**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**А. В. Якунін**

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

## ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

## АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 051 – Економіка, 071 – Облік і оподаткування, 076 – Підприємництво та біржова діяльність*)

**Харків**
**ХНУМГ ім. О. М. Бекетова**
**2024**

**Якунін А. В.** Вища математика. Змістовий модуль 1 Аналітична геометрія на площині. Вступ до аналізу : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 051 – Економіка, 071 – Облік і оподаткування, 076 – Підприємництво та біржова діяльність) / А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 86 с.

Автор
канд. техн. наук, доц. А. В. Якунін

Рецензент

**Л. П. Вороновська,** кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

*Рекомендовано кафедрою вищої математики і математичного моделювання, протокол № 15 від 16.05.2024*.

Конспект лекцій складено відповідно до програми дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальностей 051 – Економіка, 071 – Облік і оподаткування, 076 – Підприємництво та біржова діяльність, він містить навчальний матеріал першого змістового модуля.

Опрацювання студентами поданого матеріалу сприятиме підготовці до занять, поточного та підсумкового контролю з курсу вищої математики.

## ЗМІСТ

# ВСТУП

Економіка, як наука про об'єктивні закони функціонування і розвитку виробництва, оперує з кількісними співвідношеннями відповідних показників. Фундаментом математичної підготовки фахівців фінансово-економічних профілів слугує навчальна дисципліна «Вища математика», що є обов'язковою складовою природничо-наукового циклу та структурно-логічної схеми, що передбачено освітньо-професійними програмами навчання бакалаврів з усіх економічних спеціальностей.

Вивчення вищої математики характеризується прикладною спрямованістю з метою, в першу чергу, засвоєння загальних прийомів та засобів розв'язування практичних проблем з використанням готових результатів і різного роду допоміжних ресурсів, а лише вдруге – розвитку здатності проведення строго логічних міркувань і доведень. Головне – формування відповідних фахових компетенцій, які необхідні економісту в будь-яких сферах його діяльності, що передбачає: підвищення рівня математичної культури та вдосконалення логічного й абстрактного мислення, збагачення ерудиції у питаннях застосування математики, виховання потреби у неперервній самоосвіті та критичного підходу до дійсності. Це відкриває можливість через доступ до досягнень світової науки творчо переосмислити базові підходи в економіці, сформувати власне бачення професійних проблем та інноваційних шляхів їх вирішення.

Для ефективної реалізації навчально-виховного процесу потрібне відповідне методичне забезпечення, що включає розробку адаптованих навчальних матеріалів. При створенні даного конспекту лекцій враховано, що ним будуть користуватися студенти різних форм навчання: денної, заочної чи дистанційної.

Конспект лекцій складено відповідно до програми дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальностей 051 – Економіка, 071 – Облік і оподаткування, 076 – Підприємництво та біржова діяльність і відображає навчальний матеріал змістового модуля 1 «Аналітична геометрія на площині. Вступ до аналізу».

Знання з аналітичної геометрії необхідні економісту для правильного тлумачення виробничої та ринкової інформації, що відображається у вигляді різних графіків – криві та поверхні байдужості, криві споживчого бюджету, інвестиційного попиту, криві Філіпса, Лафера, Лоренца тощо.

Математичний аналіз дає низку фундаментальних понять, якими оперує економіст, – це, перш за все, функція, границя та неперервність. Наприклад, друга чудова границя застосовується при вирішенні питань про зростання банківського вкладу за законом складних відсотків.

Головна увага приділяється розкриттю сутності понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю на застосування до задач економічного змісту. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Розглядаються найпростіші застосування математики в економіці, що спираються на рівень підготовки першокурсників і майже не потребують додаткової економічної інформації.

Частина викладеного матеріалу розрахована на самостійне опрацювання. До всіх лекцій додаються контрольні запитання та завдання на закріплення знань, умінь і навичок. Така увага до самостійної роботи здобувачів освіти обумовлена її місцем у сучасній системі вищої освіти. При цьому розглядаються лише типові задачі з метою дати деякий мінімум, необхідний для засвоєння вимог затвердженої програми з вищої математики для економічних спеціальностей. Стислість і глибина подачі змісту зумовлена обмеженістю аудиторних годин і не вимагає поглибленої шкільної підготовки, але передбачає наявність терпіння, ретельності та волі. Необхідну деталізацію та розгляд складних випадків можна почерпнути з рекомендованих літературних джерел.

Основою даного посібника є цикл лекцій з вищої математики, які упродовж багатьох років читають в Навчально-науковому інституті економіки і менеджменту Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Конспект лекцій призначений для бакалаврів економічних спеціальностей і може бути корисний для викладачів та економістів-практиків.

## Лекція 1.1 Пряма лінія на площині

### План

1.1.1 Пряма лінія на площині. Основні типи рівняння прямої на площині.

1.1.2 Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

1.1.3 Відстань від точки до прямої.

Запитання для самоконтролю.

Завдання для самостійного опрацювання.

**Опорні поняття:** *відстань між двома точками, поділ відрізка у заданому відношенні, основні типи рівняння прямої на площині, кут між прямими, умови паралельності та перпендикулярності прямих, відстань від точки до прямої.*

### 1.1.1 Пряма лінія на площині. Основні типи рівняння прямої на площині

Для визначення положення довільної точки використовується деяка система координат. Її вибір залежить від характеру поставленої задачі. Найбільш поширеною на практиці є декартова прямокутна система координат.

Напрямлена пряма, на якій задано початок відліку точку $O$ і масштаб $OE = 1$, називається ***координатною прямою*** (***віссю***) (рис. 1).

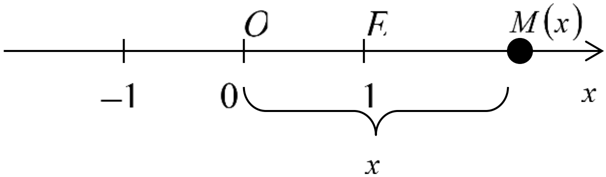


Рисунок 1

Довільній точці $M$ координатної прямої $Ox$ відповідає певне дійсне число $x$ – її ***координата***. Навпаки, довільному дійсному числу $x$ відповідає певна точка $M$ координатної прямої $Ox$. Враховуючи таку взаємно однозначну відповідність, координатну пряму називають ***числовою прямою*** і ототожнюють з множиною дійсних чисел $R$: $R=(-\infty;+\infty)$.

***Відстань*** між довільними двома точками $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ визначається формулою $M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$.

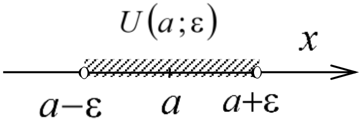

Рисунок 2

Інтервал $(a-\varepsilon;\, a+\varepsilon)$ називається $\varepsilon$***-околом числа*** $a$ і позначається $U(a;\varepsilon)$, де $\varepsilon$ – довільне додатне число, $\varepsilon>0$ (рис. 2).

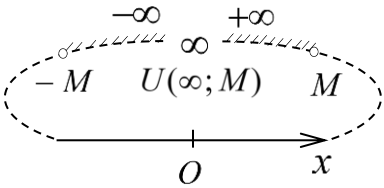

Рисунок 3

*Зауваження 1.* Координатну пряму $Ox$ умовно можна вважати замкненою в нескінченно віддаленій точці $\infty$. Тому для довільного додатного числа $M$, $M>0$, розглядають сукупність інтервалів

$$U(\infty;M)=\{x \mid |x|>M\},$$

яку називають $M$ ***- околом символу нескінченності*** $\infty$ (рис. 3).

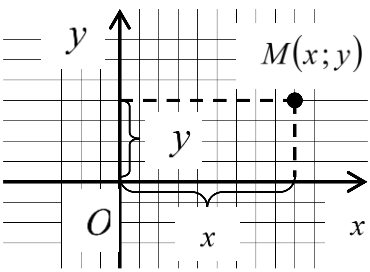

Рисунок 4

Дві взаємно перпендикулярні координатні прямі $Ox$ і $Oy$ зі спільним ***початком*** $O$ утворюють ***декартову прямокутну систему координат на площині*** (рис. 4). $Ox$ називається ***віссю абсцис***, а $Oy$ – ***віссю ординат***. Сукупність прямих, що паралельні координатним осям, утворює ***координатну сітку*** на площині $Oxy$. Положення довільної точки $M$ однозначно визначається впорядкованою парою чисел $(x;y)$ – її ***координатами*** ($x$ – ***абсциса***, $y$ – ***ордината***).

З прямокутного $\Delta M_1 N M_2$ (рис. 5) за теоремою Піфагора можна зробити висновок, що ***відстань між*** довільними ***двома точками*** $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ визначається формулою

$$M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

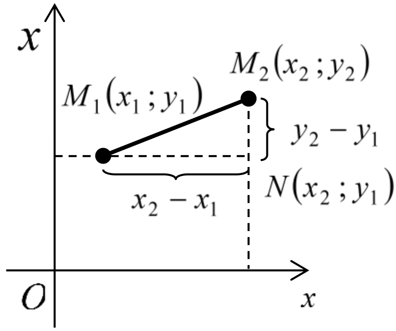


Рисунок 5

Нехай задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і відношення $\lambda = M_1 M / M M_2$, у якому точка $M(x, y)$ ділить відрізок $M_1 M_2$, починаючи від точки $M_1$ (рис. 6). З подібності прямокутних трикутників $\Delta M_1 N M \sim \Delta M P M_2$ випливає, що

$$\frac{NM}{PM_2} = \frac{M_1 N}{MP} = \frac{M_1 M}{M M_2} = \lambda; \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda.$$

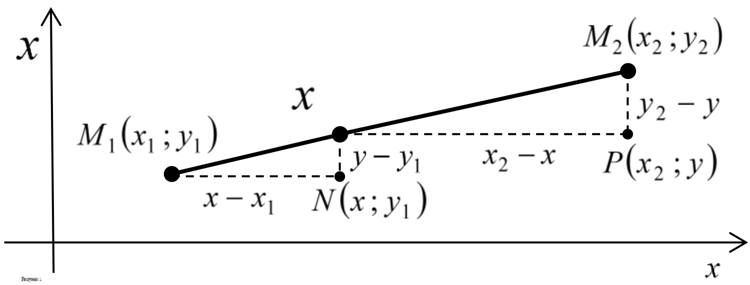


Рисунок 6

Звідси ***координати точки*** $M(x, y)$***, яка ділить заданий відрізок у заданому відношенні***, обчислюються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

*Зауваження 2.* Якщо точка $M$ ділить відрізок $M_1M_2$ пополам, то $\lambda = 1$. Тоді ***координати середини відрізка*** визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

*Приклад 1.* Трикутник $ABC$ задано координатами вершин $A(-2;4)$, $B(5;-2)$, $C(7;6)$. Побудувати $\Delta ABC$ в системі координат. Знайти: а) довжину медіани $AM$; б) точку $E$ перетину медіан.

□ $M$ – середина сторони $BC$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7+5}{2} = 6; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2; \quad M(6;\, 2).$$

$$AM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-(-2))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{68}.$$

За властивістю точки перетину медіан трикутника

$\lambda = AE/EM = 2/1 = 2$. Тоді $E$: $\quad x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \dfrac{-2+2\cdot 6}{1+2} = \dfrac{10}{3}$;

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{4 + 2\cdot 2}{1+2} = \frac{8}{3}; \quad E\left(\frac{10}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

(Рисунок $\Delta ABC$ на координатній площині $Oxy$ зробіть самостійно). ■

Геометричним відображенням залежностей між двома величинами служать різні лінії – графіки відповідних функцій.

Під час розв'язування широкого кола оптимізаційних задач (наприклад, знайти найкращий план виробництва при обмежених ресурсах) потрібно виділяти певну плоску область – частину площини, обмежену деякими кривими.

Уміння будувати графіки функцій і аналізувати властивості відповідних ліній є важливим інструментом практичних досліджень. Знайомство з ними починається з найпростіших випадків – прямої лінії і кривих другого порядку.

Співвідношення $F_1(x,y)=F_2(x,y)$ називається ***рівнянням з двома змінними***.

Його можна подати у ***стандартному вигляді*** $F(x,y)=0$.

Тут $F(x,y)$, $F_2(x,y)$ і $F(x,y)$– деякі вирази.

Зображення множини розв'язків даного рівняння на координатній площині $Oxy$ називається ***графіком*** цього рівняння.

Звичайно графіком рівняння служить деяка лінія. Наприклад, а) графіком рівняння $x^2+y^2=1$ є коло з центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом $R=1$ (***дійсна лінія***); б) графіком рівняння є одна точка – початок координат $O(0;0)$ (***вироджена лінія***); в) рівняння $x^2+y^2=-1$ ніякого графіка не має (***уявна лінія***).

*Зауваження 3*. Вигляд рівняння лінії залежить як від самої лінії, так і від вибору системи координат.

Говорять, що лінія ***задана неявно***, якщо її рівняння має вигляд $F(x,y)=0$ або $F_1(x,y)=F_2(x,y)$. Якщо рівняння лінії розв'язане відносно змінної $y$, то говорять, що лінія ***задана явно*** рівнянням $y=f(x)$, де $f(x)$ – деякий вираз. Лінія може задаватись системою рівнянь $x=x(t)$ і $y=y(t)$, де $t$ – допоміжна змінна (параметр), $x(t)$ і $y(t)$ – деякі вирази. Тоді кажуть, що лінія ***задана параметрично***.

*Правило 1. Щоб встановити, чи лежить указана точка* $M_0(x_0,y_0)$ *на даній лінії* $l$: $F(x,y)=0$, *треба перевірити, чи задовольняють координати точки рівняння лінії*:

$$F(x_0,y_0)=0 \Leftrightarrow M_0\in l;\quad F(x_0,y_0)\neq 0 \Leftrightarrow M_0\notin l.$$

*Правило 2. Щоб встановити, чи перетинаються дві дані лінії* $l_1:\ F_1(x,y)=0$, $l_2:\ F_2(x,y)=0$ *і знайти точки перетину (спільні точки), треба скласти і розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases}$.

*Правило 3. Щоб скласти рівняння даної лінії треба:* 1) *ввести систему координат;* 2) *знайти співвідношення між координатами довільної (поточної, бігучої) точки* $M(x,y)$ *цієї лінії та відомими сталими величинами, що визначають саме цю лінію, на основі характеристичної властивості даної лінії;* 3) *за допомогою рівносильних перетворень звести одержане рівняння до найбільш простого вигляду.*

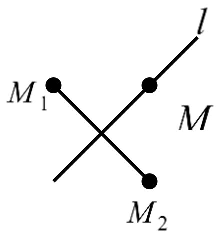

Рисунок 7

*Зауваження 4.* Тип лінії визначають, зводячи її рівняння до відповідного стандартного вигляду.

*Приклад 2.* Скласти рівняння серединного перпендикуляра $l$ до відрізка $M_1M_2$, де $M_1(-4;5)$, $M_2(4;-1)$ (рис. 7).

□ Довільна точка $M(x,y)$ шуканої лінії рівновіддалена від кінців відрізка $M_1M_2$:

$$M_1M=M_2M\ ;$$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\ ;$$

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}\quad \Big|\uparrow 2\ ;$$

$$x^2+8x+16+y^2-10y+25=x^2-8x+16+y^2+2y+1\ ;$$

$$l:\quad 4x-3y+6=0 \text{ – пряма лінія. ■}$$

Нехай ***похила пряма*** $l$ утворює кут $\alpha$ з віссю $Ox$ і перетинає вісь $Oy$ у точці $B(0;\,b)$ (рис. 8). Тангенс кута нахилу $\alpha$ називають ***кутовим коефіцієнтом*** $k$ прямої $l$: $k=tg\,\alpha$. Число $b$ називають ***початковою ординатою*** прямої $l$. Нехай $M(x,y)$ – довільна точка прямої $l$. У прямокутному $\Delta BNM$ покладемо $\angle MBN=\alpha$. Тоді

$$\frac{NM}{BN} = tg\ \angle MBN; \quad \frac{y-b}{x} = tg\ \alpha = k; \quad y - b = kx.$$

Звідси маємо ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом***

$$y = kx + b.$$

*Зауваження 5*. Якщо $b = 0$, то пряма $y = kx$ проходить через початок координат $O(0;0)$. Якщо $k = 0$, то пряма $y = b$ паралельна осі $Ox$ (***горизонтальна***).

*Зауваження 6*. Якщо пряма паралельна осі $Oy$ $(\alpha = 90^\circ)$, то її кутовий коефіцієнт не існує $(k = tg\ 90^\circ = \infty)$, отже її рівняння не можна подати у відповідному вигляді. ***Рівняння вертикальної прямої*** має вигляд $x = a$, де $a$ – абсциса точки перетину $A(a;\ 0)$ з віссю $Ox$.

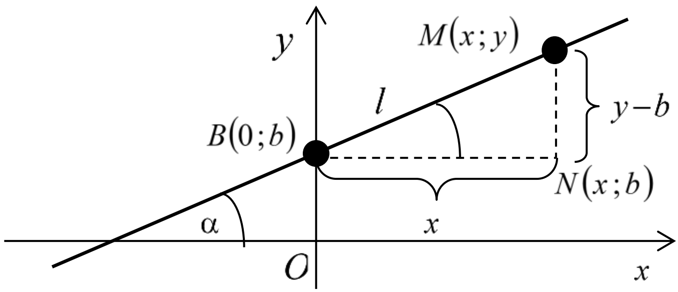


Рисунок 8

*Зауваження 7*. Усі витрати підприємства на виробництво й збут продукції $y$ складаються зі сталих (орендна плата, амортизація тощо) і змінних (заробітна плата, витрати сировини, енергоресурсів тощо) величин. Якщо змінні витрати пропорційні обсягу виробництва продукції $x$, то сума витрат на виробництво продукції $y$ визначається лінійною залежністю $y = kx + b$, де $b$ – сума сталих витрат; $k$ – ставка змінних витрат на одиницю продукції.

*Приклад 2*. Для ремонту устаткування на деякому підприємстві потрібні запчастини в кількості $x$ одиниць на рік. Якщо виготовляти їх на власних потужностях, то сталі витрати $b = 600$ тис. грн. на рік, а ставка змінних витрат на одиницю продукції $k = 80$ грн/од. На ринку готові запчастини можна купити за ціною $p = 200$ грн/од. Знайти мінімальну кількість запчастин $x_{\min}$, при якій вигідніше їх виробляти самотужки.

□ Якщо купити $x$ запчастин, то сумарні витрати становлять $Y = px = 200x$. Якщо виготовити $x$ запчастини самотужки, то їх собівартість становить: $y = kx + b = 80x + 600\,000$. При $y < Y$ підприємству вигідніше виробляти запчастини, ніж купувати. Відповідна мінімальна кількість $x_{\min}$ потрібних запчастин є найменшим цілим розв'язком цієї нерівності:

$$80x + 600\,000 < 200x;\ 120x > 600\,000;\ x > 500;\ x_{\min} = 501.\ ■$$

*Приклад 3.* Побудувати пряму $l$ за її рівнянням:

а) $y = 2x - 3$; б) $y = -2x$; в) $y = 2$; г) $x = -3$.

(Розв'язати самостійно).

Нехай пряма $l$ проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт $k$. Тоді для прямої $l$ маємо

$$y = kx + b;\quad M_0(x_0, y_0) \in l \Rightarrow y_0 = kx_0 + b;$$

$$b = y_0 - kx_0;\qquad y = kx + y_0 - kx_0.$$

Звідси отримуємо ***рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку*** $y - y_0 = k(x - x_0)$.

