МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

В. В. Герасименко, І. М. Бєлих

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
денної форми навчання
зі спеціальності 133 – Галузеве машинобудування)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2024

Герасименко В. В. Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної форми навчання зі спеціальності 133 – Галузеве машинобудування / В. В. Герасименко, І. М. Бєлих ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 94 с.

Автори:
канд. техн. наук В. В. Герасименко,
ст. викл. І. М. Бєлих

Рецензент

В. В. Блажко, кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

Рекомендовано кафедрою цифрового моделювання та графіки, протокол № 10 від 26.04.2024

ЗМІСТ

ВСТУП 5

ТЕМА № 1 ПЛОЩИНА НА КОМПЛЕКСНОМУ КРЕСЛЕНИКУ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ПРОСТОРУ 6

1.1 Способи задання площин 6

1.2 Проєкціювання площин різного положення відносно площин проєкцій 7

1.3 Взаємне розташування прямої і площини 8

1.4 Взаємне розташування точки і площини 12

1.5 Взаємне розташування площин 13

ТЕМА № 2 ПРОЄКЦІЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ 15

2.1 Проєкціювання кривих ліній 15

2.2 Утворення поверхонь 19

2.3 Лінійчаті поверхні 22

2.4 Поверхні обертання 26

ТЕМА № 3 ПРОЄКЦІЮВАННЯ ГВИНТОВИХ ПОВЕРХОНЬ. ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА 29

3.1 Закритий гелікоїд 30

3.2 Відкритий гелікоїд 31

3.3 Проєкціювання гранних тіл 32

3.4 Проєкціювання тіл обертання 34

ТЕМА № 4 ПЕРЕТИН ЕЛЕМЕНТІВ ПРОСТОРУ, КОЛИ ХОЧА Б ОДИН З ЕЛЕМЕНТІВ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ, БУДЕ ПРОЄКЦІЮВАЛЬНИМ 38

4.1 Перетин прямих 39

4.2 Перетин прямої та площини 40

4.3 Перетин площин 41

4.4 Перетин площини з геометричними тілами 41

4.5 Перетин прямої з геометричними тілами 44

ТЕМА № 5 ПЕРЕТИН ЕЛЕМЕНТІВ ПРОСТОРУ. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ (СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ ПЕРЕРІЗІВ). СПОСІБ ПОСЕРЕДНИКА. ТЕОРЕМА МОНЖА 44

5.1 Спосіб посередника 45

5.2 Рекомендації щодо вибору посередника 46

5.3 Перетин двох площин загального положення 48

5.4 Перетин площини та геометричного тіла 50

5.5 Перетин двох геометричних тіл 51

5.6 Теорема Монжа 56

ТЕМА № 6 АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЄКЦІЇ. ПОБУДОВА ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ В АКСОНОМЕТРІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ВТОРИННОЇ ПРОЄКЦІЇ 57
6.1 Теорема Польке – Шварца 57
6.2 Види аксонометричних проєкцій 60
6.3 Стандартні аксонометричні проєкції 60
6.4 Побудова кола в аксонометрії 63
6.5 Нанесення штрихування на розрізах в аксонометричних проєкціях 65
ТЕМА № 7 СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЄКЦІЙ 66
7.1 Спосіб заміни площин проєкцій 67
7.2 Спосіб обертання 73
7.3 Спосіб плоскопаралельного переміщення 77
7.4 Приклади розв’язання метричних та позиційних задач за допомогою способів перетворення проєкцій 79
ТЕМА № 8 РОЗГОРТКА ПОВЕРХНІ 85
8.1 Класифікація розгорток поверхонь 86
8.2 Побудова точних розгорток багатогранників 87
8.3 Побудова наближених розгорток лінійчатих поверхонь 90
8.4 Побудова умовних розгорток нерозгортних поверхонь 90
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ 93

ВСТУП

Викладений матеріал відповідає робочим програмам дисципліни «Нарисна геометрія, інженерна та комп’ютерна графіка» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної форми навчання зі спеціальності 133 – Галузеве машинобудування.

Нарисна геометрія входить до числа дисциплін, що становлять основу інженерного освіти. Методи нарисної геометрії знаходять широке застосування в науці і техніці. Вивчення цієї дисципліни сприяє розвитку просторового уявлення та навиків логічного мислення, необхідних інженерові будь-якої спеціальності.

Нарисна геометрія – це розділ геометрії, у якому просторові геометричні об’єкти вивчаються за допомогою їх зображень на площині креслення. Предметом нарисної геометрії є розробка методів побудови та читання креслень просторових тривимірних об’єктів, розв’язання на кресленнях метричних та позиційних задач, пов’язаних із тривимірними об’єктами.

Креслення має містити геометричну інформацію про форму та розміри оригіналу, тому до креслення ставляться такі вимоги: наочність, простота та оборотність.

Викладений матеріал призначений для використання здобувачами вищої освіти спеціальності 133 – Галузеве машинобудування.

ТЕМА № 1 ПЛОЩИНА НА КОМПЛЕКСНОМУ КРЕСЛЕНИКУ. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ПРОСТОРУ

План

1.1 Способи задання площин.
1.2 Проєкціювання площин різного положення відносно площин проєкцій.
1.3 Взаємне розташування прямої і площини.
1.4 Взаємне розташування точки і площини.
1.5 Взаємне розташування площин.

1.1 Способи задання площин

Задати площину в просторі можна за допомогою трьох точок (рис. 1.1, а), що не належать одній прямій. Будь-яка фігура, що належить площині, завжди містить у собі три точки, які не належать одній прямій, тому площину можна ще задавати різними сполученнями геометричних фігур, наприклад, точкою і прямою (рис. 1.1, б), двома прямими, які паралельні між собою (рис. 1.7, в) або перетинаються (рис. 1.1, г). Взагалі, площину можна задати якоюсь плоскою фігурою (рис. 1.1, д). Кожним із цих сполучень геометричних образів можна окремо задавати якусь площину у просторі: α(A, B, C), β(P, l), γ (m || n), δ (k $\cap$ t) (рис. 1.1, б).

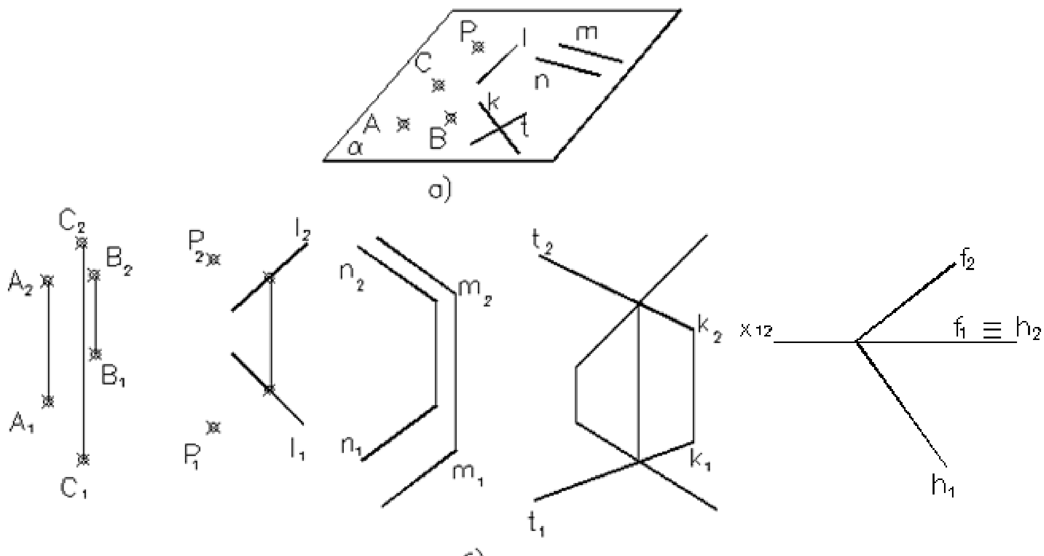


Рисунок 1.1 – Способи задання площин

Лінії перетину площини з площинами проєкцій називають слідами (рис. 1.2, е):

– лінію перетину з фронтальною площиною проєкцій – фронтальним слідом *f*;

– лінію перетину з горизонтальною площиною проєкцій – горизонтальним слідом *h*.

На комплексному кресленні площину можна задавати проєкціями її слідів (рис. 1.2).

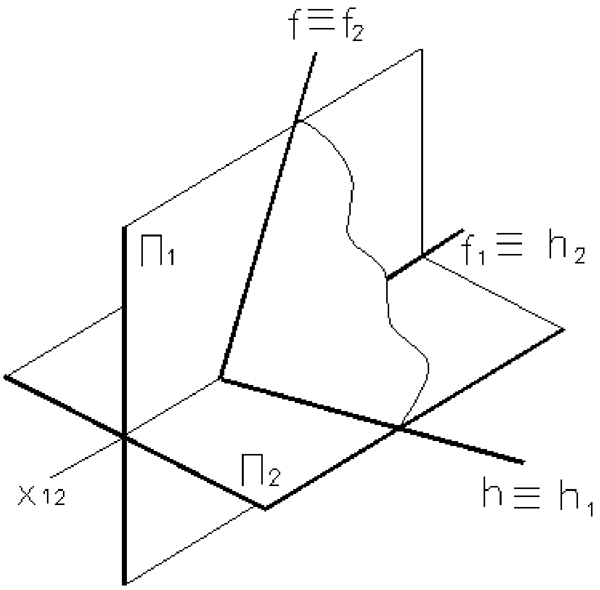


Рисунок 1.2 – Способи задання площин слідами

1.2 Проєкціювання площин різного положення відносно площин проєкцій

Залежно від положення, що займає площина відносно площин проєкцій, розділяють площини так:

– *проєкціювальні* – перпендикулярні до площин проєкцій;

– *рівня* – паралельні до площин проєкцій;

– *загального положення* – довільно розташовані по відношенню до площин проєкцій (рис. 1.1, б).

Проєкціювальні площини всіма своїми точками проєкціюються в пряму лінію на площину проєкцій, до якої вони перпендикулярні. Проєкціювальну площину, крім перерахованих вище засобів задання на комплексному кресленні, можна задавати тільки однією її проєкцією на ту площину проєкцій, до якої вона перпендикулярна.

На рисунку 1.3 задані три площини: $\alpha(\alpha_2)$ – фронтально проєкціювальна площина; $\beta(\beta_1)$ – горизонтально проєкціювальна площина; $\gamma(\gamma_3)$ – профільно проєкціювальна площина.

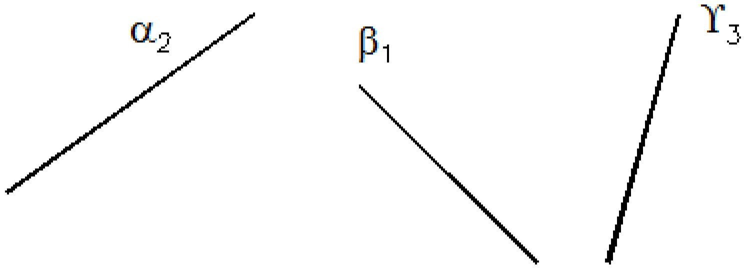


Рисунок 1.3 – Проєкціювальні площини

Площини рівня – це проєкціювальні площини, які ще й паралельні до іншої площини проєкцій, тому їх проєкції мають вигляд горизонтальної прямої (фронтальна і горизонтальна площини рівня) або вертикальної прямої (профільна пряма рівня) (рис. 1.4).

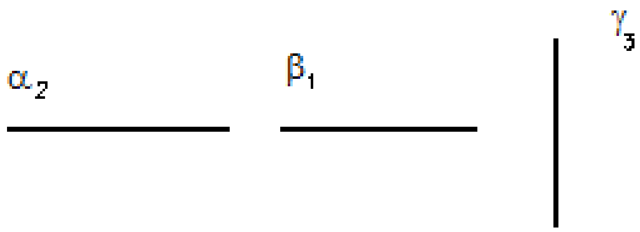


Рисунок 1.4 – Площини рівня

На рисунку 1.4 подано креслення трьох площин рівня: $\alpha(\alpha_2)$ – горизонтальна площина рівня $(\alpha\perp\Pi_2, \Pi_3$ і $\alpha//\Pi_1)$; $\beta(\beta_1)$ – фронтальна площина рівня $(\beta\perp\Pi_1, \Pi_3$ і $\beta//\Pi_2)$; $\gamma(\gamma_3)$ – профільна пряма рівня $(\gamma\perp \Pi_1, \Pi_2$ і $\gamma//\Pi_3)$.

1.3 Взаємне розташування прямої і площини

Пряма може належати або не належати площині, перетинати площину або бути їй паралельною. Пряма *належить площині,* якщо вона проходить через дві її точки. Якщо пряма належить (інцидентна) площині, то усі її точки належать до цієї площини. Для задання прямої, що належить площині, досить задати одну з її проєкцій.

Приклад1. Пряма *a*, що належить площині α ($m \cap n$), задана однією проєкцією a_2 (рис. 1.5, а). Знайти горизонтальну проєкцію a_1.

Проєкція a_1 прямої a знаходиться за точками A і B перетину прямої a з прямими m і n (рис. 1.5, б).

Алгоритм розв'язку.

1. $a_2 \cap m_2 = A_2$; $a_2 \cap n_2 = B_2$.
2. $A_1 \in m_1$; $B_1 \in n_1$.
3. $a_1(A_1, B_1)$.

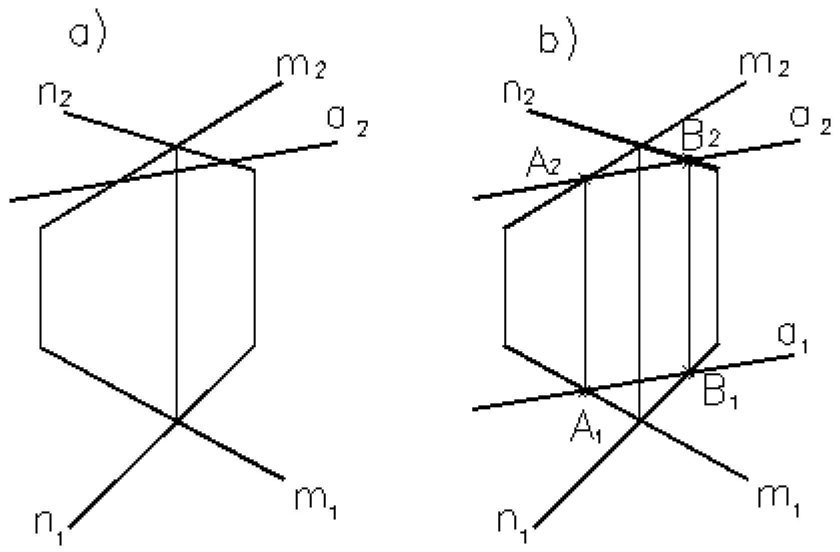
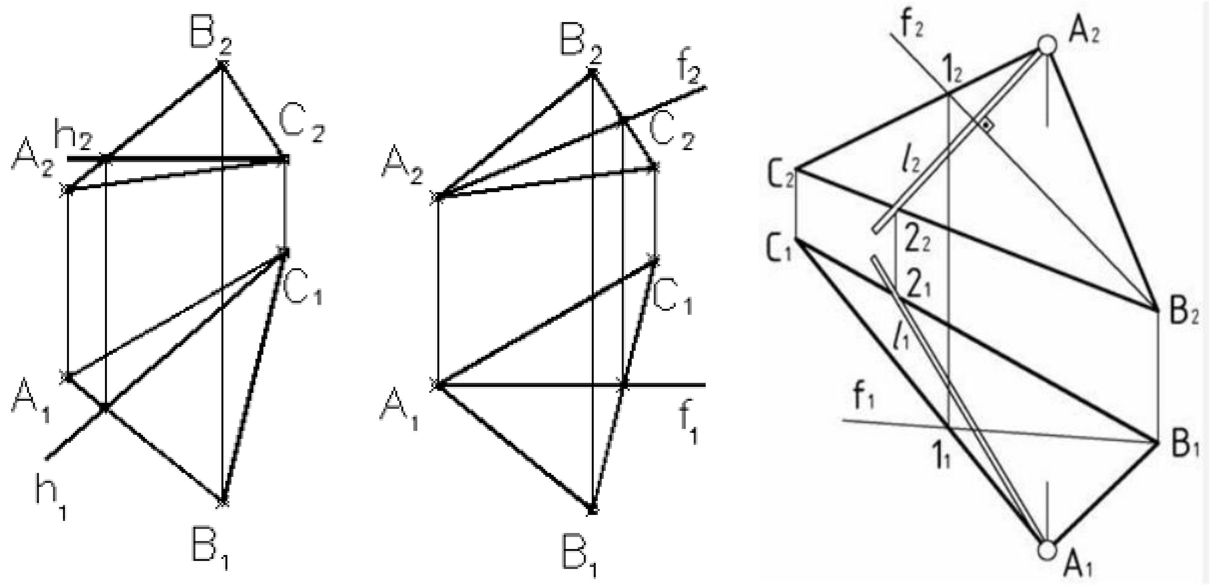


Рисунок 1.5 – Взаємне розташування прямої і площини

Пряма, яка належить площині, може бути *прямою рівня*, тобто паралельною до якоїсь із площин проєкцій. Прямі рівня, коли вони належать площині, називають *головними лініями площини.* Головні лінії площини – це *фронталь*, коли пряма належить площині і паралельна до фронтальної площини проєкцій, і *горизонталь* – пряма належить площині і паралельна до горизонтальної площини проєкцій. У фронталі і горизонталі одна з проєкцій завжди горизонтальна лінія. У горизонталі фронтальна проєкція горизонтальна (рис. 1.6, а). У фронталі горизонтальна проєкція горизонтальна (рис. 1.6, б).

Лінією найбільшого нахилу площини до площини П2 (лінією найбільшого скату) називається лінія, що належить площині і проходить перпендикулярно до фронталі площини. Кут нахилу площини АВС до фронтальної площини проєкцій дорівнює куту нахилу прямої ***l*** (лінії найбільшого скату) до площини П2 (рис. 1.6, в).



а) б) в)

Рисунок 1.6 – Головні ліні площини

Пряма, яка не належить площині, може займати відносно цієї площини такі положення:

– *загальне положення*, коли пряма не паралельна і не перпендикулярна до площини. Пряма загального положення перетинає площину у власній точці;

– *пряма може бути паралельною до площини,* і тоді вона перетинає площину у нескінченно віддаленій (невласній) точці. Якщо пряма паралельна до площини, то вона обов’язково паралельна до якоїсь прямої цієї площини;

– *пряма може бути перпендикулярною до площини.* У просторі пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох не паралельних між собою прямих, які належать цій площині. Беручи до уваги властивості проєкцій прямого кута, можна сказати, що *пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до її фронталі і горизонталі.* Розглянемо приклади.

Приклад 2. Через точку $M(M_1, M_2)$ провести пряму $m(m_1, m_2)$ паралельно до площини $\alpha\ (\Delta ABC)$ (рис. 1.7, а).

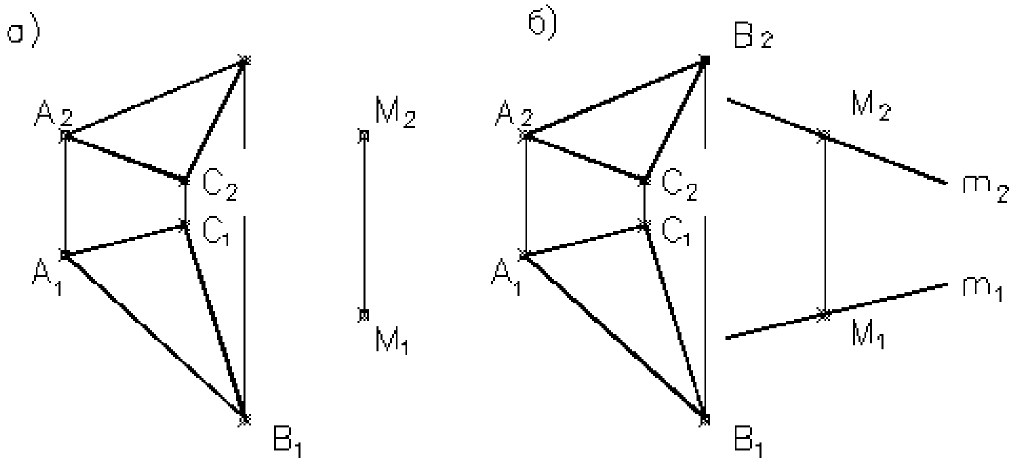


Рисунок 1.7 – Пряма паралельна до площини

Алгоритм розв’язку.

У просторі: через точку M проводимо пряму m паралельно до якої–небудь прямої, що належить площині $\alpha\ (\Delta ABC)$, наприклад, паралельно до прямої $n(A,C)$.

У проєкціях: 1) $m_2 \in M_2 \wedge m_2 \parallel n_2(A_2,C_2)$; 2) $M_1 \in M_2 \wedge M_1 \parallel n_1(A_1,C_1)$ (рис. 1.7, б).

Приклад 3. Через точку ***A*** провести пряму ***l*** перпендикулярно до площини $\alpha\ (\Delta ABC)$ (рис. 1.8, а).

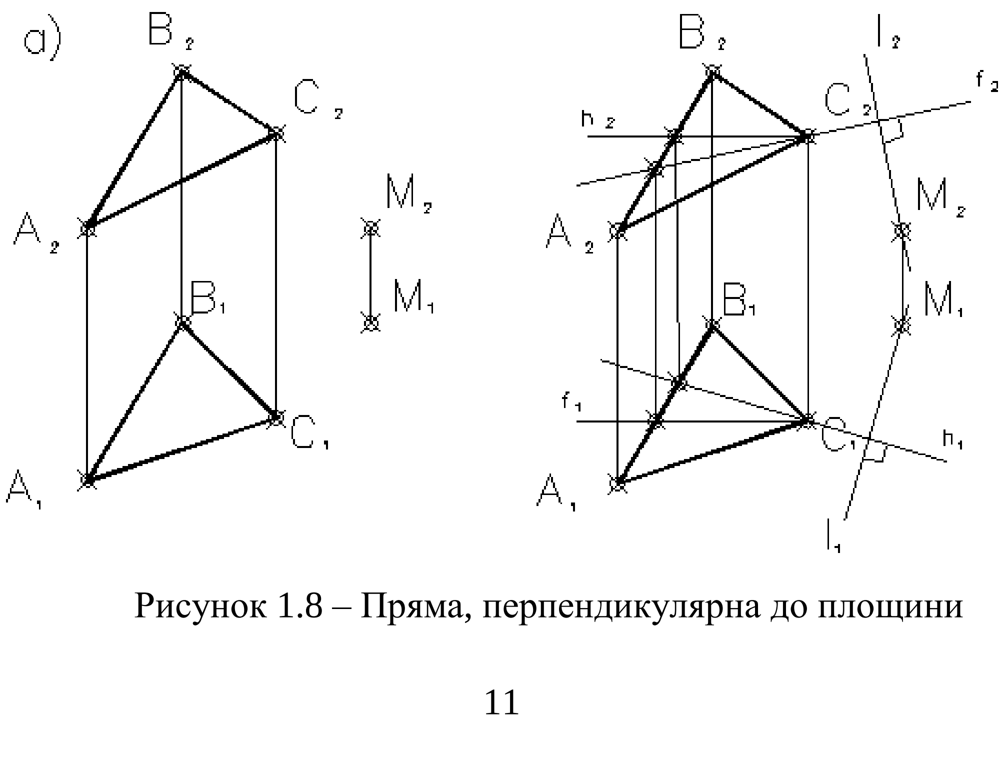


Рисунок 1.8 – Пряма, перпендикулярна до площини

Алгоритм розв'язання.

У просторі: 1) у площині $\alpha\,(\Delta ABC)$ проводимо горизонталь h і фронталь f;

2) через точку M проводимо пряму $\boldsymbol{l}$, перпендикулярну до прямих h і f.

У проєкціях: 1) h_2; 2) h_1; 3) $l_1 \ni M_1 \wedge l_1 \perp h_1$; 4) f_1; 5) f_2; 6) $l_2 \ni M_2 \wedge l_2 \perp f_2$ (рис. 1.8, б).

1.4 Взаємне розташування точки і площини

Точка належить площині, якщо вона інцидентна до прямої, що належить цій площині. Таким чином, для того щоб знайти точку на площині, треба провести через неї довільну пряму.

Приклад 4. Точка A, що належить площині $\alpha\,(m \,//\, n)$, задана на кресленні однією проєкцією A_2. Знайти відсутню проєкцію A_1 (рис. 1.9, а).

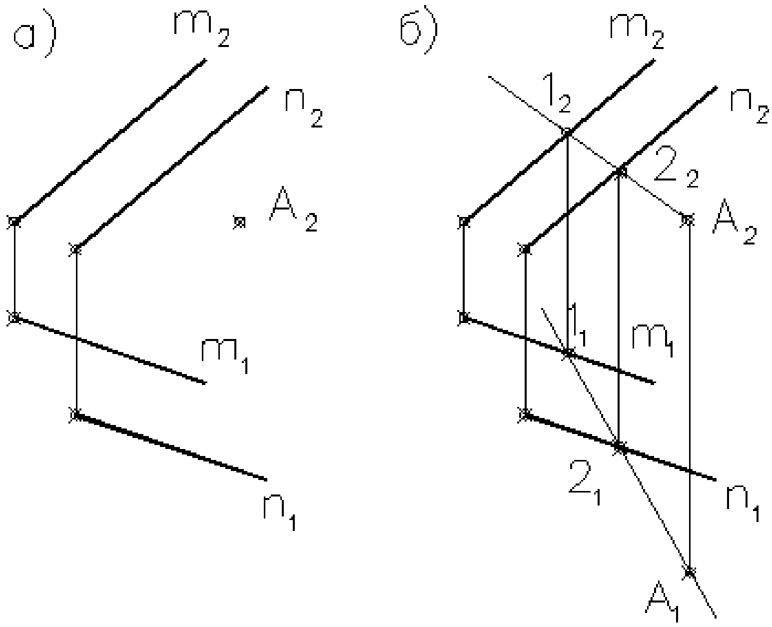


Рисунок 1.9 – Належність точки площині

Алгоритм розв'язку.

У просторі: через точку А в площині $\alpha\ (m \,//\, n)$ проводимо будь-яку пряму $l(1, 2)$, яка перетинає прямі m і n в точках 1 і 2.

У проєкціях: 1) $A_2 \in l_2(1_2, 2_2)$; 2) $l_1(1_1, 2_1)$; 3) $A_1 \in l_1(1_1, 2_1)$ (рис. 1.9, б).

1.5 Взаємне розташування площин

У нарисній геометрії дві площини завжди перетинаються по власній або невласній (нескінченно віддаленій) прямій.

Дві площини, які перетинаються по невласній прямій, називаються *паралельними*. Якщо дві перетяті прямі однієї площини взаємно паралельні двом перетятим прямим другої площини, то ці площини *паралельні.* Враховуючи властивості паралельності прямих у *проєкціях,* можна сказати: якщо на кресленні *дві перетяті прямі однієї площини мають паралельні однойменні проєкції з двома перетятими прямими другої площини, то ці площини у просторі – паралельні.*

Приклад. Через точку М провести площину β***(m***$\cap$***n),*** паралельно до площини (рис. 2.16, а).

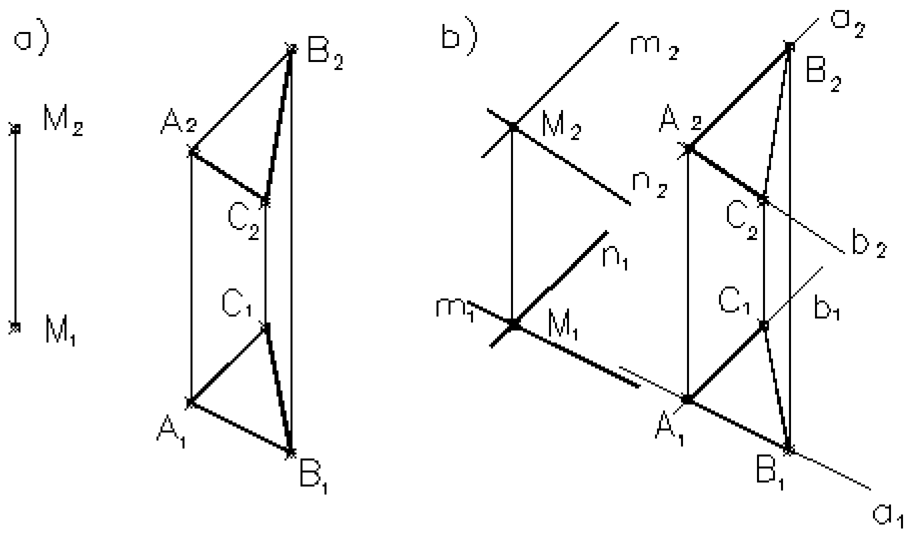


Рисунок 1.10 – Паралельні площини

Алгоритм розв’язку.

У просторі: через точку М провести дві довільні прямі, наприклад, прямі *m* і *n*, які були б паралельні до будь-яких двох перетинаючих прямих, наприклад, прямих *a (A, B)* і *b (A, C)* площини α *(*Δ*ABC)*.

У *проєкціях*: 1) $m_2 \ni M_2$; $m_2 // a_2(A_2, B_2)$; 2) $m_1 \ni M_1$; $m_1 // a_1(A_1, B_1)$;
3) $n_2 \ni M_2$; $n_2 // b_2(A_2, C_2)$; 4) $n_1 \ni M_1$; $n_1 // b_1(A_1, C_1)$.

Взаємно перпендикулярні площини. Дві площини взаємно перпендикулярні, коли одна з них проходить через перпендикуляр до другої.

Приклад. Через точку L провести будь-яку площину α, перпендикулярну до площини $\beta(m \cap n)$ (рис. 1.11, а).

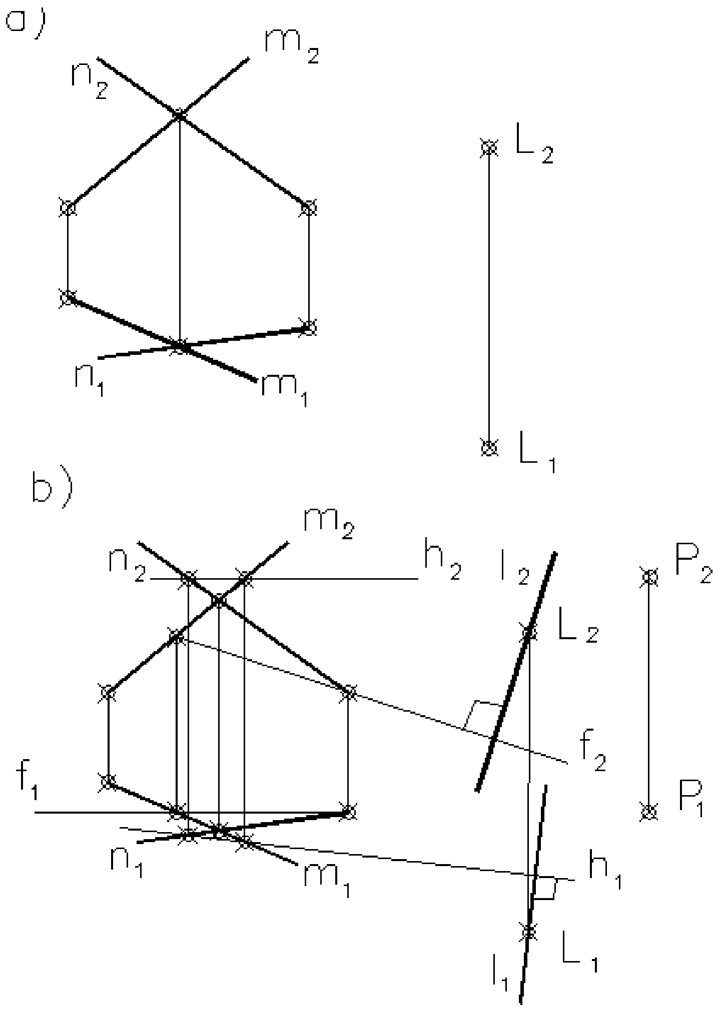


Рисунок 1.17 – Взаємно перпендикулярні площини

Алгоритм розв’язку.

