

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**Ю. М. Яровий, Т. М. Альошечкіна, В. В. Виноградов**

**ОПР МАТЕРІАЛІВ. БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
денної форми навчання  
зі спеціальності 191 – Архітектура та містобудування)*

**Харків**  
**ХНУМГ ім. О. М. Бекетова**  
**2024**

УДК 624.04 (07)

**Яровий Ю. М.** Опір матеріалів. Будівельна механіка : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної форми навчання зі спеціальності 191 – Архітектура та містобудування / Ю. М. Яровий, Т. М. Альошечкіна, В. В. Виноградов ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 112 с.

Автори:

канд. техн. наук, проф. Ю. М. Яровий,  
ст. викл. Т. М. Альошечкіна,  
канд. техн. наук, ст. викл. В. В. Виноградов

Рецензент

**С. М. Яровий**, доктор технічних наук, доцент, професор кафедри будівельного проектування (Харківський національний університет міського господарства ім. О. М. Бекетова)

*Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки, протокол № 9 від 19 червня 2024 р.*

© Ю. М. Яровий, Т. М. Альошечкіна,  
В. В. Виноградов, 2024  
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 НАУКА ПРО ОПІР МАТЕРІАЛІВ. СПОРУДИ ТА ЇХНІ ЕЛЕМЕНТИ. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗОВНІШНІХ СИЛ. ТИПИ ОПОР.....	7
1.1 Наука про опір матеріалів .....	7
1.2 Споруди та їхні елементи .....	7
1.3 Класифікація зовнішніх сил.....	13
1.4 Типи опор. Визначення опорних реакцій .....	14
2 НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КОНСТРУКЦІЙ .....	17
2.1 Види деформацій.....	17
2.2 Основні гіпотези.....	19
2.3 Внутрішні силові фактори. Метод перерізів .....	22
2.4 Поняття про напруження. Закон парності дотичних напружень .....	24
3 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ .....	26
3.1 Статичний момент інерції. Центр ваги .....	26
3.2 Моменти інерції плоского перерізу.....	28
3.3 Момент опору .....	30
3.4 Моменти інерції для паралельних осей .....	32
3.5 Момент інерції плоскої фігури за умови повороту осей.....	34
3.6 Головні осі і головні моменти інерції .....	36
4 ЕПЮРИ ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ. ПІДБІР ПЕРЕРІЗІВ.....	37
4.1 Епюри внутрішніх зусиль.....	37
4.2 Побудова епюр $M$ , $Q$ в балках при плоскому згині.....	38
4.3 Диференціальні залежності при згині .....	43
4.4 Правила перевірки правильності побудови епюр.....	45
4.5 Визначення нормальних напружень при згині балки .....	46
4.6 Визначення дотичних напружень при плоскому згині .....	51
5 КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ.....	55
5.1 Кінематичний аналіз. Основні визначення.....	55
5.2 Розрахунок стержневих систем на нерухомі навантаження. Консольно-балочні стержневі системи.....	61
5.3 Тришарнірні рами. Визначення зусиль у тришарнірних рамах .....	63
5.4 Розрахунок плоских ферм .....	70

6 ВИЗНАЧЕННЯ КУТОВИХ ТА ЛІНІЙНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ У СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМАХ .....	85
6.1 Основні поняття та визначення .....	85
6.2 Диференційне рівняння зігнутої осі балки .....	86
6.3 Робота зовнішніх сил. Потенційна енергія.....	88
6.4 Універсальна формула Мора. Спосіб Верещагіна для визначення переміщень лінійних та кутових у статично визначуваних балках та рамах.....	92
7 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ .....	99
7.1 Основні поняття.....	99
7.2 Формула Ейлера для визначення критичної сили .....	101
7.3 Гнучкість. Межа застосування формули Ейлера .....	104
7.4 Формула Ф. Ясинського .....	107
7.5 Умови стійкості.....	109
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	111

## ВСТУП

Основна мета вивчення навчальної дисципліни «Опір матеріалів. Будівельна механіка» полягає у наданні студентів базових знань щодо загальних законів статички; додаткової широти інженерних знань, зв'язаних із дисциплінами «Опір матеріалів» та «Будівельна механіка», навчанні правильно обирати матеріали та конструктивні форми, які забезпечуватимуть надійність та довговічність конструкцій за дотримання певного рівня економічності, правильно обирати розрахункові схеми, у виконанні розрахунків типових елементів конструкцій, порівнянні варіантів, знаходженні оптимальних рішень інженерних завдань.

Будь-яка інженерна споруда повинна бути міцною, жорсткою і стійкою. Споруда буде міцною, якщо вона здатна, не руйнуючись, сприймати навантаження, що діють на неї, протягом тривалого часу. Споруда є жорсткою, якщо максимальні її переміщення не перевищують нормативних значень. Споруда є стійкою, за умови, що вона не змінює початкову форму. Для вирішення завдання забезпечення міцності, жорсткості і стійкості елементів необхідно знати фізико-механічні властивості матеріалів споруди, із яких вона виконана. Також мають бути визначення навантаження та впливів, що прикладено до споруди. Наступним кроком є визначення внутрішніх зусиль, що виникають між окремими частинками тіла. Потім потрібно визначити, за яким законом вони розподіляються в тілі конструкцій і в яких місцях досягають екстремальних значень. Аналізуючи отримані результати, визначають розміри частин споруд, за умови, що внутрішні зусилля менші за граничні, що регламентуються нормами.

Будівельна механіка – наука, що вивчає інженерні методи розрахунку будівельних конструкцій. Опір матеріалів – дисципліна, у якій вивчаються головні поняття і принципи, що використовуються в розрахунках. В опорі матеріалів розглядаються лише розрахунки окремих елементів конструкцій, таких як, наприклад, балка, стержень та найпростіші складені з них системи. Опір матеріалів ґрунтується на теоретичних та експериментальних даних. Теоретичним шляхом отримують основні розрахункові формули, що застосовуються під час розрахунків конструкцій, а в ході експериментальних

досліджень визначають головні фізико-механічні характеристики матеріалів, перевіряють висновки теорії.

В опорі матеріалів використовуються основні положення таких дисциплін: фізика, математика; теоретична механіка. В опорі матеріалів тіло розглядається як тверде, пружне, що зазнає деформацій при навантаженнях.

Внаслідок вивчення дисципліни студент повинен знати основні закони моделювання явищ, пов'язаних зі спеціальністю, методи дослідження механічних явищ, вид і характер навантажень, характер поведінки різних видів матеріалів та їхні механічні характеристики, перехід від реальної конструкції до її розрахункової схеми, види деформацій пружних систем. Студент повинен вміти виконувати розрахунок на міцність та жорсткість для окремих видів деформації та підбирати необхідні розміри перерізів, для стиснутого стержня виконувати розрахунок на стійкість, виразно уявляти функціональний зв'язок між зовнішніми силами і законами розподілу внутрішніх сил в елементах конструкції, аналізувати причини появи та розвитку можливих ушкоджень та визначати чинники руйнування матеріалів. Студенту необхідно ознайомитись з експериментальними методами та засобами вивчення роботи різних матеріалів конструкцій під дією зовнішнього навантаження, визначенням фізичних характеристик матеріалів. Знання цих методів дає уявлення про роботу окремих конструкцій в споруді, що дозволяє з професійним підходом проектувати складні архітектурні елементи.

Конспект лекцій з дисципліни «Опір матеріалів. Будівельна механіка» для студентів спеціальності 191 – Архітектура та містобудування укладено відповідно до робочої програми дисципліни. Конспект лекцій складається з семи розділів, що включають основні теми занять навчальної дисципліни «Опір матеріалів. Будівельна механіка». На вивчення навчальної дисципліни відводиться в загальній кількості 90 годин / 3 кредити ECTS.

# 1 НАУКА ПРО ОПІР МАТЕРІАЛІВ. СПОРУДИ ТА ЇХНІ ЕЛЕМЕНТИ. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗОВНІШНІХ СИЛ. ТИПИ ОПОР

## 1.1 Наука про опір матеріалів

**Опір матеріалів** – наука про методи розрахунку елементів споруд на міцність, жорсткість, стійкість і витривалість за умов дії на них статичних (статика споруд) і динамічних (динаміка споруд) навантажень та за одночасного задоволення умов надійності, економічності та довговічності споруд.

Курс опір матеріалів базується на таких дисциплінах: теоретична механіка, фізика, математика. Опір матеріалів є теоретичною і прикладною наукою. З одного боку, вона розробляє теоретичні основи методів розрахунку, а з іншого боку, є інструментом розрахунку, тому що вирішує важливі практичні завдання, пов'язані з міцністю, жорсткістю й стійкістю споруд.

Дія навантажень приводить як до деформування окремих елементів, так і самої споруди в цілому. Розрахунком і теоретичною оцінкою результатів їхньої дії займається **механіка деформованого твердого тіла**. Частиною цієї науки є опір матеріалів, що займається розрахунком найпростіших споруджень або їхніх окремих елементів. Інша її частина – будівельна механіка – вже дозволяє розраховувати різні й достатньо складні багатоелементні споруди. У механіці деформованого твердого тіла широко використовуються методи теоретичної механіки, яка вивчає рівновагу й рух твердих тіл, умовно прийнятих за абсолютно тверді.

## 1.2 Споруди та їхні елементи

**Споруди та їхні елементи.** Споруди є дуже різноманітними, тому їх можна класифікувати по-різному. Наприклад, тільки за призначенням споруди

поділяються на промислові, громадські, житлові, транспортні, гідротехнічні, підземні, сільськогосподарські, військові та ін.

У спорудах використовуються елементи різних типів, перелік яких наведено нижче.

**Стержень** – прямі або криволінійні елементи, у яких розміри поперечного перетину  $b$  або  $h$  значно менше його довжини  $l$  (рис. 1.1).

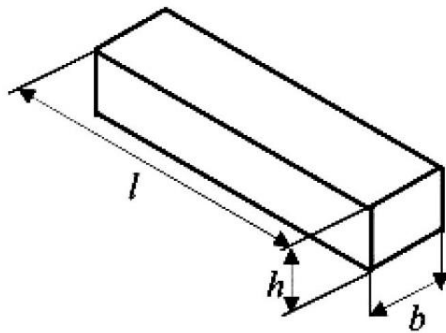


Рисунок 1.1 – Стержень

**Оболонка** – тіло, у якого товщина значно менше інших розмірів (рис. 1.2).

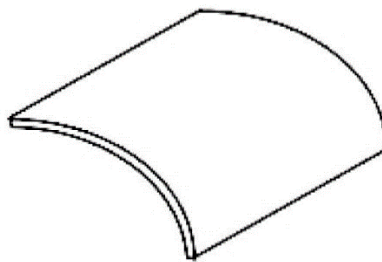


Рисунок 1.2 – Оболонка

**Пластина** – це оболонка, у якої серединною поверхнею є площина (рис. 1.3).

Серединна поверхня – це геометричне місце точок, рівновіддалених від зовнішньої і внутрішньої поверхонь оболонки.



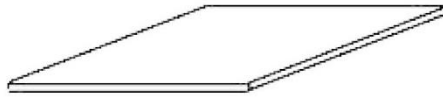


Рисунок 1.3 – Пластина

**Масивне тіло** – це тіло, у якого всі три розміри одного порядку.

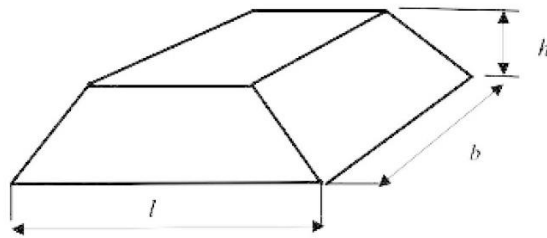


Рисунок 1.4 – Масивне тіло

Споруди, що складаються з таких елементів, можна підрозділяти на такі типи – стержневі споруди (рис. 1.5 а, б), складчасті споруди (рис. 1.5, в), оболонки (рис. 1.5, г) і масивні споруди – підпірні стінки (рис. 1.5, д) і кам'яні склепіння (рис. 1.5, е).

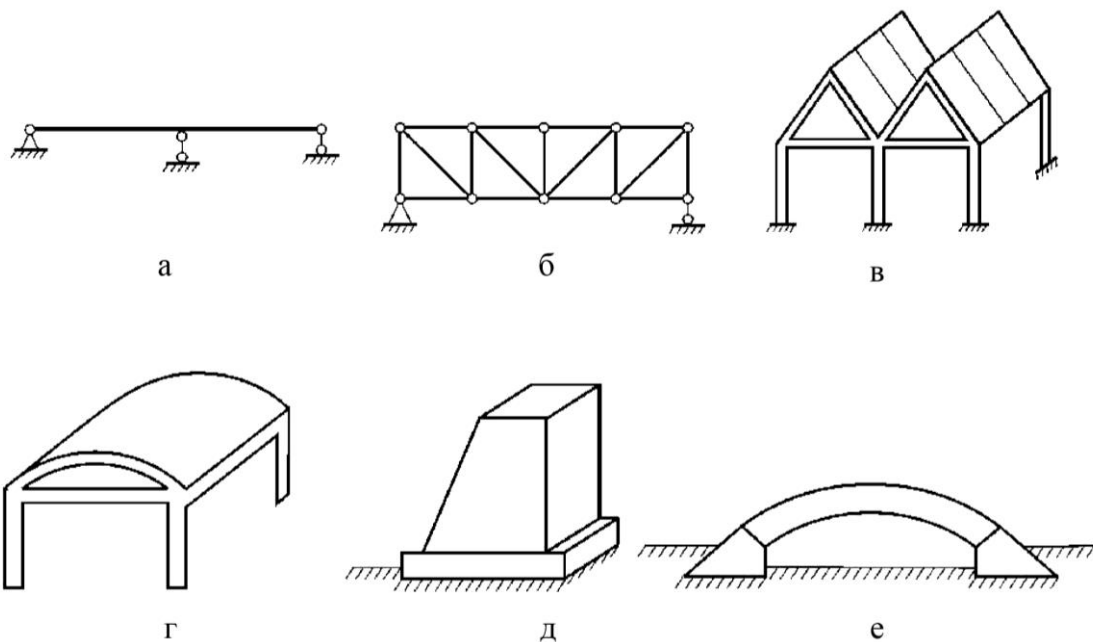


Рисунок 1.5 – Види споруд

Усі особливості споруд врахувати неможливо, тому доводиться розглядати їх у спрощеному виді. Спрощена модель споруди називається розрахунковою схемою. **Розрахункова схема** – схематичне (умовне) зображення реального об'єкта, звільненого від неістотних з погляду цього розрахунку особливостей. Розрахункова схема, подана у вигляді системи елементів, називається системою.

Розглянемо деякі типи простих споруд.

**Балка** – брус, що згинається.

Балка буває **однопрогоною** або **багатопрогоною**.

Типи однопрогонових балок також можна поділити у такий спосіб: **проста балка** (рис. 1.6, а), **консоль** (рис. 1.6, б) і **консольна балка** (рис. 1.6, в).

Багатопрогонові балки бувають **розрізними** (рис. 1.6, г), **нерозрізними** (рис. 1.6, д) та **складеними** (рис. 1.6, е).

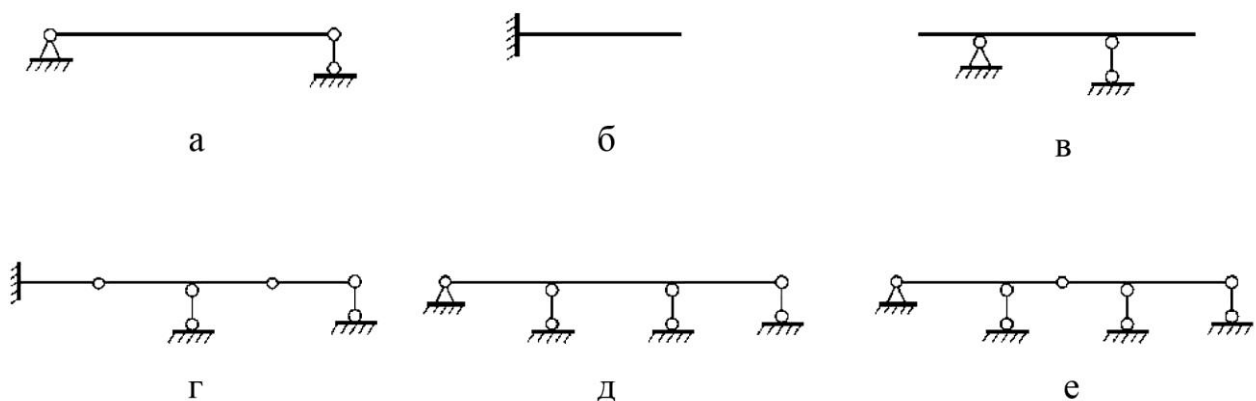


Рисунок 1.6 – Типи балок

Під час розрахунку балки на міцність прийнято замінювати її віссю, як це показано на рисунку 1.7.

**Вісь стержня** – це геометричне місце центрів тяжіння поперечних перерізів балки.

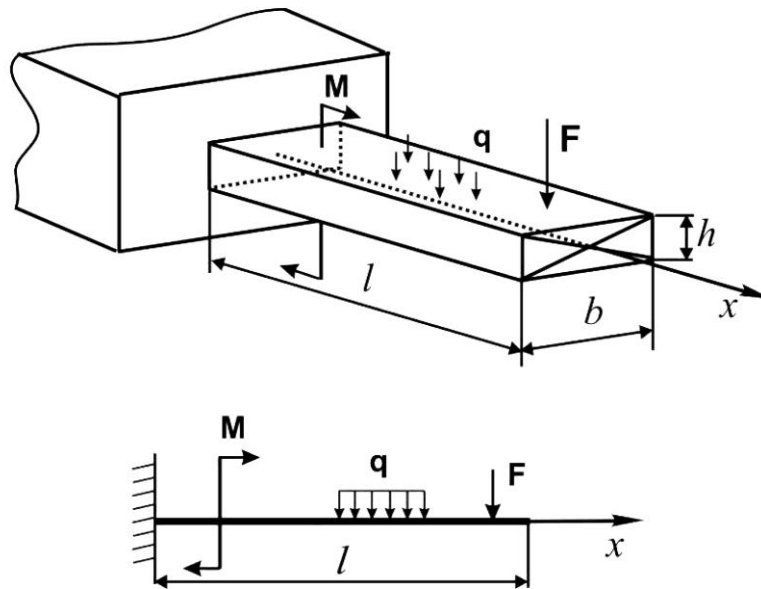


Рисунок 1.7 – Схематичне зображення балки

**Рама** – система прямих (ламаних або кривих) стержнів, які можуть з'єднуватись жорстко або через шарнір. Рами можна поділити на такі типи: проста рама (рис. 1.8, а), складена рама (рис. 1.8, б), багатоповерхова рама.

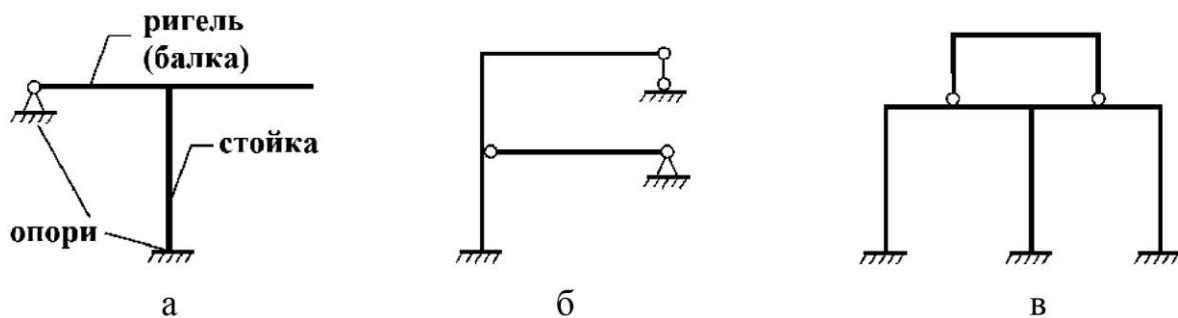


Рисунок 1.8 – Схематичне зображення типів рам

**Ферма** – система стержнів, які з'єднані шарнірами. Можна виділити багато типів ферм, наприклад, кроквяну ферму (рис 1.9, а), мостову ферму (рис. 1.9, б), кранову ферму (рис. 1.9, в), вежову ферму (рис. 1.9, г).

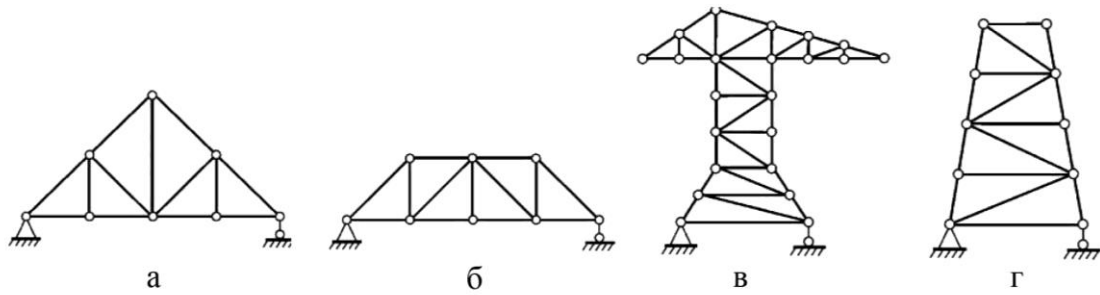


Рисунок 1.9 – Схематичне зображення типів ферм

**Арка** – система з кривих стержнів. Далі наведено деякі типи арок: тришарнірна (рис. 1.10, а), одношарнірна (рис. 1.10, б), безшарнірна (рис. 1.10, в) арки.

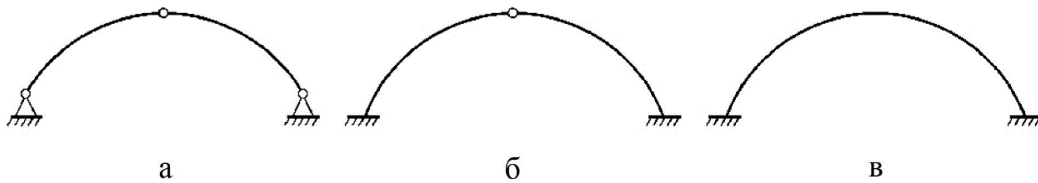


Рисунок 1.10 – Схематичне зображення типів арок

Існують складніші системи як комбінації простих систем. Вони називаються **комбінованими системами**. Наприклад: аroachна ферма (рис. 1.11, а), ферма з аркою (рис. 1.11, б), висяча система (рис. 1.11, в):

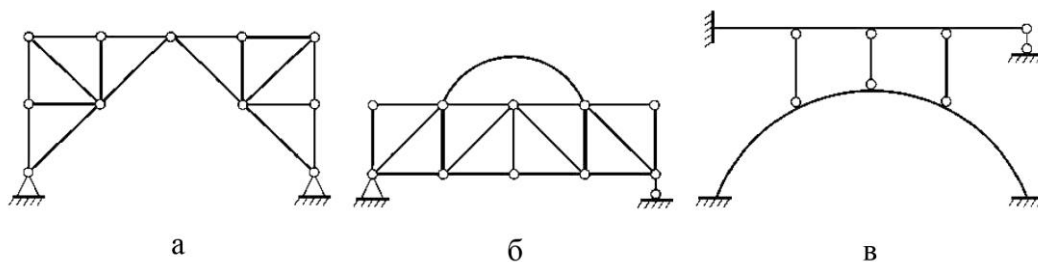


Рисунок 1.11 – Типи комбінацій простих систем

### 1.3 Класифікація зовнішніх сил

Сили розділяють на зовнішні та внутрішні. Зовнішні сили прикладені до конструкції або її елементів, а внутрішні виникають в елементах конструкцій.

Зовнішні сили, що діють на споруду, називаються **навантаженням**. Крім того, за навантаження можуть вважатися різні поєднання зовнішніх сил, зміна температури, переміщення опор і так далі.

Навантаження розрізняють:

– за способом прикладання: поверхневі сили, об'ємне навантаження. Об'ємне навантаження діє в усіх точках споруди (власна вага, інерційні сили та ін.), поверхневе навантаження розподілене по поверхні (сніг, вітер та ін.);

– за часом дії: постійне навантаження діє постійно та зберігається впродовж усього життя споруди (власна вага); тимчасове навантаження діє тільки в певний період або момент часу (сніг, вітер);

– за способом дії: статичне навантаження діє так, що споруда зберігає статичну рівновагу; динамічне навантаження викликає інерційні сили і порушує цю рівновагу. Джерелами динамічного навантаження є різні машини і механізми, вітер, землетруси та ін. Рухливі навантаження змінюють своє положення (потяг, автотранспорт, група людей і так далі).

Розрізняють три типи поверхневих сил:

– поверхнева сила, що розподілена по дуже малій площадці конструкції. Таку силу замінюють рівнодійною, яка прикладена в центрі ваги вказаної площадки та називається зосередженою силою;

– сили, що безперервно розподілені по лінії. Такі навантаження називають погонними або розподіленим навантаженням;

– зосереджений момент  $M$  становить прикладену в одній точці пару сил із моментом  $M$ .

На розрахунковій схемі зовнішні сили приводяться до центра тяжіння поперечного перерізу балки (рис. 1.12, а, б).

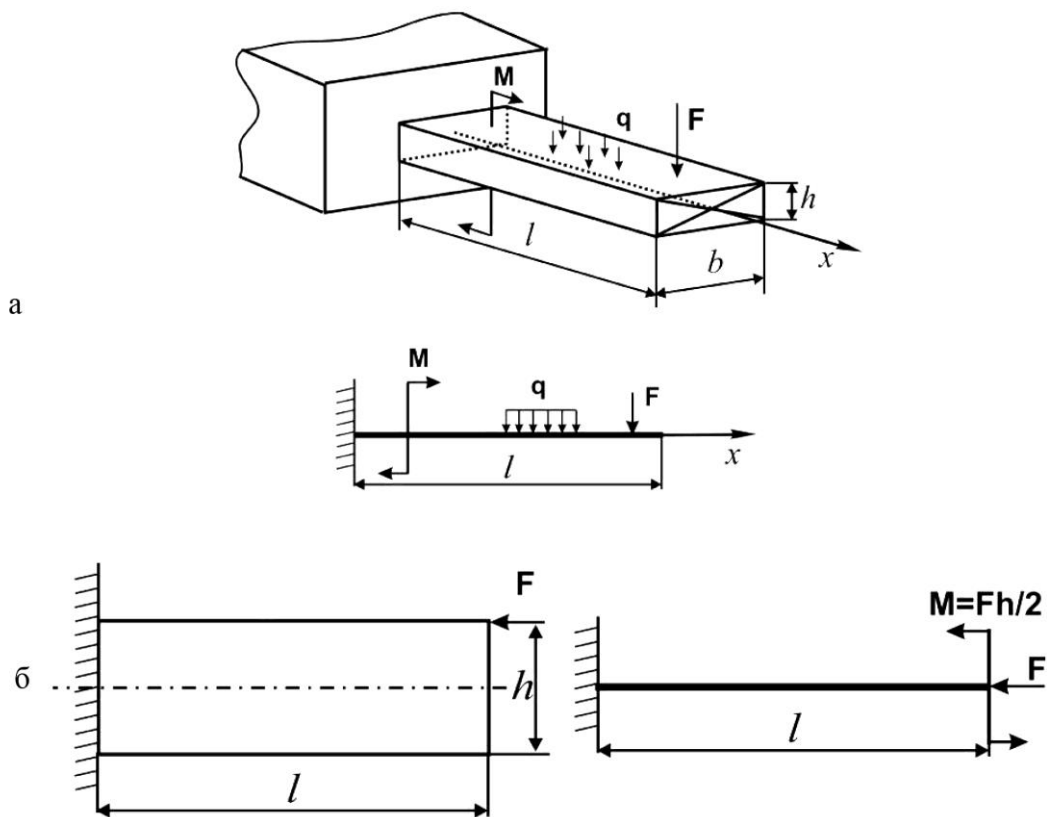


Рисунок 1.12 – Зображення приведення зовнішніх навантажень

Розрахункові схеми споруд можна класифікувати по-різному. Наприклад, розрізняють плоскі та просторові розрахункові схеми, розрахункові схеми за типом або способом з'єднання елементів, по напрямку опорних реакцій, по статичних і динамічних особливостях і так далі.