*Зауваження 8.* ***Пучок прямих*** з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ задається сукупністю рівнянь $\left[\begin{array}{c} y - y_0 = k(x - x_0),\ k \in (-\infty; +\infty) \\ x = x_0 \end{array}\right.$.

*Приклад 4.* Написати рівняння і побудувати пряму, що належить пучку з центром у точці $M_0(-3; 4)$, якщо: а) пряма паралельна осі $Ox$; б) пряма паралельна осі $Oy$; в) пряма нахилена до осі $Ox$ під кутом $\alpha = 60^\circ$. (Розв’язати самостійно).

Нехай пряма $l$ проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Оскільки пряма $l$ проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, то $y - y_1 = k(x - x_1)$. Тоді

$$M_2(x_2, y_2) \in l \;\Rightarrow\; y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1);$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Звідси маємо ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

*Приклад 5.* Трикутник $ABC$ задано координатами вершин $A(2;4)$, $B(-4;1)$, $C(5;3)$. Знайти рівняння бісектриси $AL$.

$$\square \quad AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (1-4)^2} = 3\sqrt{5};$$

$$AC = \sqrt{(5-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5}.$$

За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника

$$\lambda = \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3.$$

Тоді $L$: $\quad x = \dfrac{-4 + 5\cdot 3}{1+3} = \dfrac{11}{4}; \quad y = \dfrac{1 + 3\cdot 1}{1+3} = 1; \quad L\left(\dfrac{11}{4}; 1\right);$

$$AL: \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \quad \frac{y-4}{1-4} = \frac{x-2}{11/4 - 2}; \quad y = 4x - 12. \quad \blacksquare$$

*Приклад 6.* Знайти залежність $y = kx + b$ повних витрат $y$ на виробництво продукції від її обсягу $x$, якщо при максимальному обсязі виробництва $x_{\max} = 60$ од. загальні витрати становлять $y_{\max} = 30$ млн. грн. Мінімальному обсягу виробництва $x_{\min} = 40$ од. відповідають загальні витрати $y_{\min} = 25$ млн. грн. Побудувати одержану пряму $y = kx + b$ на координатній площині $Oxy$.

□ Застосуємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}; \quad \frac{y - 25}{30 - 25} = \frac{x - 40}{60 - 40};$$

$$y = 0{,}5x + 15 \text{ – шукана залежність.}$$

(Рисунок зробити самостійно). ■

Кожна пряма описується деяким рівнянням першого степеню. Навпаки, кожне рівняння першого степеню є рівнянням деякої прямої. ***Загальним рівнянням*** прямої називається рівняння першого степеню вигляду $Ax + By + C = 0$, де $A$, $B$ і $C$ – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел $A$, $B$ відмінне від нуля, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$.

*Зауваження 9.* Загальне рівняння прямої записується з точністю до сталого множника. По можливості його зводять до вигляду, де всі коефіцієнти – цілі числа, причому перший ненульовий коефіцієнт додатний.

*Зауваження 10.* У залежності від значень сталих $A$, $B$ і $C$ можливі наступні окремі випадки розміщення прямої:

$C = 0$, тоді пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат;

$A = 0$, тоді пряма $By + C = 0$ паралельна осі $Ox$. Її рівняння можна подати у вигляді $y = b$, де $b = -C / B$;

$B = 0$, тоді пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі $Oy$. Її рівняння можна подати у вигляді $x = a$, де $a = -C / A$;

$A = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $y = 0$ співпадає з віссю $Ox$;

$B = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $x = 0$ співпадає з віссю $Oy$.

*Приклад 7.* У трикутнику $ABC$ задано рівняння сторін $AB$: $3x - 4y - 2 = 0$ і $AC$: $2x + 5y - 9 = 0$. Знайти координати вершини $A$. (Розв'язати самостійно).

*Приклад 8.* Побудувати пряму $l$ за її рівнянням:

а) $3x - 4y + 12 = 0$ (знайти точки перетину з осями координат); б) $x = 2$ (знайти точку перетину з віссю абсцис);

в) $y = -4$ (знайти точку перетину з віссю ординат).

(Розв'язати самостійно).

Нехай похила пряма $l$ відтинає на осях координат $Ox$ і $Oy$ відповідно відрізки $a$ і $b$, тобто перетинає осі координат у двох заданих точках $A(a;\,0)$ і $B(0;\,b)$ (рис. 9).

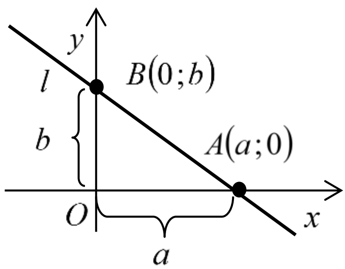


Рисунок 9

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, отримаємо

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}; \quad \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1.$$

Звідси маємо ***рівняння прямої у відрізках на осях***

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

*Зауваження 11.* У відрізках на осях не можна подати рівняння прямих, які паралельні осям координат.

*Приклад 9.* Пряма $l$ задана своїм загальним рівнянням $4x - 5y - 11 = 0$. Записати її рівняння: а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях.

□ а) $4x - 5y - 11 = 0; \quad -5y = -4x + 11;$

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{11}{5}; \quad k = \frac{4}{5}; \quad b = -\frac{11}{5};$$

б) $4x - 5y - 11 = 0; \; 4x - 5y = 11;$

$$\frac{4x}{11} - \frac{5y}{11} = 1; \quad \frac{x}{11/4} + \frac{y}{-11/5} = 1; \quad a = \frac{11}{4}; \quad b = -\frac{11}{5}. \quad \blacksquare$$

*Приклад 10.* Показати, що ***система параметричних рівнянь*** $x = mt + a$; $y = nt + b$, де $t$ – допоміжна змінна (параметр), $a, b, m, n = const$, визначає ***пряму***.

□ Знайдемо параметр $t$ з обох рівнянь і прирівняємо одержані вирази між собою:

$$t=(x-a)/m;\;\; t=(y-b)/n;\;\; (y-b)/n=(x-a)/m.$$

Звідси $y=\dfrac{n}{m}x+\dfrac{bm-an}{m}$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $n/m$ і початковою ординатою $(bm-an)/m$. ■

*Приклад 11.* Знайти точку $M$ перетину прямих

$$l_1:\; 3x+2y-1=0 \quad \text{і} \quad l_2:\; \begin{cases} x=-3t+1 \\ y=6t-7 \end{cases}.$$

(Розв'язати самостійно. Скласти систему з трьох лінійних рівнянь і, застосовуючи метод вилучення, знайти значення параметра, що відповідає точці перетину $M$, а потім самі координати точки $M$). Відповідь: $M(-11;17)$.

***Нормальне рівняння прямої*** має вигляд:

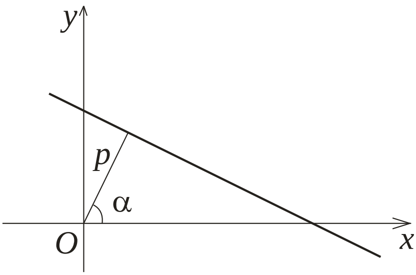

Рисунок 10

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$

де $p$ – відстань від початку координат до даної прямої; $\overrightarrow{n_0}=(\cos\alpha;\,\sin\alpha)$ – одиничний ***вектор нормалі***, що перпендикулярний до цієї прямої та утворює кут $\alpha$ з віссю $Ox$ (рис. 10).

***Ознаки нормального рівняння*:**

1) вільний член від'ємний або дорівнює нулю;

2) сума квадратів коефіцієнтів при $x,\; y$ дорівнює 1.

*Для того щоб звести до нормального вигляду загальне рівняння прямої* $Ax+By+C=0$*, необхідно поділити його почленно на* ***нормуючий множник*** $\mu=\pm\sqrt{A^2+B^2}$*, де знак перед коренем вибирається протилежним знаку вільного члена* $C$:

$$(A/\mu)x+(B/\mu)y+(C/\mu)=0.$$

*Приклад 12.* Рівняння прямої $\frac{7-3x}{5}-2=-\frac{1}{5}-\frac{x+2y}{3}$ подати у нормальному вигляді.

□ Спочатку зведемо задане рівняння до загального вигляду. Помножимо весь вираз на 15, щоб позбутися знаменників:

$$21-9x-30=-3-5x-10y.$$

Перенесемо все ліворуч і приведемо подібні:

$$21-9x-30+3+5x+10y=0; \quad -4x+10y-6=0.$$

Поділимо почленно останнє співвідношення на $-2$, щоб зменшити коефіцієнти та перший зліва з них став додатним. Отримаємо загальне рівняння прямої: $2x-5y+3=0.$

Знайдемо нормуючий множник і поділимо на нього почленно загальне рівняння:

$$\mu=-\sqrt{2^2+(-5)^2}=-\sqrt{29}; \quad -\frac{2}{\sqrt{29}}x+\frac{5}{\sqrt{29}}y-\frac{3}{\sqrt{29}}=0-$$

нормальне рівняння прямої. ■

### 1.1.2 Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай прямі $l_1$ і $l_2$ (рис. 11), мають задані кутові коефіцієнти відповідно $k_1$ і $k_2$. Тоді для кута $\varphi$ між ними маємо:

$$\varphi=\alpha_2-\alpha_1; \qquad tg\ \varphi=\frac{tg\ \alpha_2-tg\ \alpha_1}{1+tg\ \alpha_1\cdot tg\ \alpha_2}.$$

Оскільки $tg\ \alpha_1=k_1$; $tg\ \alpha_2=k_2$, то ***тангенс кута між прямими*** знаходиться за формулою $tg\ \varphi=(k_2-k_1)/(1+k_1 k_2)$.

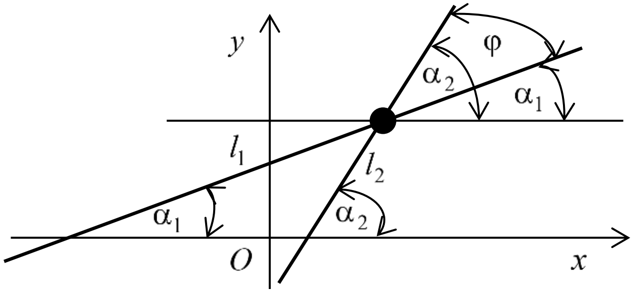


Рисунок 11

Для паралельних прямих $\varphi = 0$, $tg\,\varphi = 0$, а для перпендикулярних прямих $\varphi = 90^\circ$, $tg\,\varphi \to \infty$. Звідси:

• ***необхідною і достатньою умовою паралельності*** невертикальних прямих $l_1$ і $l_1$ є рівність $k_1 = k_2$;

• ***необхідною і достатньою умовою перпендикулярності*** похилих прямих $l_1$ і $l_1$ є рівність $k_1 k_2 = -1$.

*Зауваження 1.* Кут між прямими $\varphi$ розуміється як кут повороту. ***Гострий кут*** між прямими знаходиться за формулою

$$\varphi_h = arctg \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

*Приклад 1.* У тупокутному $\Delta ABC$ ($\angle A$ – тупий) задано рівняння сторін $AB$: $y = -3x + 5$, $AC$: $y = 2x - 10$ і координати вершини $C(2;\,3)$. Знайти: а) $\angle A$; б) рівняння висоти $CN$; в) рівняння середньої лінії $ML$, що паралельна $AB$, де $M$ – середина сторони $AC$.

□ а) Знайдемо гострий кут між прямими $AB$ і $AC$:

$$k_{AB} = -3;\ k_{AC} = 2;\ \varphi_h = arctg\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = arctg\left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2\cdot(-3)}\right| =$$

$= arctg\,1 = \pi/4$. Тоді $\angle A = \pi - \varphi_h = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$.

б) $CN \perp AB \;\Leftrightarrow\; k_1 k_2 = -1;\;\; k_{AB} = -3;$

$k_{CN} = -1/k_{AB} = 1/3;\quad C \in CN;\;\; CN:\quad y - y_0 = k(x - x_0);$

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x-2);\qquad y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

в) $A = AB \cap AC:\; \begin{cases} y = -3x+5 \\ y = 2x - 10 \end{cases};\quad A(3;\,-4).$

$M$ – середина сторони $AC:\; x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{3+2}{2} = \dfrac{5}{2};$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2};\qquad M(5/2; -1/2);$$

$$ML \parallel AB:\; k_{ML} = k_{AB} = -3;\quad M \in ML;$$

$$ML:\; y - y_0 = k(x - x_0);\;\; y + 1/2 = -3(x - 5/2);\;\; y = -3x + 7. \;\blacksquare$$

### 1.1.3 Відстань від точки до прямої

Нехай задані точка $M_0(x_0, y_0)$ і пряма $l$ своїм загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$ (рис. 12). ***Відстанню*** $d$ ***від точки*** $M_0$ ***до прямої*** $l$ називається довжина перпендикуляра $M_0N$. Користуючись умовою перпендикулярності прямих, знайдемо рівняння цього перпендикуляра $l_\perp$. Складаючи і розв'язуючи систему рівнянь прямих $l$ і $l_\perp$, одержимо точку перетину $N$.

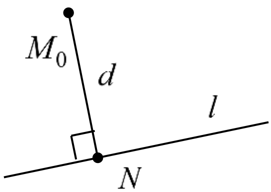


Рисунок 12

Довжину перпендикуляра $M_0N$ знайдемо як відстань між двома точками. У результаті (проробіть указані операції самостійно) одержимо: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ – ***відстань від точки до прямої***.

*Приклад 1.* У трикутнику $ABC$ задано рівняння сторони $AB:\; x/2 - y/6 = 1$ і координати вершини $C(-1;\,-3)$. Знайти довжину висоти $CN$.

□ **Перетворимо** рівняння прямої $AB$ до загального вигляду:

$$x/2 - y/6 = 1; \quad 6x - 2y = 12; \quad 3x - y - 6 = 0.$$

Знайдемо довжину висоти $CN$ як відстань від точки $C$ до прямої: $AB$: $CN = \left|3\cdot(-1) - (-3) - 6\right| \Big/ \sqrt{3^2 + (-1)^2} = 6\Big/\sqrt{10}$. ■

*Приклад 2.* Між пунктами $A(5;3)$ і $B(11;6)$ (на плані місцевості масштаб вибрано в кілометрах) прямолінійно прокладено оптоволоконний кабель, Необхідно до цього кабелю підключити пункт $C(6;5)$ вздовж найкоротшої відстані. Знайти точку підключення $N$ і довжину необхідного для цього кабелю $d = CN$.

□ Складемо рівняння прямої $AB$, що проходить через дві задані точки, і зведемо його до загального вигляду:

$$AB: \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \quad \frac{y-3}{6-3} = \frac{x-5}{11-5}; \quad \frac{y-3}{3} = \frac{x-5}{6};$$

$$2(y-3) = x - 5; \quad 2y - 6 = x - 5; \quad x - 2y + 1 = 0.$$

Знайдемо довжину необхідного кабелю $d$ як відстань від точки $C$ до прямої $AB$:

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad d = \frac{\left|6 - 2\cdot 5 + 1\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \approx 1{,}34\,(\text{км}).$$

Знайдемо координати пункту підключення $N$ як точку перетину взаємно перпендикулярних прямих $AB$ і $CN$:

$$CN \perp AB; \quad k_{CN} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{1/2} = -2;$$

$$CN: \; y - y_0 = k(x - x_0); \quad y - 5 = -2(x-5); \quad y = -2x + 15;$$

$$N = AB \bigcap CN: \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y = -2x + 15 \end{cases}; \; x - 2(-2x + 15) + 1 = 0;$$

$$x + 4x - 30 + 1 = 0; \quad x = 5{,}8; \quad y = -2\cdot 5{,}8 + 15 = 3{,}4; \quad N(5{,}8; 3{,}4).$$ ■

## Запитання для самоконтролю

1. Що таке декартова прямокутна система координат на площині? Як визначаються координати точки, довжина відрізка?

2. Виведіть формулу для визначення координати точки, що поділяє заданий відрізок у вказаному відношенні.

3. Як знайти координати середини відрізка?

4. Які види рівняння прямої вам відомі? Наведіть формули запису рівняння прямої у вигляді загального рівняння, рівняння з кутовим коефіцієнтом, рівняння у відрізках на осях, нормального рівняння.

5. Як записується система параметричних рівнянь прямої?

6. Наведіть рівняння прямої, що проходить через задану точку в указаному напрямку.

7. Як записати рівняння прямої, якщо відомі координати двох будь-яких різних точок, що їй належать?

8. Виведіть формулу для визначення відстані від точки до прямої.

9. За допомогою якої формули можна обчислити кут між прямими з відомими кутовими коефіцієнтами?

10. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох похилих прямих, якщо відомі їх кутові коефіцієнти.

## Завдання для самостійного опрацювання

**Задача 1**. Трикутник $ABC$ заданий координатами своїх вершин $A(-4;-3)$, $B(-12;1)$, $C(12;5)$. Засобами аналітичної геометрії знайти:

1) рівняння сторони $AB$ та її довжину $|AB|$;

2) рівняння висоти $CN$ та її довжину $|CN|$;

3) рівняння медіани $CM$ ;

4) рівняння прямої $ET$ , що проходить через точку перетину $E$ медіан трикутника $ABC$ паралельно стороні $AB$;

5) тангенс гострого кута $\varphi_h$ між висотою $CN$ і медіаною $CM$;

6) рівняння бісектриси $AL$ внутрішнього кута $A$;

7) точку перетину $S$ висоти $CN$ і прямої $ET$.

Зобразити трикутник $ABC$, знайдені точки та прямі в прямокутній системі координат $Oxy$ .

Відповідь: $AB:\ y = -\frac{1}{2}x - 5;\ \ |AB| = 4\sqrt{5};$

$$CN:\ y = 2x - 19;\ \ |CN| = \frac{32\sqrt{5}}{5};\ \ CM:\ y = \frac{3}{10}x + 1\frac{2}{5};$$

$$ET:\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3};\ \ tg\,\varphi_h = 1\frac{1}{16};\ \ AL:\ x = -5;\ S\left(7\frac{11}{15}; -3\frac{8}{15}\right).$$

**Задача 2**. Підприємство виготовляє $x = 2\ 000$ од. виробів, які всі реалізуються за сталою ціною $p = 0{,}04$ млн. грн за одиницю продукції. Сталі витрати на організацію виробництва становлять 5 млн. грн, а змінні витрати на одиницю продукції – 0,036 млн. грн. Приймаючи залежності доходу $D$ і повних витрат на виробництво $V$ від обсягу продукції $x$ лінійними, знайти залежність прибутку $P = D - V$ від обсягу виробництва $x$. Обчислити: мінімальний обсяг $x_{\min}$ прибуткового виробництва; обсяг реалізації $x_0$, при якому прибуток $P_0 = 2$ млн. грн; максимальний прибуток $P_{\max}$, коли весь обсяг $x = 2\ 000$ од. виробів реалізовано.

Відповідь: $P = 0{,}004x - 5$ (млн. грн); $x_{\min} = 1\ 251$ (од.);

$x_0 = 1\ 750$ (од.); $P_{\max} = 3$ (млн. грн).

## Лекція 1.2 Криві другого порядку

### План

1.2.1 Загальне рівняння лінії другого порядку.

1.2.2 Канонічне рівняння кола. Рівняння кола зі зміщеним центром.

