

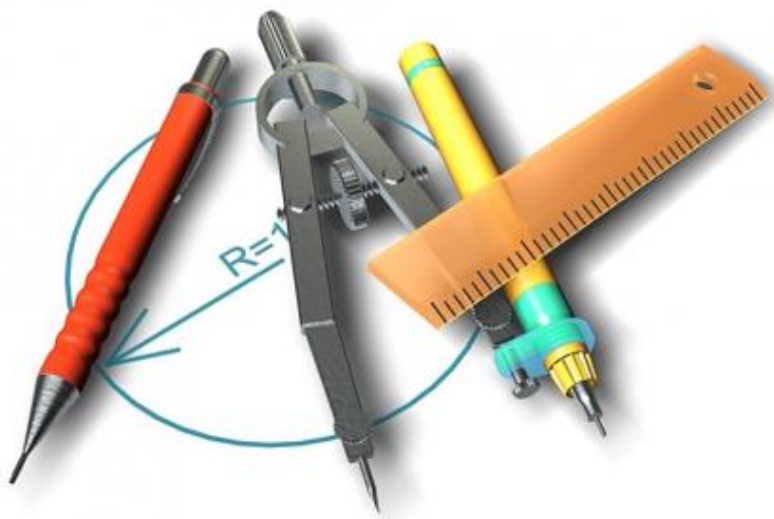
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до організації самостійної роботи, проведення практичних занять
та виконання розрахунково-графічних робіт
з навчальної дисципліни

«ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА»

Частина 1 Нарисна геометрія
(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
зі спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія та технології,
194 – Гідротехнічне будівництво, інженерія та водні технології)



Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2024

Методичні рекомендації до організації самостійної роботи, проведення практичних занять та виконання розрахунково-графічних робіт з навчальної дисципліни «Інженерна та комп'ютерна графіка». Частина 1 Нарисна геометрія (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 194 – Гідротехнічне будівництво, інженерія та водні технології) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. В. І. Лусь. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 97 с.

Укладач канд. техн. наук, проф. В. І. Лусь

Рецензент

О. Ю. Усачова, доцент, кандидат архітектури, доцент кафедри цифрового моделювання і графіки Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою цифрового моделювання та графіки, протокол № 10 від 26 квітня 2024 р.

Методичні рекомендації складені відповідно до робочої програми курсу «Інженерна та комп'ютерна графіка», містять креслення завдань, текстові умови завдань, контрольні питання по основних розділах курсу. У них передбачене місце для геометричних побудов, що виконуються студентами в аудиторії і поза нею. Можуть бути корисними для студентів інших технічних та будівельних спеціальностей, які вивчають нарисну геометрію.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
Перелік тем із нарисної геометрії для самостійної роботи студентів.....	7
Як зрозуміти нарисну геометрію?.....	8
Список джерел, рекомендованих до вивчення.....	9
Умовні позначення.....	9
Стандарти ЄСКД (ДСТУ), вимоги до виконання графічних робіт.....	11
ТЕМА 1 ТОЧКА ТА ЇЇ ПРОЄКЦІЇ.....	14
Домашні задачі.....	17
Аудиторні задачі.....	18
ТЕМА 2 ПОЛОЖЕННЯ ПРЯМОЇ В СИСТЕМІ ПЛОЩИН ПРОЄКЦІЙ. ДІЙСНА ДОВЖИНА ВІДРІЗКА ПРЯМОЇ. ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ. СЛІДИ ПРЯМОЇ.....	20
Домашні задачі.....	25
Аудиторні задачі.....	26
ТЕМА 3 ПЛОЩИНА. ТОЧКА І ПРЯМА В ПЛОЩИНІ.....	27
Домашні задачі.....	29
Аудиторні задачі.....	30
ТЕМА 4 ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ.....	32
Домашні задачі.....	32
Аудиторні задачі.....	34
ТЕМА 5 ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ. ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ З ПЛОЩИНОЮ.....	35
Приклад розв'язання задачі на перетин прямої і площини.....	36
Домашні задачі.....	37
Аудиторні задачі.....	38
ТЕМА 6 ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ. ПЕРЕТИН ДВОХ ПЛОЩИН.....	39
Приклад розв'язання задачі на перетин двох площин.....	39
Домашні задачі.....	41
Аудиторні задачі.....	41

ТЕМА 7 СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ:	
СПОСІБ ЗАМІНИ ПЛОЩИН ПРОЄКЦІЙ.....	42
Домашні задачі.....	44
Аудиторні задачі.....	45
ТЕМА 8 СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ:	
СПОСІБ ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ПРОЄКТУЮЧОЇ ПРЯМОЇ.....	47
Домашні задачі.....	49
Аудиторні задачі.....	49
ТЕМА 9 СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ:	
СПОСІБ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМІЩЕННЯ.....	50
Домашні задачі.....	52
Аудиторні задачі.....	52
ТЕМА 10 ПОВЕРХНІ.....	53
Домашні задачі.....	56
Аудиторні задачі.....	54
ТЕМА 11 ПЕРЕРІЗ ПОВЕРХНІ ПРОЄКТУЮЧОЮ ПЛОЩИНОЮ	
І ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ ПРЯМОЮ ЛІНІЄЮ.....	60
Домашні задачі.....	62
Аудиторні задачі.....	66
ТЕМА 12 ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ ПЛОЩИНОЮ ЗАГАЛЬНОГО	
ПОЛОЖЕННЯ.....	69
Домашні задачі.....	70
Аудиторні задачі.....	71
ТЕМА 13 ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ. СПОСОБИ ПОБУДОВИ	
ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ.....	72
Короткі теоретичні відомості про способи побудови лінії взаємного	
перетину поверхонь.....	73
Особливі випадки перетину поверхонь.....	75
Теорема Монжа.....	75
Теорема про форму проєкцій лінії перетину.....	76

Домашні задачі.....	77
Аудиторні задачі.....	79
ТЕМА 14 РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ.....	81
Домашні задачі.....	82
Аудиторні задачі.....	83
ТЕМА 15 АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЄКЦІЇ.....	85
Теорема Польке.....	86
Побудова кола в прямокутній ізометрії.....	88
Побудова кола в прямокутній диметрії.....	88
Домашні задачі.....	89
Аудиторні задачі.....	90
ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ЕПЮРІВ.....	92
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	94
Додаток А.....	95
Додаток Б.....	96

ВСТУП

Нарисна геометрія – наука, що вивчає просторові форми та способи їхнього зображення на площині. Основним завданням цієї науки є розроблення методів побудови зображень і способів розв’язання просторових задач за допомогою комплексних креслень. Нарисна геометрія має особливе значення у розвитку просторової уяви, необхідної для становлення сучасного інженера у своїй професійній діяльності.

Прямою задачею нарисної геометрії є побудова комплексного креслення предмета. Обернена задача полягає у відновленні форми, розмірів і взаємного розміщення предметів за їхніми кресленнями.

Задачі нарисної геометрії також поділяються на *позиційні* та *метричні*.

Позиційні задачі стосуються встановлення взаємного розміщення геометричних об’єктів (належність, перетин, паралельність тощо).

Метричні задачі пов’язані з визначенням числових характеристик (відстань, кут, площа, об’єм).

Уміння досконало володіти ґрунтовними знаннями з побудови графічних зображень є показником рівня досвідченості майбутнього фахівця.

Методична розробка призначена для студентів Навчально-наукового інституту будівництва та цивільної інженерії, спеціальності 194 – Гідротехнічне будівництво інженерія та водні технології (шифр дисципліни за ОПП ОК8) та Навчально-наукового інституту енергетичної, інформаційної та транспортної інфраструктури спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія та технології (шифр дисципліни за ОПП 03) денної форми навчання, які вивчають дисципліну «Нарисна геометрія».

Графічні завдання розміщені у цій розробці за порядком викладання лекційного матеріалу. Послідовне і своєчасне розв’язання задач дає змогу вдосконалити рівень засвоєння попереднього й орієнтує на розуміння наступного матеріалу.

Графічні завдання, розміщені у методичній розробці, розв’язуються із використанням креслярських інструментів.

ПЕРЕЛІК ТЕМ ІЗ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

1. Метод нарисної геометрії. Центральне і паралельне проєціювання. Властивості паралельного проєціювання. Різноманітні методи відображення просторових форм на площині.

2. Проєціювання точки на дві і три площини проєкцій. Координати точки. Комплексне креслення точки. Різноманітні положення точки в системі двох і трьох площин проєкцій.

3. Проєціювання прямої на дві і три площини проєкцій. Прямі загального і окремого положення. Визначення натуральної довжини відрізка прямої загального положення і кутів нахилу її до площин проєкцій.

4. Точка і пряма. Прямі, що перетинаються, паралельні та мимобіжні. Конкуруючі точки. Проєкції прямого кута.

5. Задання площини на кресленні. Положення площини щодо площин проєкцій.

6. Точка і пряма в площині. Головні лінії площини. Побудова плоских фігур, розташованих у площині.

7. Побудова взаємно паралельних прямої і площини та двох площин.

8. Побудова лінії перетину двох площин.

9. Побудова точки перетину прямої із площиною.

10. Побудова взаємно перпендикулярних прямої і площини та двох площин.

11. Сутність способу заміни площин проєкцій і застосування його до розв'язання чотирьох основних задач.

12. Застосування способу заміни площин проєкцій для визначення відстаней між двома прямими і двогранными кутів.

13. Побудова лінії перетину прямих і похилих призм і пірамід площиною.

14. Побудова розгорток прямих призм та пірамід.

15. Побудова лінії перетину кривої поверхні з площиною.

16. Побудова точок перетину прямої з кривою поверхнею (конусом, циліндром, сферою).

17. Побудова розгортки прямих циліндрів та конусів.

18. Побудова лінії взаємного перетину двох кривих поверхонь за допомогою допоміжних площин та сфер-посередників.

19. Розгортки. Способи побудови розгортки.

20. Аксонометричні проєкції. Основні поняття і визначення. Класифікація аксонометричних проєкцій. Зв'язок між показниками спотворення.

21. Стандартні аксонометричні проєкції. Побудова зображень кола в аксонометричних проєкціях.

Як зрозуміти нарисну геометрію?

1. Одне з головних правил – займайтеся систематично. У жодному випадку не пропускайте лекції, акуратно ведіть конспекти, самостійно виконуйте креслення. Навіть у такій непростій науці навчання йде від простого до складного, тому якщо ви не зрозумієте чогось на початковому етапі навчання, далі вникнути в суть буде ще складніше.

2. Скористайтеся навчальними посібниками. Найпопулярніші серед студентів-техніків книги – «Нарисна геометрія» за редакцією В. Є. Михайленка і «Практикум з нарисної геометрії» за редакцією В. І. Луся. Ці видання містять глибокий теоретичний матеріал і допоможуть заповнити пропуски в лекціях.

3. Прагніть не запам'ятовувати теореми, формулювання механічно, а глибоко розібратися в теорії і зрозуміти саму модель розв'язання типової задачі. Не потрібно думати, що матеріал простий і вже досконально зрозумілий, краще ще раз перевірити вже зроблене завдання.

4. Кожну тему теоретичної частини підручника теж потрібно прочитати двічі. Після прочитання законспекуйте матеріал, відзначаючи головні та істотні відомості.

5. При розв'язанні задачі уважно прочитайте умову і уявіть собі задану фігуру в просторовому зображенні. Потім сплануйте основну дорогу роздумів і лише потім розпочинайте пошук самого розв'язку.

6. На початковому етапі, читаючи умови, робіть прості зарисовки і моделі, які допоможуть краще зорієнтуватися в тривимірному просторі. Надалі всі попередні операції потрібно буде навчитися робити на проєкційних зображеннях. Тоді зарисовки вам вже не знадобляться.

7. Якщо під час вивчення курсу виникли труднощі, зверніться за консультацією до викладача. Ніхто не відмовить вам у допомозі, а ви уникнете пропуску в знаннях. Можна також попросити про допомогу студентів старших курсів або скористатися їхніми конспектами.

8. Якщо ви відчуваєте, що наука вам не дається, найміть репетитора. Можливо, індивідуальне пояснення допоможе вам швидше зорієнтуватися у світі просторових фігур. Проте вартість таких занять буде доволі високою.

Список джерел, рекомендованих до вивчення

Джерела, які вам стануть у пригоді для підготовки до занять: [3, 4, 5, 6, 7]. Шукайте ці джерела у списку літератури наприкінці цих методичних рекомендацій.

Умовні позначення

Точки позначають великими літерами латинського алфавіту (A, B, C, ...) і цифрами (1, 2, 3, ...).

Лінії позначають малими літерами латинського алфавіту: a, b, c, d, e, ...

Площини позначають великими літерами грецького алфавіту: Σ , Θ , Δ , ...

Проекції точок, ліній і площин позначають тими самими літерами, що й оригінали, тільки з індексами, які відповідають індексам площин проєкцій: A_1 , A_2 , A_3 , ...; a_1 , a_2 , a_3 , ..., Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 , ...

Знаки, які визначають відношення між геометричними образами, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Умовні позначення

Знак	Значення знака	Приклад читання символічного запису
1	2	3
=	Результати дії	–
$\subset \in$	Належність; належність точки множині	$l \in \Sigma$ - пряма l належить площині Σ
\ni	Включення; включення точки множиною	$\Sigma \ni M$ - площина Σ містить точку M (Σ проходить через точку M)
\cup	З'єднання	$A \cup B = AB$ - з'єднання A і B є AB
\cap	Перетин	$K = l \cap \Sigma$ - точка K є результатом перетину прямої l з площиною Σ
\parallel	Паралельність	$g \parallel \Delta$ - пряма g паралельна площині Δ
\perp	Перпендикулярність	$q \perp \Omega$ - пряма q перпендикулярна до площини Ω
$\not\parallel$	Символ мимобіжних прямих	$m \not\parallel n$ - прями m і n мимобіжні
\wedge	Значення кута	$l \wedge \Sigma$ - значення кута між прямою l і площиною Σ
[]	Відстань	$[AB]$ - відстань від точки A до точки B

Продовження таблиці 1

1	2	3
\equiv	Збіг, тотожність	$A \equiv B$ – точки А і В збігаються
\curvearrowright	Обертання	$A \curvearrowright h$ – точка А обертається навколо h
\rightarrow	Перехід від одного положення до іншого (перетворення)	$\frac{P_2}{P_1} \rightarrow \frac{P_4}{P_1}$ – перехід від системи $\frac{P_2}{P_1}$ до системи $\frac{P_4}{P_1}$

Стандарти ЄСКД (ДСТУ), вимоги до виконання графічних робіт

РОЗМІРИ ТА ПОЗНАЧЕННЯ ФОРМАТІВ

Запишіть розміри основних форматів згідно з вимогами ГОСТ 2.301-68 (ДСТУ ISO 5457:2005).

Таблиця 2 – Основні формати

ФОРМАТИ				
A0	A1	A2	A3	A4
841 × 1189				

МАСШТАБИ

У таблиці вкажіть масштаби зображень на кресленні відповідно до ГОСТ 2.302-68 (ДСТУ ISO 5455:2005).

Таблиця 3 – Масштаби

Натуральна	1 : 1
Масштаби	1 : 2; 1 : 2,5;
Масштаби	2 : 1; 2,5 : 1;

ТИПИ ЛІНІЙ

У таблиці (рис. 1) відповідно до ГОСТ 2.303-68 (ДСТУ 128-1:2005) накресліть лінії.

Найменування	Зображення	Ручне креслення типу ліній	Товщина лінії відносно товщини суцільної основної лінії
Суцільна основна			S
Суцільна тонка			$S/3$ $S/2$
Суцільна хвиляста			$S/3$ $S/2$
Штрихова			$S/3$ $S/2$
Штрих-пунктирна тонка			$S/3$ $S/2$
Розімкнута			S $1,5S$

Рисунок 1 – Типи ліній

ГОСТ 2.304-81(ДСТУ ISO 3098-0:2006) встановлює креслярські шрифти (рис. 2).

Розмір шрифту h – висота прописних літер у міліметрах: 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40.



Рисунок 2 – Шрифт типу В з нахилом 75°

АБВГДЕЕЖЗИЙК

ЛМНОПРСТУФХЦЧ

ШЩЮЯЬ

абвгдеєжзиіїк

лмнопрстуфхцчш

щюяь

A B C D E F G H I J K L M N

O P Q R S T U V W X Y Z

a b c d e f g h i j k l m n o p

q r s t u v w x y z

Продовження рисунка 2

ТЕМА 1 ТОЧКА ТА ЇЇ ПРОЄКЦІЇ

Література: [1. Розд. I, 1.1–1.4, с. 6–12, розд. 3, 3.1, с. 25–28; 2. 1.2. с. 6–7; 3. Розд. 1, 1.1–1.11, с. 7–22].

ЗАПИТАННЯ

1. Що означає вираз «ортогональне проєктування»?
2. Що таке епюр Монжа?
3. Перерахуйте всі елементи епюра точки.
4. Чи присутній сам об'єкт на епюрі?
5. Що таке лінія проєкційного зв'язку?
6. Скільки проєкцій необхідно для визначення точки в просторі?
7. Яка графічна особливість в зображенні точки, яка належить площині проєкцій?
8. Які точки називаються конкуруючими? Як визначити видимість конкуруючих точок? Як позначити видимість конкуруючих точок?

ВІДПОВІДІ

1. Orto – прямий, gonios – кут.

Прямокутне проєктування, тобто об'єкт проєктується на площину променями, перпендикулярними (ортогональними) до площини проєкцій.

2. Епюр Монжа, або креслення Монжа – це плоске креслення, у якому проєктування ведеться на 2 або 3 взаємно перпендикулярні площини. Він утворюється в результаті поєднання площин Π_1 і Π_3 з площиною Π_2 зі всім тим, що на цю площину спроектоване. Названий на честь засновника нарисної геометрії – Гаспара Монжа.

3. Площини проєкцій Π_1 , Π_2 , Π_3 осі Ox , Oy , Oz , лінії проєкційного зв'язку проєкції точки: A_1 – горизонтальна проєкція точки A , A_2 – фронтальна проєкція точки A , A_3 – профільна проєкція точки A (рис. 3).

4. На епюрі переважно присутні проєкції об'єкта. Але якщо об'єкт (точка, пряма, площина) належить площині, то він лежить в цій площині (рис. 5).

5. Пряма лінія, що сполучає або зв'язує різнойменні проєкції точки і перпендикулярна осі, що розділяє їх, називається *лінією проєкційного зв'язку* або лінією зв'язку (рис. 4).

6. Вистачає двох проєкцій.

7. Якщо точка належить площині проєкцій, то дві її проєкції знаходяться на осі, а третя збігається з точкою.

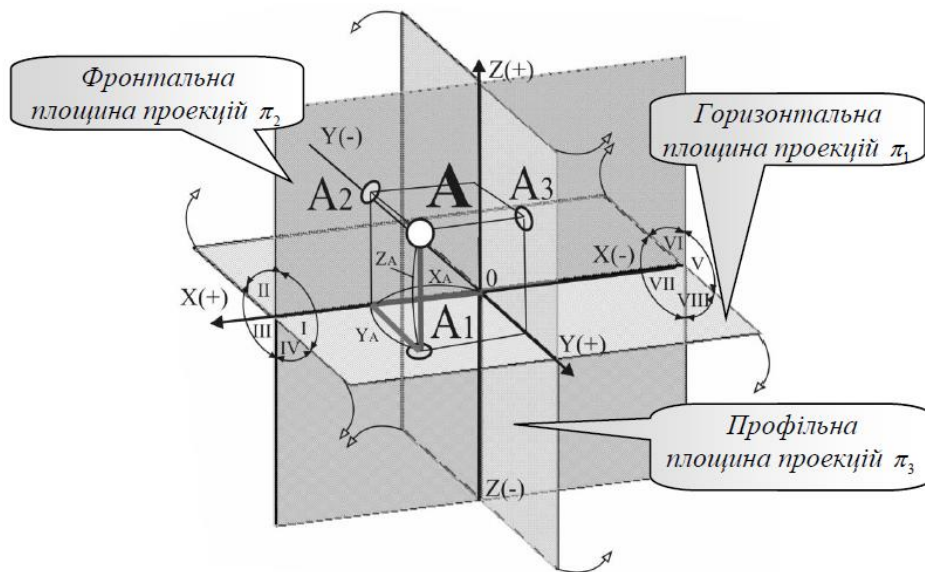


Рисунок 3 – Точка та її проєкції [9, с. 4]

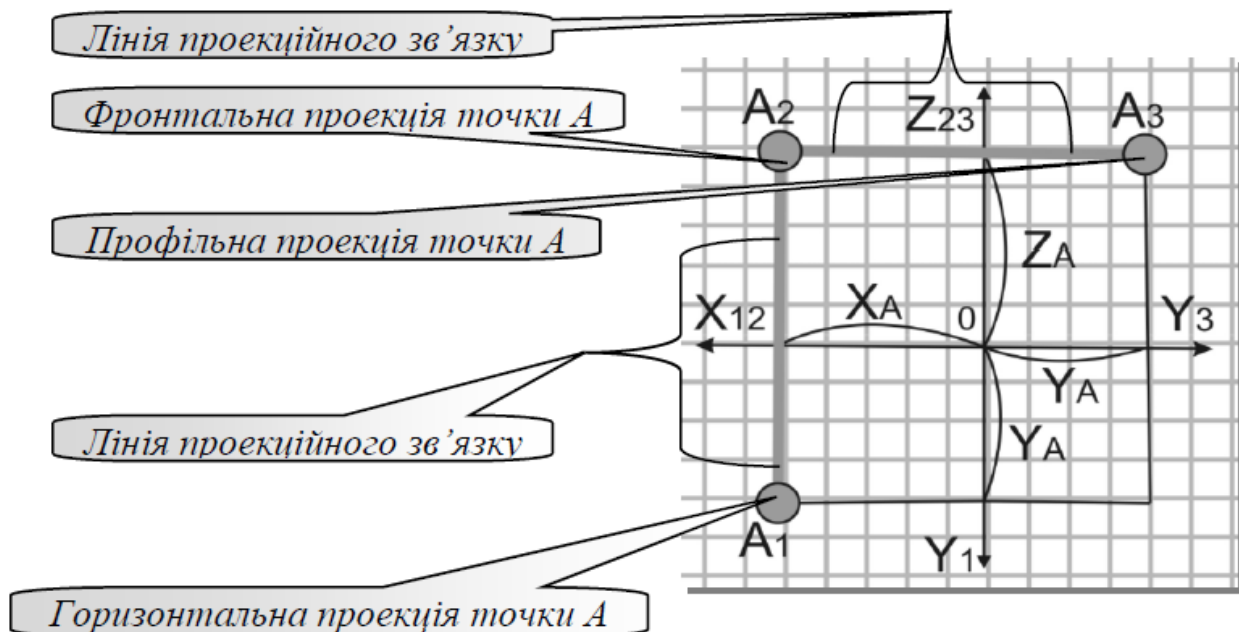


Рисунок 4 – Комплексне креслення (епюр Монжа) [9, с. 4]

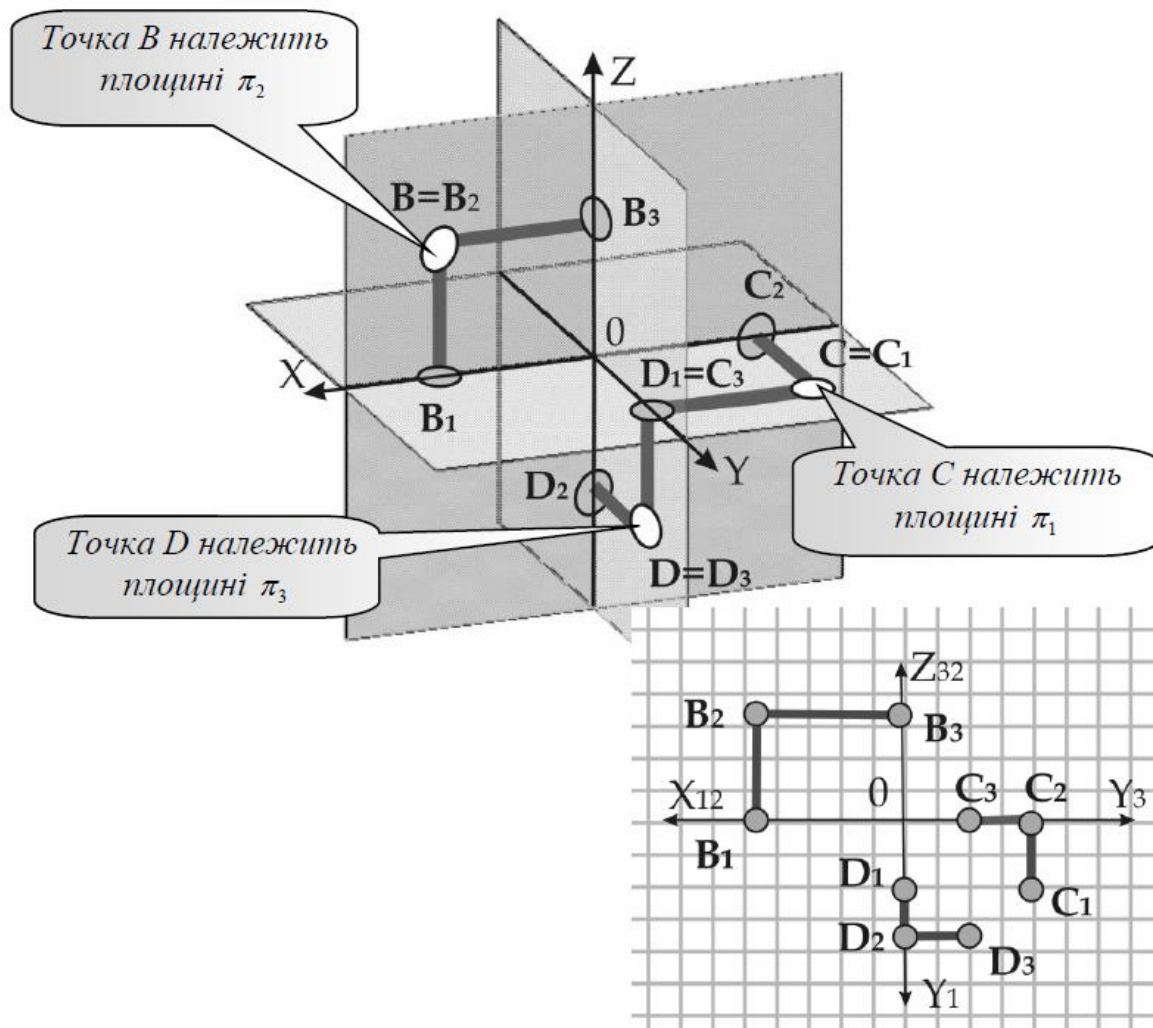


Рисунок 5 – Точки на площинах проєкцій та їхні комплексні креслення [9, с. 5]

8. Конкуруючі точки – це точки, розташовані на одній проєктуючій прямій (рис. 6). Видима та, чия проєкція (з двох незбіжних проєкцій) вище або ближче до спостерігача. Невидима точка – у дужках.

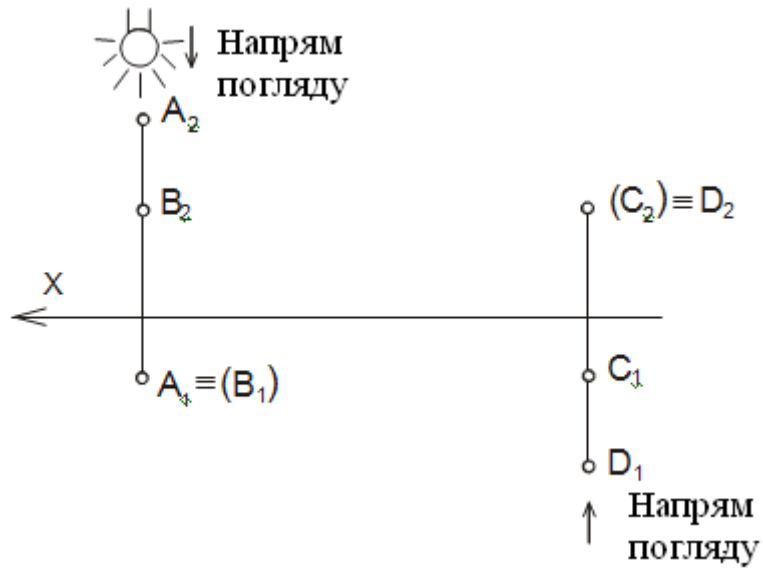
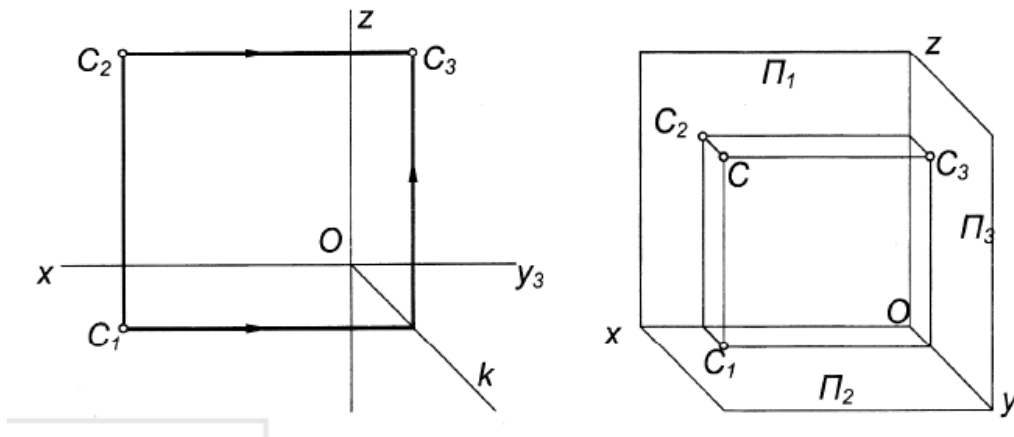


Рисунок 6 – Конкуруючі точки

Домашні задачі

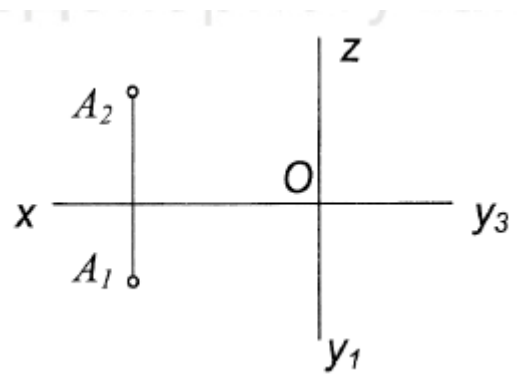
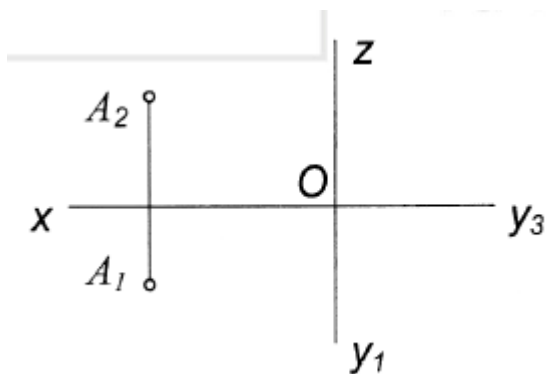
1. Побудувати зображення точок $A(25; 20; 15)$ і $B(20; 25; 0)$ у фронтальній диметрії і на комплексному кресленні – за зразком точки C .



