МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Г. А. Кузнецова

МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для іноземних студентів підготовчого відділення

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2024

УДК 51:378-054.6](075.8)
К89

Автор

Кузнецова Ганна Анатоліївна, старший викладач кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рецензенти:

Солодовник Тетяна Олександрівна, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри педагогіки і психології управління соціальними системами імені академіка І. А. Зязюна Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»;

Коваленко Людмила Борисівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного униворситету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано до друку Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, протокол № 11 від 31 травня 2024 р.

Кузнецова Г. А.

К89 Математика : навч. посіб. для іноземних студентів підгот. відділення / Г. А. Кузнецова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 199 с.

ISBN 978-966-695-611-1

Навчальний посібник рекомендовано для іноземних громадян, які навчаються на підготовчих відділеннях українських ЗВО. Посібник містить навчальну інформацію, необхідну для успішного продовження освіти в Україні.

Посібник складається із самостійних, логічно завершених розділів, які містять теоретичні відомості, нові слова та вирази, а також мовні і математичні вправи.

На початку кожного розділу є словник з перекладом двома мовами – англійською і французькою.

УДК 51:378-054.6](075.8)

ISBN 978-966-695-611-1

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Математика – фундаментально-природнича дисципліна, це «мова, на якій написано книгу природи» (Галілео Галілей). За допомогою математичної мови можна описати і розв’язати будь-яку задачу з фізики, хімії, біології та іншим дисциплінам (не тільки технічним, але й гуманітарним).

Основна мета викладання дисципліни «Математика» на підготовчому відділенні для іноземних слухачів полягає у підготовці студентів до навчання у закладах вищої освіти України.

Навчальний посібник містить основний матеріал за такими розділами математики, як: «Арифметика», «Алгебра та початки математичного аналізу», «Геометрія». Об’єм навчальної інформації, яка міститься у посібнику, відповідає програмі з математики для підготовчих факультетів для іноземних громадян.

Посібник складається з двох розділів: перший – «Вступний курс. Арифметика», другий – «Алгебра та початки математичного аналізу», «Елементи геометрії», а розділи складаються з декількох тем, які, в свою чергу, із занять, кожне з яких розкриває визначену тему, яка містить теоретичний матеріал і приклади, що ілюструють математичні поняття та терміни. На початку кожного заняття розташовано словник нових слів з перекладом на англійську та французьку мови. Також у заняття включені вправи двох типів: на закріплення обчислювальних навичок і на відпрацювання лексики, що вводиться, частину з яких студенти виконують під час аудиторних занять під керівництвом викладача, а частину – самостійно вдома. Наприкінці кожної теми є питання для самоконтролю та модель контрольної роботи за темою, яка вивчалася.

ВСТУПНИЙ КУРС. АРИФМЕТИКА

ЗАНЯТТЯ 1

1.1 Цифри і числа

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Арифметика	Arithmetic	Arithmétique
Знак	Sign	Signe
Математичні знаки	Mathematical signs	Signes mathématiques
Нуль	Zero	Zéro
Рахувати	To count	Compter
Цифра	Figure, digit	Chiffre
Цифри	Figures, digites	Chiffres

Цифра – це письмовий знак, який зображає число. Для запису чисел використовують десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Числа
(*запис та читання*)

0 – нуль
1 – один (одиниця)
2 – два
3 – три
4 – чотири
5 – п'ять
6 – шість
7 – сімь
8 – вісім
9 – дев'ять
10 – десять (один десяток)
11 – одинадцять
12 – дванадцять
13 – тринадцять
14 – чотирнадцять
15 – п'ятнадцять
16 – шістнадцять
17 – сімнадцять
18 – вісімнадцять
19 – дев'ятнадцять
20 – двадцять (два десятки)
21 – двадцять один
22 – двадцять два
23 – двадцять три
24 – двадцять чотири
25 – двадцять п'ять
26 – двадцять шість
27 – двадцять сім
28 – двадцять вісім
29 – двадцять дев'ять
30 – тридцять (три десятки)
31 – тридцять один
32 – тридцять два
……………………
39 – тридцять дев'ять
40 – сорок (чотири десятки)
41 – сорок один
……………………
49 – сорок дев'ять
50 – п'ятдесят (п'ять десятків)
51 – п'ятдесят один
……………………
59 – п'ятдесят дев'ять
60 – шістдесят (шість десятків)
……………………
64 – шістдесят чотири
……………………
70 – сімдесят (сім десятків)

79 – сімдесят дев’ять
……………………
80 – вісімдесят (вісім десятків)
……………………
83 – вісімдесят три
……………………
90 – дев’яносто (дев’ять десятків)
……………………
100 – сто (одна сотня)
101 – сто один
102 – сто два
………………..
110 – сто десять
……………….
119 – сто дев’ятнадцать
120 – сто двадцать
……………….
129 – сто двадцать дев’ять
130 – сто тридцать
……………….
140 – сто сорок
150 – сто п’ятдесят
………………
160 – сто шестдесят
………………
170 – сто сімдесят
………………
180 – сто вісімдесят
………………
190 – сто дев’яносто
………………
199 – сто дев’яносто дев’ять
200 – двісті (дві сотні)
………………
300 – триста (три сотні)
………………
400 – чотириста (чотири сотні)
………………
500 – п’ятсот (п’ять сотень)
………………
600 – шістьсот (шість сотень)
………………
700 – сімсот (сім сотень)
………………

800 – вісімсот (вісім сотень)
………………
900 – дев’ятьсот (дев’ять сотень)
………………
1 000 – тисяч**а** (одна тисяч**а**)
……………….
2 000 – дві
3 000 – три
4 000 – чотири
тисяч**і**
………………
5 000 – п’ять
6 000 – шість
………………
20 000 – двадцять
тисяч
……………..
100 000 – сто тисяч
………………
200 000 – двісті тисяч
………………
1 000 000 – мільйон (один мільйон)
………………
2 000 000 – два
3 000 000 – три
4 000 000 – чотири
мільйон**и**
………………
5 000 000 – п’ять
6 000 000 – шість
……………….
20 000 000 – двадцать
мільйон**ів**

1 000 000 000 – мільярд (один мільярд або тисяча мільйонів)
………………

2 000 000 000 – два
3 000 000 000 – три
4 000 000 000 – чотири
мільярд**и**
……………….
5 000 000 000 – п’ять
6 000 000 000 –шість
……………….
20 000 000 000 – двадцять
мільярд**ів**

……………

ЗАПАМ’ЯТАЙТЕ!

Один десят**ок** Два Три десят**ки** Чотири П’ять …… десят**ків** двадцять	Чоловічий рід
Одна сотн**я** Дві Три сотн**і** Чотири П’ять …… сотень двадцять	Жіночий рід
Одна тисяч**а** Дві Три тисяч**і** Чотири П’ять …… тисяч двадцять	Жіночий рід
Один мільйон Два Три мільйон**и** Чотири П’ять …… мільйон**ів** двадцять	Чоловічий рід

Вправи

1. Прочитайте слова і вирази:

цифра – цифри;
знак – знаки;
математичний знак – математичні знаки;
число – числа;
натуральне число – натуральні числа;
ціле число – цілі числа;
нуль – нулі;
десяток – десятки;
сотня – сотні;
тисяча – тисячі;
мільйон – мільйони;
рахувати – рахуйте.

2. Прочитайте числа:

11, 13, 19, 23, 27, 36, 39, 41, 88, 101, 125, 271, 499, 890, 913, 1 235, 4 111, 10 777, 257 901, 1 000 000, 9 000 542.

3. Напишіть числа цифрами:

сімь, дванадцять, вісімнадцять, дев'ятнадцять, двадцять два, сорок чотири, шістьсот вісім, сто сімдесят один, одна тисяча триста сорок дев'ять, тридцять тисяч вісімдесят один, двадцять мільйонів сто тисяч п'ятнадцять.

4. Що таке цифра? Назвіть цифри.

1.2 Однозначні і багатозначні числа

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Однозначне число	One digit number	Nombre a un chiffre
Двозначне число	Two digit number	Nombre a deux chiffre
Багатозначне число	Many digit number	Nombre a plusieurs chiffre
І т. д. (і так далі)	And so on (et cetera (etc.)	Ainsi de suite (et cetera (etc.)

Числа, які складаються з однієї цифри, є **однозначними**. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – однозначні числа.

Числа, які складаються з двох цифр, є **двозначними**. 10, 11, 12,…, 99 – двозначні числа.

Числа, які складаються з трьох цифр, є **тризначними**. 100,101, 102,…, 999 – трихзначні.

Числа, які складаються з чотирьох цифр, є **чотиризначними**. 1 000, 1 001, …, 9 999 – чотиризначні.

Двозначні, тризначні, чотиризначні числа і т. д. є **багатозначними** числами.

Вправи

5. Прочитайте двозначні числа:

3478; 2; 85; 490; 38 576; 82; 90; 66 529; 11; 304; 2 985 476; 3; 22; 90; 9 473; 41; 777; 68.

6. Прочитайте багатозначні числа:

8 888; 0; 635; 2; 479; 100; 4; 6 591; 23; 777; 3 002; 1 000 008; 8; 5 469; 902; 444; 3 010;10 000; 21 001.

7. Дайте відповіді на питання:

а) Які числа називають однозначними? Наведіть приклади.

б) Які числа називаются двозначними? Наведіть приклади.
в) Які числа називають тризначними? Наведіть приклади.
г) Які числа називають чотиризначними? Наведіть приклади.
д) Які числа називають багатозначними? Наведіть приклади.

1.3 Натуральні числа. Парні і непарні числа. Числові множини

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Числові множини	Numeric sets	Ensembles numériques
Натуральні числа	Natural numbers	Nombre naturel
Множина натуральних чисел	Set of natural numbers	Ensemble de nombres naturels
Цілі числа	Whole numbers	Nombres entiers
Множина цілих чисел	Set of integers	Ensemble d'entiers
Парне число	Even number	Nombre pair
Непарне число	Odd number	Nombre impair
Раціональні числа	Rational numbers	Nombres rationnels
Множина раціональних чисел	Set of rational numbers	Ensemble de nombres rationnels
Ірраціональні числа	Irrational numbers	Nombres irrationnels
Множина ірраціональних чисел	Set of irrational numbers	Ensemble de nombres irrationnels
Дійсні числа	Real numbers	Nombres réels
Множина дійсних чисел	Set of real numbers	Ensemble de nombres réels

$1, 2, 3, ..., n, ...$ – це **натуральні** числа $(n \in N)$, N – **множина натуральних** чисел. Запис $n \in N$ читаємо так: «ен належить множині натуральних чисел».

0 – не натуральне число $(0 \notin N)$. Запис $0 \notin N$ читаємо так: «нуль не належить множині натуральних чисел».

$..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...$ – це **цілі** числа $(n \in Z)$, Z – **множина цілих** чисел.