У просторі: 1) у площині $\beta(m \cap n)$ проводимо горизонталь h і фронталь f; 2) через точку L пряму l перпендикулярно до h і f; 3) задаємо у просторі довільну точку P. Пряма l та точка P задають у просторі площину $\alpha(l, P) \perp \beta(m \cap n)$.

У проєкціях: 1) $h_2 \in \beta_2(m_2 \cap n_2)$; 2) $h_1 \in \beta_1(m_1 \cap n_1)$; 3) $f_1 \in \beta_1(m_1 \cap n_1)$;

4) $f_2 \in \beta_2(m_2 \cap n_2)$; 5) $l_1 \perp h_1$, $l_1 \ni L_1$; $l_2 \perp f_2$, $l_2 \ni L_2$;

5) P_2 *і* P_1 довільно (рис. 1.17, б).

ТЕМА № 2 ПРОЄКЦІЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

План

2.1 Проєкціювання кривих ліній.
2.2 Утворення поверхонь.
2.3 Лінійчаті поверхні.
2.4 Поверхні обертання.

2.1 Проєкціювання кривих ліній

Лінія може бути: прямою, ламаною, кривою, плоскою або просторовою.

Ламана лінія складається із послідовно з'єднаних відрізків прямої лінії. Ламана лінія може бути плоскою і просторовою.

Крива лінія або *крива* – це геометричний образ, який має різні визначення залежно від способів її створення. Наприклад, криву лінію можна розглядати як межу поверхні, як наслідок перетину кривих поверхонь або як *слід неперервно рухомої точки* тощо. Крива лінія може бути плоскою і просторовою.

Плоскі криві лінії. Плоскою називають лінію, у якої всі точки належать одній площині. Скінченну кількість точок на лінії називають *дискретним каркасом лінії*. Проєкцією лінії є множина проєкцій її точок (рис. 2.1).

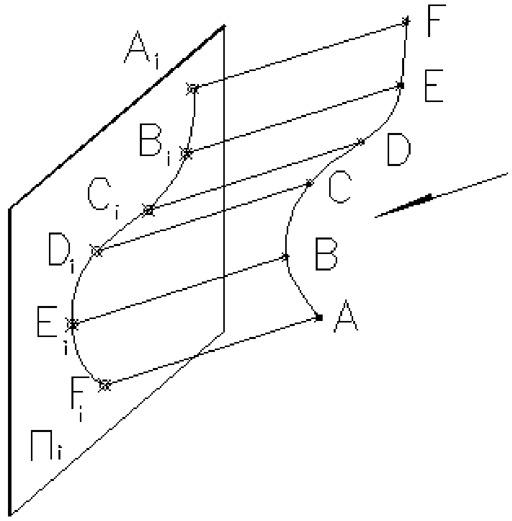


Рисунок 2.1 – Плоскі криві лінії

Дуги кривої між точками дискретного каркасу можуть бути побудованими лише приблизно. Криві, які не підкорені будь-якому математичному закону, називають *графічними.*

Пряма *a*, яка перетинає криву *m* у двох або більше точках, зветься *січною* (рис. 2.2, а). Якщо січну *a* переміщувати таким чином, щоб довжина дуги *AB* між точками *A* і *B* наближалась до нуля (рис. 2.2, б), то в граничному положенні точки *A* і *B* збігаються і січна займе положення *t*, в якому вона зветься *дотичною.* Перпендикуляр *n* до дотичної в точці дотику називається *нормаллю кривої* в цій точці (рис. 2.2.в). Дотичні вказують напрямок φ руху точки *B* вздовж кривої (рис. 2.2, б).

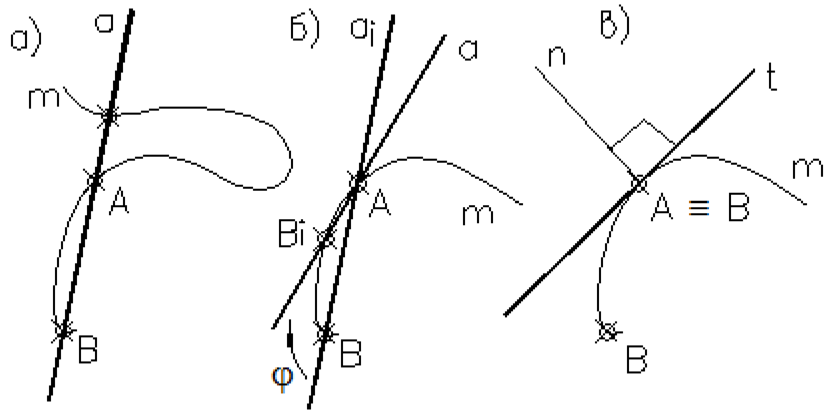


Рисунок 2.2 – Січна пряма

Крива в кожній точці має *викривлення*, яке вимірюється числом, що називається *кривизною*, і визначається як величина $\kappa = 1/R$. Кривизна в точці обернена до радіуса кола, проведеного через три точки кривої, дві з яких нескінченно зближуються з точкою ***A***, у якій вимірюється кривизна (рис. 2.3).

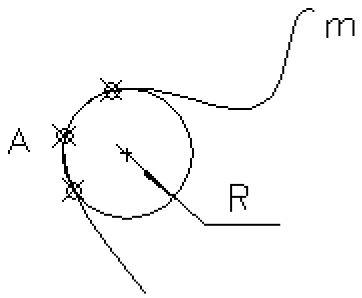


Рисунок 2.3 – Вимірювання кривизни

Криві лінії можуть бути заданими *аналітично*, тобто за допомогою аналітичних виразів (рівнянь), і *графічно* на кресленні. У нарисній геометрії криві лінії вивчаються за допомогою їх *проєкцій* на комплексному кресленні, і тому треба знати деякі властивості кривих ліній і властивості їхніх *проєкцій*.

При аналітичному заданні криві поділяються на *алгебраїчні* та *трансцендентні криві. Алгебраїчними* називають криві лінії, які визначаються в декартових координатах *алгебраїчними рівняннями.* Криві, що визначаються неалгебраїчними рівняннями, називаються *трансцендентними.* Наприклад, найбільш поширені на практиці *алгебраїчні криві* (коло, еліпс, парабола, гіпербола) та *трансцендентні криві* (синусоїда, циклоїда тощо). Перелічені вище алгебраїчні криві лінії мають рівняння другого степеня. Січна алгебраїчних кривих другого степеня має дві точки перетину.

Крива *m* зветься *гладкою* в точці *M*, якщо вона в точці *M* має визначену та єдину дотичну (рис. 3.4, в). Крива лінія, яка гладка у всіх своїх точках, зветься *гладкою кривою лінією.* У деяких точках крива лінія може не мати визначеного напрямку або, що те ж саме, мати не одну, а дві різні дотичні: одна з яких (t_1) (рис. 2.4, а) вказує напрямок від *B* до *A*, друга (t_2) – напрям від *B* до *C*. Точка *B* зветься точкою *зламу (кутовою точкою),* яку відносять до так званих *особистих точок кривої.*

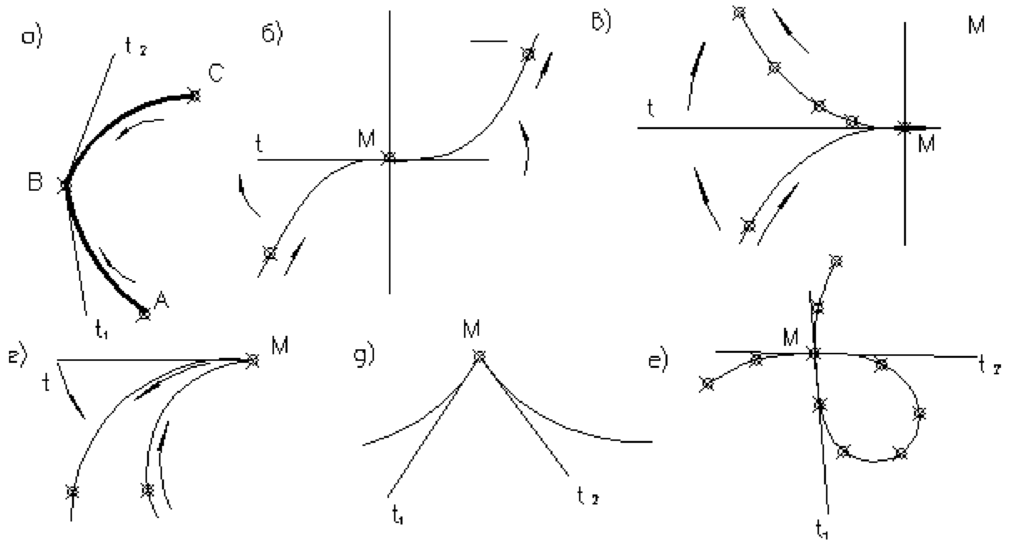


Рисунок 2.4 – Особисті точки кривої лінії

На рисунку 2.4 відображені деякі з *особистих точок: точка перегину* (*б*), *точка загострення* (*в*), *точка «дзьоб»* (*г*), *вузлові точки* (*д, е*).

Розглянемо *основні властивості проєкцій плоских кривих ліній.*

Попустимо, що якась плоска крива *m* лежить у площині α. Спроєкціюємо криву *m* за напрямком *t* на площину $П_1$ (рис. 2.5).

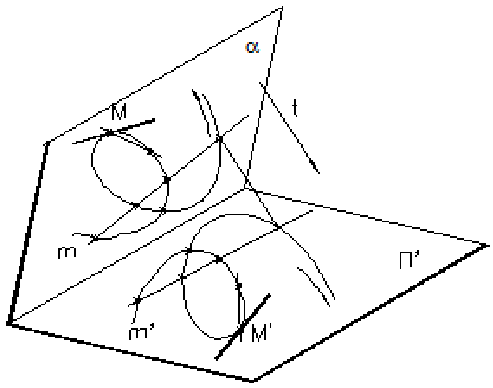


Рисунок 2.5 – Основні властивості проєкцій плоских кривих ліній

Кожна точка *M* кривої *m* проєктується в точку M_1 площини $П_1$, і тоді крива *m* проєктується в m_1. Проєкція m_1 буде мати ті властивості оригінала *m*, які зберігаються при паралельному проєкціюванні:

1. Порядок плоскої алгебраїчної кривої не змінюється.

2. Нескінченно віддалені точки кривої проєктуються в нескінченно віддалені точки її проєкції.

3. Дотична до кривої проєктується в дотичну до її проєкції.

Кількість точок перетину алгебраїчних кривих зберігається. Потрібно зазначити, що плоскі криві, коли напрямок проєктування паралельний до площини кривої, проєктуються в прямі лінії, а коли площина кривої паралельна до площини проєкцій, то крива і її проєкція – *конгруентні.*

Проєкції гладкої кривої – гладкі.

Якщо крива має особисті точки, то і її проєкція має такі ж самі особисті точки.

2.2 Утворення поверхонь

Існує багато визначень поверхні. Наприклад, *поверхня визначається як неперервна двопараметрична множина точок, або однопараметрична множина ліній.*

Точки або лінії цих множин називають відповідно точками або лініями *неперервного каркаса поверхні*. При графічному зображенні поверхню будемо визначати як *слід неперервно рухомої лінії*, яка зветься *твірною*. Оскільки неможливо зобразити всі точки або всі лінії неперервного каркаса поверхні, то на кресленні зображають лише окремі точки або окремі лінії з певним інтервалом, тобто *дискретний каркас.* На рисунку 2.6 подано зображення дискретного каркасу поверхні $\boldsymbol{\alpha}$, що складається з окремих положень неперервно рухомої твірної ***l***, яка при своєму русі перетинає дві лінії ***m*** і ***n,*** що належать поверхні $\boldsymbol{\alpha}$. Лінії ***m*** і ***n*** звуться *напрямними.* Напрямних може бути одна і більше.

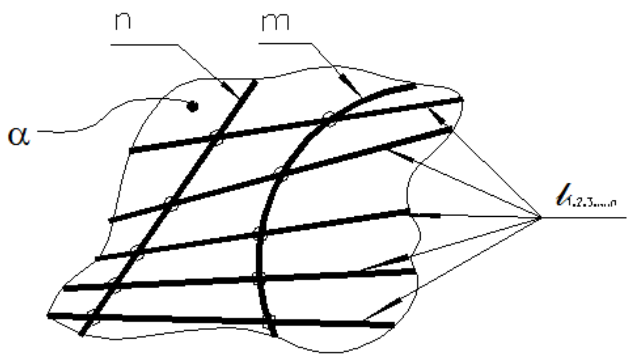


Рисунок 2.6 – Дискретний каркас поверхні

Поверхня вважається заданою на кресленні, якщо за однією проєкцією точки, яка належить поверхні, можна визначити другу проєкцію цієї точки. При графічному заданні поверхні потрібна мінімальна інформація, і тому на кресленні поверхню можна задавати за допомогою так званих *визначників.*

Визначник поверхні – це сукупність геометричних образів та умов, що дозволяє задавати на кресленні неперервний каркас поверхні. Визначник має математичний $Фк(l,\ i\ \ S\ )(l\ \square\ i,\ l \cap i = S)$ та графічний записи (рис. 2.7). Математичний запис визначника складається з трьох частин: шифру поверхні, переліку геометричних образів і переліку умов, за допомогою яких можна реалізувати креслення дискретного каркасу поверхні:

$$Фк\ \ (l,\ i,\ S\ )(\ l\ \square\ i,\ l \cap i = S\ )\ ,$$

де $Фк$ – шифр поверхні прямого кругового конуса;

$(l,\ i,\ S\ )$ – сукупність геометричних образів (l – твірна, i – вісь обертання твірної, S – точка перетину твірної з віссю – вершина конуса), за допомогою яких можна задати на кресленні неперервний каркас поверхні конуса;

$(\ l\ \square\ i,\ l \cap i = S)$ – умови побудови неперервного каркаса поверхні (закон каркаса): l обертається навколо осі i і перетинає вісь в точці S.

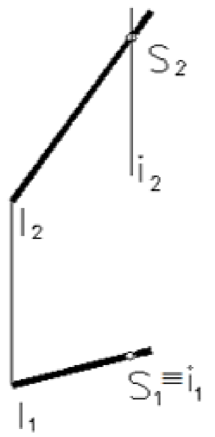


Рисунок 2.7 – Графічний запис визначника поверхні

Приклад. Поверхня прямого кругового конуса $Фк$ задана визначником $Фк\ \ (l,\ i,\ S\ )\ (\ l\ \square\ i,\ l \cap i\ = S)$ (рис. 2.8). Знайти недостатню проєкцію точки А, що належить поверхні конуса ($A \in Фк$), і побудувати дискретний каркас поверхні (декілька положень твірної).

Алгоритм розв’язку.

У просторі: оскільки при обертанні твірної l навколо осі i кожна її точка рухається по колу, центр якого лежить на осі i , точка A, якщо вона належить поверхні конуса, повинна належати твірній l і обертатися з нею навколо осі i . Відповідно до цього обертаємо точку $A(A_1,\ A_2)$ навколо і до суміщення її з твірною $i(i_1,i_2)$.

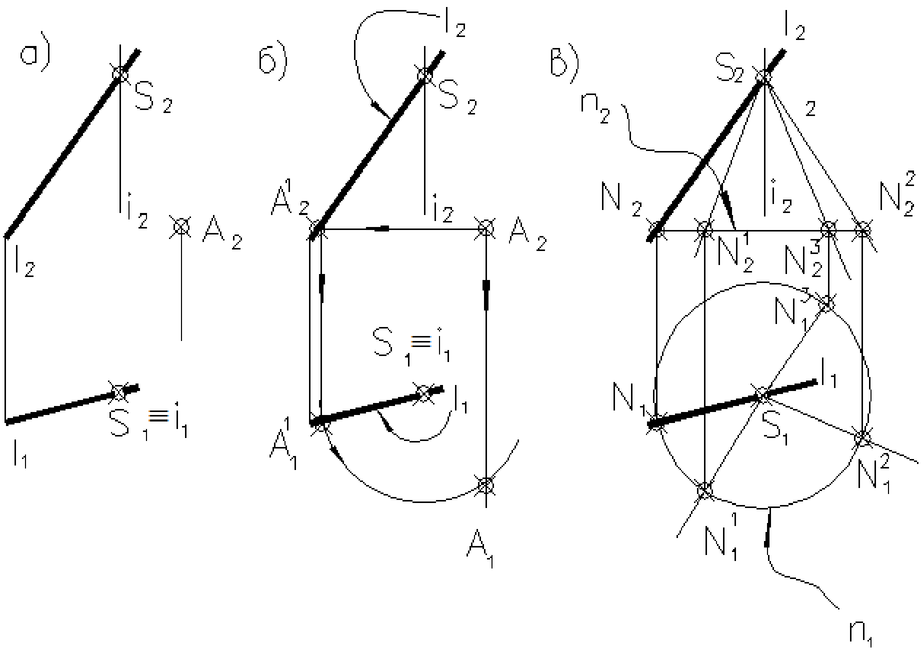


Рисунок 2.8 – Поверхня прямого кругового конуса

В проєкціях: 1) A_2 суміщаємо з i_2: $(A^1{}_2 \in i_2)$; 2) $A^1{}_1 \in l_1$; 3) обертаємо $A^1{}_1 \in l_1$ навколо i_1 до суміщення з лінією проєкційного зв'язку A_2A_1 (рис. 2.8, б). Як будувати дискретний каркас поверхні, наведено на рисунку 2.8, в.

Інженерна та архітектурно-будівельна практика вимагають застосування поверхонь із найпростішими лініями каркасу. Тому для утворення поверхонь, як правило, використовують *прямі* та *криві лінії другого порядку.* Залежно від форми твірної, форми напрямних та закону утворення каркасу, тобто закону неперервного руху твірної, поверхні умовно можна систематизувати так:

1) *лінійчаті поверхні:* твірна – пряма лінія;

2) *поверхні обертання:* твірна (будь-яка лінія: пряма або крива) неперервно обертається навколо нерухомої осі;

3) *циклічні* поверхні: твірна – коло;

4) *гвинтові поверхні:* утворюються гвинтовим рухом будь-якої твірної.

Наведена класифікація поверхонь відносно умовна, бо деякі поверхні можна вільно віднести до одного і до іншого типу. Наприклад, якщо твірна – коло, центр якого ковзає по циліндричній гвинтовій лінії, то поверхня зветься *гвинтовою циклічною поверхнею.* Незважаючи на умовність, систематизація поверхонь корисна і дозволяє значно скоротити час при описуванні поверхонь.

В архітектурно-будівельній практиці важливе значення має здатність деяких типів поверхонь розгортатися на площину, тобто суміщатися з площиною усіма своїми точками без складок та розривів. Поверхні, які розгортуються на площину, відносять до типу *розгортних поверхонь.*

Розглянемо деякі з типів поверхонь, найбільш поширених в інженерній та архітектурно-будівельній практиці.

2.3 Лінійчаті поверхні

2.3.1 Лінійчаті розгорнуті поверхні

Циліндрична (рис. 2.9, а) *(або складчаста* (рис. 2.9, б) – поверхня, утворена неперервним рухом прямої твірної, яка послідовно проходить через усі точки направляючої кривої (гладкої або ломаної) і нескінченно віддалену точку, тобто паралельно до самої себе: $Ф_ц(l,m)(l \cap m,\ l \parallel l^i)$. Якщо у циліндричній поверхні направляюча ***m*** – коло і твірна ***l*** утворює прямий кут з площиною кола ***m***, то така циліндрична поверхня називається *прямим круговим циліндром.*

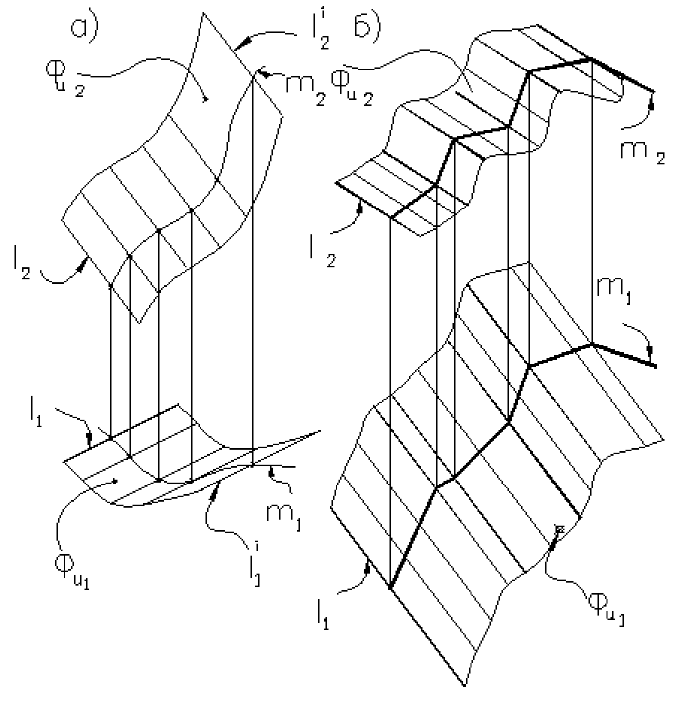


Рисунок 2.9 – Циліндрична та складчаста поверхні

Конічна (рис. 2.10, *а*) *(або пірамідальна* (рис. 2.10, *б*)) *поверхня* утворюється неперервним рухом прямої твірної, яка перетинає напрямну (гладку криву або ламану) і проходить через нерухому точку, яка зветься вершиною конічної поверхні: *Фк(l,m,S)(l∩m, l∋S).* Якщо вершину конічної (або пірамідальної) поверхні віддалити в нескінченність, то поверхня переходить у циліндричну або складчасту.

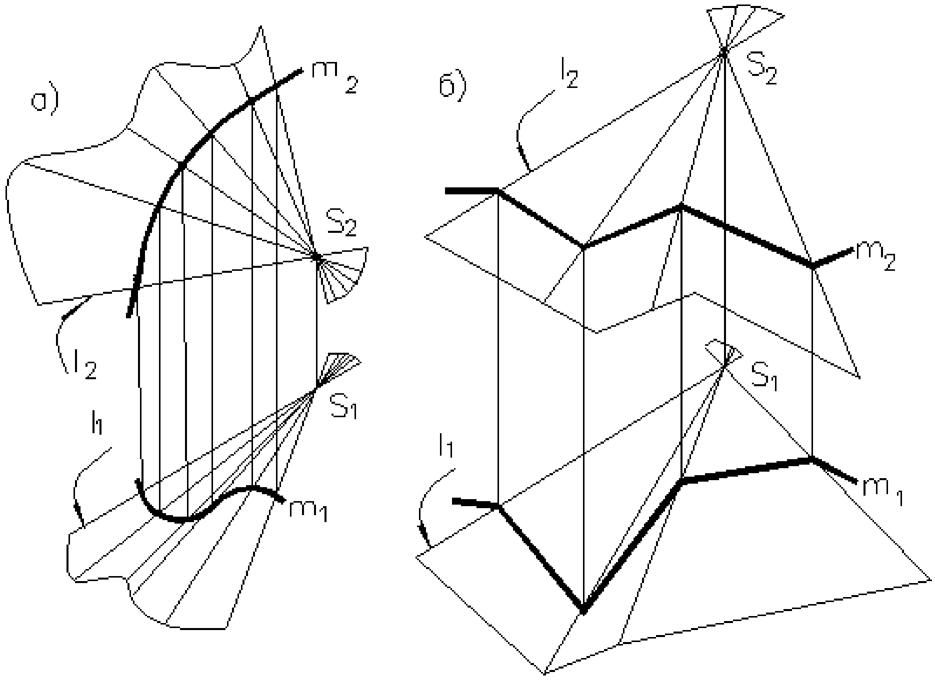


Рисунок 2.10 – Конічна та пірамідальна поверхні

Торс – поверхня, утворена неперервним рухом прямої, яка у кожному своєму положенні дотична до деякої просторової гладкої кривої (напрямної, котра зветься *ребром звороту торса*): $Ф_т$(l,m)(l∩ m) (рис. 2.11).

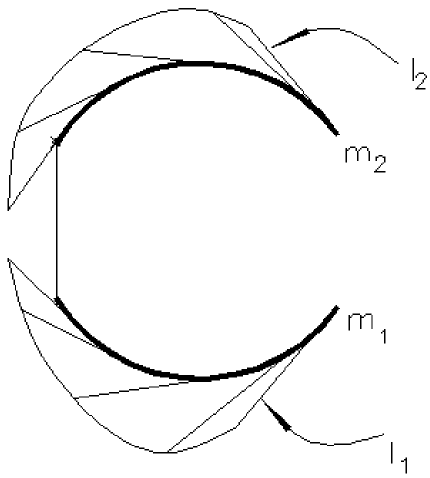


Рисунок 2.11 – Торсова поверхня

Циліндричні, конічні та торсові поверхні розгортаються на площину, тобто *розгорнуті поверхні*. Усі інші лінійчаті поверхні на площину не розгортаються і називаються *косими лінійчатими поверхнями.*

2.3.2 Лінійчаті нерозгорнуті поверхні, або косі лінійчаті поверхні

У загальному випадку твірна косої лінійчатої поверхні повинна перетинати три напрямні лінії. Поверхня, у якої три мимобіжні прямі напрямні, називається *однополосним гіперболоїдом*: $\Phi_{ог}(l, m, n, f)(l \cap m, l \cap n, l \cap f)$ (рис. 2.12). На рисунку 2.12 для полегшення побудови каркасу поверхні одну з напрямних (на рис. 2.12 напрямна ***f***) задано проєкціювальною до $\boldsymbol{\Pi_2}$, що дає можливість на горизонтальній проєкції просто знаходити три точки перетину твірної «l» з напрямними, а їхню фронтальну проєкцію знаходити за проєкційною відповідністю.

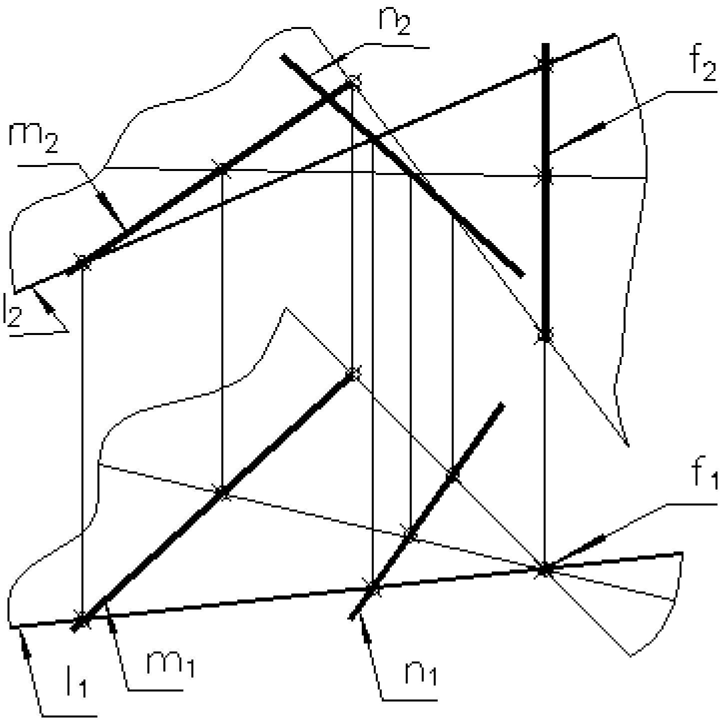


Рисунок 2.12 – Однополосний гіперболоїд

Поверхні Каталана: гіперболічний параболоїд (коса площина), коноїд, циліндроїд.

Якщо напрямну ***f*** (рис. 2.12) віддалити у нескінченність, то горизонтальні проєкції каркасу твірних ***l*** будуть паралельними, а мимобіжні лінії каркасу твірних $\boldsymbol{l}$ у просторі – паралельними до деякої площини Σ, яка зветься *площиною паралелізму*. Лінійчаті поверхні з трьома напрямними, одна з яких віддалена у нескінченність і замінюється площиною паралелізму, називаються *поверхнями Каталана.* Залежно від вигляду напрямних, поверхні Каталана поділяються на *гіперболічні параболоїди (косі площини), коноїди і циліндроїди.*

Гіперболічним параболоїдом або *косою площиною* називають лінійчату поверхню, у якої пряма твірна l при неперервному русі перетинає дві мимобіжні прямі m і n і залишається паралельною до площини паралелізму Σ:

$\Phi_{гп}(l, m, n, \Sigma)(l \cap m, l \cap n, l \,//\, \Sigma)$ (рис. 2.13).

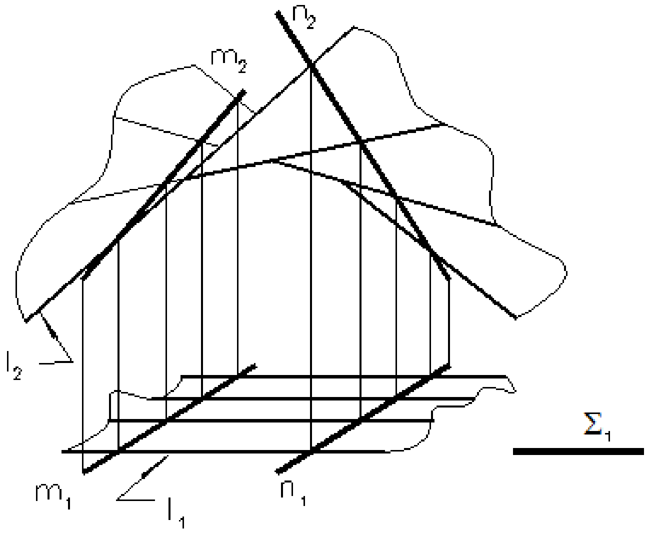


Рисунок 2.13 – Гіперболічний параболоїд

Коноїд – лінійчата поверхня, утворена неперервним рухом прямої твірної l, яка перетинає криву m і пряму m – напрямні, залишаючись паралельною до площини паралелізму Σ: $\Phi_{кон}(l, m, n, \Sigma)(l \cap m, l \cap n, l \,//\, \Sigma)$ (рис. 2.14).

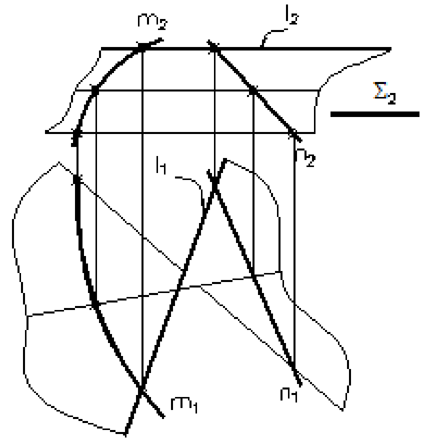


Рисунок 2.14 – Коноїд

Циліндроїд – лінійчата поверхня, утворена неперервним рухом прямої твірної, яка перетинає дві криві напрямні і паралельна до площини паралелізму:

$\Phi_{ц}(l, m, n, \Sigma)(l \cap m,\ l \cap n,\ l \,//\, \Sigma)$ (рис. 2.15).

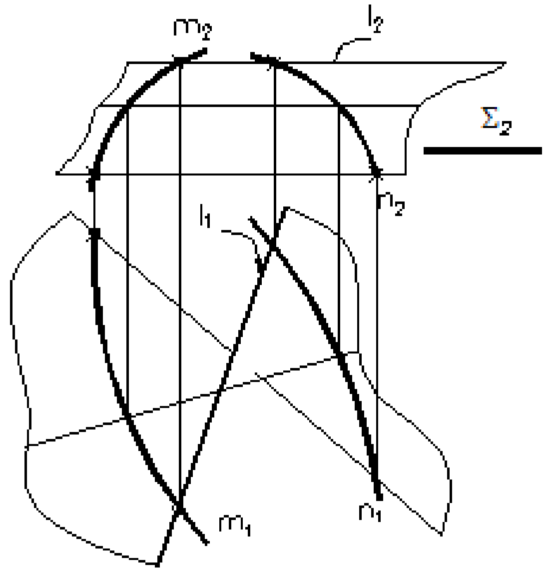


Рисунок 2.15 – Циліндроїд

2.4 Поверхні обертання

У техніці поширені так звані поверхні обертання, які можуть бути лінійчатими і нелінійчатими.

Поверхня обертання утворюється обертовим рухом твірної лінії *m* навколо деякої осі *i* : (*m*, *i*) (*l* ⟲ *i*) (рис. 2.16).