1.2.3 Канонічні рівняння еліпса, гіперболи та параболи.

Запитання для самоконтролю.

Завдання для самостійного опрацювання.

**Опорні поняття:** *загальне рівняння кривої другого порядку, рівняння кола зі зміщеним центром, канонічні рівняння кривих другого порядку, фокус, ексцентриситет, директриса.*

### 1.2.1 Загальне рівняння лінії другого порядку

***Лінії другого порядку*** відповідає рівняння другого степеню, загальний вигляд якого

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

де $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел $A$, $B$ і $C$ відмінне від нуля, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Існують чотири типи ліній другого порядку – ***коло, еліпс, гіпербола і парабола***. Тип лінії визначається знаком дискримінанта $\Delta = B^2 - AC$:

а) якщо дискримінант $\Delta < 0$, то рівняння має ***еліптичний тип*** і визначає або еліпс (зокрема, коло), або точку (наприклад, $x^2 + y^2 = 0$), або уявну криву (наприклад, $x^2 + y^2 = -1$);

б) якщо дискримінант $\Delta > 0$, то рівняння має ***гіперболічний тип*** і визначає або гіперболу, або пару прямих, що перетинаються (наприклад, $x^2 - y^2 = 0$ – пара прямих: $x + y = 0$ і $x - y = 0$);

в) якщо дискримінант $\Delta = 0$, то рівняння має ***параболічний тип*** і визначає або параболу, або пару паралельних прямих (наприклад, $x^2 - 1 = 0$), або уявну лінію (наприклад, $x^2 + 1 = 0$ – пара уявних прямих).

Лінія другого порядку називається ***виродженою***, якщо її загальне рівняння визначає на площині: порожню множину (уявну лінію), точку, пряму, пару прямих.

*Зауваження 1*. Надалі будемо розглядати тільки ***суттєво криві дійсні лінії*** другого порядку. Випадки виродження не вивчатимемо.

### 1.2.2 Канонічне рівняння кола. Рівняння кола зі зміщеним центром

***Колом*** називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки площини $C$ (***центра*** кола) дорівнює заданій сталій величині $r$ (***радіусу*** кола).

Розглянемо коло з центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом $r$ (рис. 13). Для довільної точки $M(x,y)$ кола:

$$MO = r\ ; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r\ ; \quad x^2 + y^2 = r^2 \ –$$

***канонічне*** (найпростіше) ***рівнянням кола***.

*Зауваження 1*. Якщо центром кола служить точка $C(a;b)$, то маємо ***рівняння кола зі зміщеним центром*** (рис. 14):

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

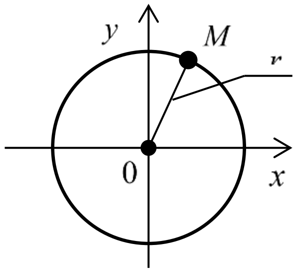


Рисунок 13

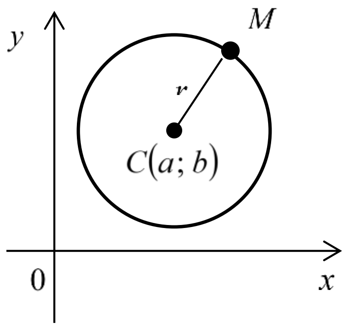


Рисунок 14

*Приклад 1*. Переконатись, що рівняння

$$3x^2+3y^2+6x-5y-9=0$$

є рівнянням кола. Знайти його центр $C(a;b)$, і радіус $r$.

□ $x^2+y^2+2x-(5/3)y-3=0$;

$$x^2+2x+1-1+y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-3=0;$$

$$(x+1)^2+(y-5/6)^2=(13/6)^2;\quad C(-1;5/6);\quad r=13/6.\ ■$$

Приклад 2. Дано дві точки $A(4;-3)$ і $B(-8;1)$.. Скласти рівняння кола $l$, для якого відрізок $AB$ служить діаметром.

□ Центром кола $l$ є середина $C$ діаметра $AB$, а радіус кола $r=(1/2)AB.$ Тоді:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4+(-8)}{2}=-2;\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-3+1}{2}=-1;$$

$$C(-2;-1); \quad AB = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(4+8)^2 + (-3-1)^2} = 4\sqrt{10}; \; r = 2\sqrt{10}.$$

Рівняння кола $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 40.$ ■

Приклад 3. Два підприємства $A$ і $B$, відстань між якими $AB = 100$ км (рис. 15), виробляють деяку продукцію одного виду, причому відпускна ціна одиниці продукції на цих підприємствах однакова. Нехай перевезення продукції до споживача завжди здійснюється по прямій, а транспортні витрати на перевезення одиниці продукції від підприємства $A$ складають $k_1 = 0{,}03$ грн./км, а від підприємства $B$ – $k_2 = 0{,}02$ грн./км. Де розміщені споживачі, що несуть однакові витрати на купівлю продукції обох підприємств? Якою є конфігурація ринку збуту продукції цих підприємств?

□ Нехай відпускна ціна одиниці продукції на цих підприємствах дорівнює $p$ грн. Припустимо, що споживач знаходиться в деякій точці $M(x;y)$. З рис. 15 видно, що

$$AM = \sqrt{(x+50)^2 + y^2}; \quad BM = \sqrt{(x-50)^2 + y^2}.$$

Витрати споживача на покупку одиниці виробу з підприємства $A$ складають $p + k_1 \cdot AM = p + 0{,}03 \cdot \sqrt{(x+50)^2 + y^2}$, а з підприємства $B$ відповідно

$$p + k_2 \cdot BM = p + 0{,}02 \cdot \sqrt{(x-50)^2 + y^2}.$$

Якщо витрати споживача одинакові, то

$$p + 0{,}03 \cdot \sqrt{(x+50)^2 + y^2} = p + 0{,}02 \cdot \sqrt{(x-50)^2 + y^2};$$

$$0{,}03 \cdot \sqrt{(x+50)^2 + y^2} = 0{,}02 \cdot \sqrt{(x-50)^2 + y^2};$$

$$3 \cdot \sqrt{(x+50)^2 + y^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-50)^2 + y^2} \;\uparrow 2;$$

$$9(x+50)^2 + 9y^2 = 4(x-50)^2 + 4y^2;$$

$$5x^2 + 1300x + 5y^2 + 5 \cdot 2500 = 0; \quad x^2 + 260x + y^2 + 2500 = 0;$$

$$x^2 + 2\cdot 130x + 130^2 - 130^2 + y^2 + 2500 = 0\,;$$

$$(x+130)^2 + y^2 = 14400$$

– коло з центром $\tilde{N}(-130;0)$ і радіусом $r = 120$ км (рис. 15). Для споживачів, які знаходяться на цьому колі, витрати на покупку продукції підприємств $A$ і $B$ однакові.

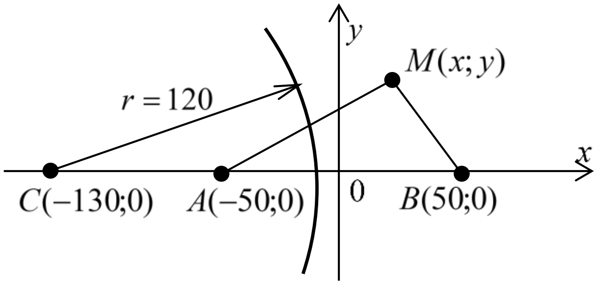


Рисунок 15

Для споживачів, які знаходяться поза колом, витрати менші на покупку продукції підприємства $B$. Для споживачів, які знаходяться всередині кола, витрати менші на покупку продукції підприємства $A$. Отже, конфігурація ринку збуту виглядає так:

- споживачі, які знаходяться всередині кола, купують продукцію підприємства $A$;
- споживачі, які знаходяться на колі, купують продукцію рівно можливо обох підприємств;
- споживачі, які знаходяться поза колом, купують продукцію підприємства $B$. ■

### 1.2.3 Канонічні рівняння еліпса, гіперболи та параболи

***Еліпсом*** називається множина всіх точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох заданих точок площини $F_1$ і $F_2$ (***фокусів*** еліпса) дорівнює заданій сталій величині $2a$, більшій за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x,y)$ еліпса (рис. 16) $r_1 + r_2 = 2a$, де $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x,y)$; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокуси, $F_1F_2 = 2c < 2a$. Тоді

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a .$$

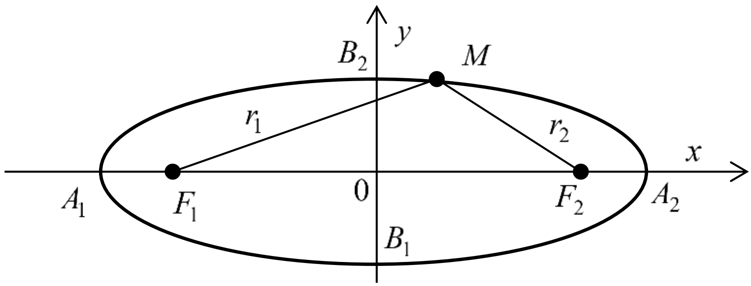


Рисунок 16

Підносячи до квадрата і спрощуючи, покладаючи $b^2 = a^2 - c^2$ (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння еліпса***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{де } b^2 = a^2 - c^2 > 0.$$

Еліпс має форму овалу, який симетричний відносно ***великої осі*** $A_1A_2 = 2a$ і ***малої осі*** $B_1B_2 = 2b$, а також центрально симетричний відносно точки $O(0;0)$ – ***центра*** еліпса. Точки перетину з осями координат $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ називають ***вершинами*** еліпса.

Відношення ***міжфокусної відстані*** $F_1F_2 = 2c$ до великої осі $A_1A_2 = 2a$ називають ***ексцентриситетом*** еліпса і позначають $\varepsilon$: $\varepsilon = c/a$.

*Зауваження 1*. Ексцентриситет характеризує форму еліпса, при цьому $0 \le \varepsilon < 1$. Якщо $\varepsilon = 0$, то маємо окремий випадок еліпса – коло, при цьому $a = b = r$. Чим більше значення $\varepsilon$, тим сильніше витягнутий еліпс вздовж великої осі.

Дві прямі, що мають рівняння $x = \pm a/\varepsilon$, називаються ***директрисами*** еліпса. Оскільки для еліпса $\varepsilon < 1$, то права директриса розміщена вертикально правіше від його правої вершини; а ліва директриса –лівіше від його лівої вершини.

Властивість директрис еліпса: *Відношення фокального радіуса $r$ довільної точки еліпса до відстані $d$ цієї точки до відповідної директриси є стала величина, що дорівнює ексцентриситету еліпса* $r/d = \varepsilon$.

*Приклад 1.* Переконатись, що рівняння $16x^2 + 6y^2 - 96 = 0$ є рівнянням еліпса. Зобразити ескіз еліпса, знайшовши точки його перетину з осями координат (вершини еліпса).

□ $16x^2 + 6y^2 - 96 = 0$ ; $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{16} = 1$ ; $\frac{x^2}{\sqrt{6}^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

– еліпс, що перетинає осі координат у вершинах $A_1\left(-\sqrt{6};0\right)$, $A_2\left(\sqrt{6};0\right)$, $B_1(0;-4)$, $B_2(0;4)$.

(Ескіз еліпса зробити самостійно). ■

*Приклад 2.* Скласти канонічне рівняння еліпса, мала піввісь якого $b = 2\sqrt{3}$, а лівий фокус знаходиться у точці $F(-2;0)$. Знайти його ексцентриситет і написати рівняння директрис.

□ За умовою задачі $b = 2\sqrt{3}$, а половина міжфокусної відстані $c = 2$. Тоді

$$c^2 = a^2 - b^2;\ \ a^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 = 16;\ \ a = 4.$$

Звідси $x^2/16 + y^2/12 = 1$– канонічне рівняння; $\varepsilon = 2/4 = 1/2$– ексцентриситет; $x = \pm 4/(1/2)$; $x = \pm 8$ – директриси. ■

*Приклад 3.* Написати рівняння еліпса, симетричного відносно осей координат, який проходить через точки $M_1(-2;-3)$ і $M_2(2\sqrt{3};-\sqrt{3})$. Знайти велику й малу півосі та ексцентриситет. Для точки $M_1$ обчислити її фокальні радіуси та відстані від неї до кожної з директрис.

□ Еліпс симетричний відносно осей координат, тому його рівняння буде канонічним: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Оскільки точки $M_1$ і $M_2$ належать еліпсу, то одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (-2)^2/a^2 + (-3)^2/b^2 = 1 \\ (2\sqrt{3})^2/a^2 + (-\sqrt{3})^2/b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4/a^2 + 9/b^2 = 1 \\ 12/a^2 + 3/b^2 = 1 \end{cases}$$

Для розв'язування системи застосуємо метод заміни змінної:

$$\begin{matrix} 1/a^2 = u; \\ 1/b^2 = v; \end{matrix} \quad \begin{cases} 4u + 9v = 1 \\ 12u + 3v = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u = (1-9v)/4 \\ 12(1-9v)/4 + 3v = 1 \end{cases}$$

$$-24v = -2;\ v = 1/12;\ u = (1 - 9/12)/4 = 1/16;\ a^2 = 16;\ b^2 = 12.$$

Дістанемо рівняння еліпса

$$x^2/16 + y^2/12 = 1,\ \ a = 4 \text{ і } b = 2\sqrt{3}.$$

Оскільки $b^2 = a^2 - c^2$, то $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-12} = 2$.

Фокуси еліпса $F_1(-2;0)$ і $F_2(2;0)$. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = c/a = 2/4 = 1/2$.

Фокальні радіуси точки $M_1$ (відстані точки до фокусів):

$$r_1 = MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(-2+2)^2 + (-3)^2} = 3;$$

$$r_2 = MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3)^2} = 5.$$

Рівняння директрис еліпса

$$\tilde{o} = \pm \grave{a}/\varepsilon \ \Rightarrow\ \tilde{o} = \pm 4/(1.2)\ \Rightarrow \tilde{o} = \pm 8.$$

Відстані точки $M_1$ до директрис еліпса дорівнюють:

$$d_1 = |x + a/\varepsilon|;\ \ d_1 = |-2+8| = 6;$$

$$d_2 = |x - a/\varepsilon|;\ \ d_2 = |-2-8| = 10. \quad ■$$

***Гіперболою*** називається множина всіх точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок площини $F_1$ і $F_2$ (***фокусів*** гіперболи) дорівнює заданій сталій величині $2a$, меншій за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x,y)$ гіперболи (рис. 17): $|r_1 - r_2| = 2a$, де $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x,y)$; $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$ – фокуси, $F_1F_2 = 2c > 2a$. Тоді

$$\left|\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right| = 2a.$$

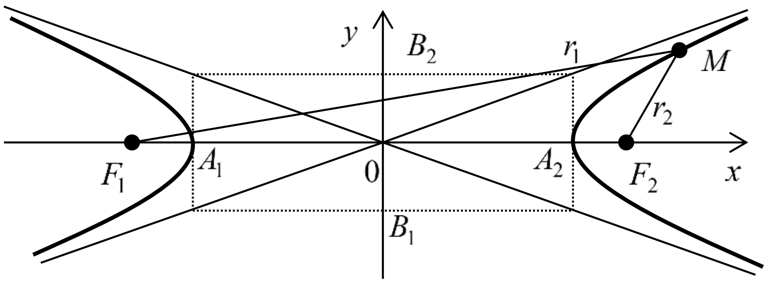


Рисунок 17

Підносячи до квадрата і спрощуючи, покладаючи $b^2 = c^2 - a^2$ (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння гіперболи***

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{де} \quad b^2 = c^2 - a^2 > 0.$$

Гіпербола складається з двох нескінченних гілок, які симетричні відносно ***дійсної осі*** $A_1A_2 = 2a$ і ***уявної осі*** $B_1B_2 = 2b$, а також центрально симетричні відносно точки $O(0;0)$ – ***центра*** гіперболи. Дійсні вершини $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ є точками перетину гіперболи з віссю $Ox$. Через уявні вершини $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ гіпербола не проходить. Прямі

$$y = \frac{b}{a}x \ ; \quad y = -\frac{b}{a}x$$ є ***асимптотами*** гіперболи.

***Асимптотою*** називається пряма, що необмежено зближається з гілкою кривої на нескінченності.

Відношення ***міжфокусної відстані*** $F_1F_2 = 2c$ до дійсної осі $A_1A_2 = 2a$ називається ***ексцентриситетом*** гіперболи і позначається $\varepsilon$: $\varepsilon = c/a$.

*Зауваження 2*. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи, при цьому $\varepsilon > 1$. Чим менше значення $\varepsilon$, тим сильніше витягнута гіпербола вздовж дійсної осі.

Дві прямі, що мають рівняння $x = \pm a/\varepsilon$, називаються ***директрисами*** гіперболи. Оскільки для гіперболи $\varepsilon > 1$, то права директриса розмішена вертикально між центром і правою вершиною, а ліва директриса – між центром і лівою вершиною.

Властивість директрис гіперболи аналогічна відповідній властивості для еліпса: $r/d = \varepsilon$.

*Приклад 4*. Переконатись, що рівняння $5x^2 - 15y^2 - 225 = 0$ є рівнянням гіперболи. Знайти вершини гіперболи та її асимптоти. Зобразити ескіз гіперболи. (Розв'язати самостійно).

*Приклад 5*. Знайти рівняння гіперболи $l_g$, якщо її ексцентриситет $\varepsilon_g = 2$, а фокуси збігаються з фокусами еліпса $l_e$: $x^2/100 + y^2/36 = 1$.

□ $l_e$: $x^2/100 + y^2/36 = 1$; $a_e^2 = 100$; $b_e^2 = 36$; $c_e^2 = a_e^2 - b_e^2$;

$$c_e^2 = 100 - 36 = 64;\ c_g = c_e = 8;\ \varepsilon_g = c_g/a_g;\ a_g = c_g/\varepsilon_g;$$

$$a_g = 8/2 = 4;\ a_g^2 = 16;\ b_g^2 = c_g^2 - a_g^2;\ b_g^2 = 8^2 - 4^2 = 48;$$

$$l_g:\ x^2/16 - y^2/48 = 1. \quad \blacksquare$$

*Приклад 6*. Точка $M\left(-4; 3\sqrt{3}\right)$ належить гіперболі $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, а її асимптоти $y = \pm(3/2)x$. Знайти канонічне рівняння, ексцентриситет і директриси гіперболи.

□ Оскільки точка $M$ належать гіперболі, то

$$(-4)^2 / a^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2 / b^2 = 1.$$

З рівнянь асимптот маємо $b/a = 3/2$. Розв'язуючи одержану систему двох рівнянь з двома невідомими $a$ і $b$ (зробіть це самостійно), знаходимо $a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ і $b = 3\sqrt{3}$.

Звідси $x^2/12 - y^2/27 = 1$ – канонічне рівняння;

$$c^2 = a^2 + b^2;\ c^2 = 12 + 27 = 39;\ c = \sqrt{39};\ \varepsilon = c/a;$$

$$\varepsilon = \left(\sqrt{39}\right)/\sqrt{12} = \sqrt{39}/2\sqrt{3} \text{ – ексцентриситет;}$$

$$x = \pm 2\sqrt{3}/\left(\sqrt{39}/2\sqrt{3}\right);\ x = \pm 12\sqrt{39}/39 \text{ – директриси. } \blacksquare$$

*Приклад 7.* Нехай $x$ – чисельність робітників фірми. Вони повинні згідно угоди виконати певне завдання, за що одержать загалом $S = 100$ тис. грн. заробітної плати. Відомо, що зарплата в усіх однакова і відрахування становлять $\Delta = 500$ грн. з належної кожному суми. Знайти залежність $y = y(x)$ заробітної плати кожного робітника $y$ від їх чисельності $x$. Обчислити величину зарплати при чисельності $x = 20$.