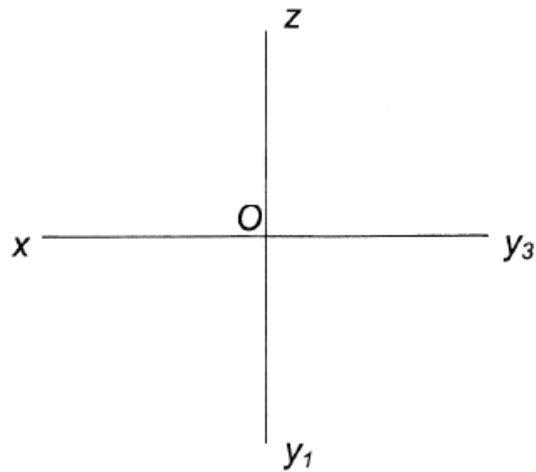
2. Побудувати проєкцію A_3 за заданими проєкціями A_1, A_2 :

координатним способом

проєкційним способом

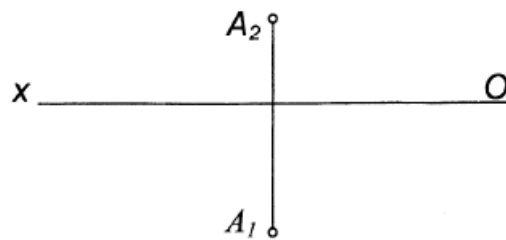
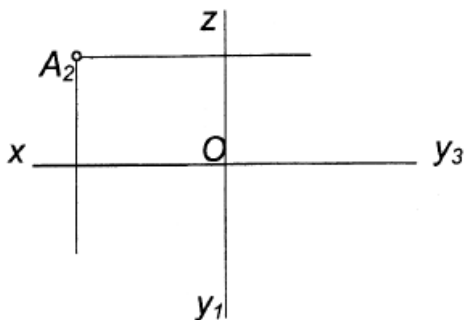


3. Побудувати проєкції точок А, В, С, D так, щоб точка А належала площині Π_2 ; В – площині Π_1 ; С – осі Ox ; D – була рівновіддалена від площин проєкцій (значення координат беруться довільними):



4. За проєкцією A_2 побудувати проєкції A_1 і A_3 , так щоб $Z_A = 2 Y_A$.

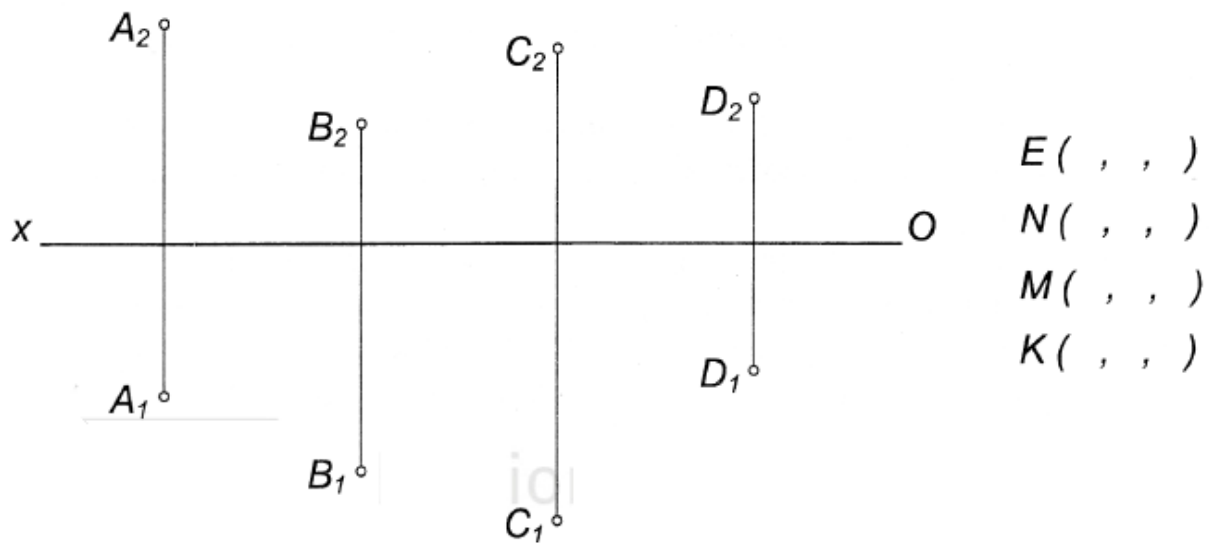
5. У площині Π_1 побудувати ГМТ Віддалених від точки А на 20 мм.



Аудиторні задачі

6. Задано точки А, В, С, D. Побудувати:

- а) точку Е, розміщену під точкою А на відстані 15 мм;
- б) точку N, розміщену над точкою В на відстані 20 мм;
- в) точку М, розміщену за точкою С на відстані 10 мм;
- г) точку К, розміщену перед точкою D на відстані 5 мм.



Виміряти та записати координати точок.

ТЕМА 2 ПОЛОЖЕННЯ ПРЯМОЇ В СИСТЕМІ ПЛОЩИН ПРОЄКЦІЙ. ДІЙСНА ДОВЖИНА ВІДРІЗКА ПРЯМОЇ. ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ. СЛІДИ ПРЯМОЇ

Література: [1. Розд. 3, 3.2, с. 28–32; 2. Част.1, 1.2. с. 8; 3. Розд. 2, 2.1–2.6, с. 23–32].

ЗАПИТАННЯ

1. Скільки проєкцій точок необхідно, щоб задати пряму на кресленні (епюрі)?
2. Сформулюйте властивість приналежності точки прямій лінії.
3. Перерахуйте лінії рівня і вкажіть їхні графічні ознаки.
4. Які прямі називають проєктуючими? Перерахуйте їхні графічні ознаки.
5. На підставі теореми прямого кута сформулюйте графічну ознаку зображення прямого кута на епюрі.
6. Як відрізнити на епюрі прямі, що перетинаються від мимобіжних?
7. Які точки називаються точками уявного перетину?
8. Як визначити натуральну величину відрізка методом прямокутного трикутника?
9. Як знайти горизонтальний і фронтальний сліди прямої?

ВІДПОВІДІ

1. Достатньо проєкцій двох точок, (рис. 7).

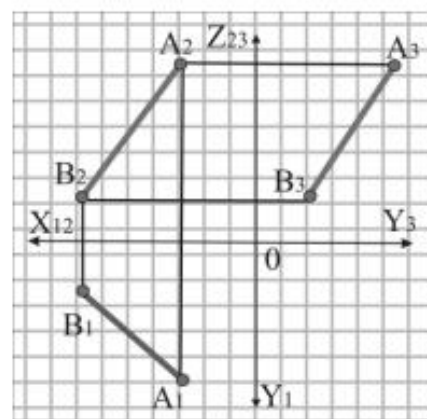
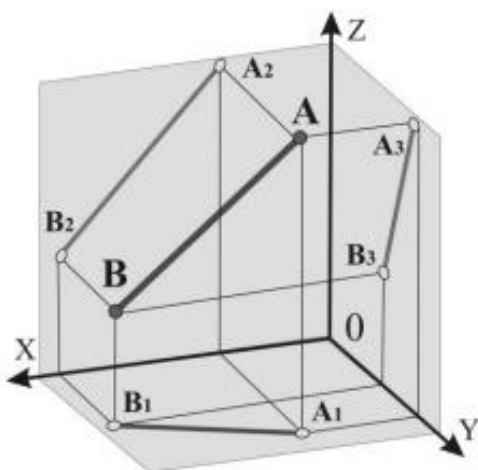


Рисунок 7 – Пряма загального положення [9, с. 10]

2. Якщо точка лежить на прямій, то її проєкції повинні лежати на однойменних проєкціях цієї прямої.

3. Горизонталь h – це пряма $\parallel \Pi_1, h_2 \parallel O_x, h_1 =$ натуральна величина, α – кут нахилу до Π_1 , (рис. 8). Фронталь f – це пряма $\parallel \Pi_2, f_1 \parallel O_x, f_2 =$ натуральна величина, β – кут нахилу до Π_2 , (рис. 9). Профільна пряма p – це пряма $\parallel \Pi_3, p_1 \perp O_x \perp p_2, p_3 =$ натур. Величина, α, β – кути нахилу.

4. Проектуюча пряма – це пряма, перпендикулярна площині проєкцій. На епюрі однойменна проєкція проектуючої прямої згортається в точку (слід), інша проєкція $\perp O_x$ і є натуральною величиною, (рис. 8 і рис. 9).

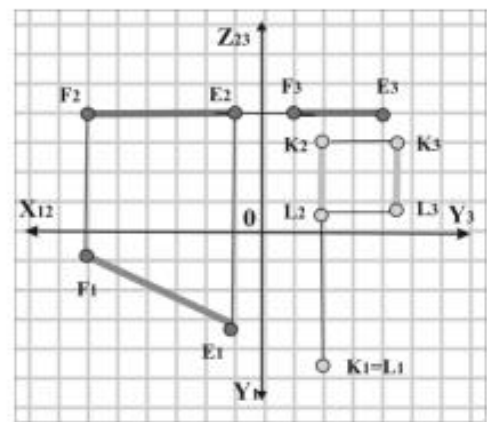
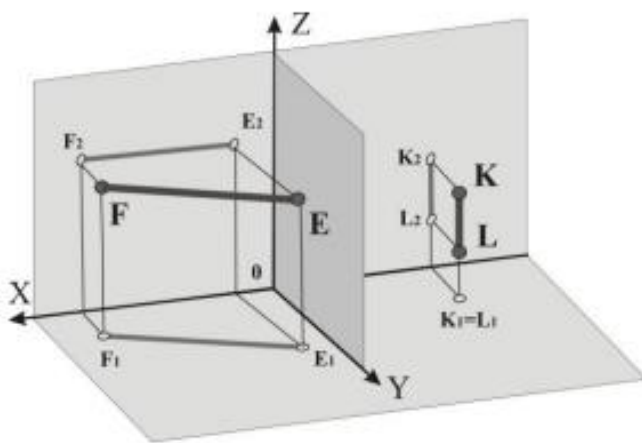


Рисунок 8 – Пряма горизонтального рівня та пряма горизонтально-проектуюча [9, с. 10]

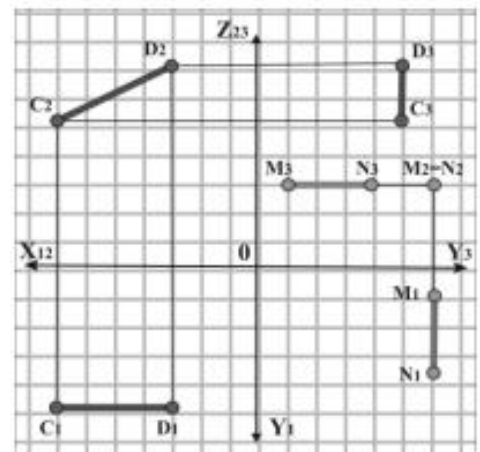
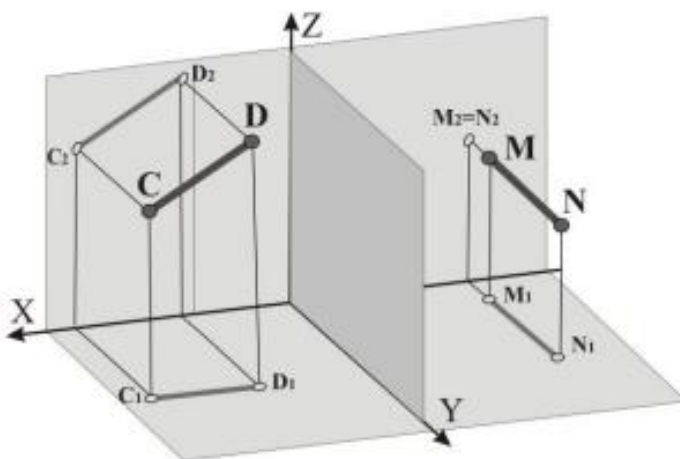


Рисунок 9 – Пряма фронтального рівня та пряма фронтально-проектуюча [9, с. 10]

5. Теорема: якщо одна сторона прямого кута паралельна площині проєкцій, а друга не перпендикулярна їй, то на цю площину прямий кут

проектується у натуральну величину. Отже, на одній з площин проєкцій сторона прямого кута паралельна осі, а на протилежній площині проєкцій кут = 90° .

6. У прямих, які **перетинаються**, точки перетину їхніх однойменних проєкцій знаходяться на одній лінії проєкційного зв'язку (рис. 10). У прямих, які є **мимобіжними**, однойменні проєкції можуть і перетинатися, але точки перетину не лежать на одній лінії проєкційного зв'язку (рис. 11 і рис. 12).

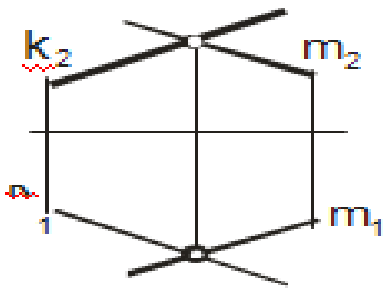


Рисунок 10 – Прямі перетинаються

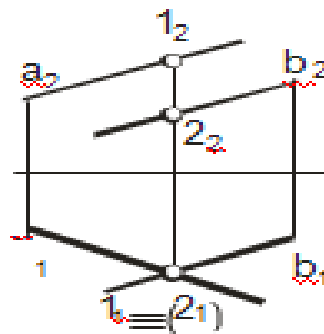


Рисунок 11 – Прямі мимобіжні

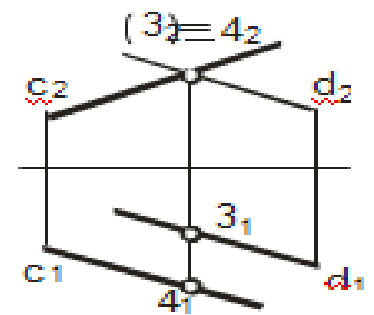


Рисунок 12 – Прямі мимобіжні

7. Точки, у яких перетинаються проєкції прямих, які є мимобіжними, називають уявними точками перетину. Ці точки є конкуруючими точками. На рисунку 11 це точки 1 і 2. На рисунку 12 це точки 3 і 4.

8. **Натуральна величина відрізка** – це гіпотенуза прямокутного трикутника, один катет якого є проєкцією відрізка, а інший дорівнює різниці координат іншої проєкції відрізка (рис. 13, рис. 14 і рис. 15).

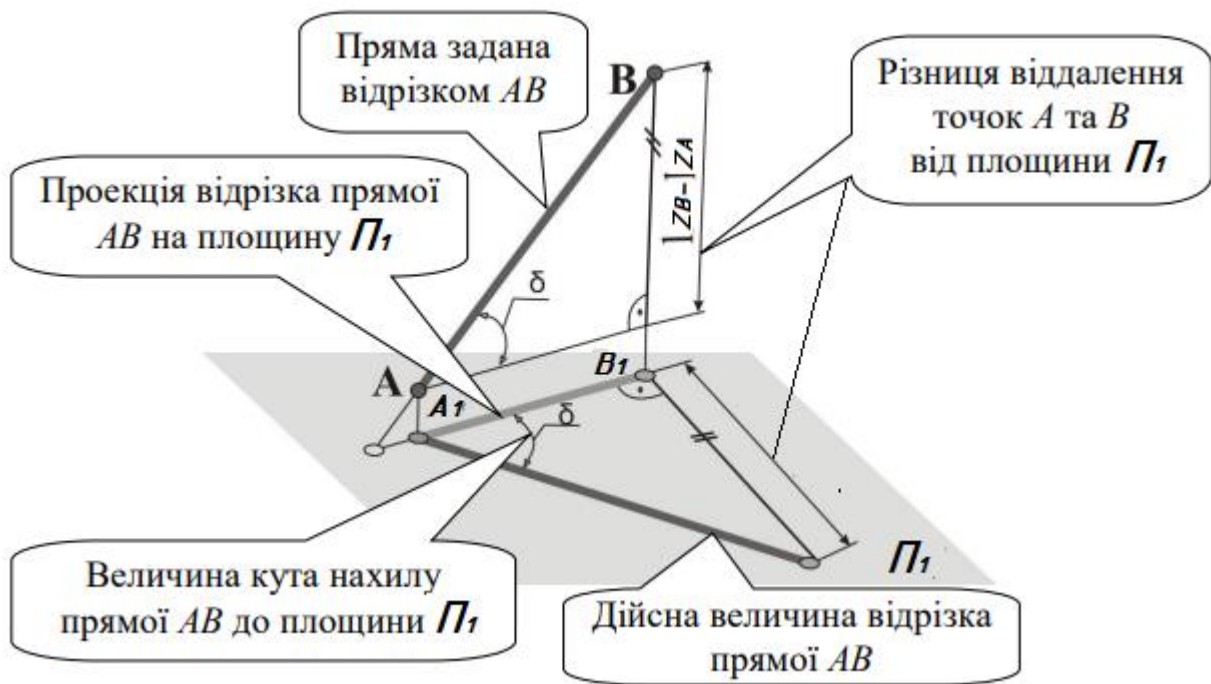


Рисунок 13 – Дійсна довжина відрізка прямої загального положення (правило прямокутного трикутника) [9, с. 12]

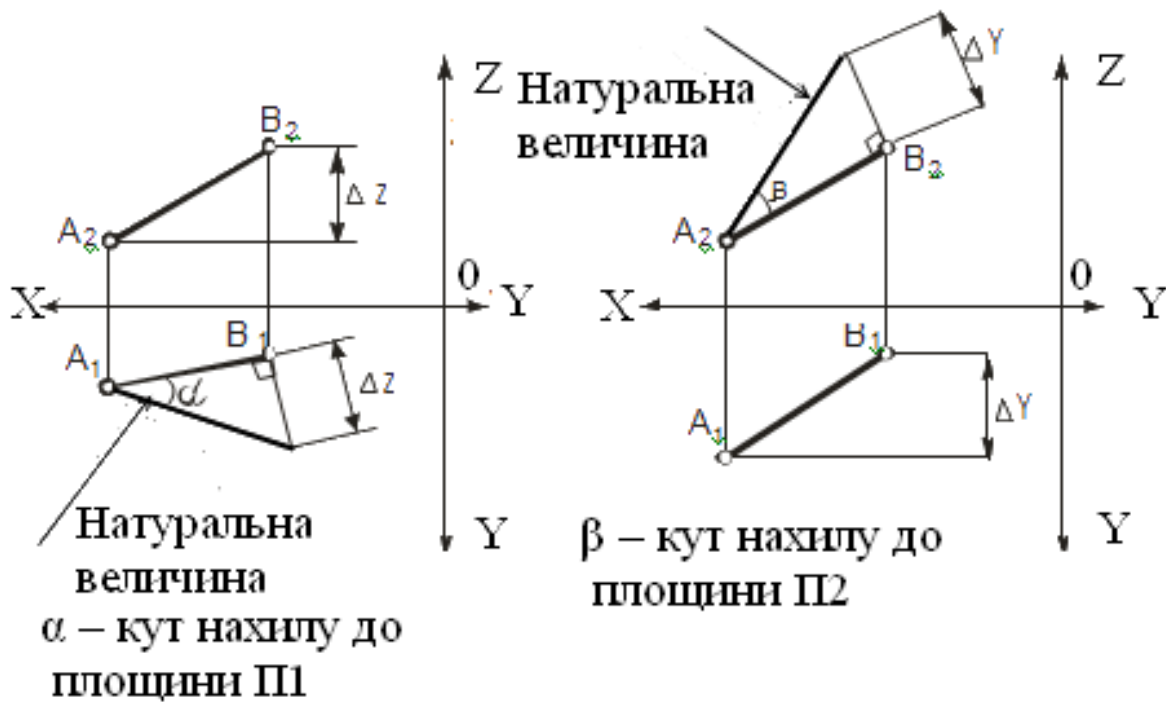


Рисунок 14 – Натуральна величина відрізка на П1

Рисунок 15 – Натуральна величина відрізка на П2

9. Необхідно продовжити проєкцію прямої до перетину з віссю Ox і через отриману точку провести лінію проєкційного зв'язку до перетину з протилежною проєкцією (рис. 16 і рис. 17).

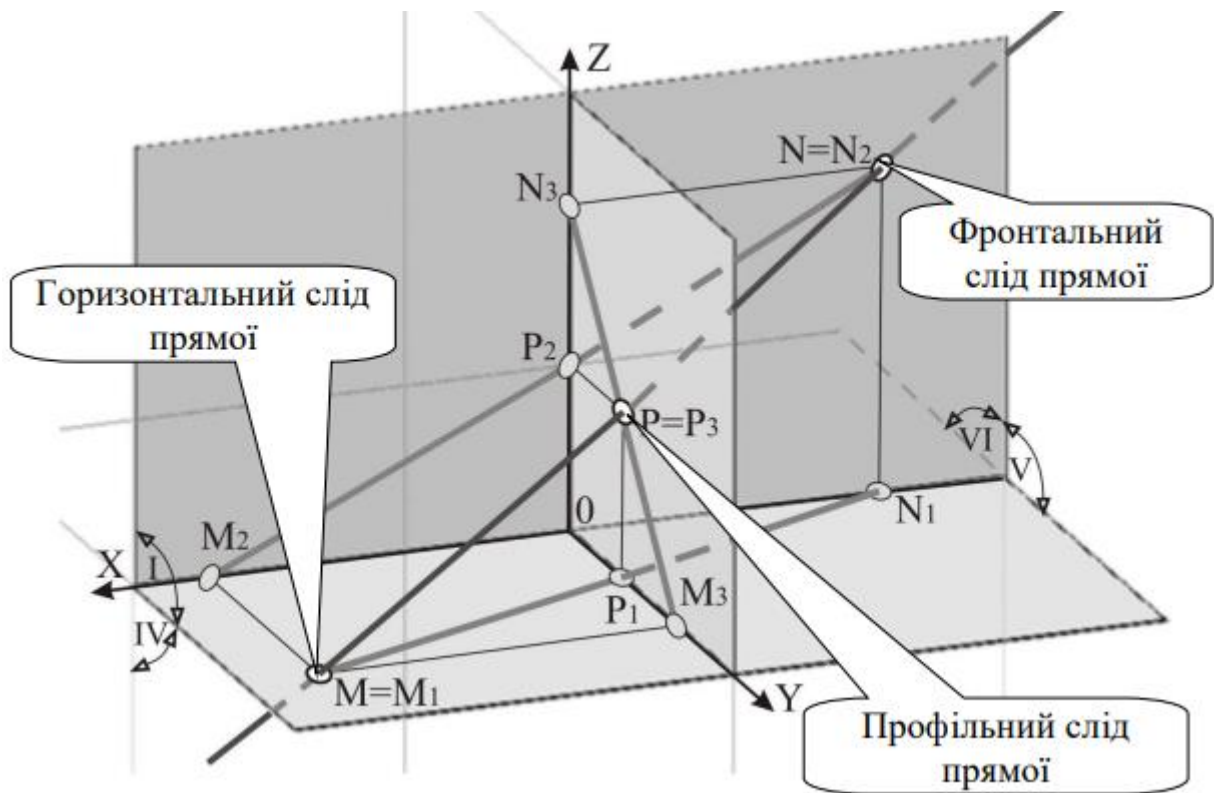


Рисунок 16 – Сліди прямої [9, с. 13]

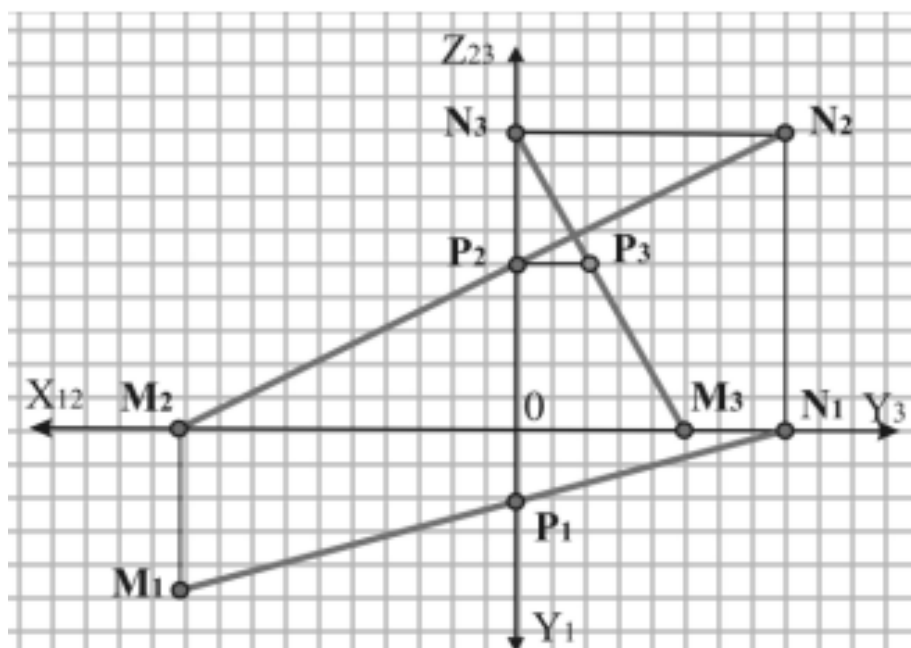
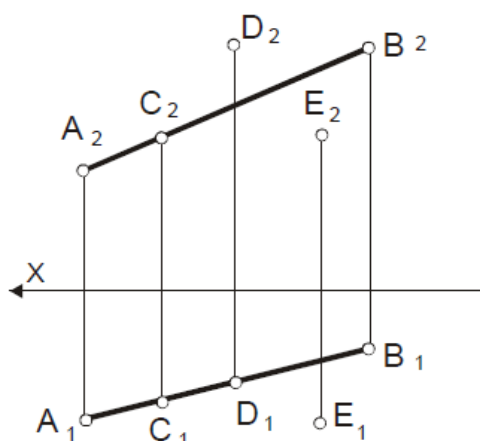


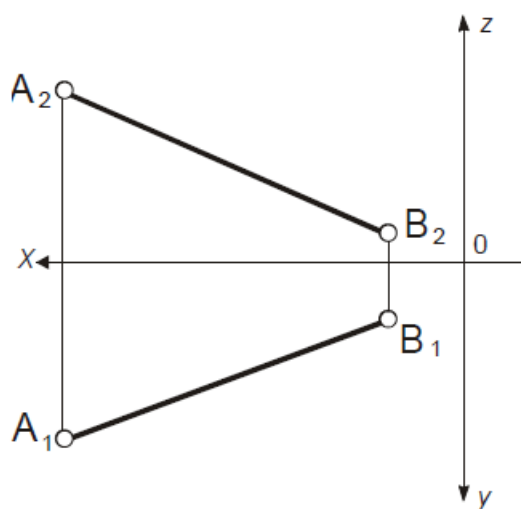
Рисунок 17 – Комплексний кресленик прямої [9, с. 14]

Домашні задачі

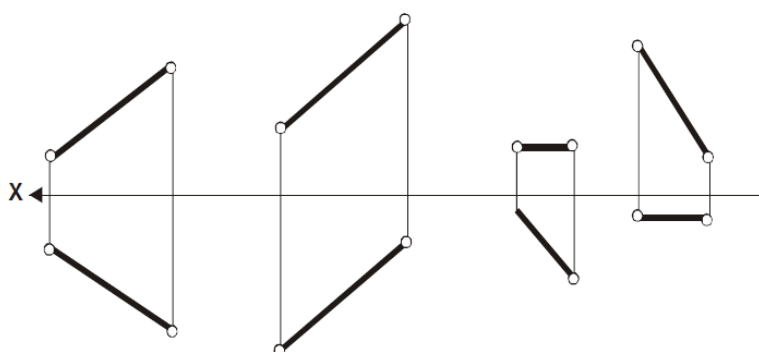
1. Визначити положення точок C, D і E відносно прямої AB.

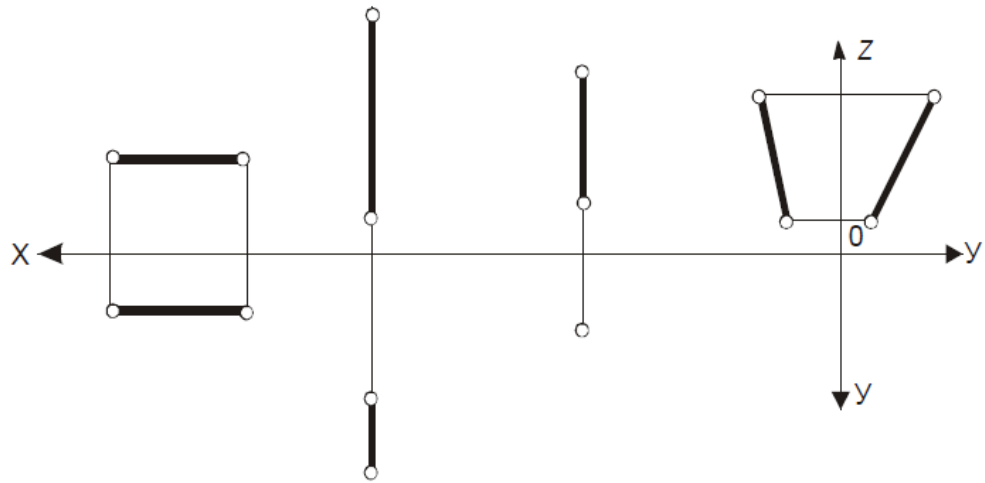


2. На відрізку AB вибрати точку E, віддалену від Π_1 на 15 мм.



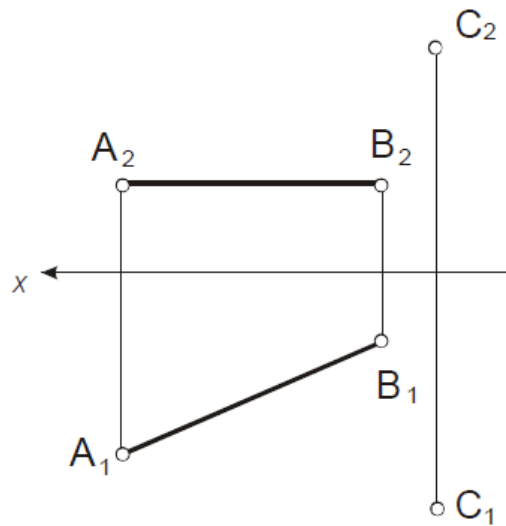
3. Визначити натуральну величину і кути нахилу відрізків до площин проєкцій. Яке положення займають ці лінії відносно площин проєкцій?



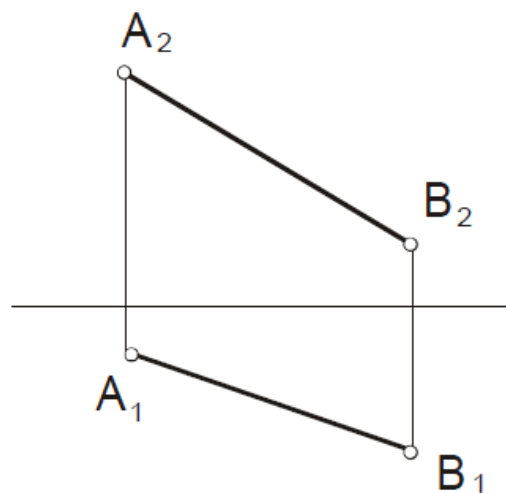


Аудиторні задачі

4. Визначити відстань від точки C до прямої AB .



5. Визначити сліди прямої AB .



ТЕМА 3 ПЛОЩИНА. ТОЧКА І ПРЯМА В ПЛОЩИНІ

Література: [1. Розд. 3, 3.3, с. 32–36, розд. 4, 4.1–4.3, с. 36–43; 2. Част. 1, 1.2, с. 9, част. 2, 2.1, с. 14–22; 3. Розд. 3, 3.1–3.4, с. 43–49].

ЗАПИТАННЯ

1. Як можна задати площину на кресленні?
2. Яке положення може займати площина відносно площин проєкцій?
3. Перерахуйте всі види проєктуючих площин.
4. Сформулюйте графічну ознаку проєктуючої площини?
5. Якою властивістю володіє площина окремого положення?
6. Сформулюйте правило приналежності прямої і точки площині.
7. Перерахуйте і дайте визначення головним лініям площини. Які графічні ознаки використовуються під час побудови цих ліній?

ВІДПОВІДІ

1. На комплексному кресленні площину задають : а) проєкціями тих геометричних елементів, якими визначається її положення в просторі. Такими елементами є: 1) *три точки, які не лежать на одній прямій*; 2) *пряма і точка, яка не лежить на ній*; 3) *дві прямі, які перетинаються між собою*; 4) *дві паралельні прямі*; 5) *будь-яка плоска фігура*; б) *слідами площини*. *Слід площини* – це пряма, по якій ця площина перетинається з площиною проєкцій (рис. 18).