#### 1.4 Типи опор. Визначення опорних реакцій

Споруди спираються або закріплюються до основи через опорні пристрої. Взаємозв'язок між спорудою та його основою в розрахункових схемах враховується за допомогою опор. Конструктивні форми опор дуже різноманітні. У кожній опорі вздовж опорних стержнів виникає зусилля – опорна реакція. В опорі матеріалів розглядаються три типи опор.

**Шарнірно-рухома опора** (рухомий циліндричний шарнір). Приклади позначення шарнірно-рухомої опори подані на рисунку 1.13. Шарнірно-рухома опора перешкоджає переміщенню тіла вздовж напрямку, який є перпендикулярним до площини можливого руху опори. Реакція  $\vec{R}_A$  такої опори буде направлена вздовж опорного стержня.

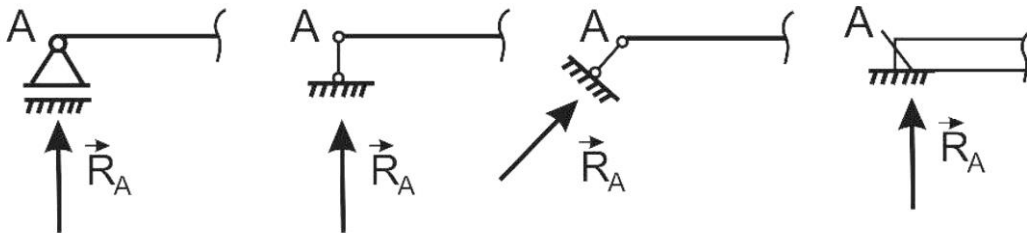


Рисунок 1.13 – Зображення реакцій шарнірно-рухомої опори

**Шарнірно-нерухома опора** (нерухомий циліндричний шарнір). У цій опорі два опорні стержні приєднані спільним шарніром до осі балки (рис. 1.14). Відповідно до кількості опорних стержнів (в'язей) з боку опори на балку діють дві складові реакції, одна з яких діє вздовж осі балки (горизонтальна складова опорної реакції  $\vec{H}_A$ ), а інша – перпендикулярно до осі балки (вертикальна складова опорної реакції  $\vec{R}_A$ ). Поняття горизонтальної та вертикальної реакції є умовними, оскільки вісь балки може мати довільний нахил.

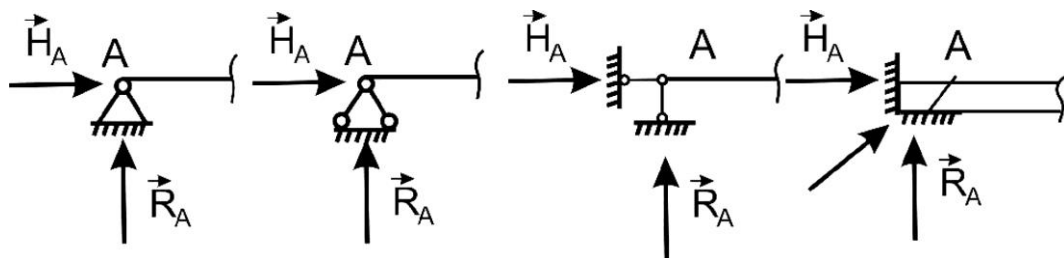


Рисунок 1.14 – Зображення реакцій шарнірно-нерухомої опори

**Затиснення** (жорстке закріплення). У цьому жорсткому закріпленні виникають три складові опорної реакції: реактивний момент  $M_A$ , горизонтальна реакція  $\vec{H}_A$  та вертикальна реакція  $\vec{R}_A$ . Опора моделюється трьома опорними стержнями, які перешкоджають як лінійним зміщенням точки обпирання, так і кутовому повороту осі балки (рис. 1.15).

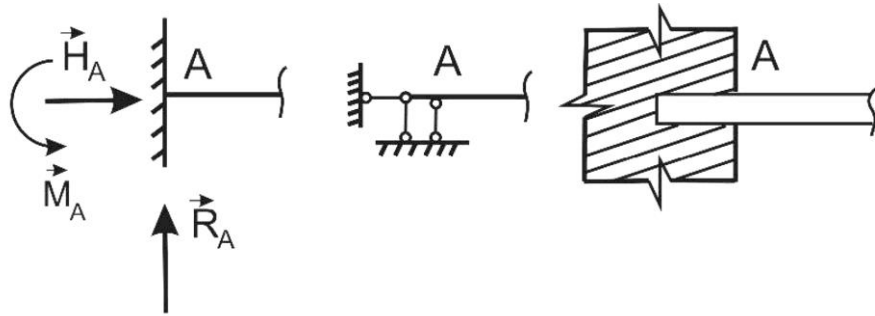


Рисунок 1.15 – Зображення реакцій жорсткого закріплення

Опорні реакції визначаються за допомогою рівнянь рівноваги, які можна записати в трьох видах.

Для розв'язання задач, у яких розглядається рівновага тіл під дією плоскої системи сил, з попередніх векторних рівнянь визначимо координатну форму умов рівноваги тіла (основна форма умов рівноваги), що має вигляд:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{ioz} = 0.$$

Умови рівноваги плоскої системи сил можна подати в такому вигляді (друга форма умов рівноваги):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0.$$

(у цьому випадку вісь  $Ox$  не повинна бути перпендикулярною до відрізка  $AB$ ).



Інший варіант запису умов рівноваги (третя форма умов рівноваги) має такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iC} = 0.$$

(у цьому випадку точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  не повинні розміщуватись на одній прямій).

## 2 НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КОНСТРУКЦІЙ

### 2.1 Види деформацій

Жоден з існуючих в природі матеріалів не є абсолютно твердим; під дією зовнішніх сил усі тіла, зокрема стержень, у тій чи іншій мірі змінюють свою форму, розміри (деформуються), а їхні точки зазнають переміщень. Зміна форми напруженого тіла істотно впливає на розподіл в ньому внутрішніх сил, хоча сама по собі ця зміна форми є незначною і виявляється здебільшого тільки за допомогою чутливих приладів.

Залежно від того, як до стержня прикладене навантаження, розрізняють прості та складні види його деформацій. До простих деформацій відносять: розтяг (рис. 2.1) або стиск (рис. 2.2), коли сили діють вздовж осі (лінії, яка проходить через центри ваги перерізів) стержня; згин (рис. 2.3) під дією пар сил (моментів), які лежать у одній площині з поздовжньою віссю стержня (рис. 2.3, а) або сил які діють перпендикулярно до осі стержня (рис. 2.3, б); зсув (рис. 2.4), що відбувається під дією сил, перпендикулярних до осі стержня; кручення (рис. 2.5) відбувається під дією обертальних (крутних) моментів, які розташовані у площині поперечного перерізу стержня.

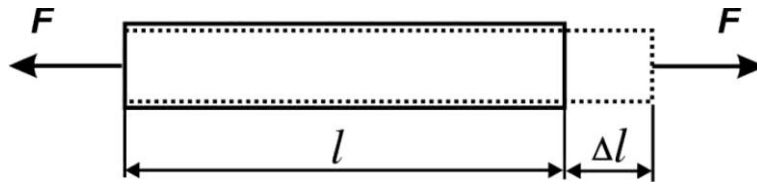


Рисунок 2.1 – Деформація розтягу

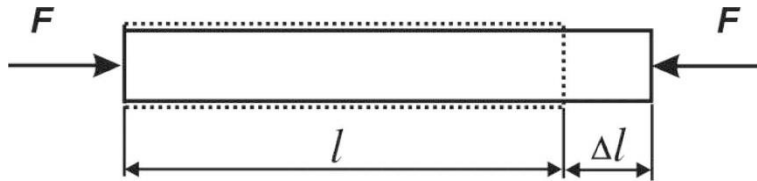


Рисунок 2.2 – Деформація стиску

На рисунках 2.1 та 2.2 через  $\Delta l$  позначено подовження та скорочення довжини стержня за умови його розтягу та стиску відповідно.

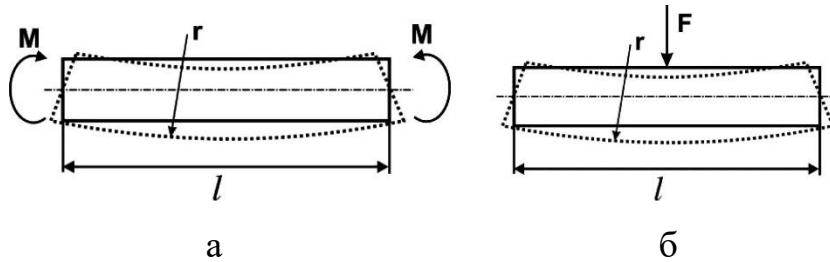


Рисунок 2.3 – Визначення деформація згину стержня:

а – дія згинальних моментів на стержень; б – дія зосередженої сили на стержень

На рисунку 2.3 через  $r$  позначено радіус викривлення осі стержня за умови його згину.

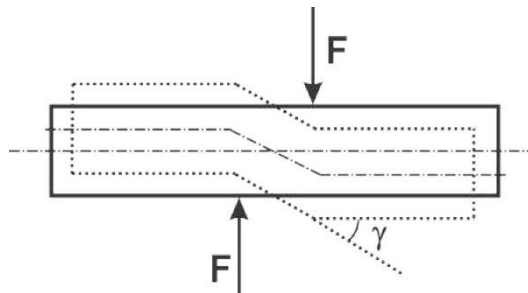


Рисунок 2.4 – Деформація зсуву

Через  $\gamma$  на рисунку 2.4 позначено кут зсуву перерізу стержня.

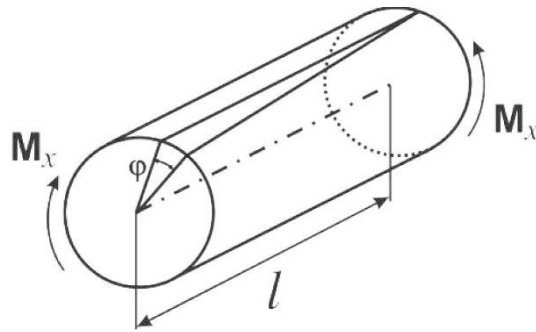


Рисунок 2.5 – Деформації кручення

Через  $\varphi$  на рисунку 2.5 позначено кут закручення стержня за умови дії на нього обертальних моментів.

Деформація буде складною, якщо за умови дії навантаження виникає деформація з кількох простих видів. Зокрема, під час дії сил, які є паралельними до осі стержня та знаходяться на відстані від осі стержня, виникає стиск або розтяг стержня зі згином. Таку деформацію називають позацентровим стиском-розтягом.

## 2.2 Основні гіпотези

Методи розрахунку на міцність і жорсткість конструкцій дисципліни «Опір матеріалів» засновані на вживанні таких гіпотез і допущень.

1. Припускається, що матеріал конструкції вважається однорідним і суцільним, тобто форма тіла не має пустот і повністю заповнена матеріалом.
2. Припускається, що матеріал тіла вважається абсолютно пружним.
3. Припускається, що матеріал конструкції є однорідним й ізотропним, тобто матеріал з якого вироблена конструкція, має однакові фізико-механічні властивості на всіх напрямках.

4. Припускається існування лінійної залежності між навантаженнями, діючими на пружне тіло, та деформаціями цього тіла, тобто матеріал конструкції підкоряється закону Гука:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \text{ – для лінійних деформацій,}$$

$$\tau = \gamma \cdot G \text{ – при деформаціях зсуву,}$$

де  $\sigma$  – нормальне напруження;

$\varepsilon$  – відносне подовження;

$E$  – модуль пружності (модуль Юнга);

$\tau$  – дотичне напруження;

$\gamma$  – деформація зсуву;

$G$  – модуль зсуву.

5. Припускається, що плоскі перерізи балки перпендикулярні до її осі і після деформації залишаються плоскими і перпендикулярними до осі деформованої балки (гіпотеза Бернуллі або гіпотеза плоских перерізів).

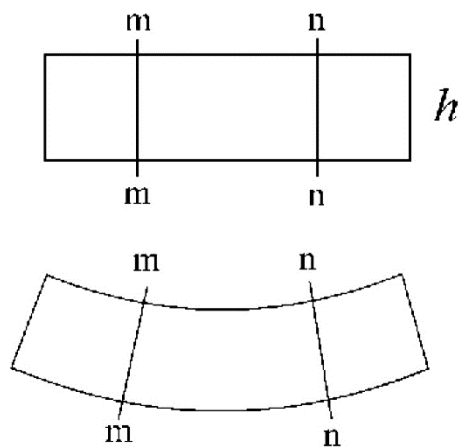


Рисунок 2.6 – Плоскі перерізи при згині балки

6. Результат дії на конструкцію або її елементів сумарного навантаження дорівнює сумі результатів дії від кожного навантаження окремо (принцип суперпозиції).

Принцип суперпозиції може бути розглянуто на прикладі переміщення, яке виникає в балці від дії зовнішнього навантаження.

Переміщення, яке виникає від сумарного навантаження (рис. 2.7, а), дорівнює сумі переміщень від дії кожного навантаження окремо (рис. 2.7, б, в, г).

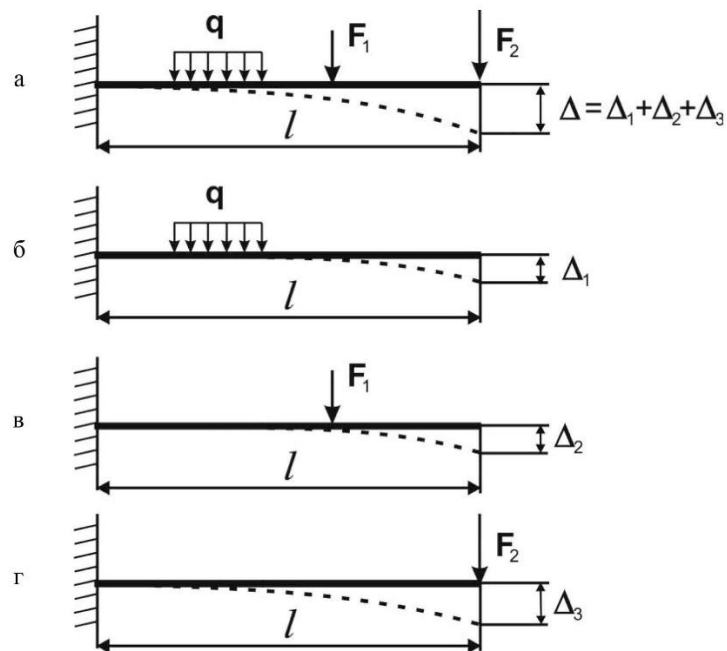


Рисунок 2.7 – Переміщення в балці:

а)  $\Delta$  – сумарне переміщення під дією сумарного навантаження; б)  $\Delta_1$  – переміщення під дією розподіленого навантаження  $q$ ; в)  $\Delta_2$  – переміщення під дією зосередженої сили  $F_1$ ; г)  $\Delta_3$  – переміщення під дією зосередженої сили  $F_2$ .

7. Принцип Сен-Венана. На відстані, що дорівнює розміру поперечного перерізу бруса, спосіб додавання навантаження не впливає на напружено-деформований стан бруса (рис. 2.8).

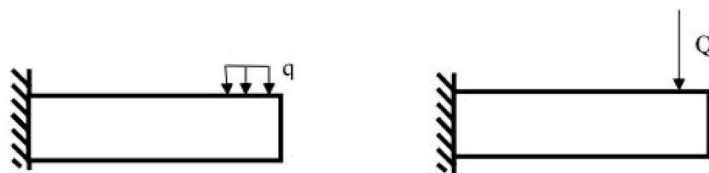


Рисунок 2.8 – Ілюстрація принципу Сен-Венана

8. Деформації конструкції дуже малі і не впливають на взаємне положення точок дії зовнішніх сил і зміну розмірів конструкції та її елементів.

### 2.3 Внутрішні силові фактори. Метод перерізів

У середині будь-якої конструкції під дією зовнішнього навантаження виникають внутрішні сили, наявність яких визначає здатність конструкції сприймати зовнішнє навантаження, чинити опір руйнуванню, зміні форми та розмірів.

**Внутрішні сили** – сили взаємодії між окремими елементами конструкцій або між окремими частинами конструкції, що виникають під дією зовнішніх сил.

Щоб встановити величину внутрішніх сил, користуються методом перерізів. Метод перерізів зводиться до чотирьох дій:

1. Тіло розрізають площиною в тому місці, де потрібно визначити внутрішні сили (рис. 2.9).

2. Відкидають будь-яку відрізану частину тіла (бажано найбільш складну), а її дію на частину, що залишилася, замінюють внутрішніми силами, щоб досліджувана частина, що залишилася, знаходилася в рівновазі (рис. 2.9).

3. У поперечному перерізі від зовнішнього навантаження виникають внутрішні розподілені сили. Систему розподілених сил замінюють головним вектором  $R_0$ , який діє в центрі тяжіння перерізу, та сумарним моментом сил  $M_0$  (рис. 2.9, б). Головний вектор  $R_0$  і головний момент  $M_0$  (рис. 2.9) проєктують на нормаль до площини (вісь  $X$ ) і головні центральні осі перетину ( $Y$  і  $Z$ ). Отримані сили ( $N_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ) і моменти ( $M_z$ ,  $M_y$ ,  $M_x$ ) (рис. 2.9) називають внутрішніми силовими факторами в перерізі.

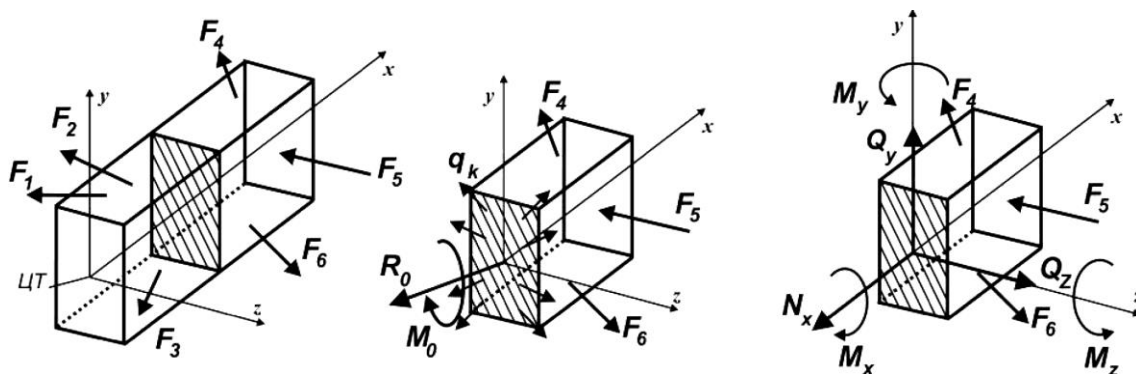


Рисунок 2.9 – Застосування методу перерізів

Для внутрішніх силових факторів прийняті такі назви:

$N_X$  – поздовжня або осьова сила;

$Q_Y, Q_Z$  – поперечні сили;

$M_X$  – обертальний момент;

$M_Y, M_Z$  – згинальні моменти.

4. Знаходять внутрішні силові фактори, складаючи шість рівнянь рівноваги статички для цієї частини розрізаного тіла.

$$\sum X = 0 \rightarrow N_X;$$

– поздовжня сила  $N_X$  дорівнює сумі проєкцій всіх сил (активних і реактивних), що діють на будь-яку з частин розрізаного стержня, на вісь  $X$ ;

$$\sum Y = 0 \rightarrow Q_Y;$$

$$\sum Z = 0 \rightarrow Q_Z;$$

– поперечні сили  $Q_Y, Q_Z$  дорівнюють сумі проєкцій всіх сил, що діють на будь-яку з частин стержня, на осі  $Z$  та  $Y$ , відповідно;

$$\sum M_X = 0 \rightarrow M_X;$$

– обертальний момент  $M_X$  дорівнює сумі моментів всіх сил, що діють на будь-яку з частин стержня, відносно поздовжньої осі  $X$ ;

$$\sum M_Z = 0 \rightarrow M_Z;$$

$$\sum M_Y = 0 \rightarrow M_Y;$$

– згинальні моменти  $M_Z$  та  $M_Y$ , дорівнюють сумі моментів всіх сил, що діють на будь-яку з частин стержня, відносно осей  $Z$  та  $Y$ , відповідно.

Метод перерізів дозволяє визначити величину внутрішнього силового зусилля в перерізі, але не дає можливості встановити закон розподілу внутрішніх сил за перерізом. Для оцінки міцності необхідно визначити величину сили, що доводиться на будь-яку точку поперечного перерізу.

## 2.4 Поняття про напруження. Закон парності дотичних напружень

**Напруженням** називається внутрішня сила, яка є віднесеною до одиниці площі в певній точці перерізу. Напруження характеризує величину внутрішньої сили, що доводиться на одиницю площі поперечного перерізу. Внутрішні сили є безперервно розподіленими за площею поперечного перерізу бруса.

Розглянемо поперечний переріз бруса (рис. 2.10). Виділимо на січній площині малу площу  $\Delta A$ , на якій діє рівнодійна внутрішніх сил пружності  $R$ .

Розклавши рівнодійну внутрішніх сил пружності  $R$  на складові по осях, отримаємо її компоненти: дотичну складову внутрішніх сил  $\Delta Q$  та нормальну складову внутрішніх сил  $\Delta N$ .

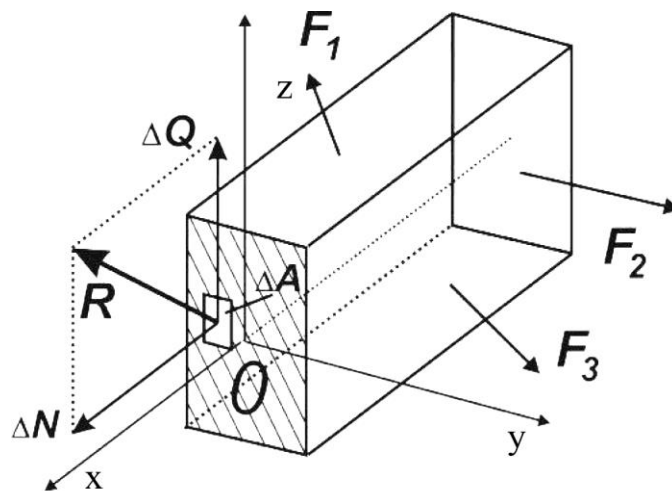


Рисунок 2.10 – Зображення поперечного перерізу бруса

Введемо поняття нормального та дотичного напружень:

**Нормальне напруження ( $\sigma$ )** – це ліміт відношення нормальної складової внутрішніх зусиль  $\Delta N$ , що діють на елементарну площу  $\Delta A$  при прямуванні останньої до нуля, що можна записати такою формулою:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA}.$$



**Дотичне напруження ( $\tau$ )** – це ліміт відношення тангенціальної складової внутрішніх зусиль  $\Delta Q$ , що діють на елементарну площу  $\Delta A$  при прямуванні останньої до нуля. Це визначення можна записати так:

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}$$

Остаточно загальний вигляд формул для визначення нормальних та дотичних напружень запишеться так:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}, \tau = \frac{dQ}{dA}$$

**Закон парності дотичних напружень.** Розглянемо елементарну площу  $\Delta A$  розміром  $dz$  на  $dy$  (рис. 2.11).

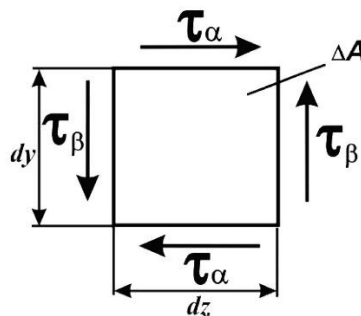


Рисунок 2.11 – Зображення елементарної площини

На двох взаємно перпендикулярних гранях, що мають загальне ребро, дотичні напруження рівні за величиною і спрямовані або обое до ребра, або обое від ребра.

**Інтегральні залежності між нормальними, дотичними напруженнями та внутрішніми силами.** Виділимо на січній площині навколо точки  $K$  малу площу  $dA$ .

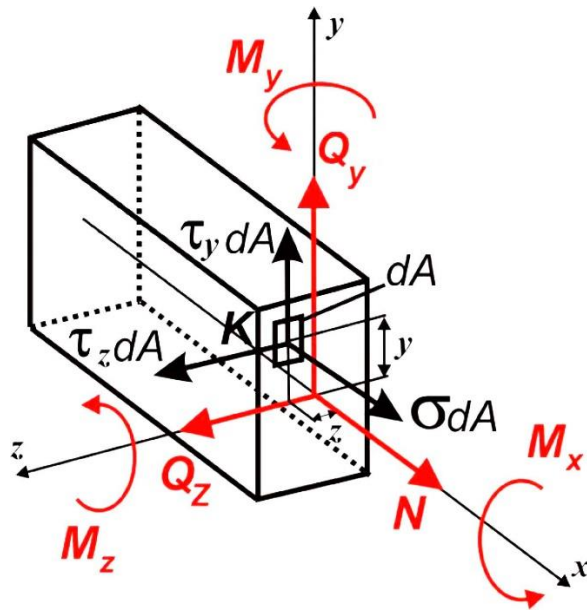


Рисунок 2.12 – Зв’язок між напруженнями та внутрішніми зусиллями

Нормальні і дотичні напруження, які діють на площині  $dA$ , пов’язані такими співвідношеннями з внутрішніми зусиллями, що діють в цьому перерізі:

$$N = \int_A \sigma dA; M_z = \int_A \sigma y dA; M_y = \int_A \sigma z dA; M_x = \int_A (\tau_y z - \tau_z y) dA;$$

$$Q_z = \int_A \tau_z dA; Q_y = \int_A \tau_y dA.$$

## 3 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

### 3.1 Статичний момент інерції. Центр ваги

Під час розтягування стержня значення напружень у всіх його точках є однаковими, напружений стан стержня визначається зовнішнім навантаженням і площею поперечного перерізу, але не залежить від його форми.

У разі згину і кручення стержнів напруження в точках його поперечного перерізу залежать від форми і розмірів, а при згині – ще й від орієнтації стержня до напрямку навантажень. Крім площі, переріз стержня при згині та крученні характеризується також статичним моментом площі, моментами інерції, радіусами інерції та моментами опору. У більшості характеристик, що зазначені у попередньому реченні, фізичного сенсу немає, але є їхня геометрична інтерпретація і аналогія з фізичними та механічними поняттями.

Розглянемо довільний плоский переріз (рис. 3.1). Виділимо елементарну площадку  $dA$  і визначимо її положення в системі координат  $Z, Y$ .

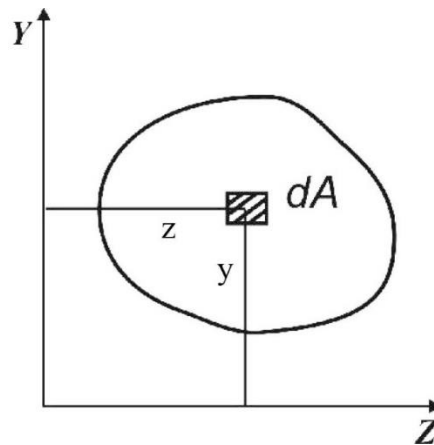


Рисунок 3.1 – Довільний плоский переріз тіла

**Статичним моментом інерції плоского перерізу ( $S_z$  та  $S_y$ )** відносно осей  $Z$  та  $Y$  називається інтегральна сума добутку елементарних площадок  $dA$  на їхню відстань до осі  $Z$  та  $Y$  відповідно (рис. 3.1):

$$S_z = \int y dA, \quad S_y = \int z dA.$$

**Центр ваги плоского перерізу.** Використовуючи вирази статичних моментів плоского перерізу  $S_z$  та  $S_y$ , можемо визначити координати центра ваги плоского перерізу за такими формулами:

$$Z_{ц.в} = \frac{S_y}{A}, \quad Y_{ц.в} = \frac{S_z}{A}.$$

Для обчислення статичних моментів складної фігури її розбивають на простіші частини. Водночас загальний статичний момент буде дорівнювати алгебраїчній сумі статичних моментів окремих частин фігури відносно тієї ж самої осі, що можна записати так:

$$S_y = A_1 z_1 + A_2 z_2 + \dots + A_n z_n = \sum_{i=1}^n A_i z_i,$$

$$S_z = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_{i=1}^n A_i y_i,$$

де  $n$  – кількість простих фігур, з яких складається складний переріз.