□ Маємо рівняння $y = 100000/x - 500$. .Воно визначає гіперболу, для якої пряма $y = -500$ є горизонтальною асимптотою, а пряма $x = 0$ служить вертикальною асимптотою. Оскільки за економічним змістом $x > 0$ і $y > 0$, то розглядається гілка цієї гіперболи, що лежить у першій чверті. При цьому

$$y = 100000/x - 500 > 0;\ 100000/x > 500;\ x < 200.$$

При чисельності $x = 20$ одержимо

$$y(20) = 100000/20 - 500 = 4500 \text{ (грн.). } \blacksquare$$

***Параболою*** називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань від заданої точки площини $F$ (***фокуса*** параболи) дорівнює відстані до заданої прямої $l_d$ (***директриси*** параболи), що не проходить через фокус.

Для довільної точки $M(x, y)$ параболи (рис. 18) $r = d$, де $r = MF$ – ***фокальний радіус*** точки $M(x, y)$; $d$ – відстань точки $M(x, y)$ до директриси $l_d$: $x = -p/2$; $F(p/2; 0)$ – фокус;

$p$ – ***параметр*** параболи (відстань від фокуса до директриси), $p > 0$. Тоді

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + (y - 0)^2} = x - (-p/2)..$$

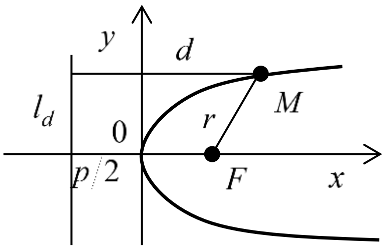


Рисунок 18

Підносячи до квадрата і спрощуючи (зробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння параболи*** $y^2 = 2px$.

Очевидно, що $x \geq 0$.

Парабола має форму нескінченної гілки, яка симетрична відносно ***осі*** параболи $OF$. Точка $O(0;0)$ на осі симетрії (початок координат) називається ***вершиною*** параболи. Асимптот парабола не має.

*Зауваження 3*. Згідно з означенням параболи і властивостями директрис еліпса і гіперболи, прийнято, що ***ексцентриситет*** параболи дорівнює одиниці $\varepsilon = 1$.

*Приклад 8*. Визначити координати фокуса $F(p/2;0)$ і рівняння директриси $l_d$ параболи $y^2 = 12x$. Знайти кінці $M_1(p/2;-p)$ і $M_2(p/2;p)$ хорди $M_1M_2 = 2p$, яка проходить через фокус параболи і перпендикулярна до її осі. Зобразити ескіз параболи, проводячи плавну лінію через її вершину $O$ і точки $M_1(p/2;-p)$, $M_2(p/2;p)$.

□ $y^2 = 2px$; $y^2 = 12x$; $2p = 12$; $p = 6$; $F(p/2;\,0)$;

$F(3;\,0)$; $l_d$: $x = -p/2$; $l_d$: $x = -3$; $M_1(3;-6)$; $M_2(3;\,6)$.

(Ескіз параболи зробити самостійно). ■

*Приклад 9*. Скласти рівняння параболи $l_p$: $y^2 = 2px$, якщо її фокус збігається з правою дійсною вершиною гіперболи $l_g$: $x^2/4 - y^2/6 = 1$. Знайти точки перетину цих ліній.

□ $l_g$: $x^2/4 - y^2/6 = 1.$; $a_g^2 = 4$; $F(p/2;0) = A_2(a_g;0);$;

$$p/2 = a_g = 2;\quad p = 4;\quad l_p:\quad y^2 = 2px;\quad y^2 = 8x;$$

$$\begin{cases} x^2/4 - y^2/6 = 1 \\ y^2 = 8x; \end{cases} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{8x}{6} = 1;\ 3x^2 - 16x - 12 = 0;$$

$$x_1 = 6;\quad x_2 = -2/3 - \text{ не задовольняє умову } x \ge 0;\quad y^2 = 8 \cdot 6;$$

$$y_1 = 4\sqrt{3};\ y_2 = -4\sqrt{3};\ M_1\left(3; -4\sqrt{3}\right);\ M_2\left(3; 4\sqrt{3}\right). \ ■$$

*Приклад 10.* Фірма планує випускати газові котли. Дослідження ринку показало, що залежність попиту $Q$ (кількість реалізованих котлів) від ціни $p$ одного котла задається рівнянням $Q = 60000 - 2{,}5p$. Функція вартості $V = V(Q)$ (затрати $V$ фірми на випуск $Q$ котлів) визначається рівнянням $V = 1180000 + 18000Q + 0{,}1Q^2$. Скласти залежність $\Pi = \Pi(Q)$ прибутку $\Pi$ від кількості $Q$ котлів. Визначити його оптимальне значення $\Pi_{\max}$ і відповідний обсяг реалізації $Q_{\max}$.

□ Виразимо ціну $p$ котла як функцію від обсягу продаж $Q$: $2{,}5p = 60000 - Q;\ p = 24000 - 0{,}4Q$. Дохід $R$ від продажу $Q$ котлів дорівнює $R = pQ$. Тоді $R = pQ = 24000Q - 0{,}4Q^2$.

Прибуток $\Pi = R - V$ також виразимо як функцію від $Q$:

$$\Pi = R - V = 24000Q - 0{,}4Q^2 - (1180000 + 18000Q + 0{,}1Q^2) =$$

$$= 6000Q - 0{,}5Q^2 - 1180000.$$

Графіком цієї функції є вертикальна парабола з напрямленими вниз гілками і вершиною в точці $M_0(Q_0; \Pi_0)$, де

$$Q_0 = 6000/(2 \cdot 0{,}5) = 6000;\quad \Pi_0 = \Pi(Q_0) = 6000 \cdot 6000 -$$

$$- 0{,}5 \cdot 6000^2 - 1180000 = 16820000.$$

Оскільки $Q > 0$ і виробництво повинно бути прибутковим $\Pi > 0$, то треба розглядати тільки дугу параболи, що лежить у першій чверті. Розв'яжемо нерівність $\Pi(Q) > 0$. Для цього знайдемо точки, в яких парабола перетинає вісь абсцис $Q$:

$$\Pi(Q)=0; \quad 6000Q-0{,}5Q^2-1180000=0;$$

$$0{,}5Q^2-6000Q+1180000=0; \quad Q^2-12000Q+2360000=0;$$

$$D/4=6000^2-2360000=33640000=5800^2;$$

$$Q_1=6000-5800=200; \quad Q_2=6000+5800=11800.$$

Отже, фірма повинна виробляти газових котлів більше, ніж 200, і менше, ніж 11800.

Оскільки дана парабола найбільшого значення досягає у своїй вершині, то прибуток буде найбільшим, коли фірма буде виробляти $Q_{\max}=Q_0=6000$ котлів. При цьому її оптимальний прибуток буде становити $\Pi_{\max}=\Pi_0=16820000$ (грош. од). ■

## Запитання для самоконтролю

1. Запишіть загальне рівняння кривої другого порядку. Проаналізуйте його.
2. Дайте означення кола. Виведіть канонічне рівняння кола.
3. Наведіть рівняння кола зі зміщеним центром.
4. Дайте означення еліпса. Виведіть канонічне рівняння еліпса.
5. Яким співвідношенням зв’язані велика $a$ і мала $b$ півосі еліпса та половина $c$ міжфокусної відстані?
6. Дайте означення гіперболи. Виведіть канонічне рівняння гіперболи.
7. Яким співвідношенням зв’язані дійсна $a$ і уявна $b$ півосі гіперболи та половина $c$ міжфокусної відстані?
8. Дайте означення параболи. Виведіть канонічне рівняння параболи.
9. Що таке ексцентриситет? Яким співвідношенням задається ексцентриситет еліпса, гіперболи, параболи?
10. Що таке директриса? Опишіть властивості директрис еліпса, гіперболи, параболи.
11. Якими рівняннями задаються асимптоти гіперболи?

## Завдання для самостійного опрацювання

**Задача 1**. Два кола задані своїми загальними рівняннями:

$$l_1: \quad x^2 + y^2 - 10x + 16y + 85 = 0;$$

$$l_2: \quad 3x^2 + 3y^2 + 18x + 12y - 25 = 0.$$

Записати ці співвідношення у стандартному вигляді рівняння кола зі зміщеним центром. Знайти відстань $d$ між центрами заданих кіл.

Відповідь:

$$l_1: (x-5)^2 + (y+8)^2 = 4; \quad l_2: (x+3)^2 + (y+2)^2 = 64/3; \quad d = 10.$$

**Задача 2**. Скласти канонічне рівняння еліпса, у якого довжина малої осі дорівнює 24, а один з фокусів має координати $(-5;0)$. Знайти його ексцентриситет $\varepsilon$ та рівняння директрис.

Відповідь: $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1; \quad \varepsilon = \dfrac{5}{13}; \quad x = \pm\dfrac{169}{5}.$

**Задача 3**. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо вона проходить через точку $M(-2;-3)$ і має ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{10}.$ Знайти рівняння асимптот гіперболи.

Відповідь: $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{27} = 1; \quad x = \pm 3.$

**Задача 4**. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо вона проходить через точку $M(2;-8)$. Знайти відстань $r$ від точки $M$ до фокуса параболи. Відповідь: $y^2 = 32x; \quad r = 10.$

**Задача 5**. У прямокутній системі координат $Oxy$ лінія другого порядку $l$ визначається вказаною її характеристичною властивістю: для кожної точки $M(x,y)$ лінії $l$ відношення відстаней до заданої точки $M_0(3;0)$ і до заданої прямої $l_0: x = 5$ дорівнює заданому числу $\varepsilon = 3/4$. Визначити тип цієї лінії $l$ та скласти її загальне рівняння: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$

Відповідь: еліпс: $x^2 + 4y^2 + 6x - 39 = 0.$

## Лекція 1.3 Вступ до математичного аналізу. Теорія границь

### План

1.3.1 Змінні та сталі величини. Нескінченно малі і нескінченно великі та їхні властивості.

1.3.2 Границя змінної величини. Властивості границь.

1.3.3 Перша та друга стандартні границі. Невизначеності та їх розкриття.

Запитання для самоконтролю.

Завдання для самостійного опрацювання.

**Опорні поняття:** *сталі та змінні величини, нескінченно малі та нескінченно великі величини, границя, властивості границь, розкриття невизначеностей, стандартні границі.*

### 1.3.1 Змінні та сталі величини. Нескінченно малі і нескінченно великі та їхні властивості

***Сталою величиною*** або ***константою*** називається величина, яка не змінює свого значення в умовах задачі, що розглядається. Звичайно сталі величини позначаються малими (інколи великими) буквами із початку латинського алфавіту $a, b, c, d, \ldots$.

***Змінною величиною*** називається величина, яка може набувати різних значень в умовах задачі, що розглядається. Звичайно змінні величини позначаються малими (інколи великими) буквами з кінця латинського алфавіту $\ldots, w, x, y, z$. Сукупність всіх числових значень змінної величини утворює її ***область значень***.

Змінна $x$ є ***упорядкована величина***, якщо про кожне з двох будь-яких її значень можна сказати, яке з них попереднє і яке наступне.

Окремим випадком упорядкованої змінної величини є ***числова послідовність*** $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$. Тут при $i < k$ значення $x_i$ попереднє, а $x_k$ – наступне незалежно від того, яке з цих значень більше.

Змінна величина $x$ називається ***обмеженою***, якщо всі її значення за модулем не перевищують деякого додатного числа $M$ протягом всього процесу змінювання: $\exists M > 0, \forall x: |x| \le M$. В іншому випадку змінна величина називається ***необмеженою***.

Змінна величина $x$ називається ***зростаючою***, якщо в процесі змінювання її значення не зменшуються, тобто кожне наступне значення неменше попереднього. Позначається $x \nearrow$.

Змінна величина $x$ називається ***спадною***, якщо в процесі змінювання її значення не збільшуються, тобто кожне наступне значення не більше попереднього. Позначається $x \searrow$.

Зростаючі та спадні змінні величини називаються ***монотонними***. Монотонна величина називається ***строго монотонною***, якщо її значення задовольняють відповідну строгу нерівність.

Наприклад:

а) змінна величина $x_n = 2^n$, $n \in N$ є строго зростаючою $x_n = 2^n \nearrow$, оскільки $x_{n+1} = 2^{n+1} > x_n = 2^n$, $n \in N$;

б) змінна величина $y_n = (1/2)^n$, $n \in N$ є строго спадною $y_n = (1/2)^n \searrow$, оскільки $y_{n+1} = (1/2)^{n+1} < y_n = (1/2)^n$, $n \in N$;

в) змінна величина $z_n = (-2)^n$, $n \in N$ є немонотонною, оскільки, зокрема, $z_3 = (-2)^3 \le z_2 = (-2)^2$; $z_4 = (-2)^4 \ge z_3$;

г) площа $S$ правильного вписаного в коло многокутника при подвоєнні його сторін є монотонно зростаючою величиною.

Підкреслимо, що величини з пунктів б), г) є обмеженими, а величини з пунктів а) і в) – необмежені.

Змінна величина $x$ називається ***нескінченно малою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються меншими будь-якого фіксованого додатного числа $\varepsilon$.

Іншими словами, *змінна величина $x$ називається нескінченно малою, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий момент $t_\varepsilon$ процесу змінювання, що у всі наступні моменти $t > t_\varepsilon$ значення змінної величини $x$ за модулем менші цього числа $\varepsilon$*:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon, \forall t > t_\varepsilon : |x| < \varepsilon .$$

Нескінченно малі величини позначаються звичайно малими буквами грецького алфавіту $\alpha, \beta, \ldots$. Те, що змінна величина $\alpha$ є нескінченно малою, позначається так: $\alpha \to 0$ або $\lim \alpha = 0$.

Наприклад:

а) $\alpha = 10\ 000 \big/ n^2 \to 0$. Зокрема, якщо $\varepsilon = 0{,}01$, то нерівність $|\alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow |10\ 000 \big/ n^2| < 0{,}01$ виконується для всіх $n > n_\varepsilon = 1000$;

б) Змінні величини $x_n = 1 + (-1)^n$ і $y_n = n^{\cos \pi n}$ не є нескінченно малими.

Доведення основних властивостей нескінченно малих величин ґрунтується на їх означенні та властивостях модуля.

*Теорема 1. Нескінченно мала величина є обмеженою*:

$$\alpha \to 0 \ \Rightarrow \ \exists M > 0: \ |\alpha| \le M .$$

*Теорема 2. Сума (різниця) двох нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною*:

$$\alpha \to 0 \ i \ \ \beta \to 0 \Rightarrow \ \alpha \pm \beta \to 0 . \quad \text{Символічний запис} \quad 0 \pm 0 = 0 .$$

*Теорема 3. Добуток нескінченно малої величини на обмежену є нескінченно малою величиною*: $\left.\begin{matrix} |x| \le M \\ \alpha \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ \alpha x \to 0 .$

*Наслідок. Добуток сталої величини на нескінченно малу є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{matrix} \alpha \to 0 \\ C = const \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ C\alpha \to 0 . \quad \text{Символічний запис} \quad C \cdot 0 = 0 .$$

*Теорема 4. Добуток двох нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною*:

$$\alpha \to 0 \ i \ \ \beta \to 0 \Rightarrow \ \alpha\beta \to 0 . \quad \text{Символічний запис} \quad 0 \cdot 0 = 0 .$$

Змінна величина $x$ називається ***нескінченно великою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються більшими будь-якого фіксованого додатного числа $M$.

Іншими словами, змінна величина $x$ називається нескінченно великою, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно великого) додатного числа $M > 0$ знайдеться такий момент $t_M$

процесу змінювання, що у всі наступні моменти $t > t_M$ значення змінної величини $x$ за модулем більші цього числа $M$ :

$$\forall M > 0, \exists t_M, \forall t > t_M : |x| > M .$$

Те, що змінна величина $x$ є нескінченно великою, позначається так: $x \to \infty$ або $\lim x = \infty$ .

*Теорема 5. Величина, обернена до нескінченно великої величини, є нескінченно малою*: $x \to \infty \Rightarrow \alpha = 1/x \to 0$ .

Символічний запис $1/\infty = 0$ .

*Теорема 6. Величина, обернена до нескінченно малої відмінної від нуля величини, є нескінченно великою*:

$$\left.\begin{aligned} \alpha \to 0 \\ \alpha \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha} \to \infty .$$ Символічний запис $1/0 = \infty$ .

### 1.3.2 Границя змінної величини. Властивості границь

Поняття границі слугує для характеристики напрямку процесу змінювання.

Стала величина $a$ називається ***границею*** змінної величини $x$ , якщо їх різниця $x - a$ є нескінченно малою величиною:

$$x - a = \alpha \to 0 .$$

Записується так: $x \to a$ або $\lim x = a$ .

Наприклад $\lim \frac{n+1}{n} = 1$ , оскільки $\alpha = \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n} \to 0$ .

*Геометричний зміст*: стала величина $a$ слугує границею змінної величини $x$ , якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ значення змінної величини $x$ у процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в $\varepsilon$ - околі точки $a$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon, \forall t > t_\varepsilon : x \in U(a; \varepsilon), \ U(a; \varepsilon) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon) .$$

*Зауваження 1*. Якщо з контексту задачі не зрозуміло, в яких умовах відбувається процес змінювання, то додаткову інформацію подають під знаком границі або після нього.

Наприклад: $x_n \to a \;\; при \;\; n \to \infty$ або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доведення основних властивостей границь ґрунтується на означенні границі та властивостях нескінченно малих.

*Теорема 1. Змінна величина в фіксованому процесі змінювання має не більше однієї границі.*

*Зауваження 2.* Змінна величина може не мати границі в даному процесі змінювання. Змінна величина може вести себе по-різному в різних процесах змінювання. Наприклад:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2};\;\; \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2} = \infty;\;\; \lim_{x\to \infty}\frac{1}{x-2} = 0.$$

*Теорема 2. Змінна величина, що має скінченну границю, є обмеженою у відповідному процесі змінювання.*

$$\lim x = a \Rightarrow \exists M > 0,\ \forall x: |x| \le M .$$

*Теорема 3. Границя сталої величини дорівнює самій цій величині*: $C = const \Rightarrow \lim C = C$.

*Теорема 4. Границя скінченної алгебраїчної суми змінних величин дорівнює такій же сумі їх границь, якщо останні існують*:

$$\lim(x + y - z) = \lim x + \lim y - \lim z .$$

*Теорема 5. Границя добутку двох змінних величин дорівнює добутку їх границь, якщо останні існують*: $\lim(xy) = \lim x \cdot \lim y$.

*Наслідок 1. Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити за знак границі*: $\lim(Cx) = C\cdot \lim x$, $C = const$.

*Наслідок 2. Границя степеню з натуральним показником змінної величини дорівнює відповідному степеню її границі, якщо остання існує*: $\lim x^n = (\lim x)^n$, $n \in N$.

*Теорема 6. Границя відношення двох змінних величин дорівнює такому ж відношенню їх границь, якщо останні існують, причому границя знаменника відмінна від нуля*: $\lim \dfrac{x}{y} = \dfrac{\lim x}{\lim y}$.