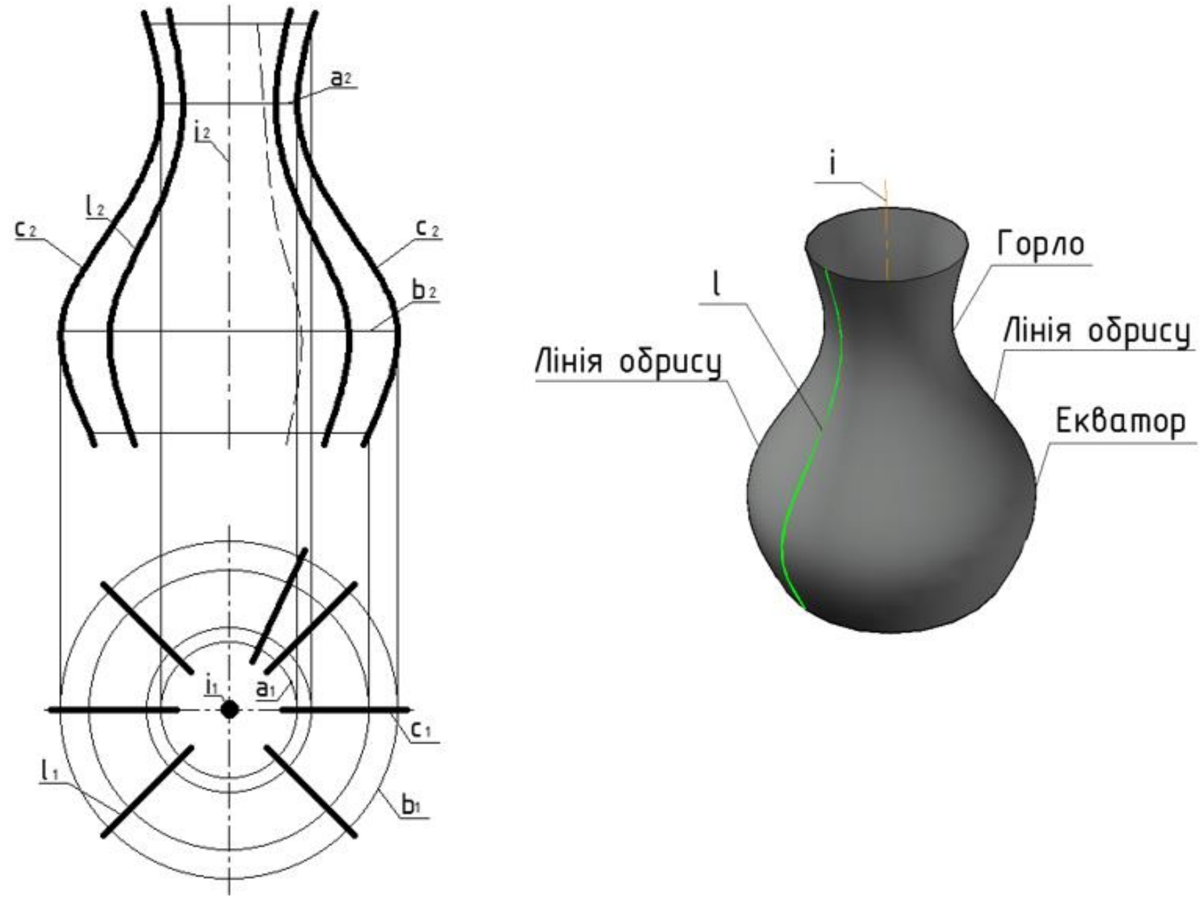


Рисунок 2.16 – Поверхня обертання

Перерізи поверхонь обертання площинами, які проходять через вісь обертання, називають *меридіанами,* а площинами, перпендикулярними до осі – *паралелями*, відповідно *c*, *i, a* та *b* (рис. 2.16). Меридіан, площина якого паралельна до площини проєкцій, називають головним (*c* – *головний меридіан*). Паралелі *a* та *b*, по яких дотикаються з поверхнею обертання співвісні з нею внутрішній та зовнішній циліндри, називають відповідно *горлом* і *екватором* поверхні.

На рисунку 2.17 зображено *еліпсоїд обертання*, утворений обертанням еліпса *m* навколо його великої осі *i* .

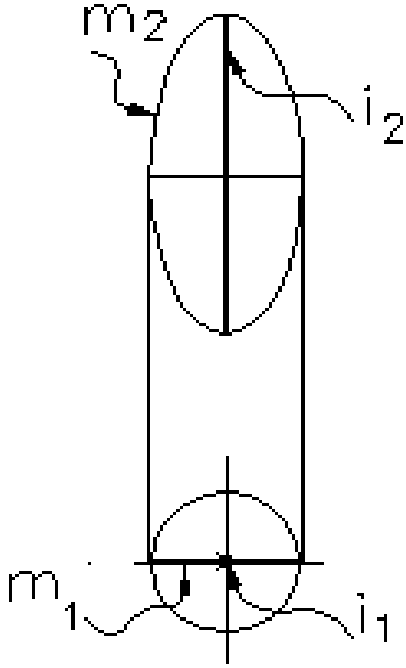


Рисунок 2.17– Еліпсоїд обертання

Гіперболоїд обертання – поверхня, утворена обертанням прямої навколо мимобіжної з нею осі (рис. 2.18).

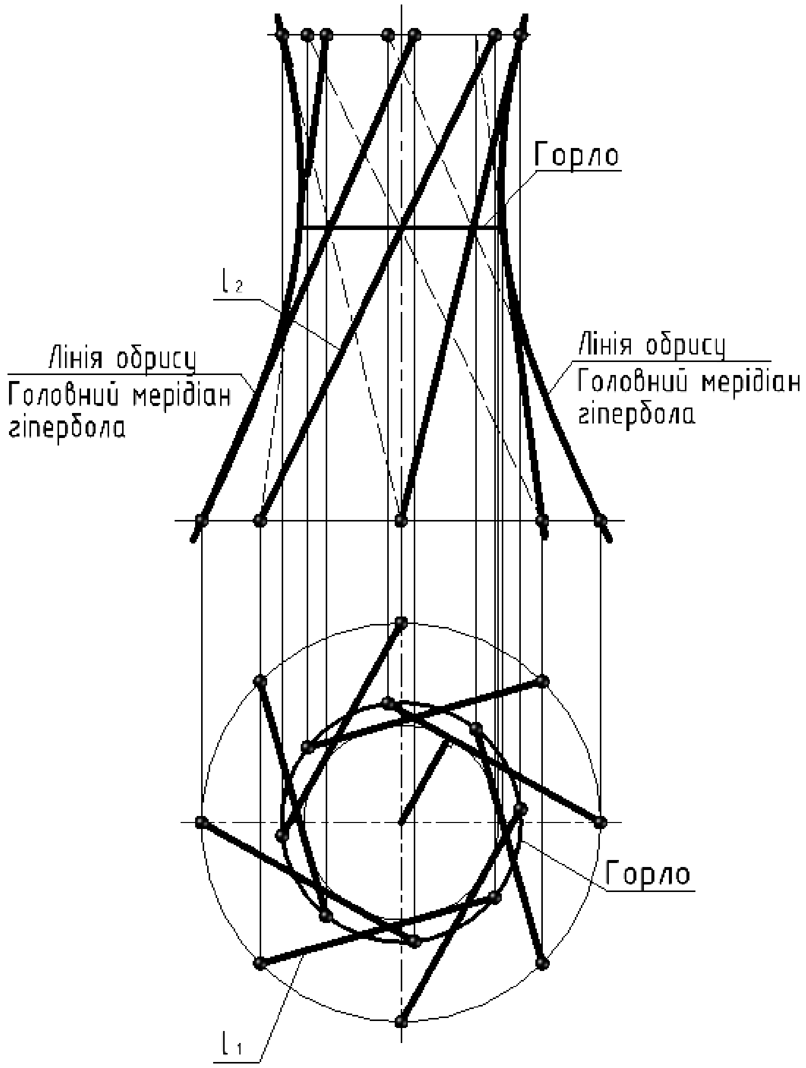


Рисунок 2.18 – Гіперболоїд обертання

Лінійчата поверхня, яку необхідно побудувати, зветься однополосним гіперболоїдом обертання. Вона утворюється обертанням прямої *l* навколо мимобіжної з нею осі *і*. Найближча до осі обертання точка твірної описує найменшу паралель – горло гіперболоїда. Головний меридіан – гіпербола.

Ця поверхня може бути також отримана обертанням гіперболи навколо своєї уявної осі *і*. Поверхня має два сімейства прямолінійних, які створюються, тому через одну точку можна провести дві прямі – висхідну пряму (як в цій задачі) і спадну пряму. Це видно, якщо стосовно до горла гіперболоїда провести площину, паралельну до осі обертання. Така площина перетинає поверхню по двох прямих. Наступна висхідна пряма утворює друге сімейство прямолінійних відрізків.

Якщо в центрі горла гіперболоїда побудувати конус з таким же кутом нахилу твірної, як у гіперболоїда, то одержимо так званий асимптотичний конус, до якого поверхня наближається в нескінченності.

ТЕМА № 3 ПРОЄКЦІЮВАННЯ ГВИНТОВИХ ПОВЕРХОНЬ. ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА

План

3.1 Закритий гелікоїд.
3.2 Відкритий гелікоїд.
3.3 Проєкціювання гранних тіл.
3.4 Проєкціювання тіл обертання.

Гвинтову поверхню одержуємо гвинтовим рухом твірної лінії. Така поверхня повинна мати не менш як одну гвинтову напрямну. На рисунку 3.1 зображено креслення розгортної гвинтової поверхні евольвентного гелікоїда, утвореного рухом прямої напрямної ***l***, дотичної до циліндричної гвинтової напрямної лінії ***m***: поверхня ***Фг (l, m) (l□m),*** де ***m*** – циліндрична.

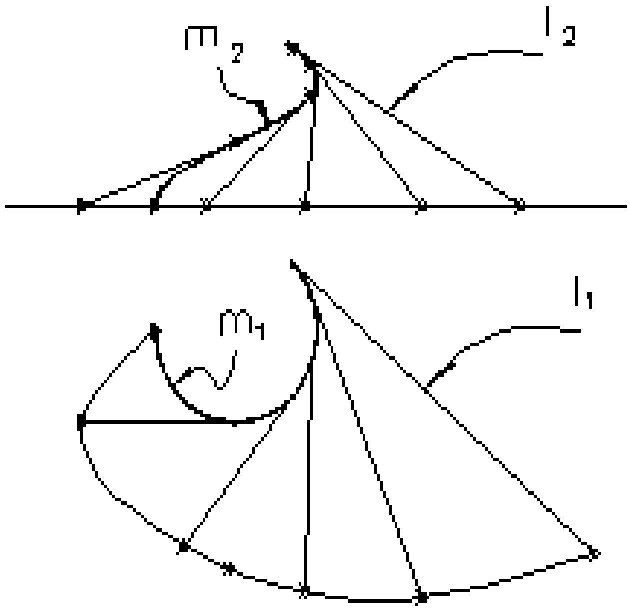


Рисунок 3.1 – Гвинтова лінія евольвентного гелікоїда

Лінійчаті гвинтові поверхні – гелікоїди можуть бути прямими або похилими (залежно від кута між віссю і твірною поверхні), закритими (якщо твірна і вісь перетинаються), відкритими (коли твірна і вісь – мимобіжні).

3.1 Закритий гелікоїд

На рисунку 3.2 показано прямий закритий гелікоїд. Прямі гелікоїди належать до коноїдів, які використовуються при виготовленні різьби, в шнеках, гвинтових східцях, пандусах. Прямі гелікоїди утворюються шляхом руху твірної по двох напрямних. Одна з них – циліндрична гвинтова лінія ***a***, друга – вісь гвинтової лінії ***i***. У кожному зі своїх положень твірна залишається паралельною до площини паралелізму, яка перпендикулярна до осі гвинтової лінії.

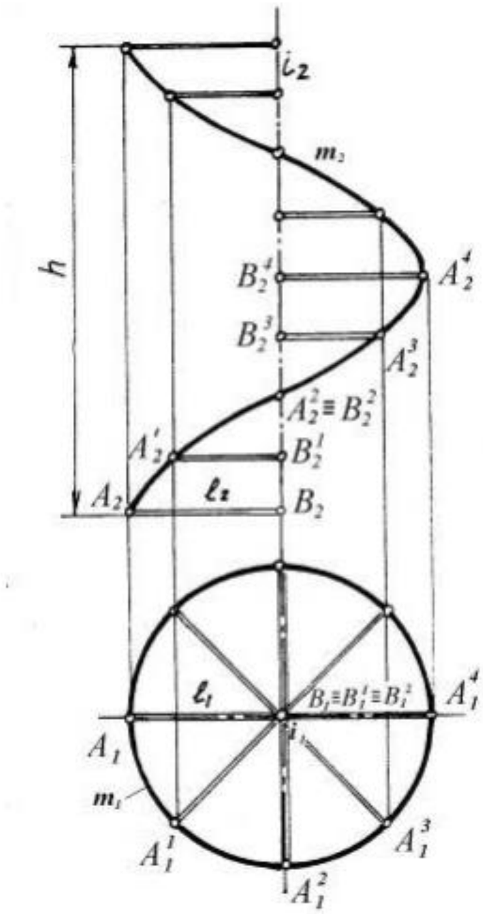


Рисунок 3.2 – Прямий закритий гелікоїд

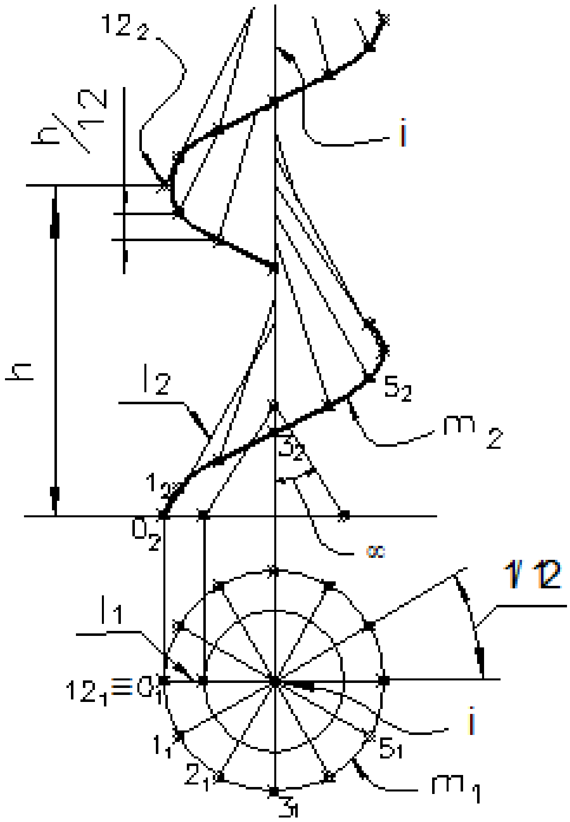


Рисунок 3.3 – Похилий закритий гелікоїд

На рисунку 3.3 надано приклад нерозгортної гвинтової поверхні похилого (архімедова) закритого гелікоїда, утвореного рухом прямої твірної l, що перетинає циліндричну гвинтову лінію m та її вісь i під заданим кутом α. Твірна l у кожному положенні паралельна до співвісного з гелікоїдом конуса обертання, твірна якого нахилена до осі i під кутом α. У всіх своїх положеннях твірна m паралельна до твірних деякого конуса обертання. У цього конуса кут між твірною і віссю, паралельною осі гелікоїда, дорівнює α. Він називається напрямним конусом похилого гелікоїда

Таким чином, поверхня гелікоїда утворюється рухом прямої лінії по двох напрямних m та i. Одна з них m – циліндрична гвинтова лінія, друга i – вісь гвинтової лінії. Конус, який зветься напрямним, визначає третю умову (додатково до двох напрямних, які вказані вище) (рис. .3).

Побудову поверхні на комплексному кресленні починають з побудови гвинтової лінії, горизонтальну проєкцію якої (коло) треба поділити на рівновеликі частини, наприклад 12 частин. Крок гвинтової лінії h також треба ділити на 12 частин (h/12). Твірні гелікоїда проводимо через точки 0, 1, 2, …12 гвинтової лінії, паралельно до відповідних твірних напрямного конуса з вершиною S та кутом α при вершині. Кожна наступна твірна здійснює поступальний рух вдовж осі на величину h/12. Обрис гелікоїда на фронтальній площині проєкцій одержується як огинаюча сімейства прямих (твірних).

3.2 Відкритий гелікоїд

На рисунку 3.4, а приведено прямий відкритий гелікоїд. Твірна пряма лінія з віссю не перетинається і рухається по двох кривих напрямних.

На рисунку 3.4, б приведено косий відкритий гелікоїд. У цієї поверхні кут між твірною прямою лінією і віссю не дорівнює 90°.

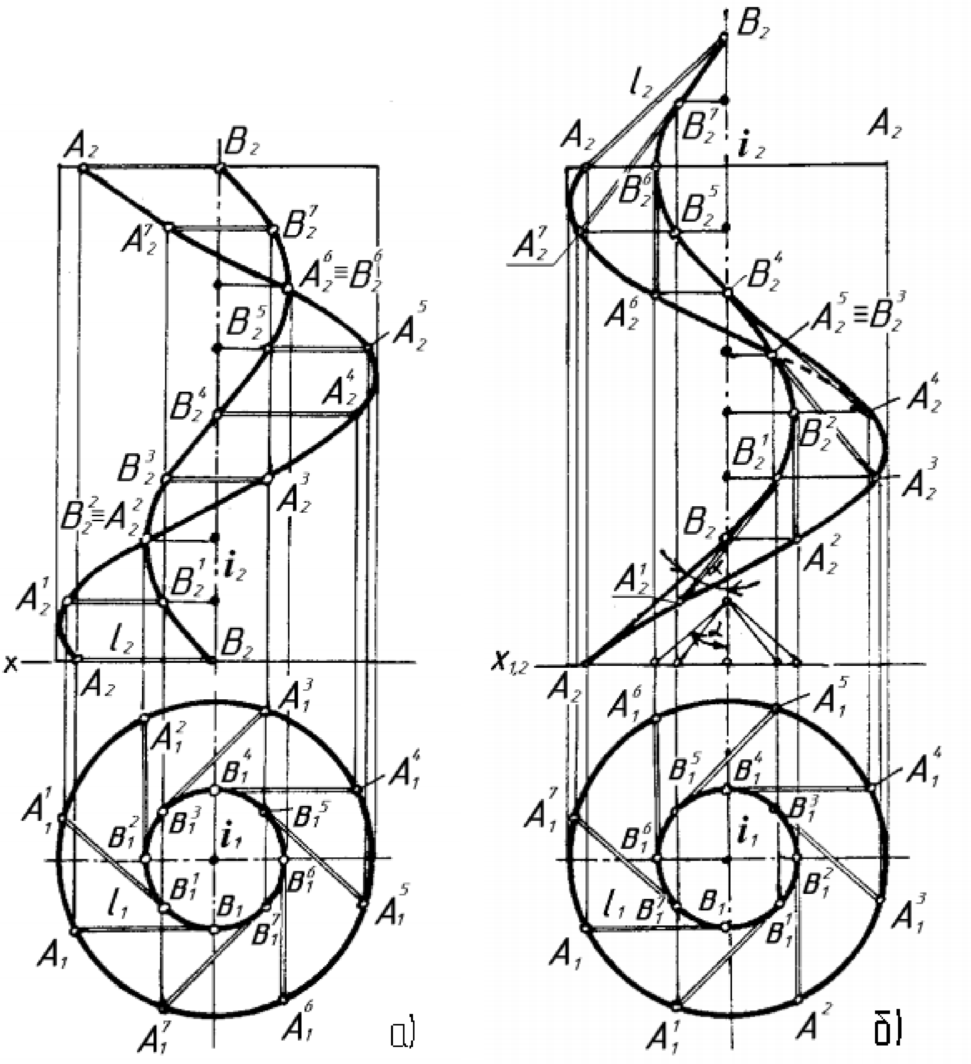


Рисунок 3.4 – Відкриті гелікоїди

3.3 Проєкціювання гранних тіл

Призма – (від грец. Πρίσμα (лат. Prisma – «щось відпиляне») – багатогранник, дві грані якого є конгруентними (рівними) багатокутниками, що лежать у паралельних площинах, а інші грані – паралелограми, які мають спільні сторони з цими багатокутниками (рис. 3.5). Ці паралелограми називаються бічними гранями призми, а інші два багатокутники називаються її підставами.

Види призм

Призма, основою якої є паралелограм, називається паралелепіпедом.

Пряма призма – це призма, у якої бічні ребра перпендикулярні до площини підстави. Інші призми називаються похилими.

Правильна призма – це пряма призма, основою якої є правильний багатокутник. Бічні грані правильної призми – рівні прямокутники.

Правильна призма, бічні грані якої є квадратами (висота якої дорівнює стороні підстави), є напівправильні багатогранники.

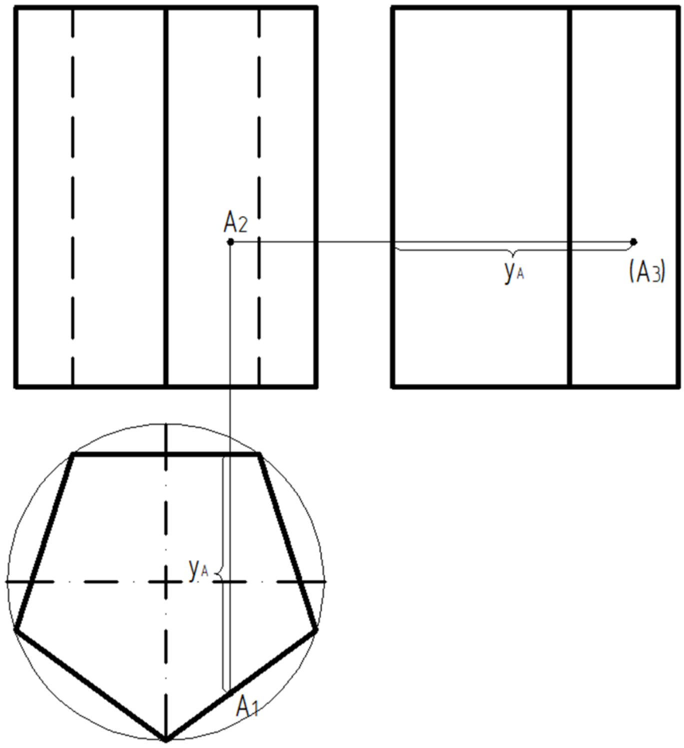


Рисунок 3.5 – Призма

Піраміда – багатогранник, який складається з плоского багатокутника і точки (яка не лежить у площині основи) та всіх відрізків, що сполучають вершину піраміди з точками основи (рис. 3.6).Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називаються бічними ребрами. Поверхня піраміди складається з основи і бічних граней. Кожна бічна грань – трикутник. Однією з його вершин є вершина піраміди, а протилежною стороною – сторона основи піраміди.

Правильна піраміда (довершена) – якщо її основою є правильний багатокутник, центр якого збігається з основою висоти піраміди. Бічна поверхня правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему.

Вісь правильної піраміди – пряма, яка містить її висоту. У правильній піраміді бічні ребра рівні між собою, а бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники.

Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, називається апофемою. Бічною поверхнею піраміди називається сума площ її бічних граней.

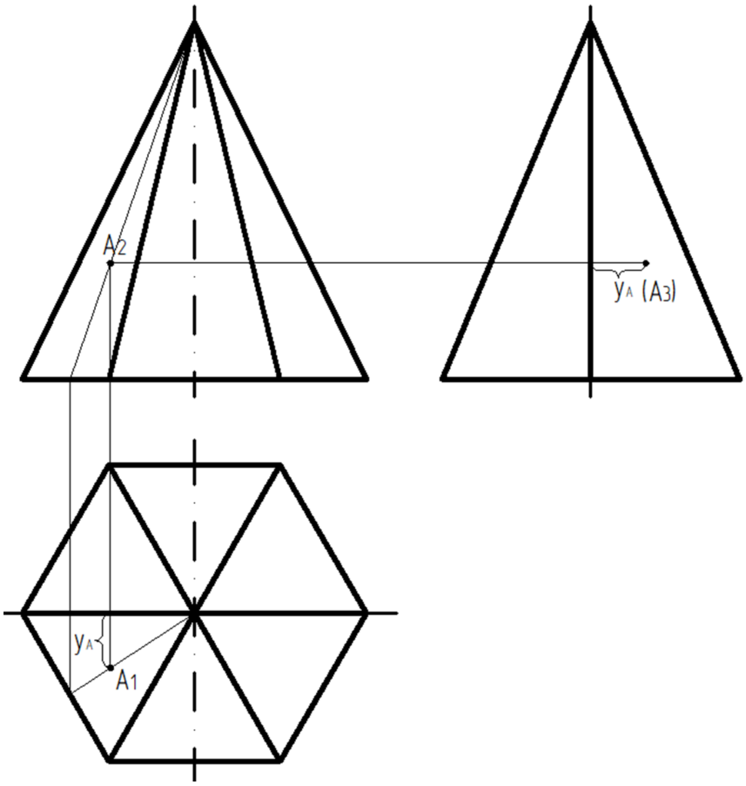


Рисунок 3.6 – Піраміда

3.4 Проєкціювання тіл обертання

Циліндр (грец. κύλινδρος – «валик») – геометричне тіло, обмежене замкнутою циліндричною поверхнею і двома паралельними площинами, що перетинають її (рис. 3.7).

Види циліндрів. Нескінченний циліндр – це нескінченне тіло, обмежене замкнутою нескінченною циліндричною поверхнею.

Відкритий циліндр – геометричне тіло, що обмежене замкнутим циліндровим променем і його основою. Основи циліндра якісно впливають на циліндр: якщо основи циліндра плоскі (отже такі, що містять їх площині рівнобіжні) – циліндр називають таким, що стоїть на площині; якщо основи стоять на площині циліндра перпендикулярно до твірних – прямий циліндр; зокрема, якщо основа що стоїть на площині циліндра, коло – круговий циліндр; еліпс – еліптичний циліндр.

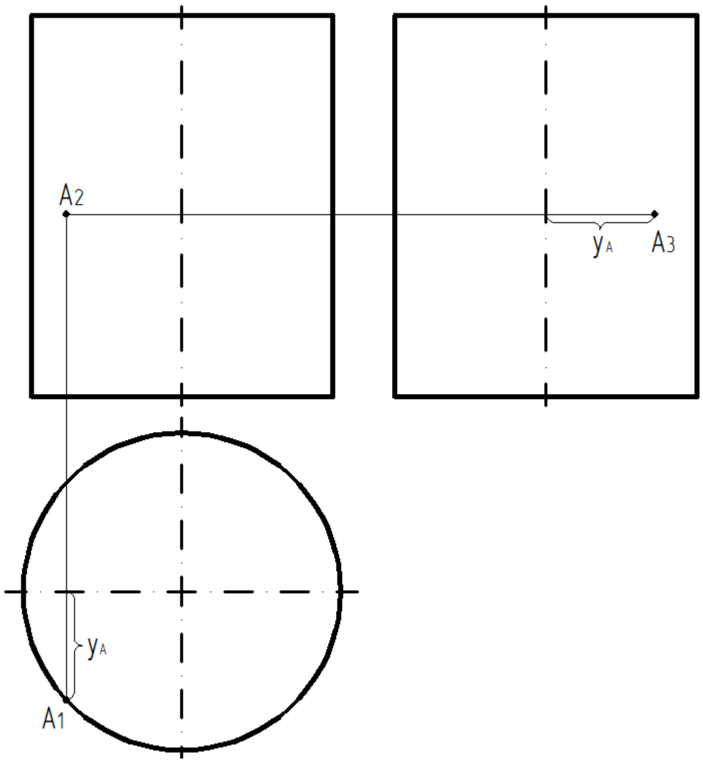


Рисунок 3.7 – Прямий круговий циліндр

Конус – геометричне тіло, отримане шляхом об’єднання всіх променів, що виходять з однієї точки – вершини конуса, і таких, що проходять через довільну плоску поверхню (рис. 3.8). Іноді конусом називають частину такого тіла, отриману об’єднанням усіх відрізків, що з’єднують вершину і точки плаской поверхні (яку в такому випадку називають основою конуса, а конус називають таким, що спирається на дану поверхню). Надалі буде розглядатися саме цей випадок, якщо не сказано про інше.

Відрізок, опущений перпендикулярно з вершини на площину основи (а також його довжина), називається висотою конуса. Якщо площа основи має скінченне значення, то об'єм конуса також має скінченне значення і дорівнює третині добутку висоти на площу основи. Таким чином, усі конуси, що спираються на цю основу і мають вершину в площині, паралельну до цієї основи, мають рівний об'єм, оскільки їх висоти рівні. Якщо основою конуса є многокутник, тоді конус стає пірамідою. Таким чином, піраміди є підмножиною конусів. Відрізок, що сполучає вершину конуса з точкою границі його основи, називається твірною конуса. Множина всіх твірних конуса називається бічною поверхнею конуса.

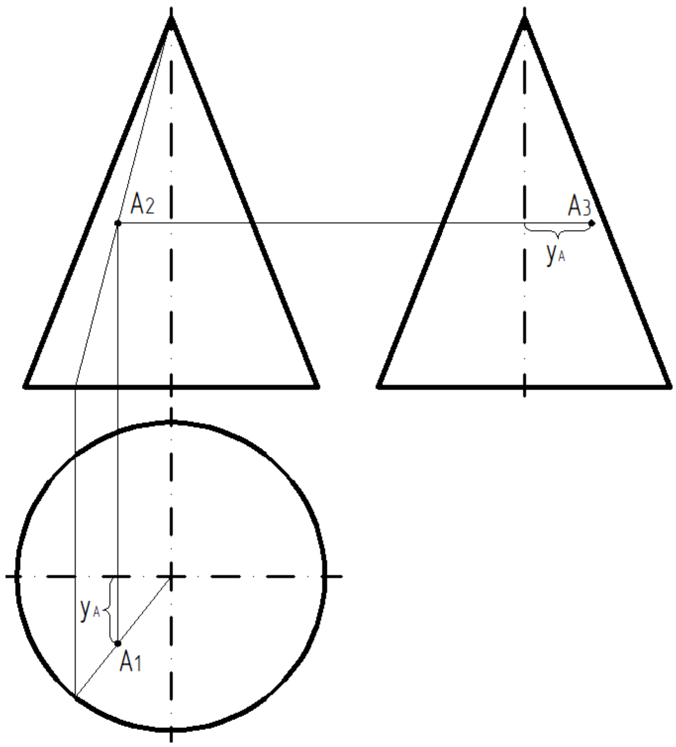


Рисунок 3.8 – Конус

Куля – тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра (рис. 3.9). Центром кулі називають центр круга, обертанням якого її утворено. Відрізок, який сполучає центр кулі з довільною точкою її поверхні – радіус кулі. Відрізок, який сполучає дві довільні точки поверхні кулі – її хорда. Хорда кулі, яка проходить через центр, – це діаметр кулі.

Поверхня кулі називається сферою. Також дуже часто кулею називають частину простору, обмежену сферою.

Площина, яка проходить через центр кулі, називається діаметральною площиною. Переріз кулі діаметральною площиною називається великим кругом, а переріз сфери – великим колом, або екватором.

Будь-яка діаметральна площина кулі є її площиною симетрії. Центр кулі є її центром симетрії.