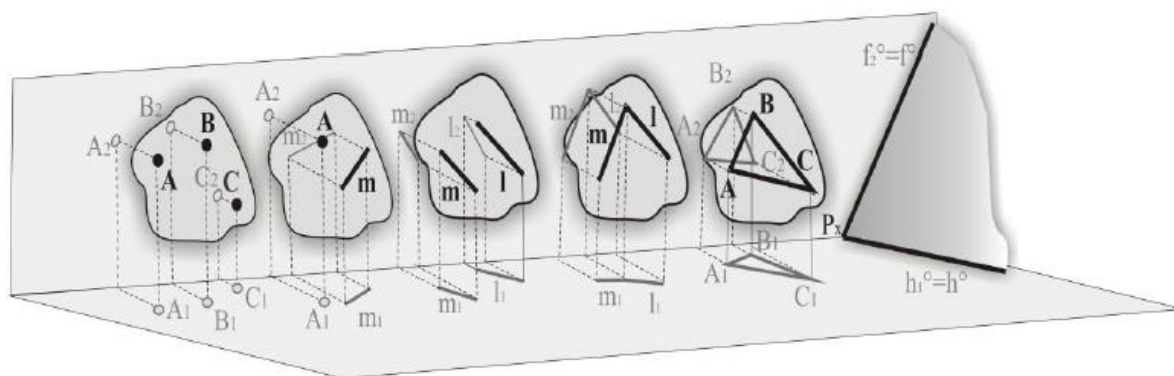


Рисунок 18 – Способи завдання площин на комплексному кресленні [9, с. 19]

1. **Площина загального положення** – це площина не паралельна і не перпендикулярна до площин проєкцій.

2. **Площини окремого положення: проєктуючі і рівня.**

Площина проєктуюча – площина, перпендикулярна хоч би одній з площин проєкцій.

Площина рівня – площина, паралельна одній з площин проєкцій.

3. **Горизонтально-проєктуюча площина** – це площина, перпендикулярна до горизонтальної площини проєкцій.

Фронтально-проєктуюча площина – це площина, перпендикулярна до фронтальної площини проєкцій.

Профільно-проєктуюча площина – це площина, перпендикулярна до профільної площини проєкцій. **Площина рівня** – це площина, паралельна до площини проєкцій: **горизонтальна** $\parallel \Pi_1$, **фронтальна** $\parallel \Pi_2$, **профільна** $\parallel \Pi_3$.

4. Одна з проєкцій проєктуючої площини є прямою, яка збігається із слідом проєктуючої площини.

5. Площина окремого положення володіє **властивістю збірності**: проєкції точок і фігур, які лежать у цій площині, збігаються із слідом самої площини (рис. 19).

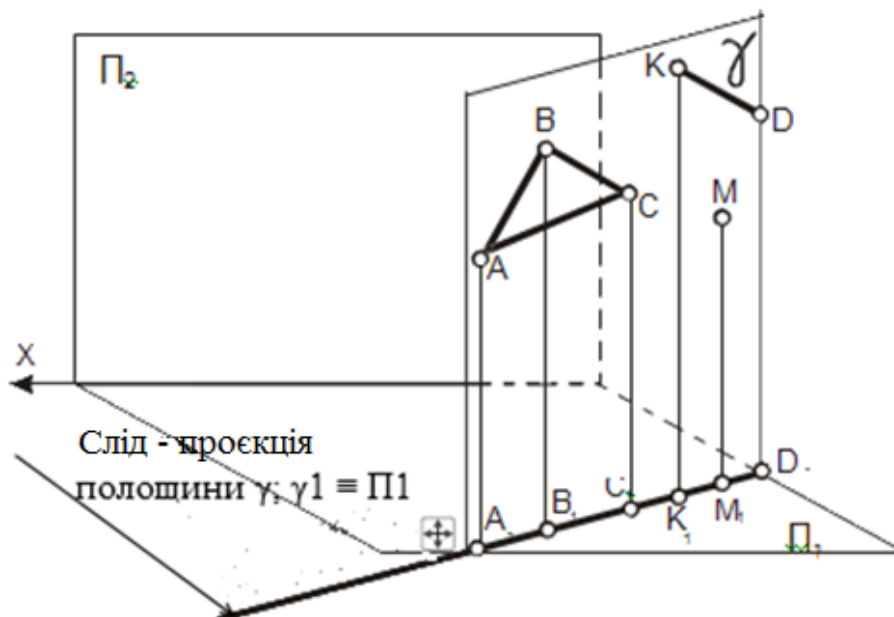


Рисунок 19 – Горизонтально-проєктуюча площина γ

6. Пряма належить площині, якщо дві точки цієї прямої належать площині (рис. 20 точки 2 і 3). Точка належить площині, якщо вона лежить на прямій, що належить цій площині (рис. 20 точка K).

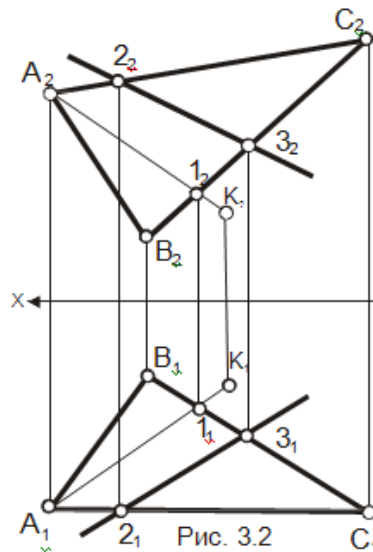


Рисунок 20 – Належність лінії площині

7. Головні лінії площини: **горизонталь** – це пряма, яка лежить у площині $\parallel \Pi_1, h_2 \parallel O_x$. **Фронталь** – це пряма, яка лежить у площині і $\parallel \Pi_2, f_1 \parallel O_x$. Лінія найбільшого нахилу площини до будь-якої площини проєкцій – це лінія, перпендикулярна до лінії рівня. **Лінія скату** – це лінія найбільшого нахилу площини до Π_1 , лінія скату $\perp h_1$, (рис. 21).

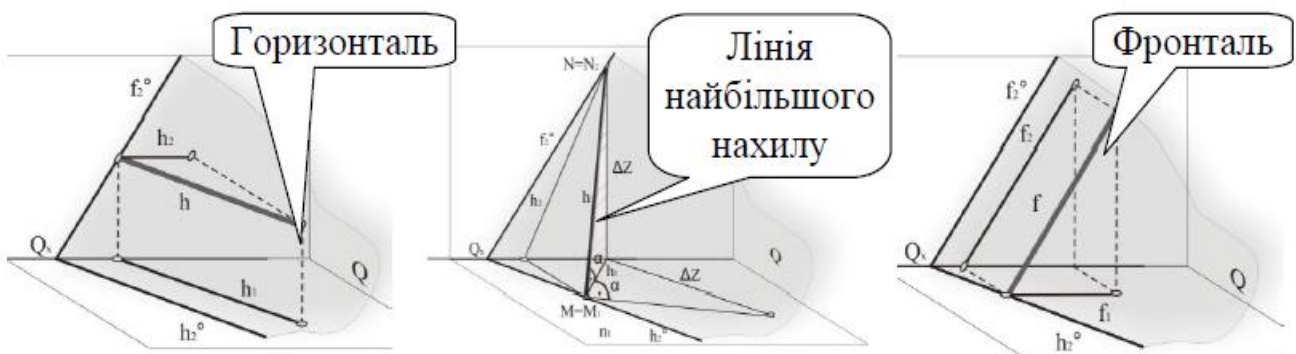
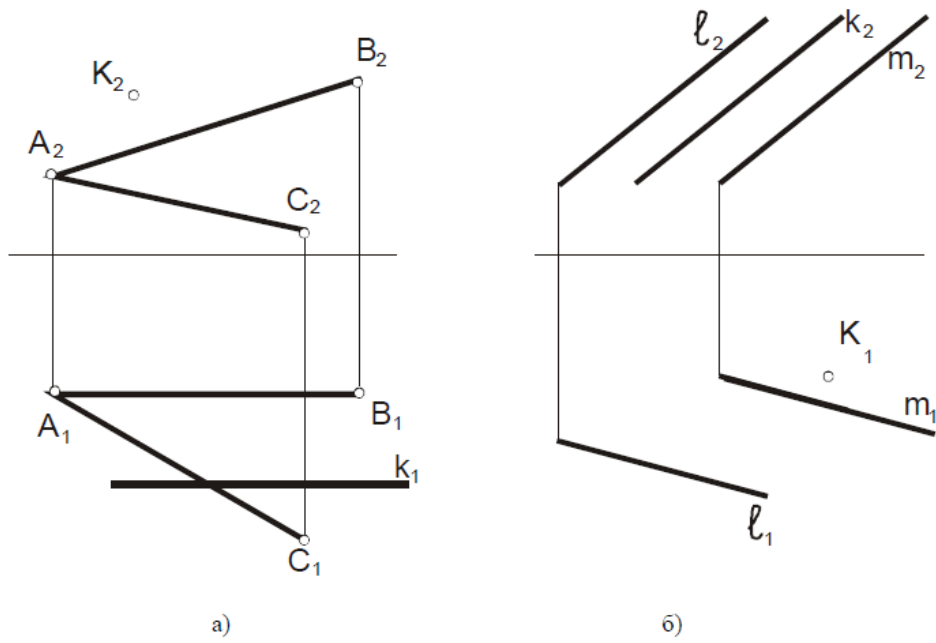


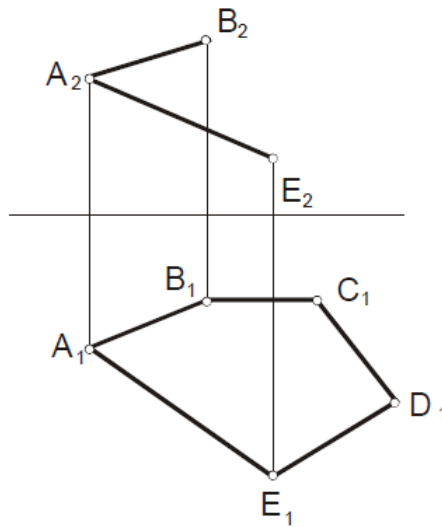
Рисунок 21 – Особливі лінії у площині [9, с. 20]

Домашні задачі

1. Побудувати відсутні проєкції точки K і прямої k, які належать площині: а) $\beta(AB \cap AC)$, б) $\gamma(l \parallel m)$.

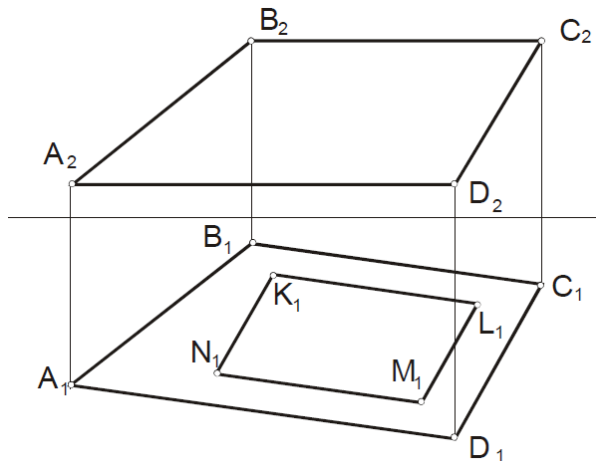


2. Побудувати відсутні проєкції вершин плоского п'ятикутника ABCDE.

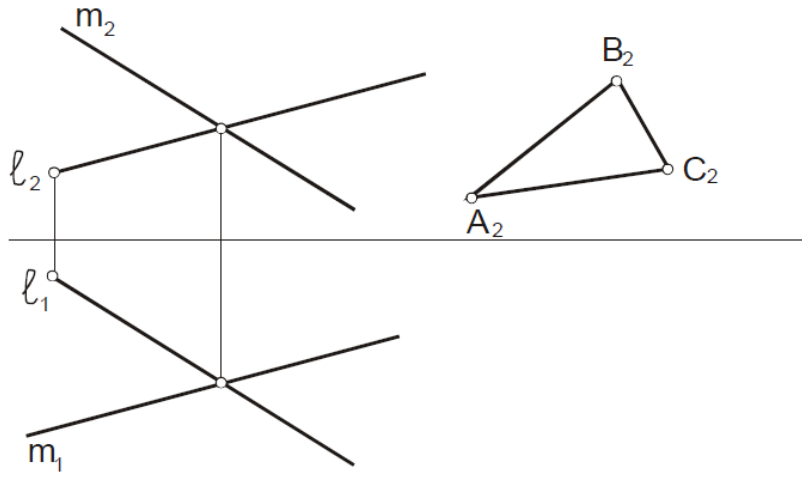


Аудиторні задачі

3. У площині скату покрівлі ABCD розмічений чотирикутник для слухового вікна KLMN. Побудувати його відсутню проєкцію.



4. За допомогою ліній рівня побудувати горизонтальну проєкцію ΔABC , який належить площині $\beta (m \cap l)$.



ТЕМА 4 ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Література: [1. Розд. 4, 4.3, с. 40–44; 2. Част. 2, 2.1, с. 14–22; 3. Розд. 3, 3.5, с. 52].

ЗАПИТАННЯ

1. Перерахуйте можливі випадки взаємного положення прямої і площини.
2. Сформулюйте графічну ознаку паралельності прямої і площини.
3. Сформулюйте графічну ознаку перпендикулярності прямої і площини.
4. Сформулюйте графічну ознаку паралельності площин.
5. Сформулюйте графічну ознаку перпендикулярності площин.

ВІДПОВІДІ

1. Можливі такі випадки: а) пряма належить площині; б) пряма паралельна до площини; в) пряма перетинає площину; г) окремий випадок перетину – пряма перпендикулярна до площини.

2. Пряма паралельна до площини, якщо вона паралельна будь-якій прямій, що належить цій площині.

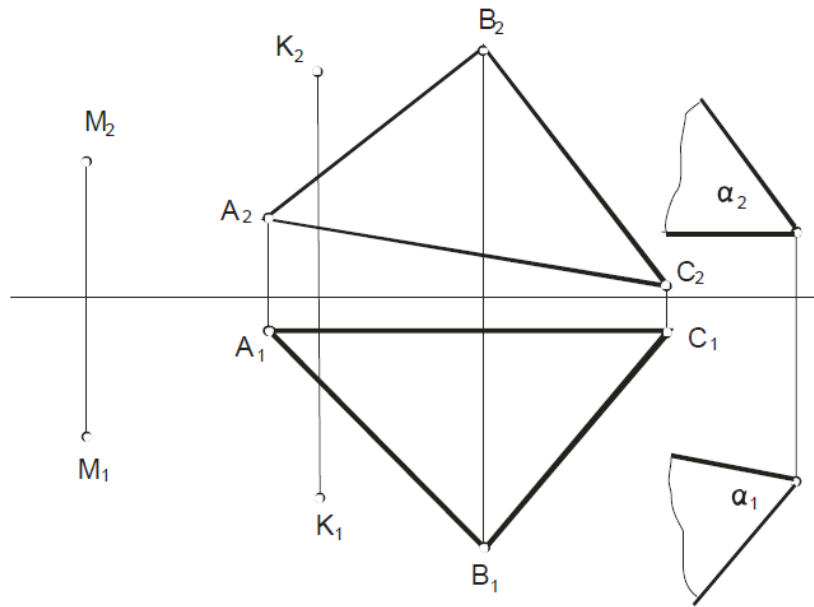
3. Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна двом пересічним прямим, що належать цій площині – горизонталі і фронталі. На епюрі горизонтальна проєкція перпендикуляра перпендикулярна горизонтальній проєкції горизонталі, а фронтальна проєкція перпендикуляра перпендикулярна фронтальній проєкції фронталі. Або: $p_1 \perp h_1$; $p_2 \perp f_2$.

4. Площини паралельні, якщо дві пересічні прямі однієї площини відповідно паралельні двом пересічним прямим іншої площини.

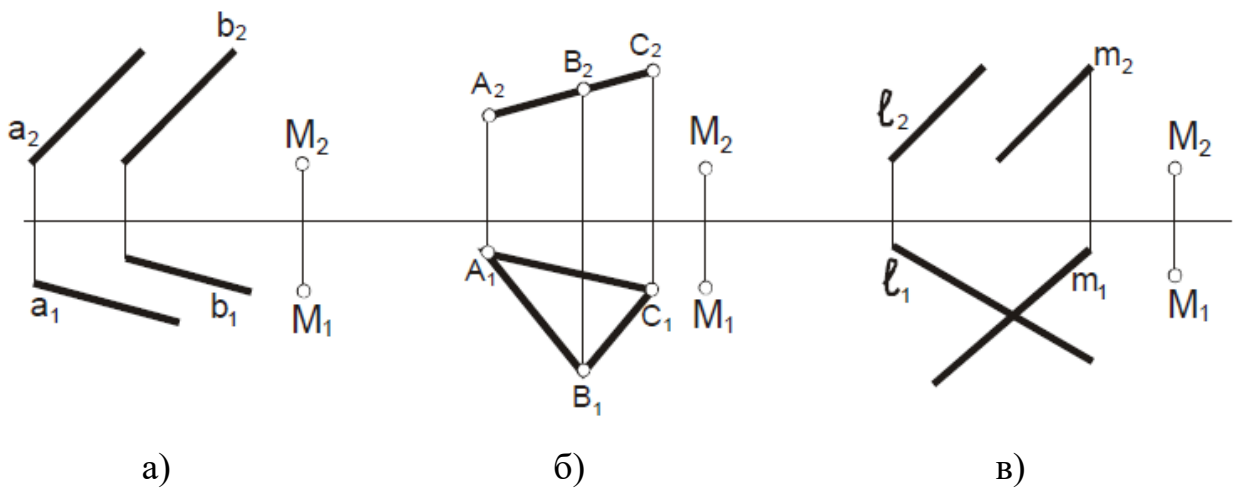
5. Дві площини взаємно перпендикулярні, якщо одна з них проходить через перпендикуляр до іншої.

Домашні задачі

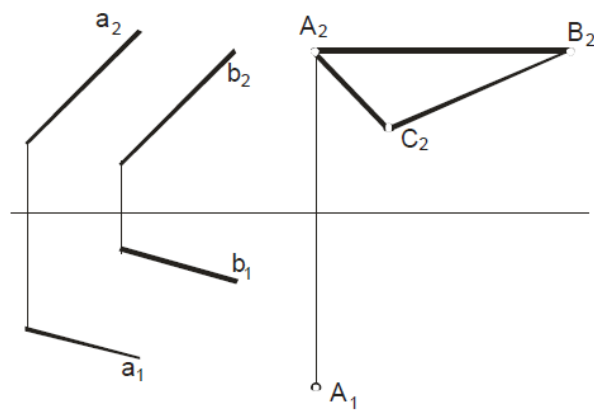
1. Через точку M провести пряму, паралельну до площини ABC . Через точку K провести площину, паралельну до площини ABC . Перевірити, чи паралельна площина α до площини ABC .



2. Через точку M провести плоскость, параллельную: а) α ($a \parallel b$);
 б) ΔABC ; в) прямим l і m .

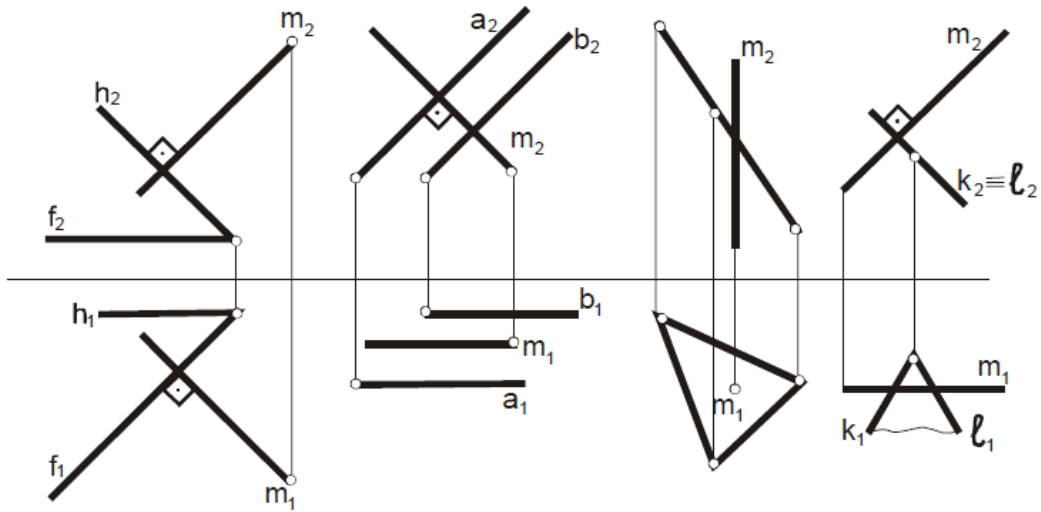


3. Побудувати горизонтальну проєкцію ΔABC , площина якого паралельна до площини α ($a \parallel b$).

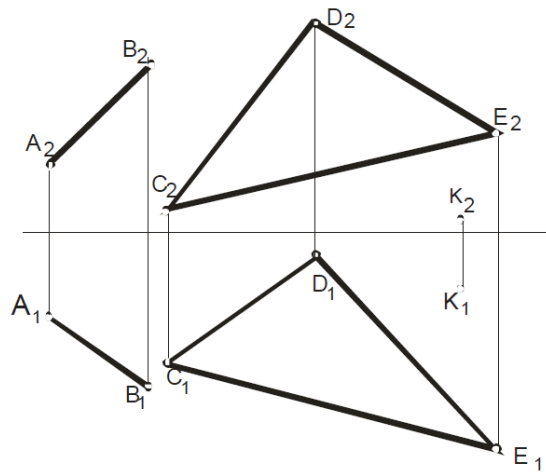


Аудиторні задачі

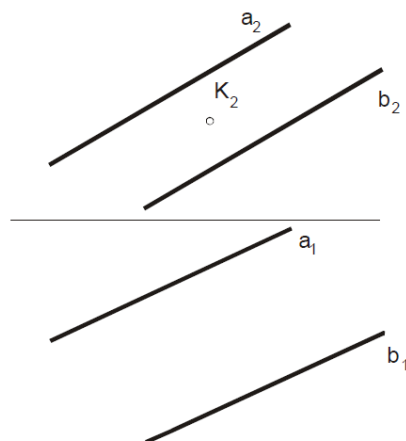
4. Визначити, чи перпендикулярна пряма m до площини?



5. Через точку K провести перпендикуляр до площини CDE . Через пряму AB провести площину, перпендикулярну до площини CDE .



6. Через точку K , яка належить площині α ($\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$), провести наскрізний перпендикуляр. Визначити його видимість.



ТЕМА 5 ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ. ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ З ПЛОЩИНОЮ

Література: [1. Розд. 4, 4.3, с. 36–43; 2. Част. 1, 1.2, с. 9, част. 2, 2.1, 2.1.2, с. 14; 3. Розд. 4, 4.2, с. 61–64].

ЗАПИТАННЯ

1. Які задачі відносяться до позиційних?
2. Який спосіб застосовують для розв'язання позиційних завдань?
3. З яких етапів (алгоритм) складається розв'язання задачі із визначення точки перетину прямої з площиною загального положення?
4. Чи спрощується розв'язання задачі, якщо площина проєктуюча? Якщо пряма проєктуюча?
5. Як визначається видимість прямої?

ВІДПОВІДІ

1. До позиційних задач відносяться такі задачі, у яких визначається взаємне розташування (позиція) геометричних фігур у просторі. Основні позиційні задачі: I. Перетин прямої з площиною або поверхнею. II. Перетин двох поверхонь або площини з поверхнею.

2. Для розв'язання позиційних задач використовують спосіб допоміжної січної площини або спосіб конкуруючих ліній, який тут не розглядається.

3. Алгоритм розв'язання I позиційної задачі: 1) через задану пряму провести допоміжну проєктуючу площину – посередник; 2) побудувати лінію перетину допоміжної площини із заданою; 3) знайти точку, у якій лінія перетину площин перетинає задану пряму; ця точка і буде шуканою; 4) визначити видимість прямої лінії, (рис. 22).

4. Якщо площина або пряма є проєктуючою, то на одній з проєкцій точка вже визначена. Залишається знайти другу проєкцію.

5. Використовується метод конкуруючих точок (див. приклад).

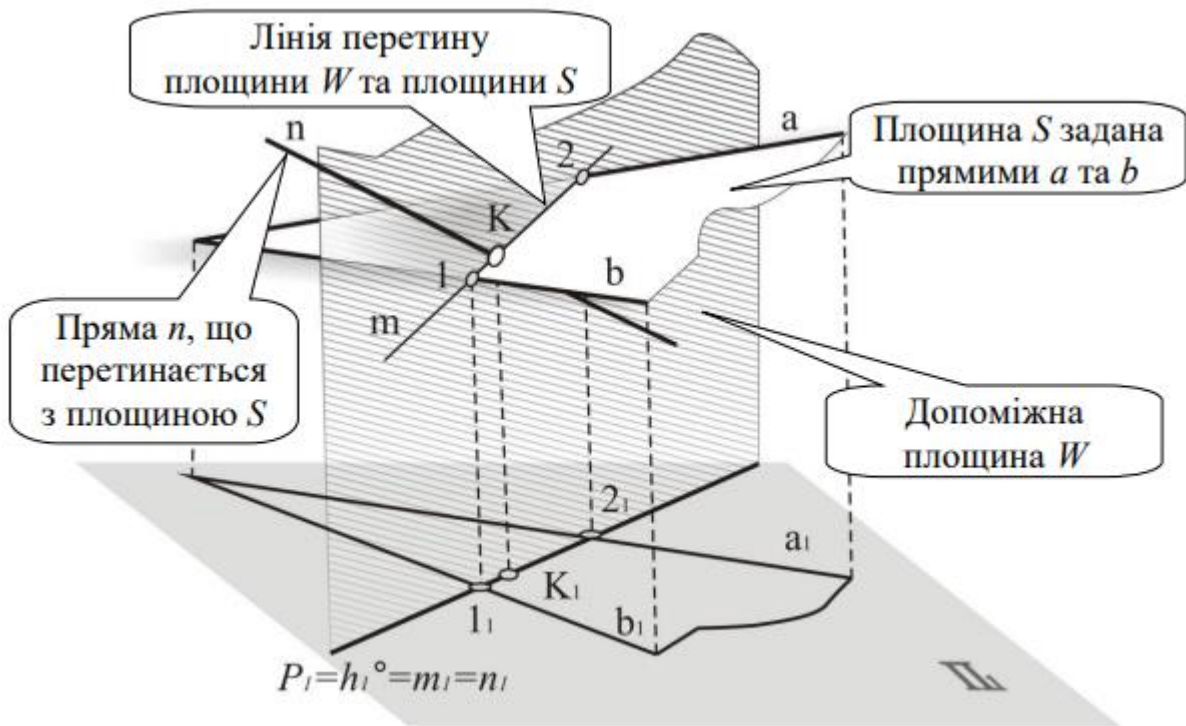


Рисунок 22 – Побудова точки перетину прямої з площиною [9, с. 25]

Приклад розв’язання задачі на перетин прямої і площини

Приклад розв’язання задачі подано на рисунку 23.

Дано: пряма a і площина $\alpha(\triangle ABC)$.

1. Через пряму a проводять фронтально-проектуючу площину β (слід площини зобразити товстою лінією).

2. Площина $\alpha \cap \beta$ по лінії 1 – 2.

3. Оскільки пряма a і пряма 1 – 2 належать площині β , то вони перетинаються в точці M , яка і буде шуканою.

4. Для визначення видимості скористаємося точками уявного перетину, які є конкуруючими точками. На горизонтальній проєкції точками уявного перетину є 3_1 і $3_1'$. Точка 3 належить прямій a , а точка $3'$ стороні AC . Судячи з фронтальної проєкції, точка $3'$ розташована вище і на горизонтальній проєкції закриває точку 3. Отже, пряма проходить на цій ділянці під площиною. На фронтальній проєкції точками уявного перетину є 2_2 і $2_2'$. Точка 2 розташована ближче до спостерігача і на фронтальній проєкції закриває точку $2'$, отже, пряма на цій ділянці проходить за площиною.

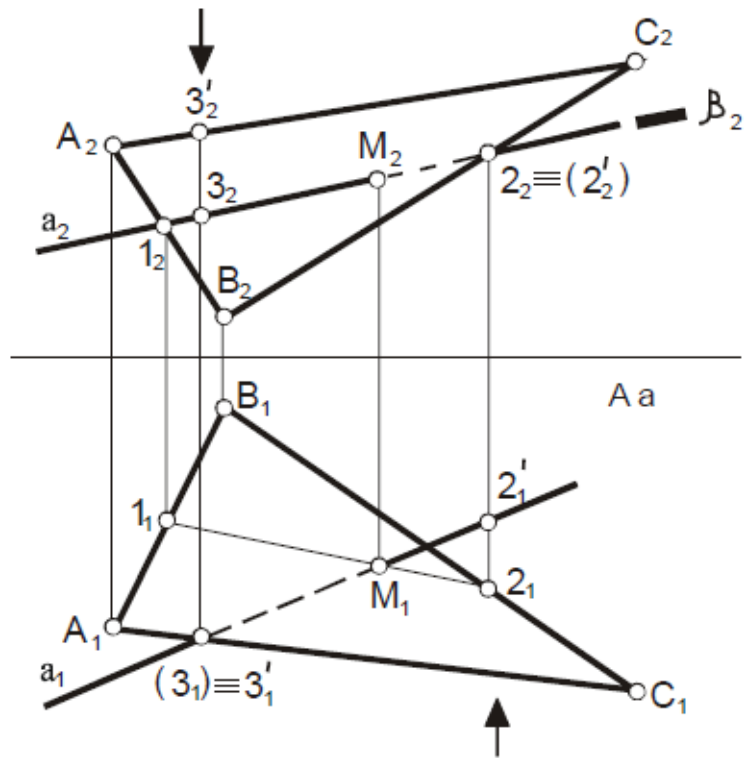
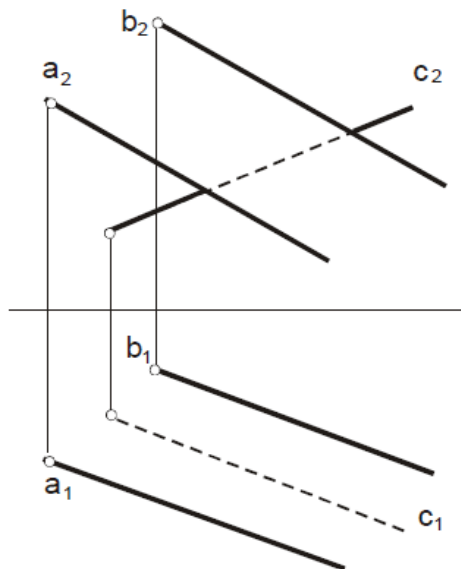


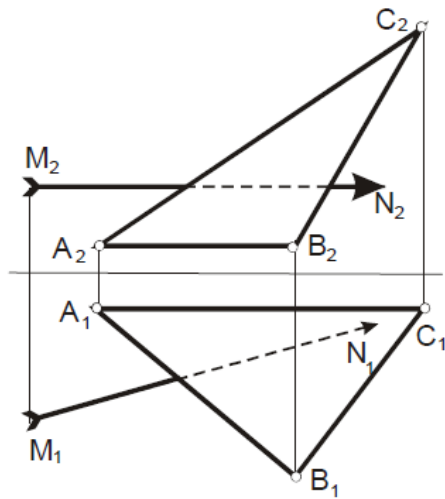
Рисунок 23 – Приклад розв’язання задачі на перетин прямої з площиною

Домашні задачі

1. Побудувати точку перетину прямої c з площиною β ($a \parallel b$). Визначити видимість прямої.

