a2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{x^2}{a^2\cdot 4t}}=$$

$$=\frac{u_0x}{2a\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}=u(x,t).\qquad (0<x<+\infty;\ t>0).$$

Приклад №20. Початкова напруга в напівобмеженому нескінченному однорідному провіднику $0 \le x < +\infty$ дорівнює 0. Самоіндукція і втрати через ізоляцію практично відсутні. Активний опір і ємність одиниці довжини провідника відповідно дорівнюють R і C. Починаючи з моменту часу $t = 0$ до кінця $x = 0$ провідника прикладена стала електрорушійна сила E_0. Знайти напругу $u(x,t)$ в кожній точці провідника в довільний момент часу.

Розв'язання. Напруга $u(x,t)$ задовольняє телеграфне рівняння (2.9). Оскільки самоіндукція і втрати через ізоляцію практично відсутні, тобто $L = 0$ і $G = 0$, то це рівняння набуває такого вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{де} \quad a^2 = \frac{1}{CR}.$$

Таким чином, маємо крайову задачу:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < +\infty; \ t > 0);$

(ПУ) $u(x,0) = 0 \quad (0 < x < +\infty);$

(ГУ) $u(0,t) = E_0 \quad (t > 0).$

Для розв'язання поставленої задачі застосуємо операційний метод. Нехай $u(x,t) \fallingdotseq U(x,p)$. Тоді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \fallingdotseq \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \fallingdotseq pU - u(x,0) = pU; \quad E_0 \fallingdotseq \frac{E_0}{p}; \quad U(0,p) = \frac{E_0}{p}.$$

Переходимо до зображувального рівняння: $pU = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

Його розв`язок $U = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$.

З фізичних міркувань випливає, що $U(x,p) \to 0$ при $x \to +\infty$, тому $C_2 = 0.$ Отже,

$$U = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Значення сталої C_1 знайдемо з граничної умови: $U(0,p) = \dfrac{E_0}{p}$: $C_1 = \dfrac{E_0}{p}$.

Отже, шуканий розв'язок:

$$u(x,t) = E_0\left(1 - \phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right) \quad (0 < x < +\infty; \ t > 0),$$

де $\phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-x^2} dx$ – інтеграл похибок.

3.6 Розв’язування задач математичної фізики числовим методом сіток

Розглянемо лінійне ДРЧП другого порядку (1.5)

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Gu=F \qquad (3.92)$$

у деякій плоскій області $\tilde{D}$ координатної площини Oxy (рис. 3.4).

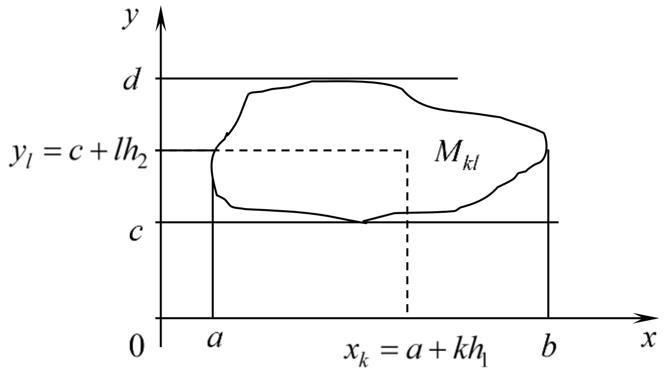

Рисунок 3.4

Нехай $[a;b]$ і $[c;d]$ – проєкції області $\tilde{D}$ на осі Ox і Oy; h_1 і h_2 – достатньо малі додатні числа; $M_{kl}(x_k;y_l)$ $k,l=0,1,2,...$ – множина точок області $\tilde{D}$, які слугують вузлами ***прямокутної сітки***, утвореної прямими $x_k=a+kh_1$, $y_l=c+lh_2$; $k,l=0,1,2,...$ і накладеної на область $\tilde{D}$.

Числове розв’язання рівняння (3.92) в області $\tilde{D}$ методом сіток полягає в знаходженні чисел u_{kl} (значень u_{kl} сіточної функції), які наближено дорівнюють відповідним значенням шуканої функції $u=u(x,y)$ у вузлах сітки $M_{kl}\in\tilde{D}$: $u_{kl}=u(x_k,y_l)$.