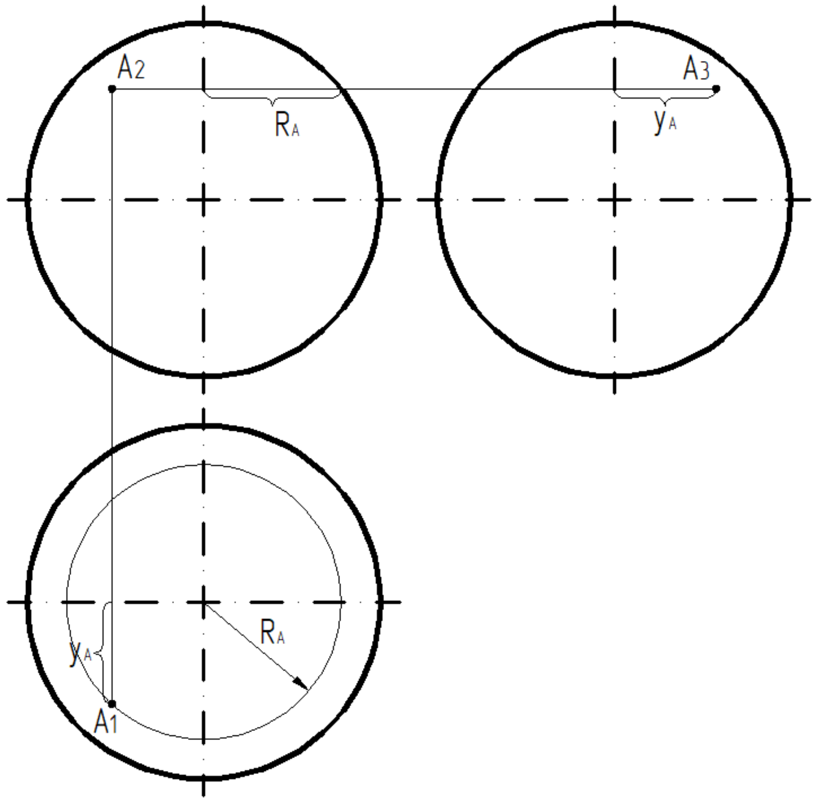


Рисунок 3.9 – Куля

Тор. Поверхня тора утворюється при обертанні твірного кола навколо осі обертання. Відомі два види тора:

а) відкритий – твірне коло не перетинає вісь обертання (рис. 3.10, а);

б) закритий – твірне коло перетинається з віссю обертання (рис. 3.11, б).

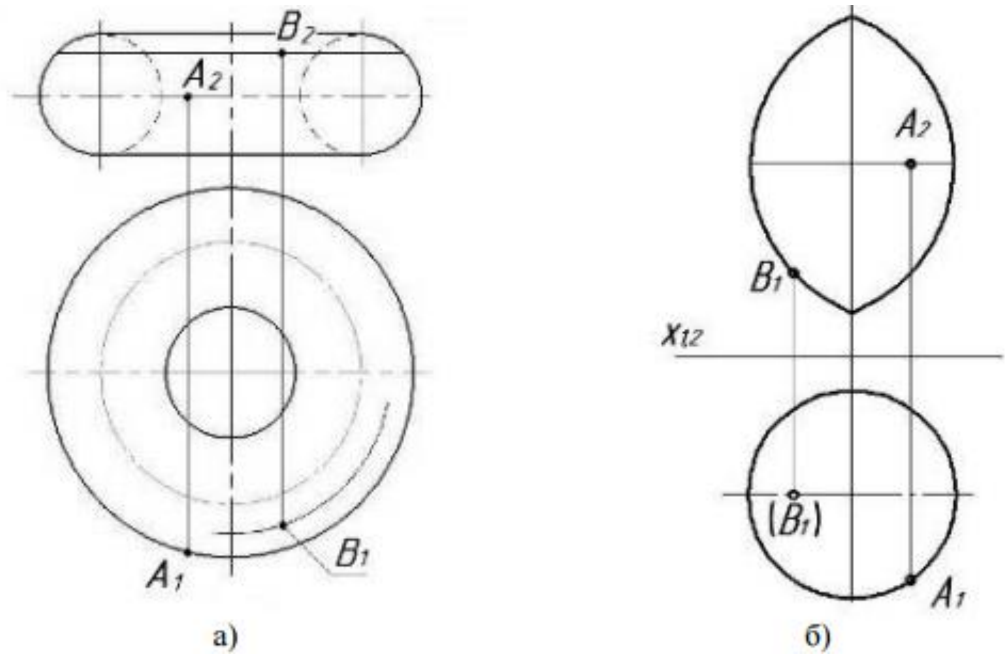


Рисунок 3.10 – Тор

ТЕМА № 4 ПЕРЕТИН ЕЛЕМЕНТІВ ПРОСТОРУ, КОЛИ ХОЧА Б ОДИН З ЕЛЕМЕНТІВ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ, БУДЕ ПРОЄКЦІЮВАЛЬНИМ

План

4.1 Перетин прямих.
4.2 Перетин прямої та площини.
4.3 Перетин площин.
4.4 Перетин площини з геометричними тілами.
4.5 Перетин прямої з геометричними тілами.

Побудова ліній перетину поверхонь – практично важлива задача. Вона використовується при проєктуванні і компонуванні різних архітектурних форм, при побудові розрізів і планів будівель, при побудові перерізів та розрізів конструктивних вузлів та архітектурних фрагментів.

При перерізах поверхонь площиною утворюється плоска крива лінія, кожна точка якої є точкою перетину лінії каркаса поверхні із січною площиною. Для побудови точок перерізу можуть бути застосовані способи допоміжних січних площин або способи перетворення проєкцій. Допоміжні січні площини здебільшого обирають проєкціювальними, що дає можливість визначити множину точок перетину плоских ліній каркаса поверхні із заданою площиною.

Способи перетворення проєкцій дозволяють перевести площину чи поверхню, що перетинається, в проєкціювальне положення і цим спростити розв’язання задачі. Отже, обидва способи ґрунтуються на алгоритмах побудови перерізу поверхні проєкціювальною площиною.

Якщо елементи простору перетинаються, вони мають спільні точки, лінії, площини. У деяких випадках їх можна частково або повністю визначити без допоміжних побудов.

Побудова ліній перетину поверхонь – практично важлива задача. Вона використовується при проєктуванні і компонуванні різних архітектурних форм, при побудові розрізів і планів будівель, при побудові перерізів та розрізів конструктивних вузлів та архітектурних фрагментів.

При перерізах поверхонь площиною утворюється плоска крива лінія, кожна точка якої є точкою перетину лінії каркаса поверхні із січною площиною. Для побудови точок перерізу можуть бути застосовані способи допоміжних січних площин або способи перетворення проєкцій. Допоміжні січні площини здебільшого обирають проєкціювальними, що дає можливість визначити множину точок перетину плоских ліній каркаса поверхні із заданою площиною.

Способи перетворення проєкцій дозволяють перевести площину чи поверхню, що перетинається, в проєкціювальне положення і цим спростити вирішення завдання. Отже, обидва способи ґрунтуються на алгоритмах побудови перерізу поверхні проєкціювальною площиною.

Якщо елементи простору перетинаються, вони мають спільні точки, лінії, площини. У деяких випадках їх можна частково або повністю визначити без допоміжних побудов.

4.1 Перетин прямих

Найпростішими елементами простору, які можуть перетинатися, є прямі. Якщо *прямі перетинаються*, то їх однойменні проєкції перетинаються між собою, а проєкції точок перетину лежать на одній лінії зв'язку (рис. 4.1).

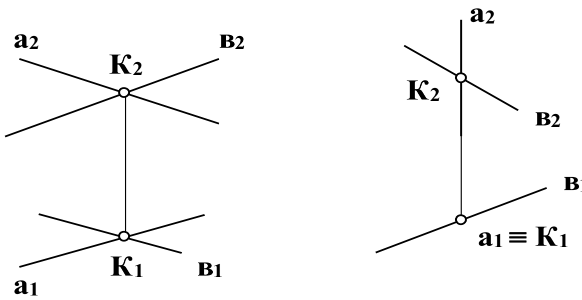


Рисунок 4.1 – Перетин прямих

Якщо хоча б один з елементів простору, що перетинаються, буде проєкціювальним, побудова лінії їх перетину спрощується. У цьому випадку одна проєкція лінії перетину знаходиться на кресленні без додаткових побудов.

4.2 Перетин прямої та площини

Розглянемо деякі приклади перетину *прямої з площиною*. На рисунку 4.2, а горизонтально-проєкціювальний трикутник *ABC* перетинає пряму загального положення *a*. Виходячи з властивостей проєкціювальних площин, горизонтальну проєкцію точки перетину K_1 визначаємо безпосередньо на кресленні без додаткових побудов.

Аналогічно визначаємо горизонтальну K_1 (рис. 4.2, б) проєкцію точки *K* перетину трикутника *ABC* загального положення та проєкціювальної прямої *a*.

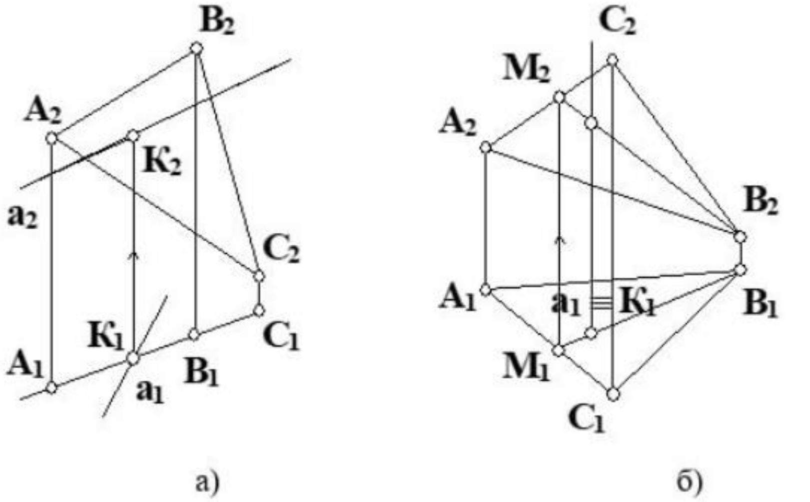
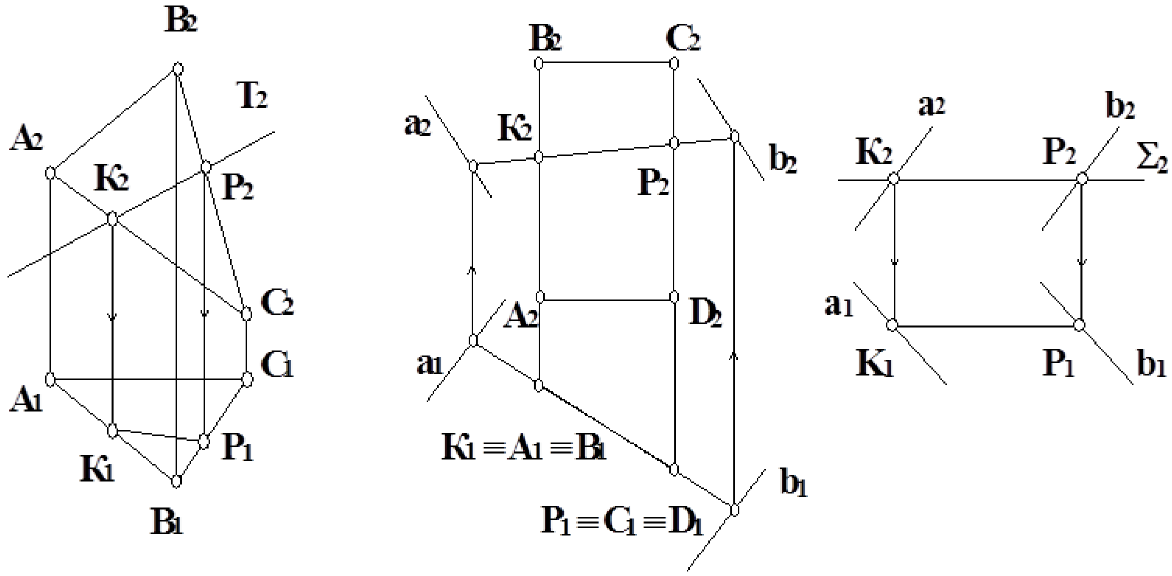


Рисунок 4.2 – Перетин прямої з площиною

4.3 Перетин площин

На рисунку 4.3, а наведено побудову лінії перетину *KP* проєкціювальною площиною Т площини загального положення трикутника *ABC.* Фронтальна проєкція лінії перетину співпадає з проєкцією площини.

На рисунку 4.3, б побудована лінія перетину двох площин (*KP*), одна з яких *(▱ABCD)* – горизонтально-проєкціювальна. У цьому випадку горизонтальна проєкція K_1P_1 визначається безпосередньо на кресленні як така, що співпадає з горизонтальною проєкцією площини *ABCD.*



а) б) в)

Рисунок 4.3 – Перетин двох площин

4.4 Перетин площини з геометричними тілами

Якщо будь-яка поверхня або площина перетинається проєкціювальною площиною, то одна проєкція лінії перетину, як належна цій площині, визначається без допоміжних побудов. Ця проєкція має вигляд прямої, яка співпадає з проєкцією січної площини на площину проєкцій, до якої вона перпендикулярна (рис. 4.3, в; 4.4; 4.5, а), – це буде фронтальна, а горизонтальна проєкція лінії перетину на рисунку 4.5, б. Друга проєкція визначається як лінія, належна поверхні (площині), що перетинається.

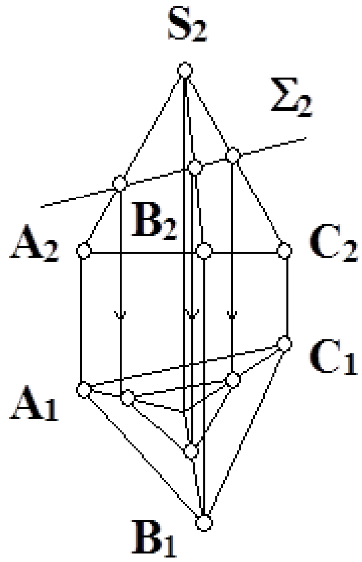
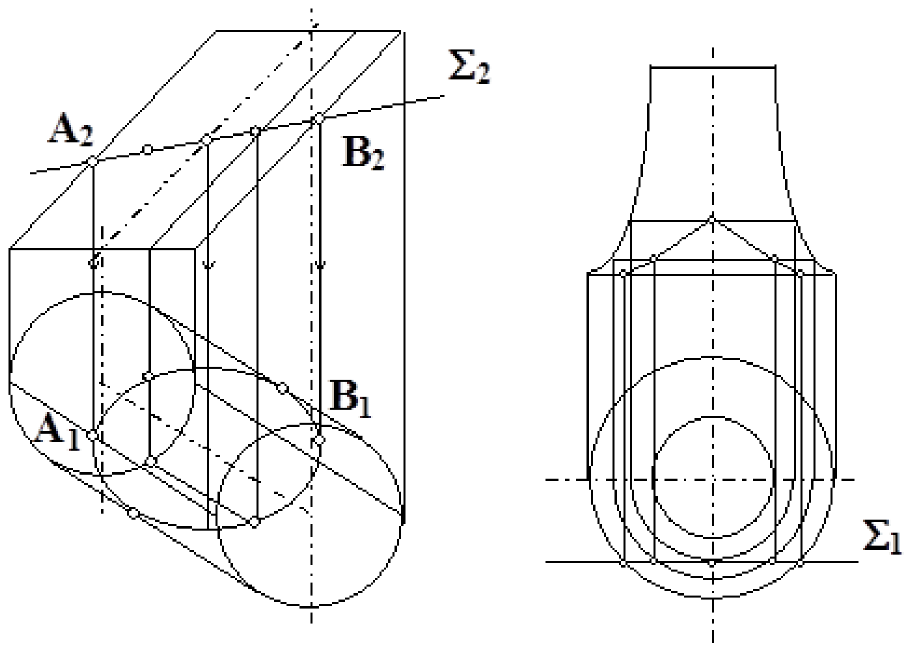


Рисунок 4.4 – Перетин площини з гранною поверхнею



а) б)

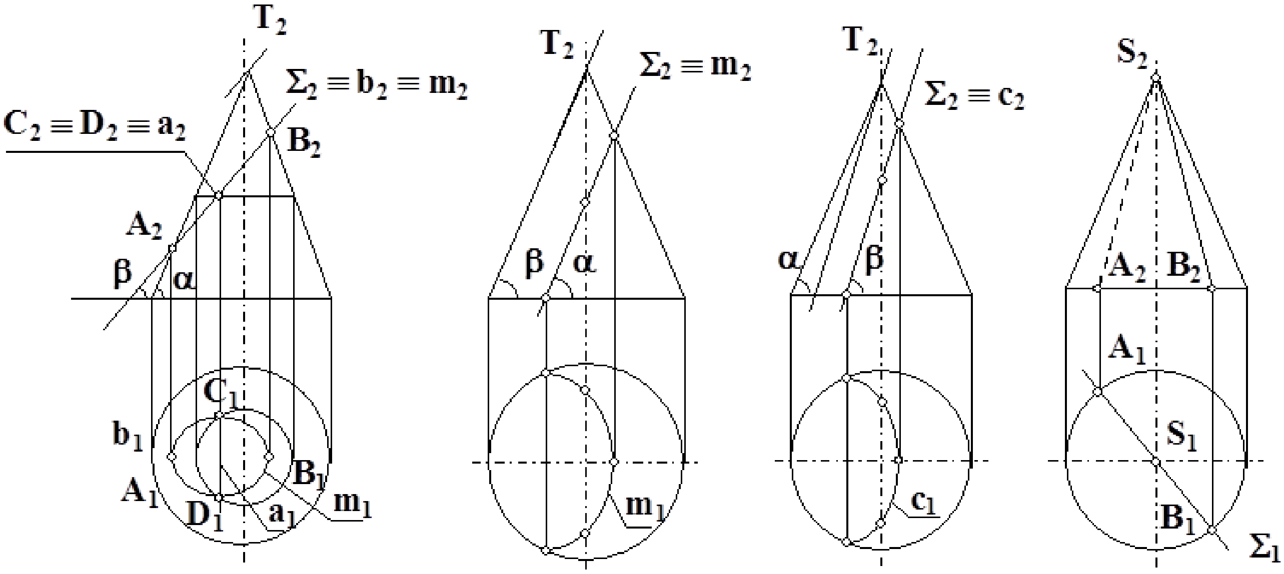
Рисунок 4.5 – Перетин площини з поверхнею обертання

4.4.1 Конічні перерізи

Перерізи конуса обертання, а також їх проєкцій – криві другого порядку. Тому проєкції перерізів можливо і доцільно будувати, не шукаючи довільне число випадкових точок, а за елементами, що визначають конічні криві (спряжені діаметри, осі, асимптоти, вершини, дотичні). Після визначення цих елементів проєкції кривої будуємо вже без урахування належності кривої лінії до поверхні конуса й площини перерізу.

Розглянемо випадки перерізу конуса обертання по еліпсу, параболі та гіперболі. Від фігури перерізу залежить вид положення січної площини.

Переріз по еліпсу (рис. 4.6, а), якщо січна площина нахилена до осі і перетинає всі твірні конуса. У цьому випадку площина *T* (T_2), проведена через вершину конуса паралельно до січної площини Σ (Σ_2), не перетинає ні однієї твірної конуса. Ознакою, яка визначає вид перерізу конуса обертання, може бути і значення кутів між віссю обертання конуса, його твірною і площиною перерізу. $\alpha > \beta$ – еліпс (рис.4.6, а); $\alpha = \beta$ – парабола (рис.4.6, б); $\alpha < \beta$ – гіпербола (рис.4.6, в).



а) б) в) г)

Рисунок 4.6 – Конічні перерізи

Переріз по параболі «т» (рис. 4.6, б), якщо січна площина паралельна до однієї твірної *($\alpha = \beta$)*. Площина *T* (T_2), проведена через вершину конуса паралельно до січної, буде до конуса дотичною.

Переріз по гіперболі «с» (рис. 4.6, в), якщо січна паралельна до двох твірних *($\alpha < \beta$)*. Площина *T* (T_2) проведена через вершину конуса паралельно до січної Σ_2, яка перетинає конус.

Переріз конуса – коло, якщо січна площина перпендикулярна до осі конуса.

Якщо січна площина пройде через вершину конуса, у перерізі утворюється *трикутник* (рис.4.6, г).

4.5 Перетин прямої з геометричними тілами

При перетині геометричного тіла проєкціювальною прямою елементом перетину будуть дві точки. На одній з проєкцій вони належать проєкціювальному положенню прямої та визначаються без допоміжних побудов (рис. 4.7). На іншій проєкції точки перетину визначаються як точки, що належать поверхні та прямій.

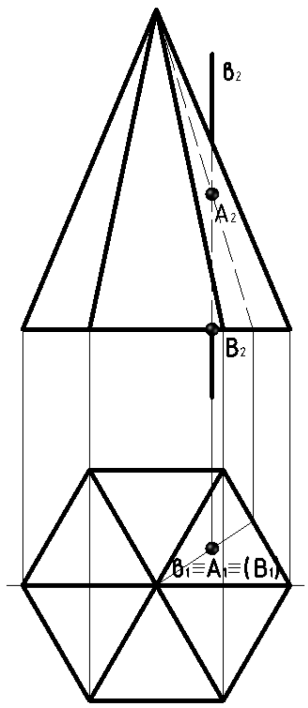


Рисунок 4.7 – Перетин проєкціювальної прямої з пірамідою

ТЕМА № 5 ПЕРЕТИН ЕЛЕМЕНТІВ ПРОСТОРУ. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ (СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ ПЕРЕРІЗІВ). СПОСІБ ПОСЕРЕДНИКА. ТЕОРЕМА МОНЖА

План

5.1 Спосіб посередника.
5.2 Рекомендації щодо вибору посередника.
5.3 Перетин двох площин загального положення.
5.4 Перетин площини та геометричного тіла.
5.5 Перетин двох геометричних тіл.
5.6 Теорема Монжа.

Лінією перетину двох елементів простору буде множина точок (в окремому випадку – точка), які належать як одному, так і другому елементу, що перетинаються.

Проєкції лінії перетину будуються за окремими точками, які знаходяться за допомогою допоміжних перерізів за допомогою описаного нижче способу.

5.1 Спосіб посередника

Задані (рис. 5.1) дві поверхні *I* *і* *II* (два елементи простору). Треба побудувати лінію їх перетину.

Алгоритм розв'язання цієї задачі такий:

1. Задані поверхні перетинаються третьою допоміжною поверхнею – посередником *Σ*.
2. Будують переріз *«а»* посередника *Σ* з поверхнею *I*.
3. Будують переріз ***«b»*** посередника *Σ* з поверхнею *II*.
4. Лінії *«а»* та *«b»* перетину посередника **Σ** з двома заданими поверхнями, перетинаючись між собою, дають точку *К* шуканої лінії перетину. Повторюючи, якщо є потреба, цикл операцій декілька разів, одержують необхідну кількість точок лінії перетину.

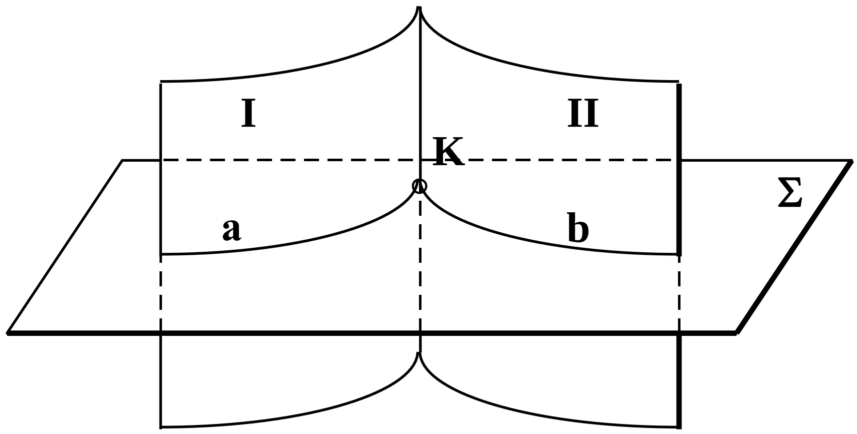


Рисунок 5.1 – Перетин елементів простору

Допоміжні поверхні-посередники вибирають, враховуючи те, що в перетині їх з кожною із заданих поверхонь ми маємо одержати прості і зручні для накреслення лінії – прямі або кола.

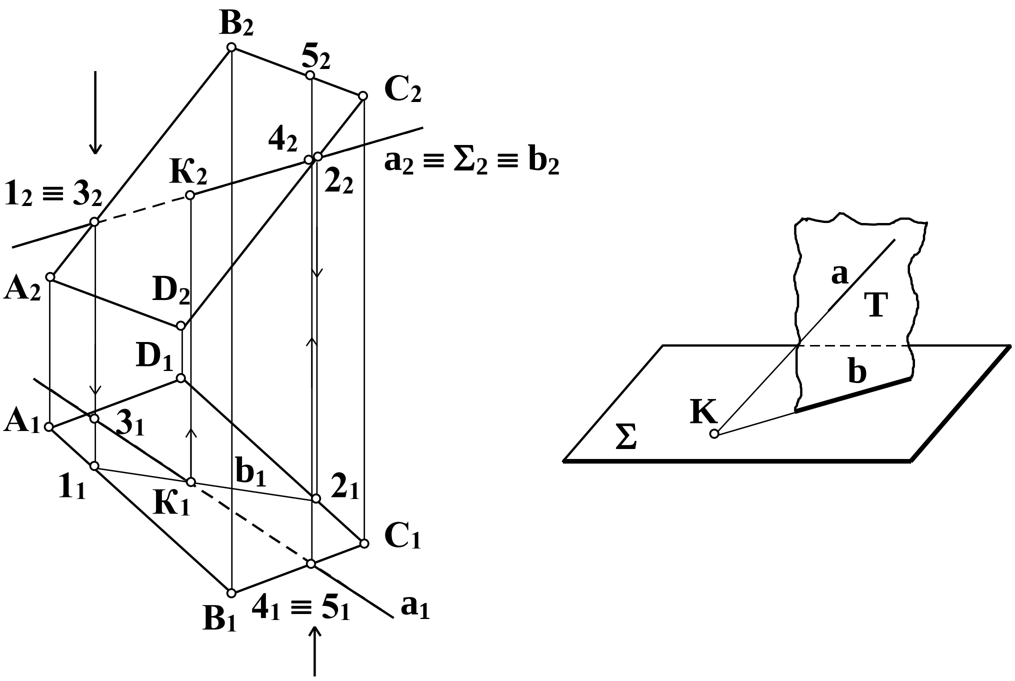
За допоміжні січні поверхні–посередники доцільно використовувати площини проєкціювальні, площини рівня, іноді площини загального положення, а також сферичні поверхні.

Розглянемо деякі приклади побудов ліній перетину з використанням посередників – *січних площин*.

5.2 Рекомендації щодо вибору посередника

Приклад. Побудувати точку K перетину прямої *«а»* загального положення з площиною $T\ (\square ABCD)$ загального положення (рис. 5.2, а).

Для визначення точки перетину K необхідно скористатися допоміжною площиною–посередником **Σ** (бажано проєкціювальною). Враховуючи положення, що найпростішими елементами, які перетинаються, будуть лінії; площину посередника **Σ** треба проводити так, щоб ця пряма «**a**» їй належала.



а) б)

Рисунок 5.2 – Перетин прямої з площиною

Тому через пряму *«а»* (рис. 5.2, а) проводять допоміжну площину, наприклад фронтально-проєкціювальну *Σ*.

Будуємо допоміжну лінію перетину *«b»* (рис. 5.2, б) прямокутника *ABCD* з посередником *Σ*. Її фронтальна проєкція *«b_2»* співпадає з фронтальною проєкцією Σ_2 площини Σ, а горизонтальна «b_1» визначається, виходячи з приналежності прямокутникові.

Точка перетину К визначається в точці перетину прямої «а» з допоміжною прямою «b». Спочатку знаходимо її горизонтальну проєкцію K_1, а потім фронтальну K_2.

Потрібно враховувати, якщо прямі «а» і «b» будуть паралельними, це буде свідчити про паралельність прямої «а» до площини прямокутника.

Питання видимості вирішуємо за допомогою конкуруючих точок 1–3 та 4, 5, які розташовані на одних лініях зв'язку, а також на мимобіжних прямих «а» і АВ (їхній проєкції a_1 і A_1B_1, a_2 і A_2B_2 відповідно) та «а» і ВС.

Якщо точки розташовані на загальній для них лінії зв’язку, то видимою буде тільки одна з них – найбільш віддалена від тієї площини проєкцій, по відношенню до якої ми визнаємо видимість.

Отже, на горизонтальній проєкції пряма *а* перекривається стороною ВС (точка $5 \supset BC$ закриває точку $4 \supset a$). На фронтальній проєкції видимою буде частина прямої *а* справа, тому що точка 1 належить АВ і розташована перед точкою 3, що належить *а*.

Приклад. Побудувати точки перетину поверхні з прямою лінією.

Для знаходження точок зустрічі прямої лінії з поверхнями, так званих точок входу і виходу, у загальному випадку проводяться побудови, аналогічні до побудов, виконаних при знаходженні точки зустрічі прямої з площиною. Наприклад, щоб визначити (рис. 5.3, а) точки перетину прямої ***a*** з пірамідою, необхідно:

1. Через пряму *a* провести допоміжну площину-посередник **Σ**. Це фронтально-проєкціювальна площина, тому її фронтальна проєкція ($\boldsymbol{\Sigma_2 \equiv a_2}$)

співпадає з фронтальною проєкцією прямої ***a*** $_2$.

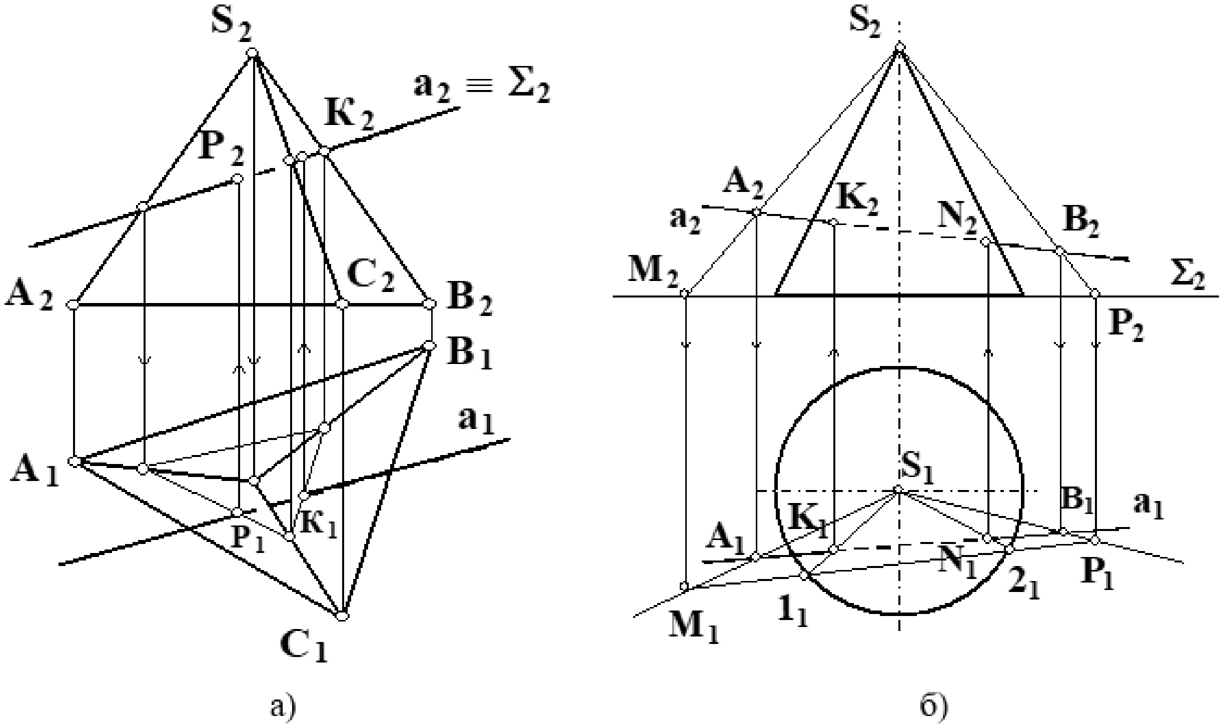


Рисунок 5.3 – Площина-посередник

2. Побудувати лінію перетину посередника з пірамідою. Це трикутник, фронтальна проєкція якого співпадає з проєкцією Σ_2.

3. На горизонтальній проєкції лінії перетину піраміди з посередником відмітити горизонтальні проєкції K_1, P_1 шуканих точок.

4. Визначити їхні фронтальні проєкції та їх видимість.

У деяких випадках при визначенні точки перетину прямої з поверхнею доцільно використовувати посередник – площину загального положення. Наприклад, на рисунку 5.3, б при визначенні точок перетину прямої з конусом був застосований посередник – площина загального положення ASB, яка, проходячи через пряму «а» і вершину конуса S, перетинає конус по трикутнику 1S2.

5.3 Перетин двох площин загального положення

Якщо у випадку перетину прямої з площиною або поверхнею використовувався лише один посередник, то при визначенні лінії перетину площини та поверхонь таких посередників потрібно декілька.