$2, 4, 6, ..., k, ...$ – це **парні** числа $(k = 2n,\ n \in Z)$.

$1, 3, 5, ..., k, ...$ – це **непарні** числа $(k = 2n - 1,\ n \in Z)$.

$\frac{m}{n}$ – це **раціональні** числа $(m \in Z, n \in N)$, Q – **множина раціональних** чисел. Наприклад: $\frac{2}{3};\ -\frac{5}{4};\ 0,7;\ -9;\ 123$.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \ldots$ – це **ірраціональні** числа, тобто числа, які не можна записати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу; I – **множина ірраціональних** чисел.

Раціональні і ірраціональні числа утворюють **множину дійсних** R чисел. Наприклад: –2,5; 2 300; $\sqrt[3]{13}$.

Вправи

8. Прочитайте слова і вирази:

натуральне число – натуральні числа;
множина натуральних чисел;
парне число – парні числа;
непарне число – непарні числа;
ціле число – цілі числа;
множина цілих чисел;
раціональне число – раціональні числа;
множина раціональних чисел;
ірраціональне число – ірраціональні числа;
множина ірраціональних чисел;
дійсне число – дійсні числа;
множина дійсних чисел.

9. Прочитайте и напишіть у зошит парні числа:

35, 4, 87, 983, 90, 66 657, 42 987, 48, 44 427, 52, 10, 100 000, 127, 2 378, 122, 2 590.

10. Прочитайте и напишіть у зошит непарні числа:

72, 41, 1 035, 19 830, 789, 45, 1, 0, 299 909, 123, 467, 21, 888, 1 111, 119, 3, 51, 41, 3 479.

11. Дайте відповіді на питання:

а) Які числа називають натуральними? Наведіть приклади.
б) Як позначають множину натуральних чисел?
в) Які числа називають цілими? Наведіть приклади.
г) Які позначають множину цілих чисел?
д) Які числа називають парними? Наведіть приклади.
е) Які числа називають непарними? Наведіть приклади.
ж) Які числа називають раціональними? Наведіть приклади.
и) Як позначають множину раціональних чисел.
к) Які числа називають ірраціональними? Наведіть приклади.
л) Які числа називають дійсними?
м) Як позначають множину дійсних чисел?

ЗАНЯТТЯ 2

2.1 Основні математичні знаки

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Плюс	Plus	Plus
Мінус	Minus	Moins
Помножити на …	To multiply by …	Multiplierpar …
Розділити на …	To divide by …	Diviserpar …
Дорівнює (буде, отримаємо)	Equal	Égal
Не дорівнює	Not equal	Pas égal
Наближено дорівнює	Approximately equal	A peu près égale
Тотожно дорівнює	Identically equal	Identiquement égal
Більше	Bigger	Plus grand
Менше	Smaller	Plus petit
Або	Or	Ou, soit
Дужка	Bracket	Parenthése
Кругла дужка	Bracket	Parenthése
Квадратна дужка	Square bracket	Crochet
Фігурна дужка	Figure bracket	Accolade
Відкривати (дужки)	To open (brackets)	Ouvrir (des parenthéses)
Відкрити (дужки)	To open (brackets)	Ouvrir (des parenthéses)
Закривати (дужки)	To close (brackets)	Fermer (des parenthéses)
Закрити (дужки)	To close (brackets)	Fermer (des parenthéses)

$+$ плюс
$-$ мінус
$\cdot \ (\times)$ помножити на … (що?)
: (/) розділити на … (що?)
$=$ дорівнює (чому?) або буде (що?), отримаємо (що?)
$\neq$ не дорівнює (чому?)
$\approx$ наближено дорівнює (чому?)
$\equiv$ тотожно дорівнює (чому?)
$>$ більше від (чого?)
$<$ менше від (чого?)
$\geq$ більше або дорівнює (чому?)
$\leq$ менше або дорівнює (чому?)
( ) круглі дужки
[ ] квадратні дужки
{ } фігурні дужки

Наприклад: $100+5$ «сто плюс п’ять»; $44-13$ «сорок чотири мінус тринадцять»; $51\cdot 2$ «п’ятдесят один помножити на два»; $74:12$ «сімдесят чотири розділити на дванадцять»; $11\cdot 3=33$ «одинадцять помножити на три дорівнює тридцяти трьом» або «одинадцять помножити на три буде (отримаємо) тридцять три»; $99 > 61$ «дев’яносто дев’ять більше від шестидесяти одного» або «дев’яносто дев’ять більше, ніж число шестидесят один»; $0 < 7$ «нуль менше від семи» або «нуль менше, ніж число сім»; $17\neq 18$ «сімнадцять не дорівнює вісімнадцяти»; $1000\equiv 1000$ «тисяча тотожно дорівнює тисячі»; $1{,}999\approx 2$ «одна ціла дев’ятьсот дев’яносто дев’ять тисячних наближено дорівнює двом цілим»; $z\geq 55$ «число зэт більше або дорівнює п’ятидесяти п’яти»; $x\leq 2$ «число ікс менше або дорівнює двох».

Дужки читаємо так:

(круглу
[відкрити (що?) квадратну дужку
{ фігурну

або

(круглу
[відкриваємо (що?) квадратну дужку;
{ фігурну

) круглу
] закрити (що?) квадратну дужку
} фігурну

або

) круглу
] закриваємо (що?) квадратну дужку
} фігурну

ЗАПАМ’ЯТАЙТЕ!

Дорівнює (чому?) Давальний відмінок	0 – нулю 1 – одиниці (одному) 2 – двом 3 – трьом 4 – чотирьом 5 – п’яти 6 – шести 7 – семи ……….. 10 – десяти 11 – одинадцяти ………….. 20 – двадцяти 21 – двадцяти одному

Дорівнює (чому?) Давальний відмінок	………….. 30 – тридцяти ………….. 34 – тридцяти чотирьом ………….. 40 – сорока ………… 45 – сорока п'яти ………… 50 – п'ятидесяти ………… 60 – шестидесяти ………… 80 – восьмидесяти ………… 90 – дев'яносто ………… 99 – дев'яносто дев'яти 100 – сто

2.2 Грецька абетка

Буква	Транскрипція	Буква	Транскрипція	Буква	Транскрипція	Буква	Транскрипція
Α α	альфа	Η η	ута	Ν ν	ню	Τ τ	тау
Β β	бета	Θ θ	тета	Ξ ξ	ксі	ϒ υ	іпсилон
Γ γ	гамма	Ι ι	йота	Ο o	омікрон	Φ φ	фі
Δ δ	дельта	Κ κ	каппа	Π π	пі	Χ χ	хі
Ε ε	епсилон	Λ λ	лямда	Ρ ρ	ро	Ψ ψ	псі
Ζ ζ	дзета	Μ μ	мю	Σ σ	сігма	Ω ω	омега

2.3 Латинська абетка

Буква	Транскрипція	Буква	Транскрипція	Буква	Транскрипція	Буква	Транскрипція
A a	а	*H h*	аш (ха)	*O o*	о	*V v*	ве
B b	бе	*I i*	і	*P p*	пе	*W w*	дубль-ве
C c	це	*J j*	жи (йот)	*Q q*	ку	*X x*	ікс
D d	де	*K k*	ка	*R r*	ер	*Y y*	ігрек
E e	е	*L l*	ель	*S s*	ес	*Z z*	зет
F f	уф	*M m*	ем	*T t*	те		
G g	же (гэ)	*N n*	ен	*U u*	у		

Разом з основними математичними знаками в математиці застосовують додаткові математичні знаки. Прочитати їх переклад і значення можна у додатку А.

Вправи

12. Прочитайте слова і вирази:

помножити; помножити на два;
розділити; розділити на три;
дорівнює; два плюс три дорівнює п’яти;
буде; чотири мінус два буде два;
більше; п’ять більше від двох;
менше; два менше від п’яти;
кругла дужка; круглі дужки;
відкрити;відкривати; відкриваємо;
відкрити круглу дужку;
відкрити квадратну дужку;
відкриваємо фігурну дужку;
закрити, закривати, закриваємо;
закрити круглу дужку;
закрити квадратну дужку;
закриваємо фігурну дужку.

13. Прочитайте і запишіть українською мовою:

$3+2=5$; $7>2$; $11-4=7$; $1<5$; $3\cdot 5=15$; $a\geq b$; $18\div 9=2$; $c\leq d$.

14. Прочитайте і запишіть українською мовою:

$90:\{3\cdot[19-(56:14+5)]\}=3.$

15. Запишіть цифрами:

а) тридцять один плюс два буде тридцять три;
б) двадцять вісім мінус вісім дорівнює двадцяти;
в) відкриваємо круглу дужку, десять плюс вісім розділити на два, закриваємо круглую дужку, помножити на чотири буде п’ятдесят шість;
в) сто шістнадцять більше, ніж сто одинадцять;
г) мільйон три менше, ніж дев'ятсот дев'яносто дев'ять мільйонів;
д) сорок помножити на дев'ятнадцять буде сімсот шістдесят;
е) сімнадцять розділити на сімнадцять дорівнює одиниці.

16. Дайте відповідь на питання:

а) Які основні математичні знаки Ви знаєте?
б) Які додаткові математичні знаки Ви знаєте?

ЗАНЯТТЯ 3

3.1 Арифметичні дії

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Арифметичні дії	Arithmetical operations	Opérations arithmétiques
Дія	Operation	Opération
Компонент	Component	Composant
Додавання	Addition	Addition
Доданок	Item	Terme
Сума	Sum	Somme
Результат	Result	Résultat
Віднімання	Subtraction	Soustraction
Зменшуване	Minuend	Le plus grand nombre
Від'ємник	Subtrahend	Nombre á soustraire
Різниця	Difference	Difference
Множення	Multiplication	Multiplication
Множник	Multiplier	Multiplicateur
Множники (співмножники)	Multipliers	Multiplicateurs
Добуток	Product	Produit
Ділення	Division	Division
Дільник	Dividend	Dividende
Ділене	Divisor	Diviseur
Частка	Quotient	Quotient
Не можна (розділити)	One may not (divide)	On ne peut pas (diviser)
Розв'язувати, розв'язати	To solve	Résoudre
Більше, від (ніж) …	Bigger than	Plus grand que
Меньше, від (ніж)…	Smoller, less than	Inférieur a
Виконати	To carry out; to do	Effectuer
Називається	To be called	Se nommer; s´appeler
На скільки більше…	By how much is bigger than	De combien plus grand
У скільки разів більше…	How many times …, is bigger than	De combien plus petit
Як називається …?	What is it called …?	Comment s´appeler ..?

Додавання $a+b=c$,

компоненти додавання: a, b – *доданки*, c – *сума*

$3+5=8$ – це дія додавання.

Читаємо так: три плюс п'ять буде вісім або три плюс п'ять дорівнює восьми;

3 – це доданок,
5 – це теж доданок,
8 – це сума.