Координати центра ваги  $Z_{ц.в.}$ ,  $Y_{ц.в.}$  складного перерізу визначаються на підставі таких формул:

$$Z_{ц.в.} = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + \dots + A_n z_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_i}{\sum_{i=1}^n A_i},$$

$$Y_{ц.в.} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i},$$

$$Y_{ц.в.} = \frac{\sum S_z}{\sum A}, \quad Z_{ц.в.} = \frac{\sum S_y}{\sum A},$$

де  $A$  – площа простої фігури;

$S_y$ ,  $S_z$  – статичні моменти простих фігур, з яких складається складний переріз, відносно довільно обраних осей  $Z$  та  $Y$  (рис 3.1).

### 3.2 Моменти інерції плоского перерізу

**Момент інерції** – поширена на всю площу сума добутків елементарних площадок  $dA$  на квадрати відстаней від них до певної осі.

Осьові моменти інерції визначаються за такими формулами:

$$I_Z = \int_A y^2 dA, \quad I_Y = \int_A z^2 dA.$$

Полярний момент інерції плоского перерізу визначається за формулою:

$$I = \int_A \rho^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA,$$

де  $\rho$  – відстань від елементарної площадки  $dA$  до точки (полюса), відносно якої обчислюється полярний момент інерції (рис. 3.2).

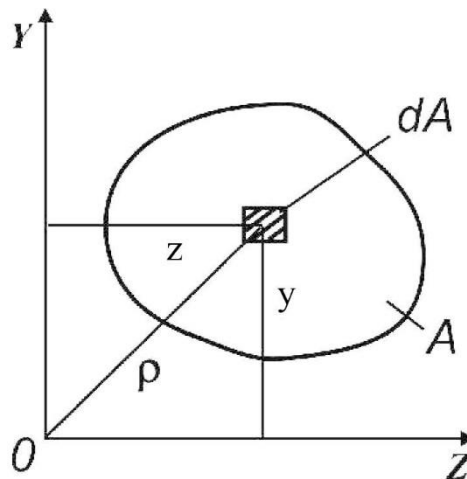


Рисунок 3.2 – Визначення моментів інерції плоского перерізу

Полярний момент інерції через осьові моменти інерції можна записати таким рівнянням:

$$I = I_Z + I_Y.$$

Відцентровий момент інерції визначається інтегралом добутків елементарних площадок на їхні відстані до двох взаємно перпендикулярних осей (див. рис. 3.2) і визначається так:

$$I_{ZY} = \int_A zy dA.$$

Значення осьових та полярного моменту інерції завжди є додатними, а відцентровий момент інерції може мати додатні, від'ємні значення та дорівнювати нулю. Якщо фігура має вісь симетрії, то відносно цієї осі відцентровий момент інерції дорівнює нулю.

### 3.3 Момент опору

**Момент опору** – відношення моменту інерції до відстані до найбільш віддаленої точки плоского перерізу (рис. 3.3).

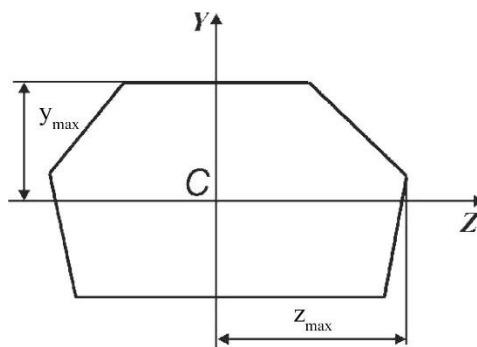


Рисунок 3.3 – Зображення перерізу для визначення моментів опору

У розрахунках на міцність за умови згину стержня використовують осьові моменти опору, які визначаються за такими формулами:

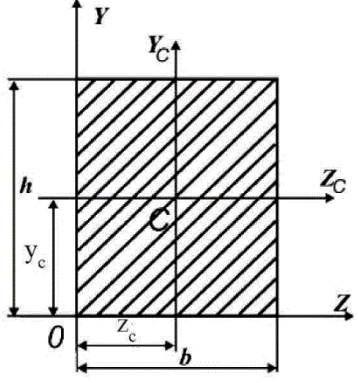
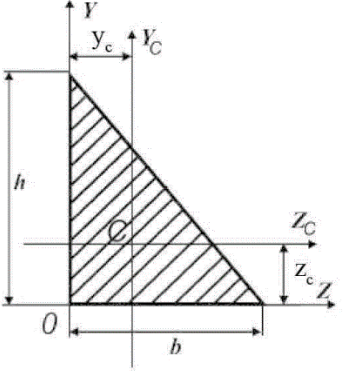
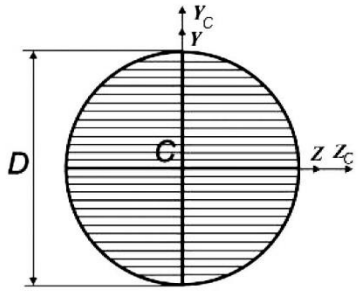
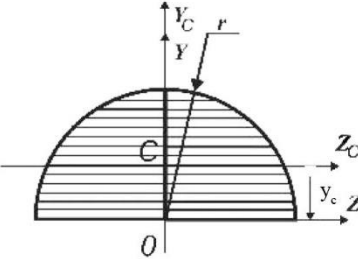
$$W_Z = \frac{I_Z}{y_{max}}, \quad W_Y = \frac{I_Y}{z_{max}}.$$

**Радіус інерції** – геометрична характеристика перерізу, що пов'язує момент інерції фігури з площею такими формулами:

$$i_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{A}}, \quad i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}}.$$

У таблиці 3.1 наведено основні геометричні характеристики простих фігур.

Таблиця 3.1 – Геометричні характеристики простих фігур

Вид перерізу	Координати центра ваги	Площа фігури	$I_{z_c}$	$I_{y_c}$	$I_{z_c y_c}$ відцентровий момент інерції
1	2	3	4	5	6
	$z_c = \frac{b}{2}$ $y_c = \frac{h}{2}$	$A = bh$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$0$
	$z_c = \frac{h}{3}$ $y_c = \frac{b}{3}$	$A = \frac{1}{2}bh$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$	$-\frac{b^2 h^2}{72}$
	$z_c = 0$ $y_c = 0$	$A = \frac{\pi D^2}{4}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$0$
	$y_c = 0,424r$	$A = \frac{\pi D^2}{8}$	$0,11r^2$	$\frac{\pi D^4}{128}$	$0$

### 3.4 Моменти інерції для паралельних осей

Розглянемо елементарну площадку  $dA$  відносно осей, які знаходяться на відстанях  $a$  і  $b$  від центральних осей фігури відповідно. На рисунку 3.4 позначено літерами:  $C$  – центр ваги фігури площею  $A$ ;  $Z_c, Y_c$  – центральні осі;  $Z_1, Y_1$  – довільні осі, які є паралельними до центральних осей.

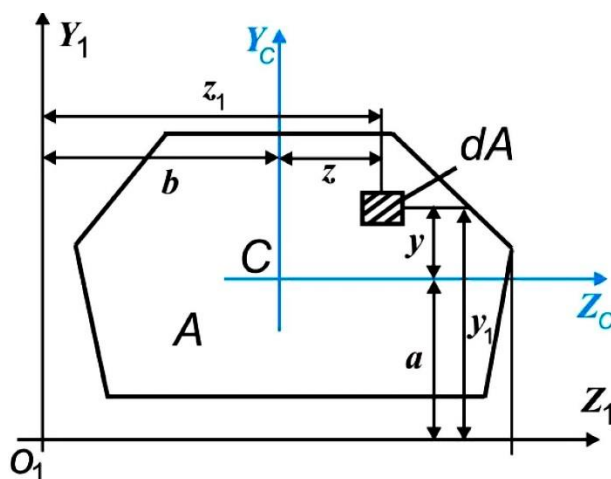


Рисунок 3.4 – Визначення моментів інерції фігури відносно довільних осей паралельних центральним осям

**Центральними осями плоскої фігури** є дві взаємно перпендикулярні осі, що проходять через центр ваги плоскої фігури.

Формули зв'язку між координатами в новій та центральній системі координат для довільної елементарної площадки  $dA$  матимуть такий вигляд:

$$z_1 = z + b, y_1 = y + a.$$

Осьові моменти інерції фігури відносно нових координатних осей  $Y_1$  та  $Z_1$ , що є паралельними до центральних осей  $Y_c$  та  $Z_c$ , запишуться так:

$$I_{Z_1} \int_A y_1^2 dA = \int (y + a)^2 dA,$$

$$I_{Z_1} \int_A y_1^2 dA + 2a \int_A dA + a^2 \int_A dA,$$



де перший інтеграл – момент інерції фігури відносно центральної осі; другий інтеграл дорівнює нулю – статичний момент площі  $A$  відносно осі  $Y_C$ , ця вісь є центральною; третій інтеграл – площа  $A$  фігури.

Отримаємо формулу, у якій осьовий момент інерції відносно осі  $Z_1$  дорівнює осьового моменту інерції відносно центральної осі  $Z_C$  плюс добуток квадрату відстані між цими осями на площу фігури:

$$I_{Z_1} = I_{Z_C} + a^2 A.$$

Аналогічно можемо отримати формулу для моменту інерції відносно осі  $Y_1$  так:

$$I_{Y_1} = I_{Y_C} + b^2 A.$$

Момент інерції відносно довільної осі дорівнює моменту інерції відносно центральної осі, яка є паралельною до цієї, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між осями.

Для відцентрового моменту інерції формула запишеться так:

$$I_{Z_1 Y_1} = I_{Z_C Y_C} + abA.$$

Для обчислення моментів інерції складної фігури відносно довільних осей її розбивають на простіші частини. Водночас загальний момент інерції складної фігури буде дорівнювати алгебраїчній сумі моментів інерції окремих частин фігури відносно власних центральних осей плюс сума добутків площ окремих частин фігури на квадрати відстаней між їхніми власними центральними осями та довільними осями відповідно (рис. 3.4):

$$I_{Z_1} = \sum I_{Z_C} + \sum Aa^2,$$

$$I_{Y_1} = \sum I_{Y_C} + \sum Ab^2,$$

де  $I_{Z_C}$ ,  $I_{Y_C}$  – моменти інерції відносно власних центральних осей простої фігури.

Загальний відцентровий момент інерції буде дорівнювати алгебраїчній сумі відцентрових моментів інерції окремих частин фігури відносно власних центральних осей плюс сума добутків площ окремих частин фігури на відстані між їхніми власними центральними осями та довільними осями відповідно (рис. 3.4):

$$I_{z_1 y_1} = \sum I_{z_c y_c} + \sum Aab.$$

### 3.5 Момент інерції плоскої фігури за умови повороту осей

Прийmemo положення елементарної площадки  $dA$  у довільній – вихідній системі координат  $ZOY$  (рис. 3.5).

Розглянемо елементарну площадку  $dA$  у новій системі координат  $Z_1OY_1$ , яка має кут нахилу  $\alpha$  до вихідної системи координат  $ZOY$ .

Визначимо вирази зв'язку нових координат  $z_1, y_1$  елементарної площини  $dA$  з координатами вихідної системи  $z, y$  відповідно (рис. 3.5):

$$\begin{aligned} z_1 &= |OE| = |OD| + |DE| = |OD| + |CF|; \\ y_1 &= |BE| = |BF| - |EF| = |BF| - |CD|. \end{aligned}$$

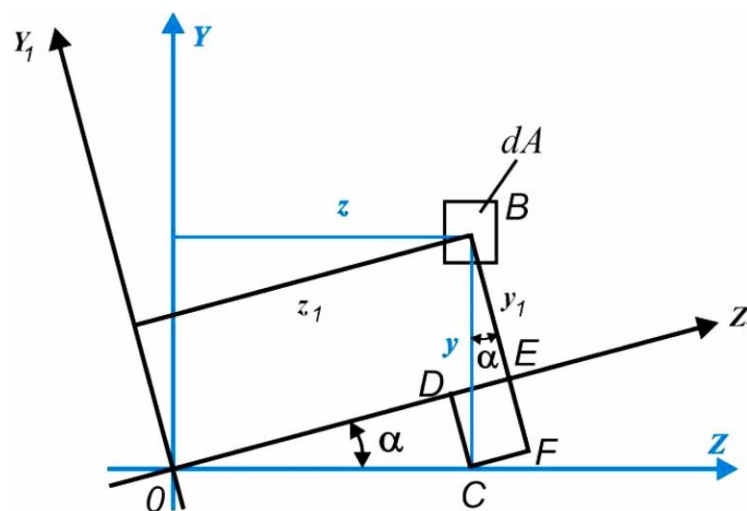


Рисунок 3.5 – Схема визначення моментів інерції фігури за умови повороту осей

Довжини відрізків через координати вихідної системи та кут повороту  $\alpha$  запишуться так:

$$|OD| = z \cdot \cos \alpha, |CF| = y \cdot \sin \alpha,$$

$$|BF| = y \cdot \cos \alpha, |DC| = z \cdot \sin \alpha.$$

З попередніх рівнянь отримаємо зв'язок між координатами нової та вихідної системи координат, який запишеться так:

$$z_1 = z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha,$$

$$y_1 = y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha.$$

Приймаючи до уваги отримані вище вирази, момент інерції відносно осі  $Z_1$ , яка виконала поворот на кут  $\alpha$  відносно осі  $Z$ , можна записати так:

$$I_{Z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA = \int_A y^2 \cos^2 \alpha dA -$$

$$- 2 \int_A zy \cos \alpha \sin \alpha dA + \int_A z^2 \sin^2 \alpha dA,$$

$$I_{Z_1} = I_Z \cos^2 \alpha + I_Y \sin^2 \alpha - I_{ZY} \sin 2\alpha.$$

Виконавши аналогічні дії відносно осі  $Y_1$ , отримаємо таке рівняння:

$$I_{Y_1} = I_Y \cos^2 \alpha + I_Z \sin^2 \alpha - I_{ZY} \sin 2\alpha.$$

Відцентровий момент інерції відносно осей  $Z_1 O Y_1$  буде мати вигляд:

$$I_{Z_1 Y_1} = \frac{(I_Z - I_Y)}{2} \sin 2\alpha + I_{ZY} \cos 2\alpha.$$

Відносно головних осей відцентровий момент інерції дорівнює нулю. Складаючи рівняння для моментів інерції відносно осей  $Z_1$  та  $Y_1$ , отримаємо рівняння для полярного моменту інерції:

$$I_{Z_1} + I_{Y_1} = I_Z + I_Y = I.$$

Аналізуючи попереднє рівняння, можна зробити висновок, що сума моментів інерції відносно будь-яких двох взаємно перпендикулярних осей не змінюється (інваріантна) за умови їхнього повороту.

### 3.6 Головні осі і головні моменти інерції

За умови зміни кута  $\alpha$  значення моментів інерції  $I_{Z_1}$ ,  $I_{Y_1}$ ,  $I_{Z_1Y_1}$  теж змінюються, і за деякого значення кута  $\alpha_0$  вони набувають екстремальних значень. Взявши першу похідну за кутом  $\alpha$  від рівнянь моментів інерції  $I_{Z_1}$ ,  $I_{Y_1}$ ,  $I_{Z_1Y_1}$  та прирівнявши їх до нуля, отримаємо таку формулу для визначення тангенсу кута  $\alpha_0$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{ZY}}{I_Y - I_Z}.$$

Якщо значення кута  $\alpha_0$  додатне, то кут відкладають проти годинникової стрілки. Ця формула визначає положення двох осей, відносно однієї з яких осьовий момент є максимальним, а відносно іншої є мінімальним. Такі **осі** називають **головними осями інерції**. Моменти інерції відносно головних осей інерції називають головними моментами інерції. Їх обчислюють за допомогою формул, які запишуться так:

$$I_{\max} \quad \min = \frac{I_Y + I_Z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_Z - I_Y}{2}\right)^2 + 4I_{ZY}^2}.$$

Головні осі мають такі властивості: відцентровий момент інерції відносно них дорівнює нулю; моменти інерції відносно головних осей екстремальні, для симетричних перерізів осі симетрії є головними. Головні осі, що проходять через центр тяжіння фігури, називають **головними центральними осями інерції і позначаються літерами  $U$  та  $V$  відповідно.**

З попередньої формули можна зробити висновок, що сума центральних моментів інерції дорівнює сумі головних моментів інерції:

$$I_{z_c} + I_{y_c} = I_{max} + I_{min} = I_U + I_V.$$

Формула для визначення полярного моменту інерції через значення екстремальних моментів інерції запишеться так:

$$I = I_{max} + I_{min}.$$

## **4 ЕПЮРИ ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ. ПІДБІР ПЕРЕРІЗІВ**

### **4.1 Епюри внутрішніх зусиль**

**Епюра** – графічне зображення, що відображає зміну одного з внутрішніх зусиль або напруження уздовж осі елемента, подане у відповідному масштабі.

Для кожного виду внутрішніх силових факторів будують свою епюру. По поздовжній осі епюри відкладаються розміри елемента, у перпендикулярному напрямку – значення внутрішніх зусиль або напружень.

Зазначимо деякі правила, що застосовуються під час побудови епюр:

1. Вісь (базу), на якій будується епюра, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна або збігалася з віссю стержня.

2. Ординати епюр відкладають від осі епюр по перпендикулярах.

3. Штрихують епюри лініями, що перпендикулярні до осі бази.

4. Для зусиль та моментів вибирають певний масштаб. Ординати відкладають строго в масштабі. Крім того, на епюрах проставляють числа, що показують значення характерних ординат, а в полі епюри, в кружечку ставлять знак зусилля.

5. Епюра згинального моменту будується з боку розтягнутих волокон балки, тобто додатні значення відкладають вниз, а від'ємні значення – вгору.

6. Під час побудови епюр поздовжніх сил, поздовжня (осьова) сила вважається додатною, якщо вона спричиняє розтягання, та від'ємною, якщо спричиняє стискання. Зовнішні сили самі по собі ні додатні, ні від'ємні, але кожна дає у виразі для  $N$  доданок певного знака.

#### 4.2 Побудова епюр $M$ , $Q$ в балках при плоскому згині

Визначення внутрішніх зусиль у балці за умови її згину виконуємо за такою схемою:

1) на першому етапі, розглядаючи умови рівноваги конструкції в цілому, потрібно визначити, якщо це необхідно, невідомі реакції опор (необхідно зазначити, що для консольної балки реакції в жорсткому закріпленні можна і не знаходити, якщо розглядати балку з вільного кінця);

2) на другому етапі необхідно виділити характерні ділянки балки, приймаючи за межі ділянок точки прикладення сил, точки зміни форми або розмірів балки, точки закріплення балки;

3) на третьому етапі необхідно визначити внутрішні зусилля в перерізах балки, розглядаючи умови рівноваги елементів балки на кожній з ділянок.

**Плоский згин** – згин, за якого всі зусилля, що вигинають балку, знаходяться в одній з площин симетрії балки (у одній з головних площин, як показано на рис. 4.1).

**Головними площинами інерції** балки називають площини, які проходять через головні осі поперечних перерізів, і геометричну вісь балки, якою є в цьому випадку вісь  $x$  (рис. 4.1). **Силова площина** – площина, у якій діють зовнішні сили.

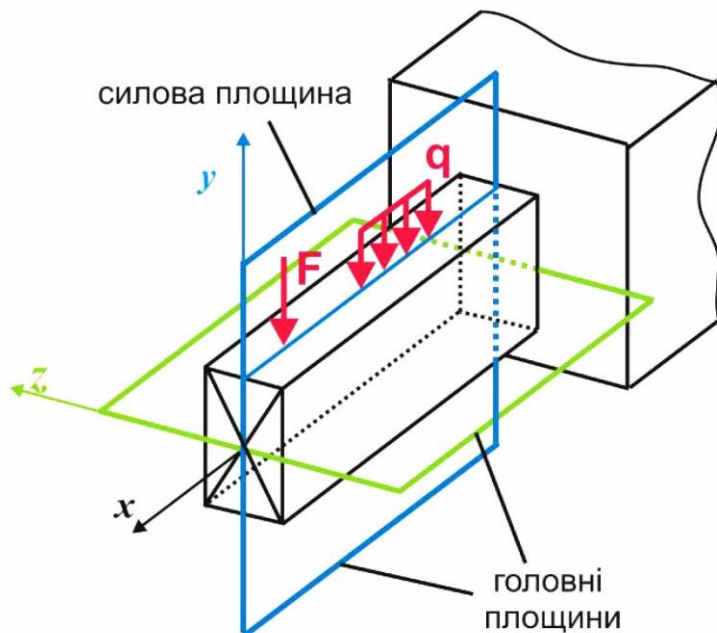


Рисунок. 4.1 – Схема взаємного розташування силової площини і головних площин

Далі будемо розглядати плоский згин, тобто випадок, коли всі сили діють на балку в її площині симетрії.

Розглянемо два характерні випадки згину балки (рис. 1.6): у першому випадку консольна балка згинається зосередженим моментом  $M_0$  (рис. 4.2, а); у другому – за допомогою зосередженої сили  $F$  (рис. 4.2, б).

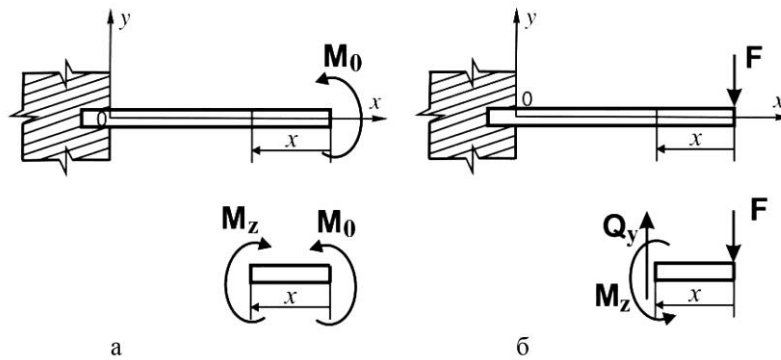


Рисунок 4.2 – Зображення двох випадків згину балки

Використовуючи метод перерізів і складаючи рівняння рівноваги для відсічених частин балки, визначимо внутрішні зусилля в кожному випадку. Під час визначення внутрішніх зусиль дотримуватимемося правила знаків.

Правило знаків для згинальних моментів пов'язане з характером деформації балки. Згинальний момент балки має додатне значення, якщо балка згинається опуклістю вниз, тобто розтягнуті волокна розташовані знизу (рис. 4.3, а). У випадку, коли балка згинається опуклістю вгору, тобто розтягнуті волокна знаходяться зверху, її згинальний момент має від'ємне значення (рис. 4.3, б).

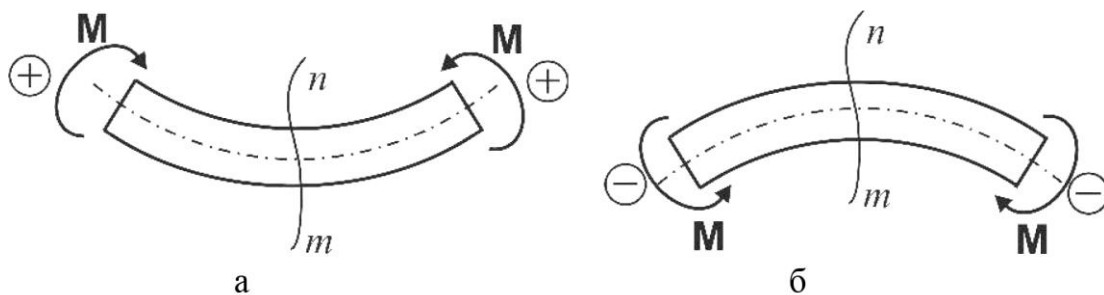


Рисунок 4.3 – Правило знаків для визначення згинальних моментів:

а – додатне значення моменту; б – від'ємне значення моменту

Епюра згинального моменту  $M$  зображується на стороні розтягнутого волокна балки.



Для поперечної сили  $Q$  знак також пов'язаний з характером деформації. Якщо зовнішні сили намагаються підняти ліву частину або опустити праву частину балки, то поперечна сила в цьому випадку має додатне значення (рис. 4.4, а). У разі протилежного напрямку зовнішніх сил, тобто у випадку, коли вони намагаються опустити ліву частину або підняти праву частину балки, поперечна сила має від'ємне значення (рис. 4.4, б).

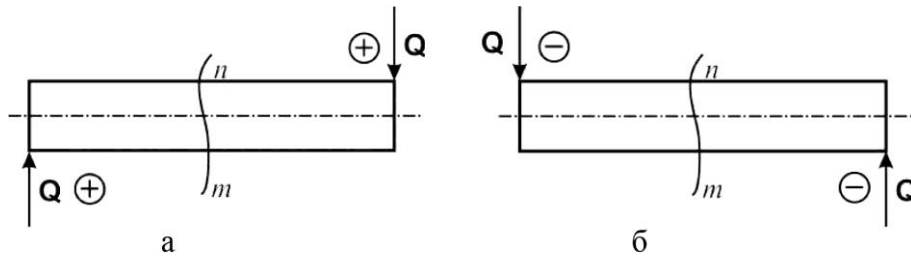


Рисунок 4.4 – Правило знаків для визначення поперечної сили:

а – додатне значення поперечної сили; б – від'ємне значення поперечної сили

Використовуючи наведені правила, внутрішні зусилля в кожному випадку мають такі значення:

1 випадок

$$\sum Y = 0 \rightarrow Q_y(x) = 0;$$

$$\sum M_z(x) = 0 \rightarrow M_z = M_0;$$

2 випадок

$$\sum Y = 0 \rightarrow Q_y(x) = F;$$

$$\sum M_z(x) = 0 \rightarrow M_z = -F \cdot x.$$

Інші рівняння рівноваги тотожно дорівнюють нулю. Таким чином, у загальному випадку плоского згину в перерізі балки з шести внутрішніх зусиль виникає лише два – згинальний момент  $M_z$  і поперечна сила  $Q_y$  (при згині відносно іншої головної осі – згинальний момент  $M_y$  і поперечна сила  $Q_z$ ).

Разом із тим, відповідно до двох розглянутих випадків навантаження, плоский згин можна підрозділити на чистий і поперечний.

**Чистий згин** – плоский згин, за якого в перерізах стержня з шести внутрішніх зусиль виникає тільки одне – згинальний момент (перший випадок).

**Поперечний згин** – згин, за якого в перерізах стержня виникає згинальний момент і поперечна сила (другий випадок).

**Загальний підхід до визначення внутрішніх зусиль при згині.** Для балки нескінченної протяжності, що зображена на рисунку 4.5, виберемо початок координат з лівої сторони балки. Внутрішні зусилля балки знаходимо за допомогою методу перерізів. Запишемо рівняння рівноваги для перерізу балки, який знаходиться на відстані  $x$  від початку координат.

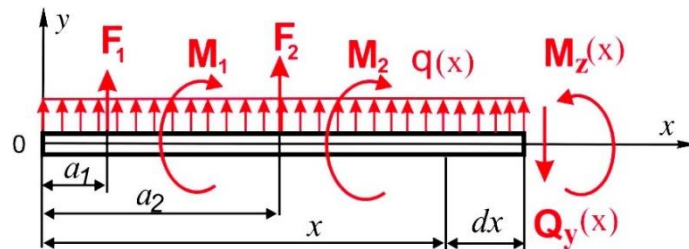


Рисунок 4.5 – Схема для визначення внутрішніх зусиль балки

Запишемо рівняння рівноваги балки:

$$\sum Y = 0,$$

$$\sum Y = F_1 + F_{12} + q(x) \cdot x - Q_y(x) = 0,$$

$$Q_y(x) = F_1 + F_{12} + q(x) \cdot x.$$

У загальному випадку цей вираз має такий вигляд:

$$\sum Y = 0,$$

$$\sum Y = \sum_{i=1}^n F_i + \int_0^x q(x) dx - Q_y(x) = 0,$$

$$Q_y(x) = \sum_{i=1}^n F_i + \int_0^x q(x) dx.$$

З попередніх виразів можна зробити висновок, що поперечна сила в довільному перерізі дорівнює алгебраїчній сумі усіх зовнішніх сил, які діють з однієї сторони від перерізу  $x$  із урахуванням правила знаків.