*Теорема 7. Границя невід'ємної змінної величини також невід'ємна*. Аналогічно, *границя недодатної змінної величини також недодатна*: $x \ge 0 \Rightarrow \lim x \ge 0$; $x \le 0 \Rightarrow \lim x \le 0$.

*Теорема 8 (**про стабілізацію знаку нерівності**). Якщо границя змінної величини додатна, то починаючи з деякого моменту процесу то, починаючи з деякого моменту процесу змінювання, всі її наступні значення також додатні:* $\lim x > 0 \Rightarrow \exists t_0,\ \forall t > t_0 : x > 0$.

Аналогічно, *якщо границя змінної величини від'ємна, то, починаючи з деякого моменту процесу змінювання, всі її наступні значення також від'ємні*: $\lim x < 0 \Rightarrow \exists t_0,\ \forall t > t_0 : x < 0$.

*Приклад 1.* Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x+7}{3x^2-2}$.

$$\square\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x+7}{3x^2-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-5x+7)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}5x+\lim\limits_{x\to 2}7}{\lim\limits_{x\to 2}3x^2-\lim\limits_{x\to 2}2}=$$

$$=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^3-5\lim\limits_{x\to 2}x+7}{3\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-2}=\frac{2^3-5\cdot 2+7}{3\cdot 2^2-2}=\frac{1}{2}.\quad\blacksquare$$

Спираючись на розв'язаний приклад, сформулюємо наступне *правило.*

*Границю раціонального дробу* $P(x)/Q(x)$, *де* $P(x)$ *і* $Q(x)$ *– многочлени, можна обчислити шляхом прямої підстановки замість* $x$ *його граничного значення, якщо при цьому не порушуються умови, вказані у властивостях границь.*

*Зауваження 3.* Якщо вказані умови порушуються, то треба скористатися, зокрема, властивостями нескінченно малих і нескінченно великих величин.

*Приклад 2.* Знайти границю: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^3+1}$.

$$\square\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x-4}{x^3+1}=\left|\frac{(-1)^2+3\cdot(-1)-4}{(-1)^3+1}=\frac{-6}{0}\right|=\infty.\quad\blacksquare$$

Питання про границю має дві сторони:

1. Чи існує границя? 2. Як обчислити границю?

*Теорема 9. Обмежена монотонна величина має границю*:

$$x \ge 0 \Rightarrow \lim x \ge 0\,; \quad x \le 0 \Rightarrow \lim x \le 0\,.$$

*Теорема 10 (**про стиснену змінну**). Нехай задано три змінні величини* $x$, $y$ *і* $z$, *для яких виконується подвійна нерівність* $x \le y \le z$. *Якщо при цьому крайні змінні* $x$ *і* $z$ *мають однакову границю* $\lim x = \lim z = a$, *то середня змінна* $y$ *також має ту саму границю* $\lim y = \lim x = \lim z = a$:

$$\left.\begin{aligned} x \le y \le z \\ \lim x = \lim z = a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim y = \lim x = \lim z = a\,.$$

## 1.3.3 Перша та друга стандартні границі. Невизначеності та їх розкриття

При розкритті невизначеності виду $0/0$ для нескінченно малих величин-многочленів можна скористатися наступним *правилом.*

*Для розкриття невизначеності виду* $0/0$ *для многочленів* $P(x)/Q(x)$ *треба чисельник* $P(x)$ *і знаменник* $Q(x)$ *розкласти на множники та скоротити дріб, а потім перейти до границі*.

*Приклад 1*. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+27}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+6x^2-7}{x^2-3x+2}$.

□ а) $$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x^3-1} = \left|\frac{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}{1^3-1} = \frac{0}{0}\right| =$$

$$= \left|\begin{aligned} &3x^2-5x+2=0 \\ &x_1=1;\ x_2=2/3 \end{aligned}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-2/3)}{(x-1)(x^2+x+1)} = 3\lim_{x\to 1}\frac{x-2/3}{x^2+x+1} =$$

$$= 3\cdot\frac{1-2/3}{1^2+1+1} = \frac{1}{3};$$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\left|\begin{array}{rl}
-\,3x^4-5x^3-5x+2 & \left|\begin{array}{l} x-2 \\ \hline 3x^3+x^2+2x-1 \end{array}\right. \\
\underline{3x^4-6x^3\qquad\qquad} & \\
-\,x^3-5x+2 & \\
\underline{x^3-2x^2\qquad} & \\
-\,2x^2-5x+2 & \\
\underline{2x^2-4x\qquad} & \\
-\,-x+2 & \\
\underline{-x+2} & \\
0 &
\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x^3+x^2+2x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^3+x^2+2x-1}{x+2}=$$

$$=\frac{3\cdot 2^3+2^2+2\cdot 2-1}{2+2}=7\frac{3}{4};$$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}=\left|\frac{4}{0}\right|=\infty;$$

г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+27}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)^2}{(x+3)(x^2-3x+9)}=$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-3x+9}=\frac{-3+3}{(-3)^2-3\cdot(-3)+9}=\frac{0}{27}=0;$$

д) розв’язати самостійно. ■

При розкритті невизначеності виду $\infty/\infty$ для нескінченно великих величин зручно спочатку перейти до розгляду нескінченно малих величин, використовуючи наступне *правило.*

*Для розкриття невизначеності виду $\infty/\infty$ для многочленів $P(x)/Q(x)$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ поділити на найвищий степінь $x$, а потім перейти до границі.*

*Зауваження 1.* Указане правило справедливе для всіх випадків нескінченно великих величин $\infty$, $+\infty$ чи $-\infty$.

*Приклад 2.* Знайти границю:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x-1}{5x^2-2x+6}; \quad \text{б) } \lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to+\infty}\frac{9x^3+4x}{2x^5+x^3+6}; \ \text{г) } \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^6+4x^4-x}{x^3-6x^2+3}; \ \text{д) } \lim_{x\to\infty}\frac{8x^4+4x}{2x^4-9}.$$

□ а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x-1}{5x^2-2x+6}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-5/x+4/x^3-1/x^4}{5/x^2-2/x^3+6/x^4}=\left|\frac{3-0+0-0}{0-0+0}\right|=\infty;$$

б) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{5-4/x-7/x^2}{8-3/x+6/x^2}=$$

$$=\frac{5-0-0}{8-0+0}=\frac{5}{8};$$ в) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^3+4x}{2x^5+x^3+6}=$$

$$=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{9/x^2+4/x^4}{2+1/x^2+6/x^5}=\frac{0+0}{2+0+0}=0;$$

г) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^6+4x^4-x}{x^3-6x^2+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+4/x^2-1/x^5}{1/x^3-6/x^4+3/x^6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+0-0}{0-0+0}=-\infty;$$

д) розв’язати самостійно. ■

При розкритті невизначеності виду $0/0$ ірраціональними виразами зручно спочатку перейти до розгляду нескінченно малих величин-многочленів. Можна скористатися наступним *правилом.*

*Для розкриття невизначеності виду* $0/0$ *для ірраціональних виразів треба спочатку відповідним чином позбавитись ірраціональності, що дає нуль, потім скоротити дріб, і нарешті перейти до границі*.

*Приклад 3*. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{3x-8}-1}$.

□ а) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{5x-1}-3\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{\left(4x^2-5x-6\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{5x-1}+3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{5x-1-9}{4x^2-5x-6}=\frac{1}{\sqrt{5\cdot 2-1}+3}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5x-10}{4x^2-5x-6}=\left|\begin{array}{l}4x^2-5x-6=0\\ x_1=2;\ x_2=-3/4\end{array}\right|=\frac{1}{6}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5(x-2)}{4(x-2)(x+3/4)}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+3/4}=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{2+3/4}=\frac{5}{11};$$

б) $$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\left(\sqrt[3]{4x+4}+2\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)}{\left(\sqrt{-3x}+x\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{-3x}-x}{\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4}\cdot\lim_{x\to -3}\frac{4x+4+8}{-3x-x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{-3\cdot(-3)}-(-3)}{\sqrt[3]{(4\cdot(-3)+4)^2}-2\sqrt[3]{4\cdot(-3)+4}+4}\cdot\lim_{x\to -3}\frac{4(x+3)}{-x(3+x)}=$$

$$=\frac{6}{12}\cdot(-4)\lim_{x\to-3}\frac{1}{x}=-2\cdot\frac{1}{-3}=\frac{2}{3};$$

в) розв’язати самостійно. ■

При обчисленні границь конкретних змінних величин часто використовуються уже відомі результати – ***стандартні границі***.

*Теорема 1 (**перша стандартна границя**). Границя відношення синуса нескінченно малої величини до самої цієї величини існує і дорівнює одиниці*: $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=1$.

*Наслідок 1*. $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{tg\,\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=1$. *Наслідок 2*. $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=1$.

*Наслідок 3*. $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{arctg\,\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=1$.

*Правило. Для розкриття невизначеності виду* $0/0$ *з тригонометричними виразами треба розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити дріб або застосувати першу стандартну границю чи її наслідки.*

*Приклад 4*. Знайти границю:

$$\text{а) } \lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to\pi/4}\frac{ctg(\pi/4-x)}{4x-\pi}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to0}\frac{arctg\,6x}{\arcsin 2x}.$$

□ а) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times$$

$$\times\lim_{x\to0}\cos x=1\cdot1=1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(3x/2)}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2(3x/2)\cdot(3x/2)^2}{(3x/2)^2\cdot x\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot x}=$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x/2)}{3x/2}\right)^2:\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{9}{2}\cdot1^2:1=\frac{9}{2};$$

в) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{ctg(\pi/4+x)}{4x-\pi}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix}u=x-\pi/4;\ x=\pi/4+u;\\ x\to\pi/4\ \Rightarrow\ u\to0\end{matrix}\right|=$

$$=\lim_{u\to0}\frac{ctg(\pi/4+u+\pi/4)}{4(\pi/4+u)-\pi}=\lim_{u\to0}\frac{ctg(\pi/2+u)}{4u}=-\frac{1}{4}\cdot\lim_{u\to0}\frac{tg\,u}{u}=$$

$$=-(1/4)\cdot1=-1/4;$$

г) розв'язати самостійно. ■

*Теорема 2 (**друга стандартна границя**). Змінна величина* $(1+1/n)^n$ *має границю при* $n\to\infty$. *Ця границя позначається буквою* $e$ *і називається числом Ейлера*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left|1^\infty\right|=e,\quad e=2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ldots\approx2{,}72.$$

*Зауваження 2*. Використовують також наступні форми запису другої стандартної границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\left|1^\infty\right|=e$, де змінна $x$ – дійсна неперервна.

2) $\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=\left|1^\infty\right|=e$.

*Границя виразу – одиниця плюс нескінченно мала в степені, оберненому до цієї нескінченно малої – дорівнює числу Ейлера* $e$.

*Наслідок 1*. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=1$.

*Наслідок 2.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\ln a$.

*Наслідок 3.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\alpha$.

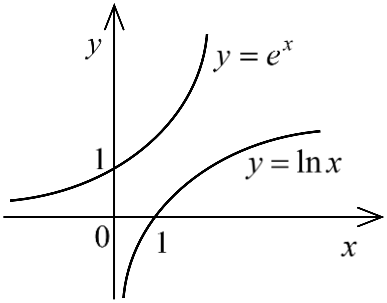


Рисунок 19

*Зауваження 3*. Нагадаємо, що показникова функція з основою $e$, $y=e^x$ або $y=\exp x$, називається ***експонентою*** (рис. 19). Логарифмічна функція з основою $e$, $y=\log_e x$ або $y=\ln x$, називається ***натуральним логарифмом*** (рис. 19).

*Приклад 5*. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)\left(\ln(6x-7)-\ln(6x+1)\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(6x+1)}{x}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{2x+1}=\left|1^{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{x-5}{x+2}-1\right)\right)^{2x+1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-7}\cdot\frac{-7}{x+2}(2x+1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7(2x+1)}{x+2}}=e^{-7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+1/x}{1+2/x}}=e^{-7\cdot\frac{2+0}{1+0}}=e^{-14};$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}=\left|1^{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{(1/\sin x)\cdot(\sin x/x)}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x)}=e^{1}=e\ ;$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)\big(\ln(6x-7)-\ln(6x+1)\big)=\left|\infty\cdot(\infty-\infty)\right|=$

$$=\lim_{x\to+\infty}(2x-3)\ln\frac{6x-7}{6x+1}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{6x-7}{6x+1}\right)^{2x-3}=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+1}\right)^{2x-3}=\left|1^{\infty}\right|=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6x-7}{6x+1}-1\right)^{2x-3}=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-8}{6x+1}\right)^{2x-3}=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-8}{6x+1}\right)^{\frac{6x+1}{-8}\cdot\frac{-8}{6x+1}(2x-3)}=$$

$$=\ln e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8(2x-3)}{6x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8(2x-3)}{6x+1}\cdot\ln e=-8\lim_{x\to+\infty}\frac{2-3/x}{6+1/x}=$$

$$=-8\cdot(2-0)/(6+0)=-8/3;$$

г) розв’язати самостійно. ■

У теоретичному аналізі складних фінансових проблем (зокрема, при обґрунтуванні інвестиційних рішень) часто зустрічається поняття *неперервного нарахування відсотків*. Наступний приклад розберіть самостійно поза часу лекції.

*Приклад 6.* Початкова вартість нового комп’ютера складає $S_0$ = 30 тис. грош. од., амортизаційні відрахування здійснюються за ставкою $p$ = 2 % річних з неперервним нарахуванням відсотків. Визначити залишкову вартість $\Delta S(t)=S_t^*-S_0$ комп’ютера через $t$ = 10 років.

□ У випадку неперервного нарахування відсотків поточна вартість комп’ютера $S_t^*$ на момент часу $t$ визначається за формулою: $S_t^*=S_0e^{pt/100}$. Тоді

$$\Delta S(t)=S_t^*-S_0=S_0e^{pt/100}-S_0=(e^{pt/100}-1)S_0;$$

$\Delta S(10)=(e^{2\cdot 10/100}-1)\cdot 30\approx 6{,}64$ тис. грош. од. ■

*Зауваження 4*. До знаходження границь треба підходити творчо та обов'язково оцінювати ситуацію, що виникає: чи є невизначеність і якого типу? Шаблонне застосування відомих алгоритмів часто призводить до помилки. Наприклад, границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x-5}{3x+2}\right)^{1-2x}$ за структурою запису нагадує розглянуті вище, але перевірка показує, що невизначеності немає і результат одержується безпосередньо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-5}{3x+2}\right)^{1-2x} = \left|2^{-\infty}\right| = 0.$$

Аналогічно $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{12x+5}{4x-1}\right)^{1-6x} = \left|3^{+\infty}\right| = +\infty.$

При розкритті невизначеності виду $0/0$ використовують поняття еквівалентних нескінченно малих величин.

Нехай змінні $\alpha$ і $\beta$ – нескінченно малі в одному процесі змінювання. Розглянемо їх відношення $\alpha/\beta$, припускаючи $\beta \neq 0$. Тоді:

1) якщо $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, то $\alpha$ називається нескінченно малою ***вищого порядку*** мализни порівняно з $\beta$ і позначається $\alpha = o(\beta)$ ($\alpha$ прямує до нуля швидше, ніж $\beta$);

2) якщо $\lim \dfrac{\alpha}{\beta^k} = A \neq 0$ і $A \neq \infty$, то $\alpha$ називається ***нескінченно малою*** $k$ ***-го порядку*** мализни порівняно з $\beta$;

3) якщо $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ і $A \neq \infty$, то $\alpha$ і $\beta$ називаються ***нескінченно малими одного порядку*** мализни; зокрема, якщо

$\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то $\alpha$ і $\beta$ називаються ***еквівалентними нескінченно малими***, позначається $\alpha \sim \beta$;

4) якщо відношення $\alpha / \beta$ не має ні скінченної, ні нескінченної границі, то $\alpha$ і $\beta$ називаються ***непорівнянними нескінченно малими***.

Наприклад:

а) $\alpha = \sin 2x$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді:

$\lim\limits_{x \to 0} (\alpha / \beta) = \lim\limits_{x \to 0} (\sin 2x / x) = 2$. Отже, нескінченно малі $\alpha$ і $\beta$ одного порядку;

б) $\alpha = x^n$, $\beta = x$, $n > 1$, $x \to 0$. Тоді:

$\lim\limits_{x \to 0} (\alpha / \beta) = \lim\limits_{x \to 0} \left( x^n / x \right) = \lim\limits_{x \to 0} x^{n-1} = 0$. Отже, $\alpha = o(\beta)$;

в) $\alpha = 4x^3$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді:

$\lim\limits_{x \to 0} \left( \alpha / \beta^3 \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left( 4x^3 / x^3 \right) = 4$. Отже, величина $\alpha$ є нескінченно малою третього порядку мализни відносно $\beta$;

г) $\alpha = (x+1) / x^2$, $\beta = 1 / x$, $x \to \infty$. Тоді:

$\lim\limits_{x \to \infty} (\alpha / \beta) = \lim\limits_{x \to \infty} \left( ((x+1) / x^2) / (1 / x) \right) = \lim\limits_{x \to \infty} (1 + 1 / x) = 1$. Отже, $\alpha \sim \beta$;

д) $\alpha = x \sin(1 / x)$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді:

$\lim\limits_{x \to 0} (\alpha / \beta) = \lim\limits_{x \to 0} \left( (x \sin(1 / x)) / x \right) = \lim\limits_{x \to 0} \sin(1 / x)$ – не існує. Отже, $\alpha$ і $\beta$ – непорівнянні.

*Теорема 3* (***принцип заміни нескінченно малих***). *При розкритті невизначеності виду* $0/0$ *можна чисельник і знаменник цієї невизначеності заміняти величинами, що їм еквівалентні*:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \sim \alpha_* \\ \beta \sim \beta_* \end{array} \right\} \Rightarrow \lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_*}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_*} = \lim \frac{\alpha_*}{\beta_*}.$$

*Зауваження 5.* Якщо в чисельнику чи знаменнику невизначеності $0/0$ стоїть алгебраїчна сума, то в загальному випадку не можна заміняти еквівалентними величинами окремі доданки, а лише весь чисельник чи знаменник у цілому.

Основні еквівалентності при $x \to 0$, що використовуються при обчисленнях границь, подані в таблиці 1.

Таблиця 1 – Основні еквівалентності при $x \to 0$

| | | |
|---|---|---|
| $\sin x \sim x$ | $arctg\, x \sim x$ | $a^x - 1 \sim x \ln a$ |
| $tg\, x \sim x$ | $1 - \cos x \sim x^2/2$ | $\ln(1+x) \sim x$ |
| $\arcsin x \sim x$ | $e^x - 1 \sim x$ | $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ |

*Приклад 7.* Знайти границю, використовуючи еквівалентні нескінченно малі:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1-7x^2\right)}{\arcsin 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{6x}-1}{tg^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctg\, 3x}{\sqrt{1-x}-1}$.