Сума – це результат додавання.

Віднімання $a - b = c$,

компоненти віднімання: a – *зменшуване*, b – *від'ємник*, c – *різниця*

$7 - 3 = 4$ – це дія віднімання.

Читаємо так: сім мінус три буде чотири, або сім мінус три дорівнює чотирьом.

7 – це зменшуване,
3 – це від'ємник,
4 – це різниця.

Різниця – це результат віднімання.

Множення $a \cdot b = c$,

компоненти множення: a, b – *множники* (*співмножники*), c – *добуток*

$5 \cdot 3 = 15$ – це дія множення.

Читаємо так: п'ять помножити на три буде п'ятнадцять, або п'ять помножити на три дорівнює п'ятнадцяти.

5 – це множник,
3 – це теж множник,
5 і 3 – це множники або співмножники,
15 – це добуток.

Добуток – результат множення.

$a \cdot 0 = 0$ – число *a* помножити на нуль буде нуль.

Ділення $a : b = c$,

компоненти ділення: a – *ділене*, b – *дільник*, c – *частка*

$32 : 2 = 16$ або $\frac{32}{2} = 16$ або $32 \div 2 = 16$ – це дія ділення.

Читаємо так: тридцять два розділити на два буде шістнадцять, або: тридцять два розділити на два дорівнює шістнадцяти.

32 – це ділене,
2 – це дільник,
16 – це частка.

Частка – це результат ділення.

$0 : a = 0$ – нуль розділити на число *a* буде нуль.

$a : 0 = ?$ – **на нуль ділити не можна.**

Вправи

17. Прочитайте слова і вирази:

дія – дії;
арифметична дія – арифметичні дії;
додавання; дія додавання;
сума – це результат додавання;
віднімання; дія віднімання;
різниця – це результат віднімання;
множення; дія множення;
добуток – це результат множення;
ділення; дія ділення;
частка – це результат ділення;
називати; називатися; називається;
як називається ця дія;
ця дія називається додавання;
як називаються ці числа;
ці числа називаються доданками;
не можна; число не можна поділити на нуль;
виконати – виконайте, виконайте дії.

18. Прочитайте:

$7+2=9$. Як називається ця дія? Як називаються числа 7, 2 та 9? Що таке сума?

19. Прочитайте:

$20-19=1$. Як називається ця дія? Як називаються числа 20, 19 та 1? Що таке різниця?

20. Прочитайте:

$17\cdot 3=51$. Як називається ця дія? Як називаються числа 17, 3 та 51? Що таке добуток?

21. Прочитайте:

$65:5=13$. Як називається ця дія? Як називаються числа 65, 5 та 13? Що таке частка?

22. Виконайте додавання. Прочитайте:

а) $326+154$; б) $12\,481+3\,564$;
в) $1\,251+149$; г) $142\,367+1\,012$.

23. Виконайте віднімання. Прочитайте:

а) $49-27$; б) $3\,567-2\,348$;
в) $119-12$; г) $10\,001-1\,987$.

24. Виконайте множення. Прочитайте:

а) $24 \cdot 17$; б) $241 \cdot 12$;
в) $356 \cdot 3$; г) $1\,027 \cdot 110$.

25. Виконайте ділення. Прочитайте:

а) $364:4$; б) $1125:75$;
в) $256:16$; г) $6\,054:3\,027$.

26. Дайте відповіді на питання:

а) Які математичні дії Ви знаєте?
б) Що таке сума? Назвіть компоненти додавання.
в) Що таке різниця? Назвіть компоненти віднімання.
г) Що таке добуток? Назвіть компоненти множення.
д) Що таке частка? Назвіть компоненти ділення.

3.2 Порядок дій

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Порядок дій	Order of operations	Ordre d´opérations
Обчислити	To calculate	Calculer
Обчисліть	Calculate	Calculez
Якщо	If	Si
Якщо…, тоді …	If …, then …	Si …, alors
Дорівнює (числу)	Equal (to the number)	Egal (au nombre …)
Отже	Therefore	Par conséquent, donc
Правило	Rule	Régle
Запис	Entry, a record	Inscription, un disque (opération)
Містить	To contain	Contenir
Тільки	Only	Seulement
Послідовно	Step by step; orderly	Conséquemment ; successivement
Різні дії	Different operations	Différentes opérations
Розкривати (дужки) – розкрити (дужки)	To open (the brackets)	Ouvrir (des parenthéses)

Приклад 1. Обчисліть: $18-6+4$.

Перша дія – віднімання: $18-6=12$. Різниця дорівнює дванадцяти.

Друга дія – додавання: $12+4=16$. Сума дорівнює шістнадцяти. Отже, $18-6+4=16$.

Правило

Якщо запис містить лише дії додавання та віднімання, то обчислюємо послідовно зліва направо.

Приклад 2. Обчисліть: $36:9\cdot 4$.

Перша дія – ділення. $36:9=4$. Тридцять шість розділити на дев'ять буде чотири.

Друга дія – множення. $4\cdot 4=16$. Чотири помножити на чотири буде шістнадцять. Отже, $36:9\cdot 4=16$.

Правило

Якщо запис містить лише дії множення та ділення, то обчислюємо послідовно зліва направо.

Приклад 3. Обчисліть: $24+18:3-5\cdot 4$.

Перша дія – ділення. $18:3=6$. Вісімнадцять поділити на три буде шість.

Друга дія – множення. $5\cdot 4=20$. П'ять помножити на чотири буде двадцять.

Третя дія – додавання. $24+6=30$. Двадцять чотири плюс шість буде тридцять.

Четверта дія – віднімання. $30-20=10$. Тридцять мінус двадцять буде десять. Отже, $24+18:3-5\cdot 4=10$.

Правило

Якщо запис містить різні дії, то спочатку виконуємо дії множення та ділення послідовно, потім – дії додавання і віднімання теж послідовно.

Приклад 4. Обчисліть: $\left\{\left[2\cdot\left(148-72:4\right)\right]+55\right\}:9$. Цей запис містить різні дії та різні дужки.

Спочатку розкриваємо круглі дужки: $148-72:4$. Перша дія – ділення: $72:4=18$. Друга дія – віднімання: $148-18=130$. Отже, результат у круглих дужках дорівнює числу 130.

Потім розкриваємо квадратні дужки: $2\cdot 130=260$. Отже, результат у квадратних дужках дорівнює числу 260.

Потім розкриваємо фігурні дужки: $260+55=315$. Результат у фігурних дужках дорівнює числу 315.

Потім ділимо: $315:9=35$.

Отже, $\left\{\left[2\cdot\left(148-72:4\right)\right]+55\right\}:9=35$.

Правило

Якщо запис містить дужки (круглі, квадратні, фігурні), то виконуємо дії в дужках за ступенем їх вкладення, тобто від внутрішніх до зовнішніх.

Вправи

27. Назвіть порядок дій:

а) $a-b:c+d$; б) $a-\left\{b+\left[c:\left(m-n\right)\cdot\left(d+k\right)\right]\cdot x\right\}$;

в) $k+\left[c-\left(m+n\right)\cdot x\right]\cdot d$; г) $x-y+d\cdot\left(m+n\right):a$.

28. Дайте відповідь:

а) чому дорівнює результат: $38:2+21$?
б) чому дорівнює сума чисел: $8+4$?
в) чому дорівнює добуток чисел: $15\cdot4$?
г) чому дорівнює частка від ділення чисел: $55:11$?

29. Обчисліть:

а) $72-12+2-6+9$;
б) $36\cdot6:3:3\cdot7$;
в) $248-24\cdot12:2+36$;
г) $13\cdot2+36:9$.

30. Обчисліть:

а) $675\,019+88\,892:284-98\,603$;
б) $308\,803-75\,152:176+79\,008$;
в) $709\cdot9-2\,480\,065:413$;
г) $4\,789\,368:228-24\cdot606\,789\,368$.

31. Обчисліть:

а) $(5\,555+82\,320:84-693)\cdot66$;
б) $612\,228+(53\,007-52\,275:615)$;
в) $32\,087-87\cdot(67+62\,524:308)$;
г) $343\cdot(324\,378:54-4\,862)+777$;
д) $51\,003-(4\,968+709\cdot52)+203$;
е) $18\,408:(268\cdot75-19\,746)+959$;
ж) $467\,915+137\,865:(31\,353-48\cdot609)$;
и) $(86\cdot217+275\,116):859+279\,569$.

32. Обчисліть:

а) $112\,840:\left\{5\cdot\left[\,(5\,893+9\,018):37\,\right]\cdot(424-396)\right\}$;
б) $2\,690+\left[\,4888:(3\,006\cdot702-2\,110\,024)-16\,\right]$.

3.3 Властивості арифметичних дій

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Властивість	Property	Propriété
Закон	Law	Loi
Комутативний закон	Commutative law	Droit commutatif
Асоціативний закон	Associative law	Droit associatif
Наприклад	For example	Par exemple
Вірно	Correct	Juste; exact
Будь-який	Any	Importe quel
Спосіб	Method	Moyen
Рішення	Solution	Solution
Розв’язувати – розв’язати	To solve	Résoudre
Використовувати	To use	Utiliser

Властивості додавання

1. $a+b=b+a$ – комутативний закон.

Наприклад: $3+5=5+3$.

2. $a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c$ – асоціативний закон.

Наприклад: $35+15+20=(35+15)+20=70$.

Властивості віднімання

1. Віднімання суми від числа: $a-(b+c)=a-b-c$.

Наприклад: $25-(5+13)=25-5-13=20-13=7$.

2. Віднімання числа від суми: $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$.

Наприклад:
$(36+27)-16=(36-16)+27=47;(36+27)-16=36+(27-16)==47$.

3. Додавання з різницею: $a+(b-c)=a+b-c$.

Наприклад: $6+(44-19)=6+44-19=31$.

4. Віднімання різниці: $a-(b-c)=a-b+c$.

Наприклад: $65-(35-18)=65-35+18=48$.

Властивості множення

1. $a\cdot b=b\cdot a$ – комутативний закон.

Наприклад: $5\cdot 6=6\cdot 5=30$.

2. $a\cdot b\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ – асоціативний закон.

Наприклад: $12\cdot 8\cdot 4=12\cdot(8\cdot 4)=(12\cdot 8)\cdot 4=384$.

3. $(a+b+c)\cdot d=a\cdot d+b\cdot d+c\cdot d$ – дистрибутивний закон.

Наприклад: $(30+45+120)\cdot 12=30\cdot 12+45\cdot 12+120\cdot 12=360+540+1\,440=$
$=2\,340$.

Властивості ділення

1. Ділення суми або різниці на число: $\dfrac{a\pm b}{c}=\dfrac{a}{c}\pm\dfrac{b}{c}$.