Далі запишемо рівняння для згинальних моментів балки. Вони матимуть такий вигляд:

$$\sum M_z = 0,$$

$$F_1 \cdot (x - a_1) + F_2 \cdot (x - a_2) + M_1 + M_2 + q(x) \cdot x \cdot \frac{x}{2} - M_z(x) = 0,$$

$$M_z(x) = F_1 \cdot (x - a_1) + F_2 \cdot (x - a_2) + M_1 + M_2 + q(x) \cdot x \cdot \frac{x}{2}.$$

У загальному випадку цей вираз має вигляд:

$$\sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n F_i(x - a_i) + C_q \int_0^x q(x) dx - M_z(x) = 0,$$

$$M_z(x) = \sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n F_i(x - a_i) + C_q,$$

де  $C_q$  – множник, що дорівнює координаті центру тяжіння розподіленого навантаження.

З попередніх формул можна зробити висновок, що згинальний момент балки в довільному перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх зовнішніх сил, які діють з однієї сторони від перерізу  $x$  і визначені відносно центра тяжіння цього перерізу з урахуванням правила знаків.

### 4.3 Диференціальні залежності при згині

Встановимо зв'язки між внутрішніми зусиллями і зовнішніми навантаженнями при згині балки.

Розглянемо стержень, який закріплено довільним чином і навантажено розподіленим навантаженням  $q = f(x)$ . Прийнятий на рисунку 4.6 напрям для розподіленого навантаження будемо вважати додатним.

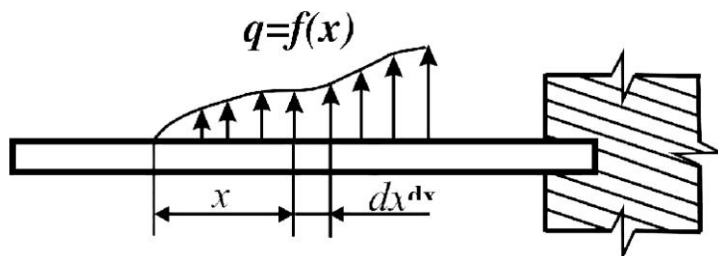


Рисунок 4.6 – Зображення стержня з розподіленим навантаженням

Для зручності запису позначимо:  $M = M_z$ ,  $Q = Q_y$ . Оскільки  $Q$  і  $M$  в загальному випадку змінюються вздовж осі балки, то в перерізі елементу  $dx$  виникнуть поперечні сили  $Q$  і  $Q + dQ$ , а також згинальні моменти  $M$  і  $M + dM$  відповідно (рис. 4.7).

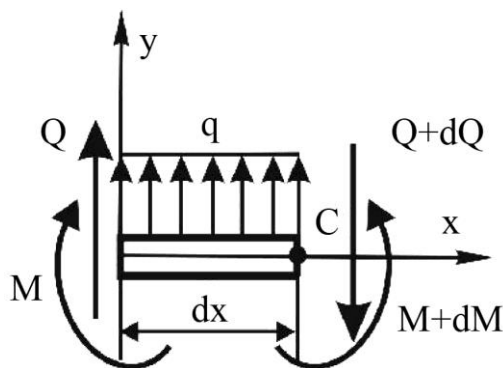


Рисунок 4.7 – Зображення елемента довжиною  $dx$  стержня

Запишемо рівняння рівноваги для цього елемента довжиною  $dx$ . Сума проєкцій всіх сил на вертикальну вісь  $y$  та сума моментів всіх сил відносно точки  $C$  повинна дорівнювати нулю, у результаті отримаємо такі рівняння:

$$\sum Y = Q + qdx - Q - dQ = 0,$$

$$\sum M_C = M + Qdx + qdx \frac{dx}{2} - M - dM = 0.$$

Після спрощення попередніх рівнянь, отримаємо такі рівняння:

$$q = \frac{dQ}{dx}, \quad Q = \frac{dM}{dx}.$$

Підставляючи в перше рівняння залежність поперечної сили від згинального моменту, отримаємо таке рівняння:

$$q = \frac{d^2M}{dx^2}.$$

Отримані рівняння називають **диференціальними залежностями Журавського за умови згину балки.**

#### 4.4 Правила перевірки правильності побудови епюр

Перевірку правильності побудови епюр  $Q_y$  і  $M_z$  виконаємо за такою схемою.

1. Епюра  $M_z$  на ділянці між зосередженими силами, а також між зосередженими силою та моментом, і між початком або кінцем дії рівномірно розподіленого навантаження та зосередженими силою та моментом завжди змінюється за законом прямої лінії, що має нахил до осі елемента, а в межах дії рівномірно розподіленого навантаження за законом квадратної параболи, що має опуклість у бік її дії, якщо епюра побудована з боку розтягнутого волокна.

2. Під точкою докладання зосередженої сили епюра  $M_z$  має злам, вістря якого направлене у бік дії сили, якщо епюра побудована з боку розтягнутого волокна.

3. На епюрі  $M_z$  у місці дії зосередженого моменту  $M$  спостерігається стрибок, що дорівнює його величині.

4. Над шарнірними опорами двохарнірної балки згинальний момент може бути лише в тих випадках, коли в опорних перерізах прикладені зосереджені моменти або коли на консолях, розташованих за опорами, прикладені

навантаження. У всіх інших випадках згинальні моменти в шарнірах дорівнюють нулю.

5. На ділянці дії рівномірно розподіленого навантаження згинальний момент досягає екстремального значення  $M_z = M^{max}$  у тому перерізі, де поперечна сила  $Q_y$  переходить через нуль та змінює при цьому знак.

6. Поперечна сила  $Q_y$  на ділянці дорівнює нулю в тому випадку, якщо у всіх перерізах по довжині цієї ділянки згинальний момент має постійне значення, тобто  $M_z = const$ .

7. Епюра поперечної сили  $Q_y$  постійна на ділянках між зосередженими навантаженнями і змінюється за законом похилої прямої лише на ділянках, де діє рівномірно розподілене навантаження.

8. Епюра поперечної сили  $Q_y$  у точках докладання зосереджених вертикальних сил ( $P, F, R_A, R_B$ ) має стрибки, що дорівнюють по величині прикладеним у цих перерізах зосередженим силам, причому напрям стрибків завжди збігається з напрямом цих сил.

#### 4.5 Визначення нормальних напружень при згині балки

Розглянемо простий випадок згину балки – чистий згин, за якого в поперечних перерізах балки діє тільки одне внутрішнє зусилля – згинальний момент.

Виведемо формулу для визначення нормального напруження для чистого згину балки. Під час розрахунку балки на згин вважатимемо справедливими прийняті раніше гіпотези, з яких виділимо такі:

- **гіпотеза плоских перерізів (Бернуллі):** поперечні перерізи, які є плоскими до деформації балки, залишаються плоскими і в деформованому стані;
- **гіпотеза постійності напруження по ширині бруса;**
- **гіпотеза відсутності бокових тисків:** бокові волокна бруса не давлять одне на одне.

**Статична сторона задачі.** Щоб визначити напруження в поперечних перерізах балки, розглянемо статичну сторону задачі. Застосовуючи метод перерізів і складаючи рівняння рівноваги для відсіченої частини балки, знайдемо внутрішні зусилля за умови її згину (рис. 4.8). Як було показано раніше, єдиним внутрішнім зусиллям, яке діє в перерізі бруса при чистому згині, є внутрішній згинальний момент, отже в перерізі виникне пов'язане з ним нормальне напруження.

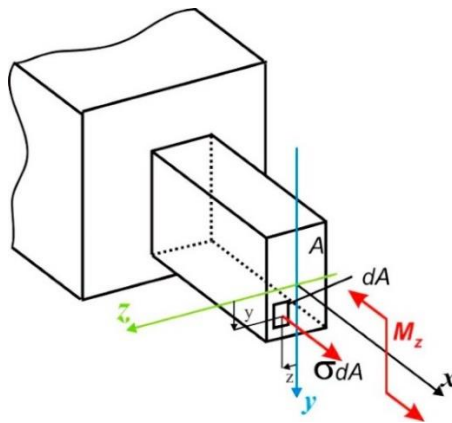


Рисунок 4.8 – Зображення відсіченої частини балки за умови чистого згину

Зв'язок між внутрішніми зусиллями і нормальним напруженням в поперечному перерізі  $A$  балки знайдемо, якщо розглянемо напруження на елементарній площині  $dA$ , яка виділена в точці з координатами  $y$  і  $z$  (вісь  $y$  для зручності аналізу спрямована вниз). З урахуванням сказаного вище, можна записати такі рівняння рівноваги для виділеної елементарної площини так:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 \rightarrow N = 0 \rightarrow \int_A \sigma dA = 0, \\ \sum M_y &= 0 \rightarrow M_y = 0 \rightarrow \int_A \sigma y dA = 0, \\ \sum M_z &= 0 \rightarrow M_z = 0 \rightarrow \int_A \sigma z dA = M_z. \end{aligned}$$

З отриманих виразів видно, що задача визначення напруження в поперечних перерізах балки є внутрішньо статично невизначеною, оскільки є

невідомим характер розподілу нормального напруження за перерізом. Для розв'язання задачі необхідно розглянути геометричну картину деформацій.

**Геометрична сторона задачі.** Розглянемо деформацію елемента балки довжиною  $dx$  (рис. 4.9, а), у довільній точці з координатою  $x$  для випадку чистого згину балки.

Після згину балки переріз балки обернеться відносно нейтральній осі на кут  $d\varphi$ , при цьому волокно  $ab$  (рис. 4.9, в), яке знаходиться на відстані  $y$  від нейтральної осі, перетвориться на дугу  $a_1b_1$ , а його довжина зміниться на деяку величину. Довжина волокон, що лежать на нейтральній осі, не змінюється, а тому дуга  $a_0b_0$  (радіус кривини якої позначимо  $\rho$ ) має ту ж довжину, що і відрізок  $a_0b_0$  до деформації  $a_0b_0 = dx$  (рис. 4.9, б).

Відносну лінійну деформацію волокна  $ab$  зігнутої балки позначимо через  $\varepsilon_x$  і знайдемо за такими формулами:

$$\varepsilon_x = \frac{(a_1b_1 - a_0b_0)}{a_0b_0} = \frac{[(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi]}{\rho d\varphi},$$

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}.$$

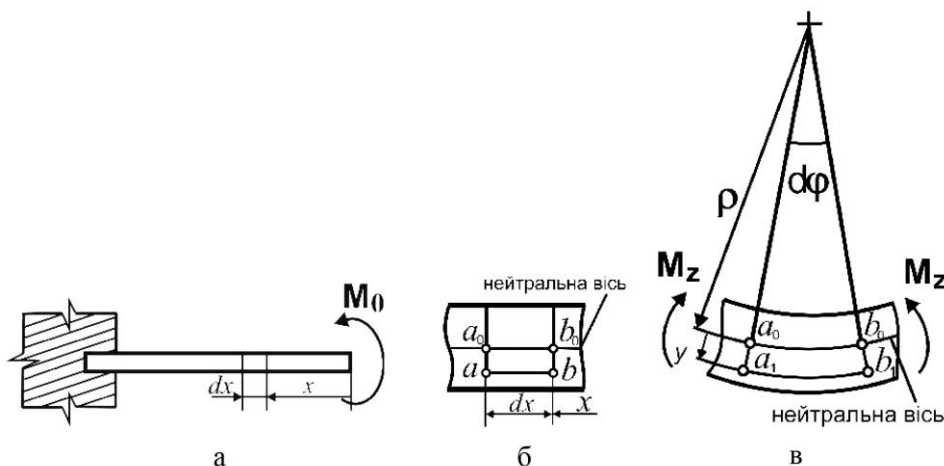


Рисунок 4.9 – Зображення елемента балки довжиною  $dx$ :

а – зображення балки; б – елемент балки довжиною  $dx$  до деформації;

в – елемент балки довжиною  $dx$  після деформації



**Фізична сторона задачі.** Враховуючи те, що відповідно до гіпотези щодо відсутності бічних тисків нормальні напруження  $\sigma_y$  та  $\sigma_z$  дорівнюють нулю, закон Гука за умови згину балки, який пов'язує нормальне напруження  $\sigma_x$  та лінійну деформацію  $\varepsilon_x$ , запишеться так:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x,$$

де  $E$  – модуль пружності (модуль Юнга).

**Математична сторона задачі.** На підставі формул, отриманих під час розгляду геометричної і фізичної сторін задачі, отримаємо закон розподілу нормального напруження по перерізу балки так:

$$\sigma_x = E \frac{y}{\rho},$$

$$N = \int_A \sigma_x dA \rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \rightarrow S_z = 0,$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A yz dA = 0 \rightarrow I_{zy} = 0,$$

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA \rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = 0 \rightarrow \frac{EI_z}{\rho} = M_z.$$

З аналізу першого і другого отриманих виразів витікає, що осі  $y$  і  $z$  є головними центральними осями перерізу балки, а нейтральна вісь проходить через центр тяжіння перерізу. З останнього рівняння отримаємо формулу для визначення кривизни бруса  $\frac{1}{\rho}$  за умови згину балки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}.$$

Підставляючи отримане рівняння у формулу для визначення нормального напруження  $\sigma_x = E \frac{y}{\rho}$ , отримаємо рівняння для визначення нормальних напружень через згинальний момент:

$$\sigma_x = M_z \frac{y}{I_z},$$

де  $M_z$  – згинальний момент, який діє в заданому перерізі;

$y$  – координата точки перерізу, у якій визначається напруження;

$I_z$  – момент інерції перерізу відносно осі  $z$ .

З аналізу отриманого рівняння виходить, що значення нормального напруження за умови згину дорівнює нулю в точках, які знаходяться на нейтральній осі, і досягають екстремальних значень на поверхні балки, де значення координати  $y = |y|_{max}$ .

Беручи до уваги наведене вище знаходимо максимальне нормальне напруження за умови згину за такою формулою:

$$|\sigma|_{max} = |M_z| \frac{|y|_{max}}{I_z} \frac{|M_z|}{W_z},$$

де  $W_z = \frac{I_z}{|y|_{max}}$  – осьовий момент опору.

Таким чином, у разі згину умова міцності по нормальному напруженню може бути записана в такому вигляді:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma],$$

де  $[\sigma]$  – допустиме напруження.

**Визначення нормальних напружень  $\sigma_x$  для прямокутного перерізу балки.** Для визначення нормальних напружень  $\sigma_x$  (надалі  $\sigma_x$  позначаємо  $\sigma$ ) використовуємо рівняння:

$$\sigma = |M_{zmax}| \frac{y}{I_z}.$$

**Визначення нормальних напружень в двотаврового перерізу.** Для визначення нормальних напружень  $\sigma$  використовуємо рівняння:

$$\sigma = |M_{zmax}| \frac{y}{I_z},$$

де  $y$  – координата точки, у якій визначається нормальне напруження  $\sigma$ .

#### 4.6 Визначення дотичних напружень при плоскому згині

**Визначення дотичних напружень при поперечному згині балки.** При плоскому поперечному згині в перерізах балки одночасно діють згинальний момент  $M_z$  і поперечна сила  $Q_y$  (рис. 4.10).

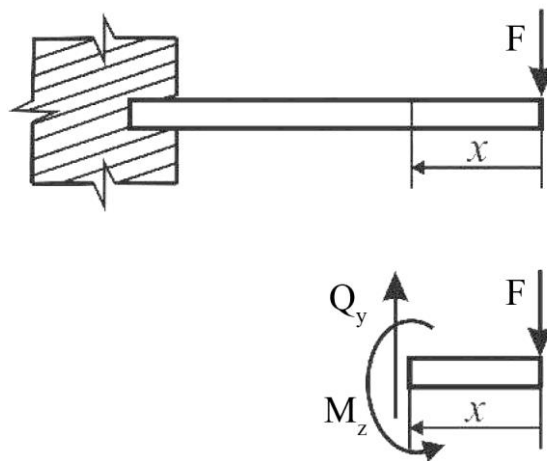


Рисунок 4.10 – Плоский поперечний згин балки

У такому випадку в поперечному перерізі балки виникають не лише нормальні  $\sigma$ , але і дотичні напруження  $\tau$ . Нормальні напруження при поперечному згині визначаються за тими ж формулами, що і при чистому згині:

$$\sigma_x = M_z \frac{y}{I_z}, \quad |\sigma|_{max} = \frac{|M_z|}{W_z}.$$

Виведемо залежності для визначення дотичного напруження  $\tau$  у разі поперечного згину балки.

Прийmemo гіпотези, які зроблять цю задачу статично визначеною:

1) дотичне напруження, що діє на однаковій відстані у від нейтральної осі, постійне по ширині бруса;

2) дотичні напруження всюди паралельні силі  $Q_y$ .

Розглянемо консольну балку прямокутного поперечного перерізу (рис. 4.11), яка знаходиться в умовах поперечного згину під дією сили  $F$ . Побудуємо епюри внутрішніх зусиль  $Q_y$  і  $M_z$ .

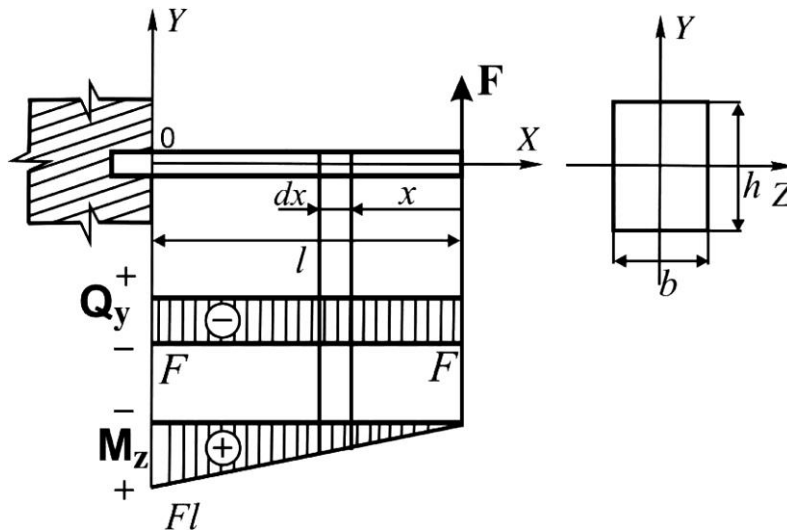


Рисунок 4.11 – Консольна балка, що знаходиться в умовах поперечного згину

На відстані  $x$  від вільного кінця балки виділимо елементарну ділянку балки  $abcd$  довжиною  $dx$  (рис. 4.12). Покажемо внутрішні зусилля, що діють по гранях елемента: на межі  $cd$  виникає поперечна сила  $Q_y$  і згинальний момент  $M_z$ , а на межі  $ab$  – поперечна сила  $Q_y$  і згинальний момент  $M_z + dM_z$  (оскільки  $Q_y$  залишається постійною по довжині балки, а згинальний момент  $M_z$  змінюється).

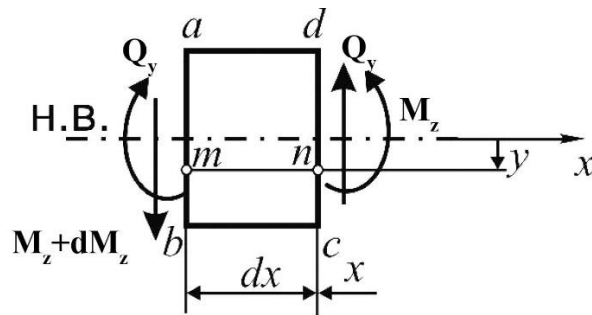


Рисунок 4.12 – Елементарна ділянка балки довжиною  $dx$

На відстані  $y$  (рис. 4.12) від нейтральної осі елемента  $abcd$  відсічемо частину  $mncn$ . Покажемо напруження, що діють на гранях отриманого елемента  $mncn$ , і розглянемо рівновагу даного елемента. На гранях, що є частиною зовнішньої поверхні балки, немає напруження. На бічних гранях елемента від дії згинального моменту  $M_z$  виникають нормальні напруження  $\sigma_x^*$  і  $\sigma_x^{**}$ :

$$\sigma_x^* = M_z \frac{y}{I_z}, \quad \sigma_x^{**} = (M_z + dM_z) \frac{y}{I_z}.$$

На бокових гранях елемента  $mncn$  від дії поперечної сили  $Q_y$  виникає дотичне напруження  $\tau$  (рис. 4.13), таке ж напруження виникає за законом парності дотичного напруження і на верхній грані елемента.

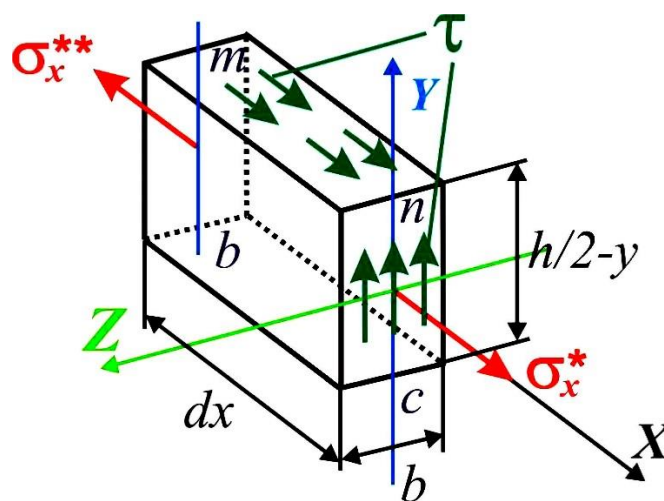


Рисунок 4.13 – Зображення елементарної ділянки балки  $mncn$

Складемо рівняння рівноваги елемента  $mbsn$ , проєктуючи рівнодійні розглянутого напруження на вісь  $x$ , у результаті чого матимемо такі рівняння:

$$\int_A \sigma_x^* dA - \int \sigma_x^{**} dA + \tau dx b = 0$$

$$\int_A M_z \frac{y}{I_z} dA - \int (M_z + dM_z) \frac{y}{I_z} dA + \tau dx b = 0,$$

$$\tau dx b - \frac{dM_z}{I_z} \int_A y dA = 0,$$

$$\int_A y dA = S_z^*,$$

де  $S_z^*$  – статичний момент бокової грані елемента  $mbsn$  відносно осі  $Z$ .

Беручи до уваги останнє позначення, отримаємо формулу для визначення дотичного напруження у такому вигляді:

$$\tau = \frac{dM_z}{dx} \frac{S_z^*}{bI_z}.$$

Згідно з диференціальними залежностями Журавського, за умови згину балки формула зв'язку поперечної сили і згинального моменту має такий вигляд:

$$Q_y \frac{dM_z}{dx}.$$

Тоді формулу для визначення дотичного напруження  $\tau$  за умови поперечного згину балки можна записати у вигляді (формула Журавського):

$$\tau = \frac{Q_y S_z^*}{bI_z},$$

де  $Q_y$  – поперечна сила в цьому перерізі;

$I_z$  – осьовий момент інерції перерізу відносно осі  $z$ ;

$b$  – ширина перерізу в тому місці, де визначається дотичне напруження;

$S_z^*$  – статичний момент відносно осі  $z$  частини перерізу, яка розташована вище або нижче за те волокно, де визначається дотичне напруження  $\tau$ .

## **5 КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ**

### **5.1 Кінематичний аналіз. Основні визначення**

Зовнішнє навантаження може викликати значні переміщення елементів споруди, внаслідок чого споруда може втратити свої експлуатаційні властивості та не відповідати вимогам надійної та безпечної експлуатації. Необхідно, щоб виконувалась така вимога: переміщення споруди мають бути **малими**. Розв'язанням цієї задачі на початковому етапі проектування займається спеціальний розділ будівельної механіки, який називається кінематичним аналізом.

**Кінематичний аналіз** – це аналіз геометричної структури споруди з метою виключення великих переміщень. При кінематичному аналізі зовнішнє навантаження зазвичай не розглядається, а елементи системи вважаються достатньо жорсткими.

У кінематичному аналізі розрізняються три типи розрахункових схем:

- 1) геометрично незмінні системи;
- 2) геометрично змінювані системи;
- 3) миттєво змінювані системи.

**Геометрично незмінна система (далі – ГНС)** – це система, переміщення якої можливі тільки за деформації її елементів. Простою ГНС є шарнірний трикутник, який зображено на рисунку 5.1, а. **Геометрично змінювана система**

**(ГЗС)** – це система, елементи якої можуть отримувати переміщення навіть без їхньої деформацій. Наприклад, змінюваним є шарнірний чотирикутник (рис. 5.1, б). **Миттєво змінювана система (далі – МЗС)** – система, здатна отримувати лише миттєві переміщення (рис. 5.1, в).

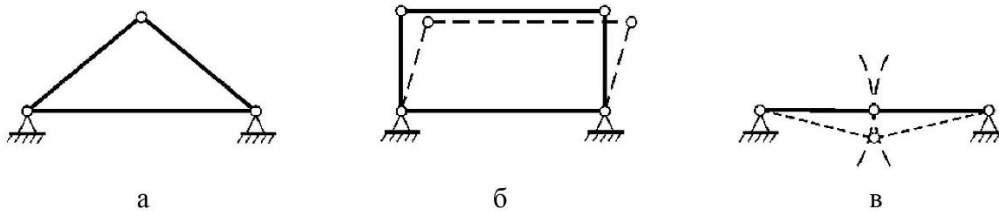


Рисунок 5.1 – Типи розрахункових схем

**Ступінь свободи. Кінематичні в'язі.** Кількісна оцінка кінематичних властивостей системи ґрунтується на визначенні її ступенів свободи як напрямів можливих незалежних переміщень. Число ступенів свободи ( $W$ ) – це мінімальне число незалежних параметрів, необхідних для визначення положення усіх точок системи. Такими параметрами можуть бути переміщення окремих точок, кути повороту елементів.

Число ступенів свободи простих систем можна визначати шляхом завдання їй елементам можливих переміщень (рис. 5.2).

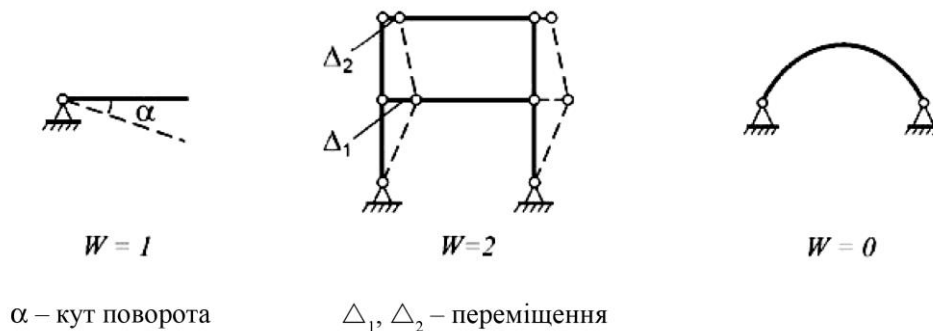


Рисунок 5.2 – Визначення числа ступенів свободи простих систем



Для вивчення складніших випадків введемо такі позначення в'язей:

- **диск (Д)** – незмінна частина системи, що складається з одного або декількох жорстко пов'язаних елементів (рис. 5.3, а);
- **шарнір (Ш)** – в'язь, що дає можливість взаємного повороту сусіднім дискам (рис. 5.3, б);
- **припаювання (П)** – в'язь, що жорстко закріплює сусідні диски (рис. 5.3, в);
- **стержень (С)** – в'язь, що обмежує переміщення диска в одному напрямі (рис. 5.3, г);
- **опорна в'язь (C<sub>0</sub>)** – в'язь, що обмежує переміщення диска в одному напрямі по відношенню до землі (рис. 5.3, д).