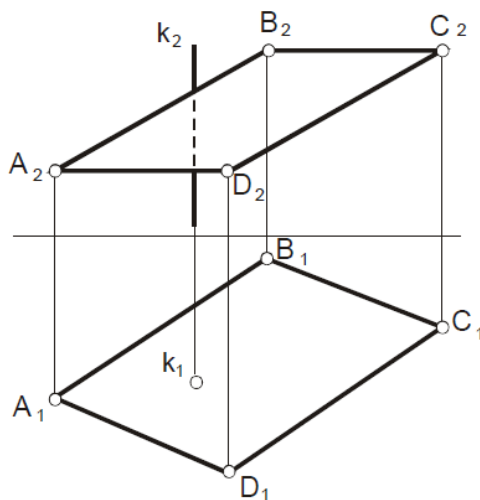


2. Спис воїна племені апачі летить у напрямку стіни (площина ΔABC). Визначити місце, у якому спис зіткнеться зі стіною ABC хижі. Визначити видимість спису.



Аудиторні задачі

4. Яблуко упало з дерева прямо на плівку теплиці за напрямом прямої k .
Визначити, у якому місці плівки (площина $ABCD$) утворився отвір.



ТЕМА 6 ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ. ПЕРЕТИН ДВОХ ПЛОЩИН

Література: [1. Розд. 4, 4.4, с. 44–46; 2. Част. 2, 2.1, 2.1.2, с. 14].

ЗАПИТАННЯ

1. Як знайти лінію перетину двох площин?
2. Чи спрощується розв'язання задачі, якщо одна з площин є проєктуючою?

ВІДПОВІДІ

1. Дві площини перетинаються по прямій лінії, для визначення якої достатньо знайти дві її точки, що належать одночасно кожній із заданої площин. Щоб знайти ці точки, достатньо ввести дві допоміжні січні площини, тобто двічі виконати алгоритм позиційної задачі на перетин прямої з площиною, (рис. 24).

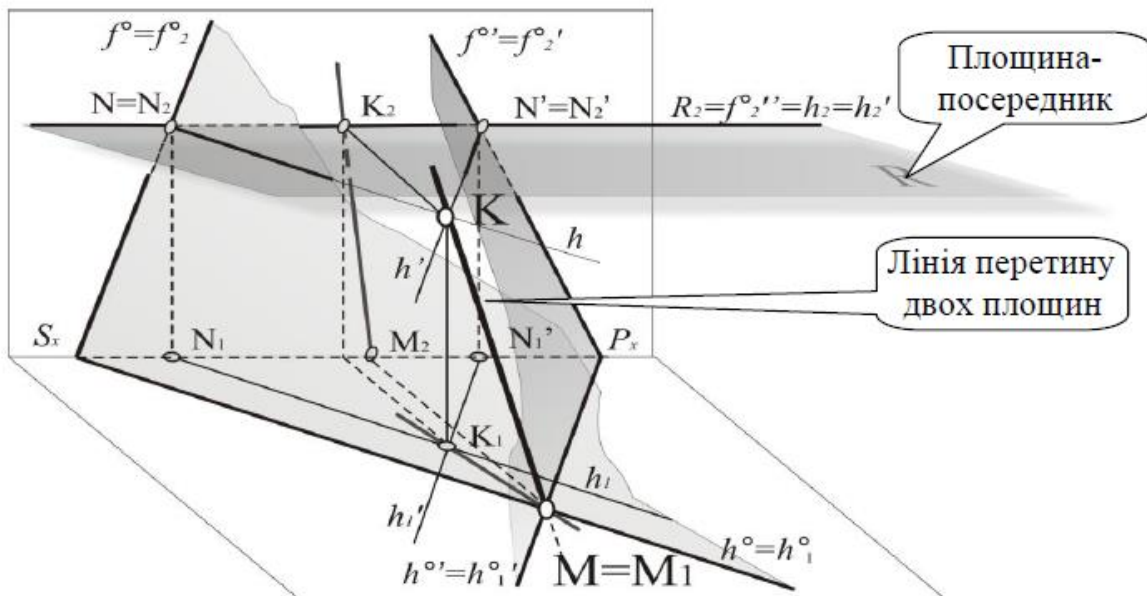


Рисунок 24 – Побудова лінії перетину двох площин методом площин-посередників [9, с. 24]

Приклад розв'язання задачі на перетин двох площин

- I. Проводять допоміжну фронтально-проєктуючу площину γ , (рис. 25), що перетинає задані площини α і β (слід площини γ показаний товстою лінією).
- II. Площина $\gamma \cap \alpha$ по лінії 1 – 2. Площина $\gamma \cap \beta$ по лінії 3 – 4. 3). Точка перетину горизонтальних проєкцій цих прямих і буде точкою перетину заданої

площини (точка M). Фронтальна проєкція точки M_2 знаходиться на сліду площини γ_2 .

III. Проводять допоміжну фронтально-проєктуючу площину φ , що перетинає задані площини (слід площини φ показаний товстою лінією).

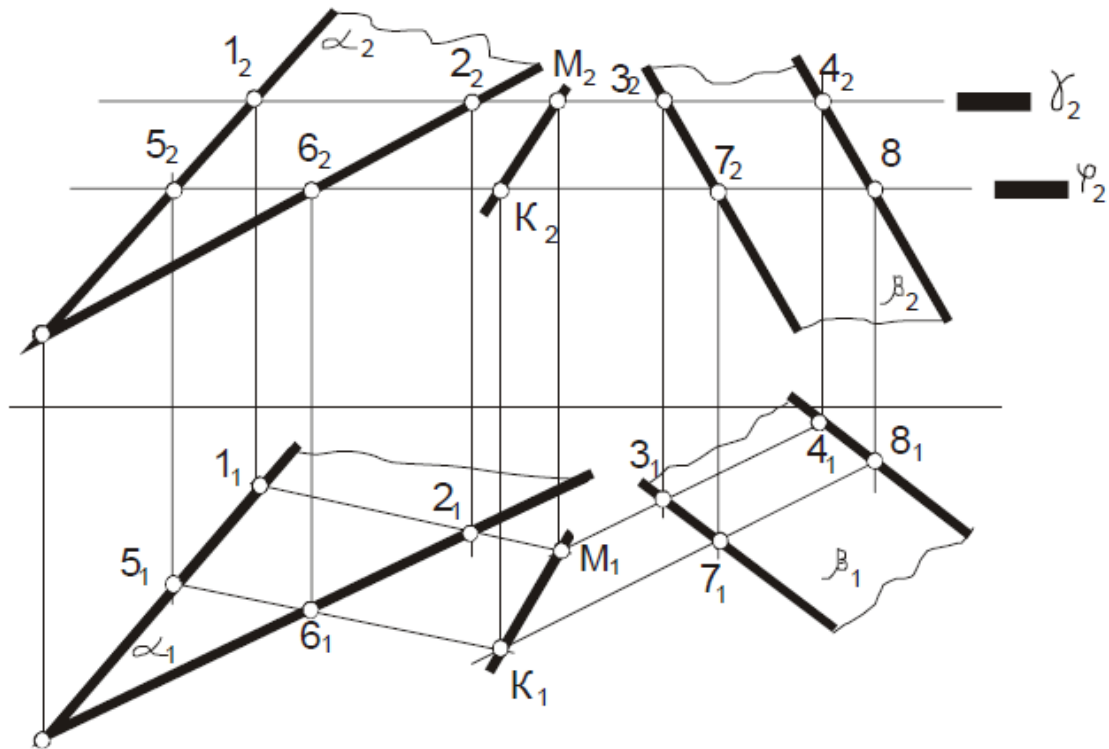


Рисунок 25 – Приклад розв’язання на комплексному кресленні задачі на перетин двох площин α і β

Площина $\varphi \cap \alpha$ по лінії 5 – 6. Площина $\varphi \cap \beta$ по лінії 7 – 8.

Точка перетину горизонтальних проєкцій цих прямих, яка і буде точкою перетину заданої площини (точка K). Фронтальна проєкція точки K_2 знаходиться на сліду площини φ_2 .

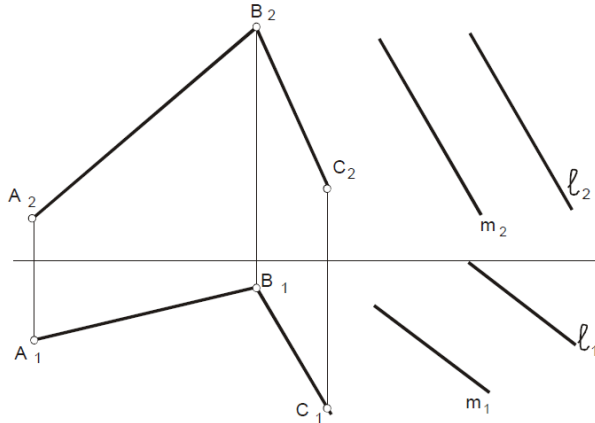
IV. Пряма MK є лінією перетину площин α і β .

Примітка. У деяких задачах зручно площину посередник проводити через прями, що обмежують площину. У такому разі знаходять точки перетину двох прямих, що належать одній площині, з іншою.

1. Якщо площина є проєктуючою, то на одній з проєкцій лінія перетину збігається із слідом проєктуючої площини. Залишається знайти тільки другу проєкцію.

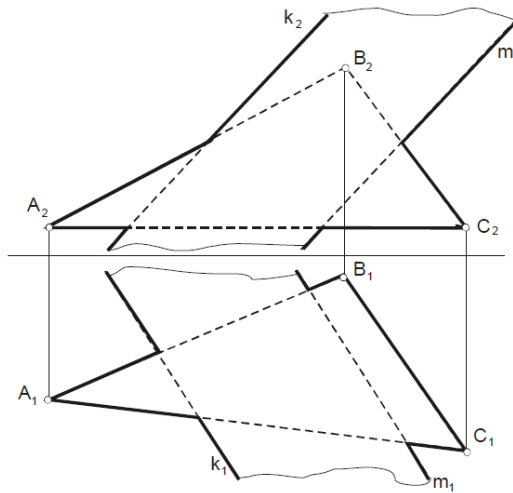
Домашні задачі

1. Побудувати лінію перетину двох площин α ($AB \cap BC$) і β ($l \parallel m$).



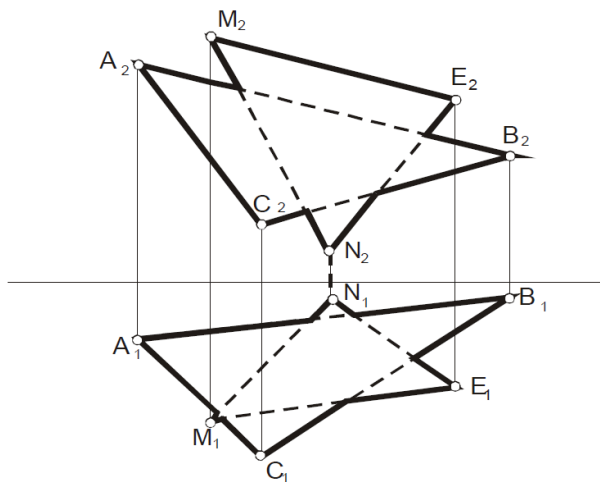
2. Побудувати лінію перетину двох площин α (ΔABC) і β ($k \parallel m$).

Визначити видимість.



Аудиторні задачі

3. Побудувати лінію перетину двох площин α (ABC) і β (MNE). Визначити видимість.



ТЕМА 7 СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ: СПОСІБ ЗАМІНИ ПЛОЩИН ПРОЄКЦІЙ

Література: [1. Розд. 6, 6.1, с. 55–57; 2. Част. 2, 2.2, с. 22–42; 4. Розд. 3, 3.1, с. 14–20].

ЗАПИТАННЯ

1. Перерахуйте основні способи перетворення комплексного креслення.
2. З якою метою застосовують перетворення комплексного креслення?
3. У чому полягає суть способу заміни площин проєкцій?
4. Чим варто керуватися під час вибору положення нової площини проєкцій?
5. Що позначають символи: X_{12} ; X_{14} ; X_{45} ?
6. Як побудувати нову проєкцію точки при способі заміни площин проєкцій?
7. Чи достатньо однієї заміни для вирішення всіх типів завдань?
8. Які операції необхідно виконати, щоб знайти натуральну величину площини загального положення?

ВІДПОВІДІ

1. Спосіб заміни площин проєкцій, способи обертання, спосіб плоскопаралельного переміщення.
2. Для спрощення розв'язання задач, коли прямі і площина, що займають загальне положення після перетворення креслення, займуть окреме положення. Таким чином, розв'язуються багато метричних і позиційних задач.
3. Суть способу заміни площини проєкцій полягає в тому, що при незмінному положенні об'єкта в просторі система Π_1, Π_2 замінюється новою системою взаємно перпендикулярних площин. Напрямок проєктування залишається ортогональним, (див. рис 26).
4. Якщо необхідно площину перетворити в проєктуючу, то нову вісь проводять згідно з такими умовами: нова вісь $x_{14} \perp h_1$ або нова вісь $x_{24} \perp f_2$. Якщо необхідно визначити натуральну величину площини, то нову площину проводять паралельно сліду площини.

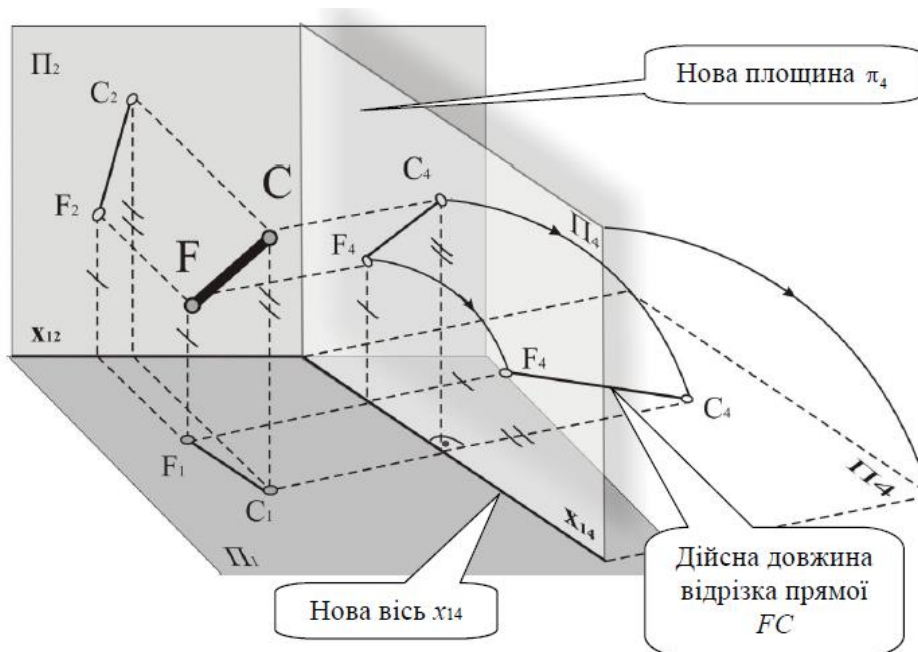


Рисунок 26 – Спосіб заміни площин проєкцій [9, с. 31]

5. X_{12} – лінія перетину площин Π_1 і Π_2 , X_{14} – лінія перетину площин Π_1 і Π_4 і так далі.

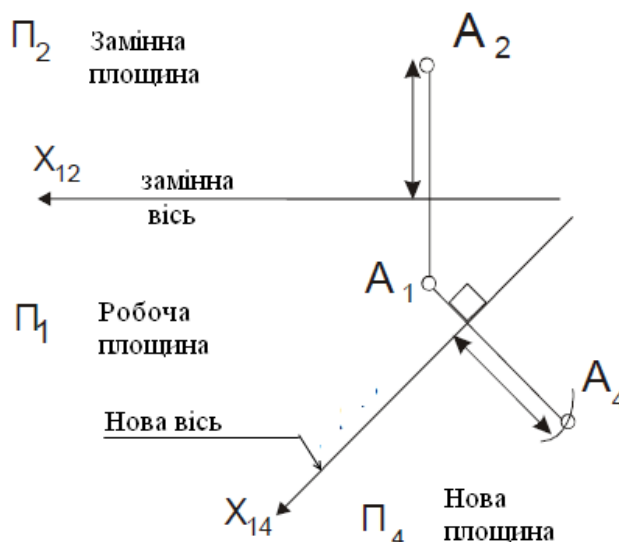


Рисунок 27 – Побудова нової проєкції точки А способом заміни площин проєкцій

6. Необхідно:

а) провести нову лінію зв'язку перпендикулярно новій осі (див. рис. 27) $A_1 A_4 \perp x_{14}$;

б) відстань від замінюваної проєкції A_2 до замінюваної осі X_{12} відкладають від нової осі X_{14} по новій лінії проєкційного зв'язку.

7. Не завжди. У ряді випадків для розв'язання задачі необхідно виконати дві і більше заміни залежно від складності задачі.

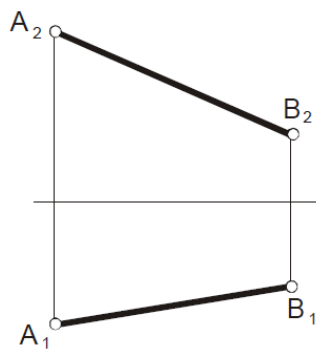
8. Необхідно виконати дві заміни:

а) площину перетворити в проєктуючу (у слід) згідно з п.4;

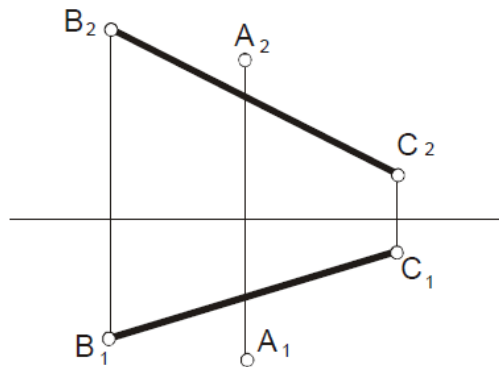
б) X_{45} провести паралельно отриманому сліду.

Домашні задачі

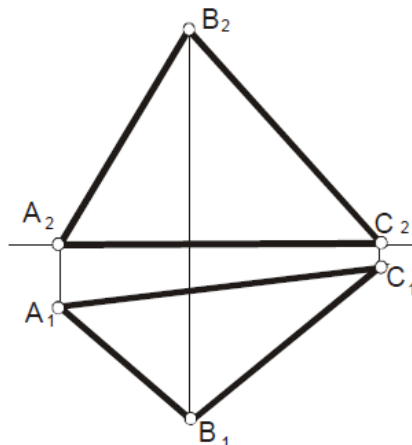
1. Визначити дійсну величину відрізка AB і кути його нахилу до площин проєкцій Π_1 і Π_2 .



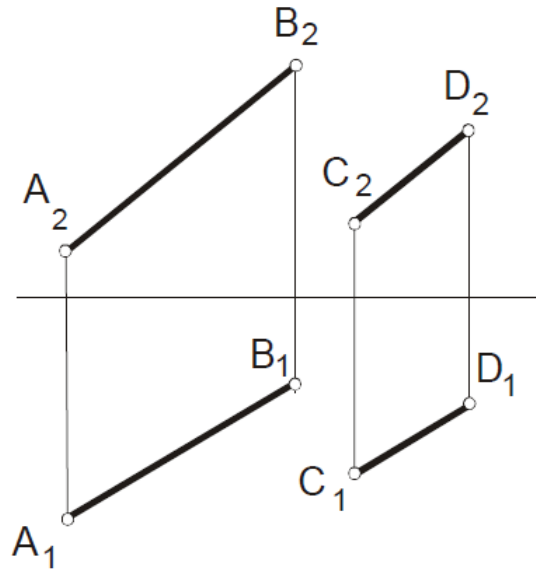
2. Знайти відстань від точки A до відрізка BC .



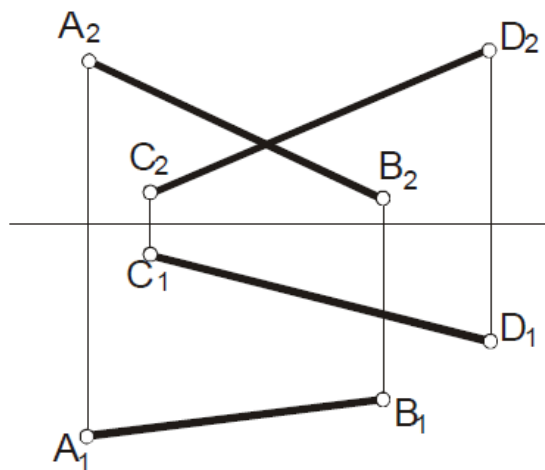
3. Визначити кут нахилу трикутника ABC до площини Π_1 .



4. Визначити відстань між двома паралельними прямими.

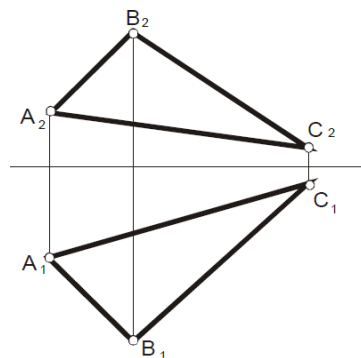


5. Визначити відстань між мимобіжними прямими АВ і CD.

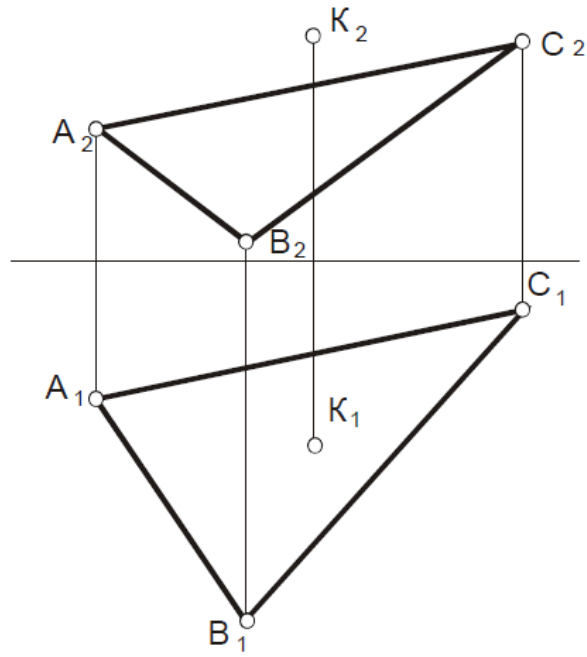


Аудиторні задачі

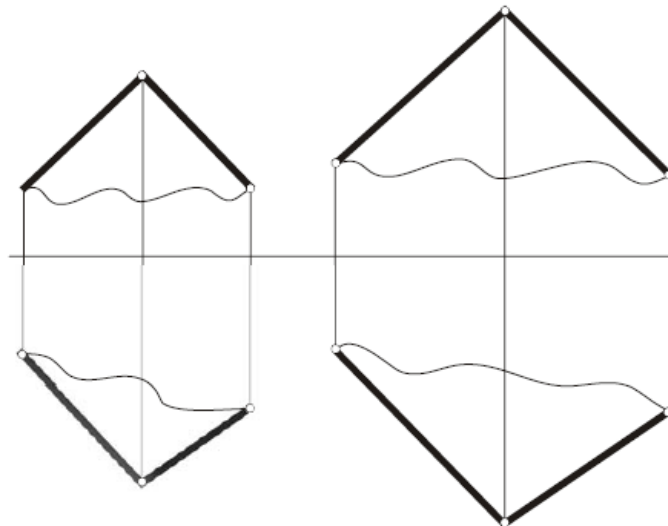
6. Визначити кути нахилу трикутника ABC до площин Π_1 і Π_2 .



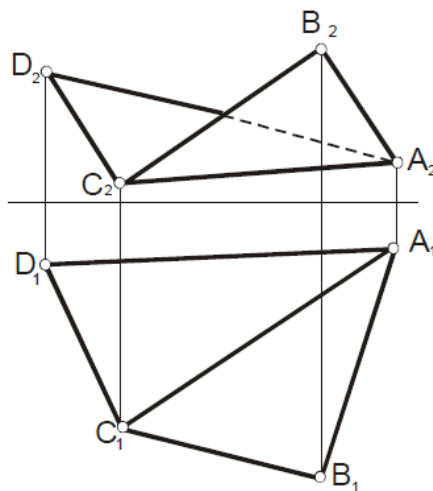
7. Визначити відстань від точки К до площини трикутника ABC.



8. Визначити відстань між двома паралельними площинами.



9. Визначити величину двогранного кута між двома площинами ABC і CDA .



ТЕМА 8 СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ: СПОСІБ ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ПРОЄКТУЮЧОЇ ПРЯМОЇ

Література: [2. Част. 2, 2.2, с. 22–42; 4. Розд. 3, 3.2, с. 21–28].

ЗАПИТАННЯ

1. У чому полягає суть способу обертання?
2. Як розташована вісь, відносно якої роблять обертання?
3. Як зображується на площині проєкцій траєкторія точки, при її обертанні довкола осі?
4. Як необхідно обертати площину загального положення, щоб перетворити її в проєктуючу?
5. Як необхідно обертати пряму загального положення, щоб перетворити її в проєктуючу?
6. Які дії необхідно робити для визначення натуральної величини прямої або площини?

ВІДПОВІДІ

1. Суть способу обертання полягає в тому, що за нерухомої системи площин проєкцій геометричний об'єкт обертають довкола нерухомої осі до тих пір, поки він не займе окреме положення (тобто стане паралельним або перпендикулярним до однієї з площин проєкцій).
2. Вісь обертання вибирають перпендикулярно до однієї з площин проєкцій.

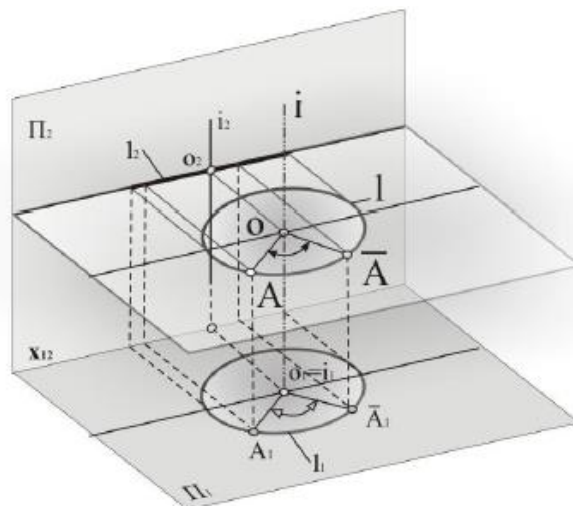


Рисунок 28 – Наочне зображення обертання точки А навколо осі $i \perp \Pi_1$ [9, с. 33]

3. Точка обертається довкола осі обертання по колу. Якщо вісь $\perp \Pi_1$, (див. рис. 28 обертання точки А), то коло на Π_1 проєктується у натуральну величину з центром у проєкції i_1 , а на Π_2 у пряму, перпендикулярну осі обертання.

Якщо вісь $\perp \Pi_2$, то коло на Π_2 проєктується у натуральну величину, а на Π_1 у пряму, перпендикулярну осі обертання (рис. 29 обертання точки В). Центр кола розташований в точці перетину осі обертання з площиною кола. Величина радіусу кола дорівнює відстані від точки до осі обертання.

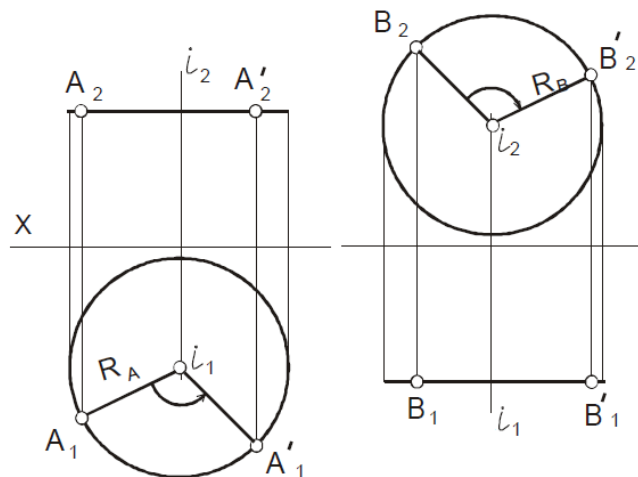


Рисунок 29 – Комплексне креслення обертання точок А і В навколо проєктуючої осі i

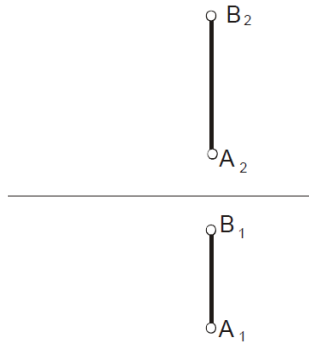
4. Для того щоб площина загального положення зайняла проєктуюче положення, необхідно вісь обертання провести через один кінець горизонталі або фронталі, що належать площині, і повертати площину до тих пір, поки h_1 або f_2 не обернеться до положення, перпендикулярного осі ОХ.

5. Для того щоб пряма загального положення перетворилася в проєктуючу, необхідно виконати два повороти: першим поворотом пряму приводимо в положення горизонталі або фронталі. Потім повертаємо до тих пір, поки h_1 або f_2 не обернеться до положення, перпендикулярного ОХ. Зручніше вісь обертання провести через кінець прямої.

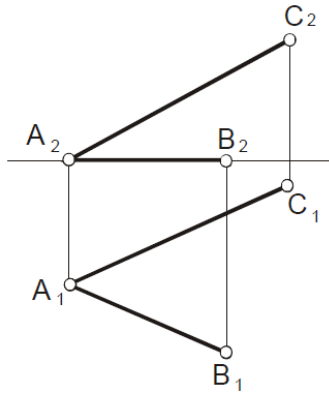
6. Для визначення натуральної величини прямої або площини необхідно проєкцію відрізка або проєкцію сліду площини обертати довкола осей до тих пір, поки одна з нових проєкцій прямої або сліду площини займе положення, паралельне осі ОХ.

Домашні задачі

1. Визначити натуральну величину відрізка AB і кути його нахилу до площин проєкцій Π_1 і Π_2 .

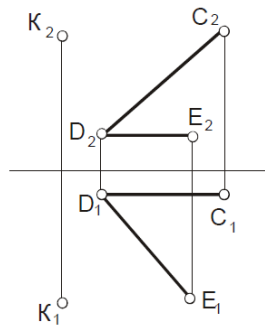


2. Площину загального положення кута BAC перетворити в проєктуючу.

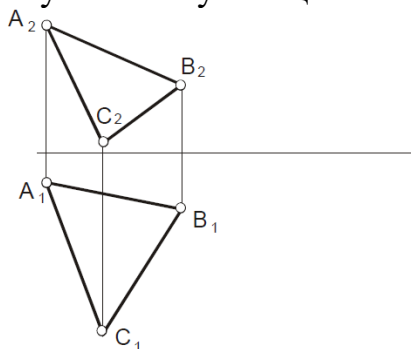


Аудиторні задачі

1. Визначити відстань від точки K до площини кута CDE .



2. Визначити натуральну величину площини загального положення $\triangle ABC$.



ТЕМА 9 СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ: СПОСІБ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМІЩЕННЯ

Література: [1. Розд. 6, 6.2, с. 57–58; 2. Част. 2, 2.2, с. 22–42; 4. Розд. 3, 3.3, с. 29–32].

ЗАПИТАННЯ

1. У чому полягає суть способу плоскопаралельного переміщення?
2. З якою метою застосовують плоскопаралельне переміщення?
3. Яким правилом потрібно керуватися під час виконання плоскопаралельного переміщення?
4. Чи є який-небудь зв'язок між методом плоскопаралельного руху і методом заміни площини проєкцій?
5. У чому перевага цього методу?
6. Які дії необхідно виконати, щоб знайти натуральну величину прямої загального положення?
7. Які дії необхідно виконати, щоб площину загального положення перетворити в слід?

ВІДПОВІДІ

1. Суть цього способу полягає в тому, що всі точки геометричного об'єкта разом з однією з його проєкцій переміщається в просторі паралельно до деякої площини.
2. Для спрощення розв'язання задач, оскільки прямі і площини, що займали загальне положення, після плоскопаралельного переміщення займають окреме положення.
3. Під час плоскопаралельного руху відносно площини Π_1 – горизонтальну проєкцію фігури зображуємо без зміни, розташовуючи її так, як це необхідно для розв'язання задачі. Фронтальні проєкції фігури мають ті ж висоти, які були до руху. І навпаки для руху відносно Π_2 .