□ а) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{1/5}-1}{x} =$$

$$= \left|(1+3x)^{1/5} - 1 \sim 3x/5\right| = \lim_{x\to 0} \frac{3x/5}{x} = \frac{3}{5};$$

б) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1-7x^2\right)}{\arcsin 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\ln\left(1-7x^2\right) \sim -7x^2;\ \arcsin 2x \sim 2x\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-7x^2}{2x} = 0;$$

в) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{6x}-1}{tg^2 x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|e^{6x}-1 \sim 6x;\ tgx \sim x\right| = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{x^2} = \infty;$$

г) розв'язати самостійно. ■

*Зауваження 6.* Нескінченно великі величини порівнюють між собою так само, як і нескінченно малі. Наприклад, при $x \to \infty$

величини $y = 3x^5 - x^2 + 1$ і $z = 7x^5 + 4x^3 - 2x$ є нескінченно великими. Границя їх відношення $\lim\limits_{x \to \infty} (y/z) = 3/7$. Тому ці величини $y$ і $z$ є нескінченно великими одного порядку.

**Запитання для самоконтролю**

1. Дайте означення сталих та змінних величин.
2. Яка змінна величина називається обмеженою? Необмеженою?
3. Яка змінна величина називається зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?
4. Яка змінна величина називається нескінченно малою? Нескінченно великою?
5. Наведіть властивості нескінченно малих величин. Як зв'язані нескінченно малі та нескінченно великі величини?
6. Що називається границею змінної величини?
7. Сформулюйте властивості границь.
8. Сформулюйте ознаки існування границі змінної величини.
9. Що називається першою стандартною границею? Наведіть наслідки першої стандартної границі.
10. Що називається другою стандартною границею? Наведіть наслідки другої стандартної границі.
11. Як здійснюється порівняння нескінченно малих величин? Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих.
12. Сформулюйте принцип заміни нескінченно малих. Проілюструйте застосування цього принципу при обчисленні границь.
13. Як розкривається невизначеність виду $\infty/\infty$ для многочленів?
14. Як розкривається невизначеність виду $0/0$ для многочленів, ірраціональних та тригонометричних виразів?
15. Як розкривається невизначеність виду $1^\infty$ з використанням другої стандартної границі?

## Завдання для самостійного опрацювання

**Задача 1**. Розкрити невизначеність виду $\infty/\infty$:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-5x+8}{2x^5+7x^2-6}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^5-4x+1}{x^2-3x+5};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to+\infty}\frac{10x^8+6x^4+5x}{2x^8-3x^6+9}.$$

Відповідь: а) $0$; б) $-\infty$; в) $5$.

**Задача 2**. Розкрити невизначеність виду $0/0$:

$$\text{а) } \lim_{x\to-1}\frac{4x^3+7x^2-3}{3x^2-2x-5}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{8-x^2}+x}{x^3+8};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to0}\frac{\cos 8x-\cos 2x}{tg\,4x\cdot\sin 3x}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to0}\frac{\ln(1-5x)}{x^2-4x}.$$

Відповідь: а) $1/4$; б) $1/6$; в) $-5/2$; г) $5/4$.

**Задача 3**. Розкрити невизначеність виду $1^\infty$:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x-2}\right)^{1-4x}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to+0}(1+x)^{ctg\,2x}.$$

Відповідь: а) $e^4$; б) $\sqrt{e}$.

**Задача 4**. Знайти границю:

$$\text{а) } \lim_{x\to\pi/2-0}(2x-\pi)\cdot tg\,x; \quad \text{б) } \lim_{x\to+\infty}(2x+1)\big(\ln(4x+3)-\ln(4x-3)\big);$$

$$\text{в) } \lim_{x\to0}\big(1/(x\sin x)-1/(x\,tg\,x)\big); \qquad \text{г) } \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}+x\right).$$

Відповідь: а) $-2$; б) $3$; в) $1/2$; г) $-3/2$.

**Задача 5**. Знайти границю, використовуючи еквівалентні нескінченно малі:

$$\text{а) } \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[6]{1+4x^2}-1}{x^2}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x^2)}{arctg^2\,2x};$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{tg4x}$;  г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x^2}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

Відповідь: а) $2/3$; б) $-1/4$; в) $3/4$; г) $-2$.

**Задача 6**. Дослідження показують, що в рамках деякої ринкової спільноти залежності попиту $y$ на товари першої необхідності та попиту $z$ на предмети розкоші від рівня доходу $x$ покупців наближено моделюються функціями Л. Торнквіста:

$$y=10(x-30)/(x-5),\ x>30;\quad z=5x(x-100)/(x-10),\ x>100.$$

Знайти граничний попит $y_g=\lim\limits_{x\to+\infty} y$ і $z_g=\lim\limits_{x\to+\infty} z$.

Відповідь: $y_g=10$ і $z_g=+\infty$. Отже, при необмеженому зростанні рівня доходів $x\to+\infty$ попит на товари першої необхідності наближається до стану насичення $y_g=10$, а попит на предмети розкоші необмежено зростає $z_g=+\infty$.

## Лекція 1.4 Функція. Неперервність

### План

1.4.1 Поняття функції. Властивості та класифікація.
1.4.2 Поняття неперервності. Точки розриву.
1.4.3 Застосування функцій в економіці.
Запитання для самоконтролю.
Завдання для самостійного опрацювання.

**Опорні поняття:** *функція, способи задання функції, властивості функції, класифікація функцій, основні елементарні функції, неперервність функції, властивості неперервної функції, точки розриву та їх класифікація.*

### 1.4.1 Поняття функції. Властивості та класифікація

Досліджуючи різні явища, розв’язуючи техніко-економічні та інші проблеми доводиться розглядати одночасно декілька змінних величин. Наприклад, при виготовленні $u$ одиниць деякої продукції треба використати $x$ одиниць певної сировини, $y$ одиниць енергоресурсів, видати $z$ одиниць заробітної плати, заплатити $s$ одиниць податків тощо.

У цьому комплексі змінних величин деякі можуть бути жорстко пов'язані між собою. Їх називають ***функціонально залежними***, при цьому виділяють ***незалежні змінні*** – величини, значення яких можна обирати довільно, та ***залежні змінні*** – величини, значення яких визначаються значеннями незалежних змінних.

Нехай задані непорожні множини $X$ і $Y$. Якщо вказано правило (***закон відповідності***) $f$, за яким кожному значенню $x$ з множини $X$ ставиться у відповідність одне певне значення $y$ з множини $Y$, то кажуть, що задано ***функцію***, визначену на множині $X$, зі значеннями у множині $Y$. Функцію позначають одним із способів: $y = f(x)$, $x \in X$, або $f:\ X \to Y$, або $X \xrightarrow{f} Y$.

При цьому $x$ називається ***незалежною змінною*** (***аргументом***), а $y$ – ***залежною змінною*** (***функцією***).

Множина $D(f) = X$ називається ***областю визначення*** функції. Множина $E(f)$ всіх тих значень $y \in Y$, кожне з яких відповідає принаймні одному $x \in D(f)$, називається ***областю значень*** функції. Область значень $E(f)$ є підмножиною множини $Y$.

Значення функції $y = f(x)$ у точці $x_0$ позначають так: $f\left(x_0\right)$ або $f(x)\big|_{x=x_0}$.

Функція $y = C, C = const$, яка на всій області визначення набуває єдиного значення $C$, називається ***сталою***.

Дві функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ називаються ***рівними***, якщо:

1) вони мають одну й ту саму область визначення $D(f) = D(g)$;

2) на кожному елементі $x$ з цієї області визначення функції набувають однакових значень $f(x) = g(x)$.

Якщо змінні $x$ і $y$ розглядати як декартові координати точок на площині, то ***графіком*** функції $y = f(x)$ є множина всіх точок координатної площини $Oxy$ з координатами $(x, f(x))$, $x \in D(f)$.

*Зауваження 1.* Кожна пряма, паралельна осі $Oy$, з графіком функції може мати не більше однієї спільної точки.

Наприклад, на рисунку 20 крива $m$ є графіком деякої функції, а крива $n$ – ні.

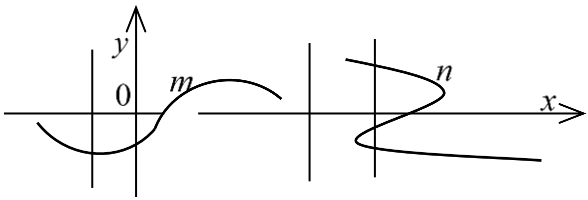


Рисунок 20

Функція $y = f(x)$ вважається заданою, якщо: 1) вказана її область визначення $D(f)$: 2) вказаний закон відповідності $f$.

Основні ***способи задання функції***.

1. *Табличний спосіб* задання функції. При цьому способі пишуть у визначеному порядку значення аргументу $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ і відповідні значення функції $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_i$ | ... |
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_i$ | ... |

Цей спосіб дуже часто використовується в економіці. Він зручний тим, що для кожного наведеного в таблиці значення аргументу можна відразу знайти відповідне значення функції без додаткових обчислень. Проте неможливо безпосередньо знайти відповідне значення функції для проміжного значення аргументу, і до дослідження функції важко застосувати апарат математичного аналізу.

2. *Графічний спосіб* задання функції. Якщо у прямокутній системі координат на площині маємо деяку сукупність точок $(x, y)$ і при цьому ніякі дві точки не лежать на одній прямій, що паралельна осі $Oy$, то ця сукупність точок визначає деяку однозначну

функцію $y = f(x)$. Значеннями аргументу є абсциси точок, значеннями функції – відповідні ординати.

Перевагою графічного способу є його наочність і можливість безпосередньо визначити відповідне значення функції для кожного значення аргументу. Проте значення функції знаходиться наближено, і до дослідження функції важко застосувати апарат математичного аналізу.

3. *Аналітичний спосіб* задання функції:

а) ***Явна форма задання функції***. Функцію задають у вигляді формул, що визначають операції (і послідовності їх виконання), які потрібно здійснити над значенням незалежної змінної $x$, щоб визначити значення залежної змінної $y$.

Наприклад, $y = (x^{1/2} - 1)^2$, де $x \geq 0$.

б) ***Неявна форма задання функції***. Під неявним розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно $y$, яке визначає функцію тільки тоді, коли всі впорядковані пари $(x, y)$, що є розв'язками даного рівняння, утворюють множину, в якій для будь-якого числа $x_0$ є не більш як одна пара $\left(x_0, y_0\right)$ з першим елементом $x_0$.

Наприклад, співвідношення $\tilde{o}^2/25 + y^2/9 = 1$, $\tilde{o} \geq 0$, $y \geq 0$ задають неявно функцію, графіком якої служить дуга еліпса, що лежить у першій чверті.

У деяких випадках функцію $y = y(x)$, задану неявно, можна подати в явній формі, розв'язавши рівняння $F(x, y) = 0$ відносно змінної $y$. Наприклад: $xy - 4 = 0 \Rightarrow y = 4/x$.

в) ***Параметрична форма задання функції***. Якщо функцію $y = y(x)$ задано параметрично, то значення змінних $x$ і $y$, що відповідають одне одному, визначають через третю величину $t$ (***параметр***): $x = x(t)$, $y = y(t)$.

У деяких випадках функцію, задану параметрично, можна записати в неявній (чи навіть явній) формі, виключивши параметр $t$.

Наприклад, функція $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t \in [0,\ \pi/2]$, допускає запис у неявній формі:

$$x^2 + y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1,\ \ t \in [0,\ \pi/2],$$

звідки можна одержати явне подання: $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0;1]$.

Якщо функція задана аналітично, то легко перейти до табличного чи графічного способу її задання, оскільки аналітичний спосіб дає можливість знайти відповідне значення функції для будь-якого значення аргументу, хоча це часто вимагає складних обчислень. Його безсумнівна перевага полягає у можливості застосування апарату математичного аналізу. Недоліками аналітичного задання є недостатня наочність та необхідність обчислень.

*Зауваження 2.* Коли функція задається аналітично, то часто область визначення явно не вказується. Тоді розглядається так звана ***природна область визначення*** (***область допустимих значень***). *Щоб знайти природну область визначення треба скласти систему обмежень на всі математичні операції, що фігурують в наведених формулах, і розв'язати її.*

*Приклад 1.* Знайти область визначення функції

а) $y = \ln(6 - x) + \sqrt{x^2 - 9}$; б) $y = \arcsin(1/x) - 3\sqrt{8 - x^3}$;

в) $y = \dfrac{2}{\sqrt{16 - x^2}} + \ln x^2$; г) $y = arctg\,\dfrac{1}{x+4} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 8}}$.

□ а) $D(f)$: $\begin{cases} 6 - x > 0 \\ x^2 - 9 \ge 0 \end{cases} \begin{cases} x < 6 \\ |x| \ge 3 \end{cases} \quad x \in (-\infty; -3] \cup [3; 6)$.

(Завдання б), в) і г) розв'язати самостійно). ■

*Основні елементарні функції* та їх графіки вивчають у середній школі. Вони відіграють важливу роль в математиці, тому ці функції, їх області визначення та графіки треба добре знати.

*Стала функція* $y = C$, $C = const$. Функція визначена на всій числовій прямій $-\infty < x < +\infty$. Графіком служить пряма, паралельна осі $Oy$.

*Степенева функція* $y = x^{\alpha}$. Її властивості залежать від значення показника $\alpha$:

а) $\alpha$ – ціле додатне число. Функція визначена на всій числовій прямій $-\infty < x < +\infty$. Графіки функції у цьому випадку при деяких значеннях $\alpha$ мають вигляд, зображений на рисунках 21 і 22;

б) $\alpha$ – ціле від'ємне число. Функція визначена для усіх значень $x$, окрім $x = 0$. Графіки функцій при деяких значеннях $\alpha$ мають вигляд, зображений на рисунках 23 і 24;

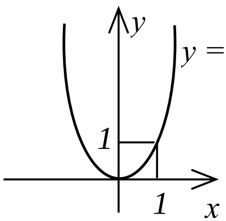


Рисунок 21

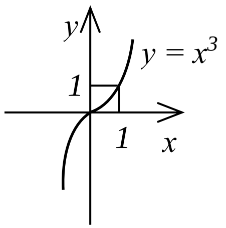


Рисунок 22

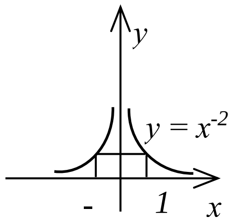


Рисунок 23

в) число $\alpha$ – раціональне дробове. На рисунках 25, 26 і 27 зображені графіки степеневої функції, коли числа $\alpha$ додатні. При від'ємних числах $\alpha$ матимемо графіки, які схожі з зображеними на рисунках 23 і 24, коли знаменник дробу непарний, і їх частиною праворуч від осі $Oy$, якщо знаменник дробу парний.

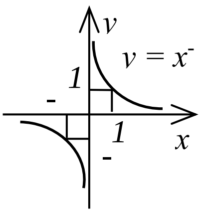


Рисунок 24

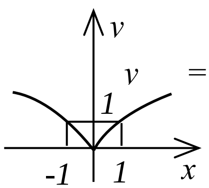


Рисунок 25

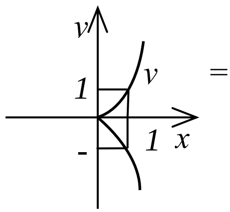


Рисунок 26

*Показникова функція* $y = a^{x}$, $a > 0$ і $x \in R$. Графік її має вигляд, зображений на рисунку 28. Розглянуті випадки, коли $0 < a < 1$ і $a > 1$.

*Логарифмічна функція* $y = \log_a x$, $a > 0$ і $x > 0$. Графік її зображено на рисунку 29. Розглянуті випадки, коли $0 < a < 1$ і $a > 1$. $\lg x$ – десятковий логарифм, $\ln x$ – натуральний логарифм.

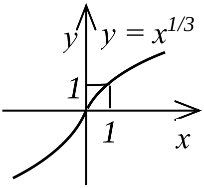


Рисунок 27

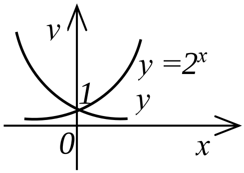


Рисунок 28

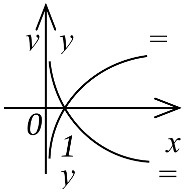


Рисунок 29

*Тригонометричні функції*: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$, $y = \sec x = 1/\cos x$, $y = \operatorname{cosec} x = 1/\sin x$. Усі названі тригонометричні функції періодичні.

Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ мають період $2\pi$. Ці функції визначені при всіх значеннях $x \in R$.

Функції $y = tg\, x$ і $y = \sec x$ мають період відповідно $\pi$ і $2\pi$. Вони визначені скрізь, крім точок $x = (2k+1)\pi/2$, $k \in Z$.

Функції $y = ctg\, x$ і $y = \operatorname{cosec} x$ мають період відповідно $\pi$ і $2\pi$. Вони визначені скрізь, крім точок $x = k\pi$, $k \in Z$.

Графіки тригонометричних функцій зображені на рисунках 30–32.

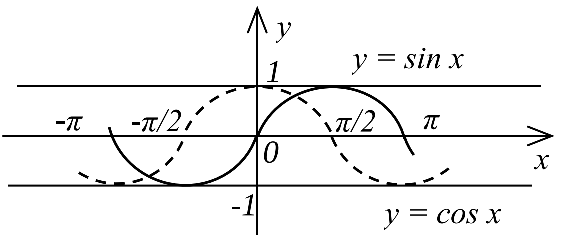


Рисунок 30

*Обернені тригонометричні функції*:

а) Функція *арксинус* $y = \arcsin x$. Область її визначення – відрізок $[-1;1]$, область значень – відрізок $[-\pi/2;\pi/2]$. Графік подано на рисунку 33.

б) Функція *арккосинус* $y = \arccos x$. Область її визначення – відрізок $[-1;1]$, область значень – відрізок $[0;\pi]$. Графік подано на рисунку 34.

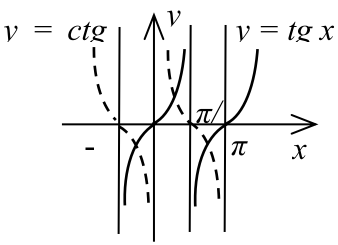


Рисунок 31

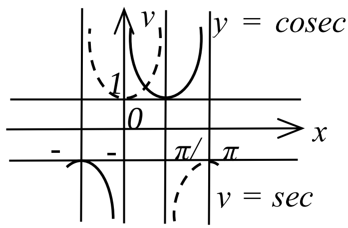


Рисунок 32

в) Функція *арктангенс* $y = arctg\ x$. Область її визначення – вся числова пряма, область значень – інтервал $(-\pi/2;\pi/2)$. Графік подано на рисунку 35.

г) Функція *арккотангенс* $y = arcctg\ x$. Область її визначення – вся числова пряма, область значень – інтервал $(0;\pi)$. Графік подано на рисунку 36.

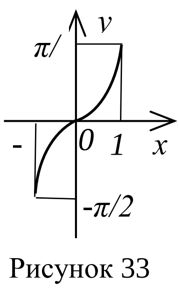


Рисунок 33

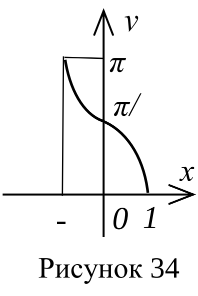


Рисунок 34

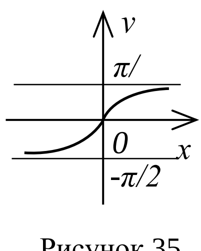


Рисунок 35

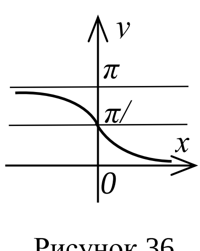


Рисунок 36

Деякі границі, що відображають властивості основних елементарних функцій:

$$\lim_{x\to-\infty} arctg\, x = -\pi/2\,; \quad \lim_{x\to+\infty} arctg\, x = \pi/2\,;$$

$$\lim_{x\to-\infty} arcctg\, x = \pi\,; \quad \lim_{x\to+\infty} arcctg\, x = 0\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0,\ a>1; \\ +\infty,\ 0<a<1; \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty,\ a>1; \\ 0,\ 0<a<1; \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty,\ a>1; \\ +\infty,\ 0<a<1; \end{cases} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty,\ a>1; \\ -\infty,\ 0<a<1; \end{cases}$$

Функція, як змінна величина, може бути монотонною чи не монотонною, обмеженою чи необмеженою. Крім цих властивостей також зазначають її парність і періодичність.