Лінію перетину визначаємо за окремими спільними точками. Ці спільні точки знаходимо за допомогою двох ліній, належних посереднику та елементам простору, що перетинаються, отриманих завдяки допоміжним січним площинам. Це дає змогу визначити множину точок перетину. Допоміжні січні площини посередників здебільшого обираються проєкціювальними. На рисунку 5.4 показано побудову лінії перетину двох площин.

Використовуючи допоміжну січну фронтально-проєкціювальну площину посередника Σ (Σ_2), визначаємо дві лінії – «m» і «n»:

$$m = \Sigma \bigcap T \ ; \ n = \Sigma \bigcap P.$$

Точка перетину K ліній «m» і «n» буде шуканою точкою лінії перетину площин. Враховуючи те, що лінією перетину площин буде пряма, для визначення якої необхідно мати дві її точки, всі дії щодо використання посередника треба зробити ще раз. Точка L визначиться завдяки Г (Γ_2).

$$KL = T\,(c \,||\, d) \ \bigcap P\,(a \bigcap b)$$

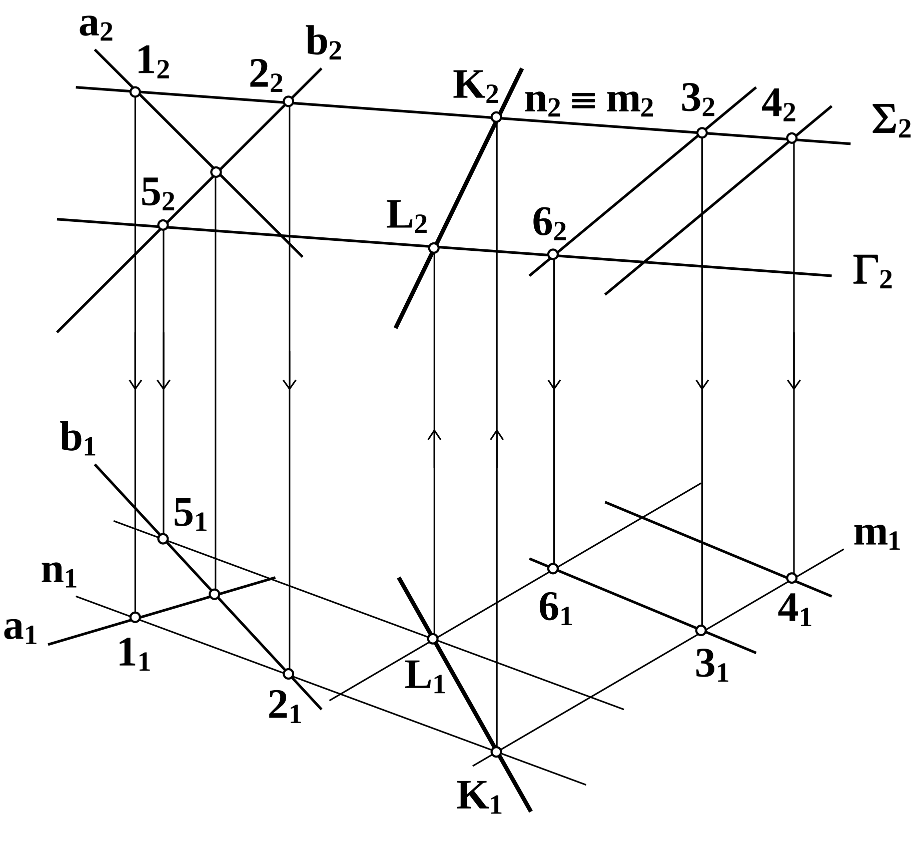


Рисунок 5.4 – Перетин двох площин

Проводячи аналогічні побудови і використовуючи декілька посередників, ми маємо можливість визначити лінію перетину поверхні з площиною або двох поверхонь за окремими точками.

5.4 Перетин площини та геометричного тіла

На рисунку 5.5 побудована лінія перетину CLADKB конуса площиною Ω (a ⋂ b). Для визначення точок шуканої лінії перетину були використані січні площини-посередники Σ (Σ_2), Р (P_2), Г (Γ_1), Т (T_1).

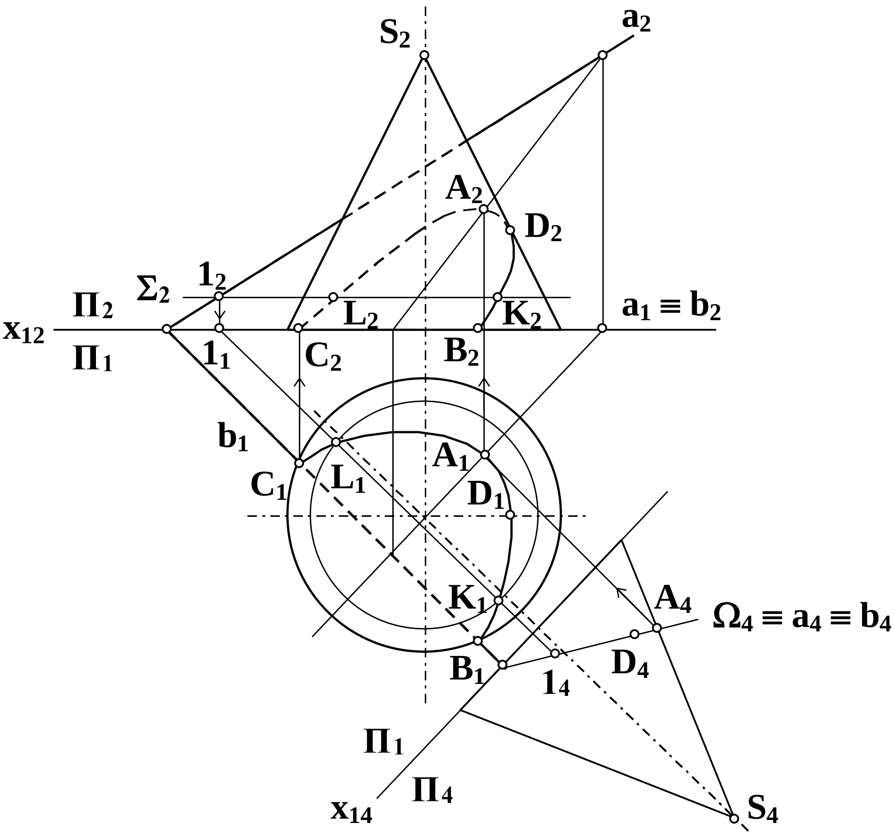


Рисунок 5.5 – Перетин площини та конуса

Щоб спростити розв'язання задачі, коли в перетині бере участь площина загального положення, використовуємо способи перетворення проєкцій, щоб цю площину зробити проєкціювальною.

Площина Π_2 (рис. 5.5) замінена на Π_4 так, щоб по відношенню до неї січна площина Ω (a ⋂ b) зайняла проєкціювальне положення. Визначивши проєкцію перерізу конуса на площині Π_4, яка співпадає з проєкцією $\Omega_4 \equiv a_4 \equiv b_4$, знаходимо його горизонтальну та фронтальну проєкції.

При визначенні лінії перетину призми з площиною загального положення Ω (a ││b) (рис. 5.6) доцільно посередники проводити через ребра призми.

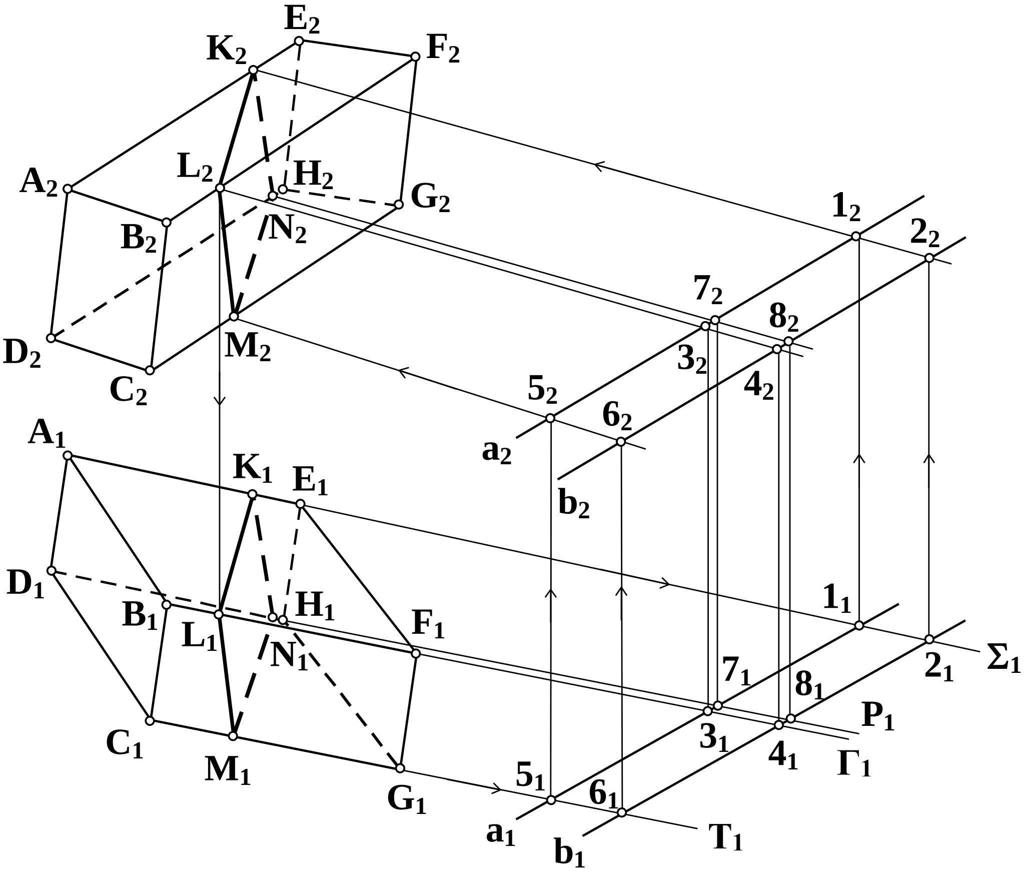


Рисунок 5.6 – Перетин площини та призми

Таким чином, побудова лінії перетину зводиться до знаходження точок K, L, M, N зустрічі ребер призми з площиною.

При цьому треба мати на увазі, що з’єднувати між собою можна тільки ті точки, які лежать на одній і тій же грані.

5.5 Перетин двох геометричних тіл

5.5.1 Площина-посередник

Побудова лінії перетину двох поверхонь показана на рисунку 5.7. Січні площини-посередники вибирають так, щоб з цими поверхнями вони перетинались по допоміжних лініях, проєкції яких будуть графічно простими лініями.

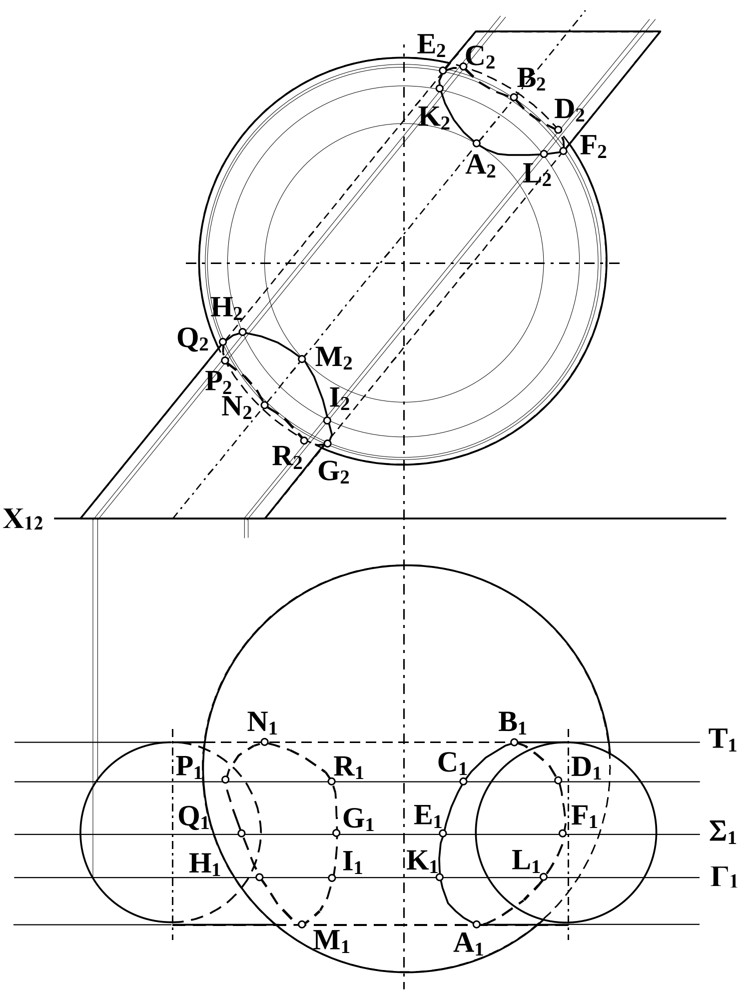


Рисунок 5.7 – Площина-посередник

Для підвищення точності у числі точок лінії перетину бажано мати так звані *опорні* (характерні) *точки*. Це точки дотику лінії перерізу до контуру поверхонь. Серед них будуть точки, що ділять лінію перетину на видиму і невидиму частини. Це проєкції точок лінії перетину, найвищих та найнижчих, найближчих та найбільш віддалених, крайніх зліва та справа на проєкціях лінії перетину.

При визначенні видимості точок, що належать лінії перетину, керуються наступним правилом: проєкція точки, отримана при перетині двох видимих ліній – видима. Точка перетину двох невидимих або однієї видимої та другої невидимої лінії – невидима.

На рисунку 5.8 для побудови лінії перетину двох конусів скористались допоміжними січними площинами загального положення, які проходять через пряму «**а**», яка з’єднує обидві вершини конусів. Пучок таких площин-посередників буде перетинати конуси по твірних.

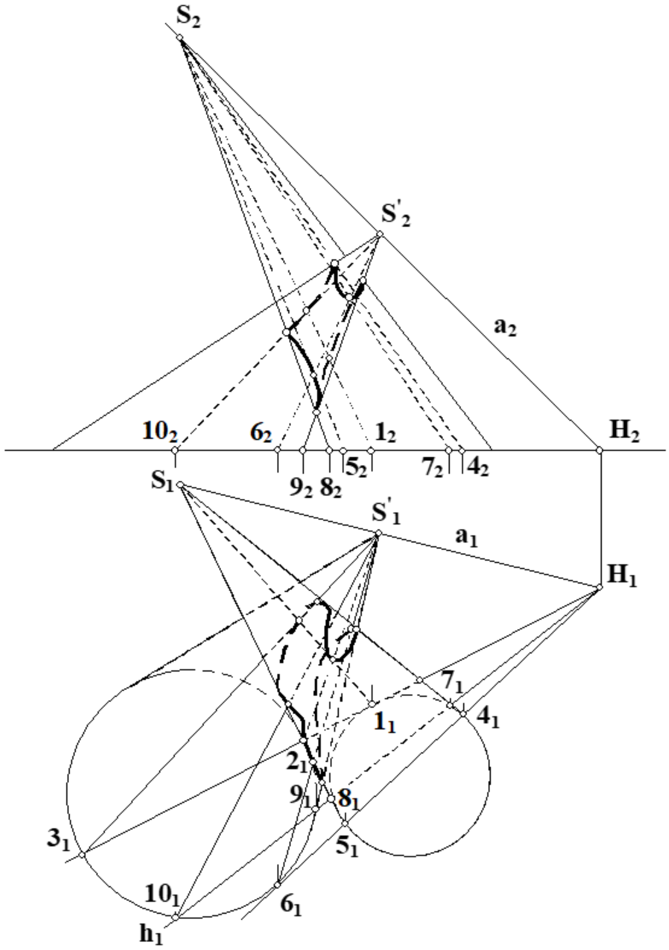


Рисунок 5.8 – Площина-посередник (площина загального положення)

Побудову точок починають з визначення горизонтального (H2; H1) сліду прямої «а». Після цього проводиться горизонтальний слід (h1) площини-посередника. Визначаються трикутники допоміжних ліній перетину посередником конусів (7 S 8 та 9 S' 10), а потім відмічають у точках перетину відповідних твірних точки, що належать шуканій лінії перетину конусів.

5.5.2 Спосіб концентричних сфер

На рисунку 5.8 показано побудову лінії перетину двох конусів обертання, осі яких перетинаються і паралельні до фронтальної площини проєкцій. За допомогою січних сфер-посередників можливо побудувати тільки проєкцію лінії перетину на ту площину проєкцій, до якої паралельні її осі.

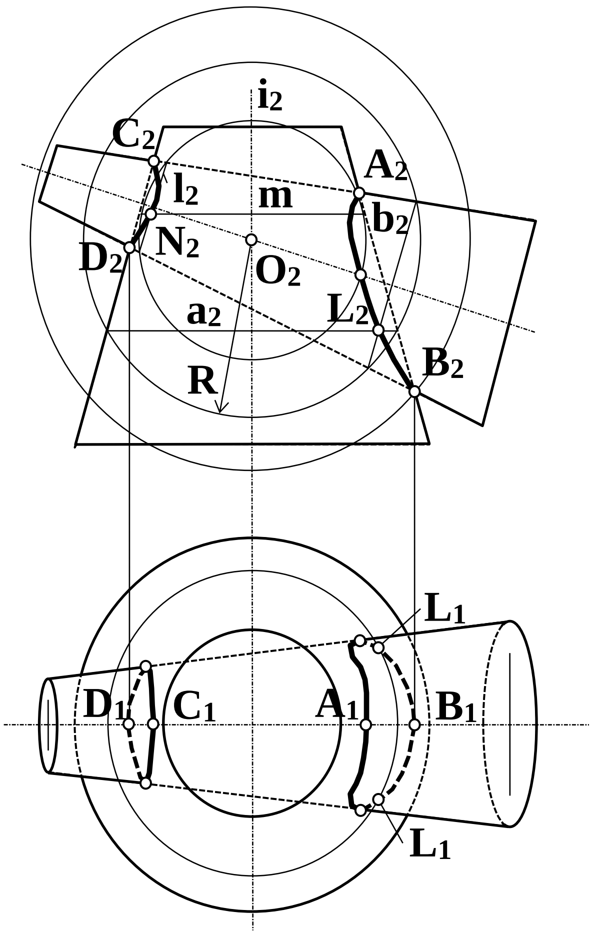


Рисунок 5.9 – Посередник – концентрична сфера

У цьому прикладі це буде фронтальна проєкція. Центром допоміжних січних сфер буде точка O_2 перетину фронтальних проєкцій осей конусів. Із точки O_2, як з центру, описана сферична поверхня радіусом R таким чином, щоб вона перетинала обидві задані поверхні. У перетині її з одним конусом буде коло «а», яке проєкціюється на площину $П_2$ у вигляді прямої «a_2», у перетині з другим конусом (похилим) – у вигляді прямої «b_2». У перетині ліній «a_2» і «b_2» маємо шукану точку L_2 лінії перетину двох конусів.

Перетинаючи обидві поверхні сферами других радіусів, можна знайти ще декілька точок. Сфера мінімально можливого радіуса дотикається до конуса з вертикальною віссю по лінії «m_2» і перетинає конус, похилий по лінії «l_2». У перетинанні їх отримуємо точку N_2, найближчу до осі тіла обертання.

Сфера максимального радіусу O_2B_2 визначиться найбільшим з відрізків, які з'єднують центр O_2 з точками A_2, B_2, C_2, D_2 перетину обрисових твірних. Коли фронтальна проєкція лінії перетину буде виконана, без труднощів визначається її горизонтальна проєкція – як лінія, належна конусу з вертикальною віссю.

5.5.3 Спосіб ексцентричних сфер

Указаний спосіб побудови лінії перетину двох поверхонь ґрунтується на використанні допоміжних січних сфер, які мають різні центри. Для з'ясування умов, за яких можна використовувати цей спосіб, розглянемо приклад.

На рисунку 5.10 показано побудову лінії перетину поверхні тора з поверхнею обертання, осі яких не перетинаються, і тому способом концентричних сфер тут не можна скористатись.

Спочатку визначаємо опорні точки A_2, B_2, D_2, у яких перетинаються головні меридіани. Для побудови довільних точок лінії перетину через вісь тора і (i_2) проводимо допоміжну фронтально-проєкціюючу площину Σ_2. Ця площина перетинає тор по колу 9_2, 10_2, проєкцією центра якого буде точка C_2. Проведемо через C_2 перпендикуляр до площини одержаного кола. Відмітимо точку O_2 перетину його та осі поверхні обертання.

Якщо тепер провести сферу з центром в точці O_2 такого радіусу $R(O_29_2)$, щоб їй належало коло 9_210_2, то ця сфера, перетинаючи поверхню обертання по деякому колу 11_212_2, дасть у перетині точку N_2 шуканої лінії перетину $N_2 = 11_212_2 \bigcap 9_210_2$.

Використавши декілька допоміжних площин, аналогічною побудовою знайдемо будь-яку потрібну кількість точок лінії перетину. При цьому кожного разу доведеться проводити допоміжні сфери із різних центрів, які обов'язково лежать на осі поверхні обертання.

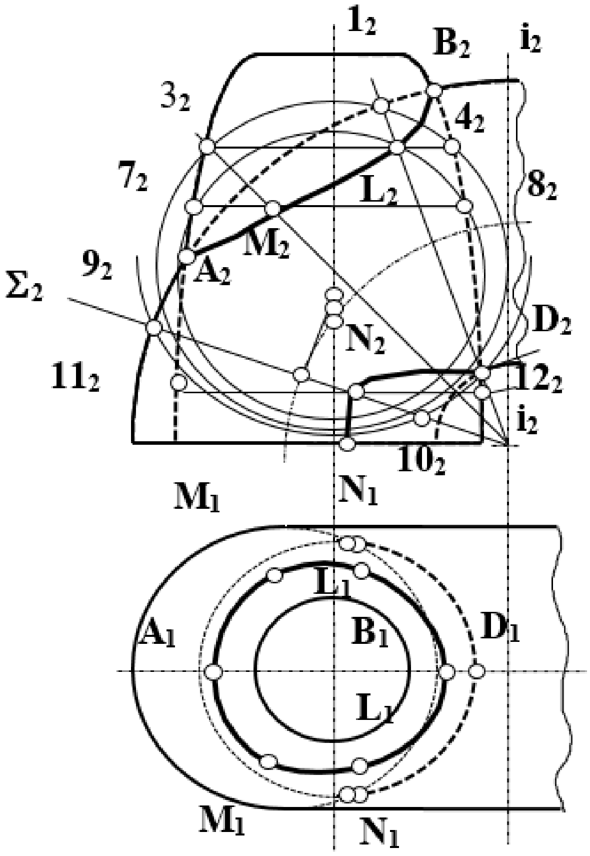


Рисунок 5.10 – Посередник – ексцентрична сфера

5.6 Теорема Монжа

Якщо дві поверхні, що перетинаються, описані навколо третьої поверхні другого порядку – сфери, то лінія перетину розпадається на дві плоскі криві.

На рисунку 5.11 показано побудову лінії взаємного перетину конуса та циліндра обертання, які огинають спільну сферу ψ. Ця умова відповідає теоремі Монжа про розпад лінії перетину поверхонь другого порядку. Отже, лінія перетину цих поверхонь розпадається на дві плоскі криві другого порядку (еліпси), розміщені у фронтально-проєкціювальних площинах. Безпосередньо на фронтальній проєкції можна визначити вершини еліпсів у площинах E_2 і Ω_2. На Π_2 проєкції пар опорних точок A_2, B_2 і P_2, Q_2 з'єднують прямими лініями. Горизонтальні проєкції вершин еліпсів визначають за допомогою вертикальних ліній зв'язку. Еліпси можна побудувати відомими способами за двома осями.

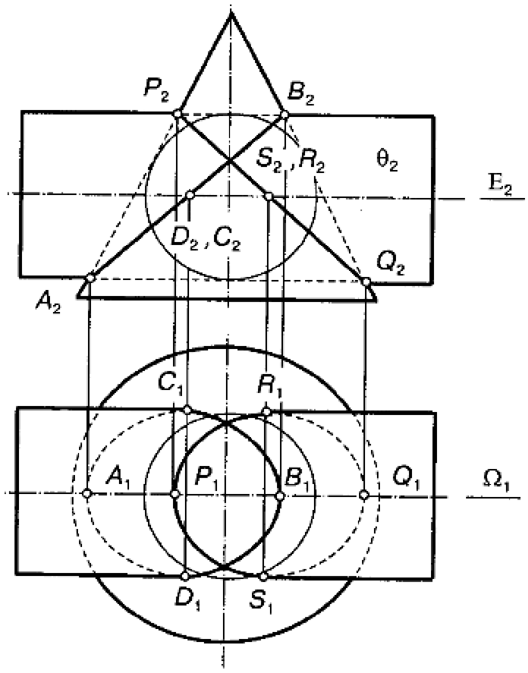


Рисунок 5.11 – Використання теореми Монжа

ТЕМА № 6 АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЄКЦІЇ. ПОБУДОВА ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ В АКСОНОМЕТРІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ВТОРИННОЇ ПРОЄКЦІЇ

План

6.1 Теорема Польке – Шварца.
6.2 Види аксонометричних проєкцій.
6.3 Стандартні аксонометричні проєкції.
6.4 Побудова кола в аксонометрії.
6.5 Нанесення штрихування на розрізах в аксонометричних проєкціях.

6.1 Теорема Польке – Шварца

У багатьох випадках при виконанні креслень (у тому числі і технічних) виявляється необхідним поряд із зображенням предметів у системі ортогональних проєкцій мати зображення більш наочні. Для побудови таких зображень застосовують проєкції, які називають «аксонометричними», чи, скорочено, аксонометрією (axon – «вісь», metreo – «вимірюю»).

Метод аксонометричного проєціювання полягає в тому, що означена фігура разом з осями прямокутних (декартових) координат, до яких ця система віднесена в просторі, паралельно проєктується на деяку площину. Отже, аксонометрична проєкція є насамперед проєкцією тільки на одну площину, а не на дві чи більше, як це є в системі ортогональних проєкцій.

На рисунку 6.1 показано схему проєктування т. **А** на площину П$^{/}$, прийняту за площину аксонометричних проєкцій, яка називається також картинною площиною. Напрям проєціювання показано стрілкою **S.**

Прямі *0x, 0y, 0z* зображують осі координат у просторі, прямі 0^1x^1 , 0^1y^1, 0^1z^1 – їх проєкції на площині П^1, які називають аксонометричними осями (осі аксонометричних координат).

На осях *0x, 0y, 0z* відкладений відрізок *e* ($0e_x$ = $0e_y$ = $0e_z$ = e), який приймається за одиницю вимірювання по цих осях, відрізки $0^1e^1{}_x$, $0^1e^1{}_y$, $0^1e^1{}_z$ на аксонометричних осях становлять проєкції відрізка ***e***, вони взагалі не дорівнюють ***e*** і не рівні між собою.

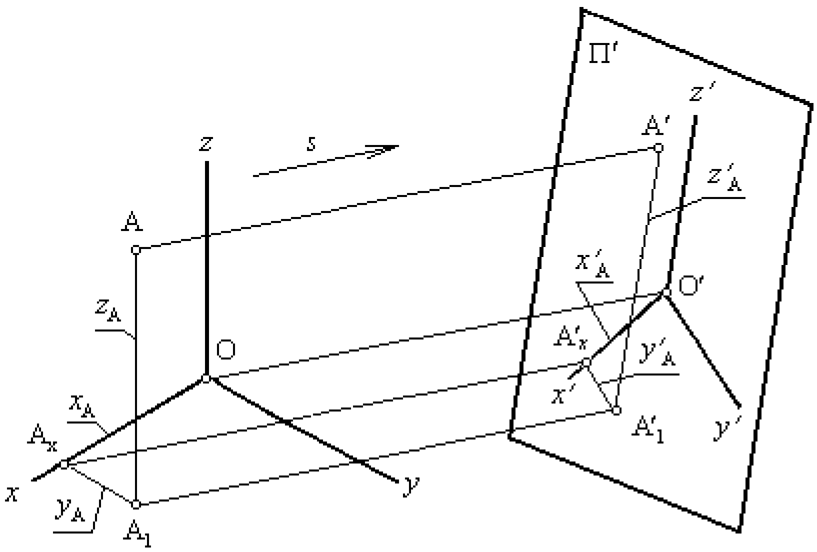


Рисунок 6.1 – Проєціювання т. А на аксонометричну площину П$^{/}$

Відрізки e_x, e_y, e_z є одиницями вимірювання по аксонометричних осях – аксонометричними одиницями (використовується також назва «аксонометричні масштаби»).

Відношення $\frac{e_x}{e} = p$, $\frac{e_y}{e} = q$, $\frac{e_z}{e} = r$ звуть коефіцієнтами спотворення (показниками спотворення) по аксонометричних осях.

За допомогою коефіцієнтів спотворення завжди можна перейти від прямокутних координат до аксонометричних, і навпаки: $x^1 = p \cdot x$; $y^1 = q \cdot y$; $z^1 = r \cdot z$, де літерами x^1 , y^1 , z^1 зазначено відрізки, які визначають аксонометричні координати точки, а літерами x, y, z – відрізки, які визначають її прямокутні координати.

A^1_1, A^1_2, A^1_3 відповідно вторинна горизонтальна, фронтальна і профільна проєкція точки А.

У 1851 році К. Польке сформулював таку теорему:

Будь-які три відрізки, які виходять з однієї точки площини, можуть бути прийняті за паралельні проєкції трьох рівних і взаємно перпендикулярних відрізків у просторі.

Нехай довжина кожного відрізка дорівнює e. Складемо співвідношення:

$$p : q : r = \frac{0^1 x^1}{0x} : \frac{0^1 y^1}{0y} : \frac{0^1 z^1}{0z}$$

і, заміняючи $0x$, $0y$, $0z$ через e, отримаємо:

$$p : q : r = 0^1 x^1 : 0^1 y^1 : 0^1 z^1 \ ,$$

що й доводить пропорціональність коефіцієнтів спотворення до відповідних відрізків.

А. Шварц узагальнив висновок Польке: будь-який повний чотирикутник на площині завжди є паралельною проєкцією деякого масштабного тетраедра.

З цього ми можемо зробити висновок: будь-які три прямі, які проходять через одну точку на площині і не співпадають між собою, можуть бути прийняті за аксонометричні осі, тобто за проєкції осей прямокутних координат, і будь-які три відрізки, відкладені на цих прямих від точки їх перетину, можуть бути взяті відповідно до обраних співвідношень приведених коефіцієнтів спотворення як аксонометричні одиниці.

6.2 Види аксонометричних проєкцій

Якщо усі три коефіцієнти спотворення рівні між собою ($p = q = r$), то аксонометрична проєкція називається *ізометричною* (давньогрецьке isos – «однаковий»; ізометрична проєкція – проєкція однакових коефіцієнтів спотворення по усіх трьох осях).

Якщо рівні між собою тільки два коефіцієнти спотворення (наприклад, $p = r$, а q не дорівнює p, або $p = q$, а r не дорівнює p тощо), то проєкція називається *диметричною* (dis – «двоє»); диметрична проєкція – проєкція однакових коефіцієнтів спотворення тільки по двох осях.

Якщо $p \neq q,\ p \neq r,\ q \neq r$, то проєкція називається *триметричною* (treis – «три»; триметрична проєкція – проєкція різних коефіцієнтів спотворення по усіх осямх

У практиці побудови наочних зображень взагалі використовують лише певні комбінації направлення аксонометричних осей і коефіцієнтів спотворення.

Між коефіцієнтами спотворення та кутом φ, утвореним направленням проєктування на площину $П^1$, існує така залежність:

$$k^2x + k^2y + k^2z = 2 + ctg^2\varphi \qquad (6.1)$$

Залежно від направлення проєктуючих променів по відношенню до картинної площини, аксонометричні проєкції поділяються на такі:

– *прямокутні* – проєктуючі промені, перпендикулярні до картинної площини;

– *косокутні* – проєктуючі промені, похилі до картинної площини.