Наприклад: $\dfrac{48+36}{4}=\dfrac{48}{4}+\dfrac{36}{4}=12+9=21$; $\dfrac{51-39}{3}=\dfrac{51}{3}-\dfrac{39}{3}=17-13=4$.

2. Ділення добутка на число: $\dfrac{a\cdot b}{c}=\dfrac{a}{c}\cdot b=a\cdot\dfrac{b}{c}$. Ця властивість правильна для будь-якого числа множників:

$$\frac{a\cdot b\cdot c}{d}=\frac{a}{d}\cdot b\cdot c=a\cdot b\cdot\frac{c}{d}=\frac{b}{d}\cdot a\cdot c.$$

Наприклад: $\dfrac{48\cdot 21}{8}=\dfrac{48}{8}\cdot 21=6\cdot 21=126$;

$\dfrac{7\cdot 21\cdot 2}{3}=\dfrac{21}{3}\cdot 7\cdot 2=7\cdot 14=98$.

3. Множення числа на частку: $a\cdot\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\cdot b}{c}$.

Наприклад: $2\cdot(135:5)=\frac{2\cdot 135}{5}=\frac{270}{5}=54$.

4. Ділення числа на частку: $a:(b:c)=(a:b)\cdot c$.

Наприклад: $\frac{360}{180:6}=\frac{360}{180}\cdot 6=12$.

5. Ділення частки на число: $(a:b):c=a:(b\cdot c)$ або $(a:b):c=(a:c):b$.

Наприклад: $(1\,200:15):40$.

1-й спосіб решення: $(1\,200:15):40=80:40=2$.

2-й спосіб решення: $(1\,200:15):40=1\,200:(15\cdot 40)=1\,200:600=2$.

3-й спосіб решення: $(1\,200:15):40=(1\,200:40):15=30:15=2$.

ЗАПАМ’ЯТАЙТЕ!

Результат є вірним	Чоловічий рід
Сума є вірною	Жіночий рід
Властивість є вірною	Жіночий рід
Дії є вірними	Множина

Вправи

33. Прочитайте слова та вирази:

властивість – властивості;
властивості додавання; властивості віднімання;
закон – закони;
комутативний закон;
асоціативний закон;
дистрибутивний закон;
будь-яке число – будь-які числа;
спосіб – способи;
використовувати, використовуйте;
розв’язувати, розв’язати, розв’яжіть;
рішення, вірне рішення, рішення вірне.

34. Назвіть закони додавання та множення.

35. Роз’яжіть, використовуючи комутативний та асоціативний закони додавання:

а) $87+39+56+13+61$; б) $458+42+33+67$;
в) $11+12+13+17+18+19$; г) $635+208+292+365$.

36. Роз’яжіть, використовуючи властивості арифметичних дій:

а) $28+37+59+43+32$; б) $(54\,271+39\,999)\cdot 1\,000$;
в) $(654+289)-254$; г) $(227+358)-(127+258)$;

д) $(348-299)+252$; е) $(657+298)-(257+198)$;
ж) $25\cdot 86\cdot 4$; и) $69\cdot 27+31\cdot 27$;
к) $348\cdot 90-238\cdot 90$; л) $977\cdot 49+49\cdot 23$;
м) $46\cdot 95\,820:20$; н) $(30-2)\cdot 5$;
п) $7\cdot(60-2)$; р) $45\cdot 49+45\cdot 51$;
с) $510\,173-39\cdot(8\,892:39+10)$; т) $(40+2)\cdot 50+35\cdot 5:7$;
у) $91\cdot 14+9\cdot 14=$; ф) $(40-16)\cdot 5$;
х) $8\cdot(80-2)$; ц) $61\cdot 37+63\cdot 61$;
ш) $480\,159-49\cdot(10\,159:49+20)$; щ) $(50+2)\cdot 40+36\cdot 5:9$.

ЗАНЯТТЯ 4

4.1 Дільник та кратне

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Кратне число	Multiple number	Multipled´un nombre
Точний, -а, -е, -і	Accurate; exact	Exact
Точна частка	Exact quotient	Quotient exact
Остача	Remainder	Reste
Це означає …	It means	Ca signifier
Знайти	To find	Trouver
Співвідношення	Ration; relation; correlation	Correlation; proportion
Який, -а, -е,-і	Which	Qui
Скільки	How many	Combine

Частка двох натуральних чисел буває **точна** та **неточна**.

$$\begin{array}{r|l} -30 & 5 \\ \underline{30} & 6 \text{ – частка} \\ 0 & \text{– остача} \end{array}$$

6 – це точна частка, т. я. $6\cdot 5=30$

$$\begin{array}{r|l} -25 & 6 \\ \underline{24} & 4 \text{ – частка} \\ 1 & \text{– остача} \end{array}$$

4 –це неточна частка, т. к. $4\cdot 6\neq 25$, але 4 · 6 + 1 = 25. Тут 1 – це остача.

Розділити число *a* (ділене) **на число *b*** (дільник) – це означає знайти два числа q (частка) і r (остача), при яких має місце співвідношення:

$$a=b\cdot q+r,\ 0\le r\le b,\ b\neq 0.$$

Якщо $r = 0$ (остача дорівнює нулю), тоді число b – це дільник числа a; число a – кратне числа b.

Дільник числа a – це число, на яке a ділиться без остачі.

Кратне числа a – це число, яке ділиться на a без остачі.

Приклад 1. $10:2=5$; 2 – це дільник числа 10; 10 – це кратне числа 2.
Приклад 2. $12:6=2$; 6 – це дільник числа 12; 12 – це кратне числа 6.

Вправи

37. Прочитайте слова і вирази:

дільник – дільники;
кратне – кратні;
точний, точна, точне;
остача – остачі;
значить, це означає;
знайти, знайдіть;
який, яка, яке, які;
число, яке ділиться;
число, на яке ділиться.

38. Чи вірно, що:

а) 5 – дільник 45;
б) 16 – дільник 8;
в) 27 – кратне 3;
г) 6 – кратне 12?

39. З чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 назвіть:

а) дільники 20;
б) дільники 16;
в) кратні 4;
г) кратні 3.

40. Напишіть всі дільники числа:

а) 12; б) 19; в) 27; г) 36.

41. Напишіть всі двозначні числа, які кратні числу:

а) 8; б) 11.

42. Дайте відповіді на питання:

а) Яке число називають дільником числа a?
б) Яке число називають кратним числа a?
в) Що означає розділити число a на число b?

4.2 Ознаки подільності чисел

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
1	2	3
Подільність чисел	Divisibility of numbers	Divisibilité de nombres
Ознаки (подільності чисел)	Criterions (of divisibility of numbers)	Caractéres (de divisibilité de nombres)
Ділиться	To be divisible	Divisible

1	2	3
Останній, -я, -є, -і	Last	Dernier
Сказати	To say	Dire
Тому що	Because	Parce que; puisque
Всі (усі)	All	Tous

Число ділиться на 2, якщо його остання цифра ділиться на 2.

Наприклад, числа 12, 50, 348, 576, 4 294, 30 590 діляться на 2, тому що їх останні цифри діляться на 2.

Число ділиться на 5, якщо його остання цифра ділиться на 5.

Наприклад, числа 15, 80, 375, 1 005 ділятся на 5, тому що їх останні цифри п’ять і нуль діляться на 5.

Число ділиться на 3, якщо сума його цифр ділиться на 3.

Наприклад, числа 156, 222, 378, 1 032, 15 189 діляться на три. Число 156 ділиться на 3, тому що $1+5+6=12$, а 12 ділиться на 3. Число 15 189 ділиться на 3, тому що сума його цифр $1+5+1+8+9=24$, а 24 ділиться на 3.

Число ділиться на 9, якщо сума його цифр ділиться на 9.

Наприклад, числа 153, 252, 819, 3 150, 5 787 діляться на 9. Число 153 ділиться на 9, тому що сума його цифр $1+5+3=9$, а 9 ділиться на 9. Число 819 ділиться на 9, тому що сума його цифр $8+1+9=18$, а 18 ділиться на 9.

Число ділиться на 4, якщо дві його останні цифри діляться на чотири або дві його останні цифри – нулі.

Наприклад, числа 112, 600, 724, 1 084, 3 084 діляться на 4. Число 724 ділиться на 4, тому що дві його останні цифри це число 24, а число 24 ділиться на 4. Число 600 ділиться на 4, тому що дві його останні цифри – нулі.

Число ділиться на 25, якщо дві його останні цифри діляться на 25 або дві його останні цифри – нулі.

Наприклад, числа 250, 400, 975, 1 050, 5 125 діляться на 25. Число 975 ділиться на 25, тому що дві його останні цифри це число 75, а 75 ділиться на 25. Число 400 ділиться на 25, тому що дві його останні цифри – нулі.

Число ділиться на 8, якщо три його останні цифри діляться на 8 або три його останні цифри – нулі.

Наприклад, числа 1 008, 3 032, 5 120, 9 000 діляться на 8. Число 1 008 ділиться на 8, тому що три його останні цифри – 008, а 8 ділиться на 8. Число 9 000 ділиться на 8, тому що три його останні цифри – нулі.

Число ділиться на 125, якщо три його останні цифри діляться на 125 або три його останні цифри – нулі.

Наприклад, числа 1 375, 10 125, 51 000 діляться на 125. Число 1 375 ділиться на 125, тому що три його останні цифри – 375, а 375 ділиться на 125. Число 51 000 ділиться на 125, тому що три його останні цифри – нулі.

Число ділиться на 6, якщо воно ділиться на 2 і на 3.

Наприклад, числа 126, 348, 750, 1 068, 3 163, 17 844 діляться на 6. Число 750 ділиться на 6, тому що його остання цифра 0 ділиться на 2, а сума його цифр $7+5=12$ ділиться на 3. Число 17 844 ділиться на 6, тому що його остання цифра 4 ділиться на 2, а сума його цифр $1+7+8+4+4=24$ ділиться на 3.

Вправи

43. Прочитайте слова і вирази:

подільність чисел – ознаки подільністі чисел;
останній, остання, останнє, останні;
остання цифра – останні цифри;
поділити, ділиться;
число ділиться; числа діляться;
число ділиться …, якщо;
число ділиться …, тому що;
сказати – скажіть.

44. Скажіть, які числа діляться:

а) на 2; б) на 3; в) на 4; г) на 5; д) на 6; е) на 8; ж) на 9; и) на 25?

45. Назвіть три числа,які:

а) діляться на 2;
б) діляться на 8;
в) діляться на 3;
г) діляться на 9;
д) діляться на 4;
е) діляться на 25;
ж) діляться на 5;
и) діляться на 125.

46. Прочитайте спочатку числа, які діляться на 2, потім числа, які діляться на 6: 378, 3 008, 255, 1 024, 3 120, 741, 5 170, 6 300, 258, 7 875, 555, 12 048.

47. Напишіть всі двозначні числа, які кратні 25.