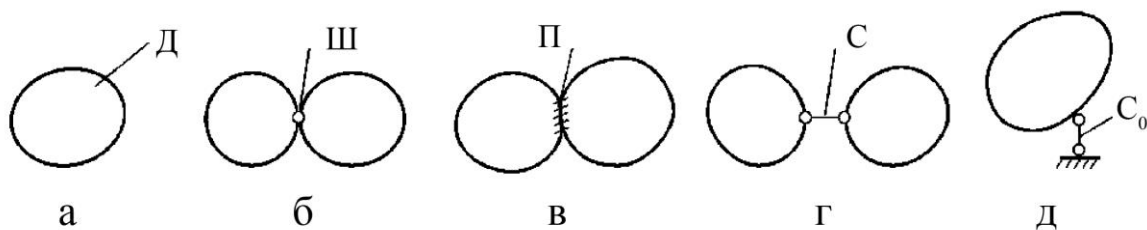


Рисунок 5.3 – Зображення позначень в'язей

Визначимо число ступенів свободи точки (рис. 5.4, а) та диска з різними кінематичними в'язями (рис. 5.4, б–д):

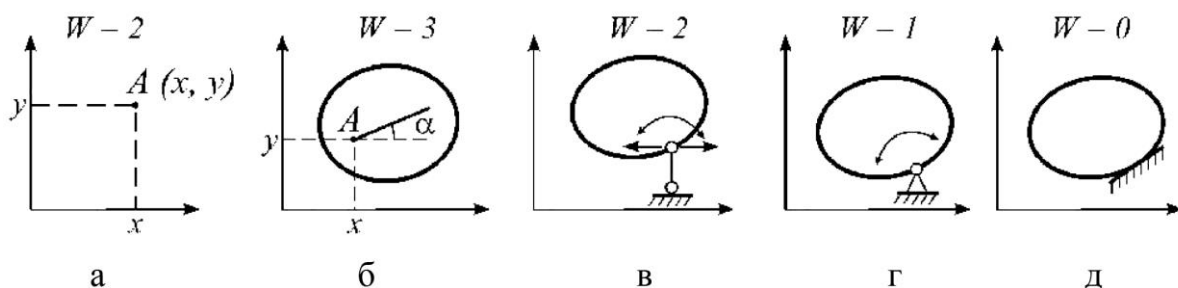


Рисунок 5.4 – Зображення визначення числа ступенів свободи точки та дисків

Варто зазначити, що стержень або опорна в'язь зменшують число ступенів свободи на одиницю, шарніри – на два ступеня, припаювання – на три ступені свободи.

Кінематичні в'язі повинні забезпечувати нерухомість системи відносно землі (підстави), а також незмінність її внутрішньої структури. Якщо за умови видалення однієї в'язі з незмінної системи вона стає змінюваною, то ця в'язь називається **необхідною**. Якщо після цього система залишається незмінною, то в'язь називається **зайвою**. В'язь, що сполучає систему із землею, називається **зовнішньою**, а що знаходиться усередині – **внутрішньою**.

Шарнір, що об'єднує два диски, називається **простим шарніром** (рис. 5.5, а). Якщо шарнір об'єднує декілька дисків, то він називається **кратним шарніром**. Кратний шарнір еквівалентний декільком простим шарнірам. Кратність шарніра визначається за такою формулою:

$$n_{Ш} = n_{д} - 1,$$

де  $n_{д}$  – число дисків, що об'єднуються шарніром.

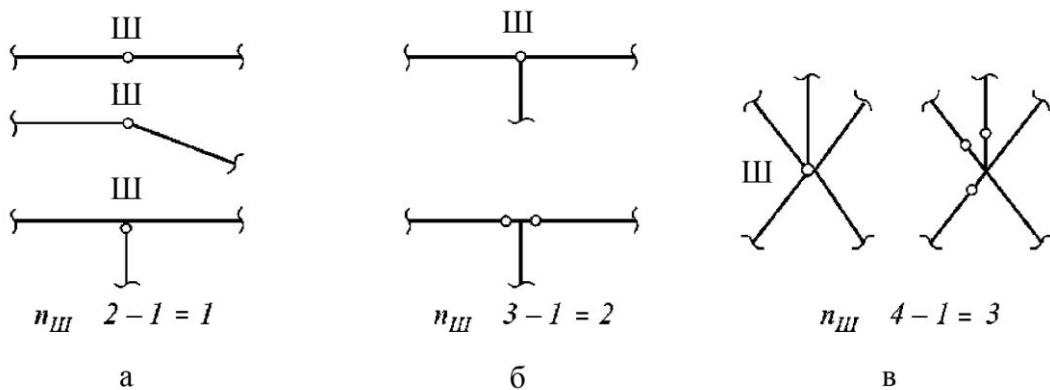


Рисунок 5.5 – Зображення видів кратних шарнірів

**Число ступенів свободи стержневої системи.** Розглядаючи розрахункову схему споруди як систему дисків, що об'єднані в'язями, отримуємо її дисковий

аналог. Для однієї і тієї саме системи доволі часто можна отримати декілька дискових аналогів.

Число ступенів свободи плоскої стержневої системи визначається за формулою, що називається **основною формулою кінематичного аналізу** і записується так:

$$W = 3n_d - 2n_{ш} - n_c - n_{c_0} - 3n_{п},$$

де  $n_d$  – число дисків у дисковому аналогу (рис. 5.4, а);

$n_{ш}$  – кількість простих шарнірів (рис. 5.4, б);

$n_c$  – кількість єднальних стержнів (рис. 5.4, г);

$n_{c_0}$  – кількість опорних в'язей (рис. 5.4, д);

$n_{п}$  – кількість припаювань (рис. 5.4, в).

Під час розрахунку ферми попередню формулу можна замінити такою:

$$W = 2n_y - n_c - n_{c_0},$$

де  $n_y$  – кількість вузлів ферми (вузлом вважається будь-який шарнір, що зв'язує стержні ферми);

$n_c$  – кількість єднальних стержнів;

$n_{c_0}$  – кількість опорних в'язей.

Після обчислення за цими формулами, можливі три випадки стану систем:

1)  $W > 0$  – така система геометрично змінювана і є механізмом;

2)  $W = 0$  – у системі є достатнє число в'язей; якщо вони введені правильно, то система незмінна і статично визначувана;

3)  $W < 0$  – у системі є зайві в'язі; якщо ці в'язі введені правильно, то система незмінна і статично невизначувана.

Звідси витікає, що розрахункова схема споруди повинна задовольняти необхідній умові геометричної незмінності, тобто  $W \leq 0$ .

**Поняття про миттєво змінні системи.** Розрахункова схема будь-якої інженерної споруди не має бути змінною або миттєво змінною. Якщо змінність

системи зазвичай виникає через нестачу в'язей, то миттєва змінність виникає за їхнього некоректного розташування (рис. 5.6, а, г, д, е).

Виявити миттєву змінність дуже важливо вже на етапі кінематичного аналізу, оскільки це дозволяє вносити корективи до розрахункової схеми споруди. Як приклад розглянемо балку (рис. 5.6, а) і з'ясуємо, чому вона є миттєво змінною.

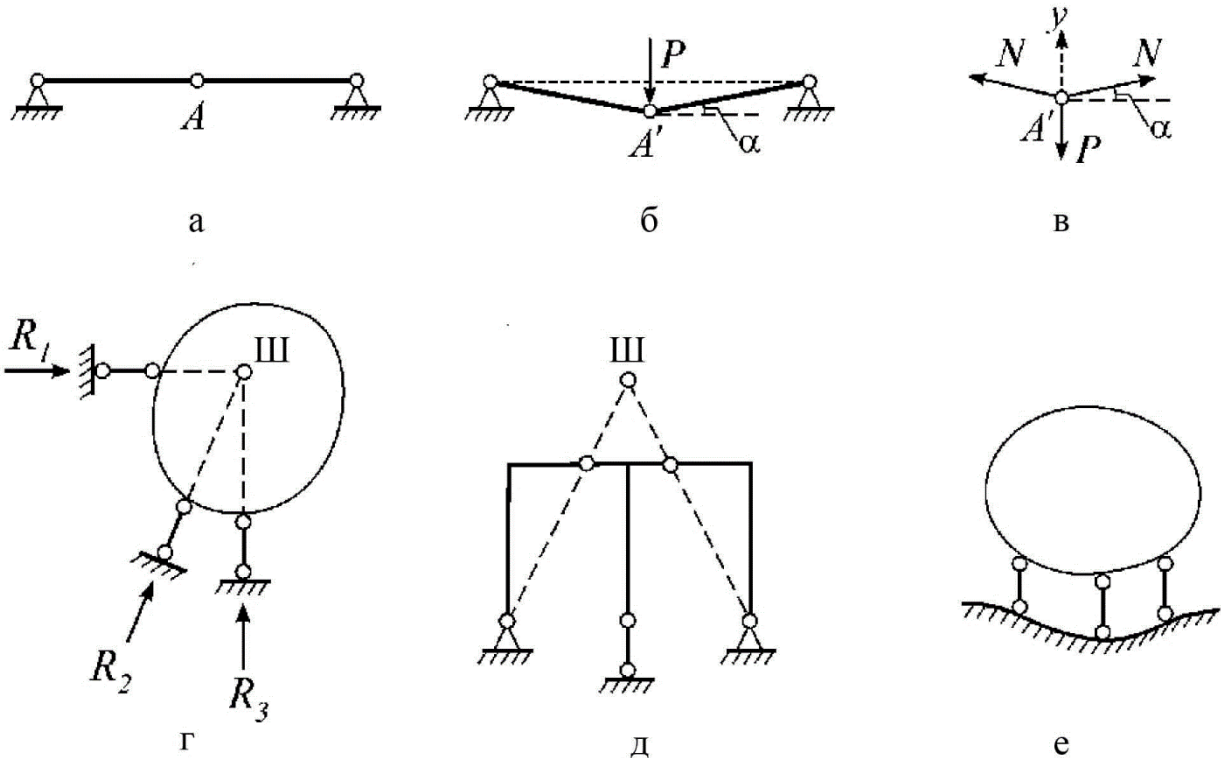


Рисунок 5.6 – Приклади змінної та миттєво змінної системи

1. Під час дії на цю балку зосередженої сили  $P$  її положення зміниться (рис. 5.6, б). Умова рівноваги системи сил, що сходяться, у точці  $A'$  (рис. 5.6, в):

$$\sum Y = 2N\alpha - P,$$

звідки

$$N = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

Якщо в цій формулі  $\alpha = 0$ , тобто коли стержні  $AB$  і  $BC$  лежать на одній прямій, то  $N = \infty$ . Таким чином, миттєва змінність небезпечна тим, що зусилля в елементах системи можуть бути дуже великими.

2. Якщо в останній формулі прийmemo  $P = 0$ , внутрішнє зусилля стає невизначеним ( $N = \infty$ ). Цей результат лежить в основі методу нульового навантаження. Суть цього методу полягає в видаленні всіх сил, що діють на систему, та обчисленні внутрішніх зусиль. Якщо всі сили та опорні реакції дорівнюватимуть нулю, то система є незмінною. Якщо хоч одне зусилля буде невизначеним (типу  $\infty$ ), то ця система є миттєво змінною.

**Загальні висновки.** Розрахункова схема споруди має бути геометрично незмінною. З метою перевірки геометричної незмінності виконується кінематичний аналіз, що складається з таких двох етапів:

1) кількісний аналіз – виконується за основною формулою кінематичного аналізу; також повинна виконуватися умова  $W \leq 0$ ;

2) якісний аналіз – виконується з використанням способів утворення геометрично незмінних систем.

## **5.2 Розрахунок стержневих систем на нерухомі навантаження.**

### **Консольно-балочні стержневі системи**

Важливим заданням розрахунку споруд є визначення їхнього напружено-деформованого стану. Перед розрахунком встановлюються геометричні розміри та форми елементів споруди, фізичні характеристики матеріалу, зовнішнє навантаження та особливості його дії. Опорні реакції визначаються за допомогою рівнянь рівноваги. Для визначення внутрішніх зусиль статично визначуваних систем застосовується метод перерізів. Далі будуються епюри поперечних та поздовжніх сил на будь-якій стороні від осі стержня, епюра згинального моменту будується на стороні розтягнутого волокна.

**Розрахунок консольно-балочних стержневих систем за допомогою «поверхової» схеми.** Залежно від розташування опор і шарнірів, розрізні балки можуть бути різними (рис. 5.7).

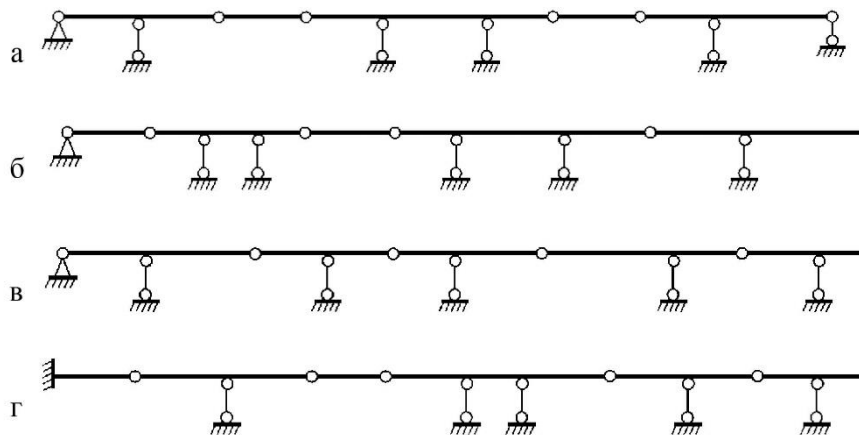


Рисунок 5.7 – Зображення багатопрогнових розрізних статично визначуваних балок

Для геометричної незмінності і статичної визначуваності розрізних балок повинна виконуватися така умова:

$$n_{\text{ш}} = n_{\text{с}_0} - 3.$$

Взаємодію частин розрізної балки легко вивчати шляхом складання їхніх «поверхових» схем. Для цього виявляються ті частини балки, які можуть самостійно нести зовнішнє навантаження (назвемо їх **головними балками**). Всі головні балки зображуються на нижньому поверсі. Частини балки, які примикають до головних балок (підвісні балки) і можуть нести навантаження лише при тому, що спираються на головні балки, зображуються поверхом вище і так далі. Таким чином вибудовується «поверхова» схема балки.

Наприклад, розглянуті на рисунку 5.7 розрізні балки можна подати у вигляді таких поверхових схем (рис. 5.8).

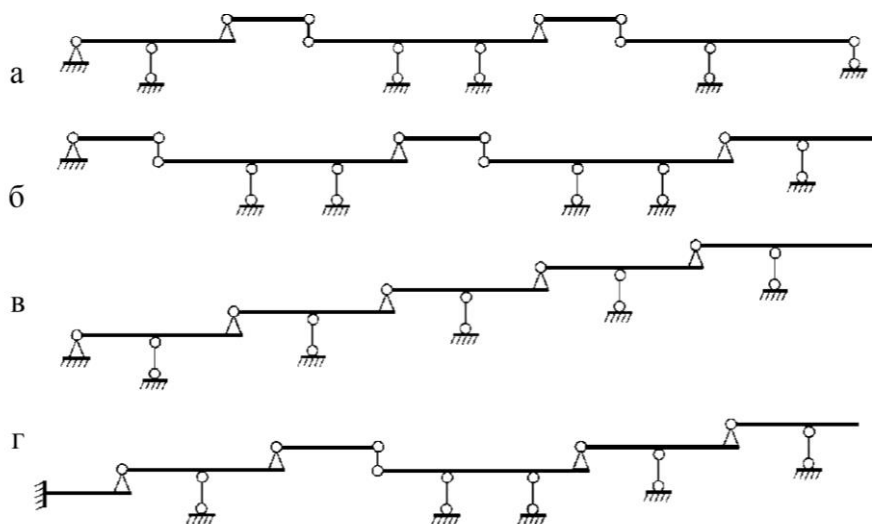


Рисунок 5.8 – Поверхові схеми розрізних балок

Розрахунок розрізних балок починається з самого верхнього поверху: визначаються опорні реакції і внутрішні зусилля цієї частини балки від її навантаження. Після цього переходять до поверху, що знаходиться нижче. Проте, окрім свого навантаження, до нього варто прикласти навантаження від вище розміщеного поверху (яке дорівнює реакції вище розміщеного поверху, але направлено в протилежний бік). Потім визначаються його реакції і внутрішні зусилля. Далі розрахунок триває до нижнього поверху.

### 5.3 Тришарнірні рами. Визначення зусиль у тришарнірних рамах

**Тришарнірна система** – це система з двох дисків, які зв’язані між собою та опорою за допомогою трьох шарнірів.

**Арка** – система криволінійних стержнів. До статично визначуваних систем відносяться тришарнірні арки, що мають шарнірні опори на краях і один проміжний шарнір, найчастіше – центральний шарнір (рис. 5.9).

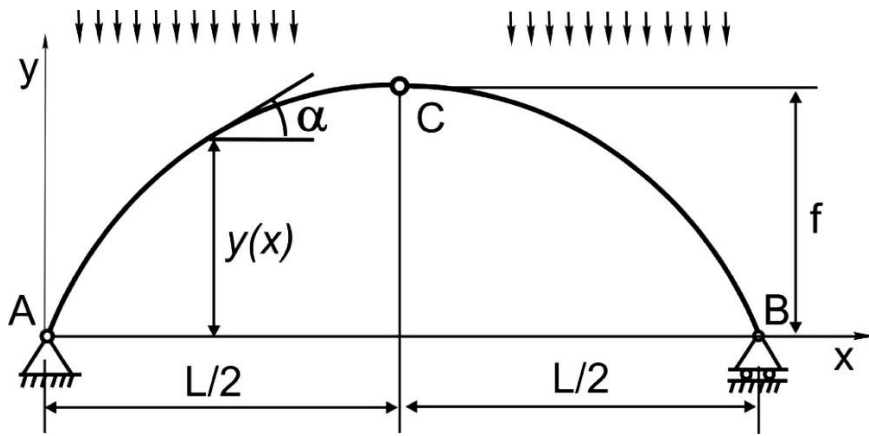


Рисунок 5.9 – Схема арки з центральним шарніром

Тришарнірні системи бувають двох видів: арочні (рис. 5.10, а) та підвісні системи (рис. 5.10, б).

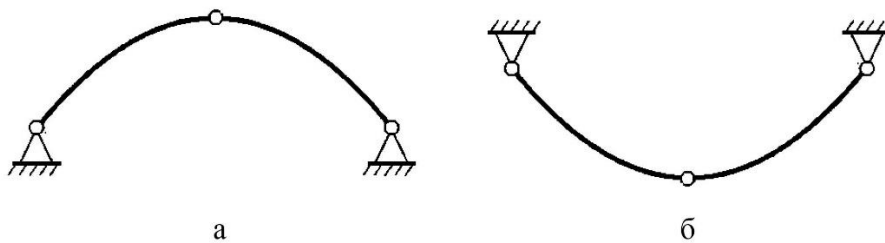


Рисунок 5.10 – Зображення тришарнірних систем

а – зображення арочної системи; б – зображення підвісної системи

Розрахунок цих систем мало відрізняється один від одного. Тому зупинимося на арочних системах, які бувають трьох типів: тришарнірні рами (рис. 5.11, а), тришарнірні арочні ферми (рис. 5.11, б) і тришарнірні арки (рис. 5.11, в).



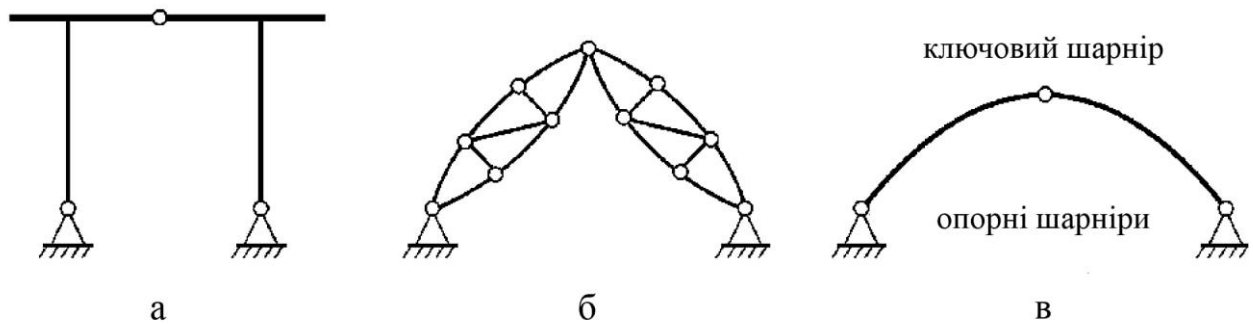


Рисунок 5.11 – Типи аровчих систем:

а – зображення тришарнірних рам; б – зображення тришарнірних аровчих ферм; в – зображення тришарнірних арок

**Прогін арки** – відстань між її опорами (зазвичай позначається  $L$ ). Опору арки прийнято також називати п'ятою арки, центральний шарнір – замком арки, а відстань від прямої, що сполучає опорні шарніри до замку арки, – стрілою арки або стрілою підйому арки (позначається  $f$ ).

Арки відносяться до розпірних систем, тобто систем, в опорах яких, на відміну від безрозпірних систем, при дії тільки вертикального навантаження, виникає ненульове горизонтальне зусилля, що називається розпором.

Інженер-будівельник може зіткнутися з необхідністю вибору між безрозпірною системою (балкою) і системою розпору (аркою) для виконання перекриття деякого прогону, наприклад, мостового. При цьому арку порівнюють з відповідною балкою, тобто простою балкою на двох опорах, що перекриває такий же прогін і знаходиться під дією такого ж вертикального навантаження, яке діє на арку.

Частковим випадком тришарнірної арки є тришарнірна арка із затягуванням (рис. 5.12). **Затяжка** – горизонтальний стержень, призначений для повного або часткового сприйняття горизонтального розпору. Для того щоб система за наявності затягування залишилася статично визначуваною, одну опору арки роблять катковою (шарнірно-рухомою). У цьому випадку, за

відсутності горизонтальної складової навантаження, горизонтальні реакції в опорах будуть рівними нулю, а зтягування сприйматиме розпір повністю.

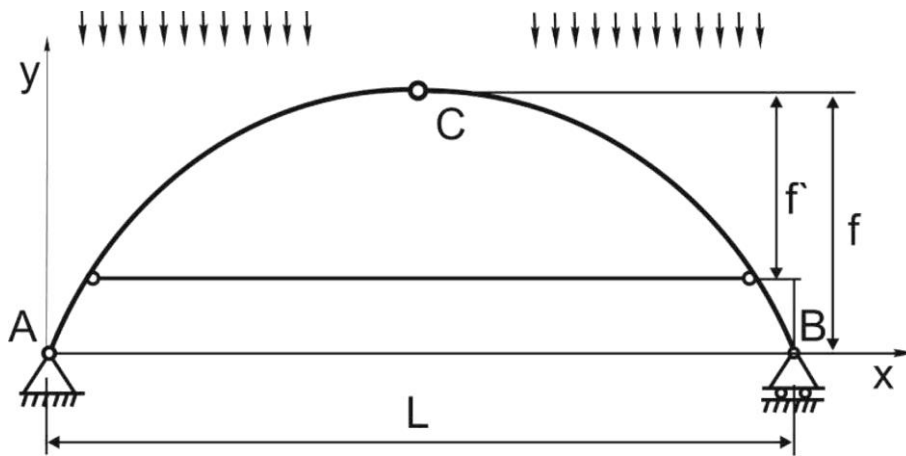


Рисунок 5.12 – Тришарнірна арка із зтягуванням

При навантаженні певного виду контур арки можна задати таким, щоб в ній не виникало згинальних моментів. Такі арки називають арками раціонального контуру.

**Завдання геометрії арки.** Під час завдання геометрії арки необхідно визначити величини прогону  $L$ , стріли  $f$ , та функцію  $y(x)$ , що описує контур осі арки (див. рис. 5.12). Для арки із зтягуванням, крім того, необхідно задати висоту над зтягуванням  $f'$  (див. рис. 5.12).

Задавши значення  $L$  і  $f$ , визначаємо положення трьох точок – опор і замку арки. Якщо додатково задати умови того, щоб вісь арки була окреслена по колу або по параболі, то положення цих трьох точок однозначно визначить функцію  $y(x)$ , оскільки через три точки можна провести тільки одне коло і тільки одну параболу.

За обрису осі арки по параболі, функція  $y(x)$  та кут  $\alpha$  нахилу дотичної до арки визначаються за такими формулами:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x); \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x).$$

За обрису арки по колу, функція  $y(x)$  та кут  $\alpha$  нахилу дотичної до арки визначаються так:

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f;$$

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f};$$

$$\sin \alpha = \frac{l - 2x}{2R};$$

$$\cos \alpha = \frac{y + R - f}{R}.$$

Для розрахунку тришарнірної арки можна скласти ще два рівняння відносно шарніра  $C$ , за допомогою якого з'єднуються дві криволінійні балки, що є частинами арки. Такими рівняннями буде сума алгебраїчних моментів всіх сил, що діють на ліву криволінійну балку або праву відносно шарніра  $C$ , що сполучає їх, (середнього шарніра), дорівнює нулю, тобто:

$$\sum M_C^{\text{лів}} = 0 \rightarrow H_A;$$

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0 \rightarrow H_B.$$

За відсутності горизонтальної складової зовнішнього навантаження горизонтальні реакції в опорах арки будуть рівні і направлені протилежно одна одній, що можна записати у вигляді формули так:

$$-H_A = H_B = H.$$

Для перевірки значень горизонтальних реакцій  $H_B$  та  $H_A$  складається рівняння рівноваги – сума проєкцій сил на вісь  $Y$ , тобто:

$$\sum Y = 0.$$

Горизонтальне зусилля  $H$ , що виникає в опорах, називається **розпором**.

**Визначення зусиль в арці при дії вертикальних навантажень.** Для визначення зусиль в арці в довільному перерізі  $K$  на відстані  $x$  (див. рис. 5.13) будемо використовувати формули:

- для згинального моменту:  $M_K = M_K^{\text{бал}} - H y_K$ ;
- для поперечного зусилля:  $Q_K = Q_K^{\text{бал}} \cos \alpha_K - H \sin \alpha_K$ ;
- для поздовжнього зусилля:  $N_K = -(Q_K^{\text{бал}} \sin \alpha_K + H \cos \alpha_K)$ ,

де  $M_K^{\text{бал}}$  – згинальний момент;

$Q_K^{\text{бал}}$  – поперечне зусилля для балки на двох опорах, яка має той же прогін, що і задана арка від навантаження, яке діє на арку у відповідному перерізі на довільній відстані  $x$  від лівої опори (див. рис. 5.13).

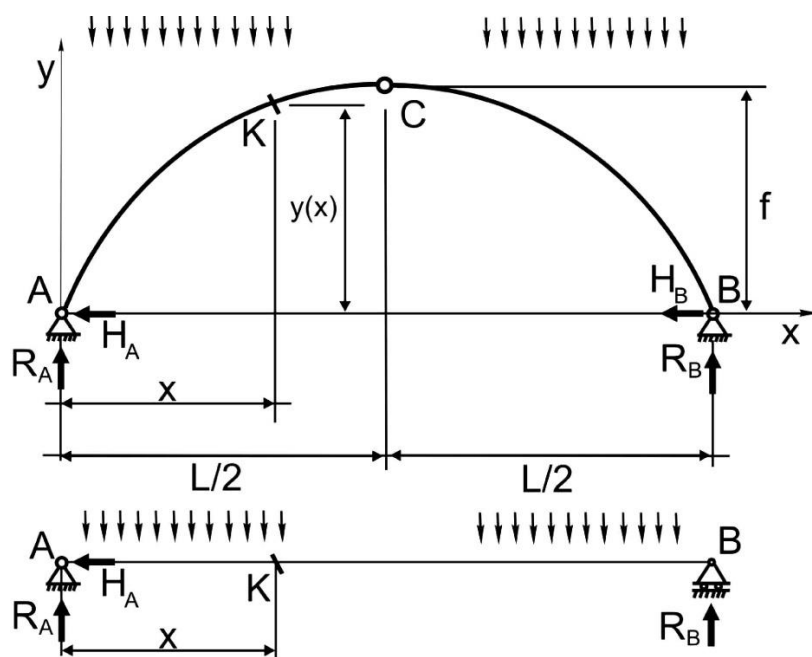


Рисунок 5.13 – Розрахункова схема тришарнірної арки

**Визначення зусиль у рамах при вертикальному навантаженні.** Тришарнірна рама складається з двох дисків –  $AC$  і  $BC$ , які з'єднані за допомогою одного шарніра  $C$  один з одним та двома шарнірами  $A$  і  $B$  з основою (рис. 5.14). Основа може розглядатися як третій диск. Отже, тришарнірна рама становить

з'єднання трьох дисків за допомогою трьох шарнірів, які не розташовані на одній прямій.