4. Так. Задачі, що розв'язуються за допомогою однієї заміни, розв'язуються одним плоскопаралельним рухом, а задачі, що розв'язуються введенням двох площин, – розв'язуються двома плоскопаралельними переміщеннями.

5. Розв'язання задач цим способом дозволяє зручно розташовувати проєкції об'єкта на полі креслення і уникати накладення проєкцій.

6. Необхідно виконати два плоскопаралельних переміщення, (див. приклад на рис. 30):

1) горизонтальну проєкцію A_1B_1 прямої переміщуємо до положення паралельного осі OX . Фронтальна проєкція прямої переміщується по лініях, паралельних осі OX . У результаті першого переміщення пряма перетворюється в пряму рівня;

2) нову фронтальну проєкцію прямої A_2B_2 повертаємо до положення, перпендикулярного осі OX . При цьому горизонтальні проєкції прямої, переміщуючись по лінії, паралельній осі ox – вироджується в точку.

7. Перетворення площини загального положення в проєктуючу здійснюється за допомогою горизонталі (або фронталі), яка переміщується в положення, перпендикулярне до осі OX .

ПРИКЛАД

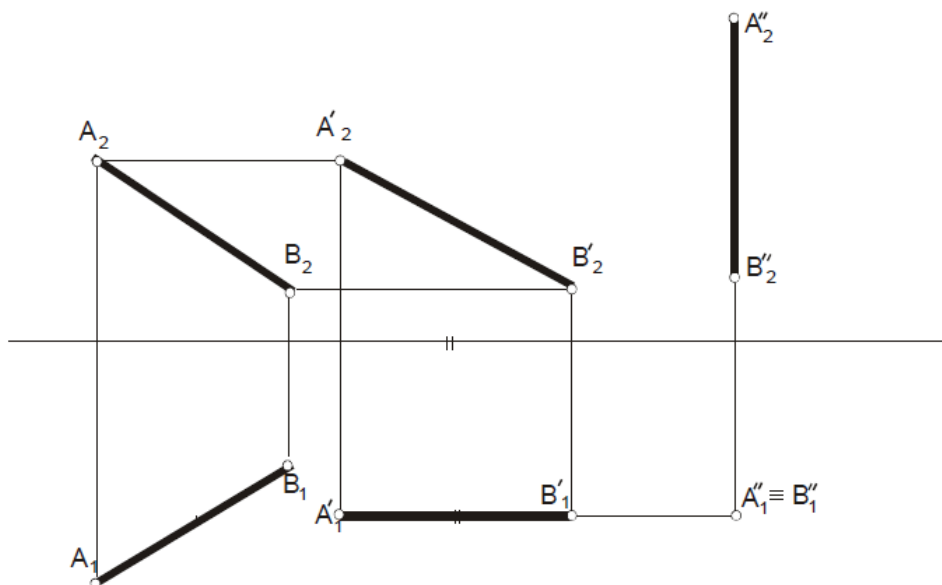
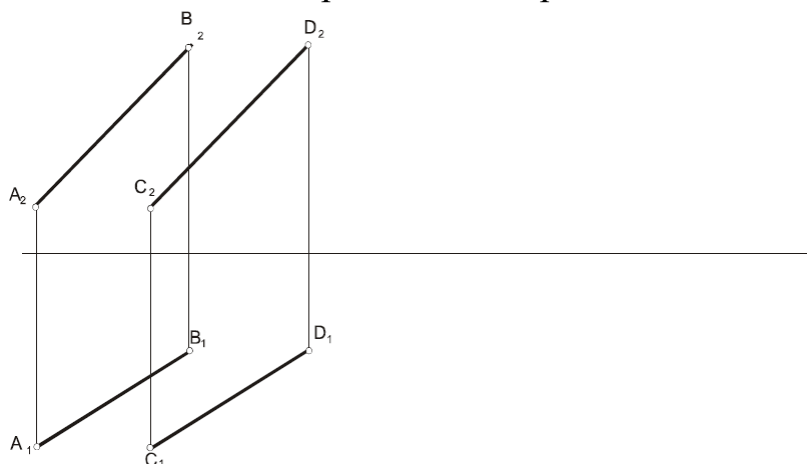


Рисунок 30 – Перетворення відрізка AB у відрізок рівня (фронталь) та горизонтально-проєктуючий відрізок

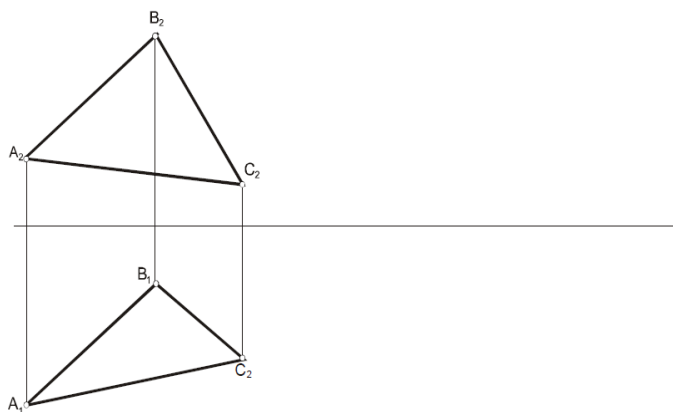
Домашні задачі

1. Визначити відстань між паралельними прямими.

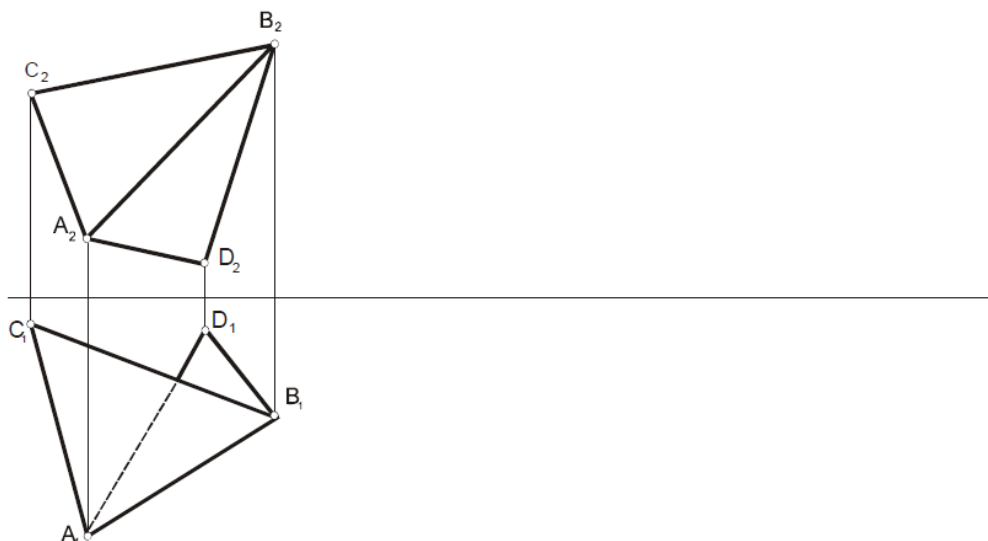


Аудиторні задачі

2. Визначити натуральну величину площини ΔABC .



3. Використовуючи спосіб плоскопаралельного переміщення, визначити натуральну величину двогранного кута.



ТЕМА 10 ПОВЕРХНІ

Література: [1. Розд. 7, 7.1–7.3, с. 61–67, розд. 9, 9.1–9.4, с. 84–97; 5. Розд. 1, 1.1–1.12, с. 7–50].

ЗАПИТАННЯ

1. Перерахуйте види поверхонь, які ви знаєте.
2. Які елементи беруть участь в утворенні цих поверхонь?
3. Що таке визначник поверхні? Які елементи складають визначник поверхні?
4. Чим нарис відрізняється від каркаса?
5. Як знайти відсутню проєкцію точки, яка лежить на лінійчатій поверхні?
6. Перерахуйте основні види поверхонь з плоскістю паралелізму. Як вони утворюються?
7. Перерахуйте головні лінії поверхні обертання.
8. Як знайти відсутню проєкцію точки, яка лежить на поверхні обертання?
9. Як утворюється поверхня гелікоїда?

ВІДПОВІДІ

1. Лінійчаті: конічні, циліндричні, гранні, поверхні з площиною паралелізму: коноїд, циліндроїд. Нелінійчаті: поверхні обертання, гвинтові, (рис. 31).
2. Елементи, що беруть участь в утворенні поверхонь:
 - а) твірна – це лінія, яка своїм рухом утворює поверхню;
 - б) напрямна – це лінія, яка задає закон руху твірної;
 - в) вісь – лінія, довкола якої обертається твірна;
 - г) площина паралелізму – це площина, паралельно до якої рухаються твірні.
3. Визначник поверхні – це мінімально достатня кількість геометричних елементів і закону їхньої взаємодії, що однозначно визначають поверхню в просторі. Позначається Δ . У визначник поверхні входять всі геометричні

елементи, що беруть участь в утворенні поверхні (див. п.2), а так само закон утворення поверхні.

4. **Каркас** – це безліч точок і ліній, що утворюють форму поверхні. **Контур** – це лінія точок дотику до поверхні проєктуючих променів (що утворюють проєктуючу циліндричну поверхню). **Нарис** – це проєкція контуру, межа проєкції поверхні.

5. Якщо точка належить поверхні, отже вона лежить на лінії, що належить цій поверхні. Отже, через точку необхідно провести твірну, згідно із законом утворення цієї поверхні.

6. Коноїд, циліндроїд, гіперболічний параболоїд (гіпар або «коса площина»). Усі ці поверхні утворюються рухом прямолінійної твірної по двох напрямних, причому в кожному положенні всі твірні паралельні деякій площині, так званій площині паралелізму.

7. Всі точки твірної під час обертання довкола осі описують кола, які називають паралелями. Найбільша паралель – екватор, найменша – горло (або горловина). Криві, обертання, що виходять у перетині тіла, площиною, що проходить через вісь, називаються меридіанами. Меридіан, паралельний площині проєкції, називається головним меридіаном.

8. Необхідно побудувати паралель, на якій лежить ця точка.

9. Поверхня гелікоїда утворюється обертанням відрізка прямої лінії довкола осі й одночасно поступальною ходою паралельно осі.

Приклади різного виду поверхонь дивись на рисунку 31.

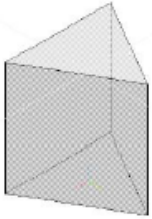
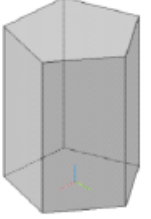
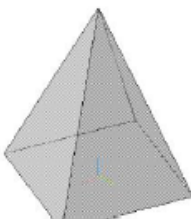




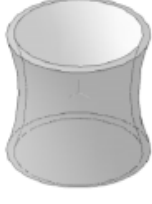
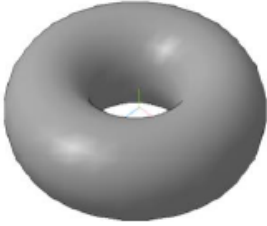
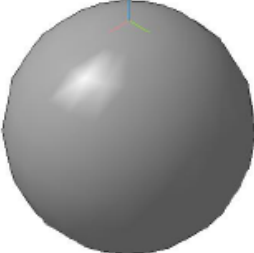
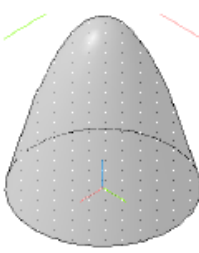

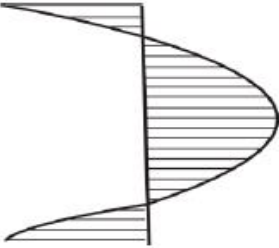
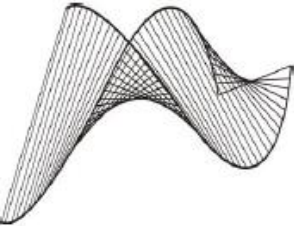

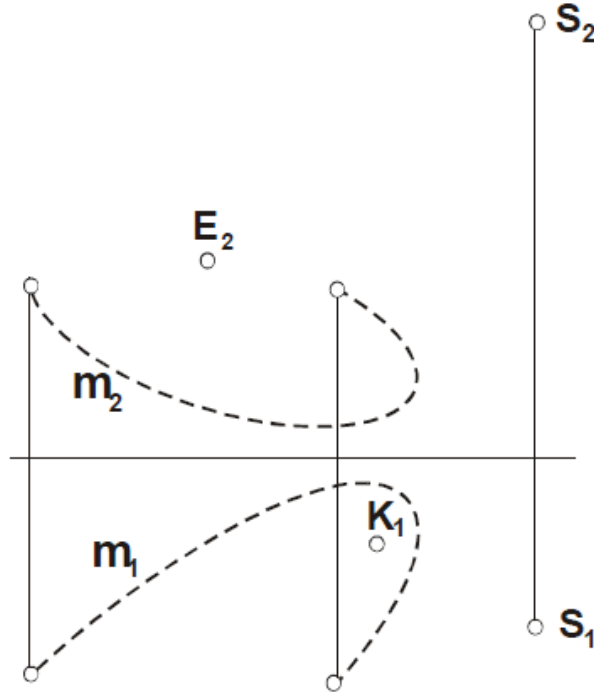
<i>Грані поверхні</i>			
<i>Тригранна призма</i>	<i>П'ятигранна призма</i>	<i>Чотиригранна піраміда</i>	<i>Тригранна піраміда</i>
			
<i>Поверхні обертання (лінійчаті)</i>			
<i>Циліндр</i>	<i>Циліндр</i>	<i>Конус</i>	<i>Гіперболоїд обертання</i>
			
<i>Поверхні обертання (нелінійчаті)</i>			
<i>Тор</i>	<i>Сфера</i>	<i>Параболоїд обертання</i>	<i>Еліпсоїд обертання</i>
			
<i>Лінійчаті нерозгортні поверхні (поверхні з площиною паралелізму – поверхні Каталана)</i>			
<i>Коноїд</i>	<i>Циліндроїд</i>	<i>Коса площина, або гіперболічний параболоїд</i>	
			

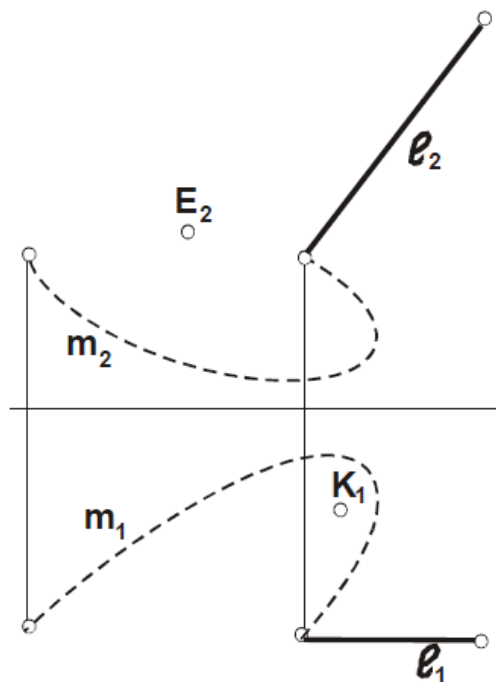
Рисунок 31 – Приклади різного виду поверхонь [9, с. 34–35]

Домашні задачі

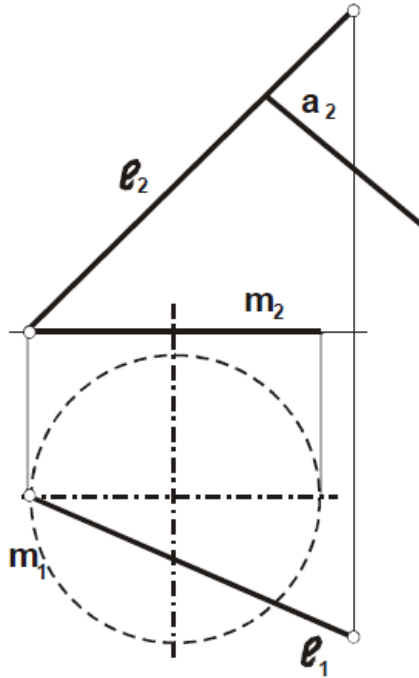
1. Побудувати нарис і каркас конічної поверхні, $\Delta(l, m, S)$. Знайти відсутні проєкції точок E і K , які належать конічній поверхні. Визначити видимість нарисних ліній.



2. Побудувати нарис і каркас циліндричної поверхні, $\Delta(l, m)$. Знайти відсутні проєкції точок E і K , які належать циліндричній поверхні. Визначити видимість нарисних ліній.

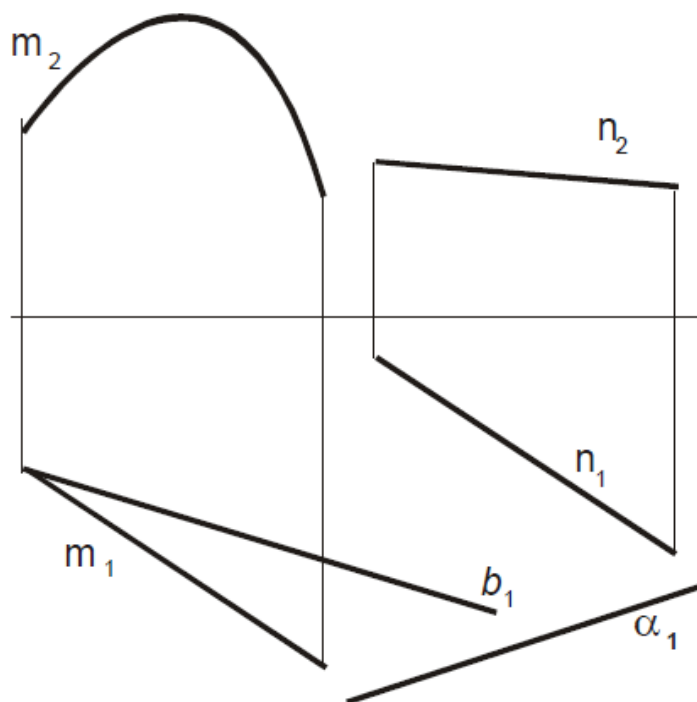


3. Побудувати нарис циліндричної поверхні, заданої визначником $\Delta(l, m)$.
 Знайти відсутню проєкцію лінії a , яка лежить на циліндричній поверхні.
 Визначити видимість.



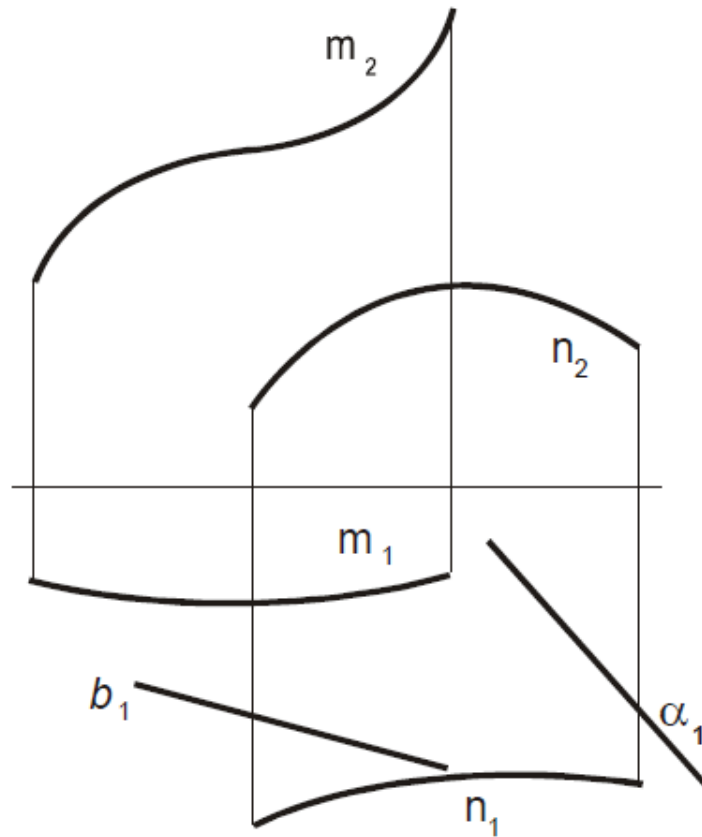
Аудиторні задачі

4. Побудувати каркас і нарис коноїда, заданого визначником $\Delta(m, n, \alpha)$.
 Знайти проєкцію лінії b_2 , яка належить коноїду. Визначити видимість.

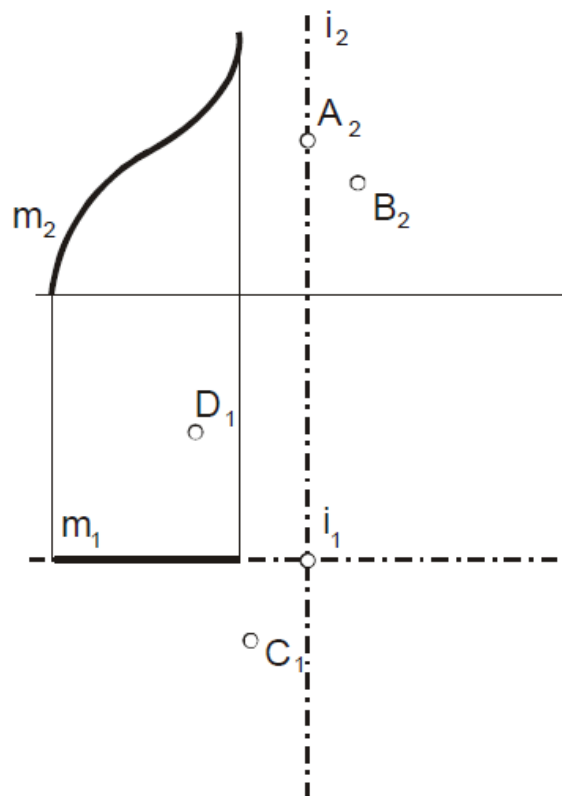


5. Побудувати каркас і нарис циліндроїда, заданого визначником $\Delta(m, n, \alpha)$.

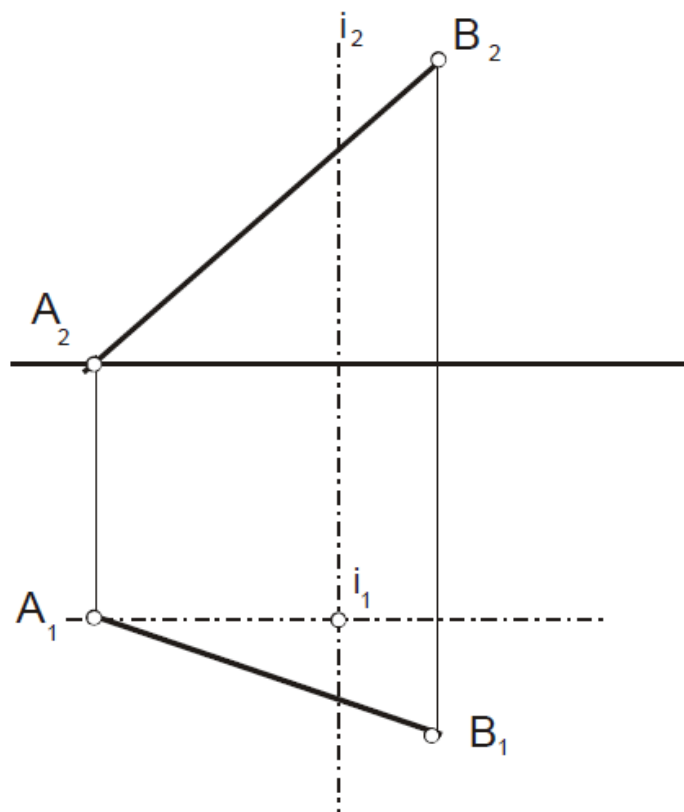
Знайти проєкцію лінії b_2 , яка належить циліндроїду. Визначити видимість.



6. Побудувати нарис поверхні обертання загального виду. Знайти відсутні проєкції точок A, B, C і D, які належать цій поверхні.



6. Побудувати нарис поверхні однопорожнинного гіперболоїда обертання.



ТЕМА 11 ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ ПРОЄКТУЮЧОЮ ПЛОЩИНОЮ І ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ ПРЯМОЮ ЛІНІЄЮ

Література: [1. Розд. 10, 10.1–10.4, с. 103–109; 5. Розд. 2, 2.1–2.3, с. 52–62].

ЗАПИТАННЯ

1. Яка властивість проєктувальної площини спрощує розв'язання задачі?

Що це означає?

2. Які точки є головними (або опорними, або характерними)?

3. Який вигляд має лінія перетину поверхні з площиною?

4. Як знайти точки перетину прямої з поверхнею?

5. Які лінії виходять при перетині поверхні конуса площиною?

6. Які лінії виходять при перетині поверхні сфери площиною?

ВІДПОВІДІ

1. Властивість збірності: всі точки, лінії, що належать проєктуючій площині, проєктуються на слід площини. Це означає, що лінія перетину площини і поверхні вже визначена і збігається із слідом площини. Необхідно тільки побудувати відсутню проєкцію лінії перетину.

2. Точки, які належать лінії перетину і лежать на головних лініях поверхні. У поверхні обертання – головний меридіан, екватор, горло. У лінійчатих поверхнях – напрямні і нарисові твірні.

3. При перетині поверхні з площиною виходить плоска фігура, яку називають перерізом. Переріз обмежується кривою або ламаною лінією.

4. Використовується алгоритм розв'язання І позиційної задачі: 1) через пряму проводять допоміжну проєктуючу площину-посередник; 2) знаходять лінію перетину площини-посередника з поверхнею; 3) відзначають точки перетину знайденої лінії із заданою прямою, які і є точками перетину прямої з поверхнею.

5. Конічні перерізи. Залежно від положення січної площини в перерізі конуса обертання можуть вийти різні лінії, так звані лінії конічних перерізів (рис. 32).

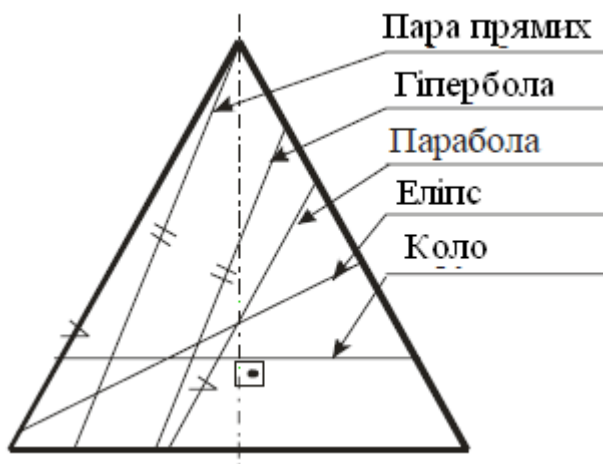


Рисунок 32 – Конічні перерізи

Якщо січна площина проходить через вершину конуса, в його перерізі виходить пара твірних прямих. У результаті перерізу конуса площиною, перпендикулярної осі конуса, виходить коло. Якщо січна площина паралельна одній із твірних конуса, у перерізі виходить парабола.

Якщо січна площина паралельна двом твірним конуса, у перерізі виходить гіпербола. Якщо січна площина не паралельна жодній із твірних конуса і не перпендикулярна осі – у перерізі виходить еліпс.

6. При перетині поверхні сфери площиною завжди виходить коло, діаметр і положення якого залежать від положення січної площини відносно центра сфери і площини проєкцій.

Приклади перерізу поверхонь проєктуючими площинами дивись на рисунку 33.

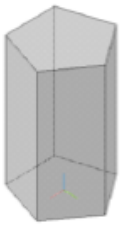
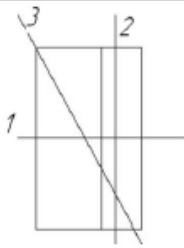
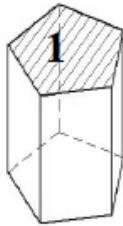
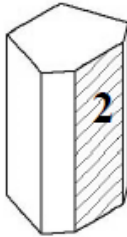

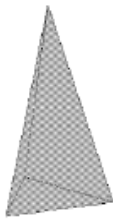
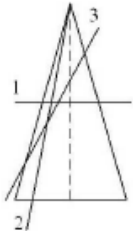



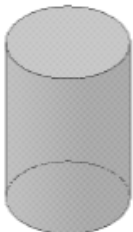
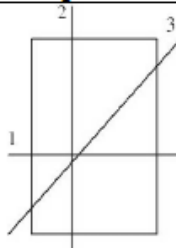
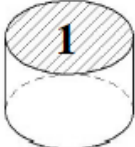



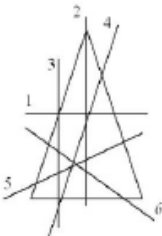






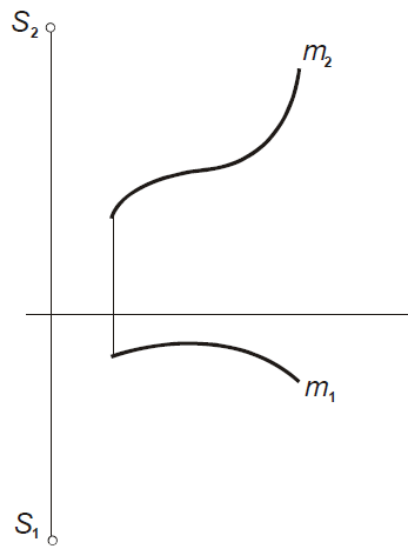
<i>Перерізи призми</i>				
<i>Перерізи призми – многокутники</i>				
				
<i>Перерізи піраміди</i>				
<i>Перерізи піраміди – многокутники</i>				
				
<i>Перерізи циліндра</i>				
<i>Перерізи циліндра</i>	<i>Коло</i>	<i>Прямокутник</i>	<i>Еліпс</i>	
				
<i>Перерізи конуса</i>				
<i>Перерізи конуса</i>	<i>Коло</i>	<i>Трикутник</i>		
				
<i>Гіпербола</i>	<i>Парабола</i>	<i>Еліпс</i>	<i>Неповний еліпс</i>	
				

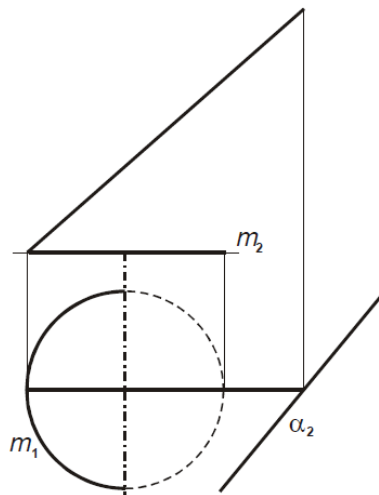
Рисунок 33 – Переріз поверхонь проєктуючими площинами [9, с. 37]

Домашні задачі

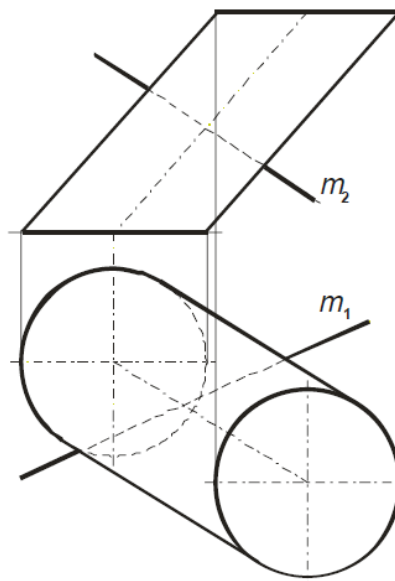
1. Побудувати лінію перетину конічної поверхні $\Delta(m, \ell, S)$ з площиною Π_2 .



2. Побудувати проєкції циліндричної поверхні $\Lambda(m, l)$. Циліндр обмежений площиною α . Визначити видимість елементів поверхні.



3. Побудувати точки перетину прямої m з поверхнею циліндра. Визначити видимість.



4. Побудувати лінію перетину коноїду (клин) $\Delta(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \Pi_2)$ з площиною Δ .