48. Напишіть декілька тризначних числа, які кратні 125.

49. Дайте відповіді на питання:

а) Які числа діляться на 2?
б) Які числа діляться на 4?
в) Які числа діляться на 3?
г) Які числа діляться на 8?
д) Які числа діляться на 9?
е) Які числа діляться на 25, 125?
ж) Які числа діляться на 5, 10?
и) Які числа діляться на 6?

ЗАНЯТТЯ 5

5.1 Розкладання чисел на прості множники

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
1	2	3
Розкласти	Expand	Décomposer

1	2	3
Просте число	Prime number	Nombre premier
Простий множник	Prime factor	Facteur premier
Само на себе	By itself	Par lui-méme
Складене число	Composite number	Nombre compose
Завжди	Always	Toujours
Записувати – записати	To write down	Ecrire; noter
Спільний	Common	Commun

Прості числа – це натуральні числа, які мають лише два дільники. **Просте число** – це натуральне число, яке ділиться тільки на одиницю і само на себе.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 197, 199,… – це прості числа до двохсот. Наприклад, число 23 – це просте число, тому що 23 ділиться тільки на 1 і на 23. Отже, число 23 має лише два дільники: 1 и 23.

Складене число – це натуральне число, яке має більше двох дільників. Наприклад, число 36 ділиться на 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Отже, число 36 має дев'ять дільників.

1 (одиниця) – не просте і не складене число.

Розкласти число на прості множники – це означає записати його як добуток простих чисел.

Розкладемо число 18 на прості множники:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array} \qquad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Прості числа 2, 3, 3 – це прості множники числа 18.

Розкладемо число 153 на прості множники:

$$\begin{array}{r|l} 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad 153 = 3 \cdot 3 \cdot 17$$

Прості числа 3, 3, 17 – це прості множники числа 153.

Вправи

50. Прочитайте слова і вирази:

розкладання, розкласти, розкладемо;
розкласти на множники;
просте число – прості числа;
ділитися, ділиться;
число ділиться, ділиться само на себе;
складене число – складені числа;

завжди – не завжди;
запис, записувати, записати.

51. Назвіть прості однозначні числа. Назвіть однозначні складені числа.

52. Прочитайте спочатку прості, а потім складені числа:

5, 8, 9, 12, 13, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 29, 31, 36, 42, 45, 47, 49, 51, 62. 77, 83, 90, 91, 95, 97, 101, 109.

53. Назвіть усі прості числа від 11 до 37. Назвіть усі складені числа від 10 до 30.

54. Назвіть дільники чисел: 24, 30, 42. Назвіть найбільший дільник чисел: 24, 30, 42. Назвіть спільні дільники чисел: 24, 30, 42.

55. Розкладіть на прості множники числа:

27, 36, 46, 72, 84, 100, 243, 368, 420, 1 000.

56. Дайте відповідь на питання:

а) Що таке просте число?
б) Наведіть приклади простих чисел.
в) Що таке складене число?
г) Наведіть приклади складених чисел.
д) Число 1 це просте чи складене число?
е) Що означає розкласти число на прості множники?

5.2 Найбільший спільний дільник (НСД)

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Найбільший спільний дільник (НСД)	The highest common factor (HCF)	Le plus grand commun diviseur (PGCD)
Найменше спільне кратне (НСК)	Least common multiple (LCM)	Le plus petit commun multiple (PPCM)
Декілька	Several; some	Quelques; plusieurs
Даний, -а, -е, -і	Given	Donné
Кожен, кожна, -е, -і	Every; each	Chaque
Формула	Formula	Formule

Спільний дільник декількох чисел – це число, на яке всі дані числа діляться без остачі.

Наприклад, число 25 ділиться на 1, 5, 25; число 35 ділиться на 1, 5, 7, 35. Спільні дільники чисел 25 та 35 – це 1 та 5.

Число 42 ділиться на 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.

Число 105 ділиться на 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Числа 42 і 105 мають спільні дільники: 1, 3, 7, 21.

Найбільший спільний дільник (НСД) декількох чисел – це найбільше число серед усіх спільних дільників даних чисел.

Число 5 – найбільший спільний дільник (НСД) чисел 25 та 35. Число 21 – найбільший спільний дільник (НСД) чисел 42 та 105. Ми пишемо так:

$$\text{НСД}(25,35)=5;\ \text{НСД}(42,105)=21.$$

Як знайти найбільший спільний дільник (НСД) чисел?

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Знайдемо НСД чисел 18 та 24. Розкладемо числа 18 та 24 на прості множники:

$$\left.\begin{aligned}18&=2\cdot3\cdot3\\24&=2\cdot2\cdot2\cdot3\end{aligned}\right\}\ \text{2 і 3 – спільні множники.}$$

$\text{НСД}(18,24)=2\cdot3=6$.

Приклад 2. Знайдемо НСД чисел 45, 60, 75. Розкладемо числа 45, 60, 75 на прості множники:

$$\left.\begin{aligned}45&=3\cdot3\cdot5\\60&=2\cdot3\cdot3\cdot5\\75&=3\cdot5\cdot5\end{aligned}\right\}\ \text{3 і 5 – спільні множники. } \text{НСД}(45,60,75)=3\cdot5=15.$$

Отже, **щоб знайти НСД декількох чисел**, треба розкласти ці числа на прості множники та записати добуток із спільних простих множників.

5.3 Найменше спільне кратне (НСК)

Найменше спільне кратне (НСК) декількох чисел – це найменше число, яке ділиться на кожне з цих чисел без остачі.

Наприклад: на число 6 діляться числа: 6, 12, 18, 24, 30 і т. д. На число 8 діляться числа: 8, 16, 24, 32, 40 і т. д. Число 24 – найменше спільне кратне (НСК) чисел 6 та 8. Воно ділиться на 6 та 8. Ми пишемо так: $\text{НСК}(6,8)=24$.

Як знайти найменше спільне кратне чисел?

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Знайдемо НСК чисел 72 та 108. Розкладемо числа 72 та 108 на прості множники:

$$\left.\begin{aligned}72&=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\\108&=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\end{aligned}\right\}\ 2^3,3^3\ \text{– беремо всі множники у найбільшому степені.}$$

$\text{НСК}(72,108)=2^3\cdot3^3=216$.

Приклад 2. Знайдемо НСК чисел 360 і 70.

Застосуємо формулу: $\text{НСК}(a,b)=\dfrac{a\cdot b}{\text{НСД}(a,b)}$.

$\text{НСД}(360,70)=10$, $\text{НСК}(360,70)=\dfrac{360\cdot70}{10}=2\ 520$.

Приклад 3. Знайдемо НСК чисел 20 і 27. Розкладемо числа на прості множники: $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$; $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$. Числа 20 і 27 не мають спільних множників. $НСК(20, 27) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 540$.

Отже, **щоб знайти НСК декількох чисел**, треба розкласти ці числа на прості множники та записати добуток із усіх простих множників, взявши кожний з них у найвищому степені.

НСК чисел, які не мають спільних множників (взаємно простих), є добуток цих чисел.

Вправи

57. Прочитайте слова і вирази:

спільний дільник – спільні дільники;
найбільше – найбільший спільний дільник;
це число – дані числа;
загальний множник – загальні множники;
найменше число, найменше спільне кратне;
декілька чисел – декількох чисел;
кожне число, кожне з чисел;
розглянути, розглянемо (приклади);
використовувати, використовуємо;
формула – формули.

58. Виконайте наступні дії:

а) розкладіть на прості множники числа 48 і 64;
б) назвіть усі дільники числа 48;
в) назвіть усі дільники числа 64;
г) назвіть спільні дільники чисел 48 і 64;
д) назвіть НСД чисел 48 і 64.

59. Назвіть:

а) всі двоцифрові числа, кратні 10;
б) всі двоцифрові числа, кратні 15.
в) НСК чисел 10 і 15.

60. Знайдіть НСД чисел:

а) 18, 36 і 72; б) 35, 28 і 56; в) 156 і 66; г) 112, 152 і 48.

61. Знайдіть НСК чисел:

а) 14 і 49; б) 12,18 і 36; в) 16, 64 і 96; г) 39 і 27.

62. Дайте відповідь на питання:

а) Що таке спільний дільник декількох чисел? Наведіть приклад.
б) Що таке НСД? Наведіть приклад.
в) Як знайти НСД декількох чисел? Наведіть приклад.

г) Що таке НСК? Наведіть приклад.
д) Як знайти НСК декількох чисел? Наведіть приклад.
е) Які числа є взаємно простими? Наведіть приклад.
ж) Як знайти НСК взаємно простих чисел? Наведіть приклад.
и) Чи є числа 5 і 15 взаємно простими?
к) Чи є числа 5 і 13 взаємно простими?

ЗАНЯТТЯ 6

6.1 Звичайні дроби

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Дріб	Fraction	Fraction
Звичайний дріб	Common fraction	Fraction ordinaire
Частина (одиниці)	Part (of unit)	Partie (de l´unité)
Чисельник	Numerator	Numérateur
Знаменник	Denominator	Dénominateur
Правильний дріб	Proper fraction	Fraction réguliére
Мішане число	Mixed number	Nombre mixte
Дробова частина	Fractional part	Partie fractionnaire
Обернути, обертати	To convert	Convertir

Ми вже знаємо цілі числа. 5, 13, 27 – це цілі числа. Розділимо одиницю на рівні частини.

Одна частина одиниці або декілька частин одиниці – це **дріб** (рис. 6.1).

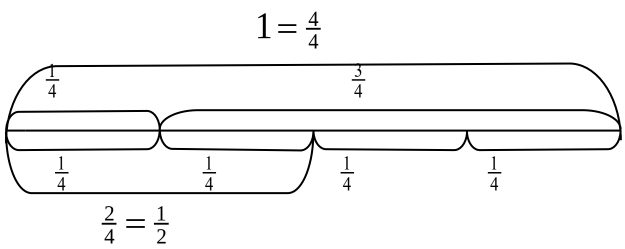


Рисунок 6.1 – Поділ одиниці на частини

$\frac{1}{4}$ – це звичайний дріб.

$\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{4}{4}$ – це теж звичайні дроби.

Звичайний дріб це запис вигляду $\frac{a}{b}$, $(b \neq 0)$, де a – **чисельник**, b – **знаменник**. Наприклад: $\frac{3}{4}$ – це звичайний дріб (читаємо так: «три четвертих»), 3 – чисельник, 4 – знаменник.

Читаємо дроби так:

$\frac{1}{2}$ – одна друг**а**; $\frac{1}{3}$ – одна трет**я**; $\frac{1}{4}$ – одна четверт**а**; $\frac{1}{5}$ – одна п’ят**а**; $\frac{1}{6}$ – одна шост**а**; $\frac{1}{10}$ – одна десят**а**; $\frac{1}{12}$ – одна дванадцят**а**; $\frac{1}{35}$ – одна тридцять п’ят**а**; $\frac{1}{40}$ – одна сороков**а**; $\frac{21}{50}$ – двадцять одна п’ятидесят**а**; $\frac{31}{60}$ – тридцять одна шестидесят**а**; $\frac{71}{100}$ – сімдесят одна сот**а**.