Для визначення опорних реакцій в тришарнірній рамі, як і в арці, складають такі рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \rightarrow R_A, \\ \sum M_A &= 0 \rightarrow R_B, \\ \sum M_C^{\text{лівих сил}} &= 0 \rightarrow H_B, \\ \sum M_C^{\text{правих сил}} &= 0 \rightarrow H_A. \end{aligned}$$

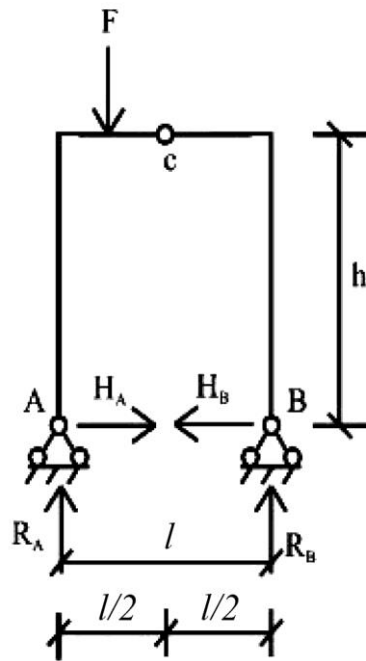


Рисунок 5.14 – Розрахункова схема тришарнірної арки

Внутрішніми зусиллями, які виникають у поперечних перерізах рами, є згинальні моменти  $M$ , поперечні сили  $Q$  та повздовжні сили  $N$ .

## 5.4 Розрахунок плоских ферм

**Фермою** називається стержнева система, що залишається геометрично незмінною після умовної заміни її жорстких вузлів шарнірними. Ферми мають призначення таке ж, як і балки суцільного перерізу, але застосовуються для перекриття значних прольотів, коли проектування суцільних балок (наприклад, двотаврових) стає економічно не вигідним внаслідок неповного використання матеріалу стінки, напруження в якій менше, ніж у полках (див. епюру нормальних напружень у поперечних перерізах балки на рис. 5.15), і необхідності потовщення вертикальної стінки у зв'язку з можливістю її випучування (при значній висоті стінки).

У таких випадках суцільну балку заміняють стержневою системою – фермою, елементи якої (стержні) при дії зосереджених навантажень, прикладених у вузлах, працюють на центральний стиск або розтягування. Це дає можливість значно краще використовувати матеріал ферми, тому що епюри нормальних напружень у поперечних перерізах кожного з її стержнів практично мають вигляд прямокутників. Тому ферма легше балки із суцільною стінкою, що має однакові з нею прогін і висоту. Прикладом ферми може бути система, що зображена на рисунку 5.15.

Крім плоских ферм, у яких осі всіх стержнів розташовані в одній площині, застосовуються просторові ферми, осі елементів яких не лежать в одній площині (рис. 5.16). Розрахунок просторової ферми в багатьох випадках вдається звести до розрахунку декількох плоских ферм. Відстань між осями опор ферми (рис. 5.17, а) називається **прогоном**; стержні, розташовані по зовнішньому контуру ферми, називаються поясами й утворюють **пояси**; стержні, що з'єднують пояси, утворюють решітку ферми та називаються: вертикальні – **стійками**, нахилені – **розкосами**.

Відстань між сусідніми вузлами будь-якого поясу ферми (зазвичай вимірюване по горизонталі) називається **панеллю**.

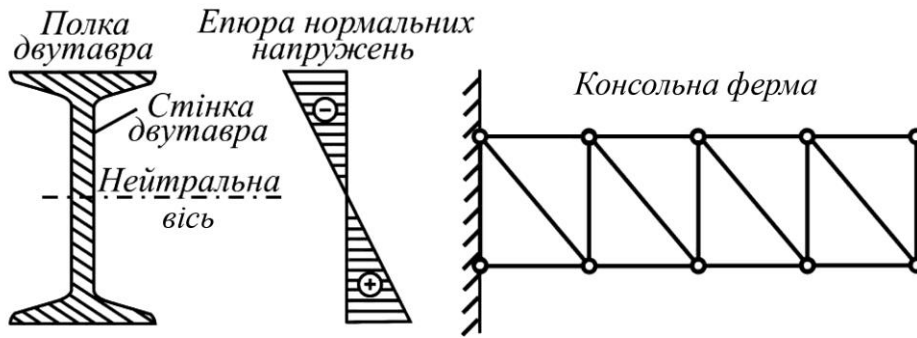


Рисунок 5.15 – Зображення еюри нормальних напружень у поперечних перерізах балки та прикладу ферми

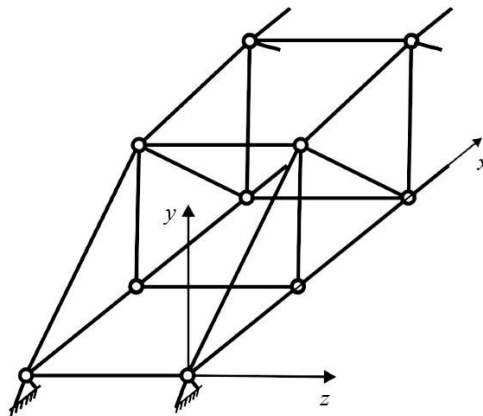
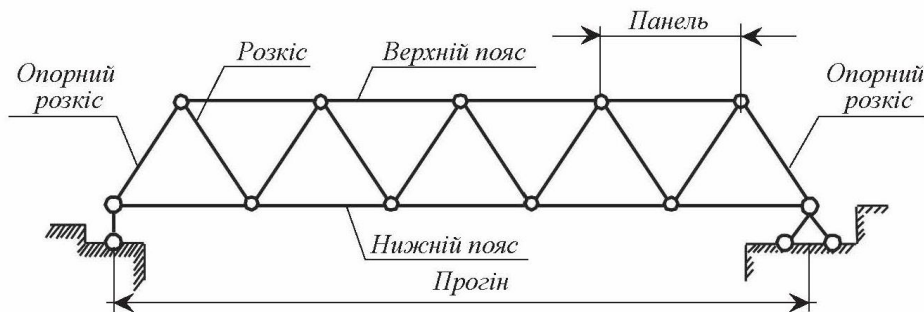


Рисунок 5.16 – Зображення просторової ферми

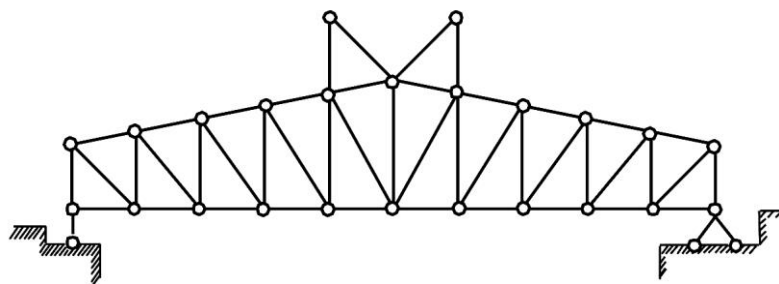
Класифікацію ферм проведемо за такими ознаками:

- 1) характер окреслення зовнішнього контуру;
- 2) тип ґратів;
- 3) тип обпирання ферми;
- 4) призначення ферми;
- 5) рівень проїзду.

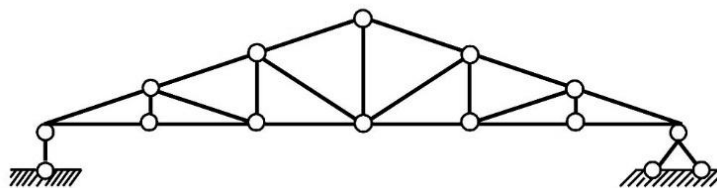
За характером окреслення розрізняють ферми з паралельними поясами (рис. 5.17, а), з похилим верхнім поясом, трапецієподібні (рис. 5.17, б) і ферми трикутного окреслення (рис. 5.17, в).



а



б



в

Рисунок 5.17 – Зображення видів ферм за характером окреслення

За типом ґратів ферми можна поділити на: ферми із трикутними ґратами (рис. 5.18, а); ферми з розкісними ґратами (рис. 5.18, б); ферми з напіврозкісними ґратами (рис. 5.18, в); ферми з ромбічними ґратами (рис. 5.18, г); двоґратчасті (рис. 5.18, д), багатоґратчасті (рис. 5.18, е).



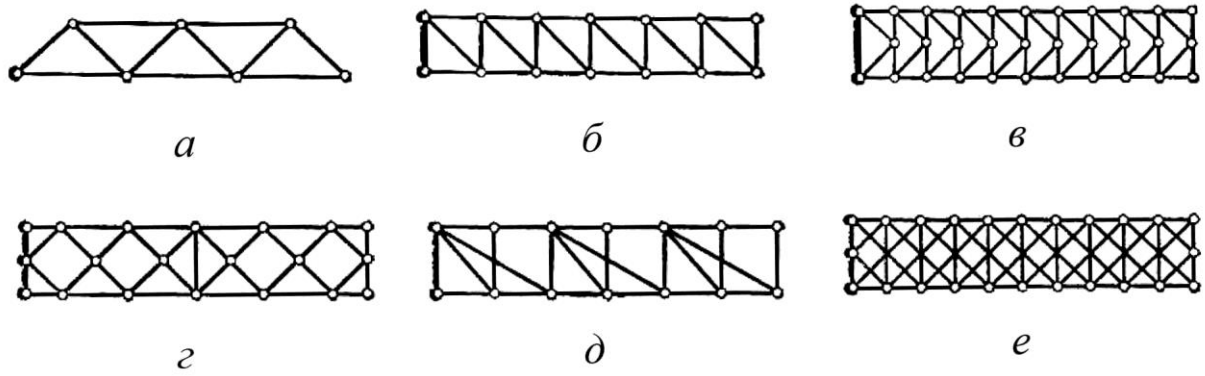


Рисунок 5.18 – Зображення видів ферм за типом ґратів

За типом обпирання ферми можуть бути: закріпленими біля обох кінців – балковими (рис. 5.19, а) або арковими (рис. 5.19, д, е); консольними – закріпленими з одного кінця (рис. 5.19, б); балково-консольними (рис. 5.19, в, г).

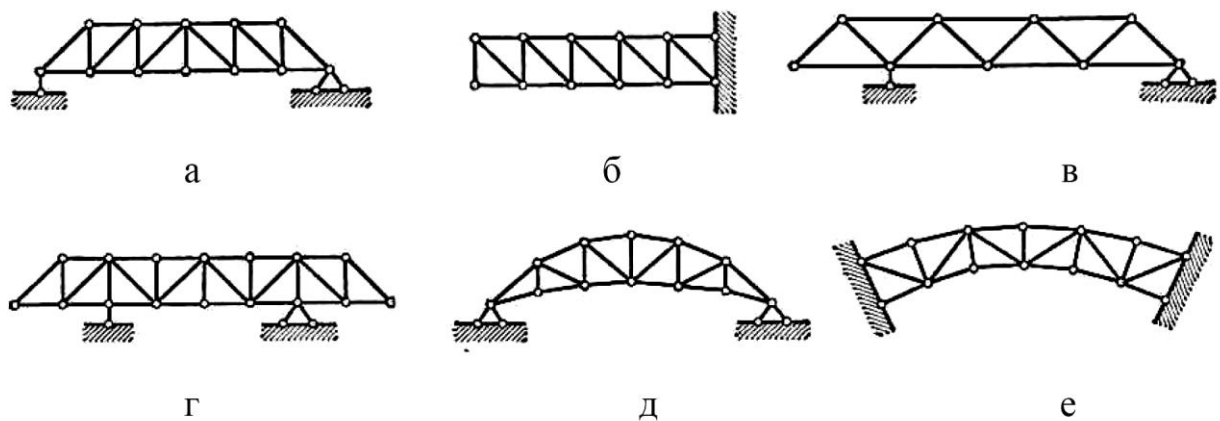


Рисунок 5.19 – Зображення видів ферм за типом обпирання

Залежно від призначення розрізняють ферми кроквяні (рис. 5.17, б), кранові (рис. 5.20, а), ферма каркасу цеху (рис. 5.20, б), баштові та ін.

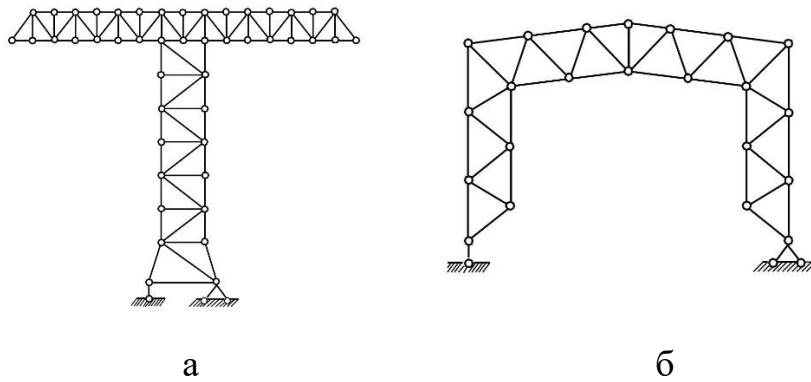


Рисунок 5.20 – Зображення видів ферм за призначенням

Мостові ферми залежно від рівня проїзду можна поділити на такі: проїзд понизу (рис. 5.21, а); проїзд поверху (рис. 5.21, б); проїзд всередині (рис. 5.21, в).

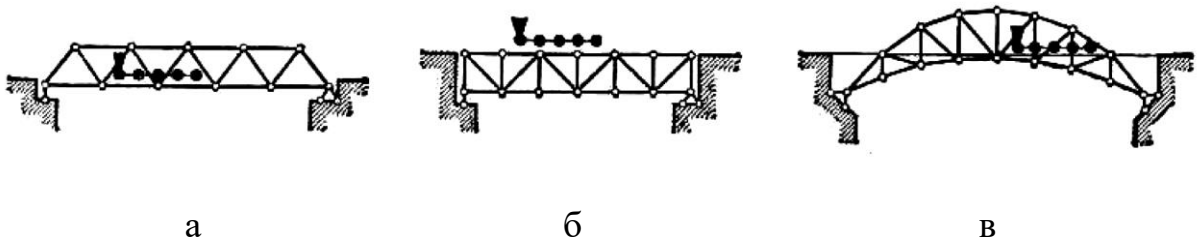


Рисунок 5.21 – Зображення видів ферм залежно від рівня проїзду

**Визначення зусиль у стержнях найпростіших ферм.** Ферми, утворені із шарнірного трикутника шляхом послідовного приєднання вузлів (причому кожного за допомогою двох стержнів, що не лежать на одній прямій), називаються **найпростішими**. Такі ферми геометрично незмінні й статично визначені.

Для будь-якої статично визначеної ферми можна скласти  $2K$  рівнянь статики (де  $K$  – число вузлів ферми), за допомогою яких можна знайти опорні реакції й внутрішні зусилля (поздовжні сили) у її стержнях від дії зовнішнього навантаження. Водночас насамперед визначають опорні реакції. Під час визначення реакцій складають три рівняння рівноваги для всієї ферми в цілому.

Для визначення внутрішніх зусиль варто виділяти перерізами вузли або окремі частини ферми й розглядати умови їхньої рівноваги під дією зовнішніх

навантажень і зусиль у розсічених стержнях. Усього можна скласти  $2K - 3$  таких умов (тобто незалежних друг від друга рівнянь). Виділення вузлів або частин ферми необхідно робити так, щоб зусилля в елементах ферми визначалися найбільш просто, за можливістю без спільного розв'язання системи рівнянь із багатьма невідомими. Це дозволяє не тільки значно спростити розрахунок, але й одержати більш точні результати.

Нижче наведені способи розрахунку, що дозволяють визначити внутрішнє зусилля в кожному з елементів ферми, зазвичай за допомогою одного рівняння з одним невідомим.

**Спосіб моментної точки.** Спосіб моментної точки застосовується переважно у тих випадках, коли вдається розсікти ферму на дві частини так, щоб при цьому перерізними виявилися три її стержні, напрямки осей яких не перетинаються в одній точці (див., наприклад, переріз  $I-I$  на рис. 5.22, ліворуч). Напрямки осей трьох таких перерізнаних стержнів перетинаються попарно в трьох точках, що не лежать на одній прямій (рис. 5.22, праворуч).

Складаючи послідовно рівняння моментів всіх сил (зовнішніх і внутрішніх), що діють на відсічену частину ферми, відносно цих трьох точок, будемо щоразу одержувати рівняння з одним невідомим, яке становить зусилля в розсічену стержні, не проходячи через розглянуту точку перетинання стержнів.

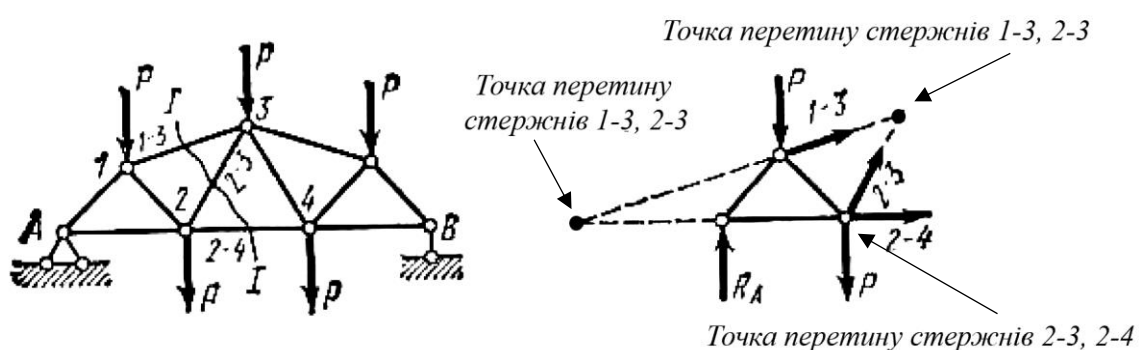


Рисунок 5.22 – Схема застосування способу моментної точки

Таким чином, для визначення зусилля в якому–небудь стержні необхідно розрізати ферму так, щоб у розріз, крім цього стержня, потрапили ще два інших (осі яких не сходяться з ним у загальній точці), після чого з рівняння моментів відносно точки перетинання осей цих двох стержнів можна легко визначити зусилля в цьому стержні. Точка перетинання осей двох стержнів, відносно якої складається рівняння моментів, називається **моментною**.

Під час складання рівнянь рівноваги всі невідомі зусилля в стержні ферми умовно вважаються додатними, тобто розтягувальними та спрямованими від вузлів. Якщо після розв'язання рівнянь яке-небудь зусилля виявиться від'ємним, то воно є стискаючим та спрямовано до вузла.

Перейдемо до прикладів розрахунку, що пояснює спосіб моментної точки. Умовимося зусилля в елементах ферми позначати буквою  $N$ . У цій букві внизу будемо ставити цифри, що відповідають вузлам ферми, до яких приєднаний цей стержень.

Розглянемо ферму, зображену на рисунку 5.23, а. Знайдемо зусилля в стержні 3–5. Для цього розсічемо ферму по лінії  $I-I$ , що перетинає розглянутий стержень 3–5 і два інших. Розрізавши в такий спосіб ферму на дві частини, одну з них відкинемо й розглянемо умову рівноваги іншої частини.

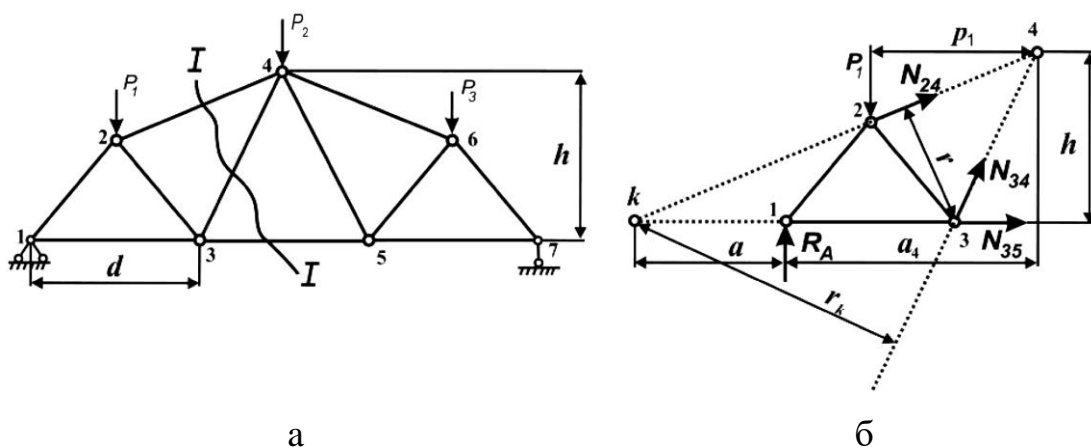


Рисунок 5.23 – Схема знаходження зусиль у стержнях ферми:

а – схема ферми; б – зображення розрахункової схеми лівої частини ферми

Завжди простіше розглядати ту частину ферми, на яку діє менше сил, а тому, у цьому випадку, розглянемо її ліву частину. Вона повинна залишатися в рівновазі під дією зовнішніх сил  $R_A$  і  $P_1$  та внутрішніх зусиль  $N_{24}$ ,  $N_{34}$ ,  $N_{35}$  у розсічених елементах; ці зусилля замінюють собою дію відкинутої правої частини ферми на ліву (рис. 5.23, б).

Для визначення невідомого зусилля  $N_{35}$  за допомогою одного рівняння з одним невідомим складемо суму моментів всіх сил, що діють на ліву частину ферми, відносно точки перетинання розсічених стержнів 2–4 й 3–4 тобто точки 4. Ця точка при визначенні зусилля в стержні 3–5 буде моментною точкою.

Сума моментів всіх сил, що діють на ліву частину ферми відносно точки 4, має вигляд:

$$M_4 = R_A a_4 - P_1 p_1 - N_{35} h = 0,$$

звідки

$$N_{35} = \frac{(R_A a_4 - P_1 p_1)}{h} = \frac{M_4^0}{h},$$

де  $h$  – плече зусилля  $N_{35}$  відносно моментної точки, рівне в цьому випадку висоті ферми;

$M_4^0$  – момент всіх зовнішніх (включаючи й опорну реакцію) сил, прикладених до виділеної частини ферми відносно вузла 4.

Визначимо зусилля в елементі 2–4 верхнього поясу ферми. Для цього складемо вираження моменту всіх сил, що діють на відсічену ліву частину ферми, відносно моментної точки (тобто вузла 3 див. рис. 5.23, б):

$$\sum M_3 = R_A d - P_1 \frac{d}{2} + N_{24} r = 0,$$

звідки

$$N_{24} = -\frac{\left(R_A d - P_1 \frac{d}{2}\right)}{r} = -\frac{M_3^0}{r}.$$

Для визначення зусилля  $N_{34}$ , що виникає в розкосі 3–4, складемо рівняння моменту всіх сил відносно точки  $k$ , що розташована поза контуром ферми (див. рис. 5.23, б), у якій перетинаються осі стержнів 2–4 й 3–5:

$$\sum M_k = -R_A a + P_1 \left( a + \frac{d}{2} \right) - N_{34} r_k = 0,$$

звідки

$$N_{34} = \frac{P_1 \left( a + \frac{d}{2} \right) - R_A a}{r_k} = \frac{M_k^0}{r_k}.$$

Отже, при застосуванні способу моментної точки числова величина зусилля визначається:

$$N = \frac{\text{момент зовнішніх сил}}{\text{плече зусилля}} = \frac{M}{r}.$$

Тут  $M$  становить момент сил, що діють на відсічену частину ферми, відносно моментної точки, а  $r$  – плече шуканого зусилля відносно тієї ж точки.

Спосіб моментної застосовується у таких випадках.

1. При розрахунку ферм, коли можна провести розріз, що перетинає, крім цього стержня (зусилля в якому визначається), будь-яке число стержнів, що збігаються в одній загальній точці, яка не лежить на напрямку осі цього стержня.

2. Коли розріз перетинає більше трьох стержнів, що не сходяться в одній точці, якщо зусилля у всіх стержнях, крім трьох, уже відомі.

3. Розрахунку таких ферм, у яких можливо провести розрізи, що перетинають будь-яке число стержнів понад три, якщо при цьому кожен додатковий стержень перетинається двічі.

Як видно, під час розрахунків ферм за способом моментної точки кожне зусилля визначається за допомогою одного рівняння з одним невідомим. Разом із тим рівняння моментів складається так, що до складу його входять тільки діючі

на ферму зовнішні сили й одне зусилля в розрахунковому елементі, яке необхідно визначити. У цих випадках можлива помилка під час визначення зусилля лише в одному елементі, і вона не впливає на визначення зусилля в іншому елементі.

**Спосіб проєкцій.** Спосіб проєкцій застосовується переважно в таких двох варіантах:

1. Коли розглядається рівновага частини ферми (як і за способу моментної точки), якщо два із трьох розсічених стержнів паралельні один одному.

2. Коли розглядається рівновага виділених з ферми вузлів (спосіб вирізання вузлів).

Визначимо зусилля в елементах решітки ферми, що зображена на рисунку 5.24.

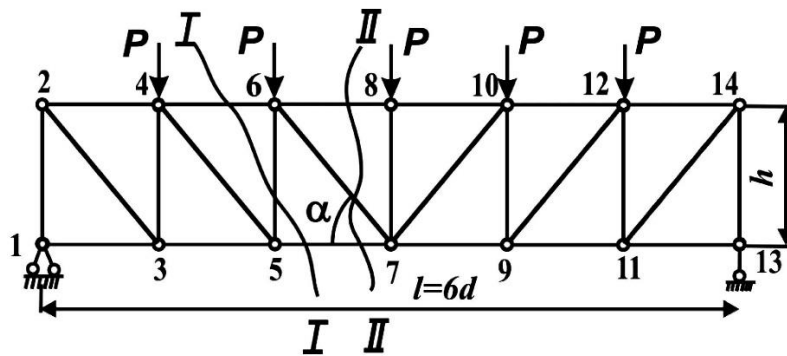


Рисунок 5.24 – Схема ферми, що знаходиться в стані рівноваги

Для визначення зусилля  $N_{56}$  розріжемо ферму перерізом  $I-I$ , що перетинає стержні 4–6, 5–6 й 5–7. Оскільки моментна точка для зусилля  $N_{56}$  внаслідок паралельності стержнів 4–6 й 5–7 перебуває в безкінечності, то скласти рівняння моментів відносно цієї точки неможливо. Тому складемо умову рівноваги у вигляді суми проєкцій всіх сил, що діють на відсічену частину ферми (рис. 5.25), на вісь, перпендикулярну її поясам (у це рівняння зусилля в поясах не ввійдуть, тому що вони перпендикулярні осі проєкцій):

$$\sum Y = R_A - P + N_{36} = 0,$$

звідки

$$N_{56} = -(R_A + P) = -Q,$$

де  $Q$  – поперечна сила в простій балці.

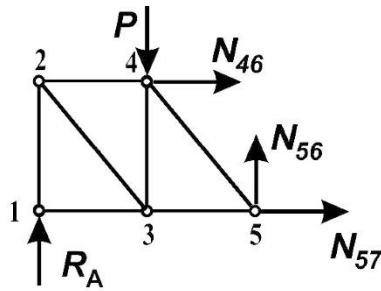


Рисунок 5.25 – Зображення перерізу ферми I–I, що знаходиться в стані рівноваги

Для визначення зусилля  $N_{67}$  розріжемо ферму по лінії II–II (див. рис. 5.26) і складемо рівняння рівноваги для лівої її частини (рис. 5.26):

$$\sum Y = R_A - P - P - N_{67} \sin \alpha = 0,$$

звідки

$$N_{67} = \frac{(R_A - 2P)}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \alpha},$$

де  $Q$  – поперечна сила в простій балці, що дорівнює  $R_A - 2P$ .

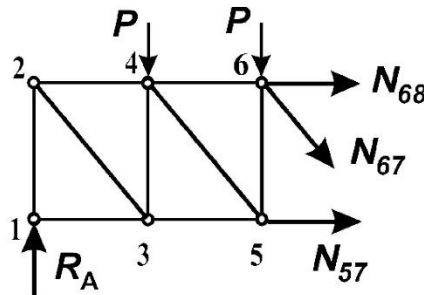


Рисунок 5.26 – Переріз ферми II–II, що знаходиться в стані рівноваги

При розрахунку найпростіших ферм всі зусилля можна визначити способом проєкцій, застосовуючи його послідовно до кожного вузла. При цьому визначення зусиль потрібно починати з вузла, у якому сходиться не більше двох стержнів.



Для прикладу визначимо зусилля в стержнях 1–2, 1–3, 2–3 та 3–5 ферми, зображеної на рисунку 5.27.