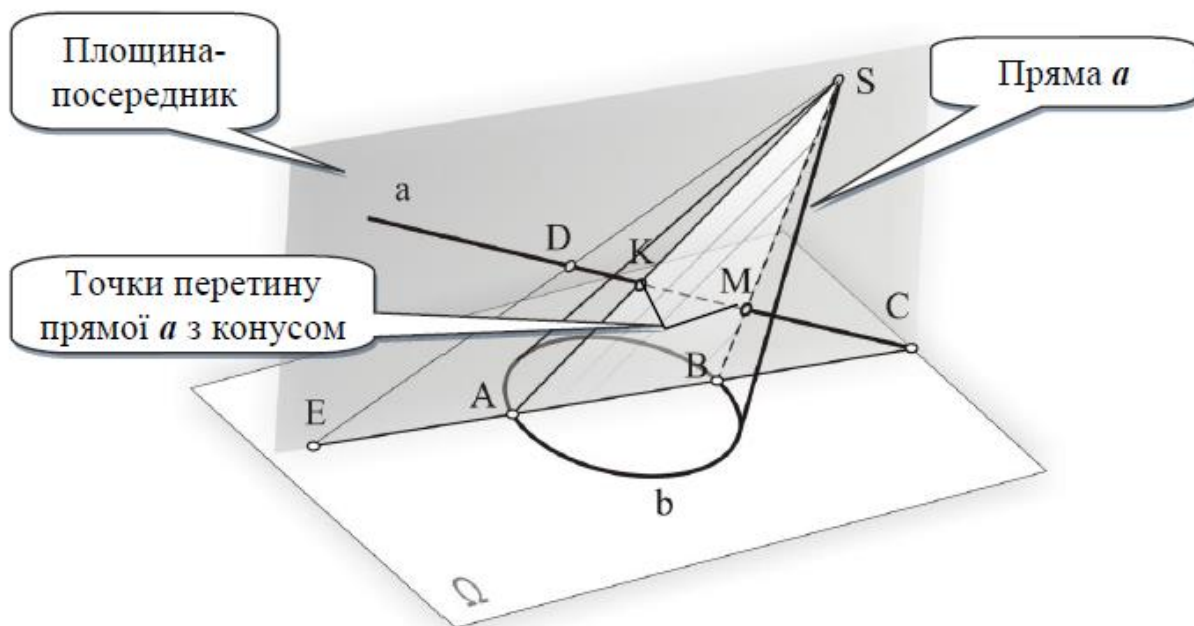
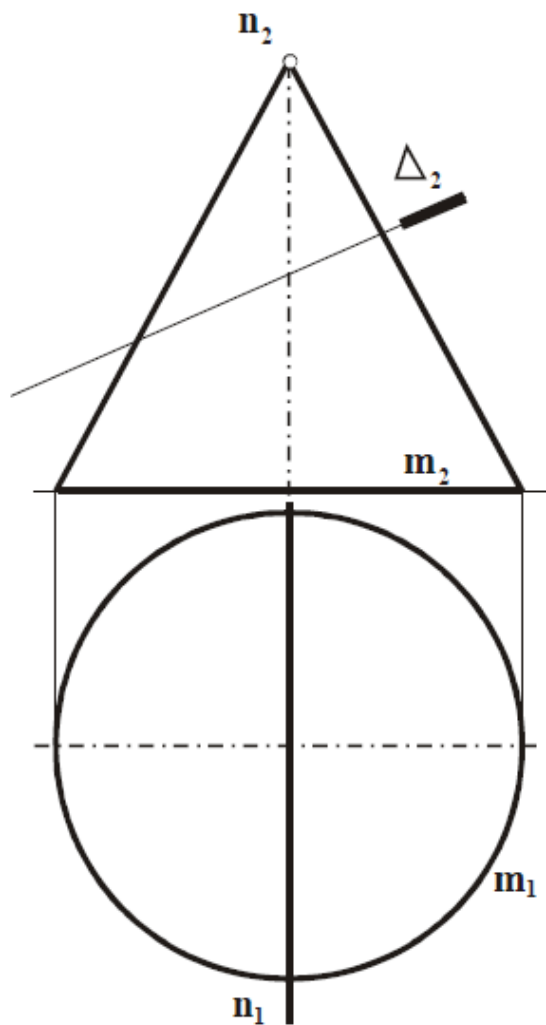
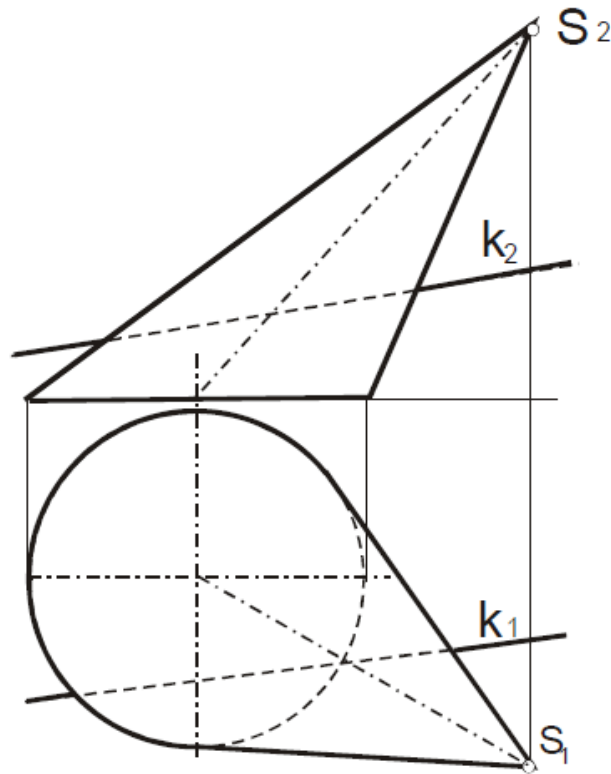
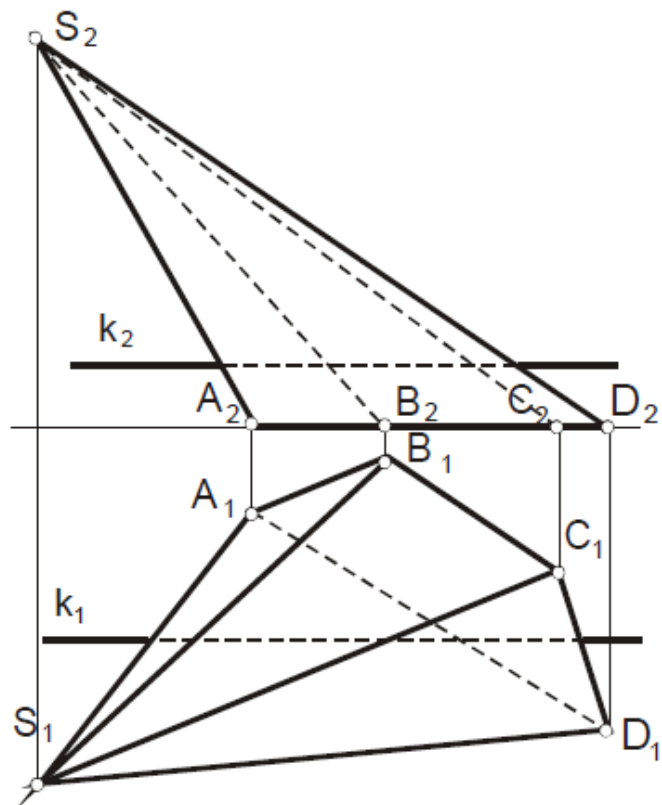


Рисунок 34 – Перетин прямої з конусом [9, с. 44]

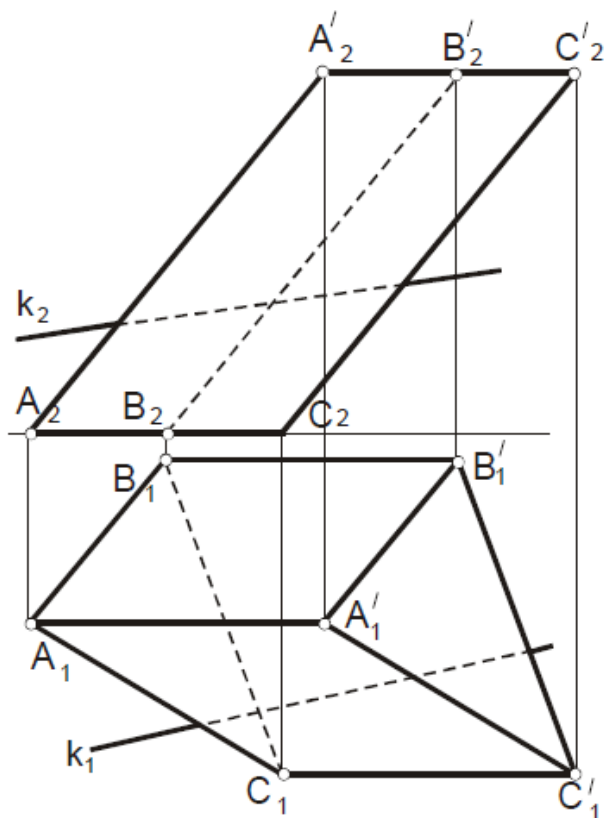
5. Побудувати точки перетину прямої k з поверхнею конуса. Визначити видимість, (див. рис. 34).



6. Знайти точки перетину прямої k з поверхнею піраміди. Визначити видимість.

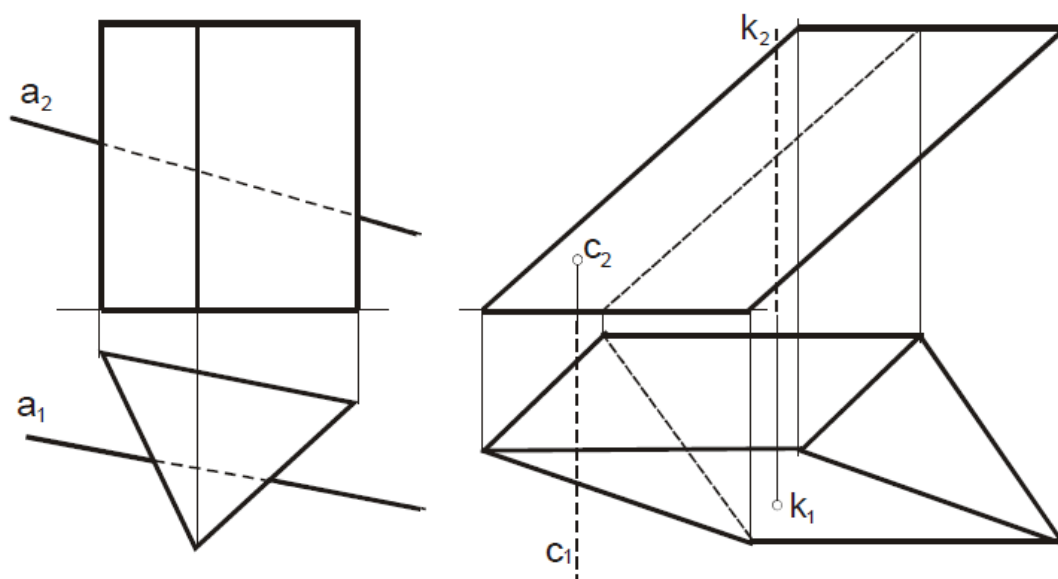


7. Знайти точки перетину прямої k з поверхнею призми. Визначити видимість.

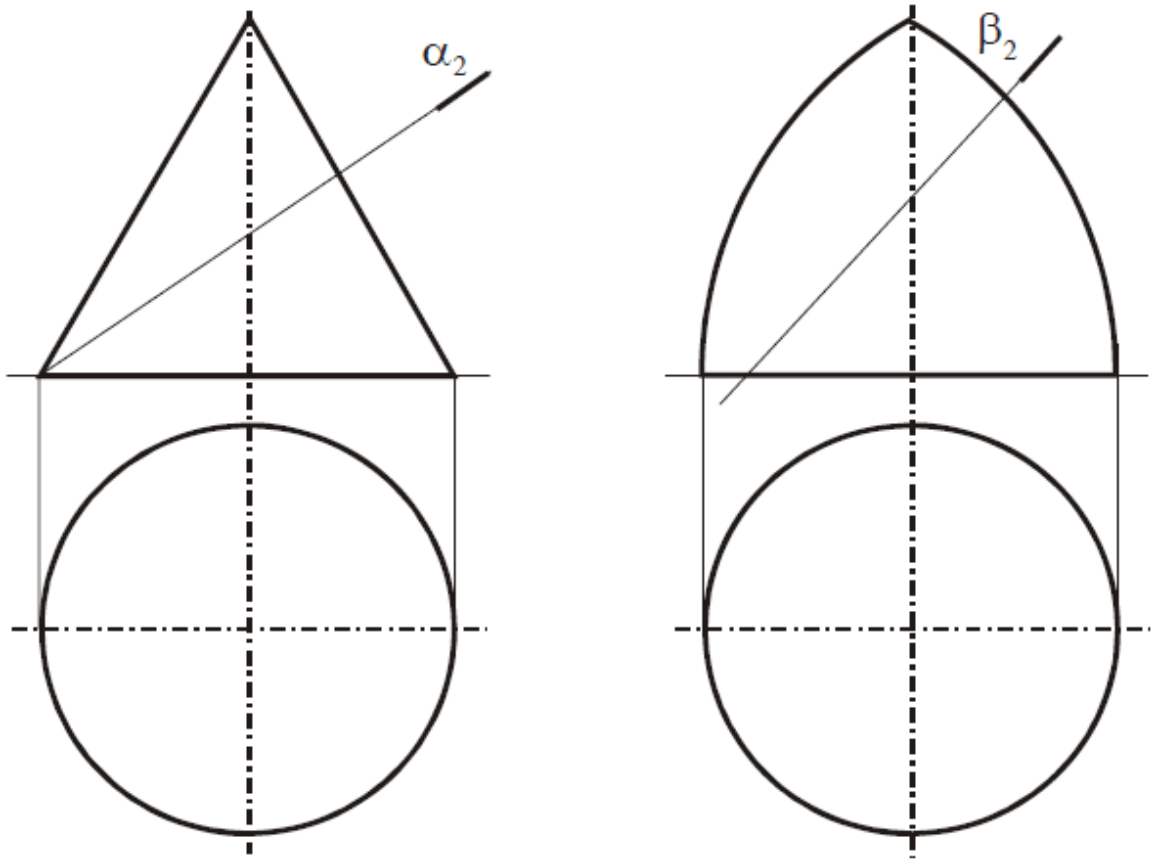


Аудиторні задачі

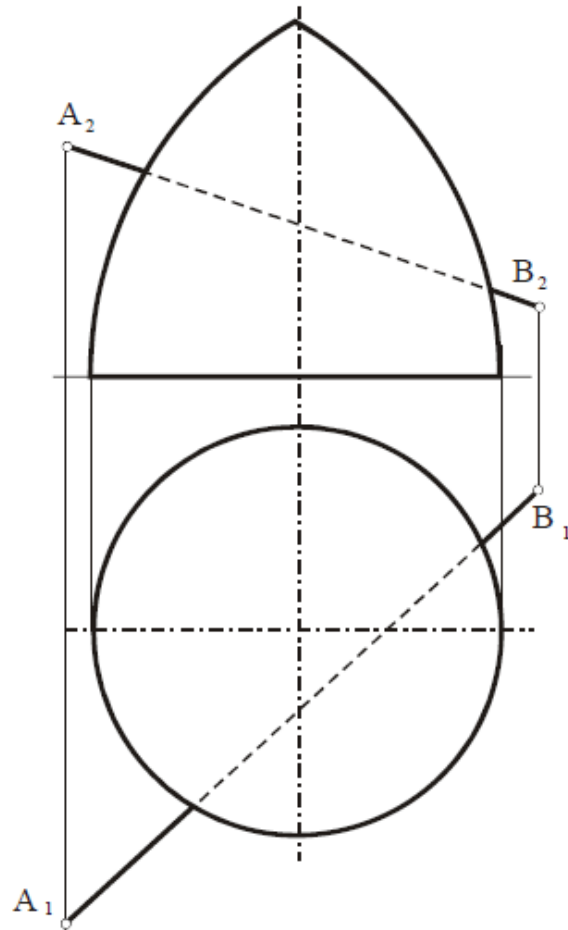
8. Побудувати точки перетину прямої з призмою. Визначити видимість.



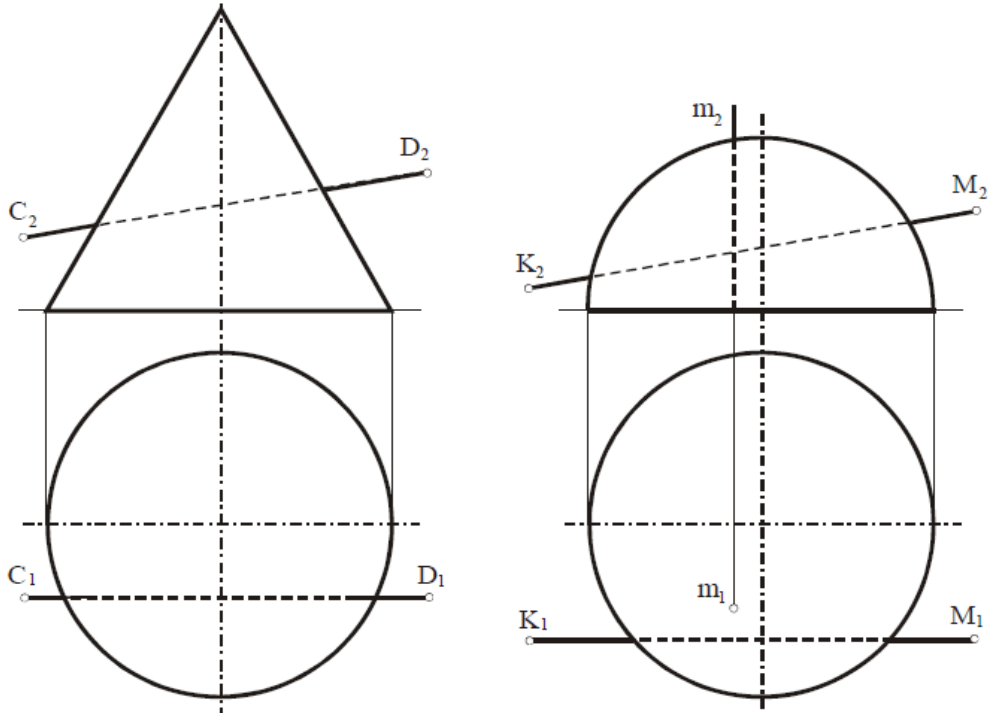
9. Побудувати лінію перерізу площини з поверхнею.



10. Побудувати точки перетину прямої АВ з поверхнею. Визначити видимість.



11. Побудувати точки перетину прямої з поверхнею. Визначити видимість.



ТЕМА 12 ПЕРЕТИН ПОВЕРХНІ ПЛОЩИНОЮ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

Література: [1. Розд. 10, 10.1–10.4, с. 103–109; 5. Розд. 2, 2.1–2.3, с. 52–62].

ЗАПИТАННЯ

1. Які спрощення вводяться при розв'язанні задач такого типу?
2. Які особливості існують при знаходженні лінії перерізу в новій системі площин?
3. Як визначити натуральну величину перерізу?

ВІДПОВІДІ

1. Для знаходження лінії перерізу поверхні з площиною загального положення необхідно скористатися перетворенням креслення так, щоб площина загального положення стала проектуючою. Для цього нову площину необхідно поставити перпендикулярно лінії рівня, а саме: $x_{14} \perp h_1$ або $x_{24} \perp f_2$ (у прикладі $x_{14} \perp A_1C_1$ див. рис. 35).

2. У новій системі площин Π_1 - Π_4 необхідно провести на Π_1 площину головного меридіана паралельно осі x_{14} .

Необхідно визначити нарисові точки видимості лінії перерізу в системі Π_1 - Π_2 (у прикладі точка 7). Для її знаходження площину ABC перетинаємо площиною головного меридіана. Результатом перетину є фронталь 5-6, яка при перетині з головним меридіаном в площині Π_2 визначає точку 7).

3. Проводять вісь x_{45} паралельно сліду площини $A_4B_4C_4$.

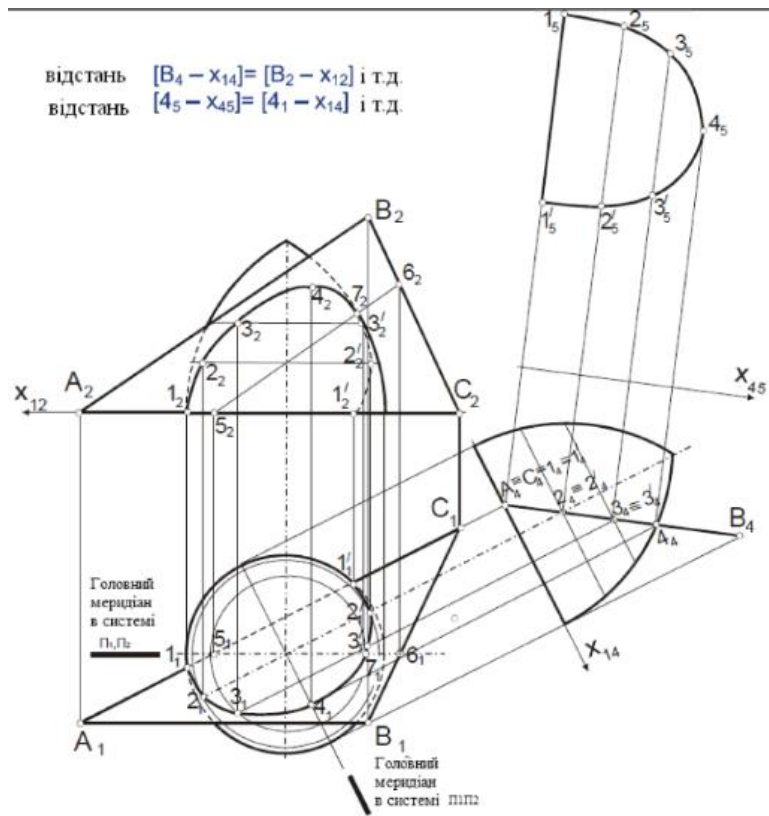
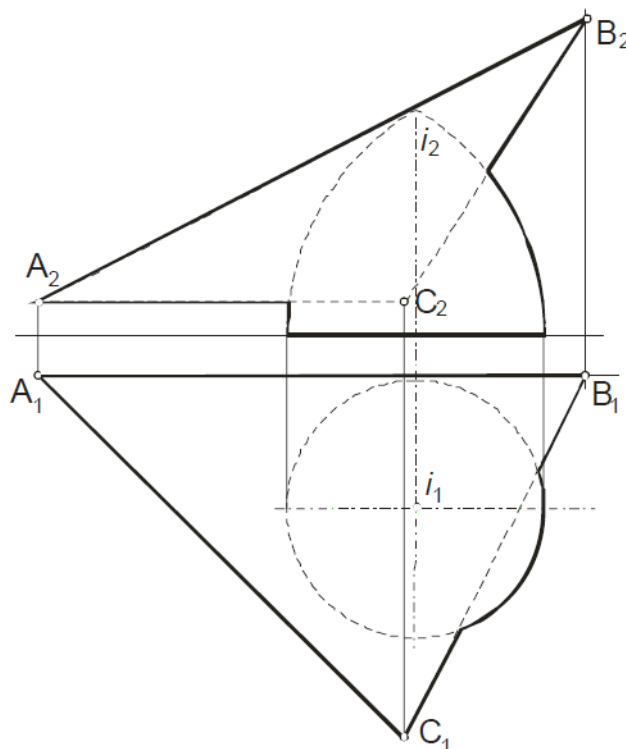


Рисунок 35 – Приклад визначення натуральної величини перерізу тора площиною загального положення

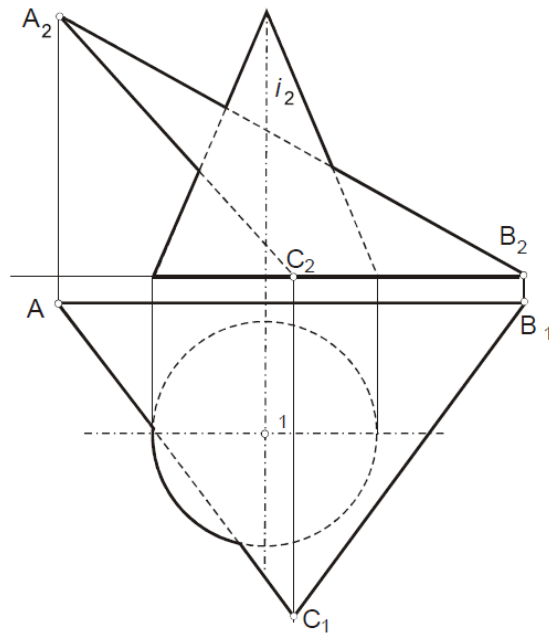
Домашні задачі

1. Побудувати лінію перерізу тора площиною ΔABC . Знайти натуральну величину плоского перерізу.



Аудиторні задачі

2. Побудувати лінію перерізу конуса площиною трикутника ABC . Знайти натуральну величину плоского перерізу.



ТЕМА 13 ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ. СПОСОБИ ПОБУДОВИ ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ

Література: [1. Розд. 11, 11.1–11.3, с. 110–118; 2. Част. 3, 3.1–3.7, с. 46–63; 5. Розд. 2, 2.4, с. 73–86].

ЗАПИТАННЯ

1. Перерахуйте можливі види перетину двох поверхонь.
2. Який вигляд має лінія перетину: а) двох гранних поверхонь; б) двох кривих поверхонь; в) гранної і кривої поверхонь.
3. У якому випадку задача знаходження лінії перетину спрощується?
4. Які способи використовують при розв'язанні задач на перетин гранних поверхонь?
5. У якому випадку доцільно застосовувати спосіб допоміжної проєктуючої січної площини? Алгоритм знаходження лінії перетину.
6. Які точки лінії перетину є характерними (опорними або головними)?
7. У яких випадках застосовується спосіб допоміжних концентричних сфер?
8. На якій властивості заснований спосіб допоміжних сфер?

ВІДПОВІДІ

1. Повний перетин однієї поверхні з іншою (проникнення) і частковий перетин (врізка). При проникненні виходять дві замкнуті лінії. При врізці – одна замкнута лінія перетину.
2. Лінія перетину: а) при перетині двох гранних поверхонь є просторовою ламаною лінією; б) при перетині двох кривих поверхонь, в загальному випадку, є просторовою кривою лінією (одна або більше); в) при перетині гранної і кривої поверхонь є сукупністю просторових плоских кривих, з переломами на ребрах.
3. Якщо одна з поверхонь є проєктуючою (циліндр, призма), то розв'язання задачі значно спрощується. Оскільки проєктуючі поверхні володіють властивістю збірності, то на одній з проєкцій лінія перетину вже збігається із

слідом проєктуючої поверхні. Тому розв'язання зводиться до визначення відсутньої проєкції лінії перетину.

4. Існують два способи: а) спосіб ребер: знаходять точки перетину ребер однієї поверхні з гранями іншої і навпаки по алгоритму розв'язання I позиційної задачі; б) спосіб граней – розв'язується по алгоритму II позиційної задачі.

5. Лише у тому випадку, коли дві поверхні перетинаються із заданою площиною-посередником по простих для побудови лініях (наприклад: лінійчаті поверхні перетинаються по твірних, а поверхні обертання по колах паралелях).

Алгоритм знаходження лінії перетину:

а) задані поверхні перетинають допоміжною проєктуючою площиною-посередником;

б) знаходять лінії перетину площини-посередника з кожною із заданих поверхонь;

в) відзначають точки перетину отриманих ліній, які і є точками лінії перетину заданих поверхонь.

6. До таких точок відносяться: а) верхня і нижня точки відносно тієї або іншої площини проєкцій, або ближня і дальня точки; б) точки, розташовані на нарисах поверхонь або точки видимості.

7. Спосіб допоміжних концентричних сфер застосовується: а) за перетину двох поверхонь обертання; б) якщо осі поверхонь перетинаються; в) поверхні мають спільну площину симетрії, яка паралельна одній з площин проєкцій.

8. Співосні поверхні обертання (тобто поверхні із спільною віссю) завжди перетинаються по колах. Як допоміжну січну поверхню використовують сферу, оскільки сфера єдина поверхня з незліченною множиною осей обертання.

Короткі теоретичні відомості про способи побудови лінії взаємного перетину поверхонь

Лінія перетину двох поверхонь (лінія переходу) є лінія, що належить обом поверхням. Форма її залежить від форми і взаємного розташування поверхонь.

Основний спосіб побудови лінії перетину поверхонь – спосіб допоміжних січних поверхонь (спосіб посередників).

Послідовність побудов:

1. Вибрати посередники (площину або поверхню), які перетинають задані поверхні по найпростіших за формою і побудові лініях.
2. Перетнути поверхні посередниками, за допомогою яких визначаються опорні точки шуканої лінії (точки, що належать нарисам проєкцій поверхонь; крайні праві і ліві, найвищі і нижчі точки).
3. Побудувати лінії перетину поверхонь вказаними посередниками і знайти точки перетину побудованих ліній в кожному посереднику.
4. Перетнути поверхні посередниками, за допомогою яких визначаються проміжні точки, і побудувати ці точки.
5. Послідовно з'єднати точки з урахуванням видимості.

На рисунку 36 наведений приклад застосування площини окремого положення як посередника.

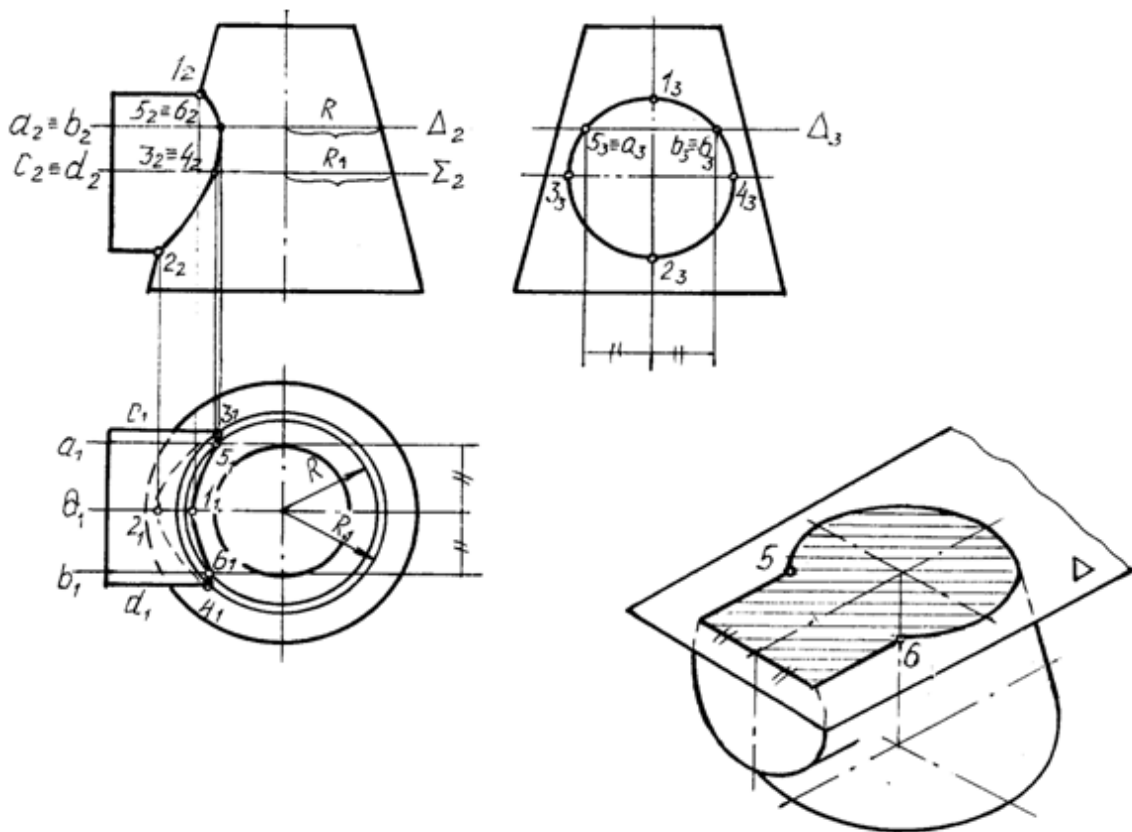


Рисунок 36 – Приклад застосування площини окремого положення як посередника при побудові лінії перетину поверхонь

Умови для використання концентричних сфер як посередників:

1. Обидві поверхні мають бути поверхнями обертання.
2. Осі поверхонь повинні перетинатися (точка перетину – центр сфер).
3. Осі обох поверхонь мають бути паралельні одній і тій самій площині проєкцій.