Отже, якщо чисельник дробу $a = 1; 21; 31; 41; ...$ (виключення $a = 11$), тоді знаменник дробу b читаємо із закінченням **-а**.

$\frac{2}{3}$ – дві трет**іх**; $\frac{3}{4}$ – три четверт**их**; $\frac{3}{5}$ – три п’ят**их**; $\frac{7}{8}$ – сім восьм**их**; $\frac{13}{21}$ – тринадцять двадцять перш**их**; $\frac{15}{26}$ – п’ятнадцять двадцять шост**их**; $\frac{17}{40}$ – сімнадцять сороков**их**; $\frac{20}{50}$ – двадцять п’ятидесят**их**; $\frac{33}{74}$ – тридцять три сіемдесят четверт**их**; $\frac{47}{93}$ – сорок сім дев’яносто трет**іх**; $\frac{59}{100}$ – п’ятдесят дев’ять сот**их**; $\frac{3}{200}$ – три двохсот**их**; $\frac{11}{600}$ – одинадцять шестисот**их**; $\frac{233}{1\,000}$ – двісті тридцять три тисячн**их**.

Отже, якщо чисельник дробу $a \neq 1; 21; 31; 41; ...$ (виключення $a \neq 11$), тоді знаменник дробу b читаємо із закінченням **-их**.

Якщо $a < b$ (чисельник менший, від знаменника), то дріб називають **правильним**.

Правильний дріб менше одиниці.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{7}{9}, \frac{3}{10}, \frac{12}{17}$ – це правильні дроби, т. я. $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{2}{3} < 1$ і т. д.

Якщо $a \geq b$ (чисельник більший, від знаменника або чисельник дорівнює знаменнику), то дріб називають **неправильним.**

$\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{11}{10}, \frac{19}{8}, \frac{21}{12}, \frac{51}{20}, \frac{71}{71}$ – це неправильні дроби.

Дріб дорівнює одиниці, якщо чисельник дорівнює знаменнику. Приклад: $\frac{2}{2}=1$; $\frac{7}{7}=1$; $\frac{71}{71}=1$.

Дріб більше ніж 1 (одиниця), якщо чисельник більше від знаменника. Приклад: $\frac{4}{3}>1$; $\frac{19}{18}>1$.

Цей дріб можна записати як мішане число (мішаний дріб): $\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$, $\frac{19}{8}=2\frac{3}{8}$.

Мішане число має цілу частину і дробову частину (дріб). **Мішане число** – це сума цілої та дробової частин: $1\frac{1}{3}=1+\frac{1}{3}$.

Мішані числа читаємо так:

$1\frac{1}{2}$ – одна ціл**а** одна друг**а**; $1\frac{7}{12}$ – одна ціл**а** сім дванадцят**их**;

$1\frac{21}{40}$ – одна ціл**а** двадцять одна сорокова**а**; $2\frac{2}{3}$ – дві ціл**их** дві трет**іх**;

$3\frac{1}{5}$ – три ціл**их** одна п’ят**а**; $6\frac{6}{10}$ – шість ціл**их** шість десят**их**;

$21\frac{5}{17}$ – двадцять одна ціл**а** п’ять сімнадцят**их**; $100\frac{51}{70}$ – сто ціл**их** п’ятдесят одна семидесят**а**.

Як обернути неправильний дріб у мішане число?

Розглянемо приклади:

1) обернемо $\frac{20}{3}$ у мішане число:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} -\underline{18} & 6 \text{ – частка} \\ 2 & \text{– остача} \end{array}$$

$\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$;

2) обернемо $\frac{166}{9}$ у мішане число:

$$\begin{array}{r|l} 166 & 9 \\ \cline{2-2} -\underline{9} & 18 \text{ – частка} \\ -76 & \\ \underline{72} & \\ 4 & \text{– остача} \end{array}$$

$\frac{166}{9}=18\frac{4}{9}$;

3) обернемо $\frac{15}{4}$ у мішане число: $\frac{15}{4}=\frac{12+3}{4}=\frac{12}{4}+\frac{3}{4}=3+\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}$.

Отже, **щоб обернути неправильний дріб у мішане число**, треба чисельник розділити на знаменник, частку записати у цілу частину, остачу записати у чисельник, а знаменник залишити без зміни.

Як обернути мішане число у неправильний дріб?

Розглянемо приклади:

1) обернемо $4\frac{1}{2}$ у неправильний дріб: $4\frac{1}{2}=\frac{4\cdot 2+1}{2}=\frac{9}{2}$;

2) обернемо $10\frac{11}{17}$ у неправильний дріб: $10\frac{11}{17}=\frac{10\cdot 17+11}{11}=\frac{181}{17}$;

3) обернемо $1\frac{16}{43}$ у неправильний дріб: $1\frac{16}{43}=\frac{1\cdot 43+16}{43}=\frac{59}{43}$.

Отже, **щоб обернути мішане число у неправильний дріб**, треба цілу частину помножити на знаменник і додати до чисельника, отриману суму записати у чисельник неправильного дробу, а знаменник залишити без зміни.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Записати число **як** неправильний дріб	Запишемо число **як** неправильний дріб
Записати неправильний дріб **як** мішане число	Запишемо неправильний дріб **як** змішане число
Обернути мішане число **у** неправильний дріб	Обернемо мішане число **у** неправильний дріб
Обернути неправильний дріб **у** мішане число	Обернемо неправильний дріб **у** мішане число

Вправи

63. Прочитайте слова і вирази:

розділити; розділимо; розділимо одиницю;
частина – частини;
дорівнює, рівний, рівні частини;
одна частина, декілька частин;
дріб – дроби;
звичайний дріб – звичайні дроби;
чисельник – чисельники;
знаменник – знаменники;
правильний, правильна, правильне, неправильний;
неправильний дріб – неправильні дроби;
чисельник менший, від знаменника;
чисельник дорівнює знаменнику;
чисельник більше, від знаменника;
мішане число – мішані числа;

обернути, обертати, обернемо;
обернемо мішане число у неправильний дріб;
обернемо неправильний дріб у мішане число;
запис, записувати, записати;
записати мішане число як неправильний дріб;
записати неправильний дріб як мішане число.

64. Прочитайте та напишіть українською мовою дроби:

а) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{38}{56}$, $\frac{3}{86}$, $\frac{181}{205}$, $\frac{19}{137}$;

б) $\frac{12}{7}$, $\frac{21}{5}$, $\frac{127}{15}$, $\frac{121}{21}$, $\frac{321}{18}$, $\frac{120}{43}$, $\frac{137}{96}$, $\frac{180}{40}$.

65. Прочитайте та напишіть українською мовою мішані числа:

$1\frac{5}{17}$, $3\frac{2}{3}$, $15\frac{11}{13}$, $10\frac{12}{19}$, $33\frac{8}{9}$, $221\frac{5}{11}$, $21\frac{5}{17}$, $205\frac{1}{30}$, $161\frac{41}{100}$.

66. Напишить цифрами наступні числа:

сім дванадцятих, чотири цілих три сьомих, дві п'ятих, одна ціла вісімнадцять двадцять третіх, двадцять чотири четвертих, дев'ятнадцять дванадцятих, три цілих одна сота, тринадцять цілих одна восьма, тридцять цілих дев'ять сорокових.

67. Оберніть неправильні дроби на мішані числа:

а) $\frac{12}{7}$, $\frac{21}{5}$, $\frac{127}{15}$, $\frac{321}{18}$, $\frac{120}{43}$, $\frac{137}{96}$, $\frac{180}{40}$;

б) $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{19}{8}$, $\frac{21}{12}$, $\frac{51}{20}$, $\frac{44}{3}$, $\frac{75}{51}$, $\frac{1\,001}{10}$, $\frac{196}{87}$, $\frac{2\,105}{127}$, $\frac{5\,184}{201}$.

68. Оберніть мішані числа на неправильні дроби:

$1\frac{5}{17}$, $3\frac{2}{3}$, $15\frac{11}{13}$, $10\frac{12}{19}$, $33\frac{8}{9}$, $221\frac{5}{11}$, $21\frac{6}{17}$, $205\frac{1}{30}$, $161\frac{41}{100}$.

69. Дайте відповіді на питання:

а) Що таке звичайний дріб?

б) Назвіть яке число записано у чисельнику дроба $\frac{134}{179}$? Назвіть яке число записано у знаменнику дроба $\frac{134}{179}$?

в) Які види звичайних дробів Ви знаєте?
г) Який дріб називається правильним? Наведіть приклади.
д) Який дріб називається неправильним? Наведіть приклади.
е) Що таке мішане число? Наведіть приклади.
ж) Як обернути неправильний дріб у мішане число? Наведіть приклад.

и) Як обернути мішане число в неправильний дріб? Наведіть приклад.

6.2 Основна властивість дробу

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Основний, -а, -е, -і	Basic	Fondamental
Величина	Value	Valeur
Змінитись	To change	Changer
Однакові	Identical	Identiques
Скорочувати, скоротити	To cancel; to simplify	Simplifier

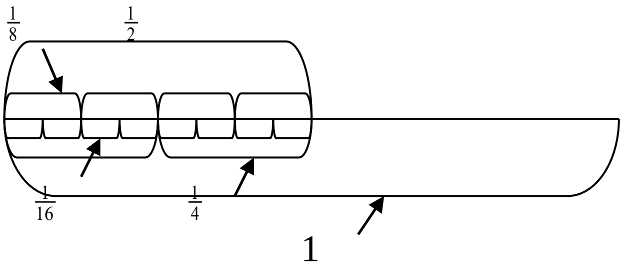


Рисунок 6.2 – Основна властивість дробу

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16};\ \frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{2}{4};\ \frac{2}{4}=\frac{2\cdot 4}{4\cdot 4}=\frac{8}{16};\ \frac{8}{16}=\frac{8:2}{16:2}=\frac{4}{8};\ \frac{4}{8}=\frac{4:4}{8:4}=\frac{1}{2}.$$

Величина дробу не зміниться, якщо чисельник і знаменник помножити або розділити на однакове число, що не дорівнює нулю (рис. 6.2):

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a:m}{b:m}, b\neq 0, m\neq 0.$$

Прості дроби можна скорочувати. **Скоротити дріб** означає розділити чисельник і знаменник на однакове число, яке не дорівнює нулю.

Наприклад: $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ ми скоротили дріб $\frac{8}{16}$ на 8;

$\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$ ми скоротили дріб $\frac{5}{100}$ на 5;

$\frac{34}{51}=\frac{2}{3}$ ми скоротили дріб $\frac{34}{51}$ на 17;

$\frac{42}{105}=\frac{2}{5}$ ми скоротили дріб $\frac{42}{105}$ на 21.