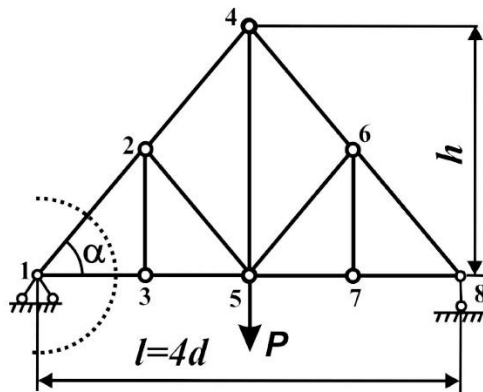


Рисунок 5.27 – Схема ферми, що знаходиться в стані рівноваги

Виріжемо спочатку лівий опорний вузол (рис. 5.28) і розглянемо умови його рівноваги.

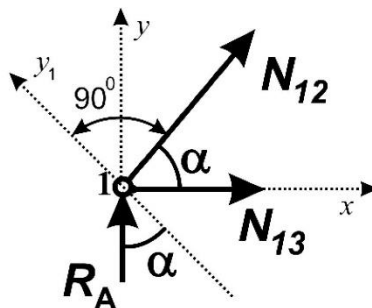


Рисунок 5.28 – Зображення рівноваги опорного вузла

Для визначення зусилля  $N_{12}$  знайдемо проєкції всіх сил на вісь, яка є перпендикулярною до напрямку стержня 1–3, тобто на вертикальну вісь  $y$ , у результаті матимемо таке рівняння:

$$\sum Y = R_A + N_{12} \sin \alpha = 0,$$

звідки

$$N_{12} = -\frac{R_A}{\sin \alpha}.$$

У цьому випадку  $R_A = \frac{P}{2}$ , а тому з попередньої формули визначимо значення зусилля  $N_{12}$  за такою формулою:

$$N_{12} = -\frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

Для визначення зусилля  $N_{13}$  знайдемо проєкції всіх сил, які діють на опорний вузол, на вісь, що є перпендикулярною до напрямку стержня 1–2, тобто на вісь  $y_1$ :

$$\sum Y_1 = R_A \cos \alpha - N_{13} \sin \alpha = 0,$$

звідки

$$N_{13} = \frac{R_A \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Відзначимо, що зусилля в стержні 1–3 можна було визначити з рівняння проєкцій всіх сил на вісь  $x$ :

$$\sum X = N_{13} + N_{12} \cos \alpha = 0,$$

звідки

$$N_{13} = -N_{12} \cos \alpha.$$

Підставивши в останнє рівняння значення зусилля  $N_{12}$ , отримане раніше, знайдемо:

$$N_{13} = +\frac{P \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Для визначення зусиль у стержнях 3–2 та 3–5 виріжемо вузол 3 і розглянемо умови його рівноваги (рис. 5.29).

Запишемо суму проекцій сил на вісь  $x$ :

$$\sum X = -N_{31} + N_{35} = 0,$$

звідки (з огляду на те, що через  $N_{31}$  й  $N_{13}$  позначене те саме зусилля, а саме зусилля в стержні, що з'єднує вузли  $1-3$ ), отримаємо:

$$N_{35} = N_{13} = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Знаходячи проєкції всіх сил на вертикальну вісь  $y$ , отримаємо:

$$\sum Y = N_{32} = 0.$$

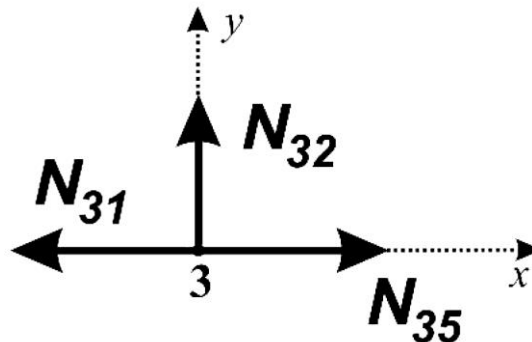


Рисунок 5.29 – Зображення рівноваги вузла 3 ферми

Зусилля в стержні  $3-2$  дорівнювало нулю і в тому випадку, якщо б цей стержень не був перпендикулярний стержням  $1-3$  та  $3-5$ .

Отже, якщо у вузлу сходяться три стержні, два з яких лежать на одній прямій, то зусилля в цих двох стержнях за відсутності у вузлу зовнішнього навантаження рівні один одному за числовою величиною та за знаком, а зусилля в третьому стержні дорівнює нулю.

Розглянемо умови рівноваги вузла 2, знайдемо зусилля в стержнях 2–4 та 2–5, вони будуть визначатися через уже відомі нам зусилля  $N_{21}$  та  $N_{23}$  (або  $N_{12}$  та  $N_{32}$ ).

Таким чином, при розрахунку ферми способом вирізання вузлів зусилля в ряді стержнів можна знайти тільки після попереднього визначення зусиль в інших стержнях. У зв'язку із цим випадкова помилка у визначенні одного зусилля може призвести до неправильного визначення зусиль у цілому ряді стержнів. Крім того, недоліком цього способу є й те, що в рівняння рівноваги завжди входять тригонометричні функції; це ускладнює розрахунок.

Відзначимо, що якщо до вузла, у якому сходяться два стержні, що не лежать на одній прямій, не прикладене зовнішнє навантаження, то зусилля в цих стержнях дорівнюють нулю. У цьому можна переконатися, розглянувши умови рівноваги вузла 1 ферми, зображеної на рисунку 5.30.

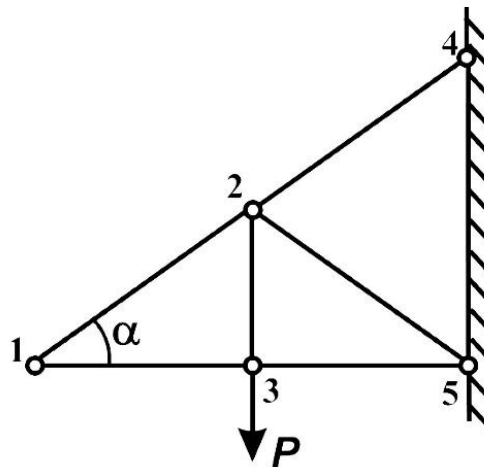


Рисунок 5.30 – Схема ферми, що знаходиться в стані рівноваги

Справді, з рівнянь проєкцій на вертикальну вісь  $y$  і горизонтальну вісь  $x$  всіх сил, що діють на вузол 1 (рис. 5.31), будемо мати:

$$\begin{aligned} \sum Y &= N_{12} \sin \alpha = 0, \\ \sum X &= N_{12} \cos \alpha + N_{13} = 0, \\ N_{12} &= N_{13} = 0. \end{aligned}$$

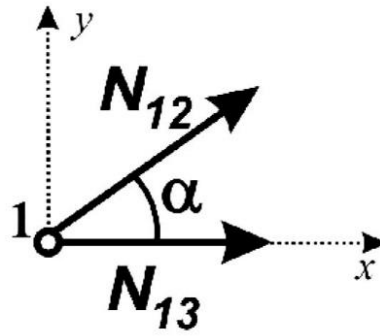


Рисунок 5.31 – Зображення рівноваги вузла 1 ферми

## 6 ВИЗНАЧЕННЯ КУТОВИХ ТА ЛІНІЙНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ У СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМАХ

### 6.1 Основні поняття та визначення

**Основні поняття і визначення.** Розглянемо деформацію балки за умови плоского згину. Вісь балки під дією навантаження викривляється в площині дії сил (площина  $XOY$ ), при цьому поперечні перерізи обертаються і зміщуються на деяку величину (рис. 6.1). Викривлена вісь балки за умови плоского згину називається **зігнутою віссю** або **пружною лінією**.

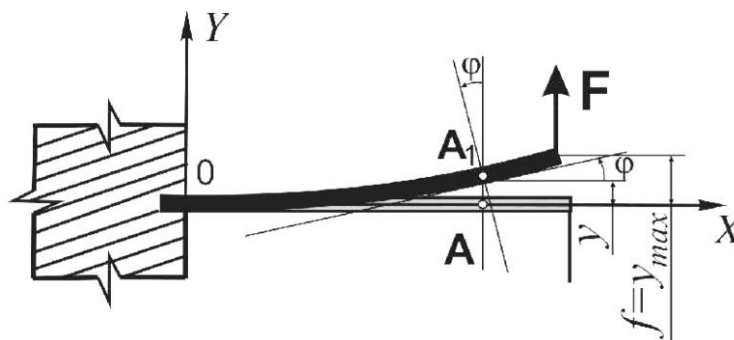


Рисунок 6.1 – Зображення деформації балки за умови плоского згину

При розрахунках введемо такі позначення:

$w(x)$  – переміщення перерізу, яке є перпендикулярним до осі балки;

$v(x)$  – переміщення перерізу вздовж осі балки;

$\varphi(x)$  – кут між дотичною до пружної лінії і первинною віссю балки.

Прогин балки  $y = w(x)$  – зміщення центра ваги перерізу балки по напрямку, перпендикулярному до її осі. Найбільший прогин балки називається стрілою прогину ( $f = y_{max}$ ). Переміщення перерізу уздовж осі балки  $v(x)$  – зміщення центра ваги перерізу балки за напрямом її осі. Кут повороту перерізу  $\varphi(x)$  – кут, на який переріз обертається відносно свого первинного положення (або кут між дотичною до пружної лінії і первинною віссю балки).

У загальному випадку величина прогину балки в точці є функцією координати  $x$ . Кут між дотичною до зігнутої осі балки і віссю  $X$  визначатиметься:

$$tg\varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Вважаючи кути і переміщення малими величинами, можна записати, що

$$\varphi \approx \frac{dy}{dx}.$$

З попередньої формули можна зробити висновок, що кут повороту перерізу є першою похідною від прогину балки по абсцисі перерізу.

## 6.2 Диференційне рівняння зігнутої осі балки

Виходячи з фізичної природи явища згину, можемо стверджувати, що зігнута вісь безперервної балки має бути безперервною і гладкою (не повинна мати зламів) кривою (рис. 6.2). При цьому деформація тієї або іншої ділянки балки визначається викривленням його пружної лінії, тобто кривиною осі.

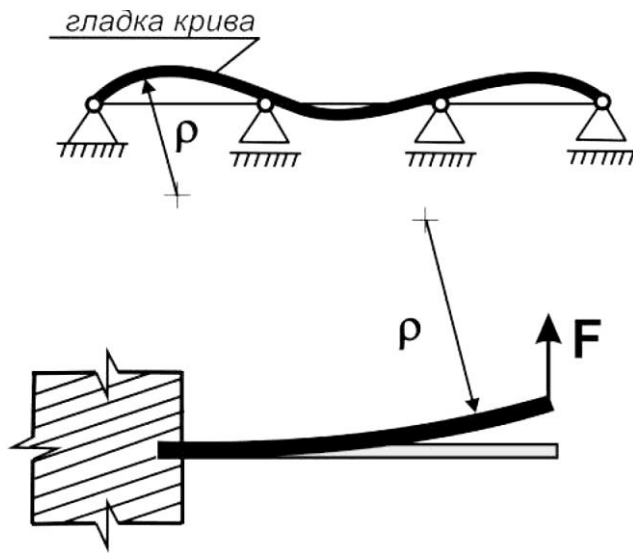


Рисунок 6.2 – Зображення зігнутої осі балки

Для визначення кривини бруса  $\frac{1}{\rho}$  при згині використовується формула:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$$

З курсу вищої математики відомо, що рівняння кривини плоскої кривої виглядає так:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pm \frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}$$

Прирівнявши праві частини цих виразів, отримаємо диференціальне рівняння зігнутої осі балки, яке називається точним рівнянням зігнутої осі бруса:

$$\frac{\pm \frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}} = \frac{M_z}{EI_z}$$

У координатній системі прогинів  $XOY$ , коли вісь  $Y$  спрямована вгору, знак моменту визначає знак другої похідної від  $y$  по  $x$ .

Інтегрування цього рівняння становить деякі труднощі. Тому його зазвичай записують у спрощеній формі, нехтуючи величиною в дужках порівняно з одиницею. Тоді диференціальне рівняння пружної лінії балки запишемо у такому спрощеному вигляді:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z}.$$

Розв'язання цього диференціального рівняння знайдемо, проінтегрувавши обидві його частини за змінною  $x$ , у результаті отримаємо такі рівняння:

$$\varphi(x) = \frac{dy}{dx} = \int_0^l \left( \frac{M_z(x)}{EI_z} \right) dx + C,$$

$$w(x) = y(x) = \int_0^l \int_0^l \left( \frac{M_z(x)}{EI_z} \right) dx dx + Cx + D.$$

Постійні інтегрування  $C, D$  знаходять з граничних умов – умов закріплення балки, при цьому для кожної ділянки балки визначатимуться свої постійні.

### 6.3 Робота зовнішніх сил. Потенційна енергія

Прикладення навантаження до будь-якої споруди є причиною її деформування. Якщо навантаження зростає повільно, то значення прискорень, які виникають у конструкції під час деформації, не є достатньо великими, тому в такому випадку силами інерції можна знехтувати. Повільне прикладення навантаження називається статичним.



Визначимо роботу зовнішнього навантаження на переміщенні, що виникає внаслідок дії цієї сили на балку (рис. 6.3).



Рисунок 6.3 – Переміщення точки прикладення сили за напрямком її дії

Переміщення окремих точок і перерізів є прямо пропорційними до величини навантаження, що діють на балку. Цю залежність можна записати у такому вигляді:

$$\Delta = \alpha F,$$

де  $\Delta$  – переміщення за напрямком дії сили;

$\alpha$  – коефіцієнт, що залежить від матеріалу, схеми і розмірів споруди.

Якщо збільшити значення сили  $F$  на нескінченно малу величину  $dF$ , то цей приріст викличе зростання переміщення на  $d\Delta$ .

Запишемо формулу для визначення елементарної роботи зовнішньої сили  $F$  на переміщенні  $d\Delta$  у такий спосіб:

$$dA = F \cdot d\Delta.$$

Підставивши з попередньої формули вираз для переміщення  $\Delta$ , можна отримати таку формулу:

$$dA = F \cdot d\Delta = \alpha F dF.$$

Інтегруючи цю формулу в межах повної зміни сили від нульового її значення до кінцевого, отримуємо формулу для визначення роботи, яка здійснюється статично прикладеною зовнішньою силою  $F$ , у такому вигляді:

$$A = \alpha \int_0^F F dF = \frac{\alpha F^2}{2}.$$

Оскільки переміщення  $\Delta$  зв'язано з силою формулою  $\Delta = \alpha F$ , то попередню формулу для визначення роботи можна записати у такому вигляді:

$$A = \frac{F\Delta}{2}.$$

Якщо до системи прикладено зосереджений момент  $M$ , дія якого призводить до повороту перерізу балки на кут  $\varphi$ , формула для визначення роботи моменту буде мати такий вигляд:

$$A = \frac{M\varphi}{2},$$

де  $\varphi$  – кут повороту того перерізу (одиниці виміру в радіанах), у якому прикладено момент  $M$  (рис. 6.4).



Рисунок 6.4 – Зображення кута повороту перерізу від дії на балку зосередженого моменту  $M$

На підставі наведеного вище можна дійти висновку, що робота зовнішньої сили за статичної її дії на будь-яку пружну споруду дорівнює половині добутку значення цієї сили на величину переміщення, яке відповідає цій силі. Зосередженій силі  $F$  відповідає лінійне переміщення ( $v$  – горизонтальне або  $w$  – вертикальне), зосередженому моменту  $M$  – кутове переміщення  $\varphi$ , а рівномірно розподіленому навантаженню  $q$  – площа епюри переміщень на ділянці дії цього навантаження.

За статичної дії на конструкцію групи зовнішніх сил, робота цих сил дорівнює половині суми доданків кожної сили на величину відповідного їй переміщення, яке викликане дією усієї групи сил (рис. 6.5):

$$A = \frac{F_1 \Delta_1}{2} + \frac{F_2 \Delta_2}{2} + \frac{M \varphi}{2}.$$

Попередню формулу у загальному випадку можна записати так:

$$A = \sum \left( \frac{F_i \Delta_i}{2} \right) + \sum \left( \frac{M_i \varphi_i}{2} \right).$$

Вісь зігнутого бруса (умовна назва – зігнута вісь) є геометричним місцем центрів ваги поперечних перерізів деформованого бруса, її називають також **пружною лінією**. У результаті деформації бруса кожен з його поперечних перерізів переходить у нове положення: центр ваги отримує лінійні переміщення, а сам переріз робить поворот на деякий кут  $\varphi$  навколо своєї нейтральної осі (рис. 6.5) .

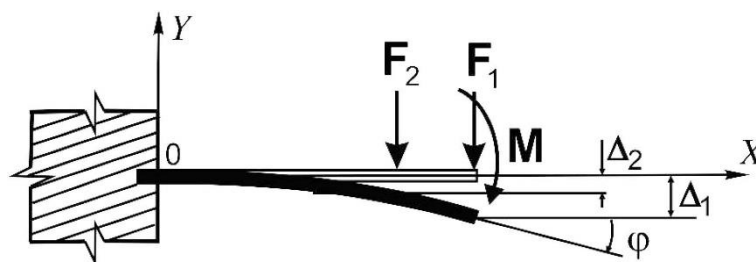


Рисунок 6.5 – Зображення деформації бруса під дією групи сил

Роботу зовнішніх сил на переміщеннях, що викликаються ними, можна виразити через згинальні моменти  $M$ , поздовжні сили  $N$ , поперечні сили  $Q$ , що виникають у поперечних перерізах стержнів конструкції.

Виконуючи інтегрування формули сумарної роботи  $dA$  в межах довжини  $l$  кожної ділянки усіх стержнів і виконавши додавання за усіма ділянками системи, отримуємо формулу для обчислення роботи зовнішніх сил на переміщеннях (у разі плоскої задачі) так:

$$A = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA} + \sum \int_0^l \eta \frac{Q^2 dx}{2GA}.$$

З отриманої формули витікає, що робота зовнішніх сил на викликаних ними переміщеннях завжди є додатною.

На підставі закону збереження енергії робота зовнішніх сил  $A$  переходить в потенційну енергію деформації  $U$ , тобто

$$A = U.$$

Таким чином потенційна енергія деформації запишеться так:

$$U = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA} + \sum \int_0^l \eta \frac{Q^2 dx}{2GA}.$$

#### **6.4 Універсальна формула Мора. Спосіб Верещагіна для визначення переміщень лінійних та кутових у статично визначуваних балках та рамах**

**Інтеграл Мора.** Розглянемо два стани системи. У першому стані на неї діє будь-яке число будь-яких зусиль. У другому стані прикладена лише одна зосереджена сила  $F_2 = 1$  (рис. 6.6).

Складемо вираз роботи  $A_{21}$  одиничної сили ( $F_2 = 1$ ) на переміщенні  $\Delta_{21}$ , яке виникає від сил дійсного стану (перший стан), будемо мати таку формулу:

$$A_{21} = F_2 \cdot \Delta_{21} = l \cdot \Delta_{21} = \Delta_{21}.$$

Виразимо роботу  $A_{21}$  у разі плоскої задачі через внутрішні зусилля, що виникають у стержнях системи у разі загального навантаження:

$$A_{21} = \Delta_{21} = \sum \bar{M}_2 \frac{M_1 dx}{EL} + \sum \bar{N}_2 \frac{N_1 dx}{EA} + \sum \bar{Q}_2 \frac{Q_1 dx}{GA} \eta,$$

де  $M_1, N_1, Q_1$  – внутрішні зусилля, які викликані дією зовнішнього навантаження;  
 $\bar{M}_2, \bar{N}_2, \bar{Q}_2$  – внутрішні зусилля, які викликані дією сили, що дорівнює одиниці.

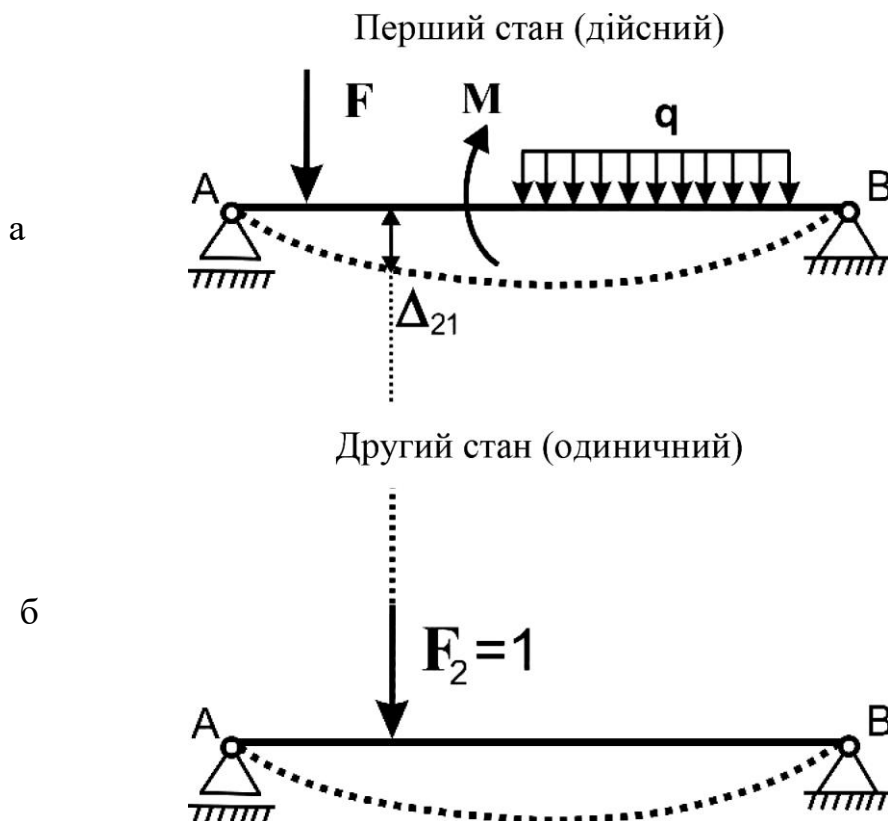


Рисунок 6.6 – Зображення двох станів системи:

а – дійсний стан системи; б – одиничний стан системи

Таким чином, переміщення від будь-якого навантаження можна виразити через внутрішні зусилля, що виникають у заданій системі і виникають в ній від одиничної сили. Напрямок одиничної сили співпадає з напрямком визначуваного переміщення.

Якщо визначається лінійне переміщення ( $w(x)$  або  $v(x)$ ), то одинична сила є зосередженою силою  $F$ , яка дорівнює одиниці ( $F = 1$ ) і є прикладеною в точці в напрямку передбачуваного зміщення. Якщо визначається кут повороту  $\varphi(x)$  поперечного перерізу, то одиничне зусилля є зосередженим моментом  $M$ , який дорівнює одиниці ( $M = 1$ ) і є прикладеним у точці у напрямі передбачуваного кута повороту перерізу.

Стан споруди, викликаний дією одиничної сили, називається **одиничним станом**. Стан споруди викликаний дією заданого зовнішнього навантаження називається **дійсним (вантажним)**.

У загальному вигляді формула для визначення переміщення має такий вигляд:

$$\Delta_{mn} = \sum \frac{1}{EI} \int_0^l \bar{M}_m M_n dx + \sum \frac{1}{EA} \int_0^l \bar{N}_m N_n dx + \sum \frac{1}{GA} \int_0^l \bar{Q}_m Q_n dx.$$

Ця формула називається **інтегралом Мора для визначення переміщень**.

Визначення переміщення за допомогою інтеграла Мора виконується в такому порядку:

1. Спочатку потрібно знайти вирази внутрішніх зусиль  $M_n$ ,  $N_n$ ,  $Q_n$  від дії заданого зовнішнього навантаження як функції координати  $x$  довільного перерізу.

2. За напрямом шуканого переміщення потрібно прикласти одиничну силу, яка йому відповідає (за лінійного переміщення – зосереджена сила, за кута повороту – зосереджений згинальний момент).

3. Потрібно знайти вирази внутрішніх зусиль  $\bar{M}_m$ ,  $\bar{N}_m$ ,  $\bar{Q}_m$  від дії одиничної сили як функції координати  $x$  довільного перерізу.

4. Знайдені вирази зусиль  $M_n$ ,  $N_n$ ,  $Q_n$ ,  $\bar{M}_m$ ,  $\bar{N}_m$ ,  $\bar{Q}_m$  підставляються в інтеграл Мора, і, виконуючи інтегрування за ділянками в межах усієї споруди, визначається шукане переміщення  $\Delta_{mn}$ ; якщо значення переміщення  $\Delta_{mn}$  додатне, то його напрям співпадає з напрямом одиничної сили, а якщо значення переміщення  $\Delta_{mn}$  від'ємне, то його напрям є протилежним напрямку одиничної сили.

Варто зауважити, що в більшості випадків домінуючим у формі визначення переміщення  $\Delta_{mn}$  є перший член, а двома другими можна знехтувати.

У практичних розрахунках найчастіше використовують наближену формулу інтеграла Мора, яку можна записати так:

$$\Delta_{mn} = \sum \frac{1}{EI} \int_0^l \bar{M}_m M_n dx.$$

**Графоаналітичний спосіб розрахунку інтеграла переміщень (спосіб Верещагіна).** Обчислення інтеграла Мора можна суттєво спростити у випадку, коли хоча б одна з епюр (для дійсного або одиничного навантаження) складається з прямих ліній і балка має постійну жорсткість ( $EI = const$ ) за довжиною.

У підінтегральний вираз  $\int_0^l \bar{M}_m M_n dx$  входить добуток внутрішніх зусиль  $\bar{M}_m$  і  $M_n$ , що є ординатами епюр, побудованих від одиничного і дійсного станів, цей прийом називають **способом перемножування епюр**.

Розглянемо фрагменти епюр для дійсного (рис. 3.36, а) та одиничного навантаження (рис. 6.7, б) для довільної балки.

Епюра  $\bar{M}_m$  від одиничного навантаження є прямолінійною (рис. 6.7, б), у цьому випадку для визначення значення внутрішнього зусилля  $\bar{M}_m$  можна записати таку формулу:

$$\bar{M}_m = (x + a)tg\alpha.$$

Епюра від дійсного навантаження (рис. 6.7, а) може мати будь-який контур.

Підставивши значення  $\bar{M}_m$  у вираз  $\int_0^l \bar{M}_m M_n dx$ , будемо мати таку формулу:

$$\int_0^l \bar{M}_m M_n dx = tg \alpha \int_0^l (x + a) M_n dx = tg \int_0^l (x + a) d\omega_n,$$

де  $M_n dx = d\omega_n$  – диференціал площі  $\omega_n$  епюри  $M_n$ ;

$\int_0^l (x + a) d\omega_n$  – статичний момент площі  $\omega_n$  епюри  $M_n$  відносно осі  $OM$ .

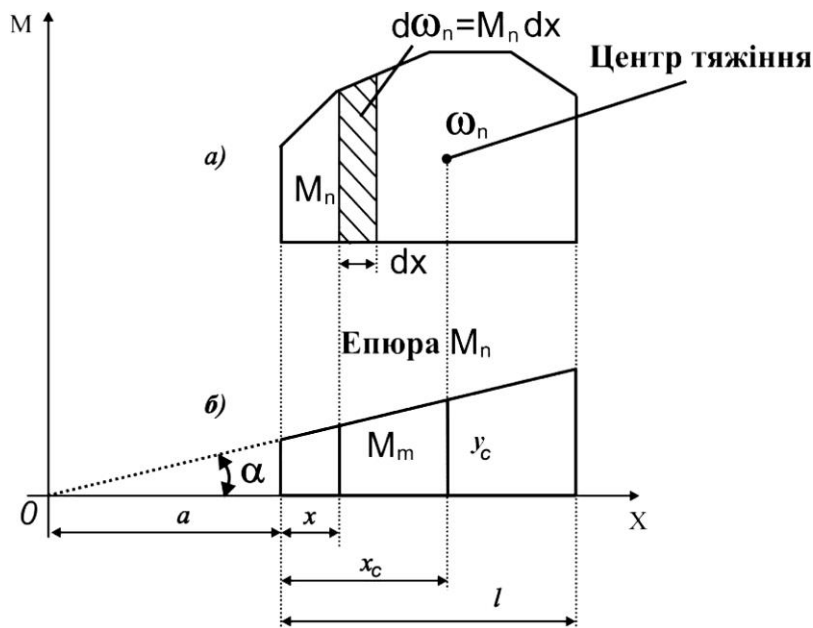


Рисунок 6.7 – Фрагменти епюр для дійсного та одиничного навантаження довільної балки: а) епюра дійсного навантаження, б) епюра одиничного навантаження

Цей статичний момент площі  $\omega_n$  епюри  $M_n$  відносно осі  $OM$  можна записати так:

$$\int_0^l (x + a) d\omega_n = \omega_n (x_c + a),$$

де  $x_c$  – абсциса центра тяжіння площі  $\omega_n$  епюри  $M_n$  (рис. 6.7, а).