Приклад застосування сфер як посередників наведений на рисунку 37.

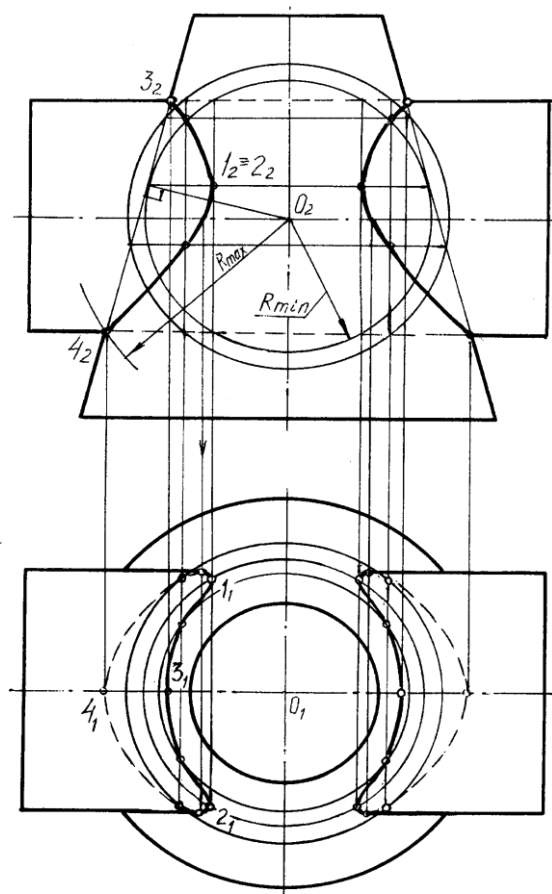


Рисунок 37 – Приклад застосування сфер як посередників під час побудови лінії перетину поверхонь

Особливі випадки перетину поверхонь

Теорема Монжа

Якщо дві поверхні обертання другого порядку (циліндр і конус, два конуса, два циліндри, конус і еліпсоїд і т. п.) описані (або вписані) навколо загальної для них сфери, то лінії їхнього перетину розпадаються на дві плоскі криві (рис. 38).

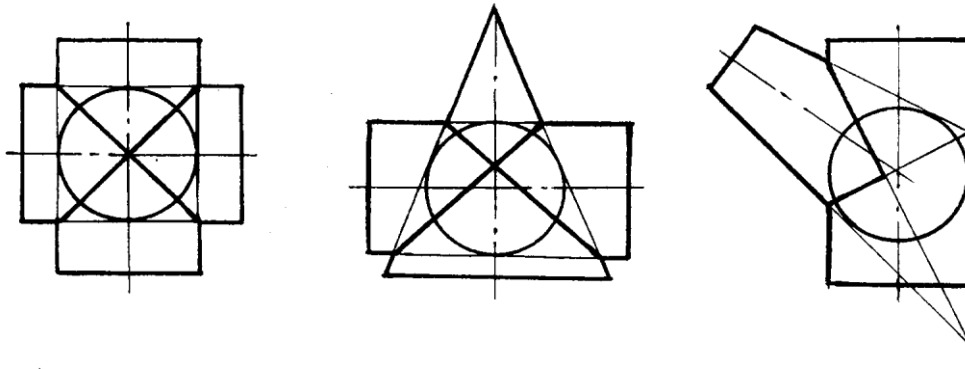


Рисунок 38 – Застосування теореми Монжа при побудові лінії перетину поверхонь обертання

Наслідок. Якщо дві поверхні другого порядку перетинаються по одній плоскій кривій, то вони перетинаються ще по одній плоскій кривій.

Теорема про форму проєкцій лінії перетину

Якщо дві поверхні другого порядку мають спільну площину симетрії, то лінія перетину їх проєктується на площину, паралельну до площини симетрії у вигляді кривої другого порядку (рис. 39).

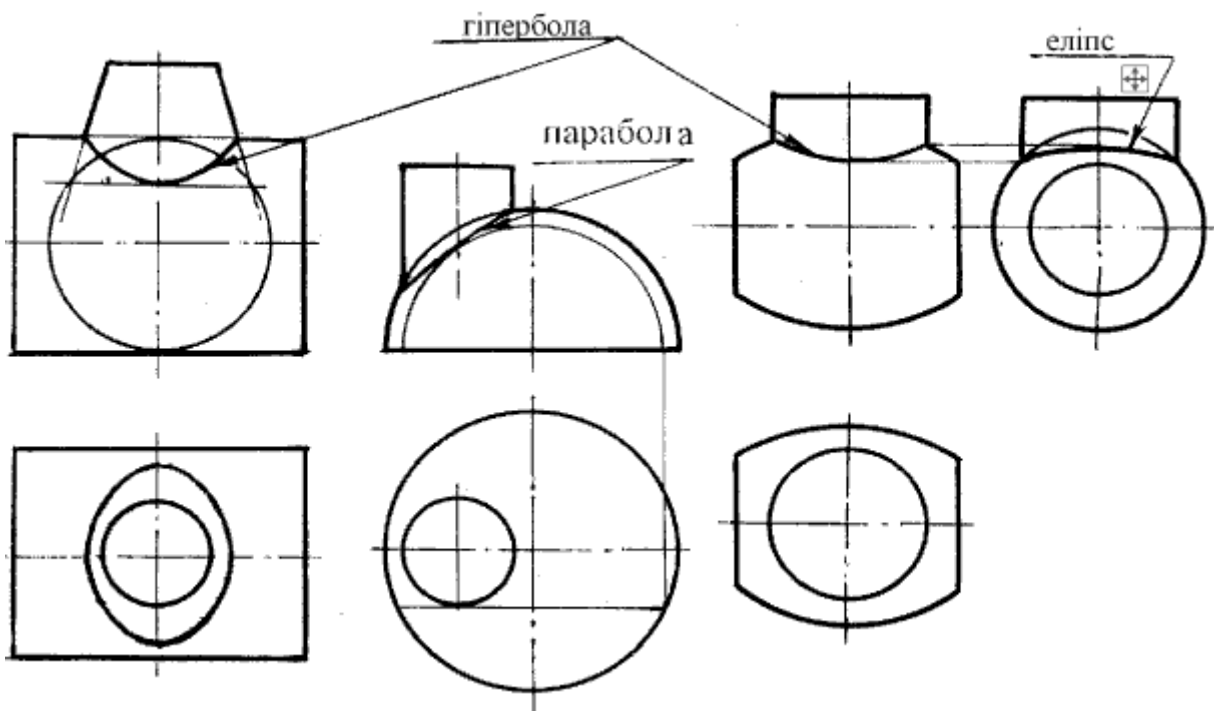
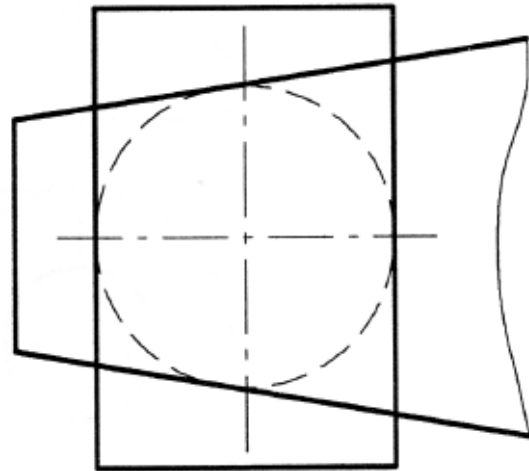
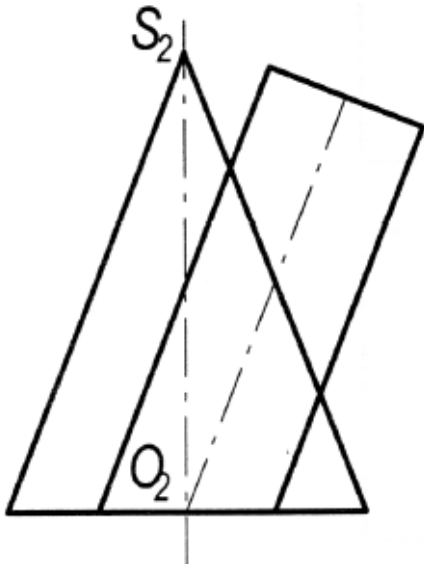


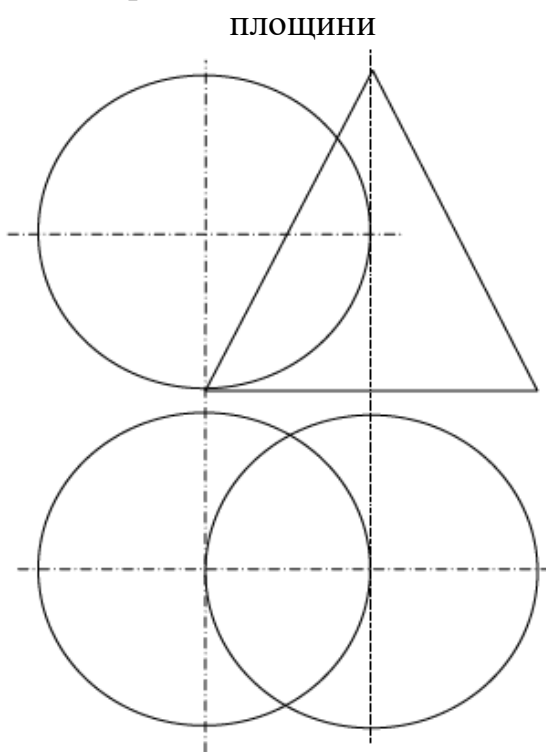
Рисунок 39 – Форми проєкцій ліній перетину

Домашні задачі

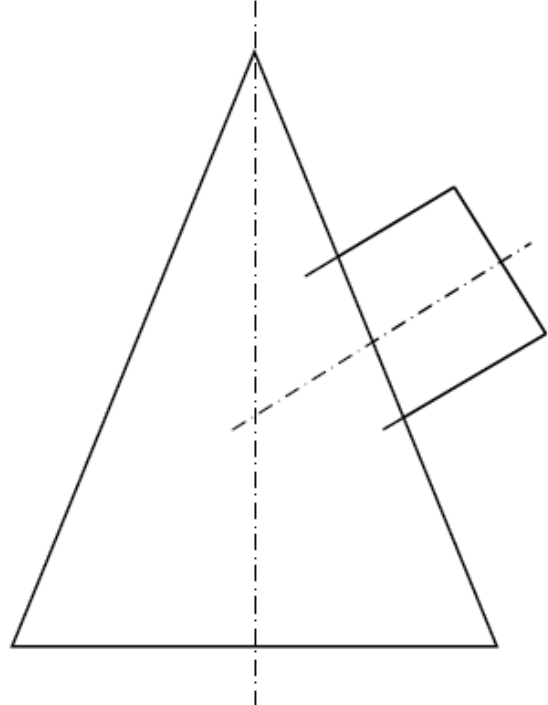
1. Побудувати проєкції ліній перетину двох геометричних тіл.



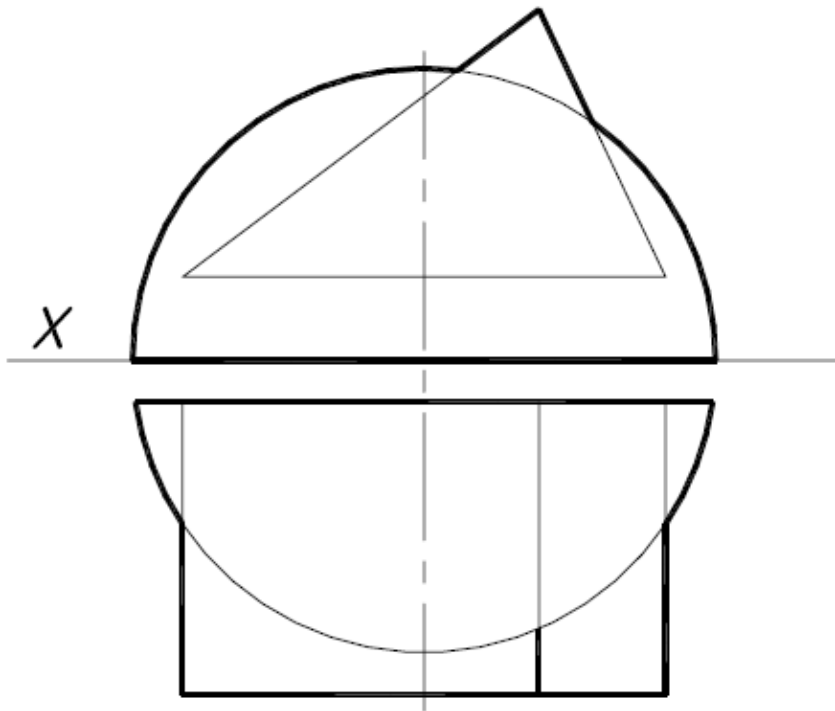
2. Побудуйте лінію перетину заданих поверхонь, використовуючи для цього посередники:



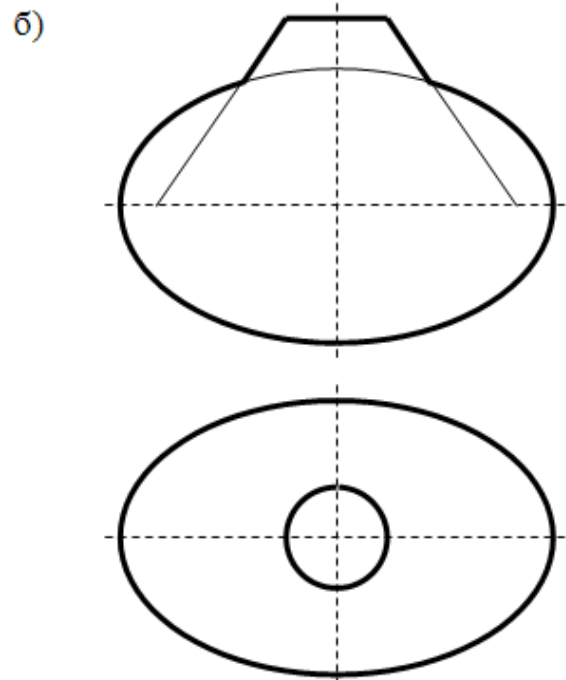
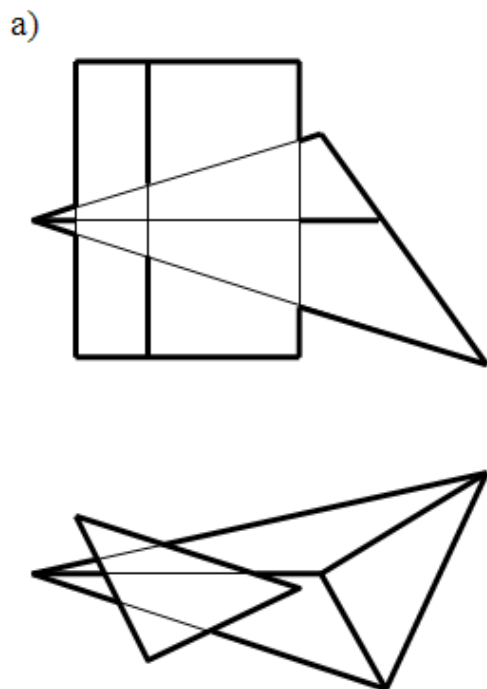
концентричні сфери



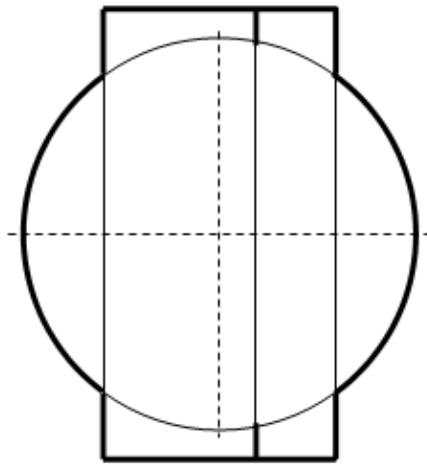
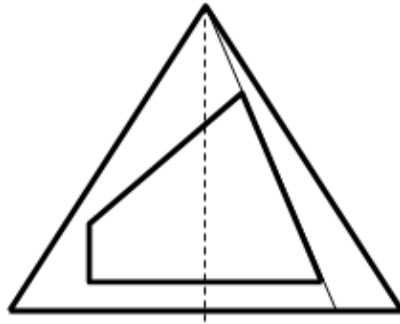
3. Побудувати лінію перетину поверхонь. Визначити видимість.



4. Побудувати проєкції ліній перетину поверхонь.

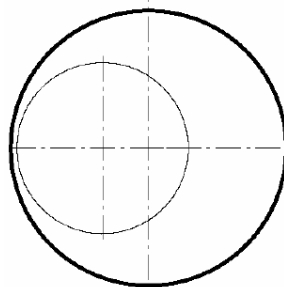
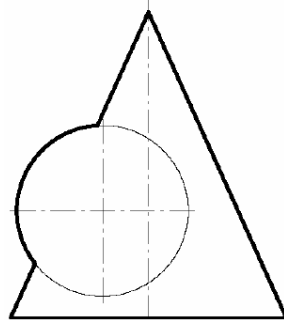


В)

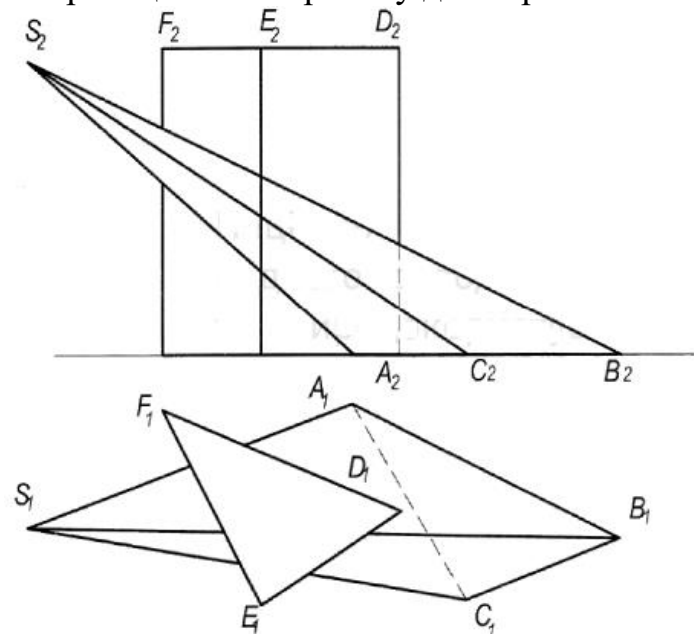


Аудиторні задачі

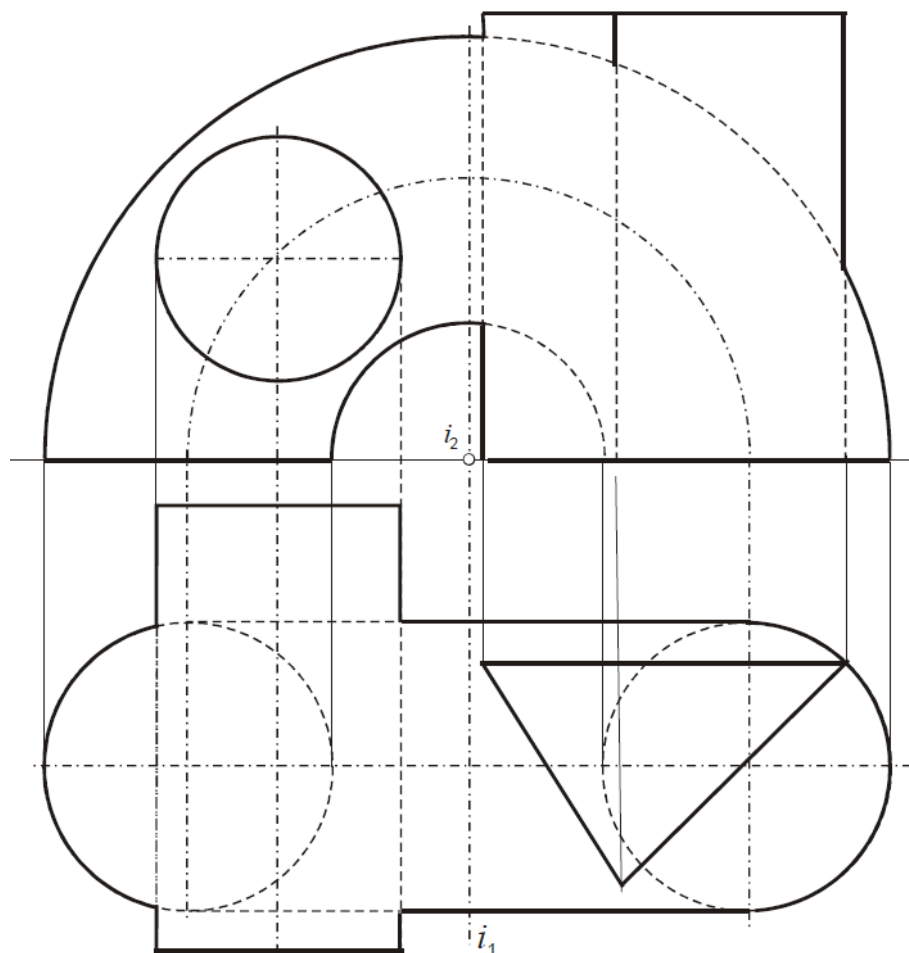
5. Побудувати лінію перетину поверхонь. Визначити видимість.



6. Побудувати проєкції лінії перетину двох гранних поверхонь.



9. Побудувати проєкції ліній перетину трьох поверхонь. Визначити видимість.



ТЕМА 14 РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

Література: [1. Розд. 13, 13.1–13.3, с. 127–134; 2. Част. 3, 3.9–3.10, с. 22–42].

Розгорткою поверхні якого-небудь тіла називається фігура, отримана поєднанням поверхні цього тіла з площиною без розривів і складок.

Розгортки багатогранних поверхонь отримують поєднанням її граней з однією площиною так, щоб вийшла зв'язана фігура.

Побудову *розгорток призми* можна виконати **способом нормального перетину** або **способом розкочування**. *Спосіб нормального перетину* заснований на тому, що сторони фігури нормального перетину розгортаються в пряму лінію, перпендикулярну ребрам призми (рис. 40).

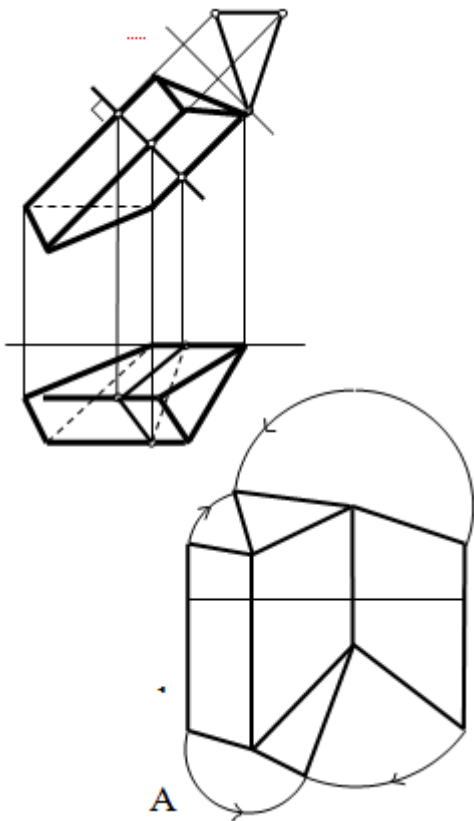


Рисунок 40 – Побудова розгортки способом нормального перерізу

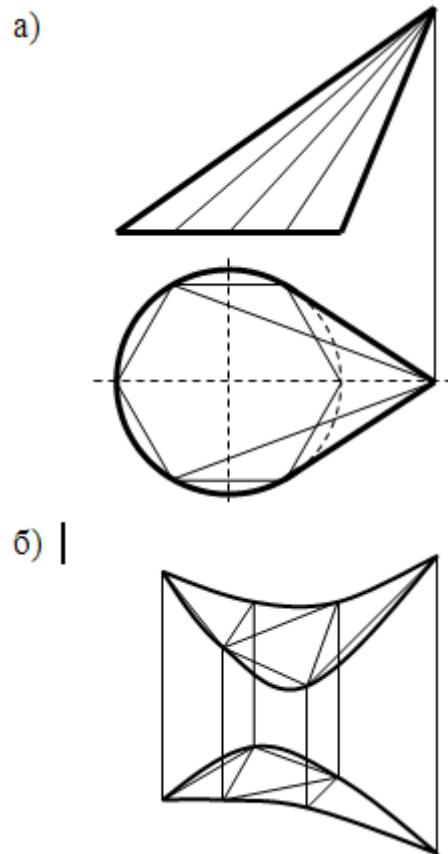


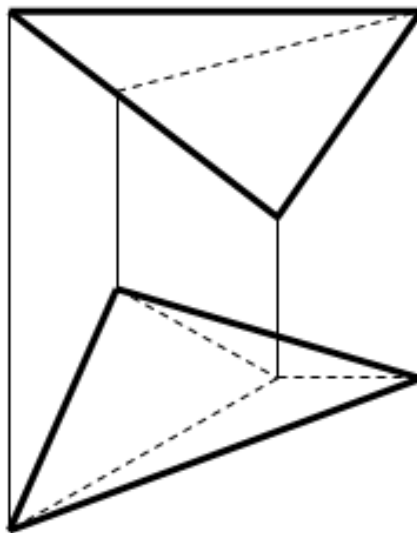
Рисунок 41 – Побудова розгорток за допомогою апроксимуючих поверхонь

Розгортка піраміди виконується шляхом послідовної побудови натуральних величин трикутників бічних граней.

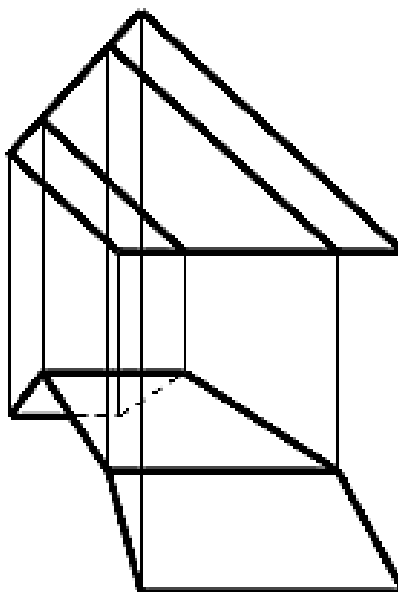
Розгортки кривих поверхонь, які розгортаються і які не розгортаються, будують наближеними графічними способами. Суть цих способів полягає в апроксимації заданих поверхонь вписаними (описаними) ділянками таких поверхонь, для яких існують точні графічні способи побудови розгорток. Найчастіше апроксимуючими поверхнями слугують гранні поверхні: піраміди (рис. 41, а), призми, поверхні загального вигляду, складені з трикутних граней (рис. 41, б), а також циліндричні і конічні поверхні.

Домашні задачі

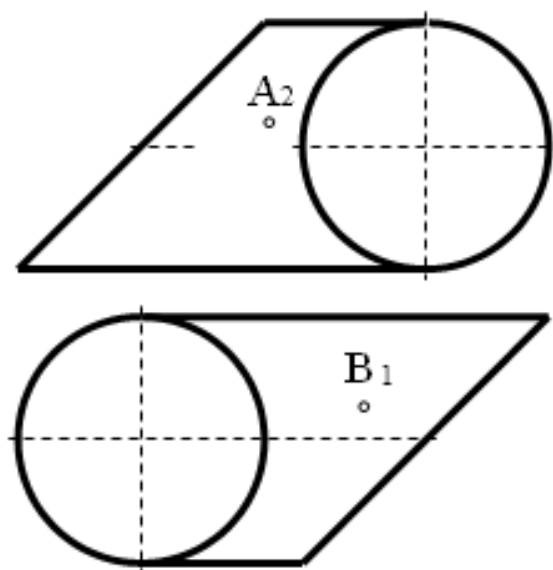
1. Побудувати розгортку поверхні піраміди $SABC$.



2. Побудувати розгортку призматичної поверхні способом нормального перерізу.

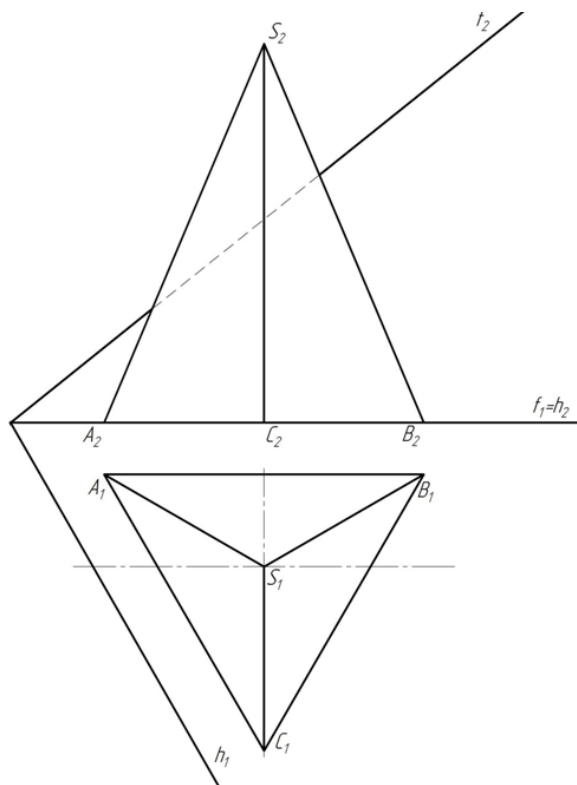


3. Побудувати розгортку і визначити найкоротшу відстань між точками A і B , які лежать на поверхні циліндра.

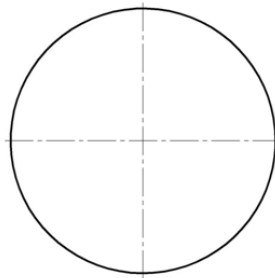
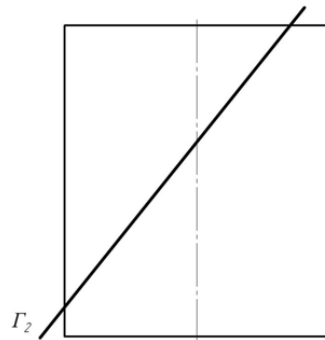


Аудиторні задачі

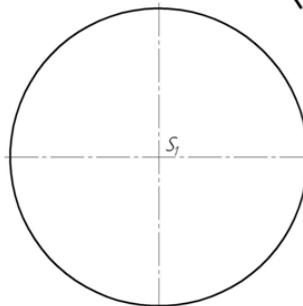
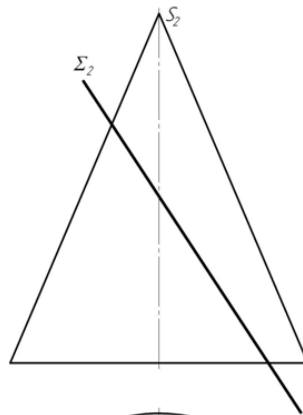
4. Побудувати лінію перетину піраміди площиною $\Theta(f, h)$ та розгортку бічної поверхні з нанесенням лінії перетину.



5. Побудувати лінію перетину циліндра площиною Γ та розгортку бічної поверхні з нанесенням лінії перетину.



6. Побудувати лінію перетину конуса площиною Σ та розгортку бічної поверхні з нанесенням лінії перетину.



ТЕМА 15 АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЄКЦІЇ

Література: [1. Розд. 14, 14.1–14.4, с. 135–147; 2. Част. 3, 3.11–3.12, с. 75–86].