Вправи

70. Прочитайте слова и вирази:

основний, основна, основне, основні;
властивість – властивості; основна властивість;
величина, величина дробу;
змінити, зміниться, не зміниться;
величина не зміниться;
однакові, однакові числа;
дорівнює; дорівнює нулю; число, що не дорівнює нулю;
скоротити, скорочувати;
можна скоротити (дріб);
ми скоротимо, ми скоротили.

71. Скажіть, на скільки можна скоротити дроби:

$$\frac{4}{6},\ \frac{3}{12},\ \frac{14}{21},\ \frac{13}{39},\ \frac{18}{24},\ \frac{26}{52},\ \frac{34}{68},\ \frac{25}{100},\ \frac{336}{474},\ \frac{1\,008}{5\,000}.$$

72. Скоротіть дроби:

а) $\frac{4}{14},\ \frac{6}{16},\ \frac{9}{21},\ \frac{15}{63},\ \frac{36}{84},\ \frac{10}{35},\ \frac{6}{24},\ \frac{12}{30};$

б) $\frac{14}{35},\ \frac{120}{288},\ \frac{37}{333},\ \frac{83}{249},\ \frac{84}{108},\ \frac{264}{312},\ \frac{275}{325};$

в) $\frac{34\cdot 12\cdot 15}{51\cdot 45\cdot 64};\ \frac{28\cdot 21\cdot 16}{64\cdot 49\cdot 22\cdot 15};\ \frac{45\cdot 20\cdot 5\cdot 3}{27\cdot 8\cdot 25}.$

73. Дайте відповідь на питання:

а) Сформулюйте основну властивість дробу.
б) Що означає скоротити дріб? Наведіть приклади.

ЗАНЯТТЯ 7

7.1 Дії зі звичайними дробами

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Додавати, додати	To add	Additioner
Додатковий, -а, -е, -і	Complementary	Complémentaire
Різний, -а, -е, -і	Different	Différents
Віднімати, відняти	To subtract	Soustraire
НСЗ (найменший спільний знаменник)	LCD (lowest common denominator)	PPD (plus petit dénominateur commun)
Додатковий множник	Additional factor	Facteur supplémentaire
Щоб …, потрібно …	In order to (…)	Pour (…)

Додавання (віднімання)

Якщо дроби мають однакові знаменники, потрібно додати (відняти) їх чисельники та написати їх спільний знаменник:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$$

Розглянемо приклади:

1) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$;

2) $\frac{4}{9} + \frac{8}{9} = \frac{4+8}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$;

3) $\frac{9}{10} - \frac{3}{10} = \frac{9-3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Якщо дроби мають різні знаменники, потрібно звести їх до НСЗ і додати (відняти):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\text{НСК}\left(b,d\right) : b \cdot a + \text{НСК}\left(b,d\right) : d \cdot c}{\text{НСК}\left(b,d\right)}.$$

Щоб звести дроби до НСЗ, треба чисельник і знаменник дробу помножити на додатковий множник.

Найменший спільний знаменник (НСЗ) – це НСК знаменників дробів.

Додатковий множник – це частка від ділення НСЗ на знаменник дробу.

Розглянемо приклади:

1) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{10+9}{15} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{5}$. 15 – це найменший спільний знаменник (НСЗ), 5 – це додатковий множник, 3 – це також додатковий множник;

2) $\frac{7}{12} - \frac{5}{18} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{21}{36} - \frac{10}{36} = \frac{21-10}{36} = \frac{11}{36}$.

Щоб додати (відняти) мішані числа, потрібно додати (відняти) їх цілі та дробові частини.

ЗАПАМ’ЯТАЙТЕ!

ЩОБ + інфінітив …, ПОТРІБНО + інфінітив … . *Щоб додати* мішані числа, *потрібно додати* їх цілі частини та дробові.

Розглянемо приклади:

1) $1\frac{2}{5} + 3\frac{1}{5} = 4\frac{2+1}{5} = 4\frac{3}{5}$;

2) $7\frac{1}{6} + 2\frac{8}{9} = 7\frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 3} + 2\frac{8 \cdot 2}{9 \cdot 2} = 7\frac{3}{18} + 2\frac{16}{18} = 9\frac{3+16}{18} = 9\frac{19}{18} = 10\frac{1}{18}$;

3) $7\frac{5}{7} - 2\frac{1}{2} = 5\frac{10-7}{14} = 5\frac{3}{14}$;

4) $4-1\frac{2}{3}=3\frac{3}{3}-1\frac{2}{3}=2\frac{3-2}{3}=2\frac{1}{3}$;

5) $8\frac{1}{4}-5\frac{7}{12}=8\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}-5\frac{7}{12}=3\frac{3-7}{12}=2\frac{12+3-7}{12}=2\frac{8}{12}=2\frac{2}{3}$.

Множення

Щоб помножити звичайні дроби, потрібно чисельник першого дробу помножити на чисельник другого дробу, знаменник першого дробу помножити на знаменник другого дробу і, якщо можна, скоротити. Щоб помножити мішане число (або ціле число) на дріб, потрібно записати мішане число (або ціле число) як неправильний дріб і помножити ці дроби.

Розглянемо приклади:

1) $\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{15}=\frac{3\cdot 14}{7\cdot 15}=\frac{2}{5}$;

2) $4\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4\cdot 1}{1\cdot 2}=2$;

3) $2\frac{2}{5}\cdot 3\frac{3}{4}=\frac{12}{5}\cdot\frac{15}{4}=\frac{12\cdot 15}{5\cdot 4}=9$.

Ділення

Щоб розділити звичайний дріб на звичайний дріб, потрібно чисельник першого дробу помножити на знаменник другого дробу та результат записати у чисельник; знаменник першого дробу помножити на чисельник другого дробу і цей результат записати до знаменника, потім, якщо можна, скоротити.

Щоб розділити мішані числа (або ціле число на дріб), потрібно записати мішані числа (або ціле число) як неправильні дроби та розділити.

Розглянемо приклади:

1) $\frac{3}{5}:\frac{9}{10}=\frac{3\cdot 10}{5\cdot 9}=\frac{2}{3}$;

2) $\frac{3}{8}:5=\frac{3}{8}:\frac{5}{1}=\frac{3\cdot 1}{8\cdot 5}=\frac{3}{40}$;

3) $\frac{12}{35}:\frac{8}{15}=\frac{12\cdot 15}{35\cdot 8}=\frac{9}{14}$;

4) $7\frac{1}{3}:1\frac{2}{9}=\frac{22}{3}:\frac{11}{9}=\frac{22\cdot 9}{3\cdot 11}=6$.

Вправи

74. Прочитайте слова і вирази:

спільний знаменник, найменший спільний знаменник (НСЗ);
додатковий множник – додаткові множники;
однаковий, однакові знаменники;
різний, різні знаменники;
додавання, додати, ми додамо;
віднімання, відняти, ми віднімемо;
записати ціле число як неправильний дріб;
записати мішане число як неправильний дріб.

75. Виконайте додавання та віднімання:

а) $25-8\frac{3}{4}-\left(13\frac{5}{12}+2\frac{11}{18}\right)$; б) $\left(65\frac{2}{3}+3\frac{1}{8}\right)-\left(13-10\frac{5}{9}\right)$;

в) $\left(20\frac{4}{7}-19\frac{3}{4}\right)+\left(17-16\frac{4}{7}\right)$; г) $11\frac{7}{36}+3\frac{3}{4}-\left(14-8\frac{4}{5}\right)$;

д) $\left(3\frac{1}{2}-2\frac{3}{5}\right)+\left(70-68\frac{19}{24}\right)$; е) $\left(12-4\frac{1}{2}\right)+\left(9\frac{1}{6}-8\frac{1}{3}\right)$;

ж) $\left(20\frac{1}{2}-1\frac{1}{8}\right)-\left(19\frac{1}{3}-\frac{7}{24}\right)$; и) $18\frac{1}{4}+17\frac{5}{6}+\left(24-23\frac{13}{24}\right)$.

76. Виконайте дії:

а) $6\frac{1}{4}\cdot1\frac{2}{5}\cdot5\frac{3}{4}:\frac{9}{31}:\frac{5}{36}$; б) $\frac{3}{4}\cdot1\frac{1}{7}:\frac{2}{15}\cdot12\frac{1}{4}:7\frac{1}{2}$;

в) $4\frac{1}{12}\cdot8\frac{6}{7}\cdot7\frac{2}{3}:\frac{7}{36}\cdot7$; г) $\frac{14}{99}\cdot1\frac{29}{55}:\frac{4}{15}\cdot\frac{11}{20}:5\frac{1}{2}$;

д) $5\frac{5}{7}:2\frac{2}{5}\cdot5\frac{1}{4}:1\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}$; е) $15:\frac{5}{18}:3\frac{3}{8}:\frac{4}{27}\cdot4\frac{1}{5}$.

77. Виконайте дії:

а) $2:\frac{1}{4}+\left[\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}\right):3\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right]:8\frac{8}{9}$; б) $5\frac{1}{6}:31+\left(3\frac{3}{4}+2\frac{1}{6}\right):2\frac{3}{5}-\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$;

в) $4:2\frac{1}{2}+\left[1\frac{1}{10}+7:\left(3\frac{1}{12}-1\frac{5}{8}\right)\right]:\frac{59}{60}$; г) $2\frac{2}{3}:2+\left(14\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\right):22\frac{3}{5}:3\frac{1}{3}$;

д) $\left(4\frac{5}{12}-3\frac{13}{24}\right):1\frac{3}{4}+\left(3\frac{1}{18}-2\frac{7}{12}\right):\frac{17}{27}$; е) $2\frac{2}{25}\cdot2+5\frac{7}{25}\cdot3$;

ж) $1\frac{5}{28}\cdot\left[7\frac{5}{7}:3\frac{3}{5}-\left(\frac{53}{56}-\frac{29}{35}\right):\frac{33}{40}\right]$; и) $\left(7\frac{5}{7}:3\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right):1\frac{1}{3}$;

к) $10\frac{2}{21}+\left(7\frac{1}{2}\cdot2\frac{2}{3}-12\frac{1}{4}:\frac{7}{9}\right):6+3\frac{1}{8}$; л) $3\frac{1}{4}\cdot\left(14\frac{4}{5}+\frac{4}{15}\right)-47:5\frac{9}{10}$;

м) $\left(\frac{40}{63}-\frac{8}{21}\right):2+1\frac{9}{16}:\frac{5}{8}+2\frac{3}{8}:\frac{3}{4}$; н) $5\frac{1}{3}:6\frac{2}{3}+\left(12:3\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}+8\frac{1}{5}$;

п) $\left(25\frac{11}{37}+17\frac{9}{37}-1\frac{18}{37}\right)\cdot9$; р) $\left(\frac{2}{15}+1\frac{7}{12}\right)\cdot\frac{30}{103}-2:2\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{32}$.