Значення незалежного аргументу $x$, при яких функція $y = f(x)$ обертається в нуль, тобто корені рівняння $f(x)=0$ (спільні точки графіка функції з віссю $Ox$), називаються ***нулями*** (***коренями***) функції. На рисунку 37 $x_1$ і $x_2$ – корені.

Інтервали області визначення, де функція $y = f(x)$ зберігає знак, тобто інтервали, де функція додатна $f(x) > 0$ (графік функції розташований над віссю $Ox$), та інтервали, де функція від'ємна $f(x) < 0$ (графік розміщений під віссю $Ox$) називаються ***інтервалами знакосталості*** функції (рис. 37).

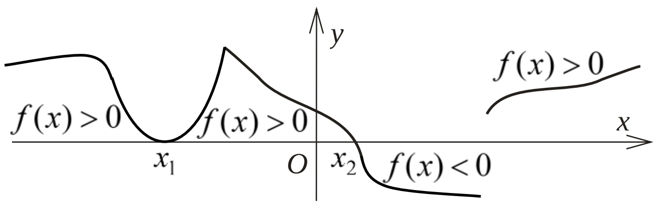


Рисунок 37

*Парність*. Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D(f)$; і ***непарною***, якщо $f(-x) = -f(x)$,

$x \in D(f)$. Інакше функція називається ***функцією загального вигляду*** (***загального положення***).

Наприклад, функції $y = x^2$ і $y = \cos x$ – парні, функції $y = \sin x$ і $y = arctg\, x$ – непарні, а функції $y = 2^x$ і $y = \arccos x$ – загального вигляду.

*Зауваження 3*. Графік парної функції симетричний відносно осі $Oy$ (рис. 38), а графік непарної функції симетричний відносно початку координат $O$ (рис. 39).

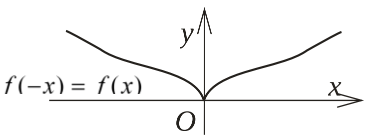


Рисунок 38

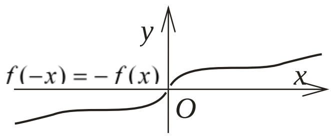


Рисунок 39

*Періодичність*. Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною***, якщо існує додатне число $T$ (***період***) таке, що справджується рівність $f(x+T) = f(x),\ x \in D(f)$.

Звичайно під ***періодом*** (***основним періодом***) функції розуміють $T_0$ – найменший з усіх додатних періодів (якщо такий існує) (рис. 40). У цьому разі всі періоди функції йому кратні: $T = kT_0$, $k \in N$.

*Приклад 2*. Дослідити функцію $y = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$ на періодичність і у випадку періодичності знайти період.

□ Дана функція визначена на всій числовій прямій. Припустимо, що ця функція періодична. Тоді для довільного $x \in R$ повинна виконуватися умова $\sin(ax+b) = \sin(a(x+T)+b)$, де $T = const > 0$. Розв'яжемо це рівняння відносно $T$:

$$T = (\pi + 2\pi k)/a - 2x - 2b/a,\quad k \in Z;\quad T = (2\pi n)/a,\quad n \in Z.$$

Величина $T$ з першої формули не є періодом, тому що залежить від $x$. Друга формула задає нескінченну множину чисел. Отже, задана функція періодична. Найменшим додатним з цих чисел є $T_0 = 2\pi / |a|$ – основний період. ■

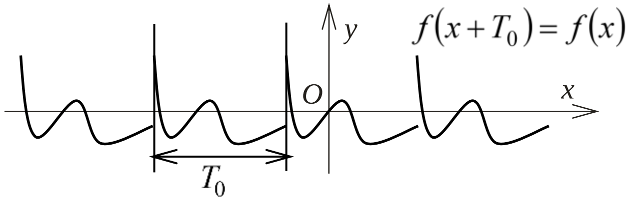


Рисунок 40

*Обмеженість*. Функція $y = f(x)$ є ***обмеженою зверху***, якщо існує таке число $M$, що для всіх значень аргументу з області визначення функції виконується нерівність $f(x) \le M$, і ***обмеженою знизу***, якщо існує таке число $\tau$, що для всіх значень аргументу з області визначення функції виконується нерівність $f(x) \ge \tau$.

Функція, обмежена зверху і знизу, є ***обмеженою***.

Наприклад, функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ обмежені зверху числом 1, а знизу числом $-1$. Функція $y = 2^x$ обмежена знизу числом $0$, а зверху необмежена. Функції $y = tg\, x$ і $y = ctg\, x$ необмежені.

*Монотонність*. Функція $y = f(x)$ є ***зростаючою*** на проміжку $(a;b)$, якщо для будь-якої пари значень $x_1 \in (a;b)$ і $x_2 \in (a;b)$ з нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \ge f(x_2)$, тобто *більшому значенню аргументу відповідає неменше значення функції*. Якщо з нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$, то функція зветься ***спадною***, тобто *більшому значенню аргументу відповідає небільше значення функції*.

Зростаючі і спадні функції називають ***монотонними***.

Якщо в поданих означеннях нестрогі нерівності замінити на строгі, то маємо ***строго монотонні*** функції.

Якщо область визначення можна розбити на деяке число проміжків, які не перетинаються, таких, що на кожному з них функція монотонна, то вони називаються ***проміжками монотонності*** функції.

Наприклад, функція $y = x^2$ визначена на всій числовій осі. Вона має два проміжки строгої монотонності $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$, на першому з яких функція є строго спадною, а на другому – строго зростаючою.

*Складена функція*. Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині $U$, а функція $u = \varphi(x)$ визначена на множині $X$, причому для кожного значення $x \in X$ відповідне значення $u = \varphi(x)$ належить множині $U$. Тоді на множині $X$ визначена функція $y = f(\varphi(x))$, яку називають ***складеною функцією*** від $x$ або ***суперпозицією*** (***композицією***) функцій $\varphi$ і $f$. При цьому $y = f(u)$ називають ***зовнішньою функцією***, а $u = \varphi(x)$ – ***внутрішньою функцією*** або ***проміжним аргументом***. Змінну $x$ називають ***незалежною змінною*** або ***внутрішнім аргументом***.

*Складена функція – це функція від функції*. Більшість функцій, які вивчають у математиці, можна розглядати як складені функції.

Наприклад, функцію $z = \sqrt{x} - 1$ можна записати: $y = \sqrt{x}$; $z = y - 1$.

*Зауваження 4*. Суперпозиція може застосовуватися повторно. Наприклад, $y = \sin v$; $v = 2^u$; $u = arctg\, x$.

*Зауваження 5*. Розглядаючи складені функції, слід звертати увагу на області визначення функцій, що їх утворюють.

*Приклад 3*. Задану функцію подати як складену за допомогою чотирьох основних арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення і ділення) та суперпозиції основних елементарних функцій:

а) $y = \ln^4 3^{\sin^2 x} + 5\cos x^3$; б) $y = tg^6\, 2^x - 3\sqrt{\arccos(1/x^2)}$.

(Розв'язати самостійно).

*Елементарні функції*. ***Елементарною функцією*** називається така, що може бути задана за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і суперпозицій над основними елементарними функціями.

Наприклад, $y = (\lg x + 4\sqrt[3]{x} + 2tg\, x)/(10^x - x^2 \arcsin x)$ – елементарна функція, а функції $y = \operatorname{sgn} x$ (знак числа $x$) та

$y = \sin x + \sin x^2 + \sin x^3 + \ldots + \sin x^n + \ldots$ не є елементарними.

На рисунку 41 подана схема класифікації елементарних функцій.

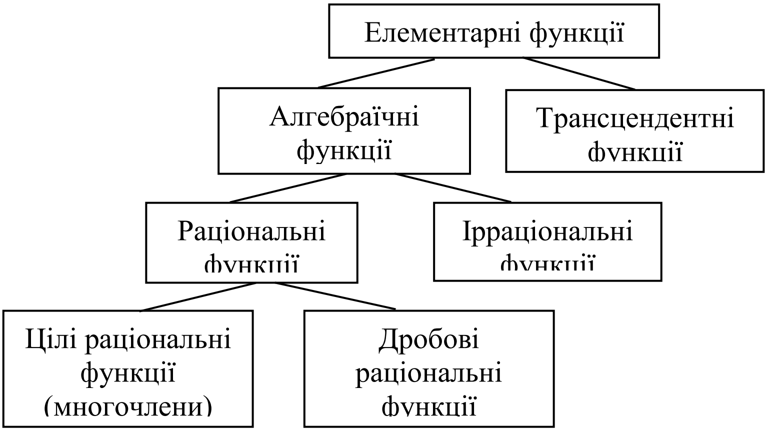


Рисунок 41

*Алгебраїчні функції*. До числа ***алгебраїчних функцій*** належать такі елементарні функції:

1. ***Ціла раціональна функція*** або ***многочлен*** (***поліном***)

$$y = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – ***коефіцієнти*** (сталі числа), зокрема, $a_0$ – ***старший коефіцієнт***, $a_0 \neq 0$, $a_n$ – ***вільний член***; $n$ – ***степінь*** (***порядок***) многочлена (ціле невід'ємне число). Зрозуміло, що ця функція визначена при будь-якому $x \in R$.

2. ***Дробово-раціональна функція*** (***раціональний дріб***) – відношення двох многочленів $y = P_n(x) / Q_m(x)$.

Наприклад, раціональний дріб $y = a/x$, $(a \neq 0, x \neq 0)$ виражає обернено пропорційну залежність.

3. ***Ірраціональна функція*** – це така функція $y = f(x)$, в якій зустрічається піднесення до степеню з раціональним дробовим показником.

Наприклад, ірраціональною є функція

$$y=(2x^2+\sqrt{x})/(1+5x^2).$$

Елементарні функції, що не є алгебраїчними, називаються ***трансцендентними***. З основних елементарних функцій до них відносяться показникова, логарифмічна, тригонометричні та обернені тригонометричні функції.

Наприклад, функція $y=\cos x-5x^3$ є трансцендентною.

*Обернена функція*. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині $X$, а $Y$ – множина її значень. Якщо ця функція $y=f(x)$ така, що при кожному фіксованому $y\in Y$ рівняння $y=f(x)$ має єдиний розв'язок $x\in X$, то можна розглядати ***обернену функцію*** $x=f^{-1}(y)$, $y\in Y$. Обернена функція $x=f^{-1}(y)$ кожному $y\in Y$ ставить у відповідність єдине значення $x\in X$ таке, що $f(x)=y$. Функція $y=f(x)$, $x\in X$ при цьому називається ***прямою функцією***.

Якщо функція $f^{-1}$ обернена до функції $f$, то й функція $f$ буде оберненою до функції $f^{-1}$. Функції $f$ і $f^{-1}$ називають ***взаємно оберненими***. Область визначення $X$ функції $f$ є областю значень функції $f^{-1}$, область значень $Y$ функції $f$ є областю визначення функції $f^{-1}$.

Графіки функцій $y=f(x)$, $x\in X$ і $x=f^{-1}(y)$, $y\in Y$ збігаються (відображають одну залежність з різних позицій).

*Зауваження* 6. Якщо в оберненій функції $x=f^{-1}(y)$ ввести традиційні позначення для незалежної та залежної змінних (перезначити $x\to y$, $y\to x$), то матимемо ***обернену функцію в традиційних позначеннях змінних*** $y=f^{-1}(x)$. Графіки прямої $y=f(x)$ і оберненої $y=f^{-1}(x)$ функцій симетричні відносно бісектриси $y=x$ першого і третього координатних кутів.

Наприклад, функція $y=f(x)=x^2$ на інтервалі $[0;+\infty)$ має обернену $y=\sqrt{x}$. Графіки цих функцій зображені на рисунку 42.

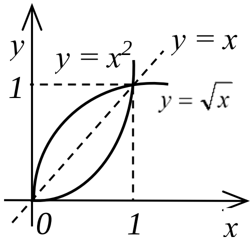

Рисунок 42

*Теорема 1. Нехай функція* $y=f(x)$ *визначена і строго зростаюча (строго спадна) на відрізку* $[a;b]$. *Тоді обернена функція* $y=f^{-1}(x)$ *визначена і строго зростаюча (строго спадна) на відрізку* $\left[f(a);f(b)\right]$ $\left(\left[f(b);f(a)\right]\right)$.

## 1.4.2 Поняття неперервності. Точки розриву

З поняттям границі тісно пов’язане інше фундаментальне поняття математичного аналізу – неперервність функції

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки $x_0$ і $x$ – довільна точка з цього околу, відмінна від $x_0$. Різницю $\Delta x=x-x_0$ називають ***приростом незалежної змінної*** (***приростом аргументу***). Відповідну різницю $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ називають ***приростом функції***.

Тоді $x=x_0+\Delta x$; $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

*Зауваження 1.* Приріст функції $\Delta y$ залежить як від вибору точки $x_0$, так і від вибору приросту аргументу $\Delta x$.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки $x_0$. Функція $y=f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $x_0$, якщо в цій точці виконується рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Сформульоване означення неперервності накладає на функцію $f(x)$ такі умови: 1) функція визначена в деякому околі точки $x_0$, включаючи і саму точку $x_0$, тобто існує число $f(x_0)$; 2) існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ – границя функції в точці $x_0$; 3) границя функції в точці

$x_0$ дорівнює значенню функції в цій точці.

Оскільки $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, то для неперервної в точці $x_0$ функції маємо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, тобто *знак границі* $\lim$ *і знак неперервної функції* $f$ *можна міняти місцями*. Іншими словами, *щоб обчислити границю неперервної функції, треба у її вираз замість аргументу підставити його границю*.

У рівності $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ перенесемо $f(x_0)$ ліворуч та уведемо під знак границі як сталу. Тоді отримаємо $\lim\limits_{x - x_0 \to 0} \left( f(x) - f(x_0) \right) = 0$, звідки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, тобто *функція неперервна, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції*.

Якщо функція $f(x)$ неперервна у кожній точці деякого інтервалу $(a;b)$, то вона називається ***неперервною на*** цьому ***інтервалі***.

*Приклад 1*. Довести, що функція $y = \sin x$ неперервна у довільній точці $x_0$ області визначення $D(f) = R$.

□ $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin(\Delta x / 2)\cos(x_0 + \Delta x / 2)$.

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin(\Delta x / 2) = 0$, а величина $\cos(x_0 + \Delta x / 2)$ обмежена, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. ■

Спираючись на властивості границь, можна встановити наступне:

1. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні у точці $x_0$, то функції $g(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, $h(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ і $q(x) = f_1(x) / f_2(x)$ ( $f_2(x) \neq 0$ ), також неперервні у точці $x_0$.

2. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна у точці $x_0$, а функція $f(u)$ неперервна у точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то й складена функція $f(\varphi(x))$ неперервна у точці $x_0$.

3. Якщо функція $f(x)$ неперервна у точці $x_0$ і має обернену функцію $x = f^{-1}(y)$ в деякому околі точки $x_0$, то обернена функція $x = f^{-1}(y)$ неперервна в точці $y_0 = f(x_0)$.

4. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці $x_0$ і відмінна від нуля $f(x_0) \neq 0$, то існує такий окіл цієї точки $x_0$, що для всіх $x$ з указаного околу функція $f(x)$ не обертається в нуль і має знак, який збігається зі знаком $f(x_0)$.

Неперервність функцій використовується при обчисленні границь. З наведених властивостей випливають такі важливі *наслідки*:

1. ***Заміна змінної***

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \left| \begin{array}{c} u = \varphi(x) \\ u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \end{array} \right| = \lim_{u \to u_0} f(u).$$

2. Границя ***показниково-степеневої функції***

$$\lim_{x \to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)} = \left( \lim_{x \to x_0} u(x) \right)^{\lim\limits_{x \to x_0} v(x)}.$$

3. *Усі елементарні функції є неперервними у кожній точці своєї природної області визначення.*

Границя функції $f(x)$ в точці $x_0$ при додатковій умові, що $x$ залишається меншим $x_0$, називається ***лівою границею*** функції $f(x)$ в точці $x_0$ і позначається $\lim\limits_{x \to x_0,\, x < x_0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

Аналогічно визначається ***права границя*** функції $f(x)$ в точці $x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0,\, x > x_0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Ліва і права границі називаються ***односторонніми границями***.

*Теорема 1. Для того, щоб функція* $f(x)$ *в точці* $x_0$ *мала границю, яка дорівнює* $A$, *необхідно і достатньо, щоб існували обидві односторонні границі в цій точці, кожна з яких також дорівнює* $A$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A \\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

(Без доведення).

Нехай функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $(a;x_0]$, $a<x_0$. Функція $f(x)$ ***неперервна у точці*** $x_0$ ***зліва***, якщо

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0).$$

Аналогічно, функція $f(x)$, визначена на півінтервалі $[x_0;b)$, $x_0<b$, ***неперервна у точці*** $x_0$ ***справа***, якщо $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Загальна назва для функції, неперервної зліва чи справа, – ***односторонньо неперервна***.

Якщо функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і точка $x_0\in(a;b)$, то *для неперервності функції у точці* $x_0$ *необхідно і достатньо, щоб функція* $f(x)$ *була неперервна зліва і справа у точці* $x_0$. Іншими словами, *функція* $f(x)$, *яка визначена в деякому околі точки* $x_0$, *неперервна в точці* $x_0$, *якщо обидві її односторонні границі дорівнюють значенню функції в цій точці*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній внутрішній точці відрізка $[a;b]$ і відповідно односторонньо неперервна на його кінцях, то вона називається ***неперервною на відрізку*** $[a;b]$.

Властивості функцій, які неперервні на відрізку, сформулюємо у вигляді теорем (без доведення).

*Теорема 2* (***про обмеженість функції та існування найменшого та найбільшого значень***). *Якщо функція* $f(x)$

*неперервна на відрізку* $[a;b]$*, то вона обмежена на цьому відрізку і серед її значень існує найменше* $m = f(x_1)$ *та найбільше* $M = f(x_2)$*, де* $x_1 \in [a;b]$ *і* $x_2 \in [a;b]$ (рис. 43). (Без доведення).

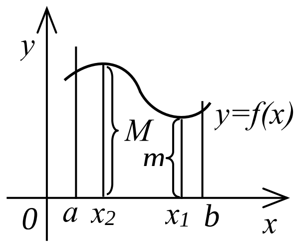


Рисунок 43

*Зауваження 1*. Твердження теореми може бути невірним, якщо розглядати $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$.

*Теорема 3* (***про перетворення функції на нуль***). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і на його кінцях має значення різних знаків* $f(a)\cdot f(b) < 0$. *Тоді на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться хоча б одна точка* $x = d$ *така, що* $f(d) = 0$ (рис. 44). (Без доведення).