ЗАПИТАННЯ

1. У чому полягає спосіб аксонометричного проектування?
2. Основна теорема аксонометрії. Теорема Польке.
3. Що називається коефіцієнтом спотворення по аксонометричних осях?
4. У яких випадках аксонометрична проєкція називається:
а) ізометричною; б) диметричною; в) триметричною?
5. Яке взаємне розташування аксонометричних осей в прямокутній ізометрії? Чому дорівнюють показники спотворення (натуральні і приведені) по цих осях?
6. Яке взаємне розташування аксонометричних осей в прямокутній диметрії? (натуральні і приведені) по цих осях?
7. Як вибирається напрям великої і малої осей еліпса в прямокутній ізометрії, що змальовує коло, розташоване в координатній площині, або їй паралельній?
8. Чому дорівнює довжина великої і малої осей еліпса в прямокутній ізометрії з приведеними коефіцієнтами спотворення?
9. Чому дорівнює довжина великої і малої осей еліпса в прямокутній диметрії з приведеними коефіцієнтами спотворення?
10. Як виконується штрихування розрізів в аксонометрії?

ВІДПОВІДІ

1. **Суть аксонометрії** полягає в тому, що предмет відносять до системи прямокутних координат і потім проєктують паралельними променями на площину проєкцій Π' , так звану аксонометричну площину. Напрямок проєктування не збігається ні з однією з осей координат і зображення виходить наочним. Властивості паралельних проєкцій зберігаються. Проєкція натуральної системи осей координат на площину Π' називається **аксонометричною системою осей координат**, (рис. 42).

Точка A і просторова система координат $Oxyz$ зв'язані координатною

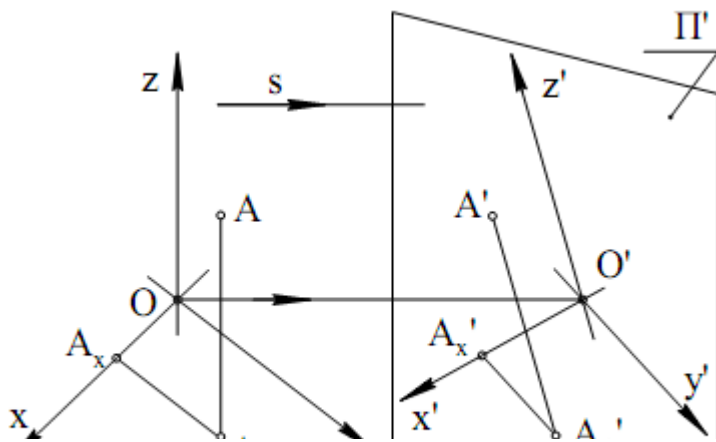


Рисунок 42 – Проекційна схема побудови аксонометричного зображення точки A

ламанною OA_xA_1A , ланками якої є координатні відрізки $OA_x = |xA|$, $|A_xA_1| = |yA|$, $|A_1A| = |zA|$.

Площина Π' – аксонометрична площина, s – напрям проєктування. Всі проєктуючі прямі паралельні s . Якщо пряма s не перпендикулярна Π' , то маємо косокутне проєктування і

отримаємо косокутну аксонометричну проєкцію. Якщо пряма s перпендикулярна Π' , то маємо ортогональне проєктування і отримаємо ортогональну (прямокутну) аксонометричну проєкцію. Надалі розглядається ортогональне проєктування і ортогональні аксонометричні проєкції.

Теорема Польке

2. Німецьким ученим-геометром **Польке** у 1851 році була доведена теорема, яка стверджує, що **три відрізки прямих довільної довжини (які лежать в одній площині і виходять з однієї точки під довільними кутами один до одного) становлять паралельну проєкцію трьох рівних відрізків, відкладених на прямокутних координатних осях від початку координат O .**

3. Відношення $e_x/e = u$, $e_y/e = v$, $e_z/e = w$ аксонометричних одиниць до одичних відрізків, взятих у системі координат $xyzO$, називають коефіцієнтами спотворення відповідно по осях x_a , y_a , Z_a аксонометрії.

4. Триметричні проєкції – $u \neq v \neq w \neq u$; диметричні проєкції – два показники спотворення рівні між собою, третій – не рівний їм. При цьому можливі три випадки: а) $u = v \neq w$; б) $u \neq v = w$; в) $u \neq v \neq w = u$; ізометричні проєкції – $u = v = w$.

5. В ізометрії показники спотворення по всіх трьох осях однакові $u = v = w$. Відомо, що висоти рівностороннього трикутника попарно перетинаються між

собою під кутом 120° . Тому аксонометричні осі, що збігаються з ними, розташовані в ортогональній ізометрії під кутом 120° одна до одної.

Як ми з'ясували раніше, дійсні показники спотворення для ортогональної ізометрії рівні $u = v = w \approx 0.82$. На практиці користуються приведеною ортогональною ізометрією, коли показники спотворення «приводяться» до одиниці, тобто $U = v = w = 1$. Це означає, що «приведена» ортогональна ізометрія дає подібне збільшення зображення в $m = U/u = 1 / 0.82 \approx 1.22$ рази. Іншими словами, масштаб такого зображення буде $M = 1.22 : 1$.

6. Кут між віссю X і Z складає $97^\circ 10'$, а між віссю Z і Y – $131^\circ 25'$. Тоді як існує лише одна ортогональна ізометрія, ортогональних диметрій можна побудувати незліченну безліч. Найпростіша, поширеніша і затверджена в ГОСТ 2.317-69 диметрія виходить, якщо $u = w$ і $v = u/2$. Дійсні показники спотворення по осях x і z в ортогональній диметрії рівні $u = w = 0.94$, а по осі y $v = 0.47$. У приведеній диметрії $U = W = 1$, $V = 0.5$. Коефіцієнт приведення при цьому дорівнює $m = u/u = 1 / 0.94 \approx 1.06$. Це означає, що в «приведеній» ортогональній диметрії зображення виходить збільшеним у 1.06 рази. Отже, масштаб такого аксонометричного зображення $M = 1,06 : 1$.

7. У загальному випадку коло проектується в еліпс. При ортогональному проектуванні велика вісь еліпса має напрям лінії рівня площини кола, а мала – напрям проєкції перпендикуляра до цієї площини. Кожна аксонометрична вісь є проєкцією перпендикуляра до відповідної координатної площини. Наприклад, вісь x є проєкцією перпендикуляра до площини yOz , вісь y – до площини xOz , а вісь z – до площини xOy . Тому в ортогональній аксонометрії велика вісь еліпса, у яку проектується коло, що лежить у координатній площині, перпендикулярна до аксонометричної осі, яка є перпендикуляром до цієї площини. Таку аксонометричну вісь іноді називають вільною.

8. Довжина великої і малої осей еліпса в прямокутній ізометрії подана на рисунку 43.

Побудова кола в прямокутній ізометрії

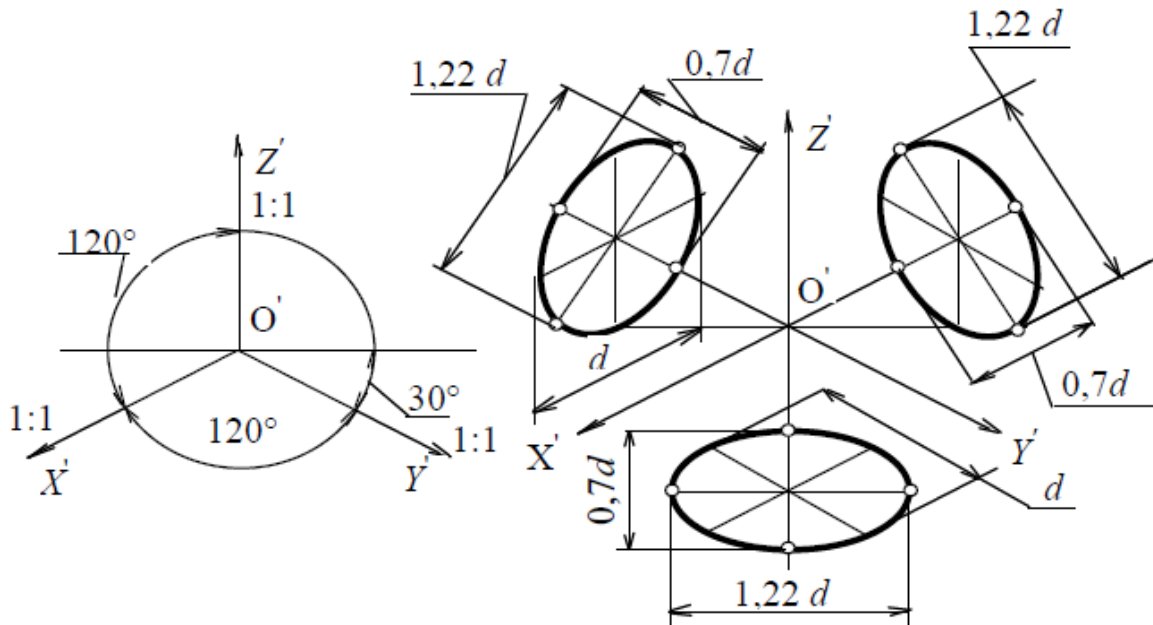


Рисунок 43 – Приклад побудови кола в прямокутній ізометрії

9. Довжина великої і малої осей еліпса в прямокутній диметрії подана на рисунку 44.

Побудова кола в прямокутній диметрії

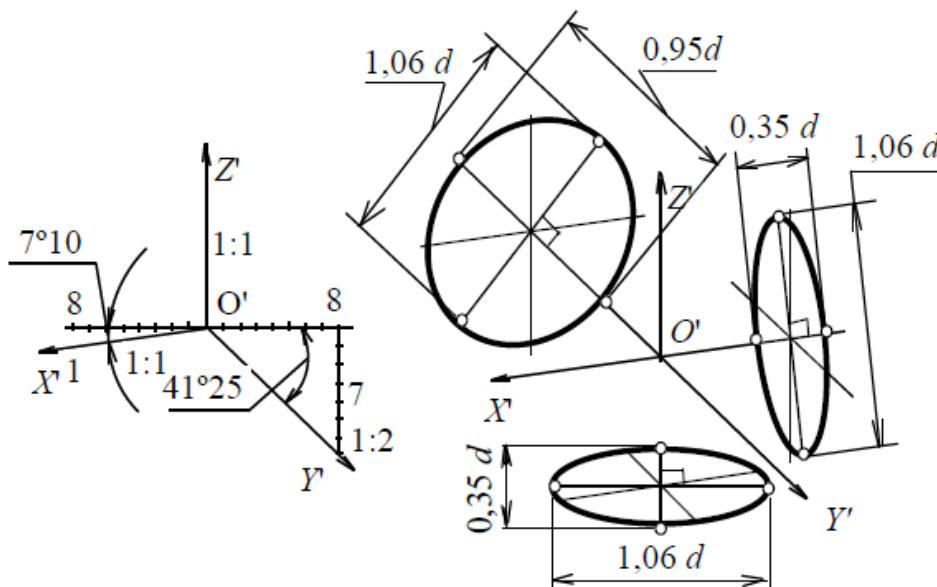


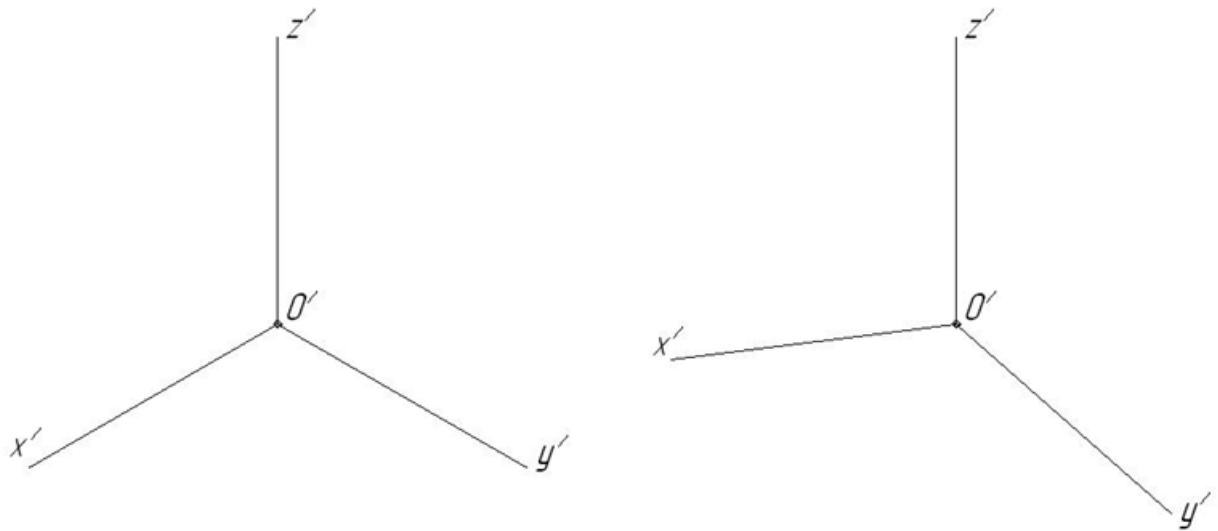
Рисунок 44 – Приклад побудови кола в прямокутній диметрії

10. Напрямок штрихування в кожній з площин визначається за трикутником штрихування, який доданий до зображення осей. Вершини трикутників штрихування лежать на осях і віддалені від початку координат на відстані,

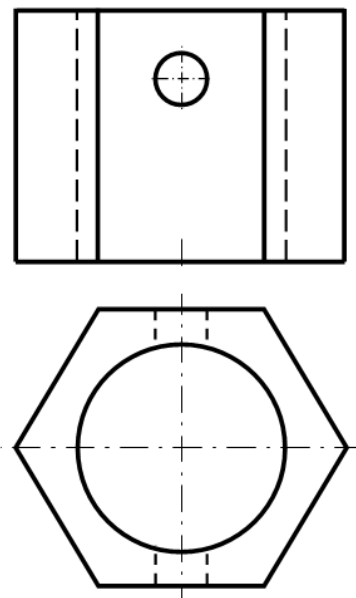
пропорційні коефіцієнтам спотворення. В ізометрії ці відстані рівні між собою ($u = v = w = 1$), у диметрії відстань по осі y в два рази менше, ніж по осях x і z ($u = w = 1, v = 0.5$).

Домашні задачі

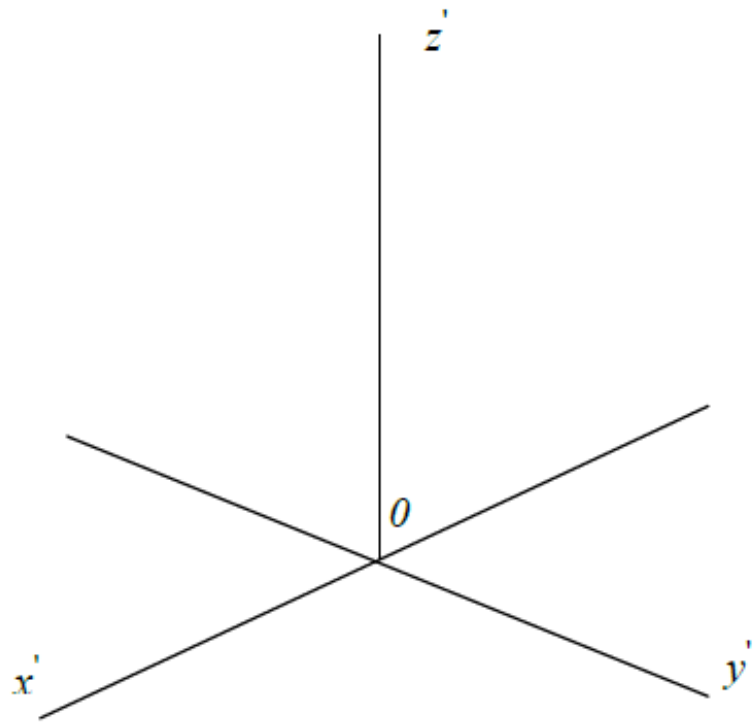
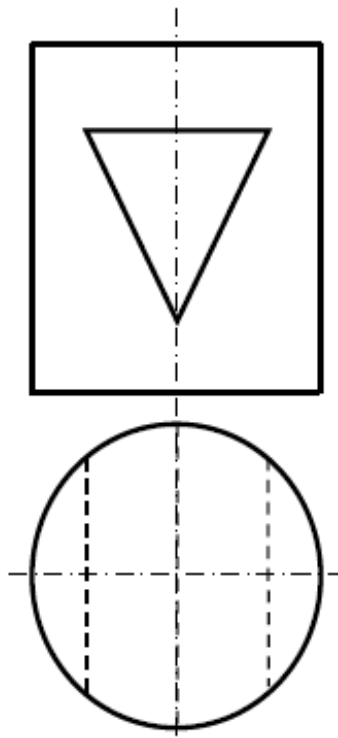
1. Побудувати прямокутні ізометричну та диметричну проєкції точки $A(30, 20, 25)$.



2. Побудувати в приведеній ізометрії шестигранну призму.

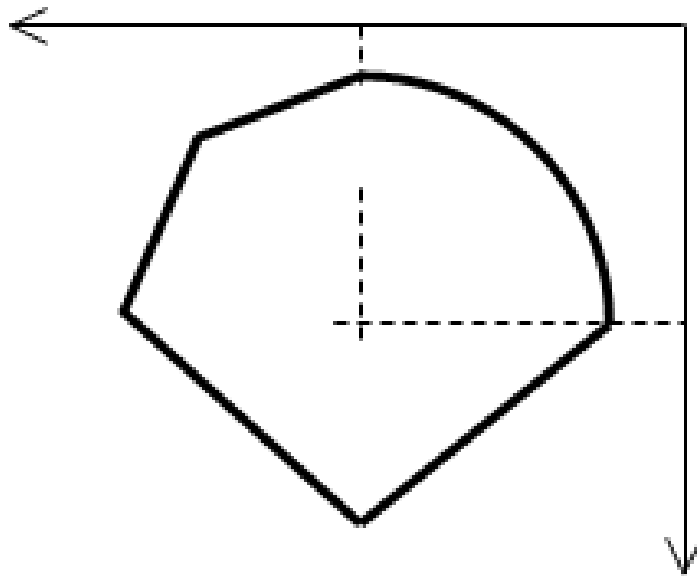


3. Побудувати прямокутну ізометричну проєкцію циліндра з наскрізним призматичним отвором.

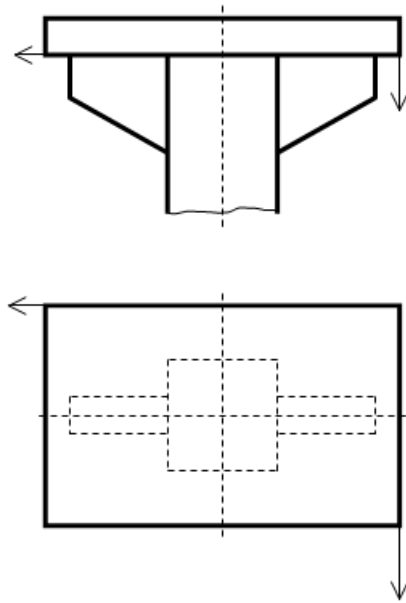


Аудиторні задачі

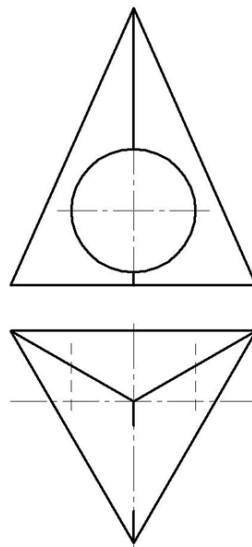
4. Побудувати приведену прямокутну ізометрію плоскої фігури.



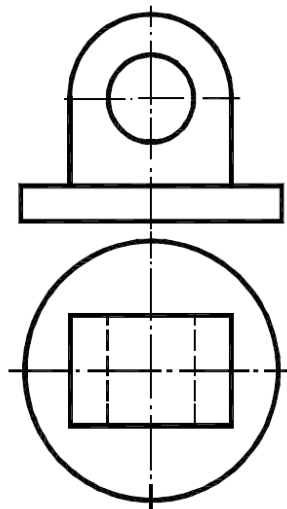
5. Побудувати приведену прямокутну ізометрію вузла залізобетонної конструкції.



6. Побудувати зображення геометричної фігури в прямокутній ізометрії.



7. Побудувати аксонометричну проекцію заданого геометричного тіла.



ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ЕПЮРІВ

Усі епюри потрібно виконувати за своїм варіантом на окремих аркушах формату А3; побудови – олівцем; умови задач – контурними лініями (0,2÷0,3 мм); результати рішення – кольоровими олівцями. Точки зображувати у вигляді кіл малого діаметра.

За даними координатами точок **A**, **B**, **C**, і **D** (мм) накреслити епюри за темами:

– пряма (проекції прямої, визначення розміру прямої, сліди прямої, кути нахилу прямої загального положення до площин проекції, взаємне положення прямих, лінії рівня);

– позиційні задачі (взаємне положення прямої і площини, взаємне положення площин і т. д.);

– метричні задачі (відстань між площинами, визначення кутів і т. д.).

1 ЕПЮР. Задано координати точок **A**, **B**, **C**.

Визначити:

1) довжину відрізка прямої **AB**;

2) величину кутів α і β нахилу прямої **AB** до площин проекції π_1 та π_2 ;

3) сліди **M** і **N** прямої **AB** та чверті простору, крізь які проходить пряма;

4) побудувати пряму ℓ , яка проходить через точку **C** та паралельна прямій **AB**;

5) побудувати горизонталь **h** і фронталь **f**, що проходять через точку **C** та перетинають пряму **AB**.

2 ЕПЮР. Задано координати точок **A**, **B**, **C**, **D**.

Визначити:

1) відстань **Q** від точки **D** до площини трикутника **ABC**;

2) площину **R**, яка паралельна площині трикутника **ABC** і віддалена від неї на відстань **m**.

3 ЕПЮР. Задано координати точок **A**, **B**, **C**, **D**.

Визначити:

- 1) багатогранник ABCD;
- 2) величину двогранного кута методом заміни площин проєкцій;
- 3) визначити відстань між двома мимобіжними прямими.

4 ЕПЮР. Задано координати точок A, B, C, D.

Визначити:

- 1) розмір однієї з граней багатогранника ABCD (за вказівкою викладача) методом обертання навколо прямої рівня;
- 2) відстань від однієї з вершин багатогранника до протилежної грані (за вказівкою викладача) методом плоскопаралельного переміщення.

5 ЕПЮР. Задано дві поверхні, які взаємно перетинаються (див. варіанти завдань епюра № 5 за вказівкою викладача).

Визначити:

- 1) три проєкції поверхонь, які взаємно перетинаються (лінію перетину побудувати за допомогою методу допоміжних площин-посередників або допоміжних сфер);
- 2) видимість лінії перетину на проєкціях.

Координати точок до епюрів № 1, 2, 3 і 4 дивись у додатку А.

Приклад побудови епюра № 1 дивись у додатку Б, (рис. Б.1).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Нарисна геометрія : підручник / В. Є. Михайленко та ін. ; за ред. В. Є. Михайленка. – Київ : Вища школа, 1993. – 271 с.
2. Інженерна та комп'ютерна графіка : підручник / В. Є. Михайленко та ін. ; за ред. д-ра техн. наук, проф. В. Є. Михайленка. – Київ : Вища школа, 2000. – 341 с.
3. Нарисна геометрія : підручник / В. Є. Михайленко, М. Ф. Євстіфеев, С. М. Ковальов, О. В. Кащенко ; за ред. В. Є. Михайленка. – 3-тє вид., перероб. – Київ : Слово, 2013. – 304 с. : іл.
4. Практикум з нарисної геометрії : навч. посіб. / В. І. Лусь, Т. Є. Киркач, О. Є. Мандріченко, А. О. Радченко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2014. – 118 с.
5. Лусь В. И. Начертательная геометрия : учеб. пособ. : в 3-х содержательных модулях / В. И. Лусь ; Харьков. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Харьков : ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2014. – Содержательный модуль № 1. Точка, линия, плоскость. – 2014. – 65 с.
6. Лусь В. И. Начертательная геометрия. Модуль 1: учеб. пособ. : в 3-х содержательных модулях / В. И. Лусь ; Харьков. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Харьков : ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2014. – Содержательный модуль № 2. Использование методов преобразования комплексного чертежа для решения позиционных и метрических задач. – 2015. – 44 с.
7. Лусь В. И. Начертательная геометрия : учеб. пособ. : в 3-х содержательных модулях / В. И. Лусь ; Харьков. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Харьков : ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2014. – Содержательный модуль № 3. Поверхности. Точка и линия на поверхности. Взаимное пересечение поверхностей. – 2015. – 102 с.
8. Лусь В. І. Нарисна геометрія : курс лекцій / В. І. Лусь. – Харків : ХНАМГ, 2008. – 127 с.
9. Інженерна графіка. Задачі і вправи для практичних занять та самостійної роботи студентів / уклад. : О. В. Шоман, Л. М. Савченко, Д. В. Воронцова. – Харків : вид-во «Підручник» НТУ «ХП», 2015. – 54 с.
10. ДСТУ ГОСТ 2.317:2014 Єдина система конструкторської документації. Аксонометричні проєкції (ГОСТ 2.317-2011, IDT). – Чинний від 2014–11–01. – Київ : Національний стандарт України, 2014. – 5 с.

Додаток А

Координати точок для виконання епюрів

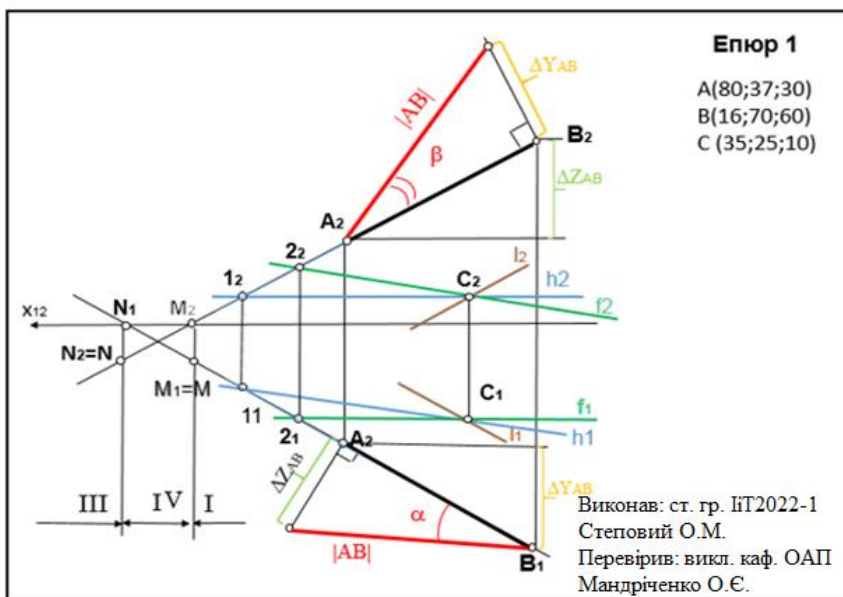
Таблиця А.1 – Варіанти завдання для епюрів № 1, 2, 3 і 4

Варіант	Вихідні дані	Варіант	Вихідні дані	Варіант	Вихідні дані	Варіант	Вихідні дані
1	A(40, 5, 55) B(0, 70, 10) C(65, 40, 0) D(70, 50, 60)	9	A(55, 0, 30) B(0, 20, 60) C(5, 55, 15) D(35, 35, 50)	17	A(40, 65, 20) B(0, 10, 50) C(55, 20, 40) D(20, 0, 30)	25	A(30, 55, 5) B(75, 10, 50) C(5, 0, 20) D(0, 35, 65)
2	A(20, 0, 20) B(75, 20, 50) C(90, 60, 0) D(50, 50, 45)	10	A(45, 55, 10) B(0, 25, 35) C(60, 10, 60) D(70, 50, 60)	18	A(70, 20, 20) B(25, 50, 0) C(0, 10, 50) D(60, 40, 45)	26	A(0, 10, 55) B(15, 60, 10) C(70, 30, 15) D(60, 55, 40)
3	A(85, 20, 80) B(25, 40, 20) C(90, 70, 30) D(70, 10, 10)	11	A(45, 0, 60) B(80, 45, 15) C(15, 10, 10) D(10, 60, 55)	19	A(0, 15, 40) B(60, 60, 75) C(85, 45, 10) D(50, 5, 45)	27	A(25, 30, 30) B(65, 10, 50) C(10, 20, 90) D(0, 55, 45)
4	A(85, 45, 0) B(25, 60, 20) C(0, 10, 40) D(35, 35, 60)	12	A(0, 65, 0) B(15, 20, 50) C(90, 10, 20) D(60, 50, 45)	20	A(40, 5, 55) B(0, 70, 10) C(65, 40, 0) D(70, 50, 60)	28	A(85, 0, 65) B(60, 65, 10) C(05, 30, 20) D(50, 35, 70)
5	A(10, 20, 25) B(55, 50, 10) C(80, 0, 65) D(40, 50, 45)	13	A(25, 30, 50) B(65, 50, 10) C(10, 60, 40) D(0, 30, 15)	21	A(25, 5, 70) B(65, 30, 30) C(0, 45, 25) D(45, 65, 80)	29	A(70, 5, 65) B(10, 20, 30) C(50, 50, 20) D(20, 65, 10)
6	A(65, 25, 70) B(0, 40, 40) C(90, 70, 15) D(15, 70, 95)	14	A(90, 50, 10) B(60, 0, 60) C(20, 0, 30) D(30, 35, 50)	22	A(25, 15, 60) B(65, 50, 15) C(0, 80, 10) D(50, 75, 50)	30	A(50, 5, 70) B(10, 30, 30) C(75, 40, 20) D(20, 65, 75)

7	A(40, 70, 5) B(0, 30, 30) C(65, 25, 45) D(20, 80, 65)	15	A(0, 50, 10) B(25, 40, 60) C(70, 5, 30) D(60, 35, 70)	23	A(70, 25, 5) B(15, 55, 35) C(20, 5, 50) D(50, 75, 40)		
8	A(45, 75, 0) B(0, 35, 35) C(75, 40, 55) D(15, 65, 60)	16	A(95, 0, 95) B(80, 75, 30) C(0, 30, 15) D(5, 70, 100)	24	A(15, 70, 0) B(60, 40, 20) C(0, 25, 45) D(35, 75, 60)		

Додаток Б

Приклад побудови епюра № 1



Будуємо:

1. Проекції точок А, В, С за координатами по варіанту;
2. Проекції відрізка АВ, з'єднавши однойменні проекції;
3. Дійсний розмір (натуральну величину) відрізка АВ та кути нахилу до площин Π_1 (α) і Π_2 (β);
4. В т.С горизонталь h , починаючи з $h_2 \parallel X_{12}$, а фронталь з $f_1 \parallel X_{12}$.
5. Пряму l , що паралельна до АВ ($l_2 \parallel A_2B_2$, $l_1 \parallel A_1B_1$).
6. Горизонтальний слід прямої, подовжуючи її фронтальну проекцію до перетину з віссю (т.М2) та по лінії проєкційного зв'язку $M1=M$.
7. Фронтальний слід прямої, подовжуючи її горизонтальну проекцію до перетину з віссю (т.Н1) та по лінії проєкційного зв'язку $N2=N$.
8. Позначаємо на кресленнику крізь які чверті простору проходить пряма.

Рисунок Б.1– Алгоритм побудови епюра № 1

Електронне навчальне видання

Методичні рекомендації

до організації самостійної роботи, проведення практичних занять
та виконання розрахунково-графічних робіт
з навчальної дисципліни

«ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА»

Частина 1 Нарисна геометрія

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
зі спеціальності 185 – *Нафтогазова інженерія та технології*,
194 – *Гідротехнічне будівництво, інженерія та водні технології*)

Укладач **ЛУСЬ** Володимир Іванович

Відповідальний за випуск *І. М. Бєлова*

Редактор *О. В. Михаленко*

Комп'ютерне верстання *В. І. Лусь*

План 2024, поз. 221М

Підп. до друку 12.06.2024. Формат 60 × 84/16.

Ум. друк. арк. 5,6.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.

Електронна адреса: office@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.