Згідно з означенням частинних похідних,

$$\frac{\partial u(M_{kl})}{\partial x}=\lim_{h_1\to 0}\frac{u(x_{k+1},y_l)-u(x_k,y_l)}{h_1};\quad \frac{\partial u(M_{k\ell})}{\partial x}=\lim_{h_2\to 0}\frac{u(x_k,y_{l+1})-u(x_k,y_l)}{h_2}.$$

Для малих значень h_1 і h_2 одержимо ***скінченно-різницеву апроксимацію частинних похідних***:

$$\frac{\partial u(M_{kl})}{\partial x}\approx\frac{u_{k+1,l}-u_{kl}}{h_1};\quad \frac{\partial u(M_{kl})}{\partial y}\approx\frac{u_{k,l+1}-u_{kl}}{h_2}.$$

Аналогічно можна отримати ***скінченно-різницеву апроксимацію других частинних похідних***:

$$\frac{\partial^2 u(M_{kl})}{\partial x^2}\approx\frac{u_{k+1,l}-2u_{kl}+u_{k-1,l}}{h_1^2};\quad \frac{\partial^2 u(M_{kl})}{\partial y^2}\approx\frac{u_{k,l+1}-2u_{kl}+u_{k,l-1}}{h_2^2};$$

$$\frac{\partial^2 u(M_{kl})}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{k+1,l+1} - u_{k+1,l} - u_{k,l+1} + u_{kl}}{h_1 h_2}.$$

Приймаючи зазначені наближення, можна вважати, що числа u_{kl} задовольняють систему алгебраїчних рівнянь, одержаних при підстановці в диференціальне рівняння (3.92) замість u невідомих u_{kl}, а замість частинних похідних – їх скінченно-різницевих апроксимацій. При цьому функції-коефіцієнти A, B, C, D, E, G, F потрібно розглядати в точках $M_{kl}(x_k; y_l)$.

У конкретних задачах математичної фізики необхідно знайти розв'язок ДРЧП (3.92) при виконанні деяких додаткових умов, які задовольняє шукана функція на межі області $\tilde{D}$. Доцільно вважати, що значення u_{kl} для точок $M_{kl}(x_k; y_l)$, які належать межі області $\tilde{D}$, підкоряються цим граничним умовам.

Таким чином, числове розв'язання крайової задачі методом сіток зводиться до розв'язання деякої системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих u_{kl}, до того ж значення u_{kl} в точках межі області $\tilde{D}$ підкоряються граничним умовам. Очевидно: *чим більш густа сітка, тим точніший числовий розв'язок*.

Приклад №21. Поставлено крайову задачу Діріхле для однорідного рівняння Лапласа в прямокутнику:

(ДРЧП) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \left((x; y) \in \tilde{D};\ \tilde{D}:\ 0 < x < \alpha;\ 0 < y < \beta;\ \alpha = mh;\ \beta = nh\right);$

(ГУ) $\quad u\big|_S = g(x, y) = x - y,$

де S – межа області $\tilde{D}$; h – задане дійсне додатне число; m, n – задані цілі додатні числа.

Необхідно побудувати скінченно-різницеву апроксимацію цієї ***диференціальної крайової задачі*** і розв'язати одержану ***сіточну крайову задачу*** при $h = 0{,}1;\ \ m = 3;\ \ n = 3$.

Розв'язання. Зазначимо, що поставлена диференціальна крайова задача має до того ж єдиний розв`язок.

Нехай $h_1 = h_2 = h;\ \ M_{kl}(x_k; y_l);\ \ x_k = a + kh;\ \ y_l = c + lh;\ \ k = 0,1,2,...,m,$ $l = 0,1,2,...,n$. Вхідній крайовій задачі відповідає така система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих u_{kl}:

$$u_{k-1,l}+u_{k,l-1}+u_{k+1,l}+u_{k,l+1}-4u_{kl}=0$$

$$\left(k=1,2,\ldots,\ m-1;\ \ l=1,2,\ldots,\ n-1\right); \tag{3.93}$$

$$u_{0l}=f\left(0,hl\right) \qquad \left(l=1,2,\ldots,\ n-1\right); \tag{3.94}$$

$$u_{kn}=f\left(kh;nh\right) \qquad \left(k=1,2,\ldots,\ m-1\right); \tag{3.95}$$

$$u_{ml}=f\left(mh;lh\right) \qquad \left(l=1,2,\ldots,\ n-1\right); \tag{3.96}$$