Беручи до уваги попередню формулу виразу  $\int_0^l \bar{M}_m M_n dx$ , можна записати так:

$$\int_0^l \bar{M}_m M_n dx = \omega_n (x_c + a) tg \alpha.$$

Оскільки з рисунку 6.7, б можна отримати таку формулу:

$$(x_c + a) tg \alpha = y_c,$$

то

$$\int_0^l \bar{M}_m M_n dx = \omega_n y_c.$$

Таким чином, результат добутку двох епюр дорівнює добутку площі однієї з них на ординату іншої (прямолінійної) епюри, яка взята під центром ваги першої епюри (**правило Верещагіна**).

Ліва частина виразу для визначення переміщень за правилом Верещагіна відрізняється від інтеграла Мора відсутністю в ній жорсткості перерізу –  $EI$ . Отже, вираз для визначення переміщень за правилом Верещагіна необхідно розділити на жорсткість  $EI$ .

У загальному випадку, коли ділянок декілька, **правило Верещагіна** для визначення переміщень має такий вигляд:

$$\Delta = \sum \frac{\omega_n y_c}{EI},$$

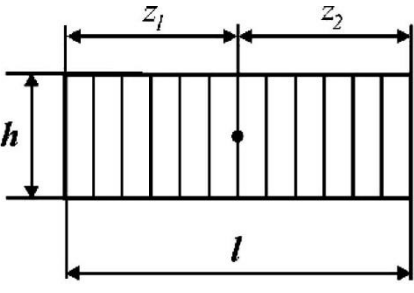
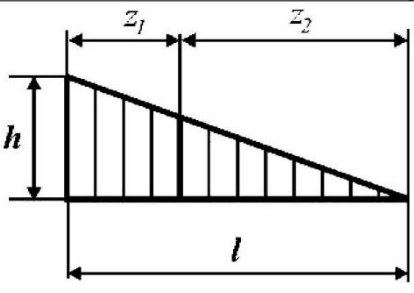
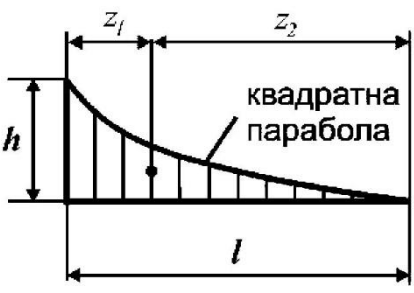
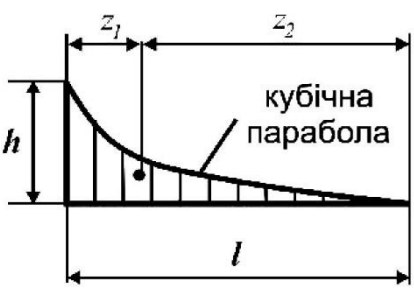
де  $n$  – кількість ділянок.

У загальному випадку, площа епюри береться з епюр згинальних моментів  $M_F$  від зовнішнього навантаження – **вантажна епюра**, а ордината епюри береться з епюр згинальних моментів  $M$  від одиничної сили – **одинична епюра**.

При використанні правила Верещагіна доводиться обчислювати площі різних геометричних фігур і визначати положення їхніх центрів ваги. Наведемо

в таблиці 6.1 значення площі і координати центрів тяжіння геометричних фігур, що найчастіше зустрічаються.

Таблиця 6.1 – Значення площі і координати центрів ваги геометричних фігур

Геометрична фігура	Площа, $\Omega$	Квадрати центра ваги	
		$z_1$	$z_2$
1	2	3	4
	$hl$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{hl}{2}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{2l}{3}$
	$\frac{hl}{3}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{3l}{4}$
	$\frac{hl}{4}$	$\frac{l}{5}$	$\frac{4l}{5}$

Продовження таблиці 6.1

1	2	3	4
	$\frac{hl}{n+1}$	$\frac{l}{n+2}$	$\frac{(n+1)l}{n+2}$
	$\frac{2hl}{3}$	$\frac{3l}{8}$	$\frac{5l}{8}$

## 7 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

### 7.1 Основні поняття

**Стійкість** – здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги, відповідаючи на малі збільшення статичного навантаження малими приростами деформацій. Стійкість конструкції відноситься до одного з видів конструкційної міцності.

З теоретичної механіки відомо, що тіло може знаходитись у стійкій, нестійкій та байдужій рівновазі (рис. 7.1).

**Стійка** форма рівноваги – кулька, виведена боковою силою зі стану рівноваги, повертається у початкове положення.

**Нестійка** форма рівноваги – кулька продовжує відхилятися від початкового положення та ніколи не повернеться в початковий стан.

**Байдужа** форма рівноваги – кулька може займати довільне положення рівноваги.

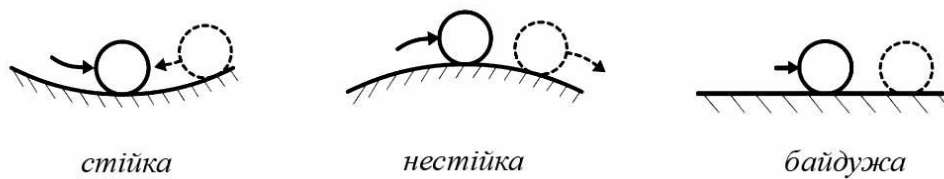


Рисунок 7.1 – Види рівноваги

**Критична сила  $P_{кр}$**  – стискувальна сила, після перевищення якої стержень втрачає стійкість.

**Поздовжній згин** – згин стержня, що виникає під дією осьового стиску.

За  $P < P_{кр}$  пружна рівновага деформованого тіла є **стійкою**, коли після малого відхилення від стану рівноваги тіло намагається повернутися у початковий стан. Стержень під час розвантаження повністю повертається до недеформованого стану (рис. 7.1, а).

За  $P = P_{кр}$  тіло може зберігати і початкову форму рівноваги, і відхилятися від неї (**байдужа рівновага**) (рис. 7.1, в).

За  $P > P_{кр}$  пружна рівновага є **нестійкою**: тіло продовжує деформуватися у напрямку наданого йому відхилення. Під час розвантаження стержень не повертається до початкового стану (залишається зігнутим), (рис. 7.1, б).

**Втрата стійкості** рівносильна руйнуванню конструкції, яке відбувається раптово без попередніх ознак, і тому є небезпечним, оскільки немає можливості вжити запобіжних заходів.

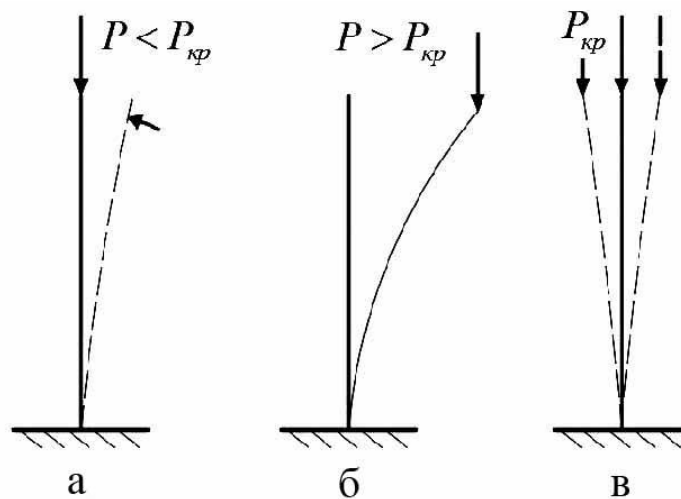


Рисунок 7.2 – Форми рівноваги центрально стиснутого стержня

## 7.2 Формула Ейлера для визначення критичної сили

Вперше задачу про втрату стійкості стержнів розглянув Леонард Ейлер. Розглянемо деформовану схему для шарнірно закріпленого стержня (рис. 7.3), що стискується поздовжньою силою  $P$ . Точки стержня набули прогину  $w(x)$ . Скористаємось диференціальним рівнянням пружної лінії стержня:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$$

де  $I$  – момент інерції поперечного перерізу,

$w(x)$  – прогин стержня.

Згинальний момент у перерізі  $x$  визначається як момент від сили  $P$  з плечем  $w$ :

$$M(x) = Pw(x).$$

Диференціальне рівняння перетворюється до вигляду:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{Pw}{EI} = -k^2w,$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} + k^2w = 0,$$

де  $k^2 = \frac{P}{EI}$ .

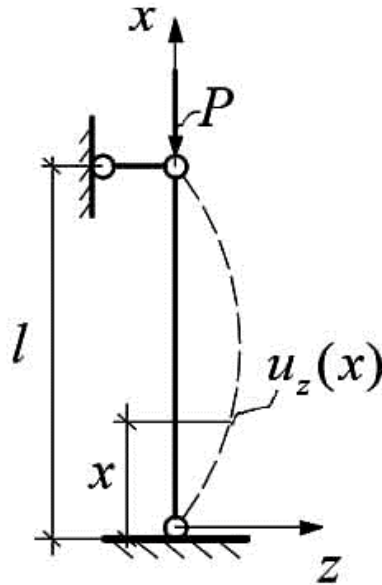


Рисунок 7.3 – Деформована схема шарнірно закріпленого стержня

Диференціальне рівняння має загальний розв'язок:

$$w(x) = u_z(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

Сталі інтегрування  $A, B$  визначаються з граничних умов (умов закріплення стержня). Для шарнірно закріпленого стержня  $w(0) = 0, w(l) = 0$ :

$$w(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = 0,$$

$$\text{маємо } B = 0; w(l) = A \sin kl = 0, A \neq 0,$$

$$\text{отже, } \sin kl = 0.$$

Отримуємо розв'язок:

$$k = \frac{\pi n}{l},$$

$$P = \frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2}, (n = 1, 2, 3 \dots).$$

Найменше значення сили, за якої можливий поздовжній згин, виникає за  $n = 1$ . Отримана формула є **формулою Ейлера для шарнірно закріпленого стержня**.

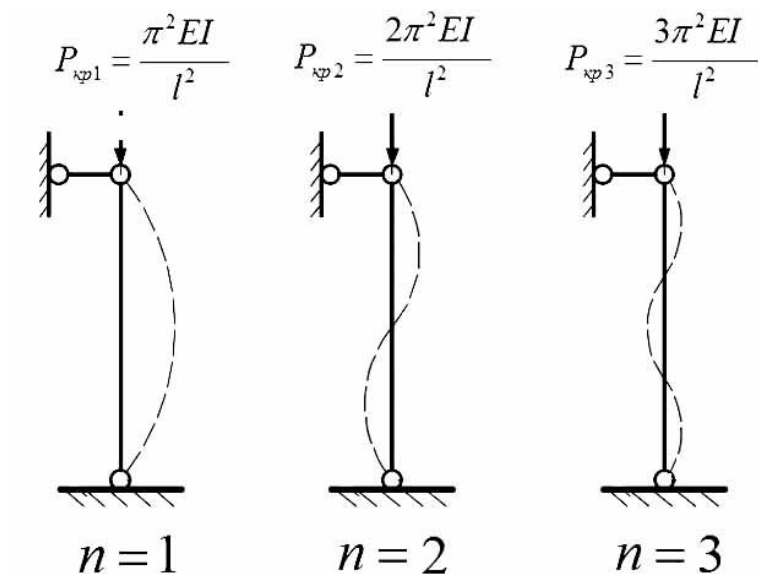


Рисунок 7.4 – Форми втрати стійкості

Формула Ейлера виведена для шарнірно закріпленого стержня. Формули критичної сили для інших умов закріплення виводяться з аналізу деформування стержня порівняно з шарнірно закріпленим стержнем. При цьому вводиться коефіцієнт  $\mu$  – **коефіцієнт зведення довжини** (або **коефіцієнт закріплення**) (рис. 7.5).

Зведена довжина  $l_1 = \mu \cdot l$  – довжина стержня, зведена до шарнірної схеми закріплення.

У разі втрати стійкості в площині  $xz$  у розрахунках використовується  $I_y$ , у площині  $xy$  беремо  $I_z$ . У разі можливої втрати стійкості в обох головних напрямках прогин відбуватиметься в напрямку меншої півосі еліпса інерції поперечного перерізу. Тоді в формулі Ейлера використовується  $I_{min}$  – менший з моментів інерції поперечного перерізу стержня.

Критична сила за різних умов закріплення визначається за формулою:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2}.$$

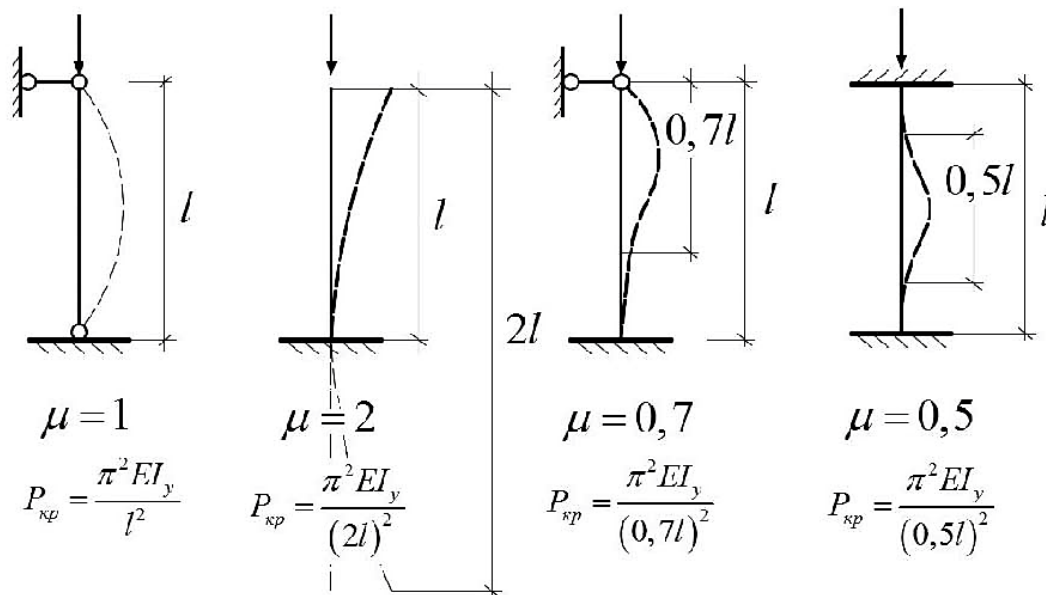


Рисунок 7.5 – Коефіцієнт зведення довжини

### 7.3 Гнучкість. Межа застосування формули Ейлера

Оскільки формула визначення критичної сили  $P_{кр}$  виведена в межах пружних деформацій, потрібно перевірити умову  $\sigma \leq \sigma_{пл}$ .



Для знаходження напружень ділимо силу  $P_{кр}$  на площу  $A$ :

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Використана заміна  $\frac{I_{min}}{A} = i_{min}^2$  – квадрат мінімального радіуса інерції та введений параметр  $\lambda$  – **гнучкість стержня**, що дорівнює відношенню зведеної довжини стержня до мінімального радіуса інерції перерізу:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}.$$

**Гнучкість стержня  $\lambda$  – зведена характеристика стійкості стержня, що залежить від умов закріплення, довжини стержня та форми поперечного перерізу.**

Остаточно формула Ейлера для визначення критичних напружень має вигляд:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

**Межі застосування формули Ейлера.** Формула Ейлера справедлива в межах дії закону Гука, тобто за  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$ , де  $\sigma_{пц}$  – границя пропорційності матеріалу. Враховуючи формулу Ейлера для визначення критичних напружень, маємо

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}.$$

Знайдемо відповідне значення **граничної гнучкості**:

$$\lambda_{гр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}.$$

Наприклад, для сталі  $E = 2,1 \times 10^5$  МПа,  $\sigma_{тц} = 200$  МПа,

$$\lambda_{гр} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,1 \times 10^5}{200}} \approx 100.$$

Формула Ейлера використовується для розрахунку стержнів, у яких гнучкість більша за граничну  $\lambda = \lambda_{гр}$ . За  $\lambda \geq \lambda_{гр}$  стержень зазнає **пружної втрати стійкості**. Такі стержні називаються **стержнями великої гнучкості**. Графік  $\sigma_{кр}(\lambda)$  описується формулою Ейлера для критичних напружень та має форму квадратичної гіперболи (рис. 7.6).

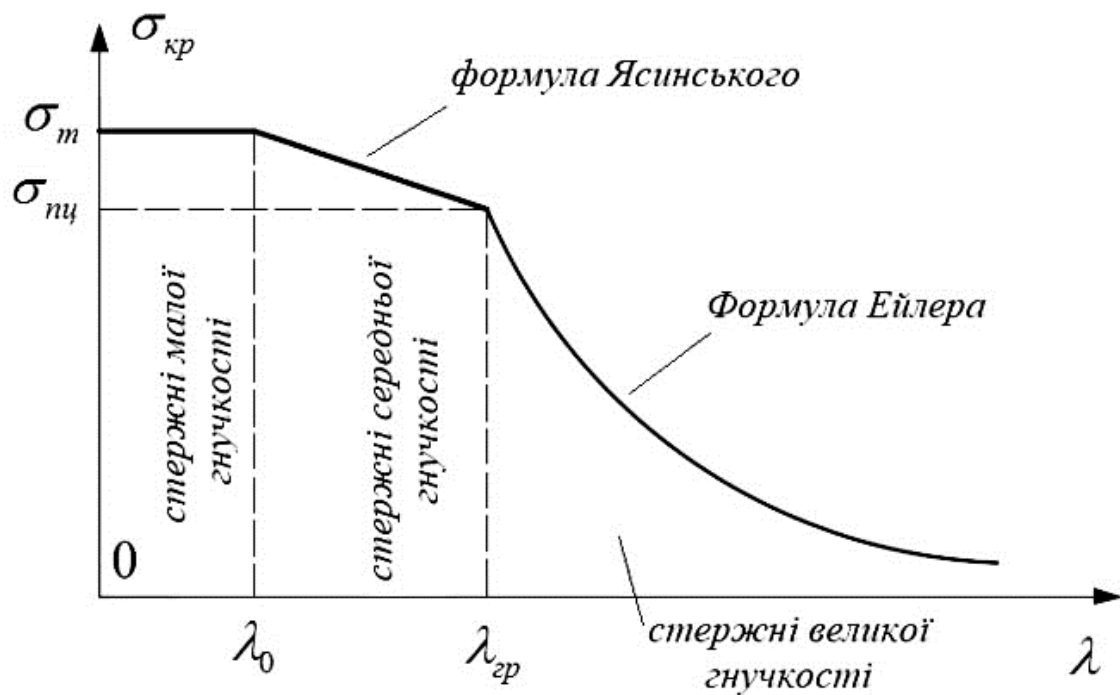


Рисунок 7.6 – Діаграма  $\sigma_{кр} \sim \lambda$

## 7.4 Формула Ф. Ясинського

Якщо критичні напруження перевищують межу пропорційності матеріалу  $\sigma_{кр} > \sigma_{пл}$ , тіло зазнає **пружно-пластичного деформування**. За  $\lambda \leq \lambda_{кр}$  критична сила, що вирахована по формулі Ейлера, значно збільшується, що може призвести до небажаних наслідків. Експериментально доведено некоректність її застосування для стержнів малої та середньої гнучкості. Для таких стержнів потрібна інша формула.

Ф. Ясинський, на основі обробки та узагальнення результатів Тетмаєра, запропонував емпіричну формулу для визначення критичних напружень, які перевищують границю пропорційності:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda.$$

Коефіцієнти  $a$  і  $b$  залежать від матеріалу, визначаються експериментально та наводяться в довідниках. Формула Ясинського застосовується при напруженнях, які не перевищують межу текучості. Визначимо значення гнучкості при межі текучості:

$$\begin{aligned}\sigma_{кр} &= a - b\lambda_0 = \sigma_m, \\ \lambda_0 &= \frac{a - \sigma_m}{b}.\end{aligned}$$

Для крихких матеріалів без площадки текучості  $\lambda_0 = 0$ .

У випадку **втрати стійкості під впливом власної ваги** або рівномірно розподіленого поздовжнього навантаження критичне навантаження визначається за формулою Ясинського:

$$(ql)_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu\lambda)^2}.$$

Таблиця 7.1 – Характеристики для тіл, що працюють на стиск

Матеріал	$a, \text{МПа}$	$b, \text{МПа}$	$c, \text{МПа}$	$\lambda_0$	$\lambda_{ep}$
Вуглецева сталь Ст2, Ст3	310	1,14	–	40	100
Ст5	464	3,26	–	40	100
Кремениста сталь	589	3,82	–	60	100
Хромомолібденова сталь	1 000	5,4	–	–	55
Деревина (сосна)	29,3	0,194	–	–	110
Чавун	776	12	0,53	–	80

Критичні напруження залежно від гнучкості стержня визначаються так (рис. 7.6).

**Стержні малої гнучкості**  $\lambda < \lambda_0$ : стержень не втрачає стійкості, а переходить у пластичний стан або руйнується від стиску. Для пластичних матеріалів із площадкою текучості для крихких матеріалів  $\sigma_{кр} = \sigma_p$ .

**Стержні середньої гнучкості**  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{ep}$ : стержень зазнає пружно–пластичної втрати стійкості. Визначення критичних напружень виконується за формулою Ясинського. Для пластичних матеріалів використовується формула  $\sigma_{кр} = a - b\lambda$ , для крихких матеріалів (чавун) маємо квадратичну залежність  $\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$ .

**Стержні великої гнучкості**  $\lambda \geq \lambda_{ep}$ : відбувається пружна втрата стійкості, критичне напруження визначається за формулою Ейлера для визначення критичних напружень.

Для маловуглецевої сталі маємо такий набір характеристик:

$E = 2,1 \times 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{mц} = 200 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_m = 240 \text{ МПа}$ ,  $a = 310 \text{ МПа}$ ,  $b = 1,14 \text{ МПа}$ ,  $\lambda_0 = 40$ ,  $\lambda_{ep} = 100$ .

Для деревини на діаграмі залежності гнучкості від критичного напруження виділяють дві зони, оскільки деревина не має площадки текучості. Механічні характеристики для сосни вздовж волокон:

$E = 10^4 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{mц} = 8 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_s = 28 \text{ МПа}$ ,  $a = 29,3 \text{ МПа}$ ,  $b = 0,194 \text{ МПа}$ ,  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_{ep} = 110$ .

За  $\lambda < 110$  використовується формула Ясинського, за  $\lambda > 110$  критичне напруження визначається за формулою Ейлера.

### 7.5 Умови стійкості

Умова стійкості для стержнів при центральному стиску має вигляд:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{\text{доп}},$$

де  $\sigma_{\text{доп}} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_{\text{ст}}}$  – допустиме напруження на стійкість;

$n_{\text{ст}}$  – коефіцієнт запасу стійкості;

$P$  – стискувальна сила;

$A$  – площа поперечного перерізу.

Для сталі  $n_{\text{ст}} = 1,8 \div 3$ , для дерева  $n_{\text{ст}} = 3 \div 5$ . Допустиме напруження на стійкість  $\sigma_{\text{доп}}$  значно менше за **основне допустиме напруження на стиск**  $\sigma_{\text{adm}}^-$ , оскільки в  $\sigma_{\text{adm}}^-$  не враховується геометрія стержня і умови закріплення.

Введемо **коефіцієнт поздовжнього згину**  $\varphi$  як відношення допустимих напружень:

$$\frac{\sigma_{\text{доп}}}{\sigma_{\text{adm}}^-} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_m} \frac{n_m}{n_{\text{ст}}} = \varphi,$$

де  $\sigma_{\text{adm}}^- = \frac{\sigma_m}{n_m}$  – допустиме напруження на стиск.

**Коефіцієнт поздовжнього згину**  $\varphi$  – безрозмірна величина, що залежить від матеріалу та гнучкості  $\lambda$  та знаходиться в межах  $\varphi \in (0,1]$ . Гнучкість залежить від поперечного перерізу стержня та його довжини.

Умова стійкості набирає вигляду:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi \sigma_{\text{adm}}^-.$$

Для зручності виведено таблиці залежності коефіцієнта поздовжнього згину від гнучкості для різних матеріалів.

Таблиця 7.2 – Залежності коефіцієнта поздовжнього згину від гнучкості для різних матеріалів

$\lambda$	Сталь Ст2, Ст3, Ст4	Сталь Ст5	Чавун СЧ 21–44 СЧ 28–48	Чавун СЧ 15–30 СЧ 15–18 СЧ 15–36 СЧ 21–40	Дюралюмін Д16Т	Дерево	Бетон легкий	Бетон важкий
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,95	0,97	0,999	0,99	1,00	1,00
20	0,96	0,95	0,87	0,91	0,998	0,97	0,96	0,96
30	0,94	0,93	0,75	0,81	0,835	0,93	0,86	0,9
40	0,92	0,9	0,6	0,69	0,70	0,87	0,73	0,84
50	0,89	0,84	0,43	0,57	0,568	0,80	0,68	0,76
60	0,86	0,80	0,32	0,44	0,455	0,71	0,59	0,70
70	0,81	0,74	0,23	0,34	0,353	0,61	0,52	0,63
80	0,75	0,66	0,18	0,26	0,269	0,49	0,46	0,57
90	0,69	0,59	0,14	0,2	0,212	0,38	–	0,51
100	0,60	0,50	0,12	0,16	0,172	0,31	–	0,45
110	0,52	0,43	–	–	0,142	0,25	–	–
120	0,45	0,38	–	–	0,119	0,22	–	–
130	0,40	0,32	–	–	0,101	0,18	–	–
140	0,36	0,28	–	–	0,087	0,16	–	–
150	0,32	0,27	–	–	0,076	0,14	–	–
160	0,29	0,24	–	–	–	0,12	–	–
170	0,26	0,21	–	–	–	0,11	–	–
180	0,23	0,19	–	–	–	0,10	–	–
190	0,21	0,17	–	–	–	–	–	–
200	0,19	0,16	–	–	–	–	–	–

Для знаходження нетабульованих значень  $\varphi$  застосовується формула лінійної апроксимації:

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\varphi_2 - \varphi_1),$$

де  $\varphi_1$  відповідає  $\lambda_1$ , а  $\varphi_2$  відповідає  $\lambda_2$ .

Якщо гнучкість  $\lambda$  перевищує наведене в таблиці найбільше значення, то  $\varphi$  беремо рівним мінімальному табличному значенню (у таких випадках іноді доводиться безпосередньо коригувати площу поперечного перерізу).

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Баженов В. А. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології / В. А. Баженов, А. В. Перельмутер, О. В. Шишов ; за заг. ред. д-ра техн. наук проф. В. А. Баженова. – Київ : Каравела, 2009. – 696 с.
2. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування : навч. посіб. / В. А. Баженов, Г. М. Іванченко, О. В. Шишов, С. О. Пискунов. – Київ : Каравела, 2013. – 443 с.
3. Писаренко Г. С. Опір матеріалів : підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ : Вища шк., 2004. – 655 с. : іл.
4. Посацький С. Л. Опір матеріалів : підруч. для студ. загальнотехн. ф-тів вузів УРСР / С. Л. Посацький. – Львів : Вид-во Львів. ун-ту, 1973. – 403 с.
5. Корнілов О. Опір матеріалів : підручник / О. Корнілов. – Київ : Логос, 2002. – 562 с.
6. Чихладзе Е. Д. Будівельна механіка : підручник / Е. Д. Чихладзе. – Харків : УкрДАЗТ, 2011. – 320 с.

*Електронне навчальне видання*

**ЯРОВИЙ** Юрій Миколайович,  
**АЛЬОШЕЧКІНА** Тетяна Миколаївна,  
**ВИНОГРАДОВ** Віталій Володимирович

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ. БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА**

### **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
денної форми навчання  
зі спеціальності 191 – Архітектура та містобудування)*

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

Редактор *О. В. Михаленко*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2024, поз. 56Л

---

Підп. до друку 09.08.2024. Формат 60 × 84/16.  
Ум. друк. арк. 6,6.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Маршала Бажанова 17, Харків, 61002.  
Електронна адреса: office@kname.edu.ua  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 5328 від 11.04.2017.