6.3 Стандартні аксонометричні проєкції

ДСТУ ISO 5456–3:2006 Креслeники технічні. Методи проєціювання. Частина 3. Аксонометричні зображення (ISO 5456–3:1996, IDT) рекомендує застосовувати два види прямокутних аксонометричних проєкцій – *прямокутну* *ізометрію і диметрію* (рис. 6.2 і 6.3) і три види косокутних онометричних проєкцій – *фронтальну ізометричну* (кавальєрну), *горизонтальну ізометричну* (військова перспектива) і *фронтальну диметричну* (кабінетну) (рис. 6.4, 6.5 і 6.6).

6.3.1 Прямокутні аксонометричні проєкції

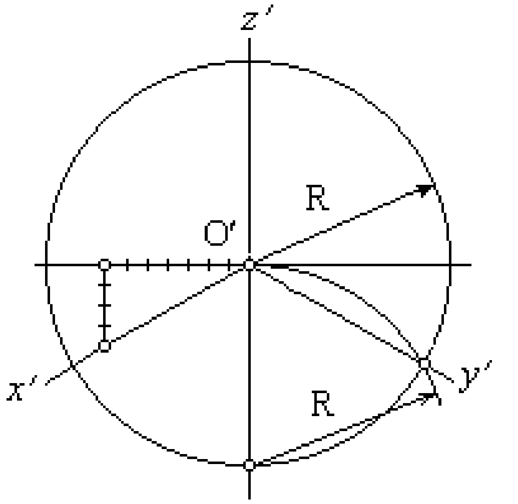


Рисунок 6.2 – Прямокутна ізометрія

Розташування осей у прямокутній ізометрії та прямокутній диметрії показано відповідно на рисунках 6.2 і 6.3.

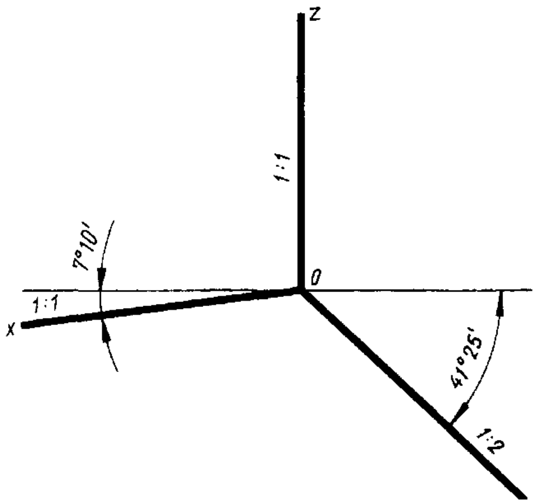


Рисунок 6.3 – Прямокутна диметрія

6.3.2 Косокутні аксонометричні проєкції

На рисунках 6.4–6.6 показано розташування осей і величини коефіцієнтів спотворення відповідно для фронтальної ізометрії, горизонтальної ізометрії і фронтальної диметрії.

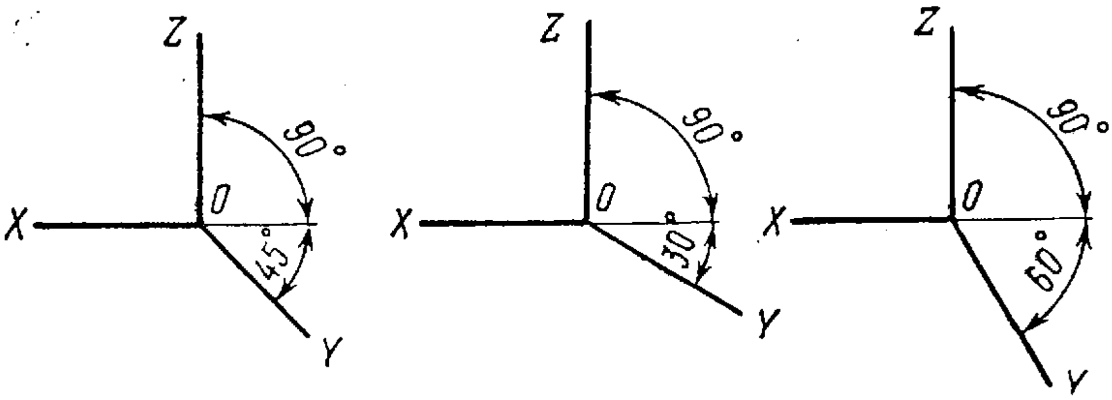


Рисунок 6.4 – Косокутна фронтальна ізометрія

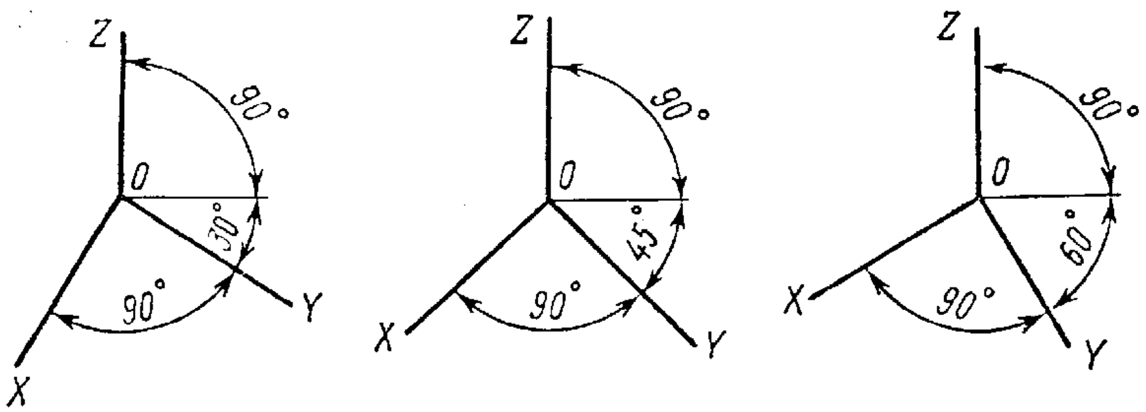


Рисунок 6.5 – Косокутна горизонтальна ізометрія

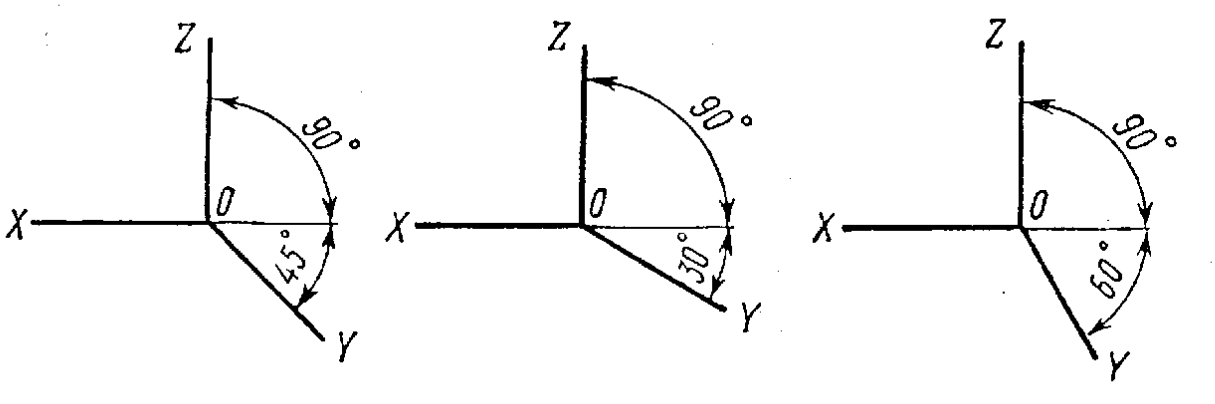


Рисунок 6.6 – Косокутна фронтальна диметрія

6.4 Побудова кола в аксонометрії

Кола в прямокутних аксонометричних проєкціях зображуються у вигляді еліпсів. Для побудови цих еліпсів достатньо знати направлення і розміри великої і малої осей. На рисунках 6.7 і 6.8 показано розташування великої і малої осей еліпсів для ізометричної проєкції кола (на прикладі аксонометричної проєкції куба з проєкціями кіл, розташованих на його гранях), розташованих у площинах, паралельних до горизонтальної, фронтальної і профільної площин проєкцій: $A^I_1B^I_1z$, $A^I_2B^I_2$ y, $A^I_3B^I_3x$. Розміри для великих осей еліпсів становлять 1,22D (де D – діаметр зображуваного кола), а для малих – 0,71D (співвідношення дійсні для коефіцієнтів спотворення, що дорівнюють по всіх осях одиниці).

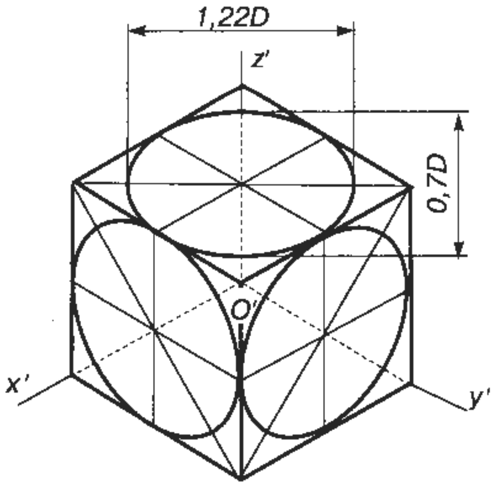


Рисунок 6.7 – Прямокутна ізометрія куба з проєкціями вписаних кіл на його гранях

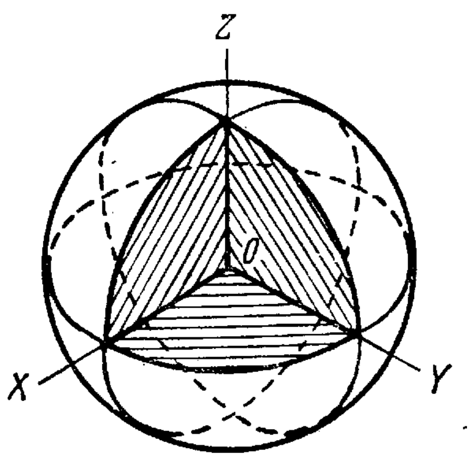


Рисунок 6.8 – Зображення сфери у прямокутній ізометрії

Розташування осей еліпсів у прямокутній диметричній проєкції зображено на рис. 6.9 і 6.10. Нагадуємо, що диметрична проєкція будується без спотворення по осях *x*` і *z*` та з урахуванням коефіцієнта спотворення 0,5 по осі *y*`.

У прямокутній диметрії осі еліпсів для кіл, розташованих у площинах, паралельних до проєкцій, орієнтовані відносно осей координат точно так само, як у ізометричній проєкції. При цьому великі осі становлять 1,06D. Малі осі еліпсів для граней, паралельних до площин *xoy і xoz*, становлять 0,35D, а для грані, паралельної до площини *xoy* – 0,9D.

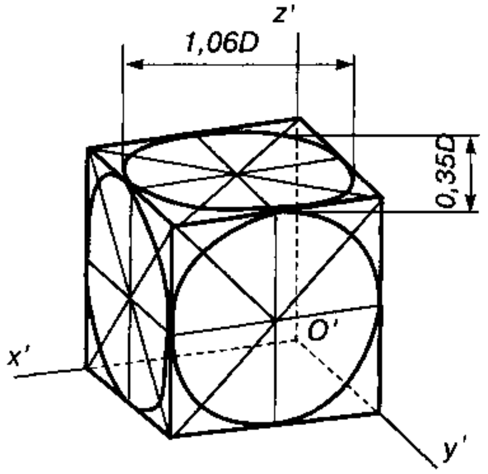


Рисунок 6.9 – Прямокутна диметрія куба з проєкціями вписаних кіл на його гранях

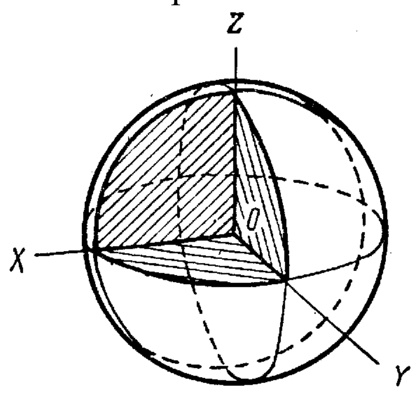


Рисунок 6.10 – Зображення сфери у прямокутній диметрії

Існує багато графічних засобів побудови еліпсів. Розглянемо ще один. Побудова еліпса виконується в такій послідовності:

1) вписати коло у квадрат; провести діагоналі (рис. 6.12) ;

2) побудувати аксонометричну проєкцію квадрата – паралелограм A'B'C'D' і провести діагоналі A'C' і B'D' (рис. 13);

3) відзначити середини сторін паралелограма – точки 1', 2', 3' і 4';

4) на відрізку 1э – В, як на гіпотенузі, побудувати прямокутний рівнобедрений трикутник 1'L'B';

5) з точки 1 радіусом 1'–L' описати півколо, яке перетне A'B' у точках M' і N'; ці точки поділяють відрізок A'–1' і рівний йому відрізок 1'–B' у співвідношенні 3:7;

6) через точки M і N провести прямі, паралельні до бокових сторін паралелограма; відмітити точки E',F',G' і H', розташовані на діагоналях;

7) побудувати дотичні до еліпса в знайдених точках: дві дотичні паралельні до діагоналі A'C', дві інші – паралельні до B'D'.

Одержавши вісім точок і стільки ж дотичних, можна з достатньою точністю накреслити еліпс.

6.5 Нанесення штрихування на розрізах в аксонометричних проєкціях

Лінії штрихування в аксонометричних проєкціях наносять паралельно до однієї з діагоналей квадратів, що лежать у відповідних координатних площинах, сторони яких паралельні до аксонометричних осей. Напрям штрихування рекомендується обирати згідно з рисунками 6.12 та 6. 13. Ребра жорсткості, якщо вони попадають у січну площину, штрихуються.

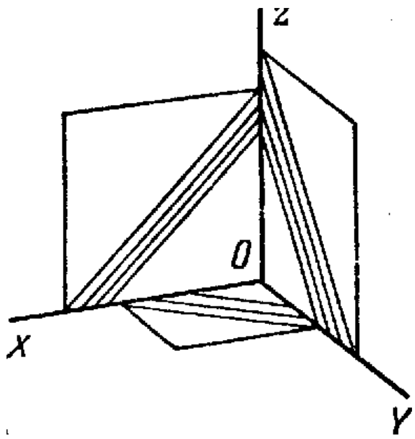


Рисунок 6.12 – Напрям штрихування у прямокутній ізометрії

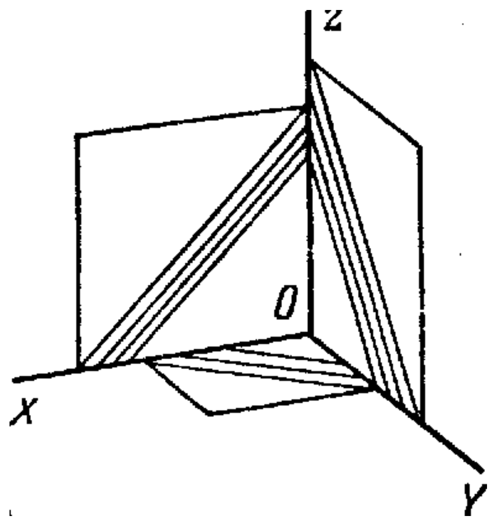


Рисунок 6.13 – Напрям штрихування у прямокутній диметрії

ТЕМА № 7 СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЄКЦІЙ

План

7.1 Спосіб заміни площин проєкцій.

7.2 Спосіб обертання.

7.3 Спосіб плоскопаралельного переміщення.

7.4 Приклади розв’язання метричних та позиційних задач за допомогою способів перетворення проєкцій.

Розглядаються різні способи розв’язання позиційних і метричних задач: спосіб заміни площин проєкцій; спосіб обертання; спосіб суміщення.

Розв’язання метричних задач.

Розв’язання метричних (від грецького *metreo* – «метрон» – «міра») та деяких позиційних (від латинського *posicio* – «положення») задач виконується найпростішими графічними способами, якщо геометричні елементи об’єкта проєкціювання знаходяться в окремому положенні. Це, перш за все, стосується прямих ліній, площин та поверхонь.

Способи перетворення проєкцій дають можливість змінювати взаємне розташування об’єкта проєкціювання та площин проєкцій.

Основним завданням перетворення є приведення прямих та площин загального положення в окреме положення (паралельне, проєкціювальне). Саме тому розв'язання позиційних та метричних задач вимагає побудови нових, додаткових проєкцій, при наявності двох заданих за допомогою графічних способів перетворення. Ці способи ґрунтуються на двох основних принципах.

Першим принципом є зміна взаємного положення об'єкта проєкціювання та площин проєкцій.

Цієї зміни можна досягти за допомогою двох способів:

– перший – *спосіб заміни площин проєкцій*, при якому об'єкт проєкціювання є нерухомим, змінюється лише положення площин проєкцій, вводяться додаткові площини проєкцій;

– другий – *спосіб обертання* та окремий його випадок – спосіб суміщення, при якому площини проєкцій є нерухомими, змінюється лише положення об'єкта проєкціювання.

Другим принципом є принцип зміни напряму проєкціювання. На цьому принципі базується спосіб допоміжного проєкціювання, який має два різновиди – прямокутне та косокутне допоміжне проєкціювання. Останній різновид використовують, переважно, для розв'язання позиційних задач.

7.1 Спосіб заміни площин проєкцій

Сутність способу полягає в тому, що одна з площин проєкцій змінюється на нову, яка разом з попередньою дає додаткову систему площин проєкцій, у якій нерухомий об'єкт проєкціювання буде перебувати у більш зручному положенні для виконання потрібної побудови.

На рисунку 7.1 наведено схему заміни фронтальної площини проєкцій $П_2$ на $П_4$. У просторі маємо точку А. У системі площин проєкцій $П_1П_2$, проєкції точки А – A_1 і A_2. Площина $П_1$ залишається незмінною, а $П_2$ змінюється на нову – $П_4$, перпендикулярну до $П_1$. Побудовані ортогональні проєкції A_1, A_4 точки А у системі площин $П_1П_4$. Лінією перетину $П_1$ і $П_4$ – двох взаємно перпендикулярних площин, є вісь X_{14}.

Потрібно мати на увазі, що проєкціювання є ортогональним, тому відстань A_2 від осі X_{12} буде дорівнювати відстані A_4 до осі X_{14} (координата Z точки A залишається незмінною).

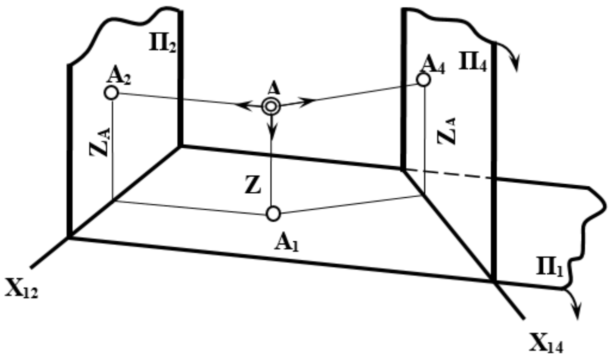


Рисунок 7.1 – Заміна фронтальної площини проєкцій

Перетворення точки на комплексному кресленні розглянуто на рисунку 7.2. Положення площини $П_4$ характеризується розташуванням осі X_{14}. Лінія проєкційного зв'язку A_1A_4 перпендикулярна до осі X_{14}.

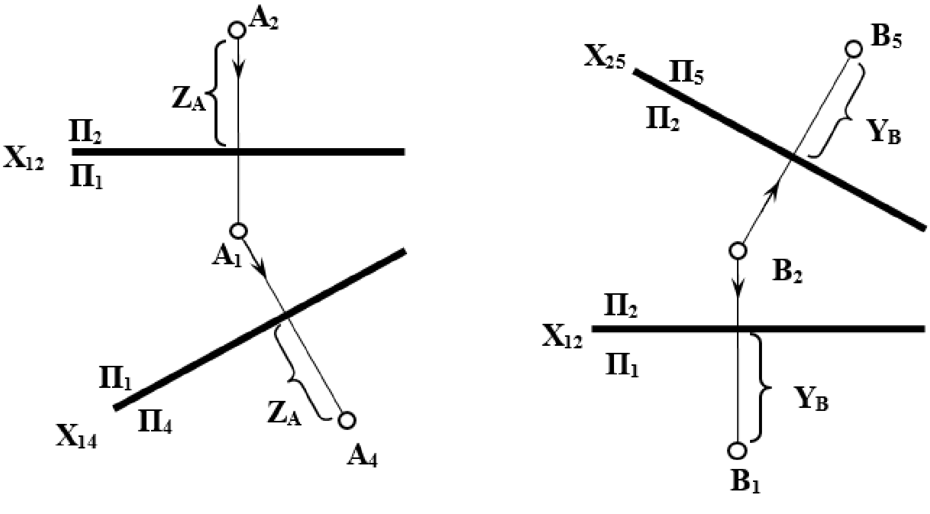


Рисунок 7.2 – Перетворення комплексного креслення точок проєкцій

На рисунку 7.2 наведено перетворення комплексного креслення точки B, при якому фронтальна площина $П_2$ залишається незмінною, а $П_1$ замінюється на $П_5$. Положення площини $П_5$ визначає вісь X_{25}. Лінія проєкційного зв'язку B_2B_5 є перпендикулярною до осі X_{25}, а відстань B_5 від осі X_{25} дорівнює відстані B_1 від осі X_{12}.

Таким чином, заміну площин проєкцій можна виконувати декілька разів, але одночасно можна замінити лише одну площину, так як заміну проводять послідовно: спочатку замінюють одну площину проєкцій на нову, додаткову, на якій будують нову проєкцію об'єкта проєкціювання, а потім площину, що залишилася незмінною, замінюють на іншу, нову, а також, будують нову проєкцію об'єкта.

Розглянемо найпростіші графічні способи розв'язання основних метричних та позиційних задач:

1. *Пряму загального положення перетворити на пряму рівня (рис. 7.3).*

Маємо комплексне креслення прямої загального положення АВ в системі площин проєкцій $П_1П_2$. Для перетворення прямої в пряму *рівня* треба замінити одну з площин проєкцій $П_1$, $П_2$ на іншу – $П_4$, яку розташуємо паралельно до прямої АВ.

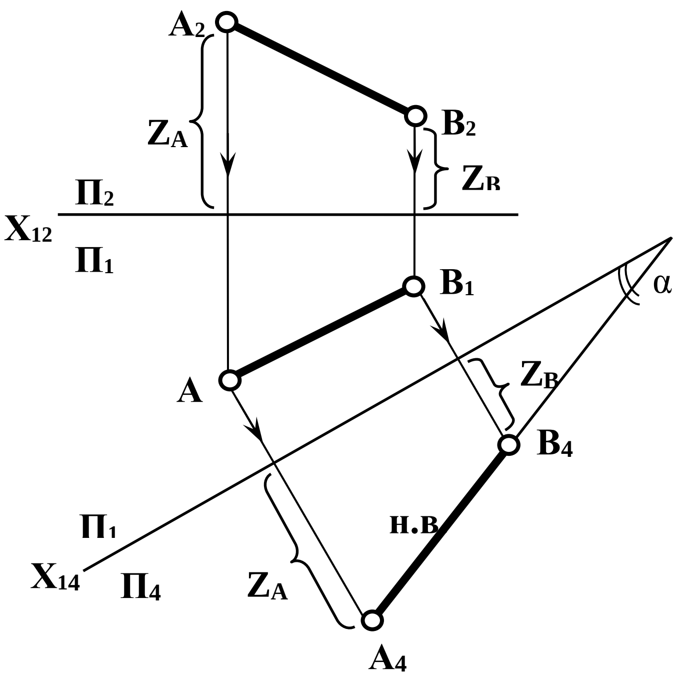


Рисунок 7.3 – Перетворення на пряму рівня

Сама пряма у просторі залишається незмінною. Так, на рисунку 4 незмінною залишається площина $П_1$, а $П_2$ замінюється новою – $П_4$, перпендикулярною до $П_1$ і паралельною до АВ. Розташування у просторі $П_4$ характеризується на кресленні віссю X_{14}, яку проводимо паралельно до горизонтальної проєкції A_1B_1 на довільній відстані від неї.

Для побудови проєкції A_4B_4 необхідно через горизонтальні проєкції точок A і B перпендикулярно до X_{14} провести лінії проєкційного зв'язку (A_1A_4, B_1B_4), на яких потрібно визначити проєкції A_4, B_4, пам'ятаючи, що їх відстань від X_{14} буде рівною відстані A_2B_2 від осі X_{12}.

У системі площин $\Pi_1\Pi_4$ пряма AB стає прямою *рівня*. Така пряма на Π_4 проєкціюється у свою натуральну величину. Одночасно маємо величину кута нахилу прямої AB до площини проєкцій Π_1.

Це перетворення можна виконати, залишаючи незмінною площину проєкцій Π_2 та замінюючи горизонтальну площину проєкцій Π_1 на нову – Π_5, яку вибирають перпендикулярною до Π_2 та паралельною до відрізка прямої AB.

Нова вісь проєкцій X_{25} паралельна до фронтальної проєкції A_2B_2. Пряма AB у системі $\Pi_2\Pi_5$ буде прямою *рівня*.

Як і в попередньому прикладі, пряма AB на площину Π_5 проєкціюється без спотворення. Одночасно знайдено величину кута β – кута нахилу відрізка AB до площини проєкцій Π_2.

2. *Пряму загального положення перетворити на проєкціювальну.*

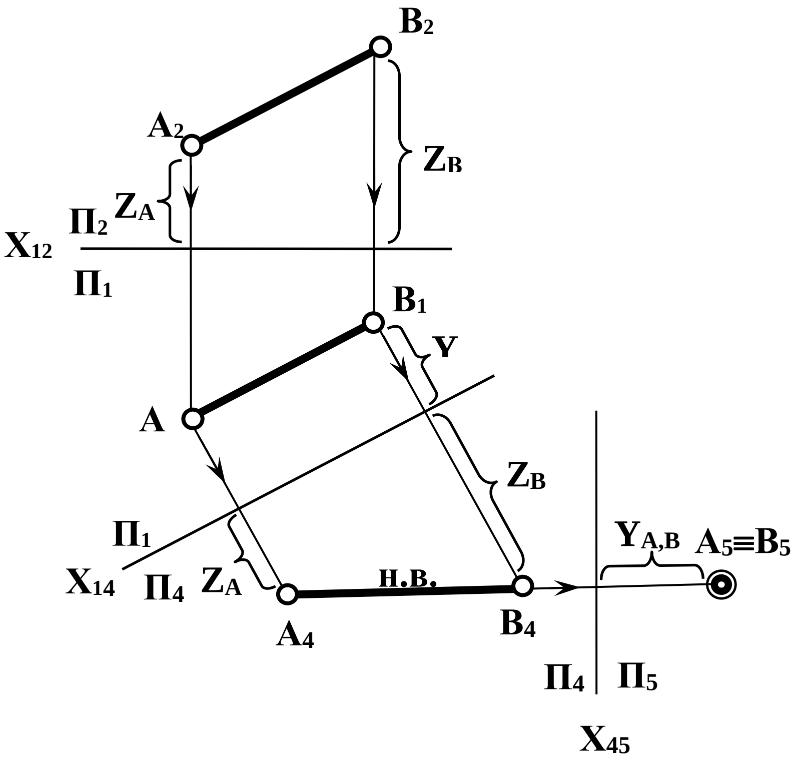


Рисунок 7.4 – Перетворення на пряму проєкціювальну

На рисунку 7.4 наведено приклад перетворення прямої AB на проєкціювальну, завдяки подвійній заміні площин проєкцій $П_1$ та $П_2$ на додаткові $П_4$ та $П_5$.

Спочатку пряма в системі $П_1П_4$ перетворюється на пряму рівня, а потім у системі $П_4П_5$ – на проєкціювальну, тому вісь X_{14} проводимо паралельно до A_1B_1, а вісь X_{45} – перпендикулярно до A_4B_4. При цьому AB спроєкціюється на $П_5$ у точку $A_5 \equiv B_5$. Це означає, що пряма AB у новій системі площин проєкцій $П_4П_5$ перпендикулярна до площини $П_5$.

3. *Площину загального положення перетворити на проєкціювальну.*

На рисунку 7.5 зображені проєкції площини загального положення, яка задана трикутником ABC.

Якщо пряма h площини ABC перпендикулярна до площини проєкцій, то й сама площина ABC буде перпендикулярною (проєкціювальною) до цієї площини проєкцій. Тому $П_2$ замінюємо на $П_4$, перпендикулярну до h_1. Вісь X_{14}, у цьому випадку, буде перпендикулярною до h_1. Площина $П_4$ буде перпендикулярною до площини трикутника ABC. Проєкцією $\sum_4$ площини ABC на $П_4$ буде пряма $C_4A_4B_4$.

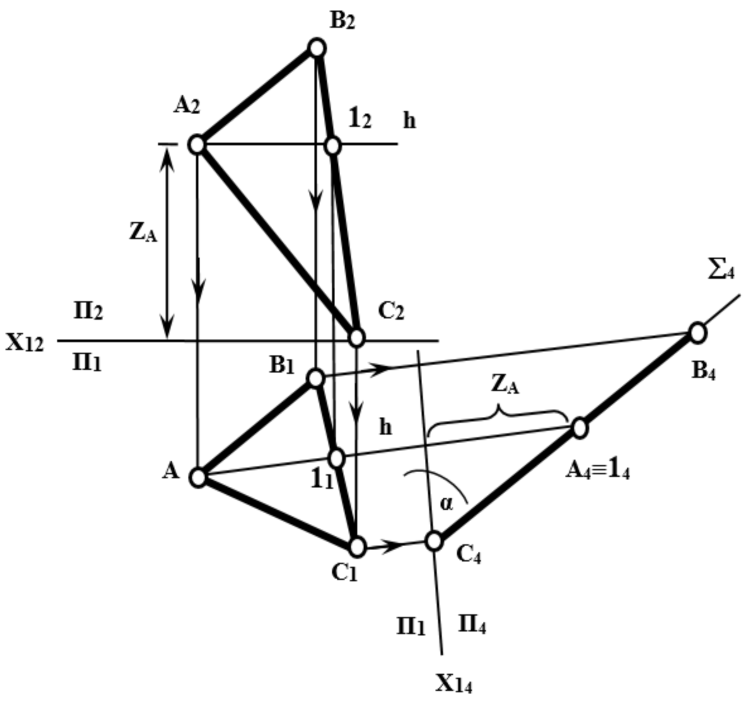


Рисунок 7.5 – Перетворення на проєкціювальну площину

Кут α визначає кут нахилу площини трикутника ABC до $П_1$. При перетворенні площини загального положення у проєкціювальну треба незмінною залишити $П_2$, а $П_1$ замінити на $П_4$, перпендикулярну до її фронталі.

4. *Перетворити площину загального положення на площину рівня (паралельну).*

На рисунку 7.6 площина задана трикутником ABC. Для перетворення її на площину рівня треба виконати подвійну заміну. Спочатку в системі $П_1П_4$ площина ABC перетворюється на проєкціювальну $A_4B_4C_4$. Вісь X_{14} (горизонтальна проєкція $П_4$) буде перпендикулярною до горизонталі h_1 трикутника ABC. Потім $П_1$ замінюємо на $П_5$, паралельну до трикутника. Вісь X_{45} (проєкція $П_5$ на $П_4$) у цьому випадку буде паралельною до $C_4A_4B_4$, а сама площина ABC у системі $П_4П_5$ перетвориться на площину рівня.

Таким чином, трикутник спроєкціювався на площину $П_5$ без спотворення.