$$u_{k0}=f\left(kh;0\right) \qquad \left(k=1,2,\ldots,\ m-1\right). \tag{3.97}$$

Сіточна крайова задача включає $(m+1)(n+1)-4$ рівнянь (3.93)–(3.97): $(m-1)(n-1)$ рівнянь (3.93), що апроксимують ДРЧП, і $2(m+n)-4$ рівнянь (3.94)–(3.97), що апроксимують ГУ. Рівняння (3.94)–(3.97) визначають значення змінних u_{kl} на межі області $\widetilde{D}$. Якщо підставити ці значення в (3.93), то одержимо квадратну систему з $(m-1)(n-1)$ неоднорідних лінійних рівнянь з $(m-1)(n-1)$ невідомими u_{kl} ($k=1,2,\ldots,\ m-1;\quad l=1,2,\ldots,\ n-1$).

Цю лінійну алгебраїчну систему можна подати в стандартній матричній формі

$$AU=B, \tag{3.98}$$

де U – матриця-стовпець невідомих; B – матриця-стовпець вільних членів; A – квадратна матриця коефіцієнтів системи. Елементами матриці U слугують числа u_{kl}, які відповідають внутрішнім точкам M_{kl} області $\widetilde{D}$; елементами матриці B – числа u_{kl}, які відповідають точкам межі області $\widetilde{D}$.

Випишемо і розв'яжемо сіточну крайову задачу для заданих конкретних значень: $h=0{,}1;\ m=3;\ n=3$. У цьому випадку (рис. 3.5) внутрішніми точками є $M_{11}(x_1;y_1)$, $M_{12}(x_1;y_2)$, $M_{21}(x_2;y_1)$, $M_{22}(x_2;y_2)$ і система алгебраїчних рівнянь (3.93) – (3.97) має такий вигляд:

$$AU=B, \tag{3.99}$$

де

$$F=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} -\frac{u_{01}+u_{10}}{4} \\ -\frac{u_{02}+u_{13}}{4} \\ -\frac{u_{20}+u_{31}}{4} \\ -\frac{u_{23}+u_{32}}{4} \end{pmatrix};\ U=\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}.$$

Значення $u_{10}, u_{20}, u_{31}, u_{32}, u_{23}, u_{13}, u_{02}, u_{01}$ співпадають із заданими значеннями функції $g(x,y)=x-y$ на межі S області $\widetilde{D}$:

$$x_k=0{,}1k;\quad y_e=0{,}1l;$$

$$u_{10}=g(x_1,y_0)=0{,}1\cdot 1-0{,}1\cdot 0=0{,}1;\quad u_{20}=g(x_2,y_0)=0{,}1\cdot 2-0{,}1\cdot 0=0{,}2;$$

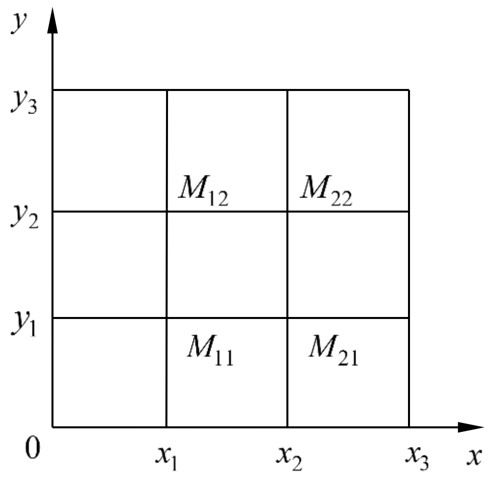

Рисунок 3.5

$$u_{31}=g(x_3,y_1)=0{,}1\cdot 3-0{,}1\cdot 1=0{,}2;\quad u_{32}=g(x_3,y_2)=0{,}1\cdot 3-0{,}1\cdot 2=0{,}1;$$

$$u_{23}=g(x_2,y_3)=0{,}1\cdot 2-0{,}1\cdot 3=-0{,}1;\quad u_{13}=g(x_1,y_3)=0{,}1\cdot 1-0{,}1\cdot 3=-0{,}2;$$

$$u_{01}=g(x_0;y_1)=0{,}1\cdot 0-0{,}1\cdot 1=-0{,}1;\quad u_{02}=g(x_0,y_2)=0{,}1\cdot 0-0{,}1\cdot 2=-0{,}2.$$