*Теорема 4* (***про проміжне значення***). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і на його кінцях приймає різні значення* $f(a) \neq f(b)$. *Тоді для будь-якого числа* $\mu$*, що міститься між числами* $f(a)$ *і* $f(b)$*, на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться хоча б одна точка* $x = c$ *така, що* $f(c) = \mu$ (рис. 44). (Без доведення).

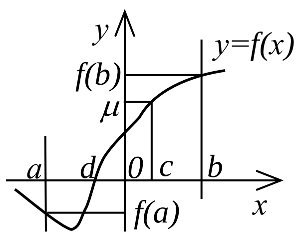


Рисунок 44

Неперервна в точці $x_0$ функція $f(x)$ повинна задовольняти наступні умови: 1) функція $f(x)$ визначена в точці $x_0$ і деякому її околі. 2) існує скінченна ліва границя функції $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$. 3) існує скінченна права границя функції $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$. 4) односторонні границі рівні. 5) спільне значення односторонніх границь дорівнює значенню функції $f(x_0)$ в цій точці $x_0$.

Якщо хоча б одна з перелічених умов порушується, то функція $f(x)$ називається ***розривною*** в точці $x_0$, а сама точка $x_0$ називається ***точкою розриву*** цієї функції.

Якщо в точці розриву $x_0$ існують обидві скінченні односторонні границі, то це – ***точка розриву першого роду***. Якщо у точці розриву $x_0$ хоча б одна з односторонніх границь нескінченна або взагалі не існує, то це – ***точка розриву другого роду***.

Якщо в точці розриву першого роду $x_0$ односторонні границі рівні $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, то маємо ***усувний розрив***, оскільки, поклавши $f(x_0) = A$, дістанемо неперервну функцію.

Якщо в точці розриву першого роду $x_0$ односторонні границі різні $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$, то маємо ***скінченний стрибок*** висотою $|A_2 - A_1|$.

Якщо в точці розриву другого роду $x_0$ існують одна нескінченна одностороння границя, а інша – скінченна чи нескінченна, то маємо ***нескінченний стрибок***.

*Правило. Для знаходження точок розриву функції* $f(x)$ *і визначення їх характеру треба:*

*1) знайти можливі точки розриву (скінченні кінці інтервалів області визначення; точки, в яких змінюється характер задання функції тощо);*

*2) у кожній «підозрілій» точці* $x_0$ *обчислити, якщо існують, значення функції* $f(x_0)$ *та обидві односторонні границі* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ *і* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$*;*

*3) з аналізу отриманих значень зробити висновок про наявність і характер розриву.*

*Приклад 2.* Визначити точки розриву заданої функції та з'ясувати їх характер:

а) $y = arctg\,(1/(x-3))$;

б) $y = 7^{-3/x^2}$;

в) $y = \sin(\pi/x)$;

г) $y = \begin{cases} 2^{2/(x+1)} - 3, & x < 1; \\ \log_2 x, & x \ge 1 \end{cases}$

□ а) Функція $y = arctg\left(1/(x-3)\right)$ невизначена у точці $x = 3$.

Розглянемо

$$\lim_{x\to 3-0} arctg\left(1/(x-3)\right) = -\pi/2 \quad \text{і} \quad \lim_{x\to 3+0} arctg\left(1/(x-3)\right) = \pi/2 .$$

Функція у точці $x = 3$ має скінченний стрибок висотою $\pi$ (рис. 45).

б) Функція $y = 7^{-3/x^2}$ невизначена у точці $x = 0$. Розглянемо

$$\lim_{x\to -0} 7^{-3/x^2} = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{x\to +0} 7^{-3/x^2} = 0 .$$

Якщо довизначимо функцію рівністю $f(0) = 0$, то дістанемо неперервну у точці $x = 0$ функцію. Отже, маємо усувний розрив (рис. 46).

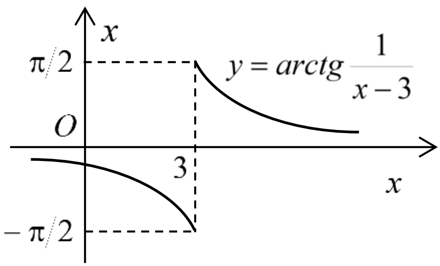


Рисунок 45

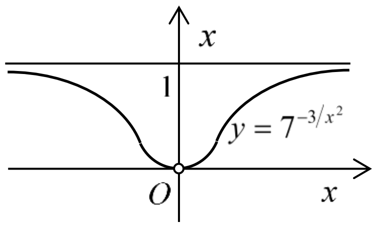


Рисунок 46

в) Функція $y = \sin\left(\pi/x\right)$ невизначена у точці $x = 0$. Обидві односторонні границі $\lim_{x\to -0} \sin\left(\pi/x\right)$ і $\lim_{x\to +0} \sin\left(\pi/x\right)$ не існують. Отже, маємо точку розриву другого роду (рис. 47).

г) Функція $y = f(x) = \begin{cases} 2^{2/(x+1)} - 3, & x < 1; \\ \log_2 x, & x \geq 1 \end{cases}$ визначена на всій числовій прямій, окрім точки $x = -1$, а в точці $x = 1$ змінюється її аналітичний вираз. Тому маємо дві точки, що «підозрілі» на розрив.

У точці $x = -1$: $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-0} \left(2^{2/(x+1)} - 3\right) = -3;$

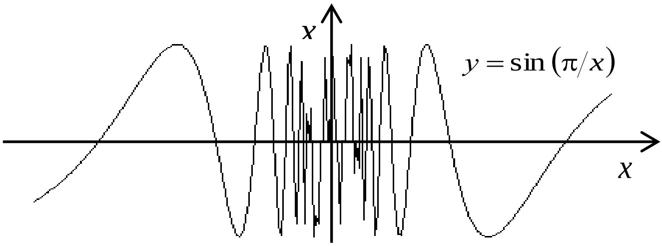


Рис. 54

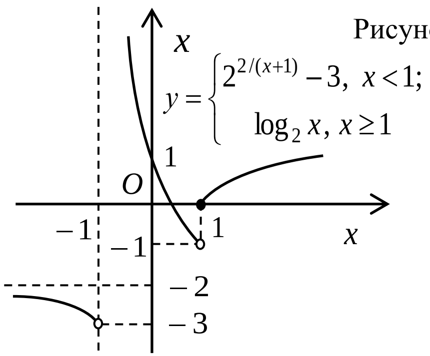


Рисунок 47

Рисунок 48

$\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) =$

$= \lim\limits_{x \to -1-0} \left(2^{2/(x+1)} - 3\right) = -3;$

$\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) =$

$= \lim\limits_{x \to -1+0} \left(2^{2/(x+1)} - 3\right) = +\infty.$

Отже, у точці $x = -1$ функція має нескінченний стрибок (рис. 48).

У точці $x = 1$:

$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) =$

$$\lim_{x \to 1-0} \left(2^{2/(x+1)} - 3\right) = -1;$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \log_2 x = 0; \quad f(1) = \log_2 1 = 0.$$

Отже, у точці $x=1$ функція має скінченний стрибок висотою 1 (рис. 48). ■

### 1.4.3 Застосування функцій в економіці

Наявність функціональних залежностей між економічними показниками дозволяє використовувати для опису і дослідження економічних задач поняття функції та інші засоби математичного аналізу. Наведемо деякі приклади:

1. ***Функція попиту від ціни*** $q=f(p)$ – залежність попиту $q$ на товар від його ціни $p$. Функції попиту можуть бути найрізноманітнішими, зокрема,

$$q=600/(p+3)+10;\quad q=ae^{-3p},\ \text{де}\ a=const.$$

2. Оберненою до попередньої є ***функція ціни від попиту*** $p=\varphi(q)$. Це можуть бути, зокрема, залежності

$$p=3-0{,}5\ln aq;\quad p=aq^{-0,6},\ \text{де}\ a=const.$$

3. Нехай $u$ – сумарний виторг при реалізації $q$ одиниць товару за ціною $p$, що залежить від попиту $p=\varphi(q)$. Тоді ***функція сумарного виторгу*** $u=f(q)$ визначається як добуток кількості одиниць товару $q$ на його ціну $p$: $u=f(q)=q\varphi(q)$. Наприклад, якщо залежність ціни від попиту $p=3-0{,}5\ln aq$, то функція сумарного виторгу: $u=q(3-0{,}5\ln aq)$.

4. ***Функція пропозиції*** $S=f(p)$ – залежність пропозиції $S$ товару від його ціни $p$. Обернена функція $p=\varphi(S)$ є ***функцією ціни від пропозиції***.

5. ***Функція сумарних витрат*** $K=F(x)$ – залежність сумарних витрат $K$ на виробництво $x$ одиниць товару від їх кількості $x$. Якщо розділити сумарні витрати $K$ на кількість виробленого товару $x$, то одержимо ***функцію середніх*** (***питомих***) ***витрат*** (***собівартість*** одиниці товару) $\Pi=f(x)$:

$$\Pi=f(x)=K/x=F(x)/x.$$

6. ***Функція корисності*** (***функція переваг***) $y = f(x)$ – залежність ступеня корисності $y$ (результату, ефекту) дії певного економічного фактору від рівня $x$ (кількості, інтенсивності) цього фактору.

*Приклад 1.* Дослідження показують, що залежності попиту $y$ на товари першої необхідності і попиту $z$ на предмети розкоші від рівня доходу $x$ покупців описуються функціями Л. Торнквіста:

$$y = \frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1},\ x > a_1 > c_1;\quad z = \frac{b_2 x(x-a_2)}{x-c_2},\ x > a_2 > c_2;$$

$$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 = const .$$

Тут $a_1$ і $a_2$ – рівні доходу, при яких починається придбання відповідного товару, $a_2 > a_1$. Знайти граничний попит при $x \to \infty$.

□ $$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = b_1 \lim_{x\to\infty} \frac{1-a_1/x}{1-c_1/x} = b_1;$$

$$\lim_{x\to\infty} z = \lim_{x\to\infty} \frac{b_2 x(x-a_2)}{x-c_2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = b_2 \lim_{x\to\infty} \frac{1-a_2/x^2}{1/x - c_2/x^2} = \infty .$$

Таким чином, при необмеженому зростанні рівня доходів попит на товари першої необхідності наближається до стану насичення $y = b_1$, а попит на предмети розкоші необмежено зростає. ■

*Приклад 2.* Економічним відділом підприємства встановлено, що при виробництві $x$ одиниць деякої продукції щоквартальні витрати $V(x)$ задаються формулою $V(x) = 30000 + 50x$ (грош. од.), а дохід $D(x)$, одержаний від продажу $x$ одиниць цієї продукції, виражається формулою $D(x) = 110x - 0{,}01x^2$ (грош. од.). Кожного кварталу підприємство виробляє $x_0 = 2950$ одиниць указаної продукції, але бажає збільшити її випуск до $x = 3100$ одиниць. Знайти вираз для прибутку $P(x) = D(x) - V(x)$. Обчислити запланований приріст продукції $\Delta x = x - x_0$ і відповідні прирости витрат $\Delta V(x)$, доходу $\Delta D(x)$ та прибутку $\Delta P(x)$. Знайти середню величину $\dfrac{\Delta P(x)}{\Delta x}$ приросту прибутку на одиницю приросту продукції.

□ Прибуток $P(x)$ задається функцією:

$$P(x) = 110x - 0{,}01x^2 - (30\,000 + 50x) =$$

$$= 60x - 0{,}01x^2 - 30\,000 \text{ (грош. од.).}$$

Запланований приріст продукції:

$$\Delta x = 3100 - 2950 = 150 \text{ (од.).}$$

Приріст витрат:

$$\Delta V(x) = V(3100) - V(2950) = 30\,000 + 50 \cdot 3100 -$$

$$-(30\,000 + 50 \cdot 2950) = 7\,500 \text{ (грош. од.).}$$

Приріст доходу:

$$\Delta D(x) = D(3100) - D(2950) = 110 \cdot 3100 - 0{,}01 \cdot 3100^2 -$$

$$-(110 \cdot 2950 - 0{,}01 \cdot 2950^2) = 7\,425 \text{ (грош. од.).}$$

Приріст прибутку:

$$\Delta P(x) = \Delta D(x) - \Delta V(x) = 7\,425 - 7\,500 = -75 \text{ (грош. од.).}$$

Отже, прибуток зменшиться на 75 грош. од. .

Середня величина приросту прибутку на одиницю приросту продукції:

$$\frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \frac{-75}{150} = -0{,}5 \text{ (грош. од./од.).}$$

Отже, у середньому кожна одиниця додаткової продукції зменшує прибуток на 0,5 грош. од. ■

## Запитання для самоконтролю

1. Дайте означення функції. Що таке область визначення та область значень функції?
2. Дайте означення складної функції. Наведіть приклади.
3. Дайте означення оберненої функції. Наведіть приклади.
4. Наведіть основні способи задання функції. Укажіть переваги та недоліки кожного зі способів.

5. Дайте означення обмеженої та необмеженої функції. Наведіть приклади.

6. Дайте означення парної та непарної функції. Наведіть приклади.

7. Дайте означення періодичної функції. Наведіть приклади.

8. Дайте означення монотонної функції. Наведіть приклади.

9. Дайте перелік основних елементарних функцій.

10. Яка функція називається елементарною?

11. Яка функція називається неперервною в точці $x_0$ ?

12. Які еквівалентні означення неперервності ви знаєте?

13. Яка функція називається неперервною на відрізку?

14. Які точки називаються точками розриву?

15. Яка точка називається точкою розриву першого роду?

16. Що таке точка усувного розриву?

17. Що таке точка скінченного стрибка?

18. Яка точка називається точкою розриву другого роду?

19. Що таке точка нескінченного стрибка?

20. Як досліджується функція $y = f(x)$ на неперервність?

21. Сформулюйте властивості неперервної функції в точці.

22. Які властивості неперервної функції на відрізку ви знаєте?

## Завдання для самостійного опрацювання

**Задача 1**. Знайти область визначення $D(y)$ функції:

а) $y = \sqrt{3x^2 - 7x + 4}$;   б) $y = \log_5(12 + 4x - x^2)$.

Відповідь: а) $D(y) = (-\infty; 1] \bigcup [4/3; +\infty)$; б) $D(y) = (-2; 6)$.

**Задача 2**. Дослідити функцію на парність і знайти інтервали знакосталості:

а) $y = (x-3)(x^2 + 10x + 24)$;   б) $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

Відповідь: а) функція ні парна, ні непарна; $y > 0$ при $x \in (-6; -4) \bigcup (3; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; -6) \bigcup (-4; 3)$;

б) функція парна; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \bigcup (-1; 1) \bigcup (2; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-2; -1) \bigcup (1; 2)$.

**Задача 3**. Дослідити на неперервність, визначити характер точок розриву та побудувати схематично графік функції:

$$f(x)=\begin{cases}(x/\pi)^3, & x<0\\ tg\,(x/2), & 0<x<\pi\\ x/\pi, & x\ge\pi\end{cases}.$$

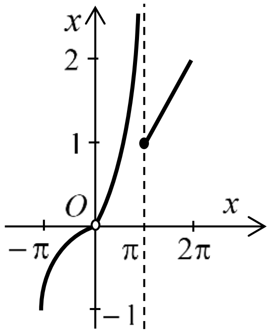


Рисунок 49

Відповідь: графік функції подано на рис. 49; у точці $x=0$ функція має усувний розрив («виколота» точка на рис. 49); у точці $x=\pi$ функція має нескінченний стрибок (рис. 49).

**Задача 4**. Перевірити на неперервність функцію $f(x)=3^{2/(x-4)}$ у точці $x=4$.

Відповідь: у точці $x=4$ функція має нескінченний стрибок.

**Задача 5**. На деякому підприємстві встановлено, що витрати на виготовлення $x$ одиниць певних виробів визначаються формулою

$$V(x)=0{,}001x^3-0{,}2x^2+30x+2\,000 \text{ (грош. од.).}$$

Знайти приріст витрат $\Delta V(x)$ і приріст $\Delta C(x)$ середніх витрат $C(x)=\dfrac{V(x)}{x}$ на виготовлення кожної одиниці виробу, коли їх кількість зросте з $x_0=50$ до $x=100$ одиниць.

Відповідь:

$\Delta V(x)=875$ (грош. од.); $\Delta C(x)=-22{,}5$ (грош. од./од.).

# СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барабаш Г. М. Збірник-довідник з курсу «Вища математика для економістів» / Г. М. Барабаш, В. М. Кирилич, О. В. Пелюшкевич. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2019 – 257 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/09/1s3_HHYe_var_08-04-2019.pdf, вільний).

2. Вища математика : підручник / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, Т. В. Денисова та ін. – Харків : ХНЕУ, 2012. – 772 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: http://repository.hneu.edu.ua/handle/123456789/28721, вільний).

3. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів : підручник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 341 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/53227/, вільний).

4. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 473 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/55823/, вільний).

5. Коваленко Л. Б. Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика». Частина 1 [Електрон. ресурс] / Л. Б. Коваленко. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 44 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/58511/, вільний (дата звернення 24.05.2024). – Назва з екрана.

6. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях. Частина 1 : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 106 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/39383/1/, вільний).

7. Курпа Л. В. Вища математика в прикладах і задачах. У 2-х томах. Т. 1 : Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної : навчальн. посіб. / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г. Б. Лінник; за ред. проф. Л. В. Курпи. – Харків : НТУ «ХПІ», 2008. – 528 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://core.ac.uk/download/pdf/50574342.pdf, вільний).

8. Кузнецова Г. А. Навчальний довідник в схемах і таблицях для самостійного вивчення теми «Аналітична геометрія» з курсу вищої математики / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ; уклад. : Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ, 2013. – 77 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/34810/1/, вільний).

9. Пастушенко С. М. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв'язування задач : навч. посіб. / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко. – Київ : Діал, 2002. – 160 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://edu-lib.com/matematika-2/dlya-studentov/pastushenko-s-m-pidchenko-yu-p-vishha-matem, вільний).

10. Станішевський С. О. Вища математика : навч. посіб. / С. О. Станішевський.– Харків : ХНАМГ, 2002.–270 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/841/, вільний).

11. Тевяшев А. Д. Вища математика. Загальний курс : Збірник задач та вправ. – 2-е вид. доп. і доопр. / А. Д Тевяшев, О. Г. Литвин. – Харків : Рубікон, 1999. – 320 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу : https://www.twirpx.com/file/277182/, вільний).

12. Якунін А. В. Індивідуальні завдання з вищої математики з комп'ютерною підтримкою. Модуль 1 : навч. посіб. / А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 136 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/59067/, вільний).

13. Bird J. O. Higher engineering mathematics / J. O. Bird. – Oxford, Burlington MA : Newnes, 2006. – 726 p. – There is an electronic version. (Regime of access: https://pdfcoffee.com/higher-engineering-mathematics-7th-edition-john-bird-2-pdf-free.html, free).

14. Borakovskiy O. V. Handbook for problem solving in Higher Mathematics / O. V. Borakovskiy, O. I. Ropavka. – Kharkiv : KNMA, 2009. – 195 p. – There is an electronic version. (Regime of access: https://eprints.kname.edu.ua/10630/, free).

*Електронне навчальне видання*

**ЯКУНІН** Анатолій Вікторович

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

# ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1
# АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 051 – Економіка, 071 – Облік і оподаткування, 076 – Підприємництво та біржова діяльність)*

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
*За авторською редакцією*
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2024, поз. 50Л

Підп. до друку 13.06.2024. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 5,1.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.