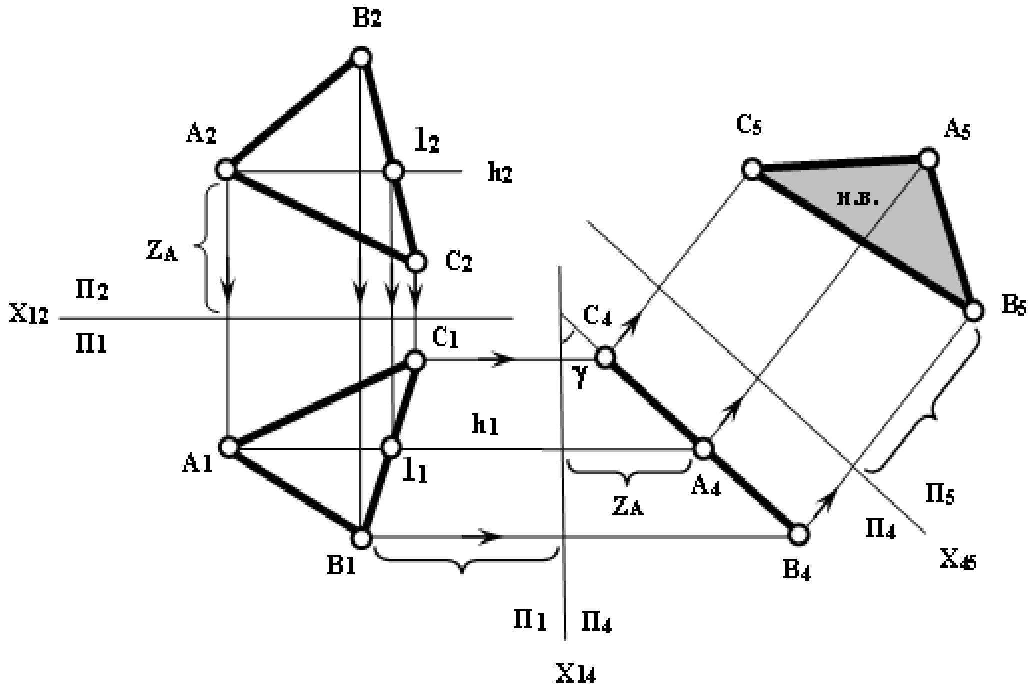


Рисунок 7.6 – Перетворення на площину рівня

Для перетворення площини загального положення, замість розглянутої, на площину рівня, можна використати подвійну заміну площин $П_1$ на $П_4$, та $П_2$ на $П_5$.

7.2 Спосіб обертання

Цей спосіб полягає в тому, що об'єкт проєкціювання за допомогою обертання навколо деякої осі займає відносно нерухомих площин проєкцій положення більш зручне для розв'язання задач.

Усі точки об'єкта проєкціювання при обертанні навколо лінії, що приймається за вісь обертання, переміщуються по дугах кола. Ці дуги лежать у площинах, що перпендикулярні до осі обертання. За допомогою цього способу також є можливість вирішення чотирьох основних задач перетворення.

7.2.1 Обертання навколо осей, перпендикулярних до площин проєкцій

На рисунку 7.8 наведено схему обертання точки А навколо осі обертання *i*, перпендикулярної до $П_1$.

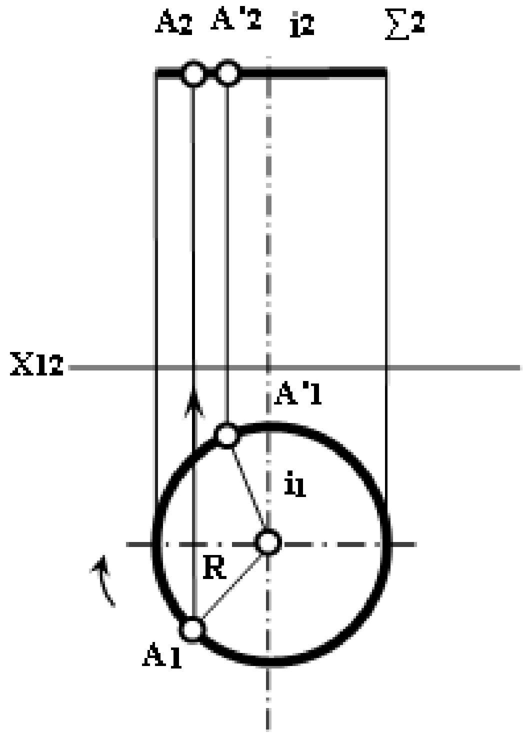


Рисунок 7.8 – Спосіб обертання

Площина Σ ($Σ_2$) обертання точки А, у цьому випадку, буде паралельною до $П_1$, а тому, коло обертання радіуса R на $П_1$проєкціюється без спотворення.

При обертанні точки А (A_1, A_2) на якийсь кут навколо осі «і» її новими проєкціями будуть A'_1, A'_2.

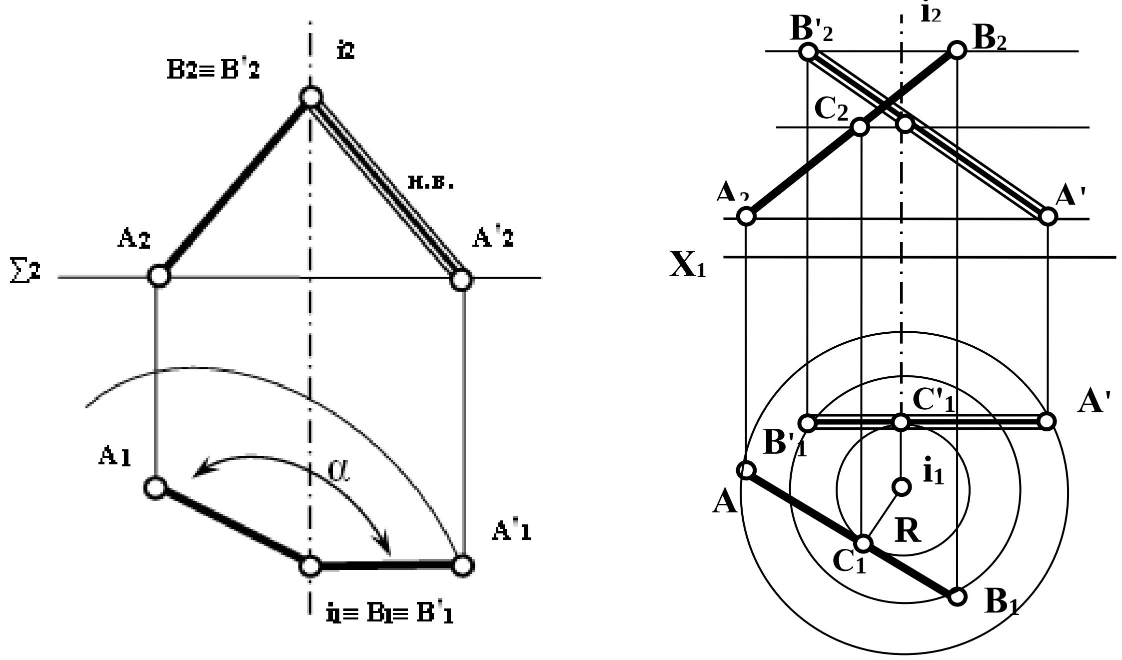
На рисунку 7.9, а зображено перетворення прямої загального положення на пряму *рівня*. Такого положення можна досягти, обертаючи відрізок АВ навколо осі «і», перпендикулярної, наприклад, до $П_1$. Усі точки прямої обертаються на один і той же кут у площинах, перпендикулярних до осі, а тому в площинах горизонтальних.

Кут нахилу прямої до $П_1$ під час обертання залишається незмінним, тому нове положення ($A'_1B'_1$) відрізка АВ, коли він буде паралельним до $П_2$, за величиною буде рівним проєкції A_1B_1.

Щоб повернути пряму, достатньо повернути дві її точки. Точка В відрізка буде нерухомою, оскільки належить осі обертання.

На рисунку 7.9, б наведено обертання прямої АВ навколо осі *і*, яка не проходить через кінець В відрізка.

У цьому випадку доцільно, перш за все, обертати точку С, радіус R якої буде найменшим, а пряма A_1B_1 буде дотичною до кола обертання точки С.



а) б)

Рисунок 7.9 – Перетворення на пряму рівня

Якщо потрібно пряму АВ загального положення перетворити на пряму *рівня*, то її горизонтальна проєкція A_1B_1 під час обертання має зайняти положення ($A'_1B'_1$), паралельне до осі X. У цьому разі радіус R буде перпендикулярним до осі X.

Проєкцію $A'_1B'_1$ визначимо завдяки постійній величині горизонтальної проєкції. Відповідну нову фронтальну проєкцію $A'_2B'_2$ визначимо за допомогою ліній проєкційного зв'язку.

За допомогою способу обертання *площину* загального положення перетворити *на проєкціювальну.* Вирішення цього завдання подано на прикладі трикутника ABC, наведеного на рисунку 7.10.

При обертанні плоскої фігури навколо осі, перпендикулярної до однеї з площин проєкцій (наприклад $П_1$), нахил фігури до даної площини проєкцій залишається незмінним.

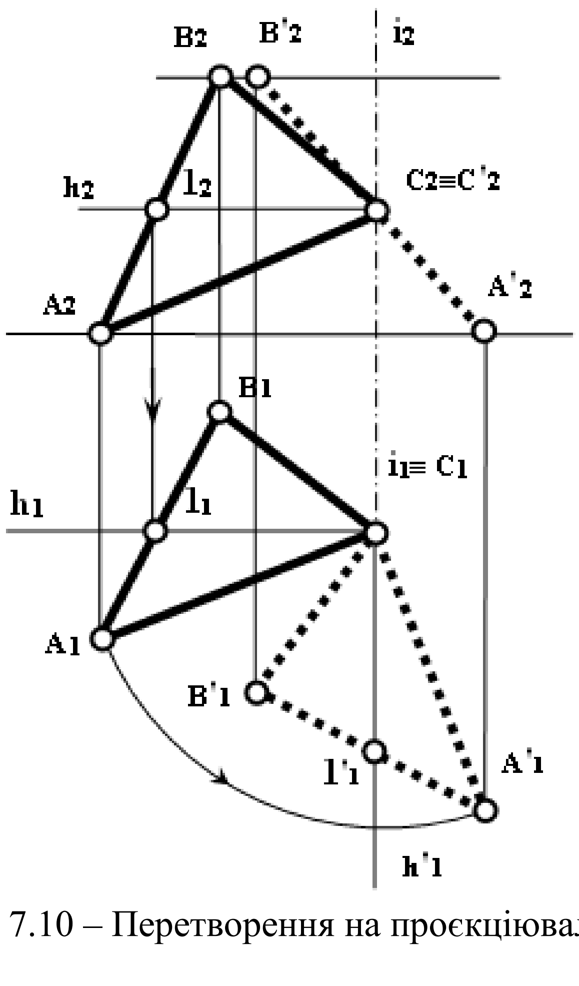


Рисунок 7.10 – Перетворення на проєкціювальну

Тому проєкції фігури на цій площині проєкцій під час обертання однакові за величиною ($\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A'_1B'_1C'_1$), змінюється лише їх розташування.

Перетворення площини загального положення на площину рівня виконується подвійним обертанням навколо осі ***i*** до положення проєкціювального, а потім навколо осі ***o*** до положення рівня (рис. 7.11).

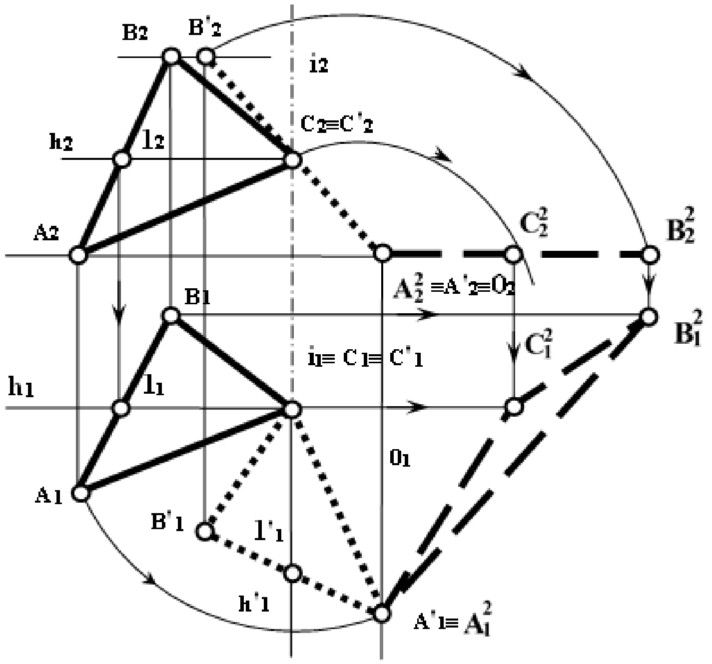


Рисунок 7.11 – Перетворення подвійним обертанням навколо осі

7.2.2 Обертання навколо ліній рівня

Крім обертання навколо осей, перпендикулярних до площин проєкцій, користуються обертанням навколо ліній *рівня* площин, якщо треба площину загального положення перетворити на площину *рівня*.

Це буває потрібно при визначенні натуральних розмірів плоских фігур. У довільній площині завжди можна вибрати одну з безлічі головних ліній, а потім обернути навколо цієї лінії задану площину до такого положення, щоб площина стала паралельною до площини проєкцій.

На рисунку 7.12 зображено площину $\Sigma\ (f \cap h)$ загального положення, задану слідами. Для визначення величини плоского кута, що утворюється в просторі між слідами площини, виконано суміщення відсіку площини з площиною Π_1 (обертання площини навколо горизонталі «h»).

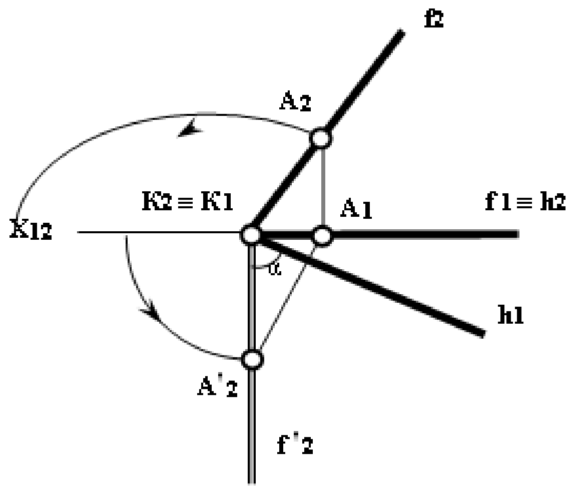


Рисунок 7.12 Обертання навколо ліній рівня

Віссю обертання у такому випадку служить горизонтальний слід площини – h_1. Для знаходження суміщеного фронтального сліду на ньому вибирають довільну точку A, яка при обертанні навколо горизонтального сліду h_1 рухатиметься у вертикальній площині, перпендикулярній до h_1. При цьому відстань від точки A до точки збігу слідів площини збережеться, що дозволить з точки збігу слідів провести дугу кола до перетину в точці A'_2 з площиною траєкторії горизонтальної проєкції точки. Суміщений фронтальний слід f'_2 пройде через точку збігу слідів і знайдену точку A'_2.

7.3 Спосіб плоскопаралельного переміщення

Якщо при способі заміни площин проєкцій геометричні фігури залишають на місці, а до них, певним чином, підбирають площини проєкцій, то при способі плоскопаралельного переміщення роблять навпаки: площини проєкцій Π_1 і Π_2 залишають незмінними, а геометричні образи (фігури) переміщують певним чином.

На рисунку 7.8 було наведено обертання точки A навколо осі «i», перпендикулярної до Π_1. Протягом всього обертання точка A переміщується в площині $\Sigma(\Sigma_2)$, паралельній до Π_1 та перпендикулярній до осі «i». Такі перетворення можна виконати і без зафіксованих осей, перпендикулярних до площин проєкцій.

Наприклад, на рисунку 7.13 наведено плоскопаралельне переміщення точки А в площині рівня Σ (Σ_2).

Яке б положення не займала при переміщенні точка А, її фронтальні проєкції завжди співпадають із проєкцією Σ_2.

Спосіб плоскопаралельного переміщення є обертанням навколо невиявлених осей, перпендикулярних до Π_1 і Π_2. Відповідно до цього виконується рішення основних задач перетворення.

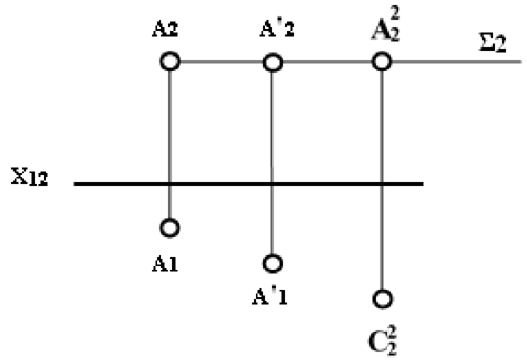


Рисунок 7.13 – Плоскопаралельне переміщення

Наприклад, на рисунку 7.14 наведено переміщення прямої АВ у площинах Σ, Г (для точок А, В), паралельних до Π_1, до положення, паралельного до Π_2. При цьому $A_1B_1 = A'_1B'_1$. Потім пряма АВ з положення рівня переміщена в площині $T(T_1)$ до проєкціювального до Π_1 положення. Інші типові задачі виконуються аналогічно.

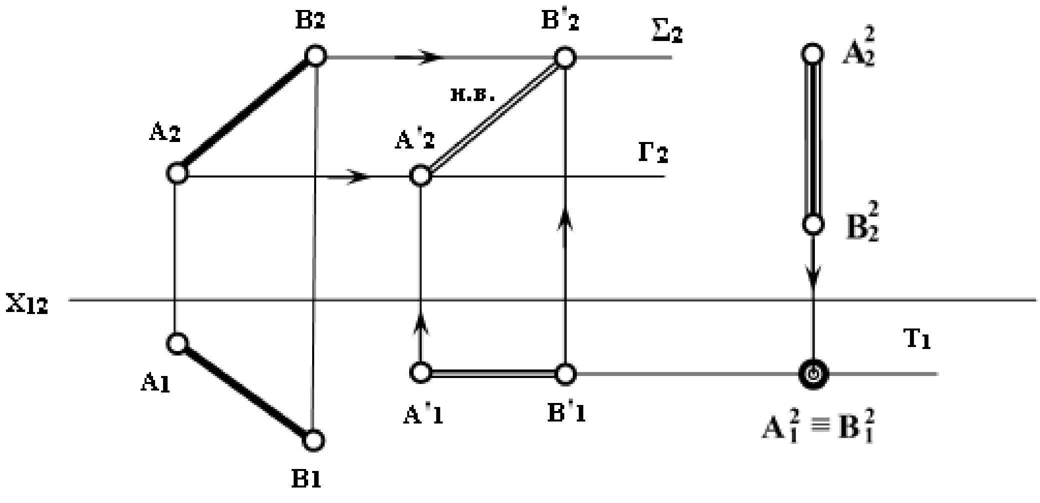


Рисунок 7.14 – Переміщення прямої *АВ* у площинах *Σ, Г*

7.4 Приклади розв'язання метричних та позиційних задач за допомогою способів перетворення проєкцій

Задача 1. Визначити відстань точки A від площини загального положення $\Sigma (a \cap b)$.

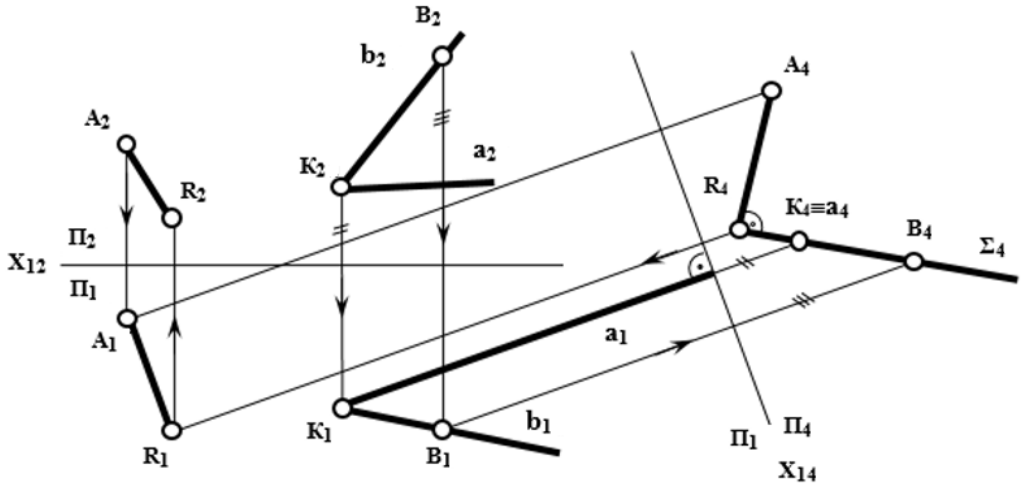


Рисунок 7.15 – Визначення відстані

Розв'язання задачі наведено на рисунку 7.15.

Площина *$\Sigma (a \cap b)$* заміною Π_2 на Π_4, яка перпендикулярна до пряої «а», перетворюється на Π_4 на площину проєкціювальну (Σ_4). Шукана відстань A_4R_4 визначається на Π_4 проведенням прямої $A_4R_4 \perp \Sigma_4$. Її горизонтальна проєкція A_1R_1 паралельна до осі X_{14}.

Задача 2 .Визначити відстань від A до прямої BC загального положення (рис 7.16).

Ця відстань (AR) на кресленні визначається (A_5R_5) на площині Π_5, до якої пряма BC буде проєкціювальною.

У системі $\Pi_2\Pi_1$ ця відстань (перпендикуляр з точки A на пряму BC) визначиться зворотним ходом. При цьому A_4R_4 завжди паралельна до X_{45}, оскільки перпендикуляр A_5R_5 є горизонтальною прямою.

Відстань між мимобіжними прямими характеризується *найкоротшою* відстанню між двома точками (K, R) цих прямих. На площині Π_5 (K_5R_5)

це перпендикуляр з $A_5 \equiv B_5$ на C_5D_5. Проєкція K_4R_4 є паралельною до осі X_{45}.

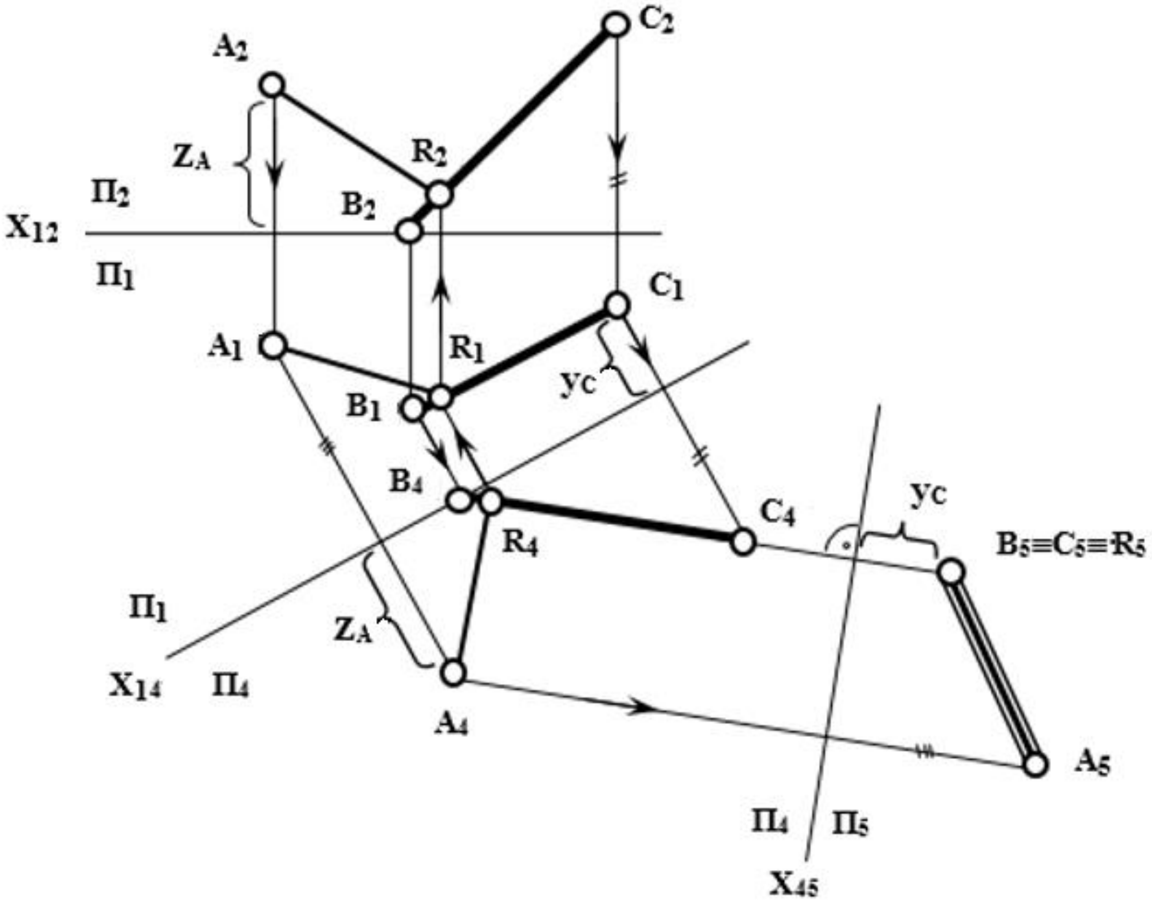


Рисунок 7.16 – Розв’язання задачі

Задача 3. Визначити кут між прямими «a, b», які перетинаються (рис. 7.17), подвійною заміною.

Площину АКВ перетворюємо на площину *рівня* відносно площини проєкцій $П_5$. А тому шуканий кут між прямими спроєкціюється на $П_5$ без спотворення. Це кут $B_5K_5A_5$.

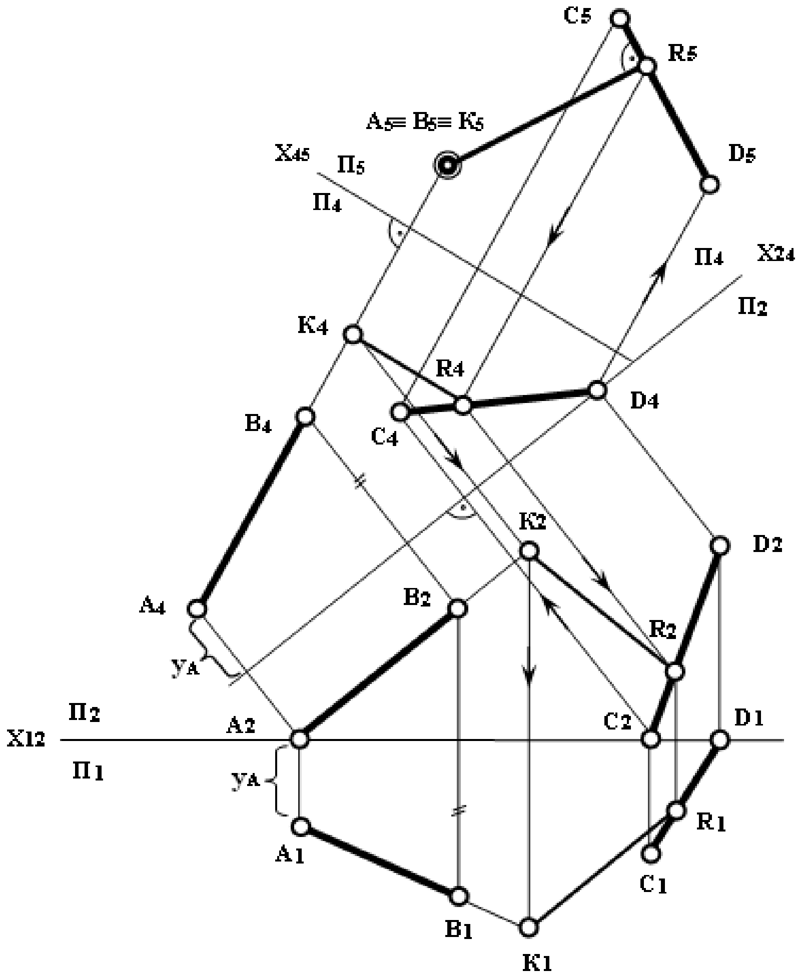


Рисунок 7.17 – Розв’язання задачі

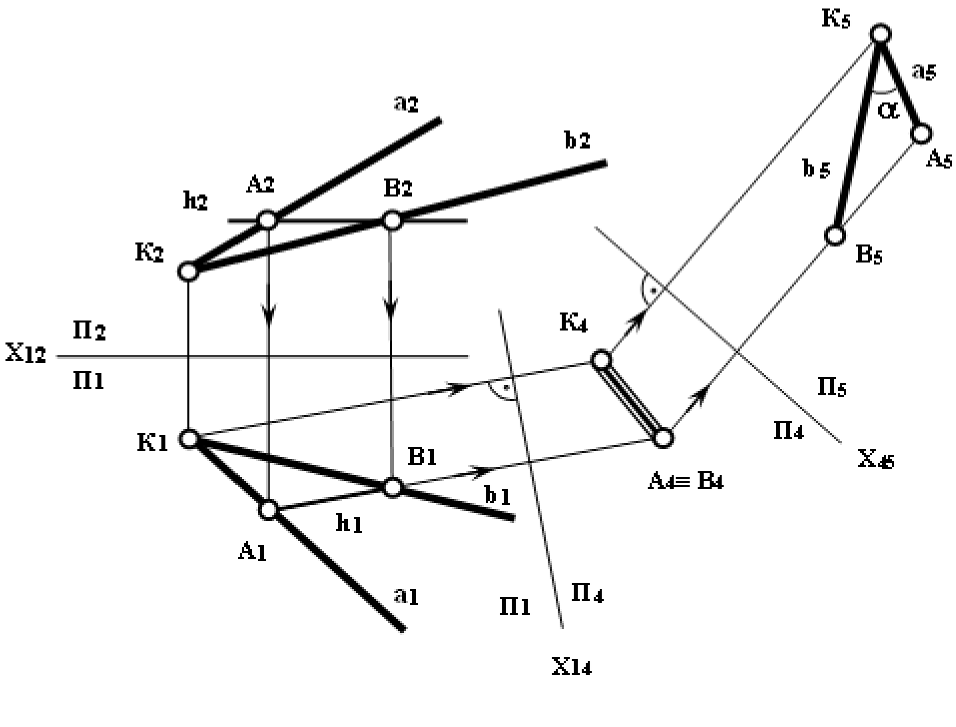


Рисунок 7.18 – Розв’язання задачі

Задача 4. Визначити кут між прямою «а» та площиною загального положення Σ.

Кут між прямою і площиною вимірюється кутом α (рис. 7.19) між прямою та її проєкцією на цю площину.

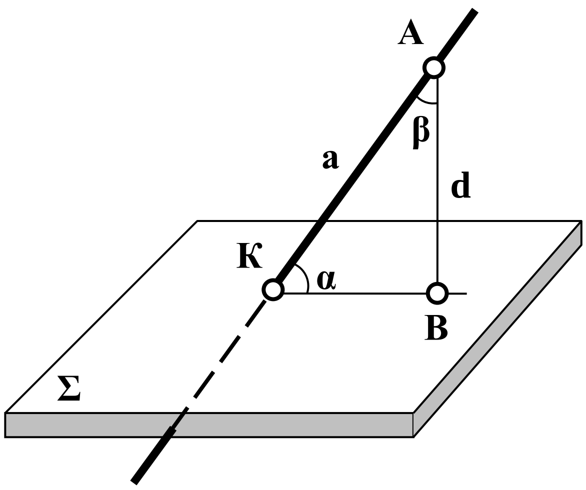


Рисунок 7.19 – Визначення кута

У трикутнику АКВ кут β при вершині А доповнює кут α до 90◦. Тому простіше знайти доповнюючий кут β між прямою «а» і перпендикуляром «d» з будь-якої точки прямої на площину Σ.

На рисунку 7.20 – це кут між прямими *«а» і «b»* при вершині А. Перетворюючи проєкції цього кута (площини) до положення, паралельного до площини $П_5$, визначимо дійсну величину кута α. Шуканий же кут α буде рівний 90◦ – β.