Тоді

$$B=\begin{pmatrix}-(-0{,}1+0{,}1)/4\\ -(0{,}2+(-0{,}2))/4\\ -(0{,}2+0{,}2)/4\\ -(-0{,}1+0{,}1)/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0{,}2\\ -0{,}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

На практиці система (3.98) має велику розмірність і, як правило, розв'язується за допомогою того чи іншого ітераційного методу на комп'ютері. У цьому модельному випадку систему (3.99) невисокого – четвертого – порядку будемо розв'язувати за допомогою прямого методу – ***методу виключення Гауса***:

1. Прямий хід:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0\\ 0{,}25 & -1 & 0 & 0{,}25 & 0{,}1\\ 0{,}25 & 0 & -1 & 0{,}25 & -0{,}1\\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & -1 & 0\end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l}S_2'=S_2+0{,}25S_1;\\ S_3'=S_3+0{,}25S_1\end{array}\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0\\ 0 & -0{,}9375 & 0{,}0625 & 0{,}25 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}0625 & -0{,}9275 & 0{,}25 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & -1 & 0\end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l}S_2'=S_4;\\ S_4'=S_2\end{array}\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & -1 & 0\\ 0 & 0{,}0625 & -0{,}9325 & 0{,}25 & -0{,}1\\ 0 & -0{,}9375 & 0{,}0625 & 0{,}25 & 0{,}1\end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l}S_3'=S_3-0{,}25S_2;\\ S_4'=S_4+3{,}75S_2\end{array}\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0{,}5 & -0{,}1\\ 0 & 0 & 1 & -3{,}5 & 0{,}1\end{array}\right)\sim\left|S_4'=S_4+S_3\right|\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0{,}5 & -0{,}1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0\end{array}\right).$$

2. Зворотний хід:

$$\begin{cases}-u_{11}+0{,}25u_{12}+0{,}25u_{21}=0;\\ 0{,}25u_{12}+0{,}25u_{21}-u_{22}=0;\\ -u_{21}+0{,}5u_{22}=-0{,}1;\\ -3u_{22}=0;\end{cases}\quad u_{22}=0;$$

$$u_{21}=0{,}5u_{22}+0{,}1=0{,}1;\quad u_{12}=(u_{22}-0{,}25u_{21})/0{,}25=-0{,}1;$$

$$u_{11}=0{,}25u_{12}+0{,}25u_{21}=-0{,}025+0{,}025=0.$$

Отже, $u_{11}=0$; $u_{12}=-0{,}1$; $u_{21}=0{,}1$; $u_{22}=0$ – шукані значення u_{kl} функції $u=u(x,t)$ у внутрішніх вузлах сітки M_{kl} ($k=1,2,...,m-1$; $l=1,2,...,n-1$).

Розглянуті в цьому розділі методи не вичерпують усіх відомих способів розв’язання задач математичної фізики. Перелічимо деякі найбільш вживані методи:

1. Метод відокремлення змінних.
2. Метод характеристик.
3. Метод інтегральних перетворень (зокрема, застосування перетворення Лапласа – операційний метод).
4. Метод перетворення координат.
5. Метод заміни незалежних і залежних змінних.
6. Метод функцій Гріна (функцій впливу (джерела)).
7. Метод інтегральних рівнянь.
8. Варіаційні методи (замість крайової задачі для ДРЧП розв’язується деяка задача оптимізації).
9. Числові методи (метод сіток, апроксимація сплайнами, метод скінчених елементів тощо).

Вправи для самостійної роботи

1. Розв’язати за методом характеристик такі початкові задачі (задачі Коші) для одновимірного однорідного хвильового рівняння:

2. Розв’язати за методом відокремлення змінних такі задачі для одновимірного однорідного хвильового рівняння з однорідними граничними умовами змішаного типу:
2.1. Розв’язати змішану крайову задачу: (ДРЧП) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 2,\ t > 0);$ (ПУ) $u(x,0) = x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin\frac{\pi x}{4} \quad (0 < x < 2);$ (ГУ) $u(x,0) = 0; \quad \frac{\partial u(2,t)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0).$ 2.2. Розв’язати змішану крайову задачу: (ДРЧП) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 2,\ t > 0);$ (ПУ) $u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{4}; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos\frac{5\pi x}{4} \quad (0 < x < 2);$ (ГУ) $\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = 0; \quad u(2,t) = 0 \quad (t > 0).$ 2.3. Розв’язати змішану крайову задачу: (ДРЧП) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1,\ t > 0);$ (ПУ) $u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2}; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (0 < x < 1);$ (ГУ) $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0).$
3. Розв’язати за методом відокремлення змінних такі задачі для одновимірного однорідного рівняння теплопровідності з однорідними граничними умовами змішаного типу:

3.1. Розв'язати змішану крайову задачу:

(ДРЧП) $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1,\ t > 0);$

(ПУ) $u(x,0) = x^2 \quad (0 < x < 1);$

(ГУ) $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0; \quad u(1,t) = 0 \quad (t > 0).$

3.2. Розв'язати змішану крайову задачу:

(ДРЧП) $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 2,\ t > 0);$

(ПУ) $u(x,0) = \cos\frac{\pi x}{4} \quad (0 < x < 2);$

(ГУ) $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u(2,t)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0).$

4. Використовуючи принцип суперпозиції та метод розкладання за власними функціями, розв'язати такі змішані крайові задачі для одновимірного хвильового рівняння:

4.1.

(ДРЧП) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} \quad (0 < x < 2,\ t > 0);$

(ПУ) $u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (0 < x < 2);$

(ГУ) $u(0,t) = 0; \quad u(2,t) = 0 \quad (t > 0).$

4.2.

(ДРЧП) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos t \quad (0 < x < 1,\ t > 0);$

(ПУ) $u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (0 < x < 1);$

(ГУ) $u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0).$

4.3.

(ДРЧП) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin\frac{\pi x}{4} \quad (0 < x < 2,\ t > 0);$

(ПУ) $u(x,0) = 0; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (0 < x < 2);$

(ГУ) $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x}=0;\quad u(2,t)=0.\quad (t>0).$ 4.4. (ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0<x<\pi,\ \ t>0);$ (ПУ) $u(x,0)=\sin 2x;\quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0\quad (0<x<\pi);$ (ГУ) $u(0,t)=e^{-t};\quad u(\pi,t)=0\quad (t>0).$ 4.5. (ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0<x<\pi,\ \ t>0);$ (ПУ) $u(x,0)=\sin x,\quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0\quad (0<x<\pi);$ (ГУ) $u(0,t)=0;\quad u(\pi,t)=t^3\quad (t>0).$
5. Використовуючи принцип суперпозиції та метод відокремлення змінних, розв’язати задачу.
Знайти розподіл напруги $u(x,t)$ в однорідному електричному провіднику завдовжки l при відсутності втрат ($R=0,\ G=0$), якщо до лівого кінця $x=0$ з початкового моменту часу $t=0$ підімкнена електрорушійна сила $E_0\sin\omega t$: $u(0,t)=E_0\sin\omega t,$ а правий кінець $x=l$ заземлений: $u(l,t)=0.$ Початкова напруга і початкова сила струму дорівнюють нулю: $u(x,0)=0;\quad i(x,0)=0.$ Індуктивність і ємність одиниці довжини провідника, відповідно, L і C. Вказівка. Розв’язок потрібно шукати у вигляді $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t),$ де $v(x,t)$ – розв`язок крайової задачі: (ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\dfrac{1}{LC}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\quad (0<x<l,\ \ t>0);$ (ПУ) $v(x,0)=0;\quad \dfrac{\partial v(x,0)}{\partial t}=0\quad (0<x<l);$ (ГУ) $v(0,t)=E_0\sin\omega t;\quad v(l,t)=0\quad (t>0).$

Приймемо, що $v(x,t)=z(x)\sin\omega t$, де $z(x)$ є розв'язком крайової задачі для звичайного диференціального рівняння:

(ЗДР) $\dfrac{d^2z}{dx^2}+LC\omega^2z=0 \quad (0<x<l);$

(ГУ) $z(0)=E_0, \quad z(l)=0 \quad (t>0).$

Тоді функція $w(x,t)$ є розв'язком крайової задачі для хвильового рівняння з однорідними граничними умовами:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\dfrac{1}{LC}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (0<x<l, \ t>0);$

(ПУ) $w(x,0)=0; \quad \dfrac{\partial w(x,0)}{\partial t}=0 \quad (0<x<l);$

(ГУ) $w(0,t)=0, \quad w(l,t)=0 \quad (t>0).$

6. Використовуючи метод відокремлення змінних, розв'язати крайову задачу Діріхле для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}=0$$

у крузі $0<\rho<\rho_0$ при таких граничних умовах:

6.1. $u(\rho_0,\varphi)=1+\sin\varphi+\cos 3\varphi.$

6.2. $u(\rho_0,\varphi)=\varphi(2\pi-\varphi).$

6.3. $u(\rho_0,\varphi)=\varphi\cos\varphi.$

7. Використовуючи метод відокремлення змінних, розв'язати задачу.