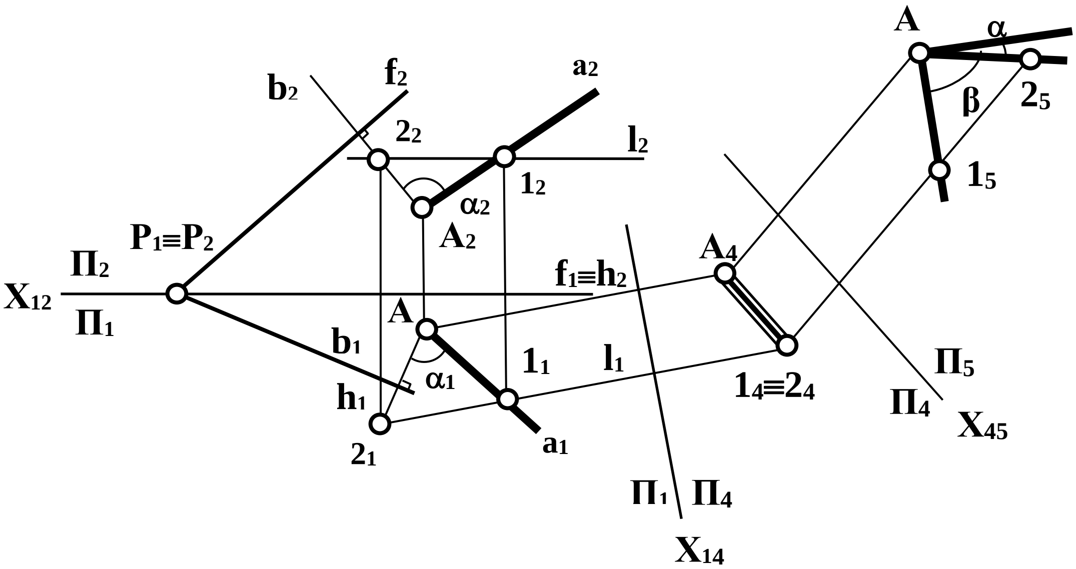


Рисунок 7.20 – Розв'язання задачі

Задача 5. Визначити двогранний кут між площинами Σ (ΔАВС) і Т(ΔВСD).

Цей кут вимірюється лінійним кутом, одержаним у результаті перетину двогранного кута площиною, перпендикулярною до його ребра.

На рисунку 7.21 ці дві площини вже мають лінію перетину. Це спільна пряма ВС – ребро двогранного кута. Тому, перетворивши креслення таким чином, щоб ребро ВС стало проєкціювальним, маємо величину лінійного кута α.

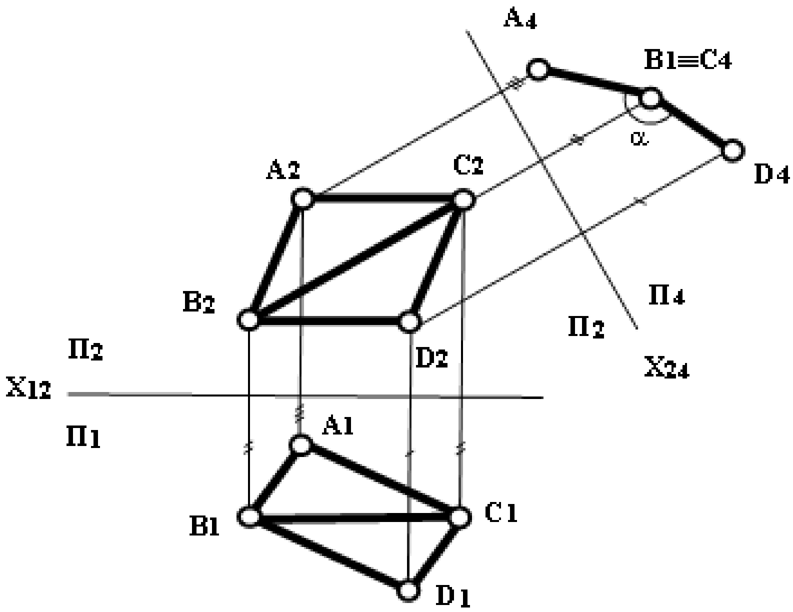


Рисунок 7.21 – Розв’язання задачі

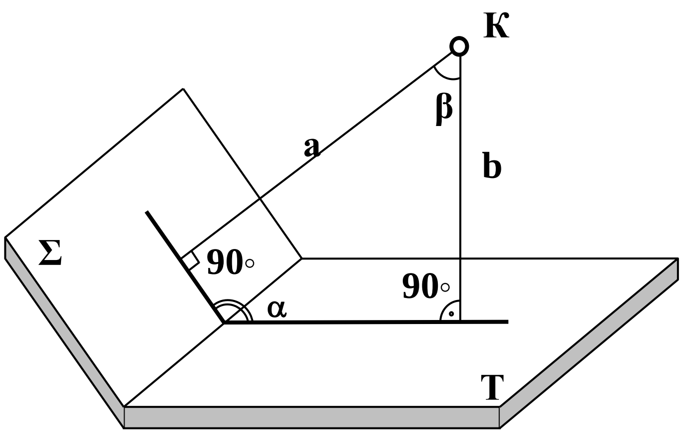


Рисунок 7.22 – Розв’язання задачі

У деяких випадках, коли не визначене ребро двогранного кута, задача розв’язується значно простіше, якщо визначити спочатку кут, що міститься між перпендикулярами «а» і «b» (рис. 7.22), опущеними з довільної точки К на задані площини. Кут між перпендикулярами «а» і «b» доповнює шуканий кут α до 180◦.

На рисунку 7.23 наведено приклад визначення двогранного кута α між площинами Σ ($f \cap h$) і Т ($m \cap n$). Доповнюючий кут β визначається у трикутнику KAB, сторони якого (KA і KB) перпендикулярні до заданих площин Σ і T. Спочатку визначаємо величину цього кута, а потім дійсного кута α, доповнюючи кут β до 90◦.

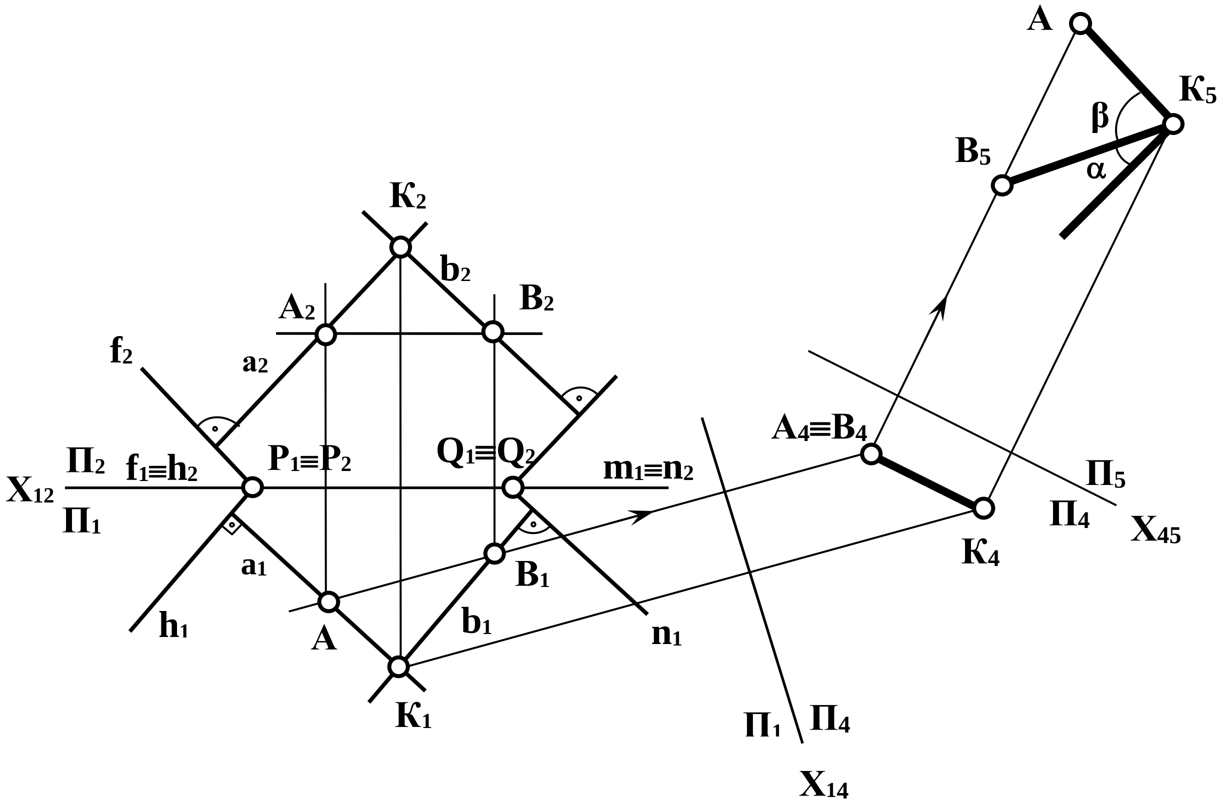


Рисунок 7.23 – Визначення двогранного кута між площинами

Задача 6. Визначення проєкцій та величини перерізу конуса площиною $\Sigma(a \cap b)$ (рис. 7.24).

Замінивши площину $П_2$ на $П_4$ так, щоб площина перерізу Σ стала проєкціювальною (Σ_4), будемо мати на $П_4$ одну проєкцію лінії перерізу. Вона буде співпадати з проєкцією площини Σ_4. Зворотним ходом визначаються проєкції перерізу на $П_1$, а потім на $П_2$. Для знаходження дійсної величини плоскої фігури перерізу виконується заміна $П_1$ на $П_5$, паралельну до площини перерізу.

Усі наведені приклади виконані способом заміни площин проєкцій. Але вони можуть бути виконані також і іншими способами перетворення проєкцій, які були розглянуті раніше.

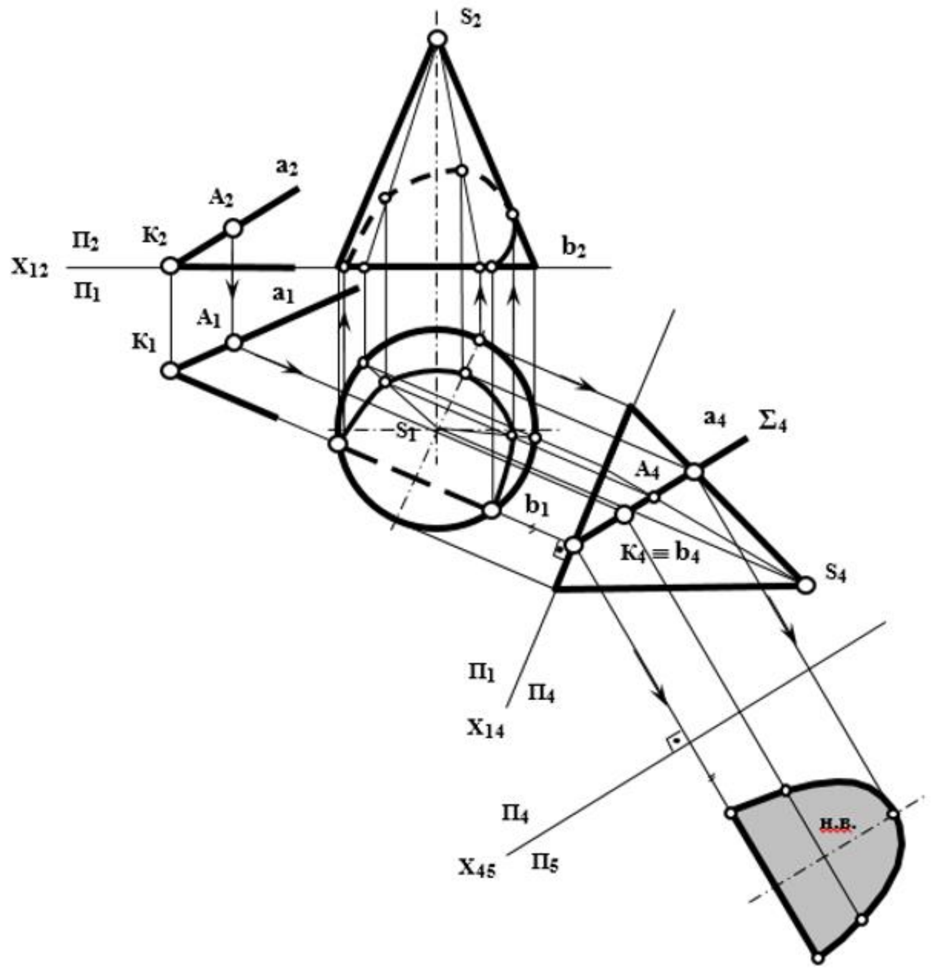


Рисунок 7.24 – Розв’язання задачі

ТЕМА № 8 РОЗГОРТКА ПОВЕРХНІ

План

8.1 Класифікація розгорток поверхонь.
8.2 Побудова точних розгорток багатогранників.
8.3 Побудова наближених розгорток лінійчатих поверхонь.
8.4 Побудова умовних розгорток нерозгортних поверхонь.

Уявімо поверхню у вигляді тонкої і гнучкої, але нерозтягнутої плівки. У цьому випадку деякі поверхні можна поступовим згинанням поєднати з площиною так, що при цьому не виникає ні розривів, ні складок. Поверхні, що володіють цією властивістю, називаються розгортними, а фігура, отримана в результаті сполучення поверхні з площиною – розгорткою такої поверхні. Побудова розгорток є важливим технічним завданням, оскільки у промисловості широко застосовуються різноманітні вироби, виконані з листового матеріалу шляхом згинання (судини, трубопроводи, швейні вироби тощо). Якщо розглядати поверхню і її розгортку як точкові множини, то між цими двома множинами встановлюється взаємно однозначна відповідність. Значить, кожній точці на поверхні відповідає єдина точка розгортки, кожній лінії на поверхні відповідає лінія на розгортці і навпаки. Зазначимо, взаємно однозначна відповідність має такі властивості:

1. При розгортанні поверхні на площину довжини ліній, що лежать на ній, зберігаються.

2. Кути, утворені лініями на розгортці, і кути між відповідними лініями на поверхні рівні.

3. Замкнута лінія на поверхні і відповідна їй лінія на розгортці обмежують однакову площу. З цього випливає, що площа розгортки дорівнює площі самої поверхні.

4. Прямій на поверхні відповідає пряма на розгортці.

5. Паралельним прямим на поверхні відповідають паралельні прямі на розгортці. Лінія між двома точками розгортання поверхні, відповідна прямій на її розгортці, є найкоротшою лінією між цими точками. Такі лінії називаються геодезичними. У курсі диференціальної геометрії доводиться, що розгортними поверхнями є багатогранники і наступні лінійчаті поверхні: циліндри, конуси і торси. Усі інші поверхні – нерозгортні.

8.1 Класифікація розгорток поверхонь

У нарисній геометрії розгортки поверхонь поділяються на такі:

– точні – розгортки багатогранників і прямих кругових циліндрів та конусів, якщо параметри розгорток розраховувалися за формулами;

– наближені – розгортки розгортних лінійчатих поверхонь;
– умовні – розгортки нерозгортних поверхонь.

8.2 Побудова точних розгорток багатогранників

Для побудови розгорток багатогранників застосовуються такі способи:
– нормального перерізу – для призм;
– розкочування – для призм;
– тріангуляції (трикутників) – для будь-якого багатогранника.

Розглянемо перший і третій способи більш докладно.

8.2.1 Спосіб нормального перерізу

Сутність даного способу побудови розгортки призми полягає в такому: задану призму перетинають площиною, перпендикулярною до бічних ребер, і будують проєкції і натуральну величину перерізу призми цією площиною (нормальний переріз). Також необхідно визначити натуральну величину відрізків бічних ребер призми, що лежать вище і нижче нормального перерізу. Далі на вільному полі креслення проводять горизонтальну лінію і на ній від довільної точки відкладають один за одним сторони нормального перерізу призми. Через отримані точки проводять вертикальні прямі лінії, на яких вниз відкладають натуральні величини відрізків бічних ребер призми, що лежать нижче нормального перерізу, а вгору – натуральні величини відрізків бічних ребер призми, що лежать вище нормального перерізу. Поєднавши побудовані точки між собою відрізками прямих, одержимо розгортку бічної поверхні призми. Додавши до неї натуральні величини верхньої і нижньої основ, отримаємо повну розгортку поверхні призми.

На рисунку 8.1 показано побудову розгортки призми АВСА В'С 'способом нормального перерізу.

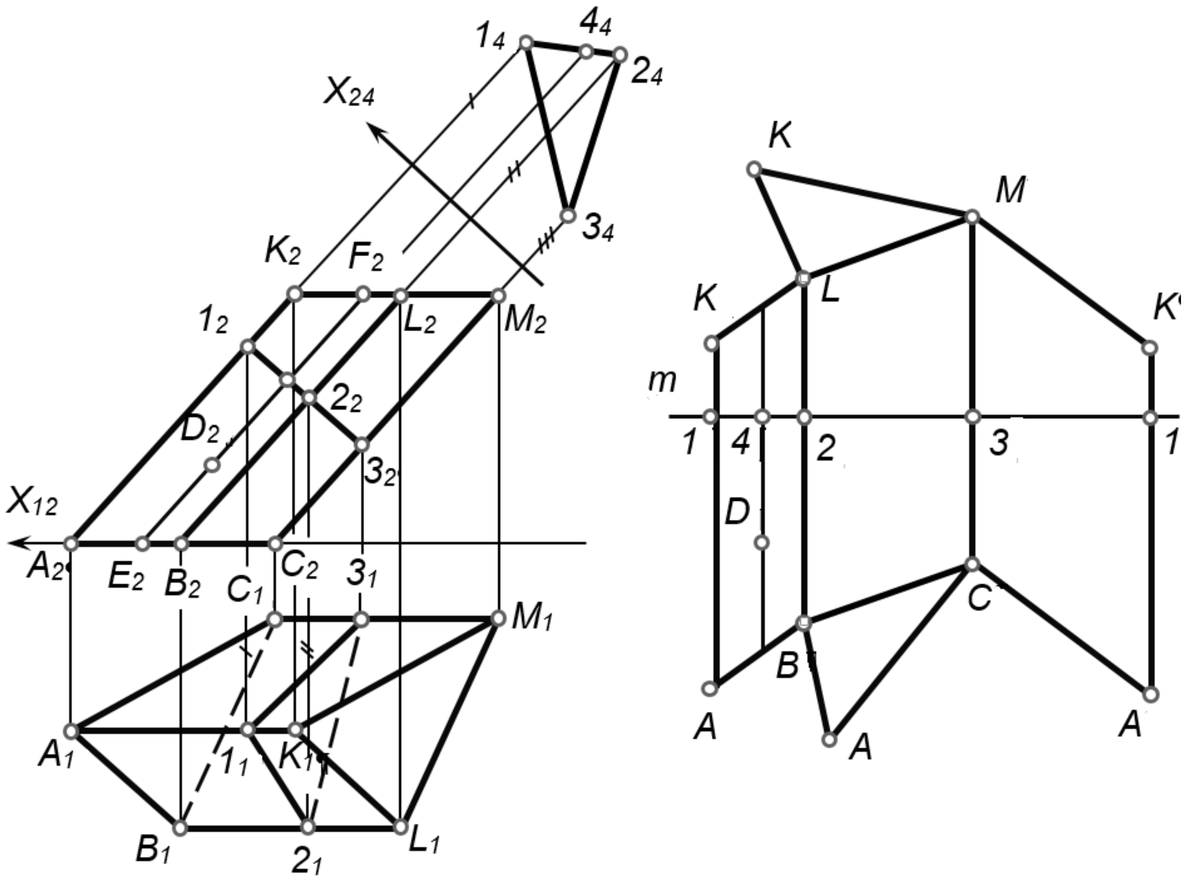


Рисунок 8.1 – Побудова розгортки призми

Для побудови на розгортці точки D, що лежить на поверхні призми, спочатку через задану проєкцію D_2 на межі ABKL призми проводять допоміжну пряму, що перетинає нормальний переріз в точці 4. Знаходять проєкцію 44 на натуральній величині нормального перетину, а також натуральну величину відрізка 4D. Потім на прямий m розгортки призми на відрізку 12 відкладають натуральну величину відрізка 14 і через отриману точку проводять вертикальну лінію. На цій лінії і буде лежати шукана точка D на відстані 4D від прямої m.

1.1.2 Спосіб тріангуляції (трикутників)

Цей спосіб дозволяє будувати розгортки будь-якого багатокутника (рис. 8.2) Для цього бічні грані багатогранника розбиваються діагоналями на трикутники (для призм і призматоїдів, у пірамід – грані вже трикутні). Одним з відомих способів необхідно знайти натуральні величини всіх бічних ребер і підстав багатогранника.

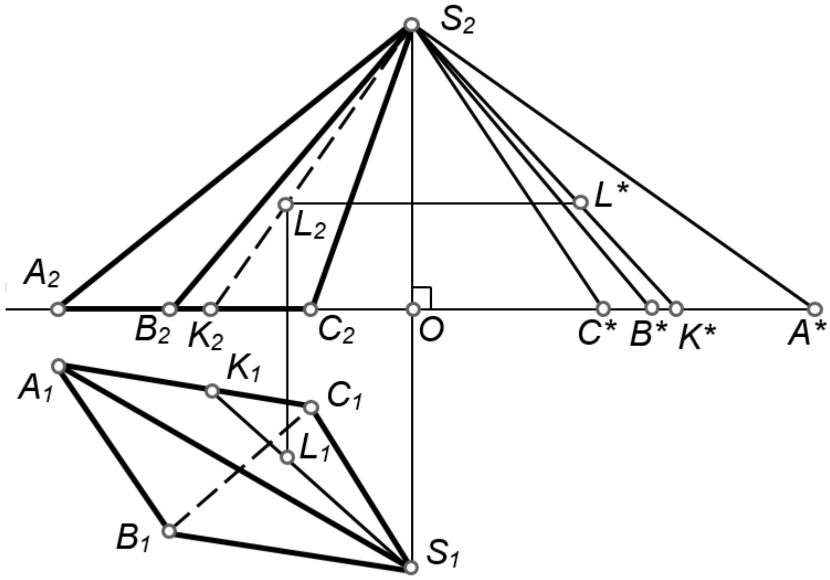


Рисунок 8.2 – Спосіб тріангуляції

Потім на вільному полі креслення послідовно один до одного будуються трикутники бічних граней багатогранника (за трьома сторонами). Отримують розгортку бічної поверхні багатогранника. Доповнивши її підставами, можна отримати повну розгортку багатогранника. На рисунку 8.3 показано побудову розгортки піраміди SABC. Натуральна величина бічних ребер піраміди знаходиться за правилом прямокутного трикутника. Оскільки у всіх бічних ребер однакова різниця висот, прямокутні трикутники зручно будувати на площині $П_2$, прийнявши за перший катет відрізок S2O, що дорівнює різниці висот кінців бічних ребер піраміди.

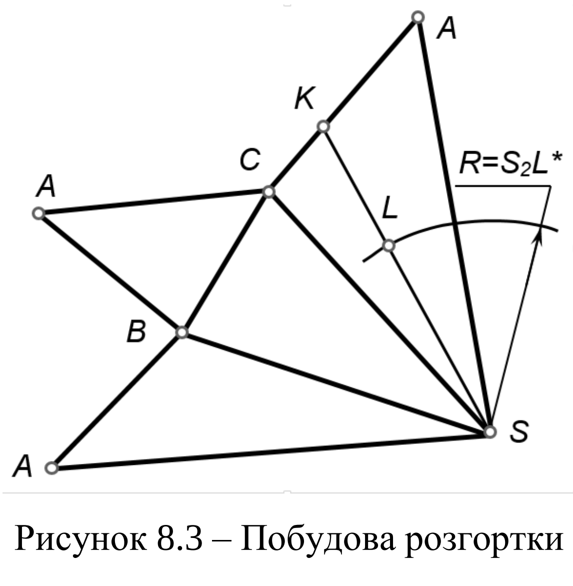


Рисунок 8.3 – Побудова розгортки

Тоді у вигляді другого катета необхідно відкладати відрізки, рівні горизонтальним проєкціям бічних ребер. Після знаходження натуральних величин всіх ребер піраміди приступають до побудови розгортки. Також на рисунку 9.4 показано побудову на розгортці точки L, що лежить на поверхні піраміди. Для цього проведена допоміжна пряма SK, через точку L. Потім на розгортці спочатку будується ця пряма SK, а потім і точка L.

8.3 Побудова наближених розгорток лінійчатих поверхонь

Для розгортних лінійчатих поверхонь будують наближені розгортки, тому що в процесі побудови розгортки задану поверхню замінюють (апроксимують) вписаною в неї або описаною навколо неї багатогранною поверхнею (циліндричні поверхні замінюють призмами, конічні поверхні – пірамідами). Для цього замкнуту направляючу лінійчатої поверхні замінюють багатокутником, а розімкнуту направляючу – ламаною. Через вершини багатокутника (або ламаного) проводять бічні ребра багатогранника. Точну розгортку цього багатогранника приймають за наближену розгортку цієї розгортної поверхні. Точність побудованої розгортки залежить від того, наскільки близький багатогранник до вихідної лінійчатої поверхні. Розгортку багатогранника будують будь-яким з розглянутих способів. Після побудови розгортки бічної поверхні замінної піраміди або призми кінці бічних ребер необхідно з’єднати між собою плавною лінією.

8.4 Побудова умовних розгорток нерозгортних поверхонь

Умовні розгортки нерозгортних поверхонь будують в такій послідовності:

– дану поверхню «розрізають» (розділяють) на кілька приблизно рівних частин;

– кожну з цих частин апроксимують відсіком розгортної лінійчатої поверхні (конуса чи циліндра);

– виконують наближені розгортки відсіків апроксимуючих конусів або циліндрів, сукупність яких приймають за умовну розгортку такої поверхні.

Розрізняють такі способи побудови розгорток нерозгортних поверхонь:

– співвісних циліндрів;

– співвісних конусів;

– неспіввісних циліндрів.

Спочатку сфера розділяється горизонтально проєкціювальними площинами, що проходять через вісь сфери, на кілька рівних частин аналогічно до часточок мандарина (у прикладі – на шість частин). Кожна така частина поверхні обертання замінюється циліндричною проєкціювальною поверхнею, направляюча якої є середня лінія цієї частини поверхні, а твірні перпендикулярні до направляючої площини. На рисунку 8.4 проводяться прямі, паралельні до крайньої лівої частини поверхні сфери. Для цієї частини поверхні направляючою є лінія 1–7, що лежить у площині головного меридіана сфери, а отже, на площину $П_2$ вона проєктується в натуральну величину. Утворені фронтально-проєктуючі прямі перетинають направляючу, відповідно, в точках1, 2, ..., 7. На площину $П_1$ відрізки проєктуються у натуральну величину. Для побудови розгортки циліндричної поверхні її необхідно замінити багатогранною поверхнею. Напрямна циліндричної поверхні приймається за середню лінію багатогранної поверхні, а відрізки стають бічними ребрами цієї поверхні.

Побудова розгортки багатогранної поверхні виконується в такій послідовності:

1) на вільному полі креслення проводиться вертикальна лінія і на ній від довільної точки відкладаються один за одним натуральні величини відрізків 12, 23, 34, 45, 56 і 67 середньої лінії багатогранної поверхні, взяті на $П_2$;

2) через точки 2, 3, 4, 5 і 6 проводяться горизонтальні прямі, на яких відкладають відрізки, рівні натуральним величинам бічних ребер багатогранної поверхні, взяті на $П_1$;

3) знайдені точки з’єднують плавною лінією. Отримаємо точну розгортку багатогранної поверхні, яка приймається за наближену розгортку циліндричної поверхні, що замінює 1/6 частину поверхні сфери;

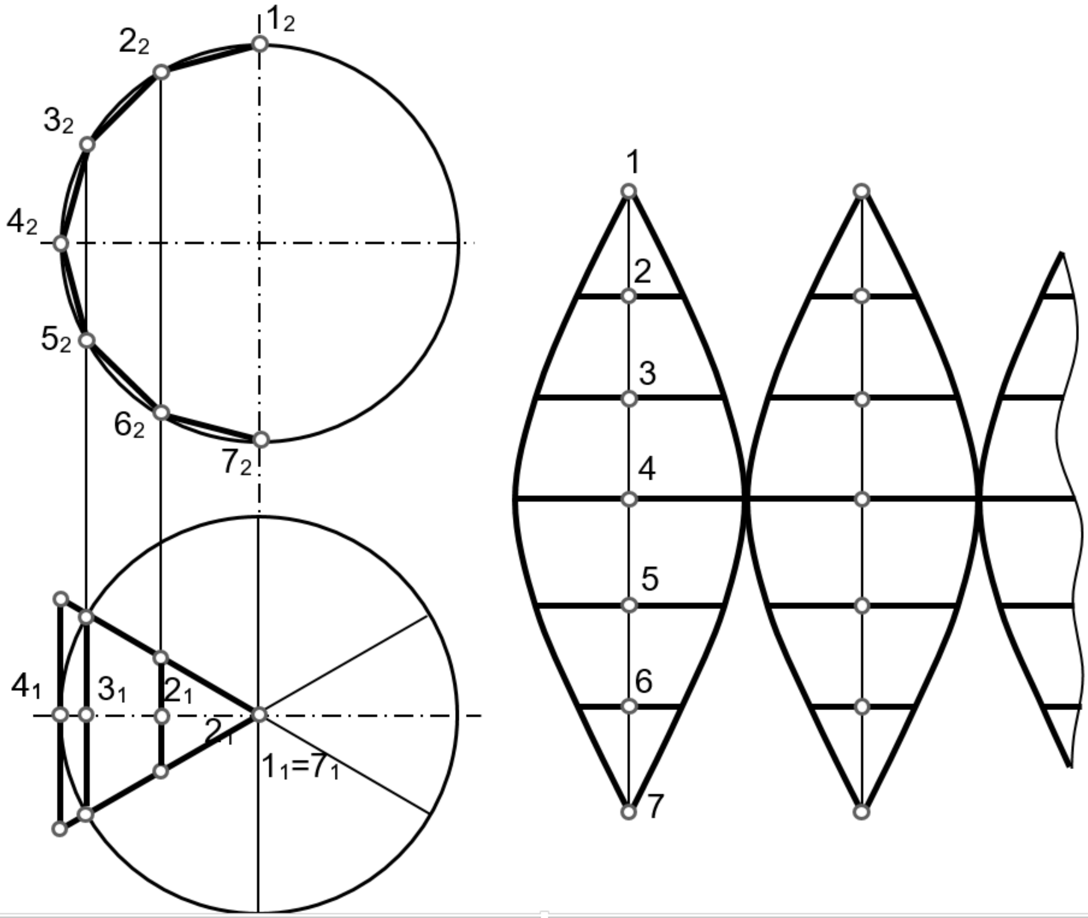


Рисунок 8.4 – Розгортка сфери

4) для побудови умовної розгортки всієї поверхні сфери необхідно добудувати ще п’ять таких розгорток «пелюсток» сфери.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Михайленко В. Є. Інженерна графіка : підручник / [В. Є. Михайленко, В. В. Ванін, С. М. Ковальов] ; за ред. В. Є. Михайленка. – Київ : Каравела, 2012. – 368 с.

2. Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка : [навчально-методичний посібник] / П. П. Волошкевич, О. О. Бойко, Б. В. Панкевич, Є. В. Мартин, А. Л. Беспалов. – Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2007. – 239 с.

3. ДСТУ ISO 5456-1:2006. Кресленики технічні. Методи проеціювання. Частина 1. Загальні положення (ISO 5456-1:1996, IDT). – Чинний від 2008–01–01. – Київ : Держспоживстандарт України, 2008. – 11 с.

4. ДСТУ ISO 5456-2:2005. Кресленики технічні. Методи проеціювання. Частина 2. Ортогональні зображення (ISO 5456-2:1996, IDT). – Чинний від 2007–04–01. – Київ : Держспоживстандарт України, 2007. – 14 с.

5. ДСТУ ISO 5456–3:2006 Кресленики технічні. Методи проеціювання. Частина 3. Аксонометричні зображення (ISO 5456–3:1996, IDT). – Чинний від 2008–01–01. – Київ : Держспоживстандарт України, 2008. – 12 с.

6. ДСТУ ISO 5456–4:2006 Кресленики технічні. Методи проеціювання. Частина 4. Центральне проеціювання (ISO 5456–4:1996, IDT). – Чинний від 2008–01–01. – Київ : Держспоживстандарт України, 2008. – 27 с.

7. ДСТУ ISO 128–20:2003 Кресленики технічні. Загальні принципи подавання. Частина 20. Основні положення про лінії (ISO 128–20:1996, IDT). – Чинний від 2004–07–01. – Київ : Держспоживстандарт України, 2003. – 10 с.

Електронне навчальне видання

ГЕРАСИМЕНКО Володимир Віталійович
БЄЛИХ Ірина Михайлівна

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної форми навчання зі спеціальності 133 – Галузеве машинобудування)

Відповідальний за випуск *І. М. Бєлих*
Редактор *М. О. Гаман*
Комп'ютерне верстання *І. М. Бєлих*

План 2024, поз. 93Л

Підп. до друку 02.07.2024. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 5,5.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017