Знайти розподіл потенціалу електростатичного поля $u(x,y)$ всередині прямокутника $\tilde{D}: 0\le x\le a; \ 0\le y\le b,$ якщо вздовж сторони $x=0 \ (0<y<b)$ потенціал дорівнює u_0:

$$u(0,y)=u_0 \quad (0<y<b),$$

а три інші сторони заземлені:

$$u(x,0)=0, \quad u(x,b)=0 \quad (0<x<a); \quad u(a,y)=0 \quad (0<y<b).$$

Електричні заряди всередині прямокутника відсутні.

Вказівка. Шукана функція $u(x,y)=X(x)Y(y).$ є розв'язком крайової задачі Діріхле для рівняння Лапласа:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (0<x<a; \ 0<y<b);$

(ГУ) $u(x,0)=0, \quad u(x,b)=0 \quad (0<x<a);$

$$u(0,y)=u_0,\quad u(a,y)=0\quad (0<y<b).$$

8. Розв’язати за операційним методом такі задачі Коші:

8.1.

(ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{1}{x^2+b^2}\quad (-\infty<x<+\infty;\ t>0);$

(ПУ) $u(x,0)=0,\quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0\quad (-\infty<x<+\infty).$

8.2.

(ДРЧП) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+1\quad (-\infty<x<+\infty;\ t>0);$

(ПУ) $u(x,0)=0\quad (-\infty<x<+\infty).$

8.3.

(ДРЧП) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (-\infty<x<+\infty;\ t>0);$

(ПУ) $u(x,0)=0\quad (-\infty<x<+\infty).$

9. Розв’язати за операційним методом такі змішані крайові задачі.

9.1.

(ДРЧП) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0<x<+\infty;\ t>0);$

(ПУ) $u(x,0)=0\quad (0<x<+\infty);$

(ГУ) $u(0,t)=u_0\sqrt{t/\pi};\quad \lim\limits_{x\to+\infty}u(x,t)=0\quad (t>0).$

9.2.

(ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0<x<2;\ t>0);$

(ПУ) $u(x,0)=u_0\sin\dfrac{3\pi x}{2};\quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0\quad (0<x<2);$

(ГУ) $u(0,t)=0;\quad u(2,t)=0\quad (t>0).$

9.3.

(ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0<x<1;\ t>0);$

(ПУ) $u(x,0)=0,\quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=B_0\sin 3\pi x\quad (0<x<1);$

(ГУ) $u(0,t)=0;\quad u(1,t)=0\quad (t>0).$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бізюк В. В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків : навч. посіб. / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. – Харків : ХНАМГ, 2008. – 300 с.

2. Бізюк В. В. Елементи операційного числення : конспект лекцій для студентів першого курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка [Електрон. ресурс] / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/57508/, вільний (дата звернення:12.08.2024). – Назва з екрана.

3. Бойко Б. Т. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. / Б. Т. Бойко, Л. В. Курпа, Ю. Ф. Сенчук. – Харків : НТУ «ХПІ», 2001. – 288 с.

4. Бондаренко В. Г. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. / В. Г. Бондаренко. – Київ : КПІ ім. І. Сікорського, 2018. – 100 с.

5. Курпа Л. В. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. / Л. В. Курпа, Г. Б. Лінник. – Харків : Підручник НТУ «ХПІ», 2011. – 312 с.

6. Юрачківський А. П. Математична фізика в прикладах і задачах : навч. посіб. / А. П. Юрачківський, А. Я. Жугаєвич. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2005. – 157 с.

Електронне довідкове видання

БІЗЮК Валерій Васильович
ЯКУНІН Анатолій Вікторович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ В СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ

НАВЧАЛЬНИЙ ДОВІДНИК

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти усіх форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *О. А. Норик*
Комп'ютерне верстання *В. В. Бізюк, А. В. Якунін*

План 2023, поз. 1Д

Підп. до друку 26.08.2024 . Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 4,9.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська (Маршала Бажанова), 17,
Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.