78. Дайте відповіді на питання:

а) Як додати (відняти) дроби з однаковими знаменниками? Напишіть формулу.

б) Як додати (відняти) дроби з різними знаменниками? Напишіть формулу.

в) Як знайти НСЗ декількох дробів?

г) Як додати (відняти) мішані числа?

д) Як помножити два звичайних дроба? Напишіть формулу.

е) Як помножити два мішаних числа?

ж) Як розділити два звичайних дроба? Напишіть формулу.

з) Як розділити два мішаних числа?

ЗАНЯТТЯ 8

8.1 Десяткові дроби

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Десятковий дріб	Decimal fraction	Fraction décimale
Десятковий знак	Decimal place	Signe décimal
Праворуч	To the right	Á droit
Ліворуч	To the left	Á gauche
Кома	Decimal point; comma	Virgule
Переносити, перенести	To transport	Déplacer
Стільки …, скільки	As many …, as	Autant de …, que

Звичайні дроби, знаменники яких дорівнюють 10, 100, 1000, … і т.д. виокремили в особливий вид і назвали **десятковими дробами**. Десятковий дріб складається з цілої та дробової частин, які розділені комою. Цілу частину записують ліворуч від коми, дробову – праворуч. Кількість цифр після коми дорівнює кількості нулів, що стоять у знаменнику вихідного звичайного дробу.

$\frac{1}{10}=0{,}1$ – нуль цілих одна десята;

$\frac{1}{100}=0{,}01$ – нуль цілих одна сота;

$\frac{1}{1\,000}=0{,}001$ – нуль цілих одна тисячна;

$\frac{1}{10\,000}=0{,}0\,001$ – нуль цілих одна десятитисячна;

$\frac{1}{100\,000}=0{,}00\,001$ – нуль цілих одна стотисячна;

$\dfrac{1}{1\,000\,000}=0{,}000\,001$ – нуль цілих одна мільйонна і т. д.

Наприклад: $\dfrac{3}{10}=0{,}3;\ \dfrac{7}{100}=0{,}07;\ \dfrac{67}{1\,000}=0{,}067;\ 5\dfrac{312}{10\,000}=5{,}0\,312$ – це десяткові дроби.

Десяткові дроби читаються так:

0,1 – нуль ціл**их** одна десят**а**; 0,3 – нуль ціл**их** три десят**их**; 0,7 – нуль ціл**их** сім десят**их**; 0,51 – нуль ціл**их** п’ятдесят одна сот**а**; 0,95 – нуль ціл**их** дев’яносто п’ять сот**их**; 0,011 – нуль ціл**их** одинадцять тисячн**их**; 0,125 – нуль ціл**их** сто двадцять п’ять тисячн**их**; 0,0001 – нуль ціл**их** одна десятитисячн**а**; 1,12 – одна ціл**а** дванадцять сот**их**; 2,3 – дві цілих три десят**их**; 21,31 – двадцять одна ціл**а** тридцять одна сот**а**; 100,091 – сто цілих дев’яносто одна тисячн**а**; 385,456 – триста вісімдесят п’ять цілих чотириста п’ятдесят шість тисячн**их**.

Десятковий дріб має цілу частину та дробову частину. Десятковий дріб – це сума цілої частини та дробової частини. Наприклад: 3,81 = 3+0,81. Десяті, соті, тисячні і т.д. – це десяткові знаки. Величина дробу не зміниться, якщо праворуч (або ліворуч) написати один або декілька нулів. Наприклад: 2,5 = 2,50 = 2,500 = 2,5 000 = …; 2,5 = 02,5 = 002,5 = 0 002,5 = … .

8.2 Дії з десятковими дробами

Додавання та віднімання

Щоб додати (або відняти) десяткові дроби, потрібно написати рівну кількість десяткових знаків у дробів і додати (або відняти) як цілі числа. Кома має бути під комою.

Розглянемо приклади:

а) $8{,}2+3{,}6=11{,}8$

або
$$\begin{array}{r} +\ 8{,}2 \\ 3{,}6 \\ \hline 11{,}8 \end{array}$$

б) $7{,}14+1{,}4=7{,}14+1{,}40=8{,}54$

або
$$\begin{array}{r} +\ 7{,}14 \\ 1{,}40 \\ \hline 8{,}54 \end{array}$$

в) $4{,}5-3{,}2=1{,}3$

або
$$\begin{array}{r} -\ 4{,}5 \\ 3{,}2 \\ \hline 1{,}3 \end{array}$$

г) $5{,}001-3{,}2=5{,}001-3{,}200=1{,}801$

або
$$\begin{array}{r} -\ 5{,}001 \\ 3{,}200 \\ \hline 1{,}801 \end{array}$$

Множення

Щоб помножити десятковий дріб на десятковий дріб (або на ціле число), потрібно помножити їх як цілі числа та у добутку відокремити праворуч комою стільки десяткових знаків, скільки десяткових знаків мають співмножники разом.

Розглянемо приклади:

а) $3{,}4 \cdot 2 = 6{,}8$

або $$\begin{array}{r} \times\ 3{,}4 \\ \underline{\quad 2} \\ 6{,}8 \end{array}$$

б) $32{,}35 \cdot 0{,}2 = 6{,}47$

або $$\begin{array}{r} \times\ 32{,}35 \\ \underline{\quad 0{,}2} \\ 6{,}470 \end{array}$$

Ділення

Розглянемо приклади:

а) $45:1{,}25 = 4500:125 = 36$;

або $$\begin{array}{rl} -4500 & \big|\,\underline{125} \\ \underline{375} & \big|\,36 \\ -750 & \\ \underline{750} & \\ 0 & \end{array}$$

б) $28{,}14:21 = 1{,}34$;

або $$\begin{array}{rl} -28{,}14 & \big|\,\underline{21} \\ \underline{21} & \big|\,1{,}34 \\ -71 & \\ \underline{63} & \\ -84 & \\ \underline{84} & \\ 0 & \end{array}$$

в) $11{,}726:4{,}51 = 1172{,}6:451 = 2{,}6$;

або $$\begin{array}{rl} -1\,172{,}6 & \big|\,\underline{451} \\ \underline{902} & \big|\,2{,}6 \\ -2706 & \\ \underline{2706} & \\ 0 & \end{array}$$

Щоб розділити десятковий дріб (або ціле число) на десятковий дріб, потрібно в діленому і в дільнику перенести кому праворуч на стільки цифр, скільки десяткових знаків у дільнику, потім виконати ділення на ціле число і написати кому після ділення цілої частини десяткового дробу.

Вправи

79. Прочитайте слова і вирази:

десятковий дріб – десяткові дроби;
ціла частина; дробова частина;
десятковий знак – десяткові знаки;
праворуч; ліворуч (де?); праворуч; ліворуч (куди?);
кома; кома під комою;
помножити десятковий дріб на ціле число;
відокремити – відокремлювати; стільки…, скільки …;
стільки цифр, скільки десяткових знаків;
переносити – перенести;
перенести кому (куди?) праворуч;
написати (де?) праворуч.

80. Прочитайте та напишіть українською мовою десяткові дроби:

0,3; 0,27; 0,31; 1,25; 3,017; 5,1; 12,032; 17,001; 25,01; 0,375; 4,12; 0,124.

81. Виконайте дії:

а) $\dfrac{1{,}75\cdot 0{,}28+18{,}3:61+14{,}21}{4{,}75-(4{,}75-1{,}5:0{,}5)}$; б) $\dfrac{20-(0{,}75+14{,}3-2{,}45):50}{16{,}5:55+12{,}5\cdot 4-30{,}3}$;

в) $\dfrac{(0{,}45\cdot 10-17{,}5:5):4+0{,}45\cdot 12}{(20{,}5:0{,}25+1:0{,}125):2{,}25}$; г) $\dfrac{0{,}25\cdot 4{,}28:0{,}535\cdot 0{,}4+3{,}2}{38-15\cdot 0{,}6:0{,}25}$.

82. Дайте відповідь на питання:

а) Які дроби називаються десятковими? Наведіть приклади.
б) Як додати (відняти) десяткові дроби? Наведіть приклади.
в) Як помножити десяткові дроби? Наведіть приклади.
г) Як поділити десяткові дроби? Наведіть приклади.

8.3 Обернення десяткового дроба у звичайний дріб

Розглянемо приклади:

$$0{,}3=\frac{3}{10};\ 0{,}15=\frac{15}{100}=\frac{3}{20};\ 1{,}19=1\frac{19}{100};\ 3{,}075=\frac{3\,075}{1\,000}=3\frac{75}{1\,000}=3\frac{3}{40}.$$

Щоб обернути десятковий дріб у звичайний, потрібно цифри, які стоять ліворуч від коми, записати у цілу частину мішаного числа, а цифри, які стоять праворуч від коми, записати у чисельник звичайного дробу, а в знаменнику записати одиницю і нулі, кількість яких дорівнює кількості цифр, що стоять праворуч від коми, і, якщо можна, скоротити.

Вправи

83. Прочитайте слова та вирази:

обернути – обертати; оберніть;
обернути десятковий дріб у звичайний;
ми обернемо десятковий дріб у звичайний;
записати десятковий дріб як звичайний.

84. Оберніть десяткові дроби у звичайні:

0,3; 0,21; 0,35; 0,012; 0,705; 0,05; 0,75; 0,375; 0,025; 0,0 032.

85. Оберніть десяткові дроби на мішані числа:

12,35; 18,1; 1,005; 3,125; 71,21; 5,5; 11,008; 2,015; 50,3.

86. Виконайте дії:

а) $0{,}1:\dfrac{1}{20}+\left(2\dfrac{11}{24}:0{,}75-1\dfrac{11}{30}\right)\cdot\dfrac{15}{43}$; б) $4\dfrac{1}{3}:13+20:1{,}25+0{,}125\cdot 40$;

в) $\dfrac{\left(\frac{1}{36}+\frac{27}{400}\cdot 3\frac{1}{3}\right)\cdot 5\frac{1}{7}-1,75}{6\frac{3}{25}-29,136:4\frac{4}{5}}+18\frac{3}{4}\cdot 0,4;$ г) $\dfrac{2\frac{3}{4}:1,1+3\frac{1}{3}}{2,5-0,4\cdot 3\frac{1}{3}}:\frac{5}{7};$

87. Дайте відповідь на питання:

Як обернути десятковий дріб у звичайний (у мішане число)?

8.4 Обернення звичайного дроба у десятковий дріб

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Скінченний десятковий дріб	Limited decimal fraction	Fraction decimal limité
Нескінченний десятковий дріб	Infinite decimal fraction	Fraction decimal illimite
Період (дроба)	Period (of fraction)	Période (de fraction)

Розглянемо приклади:

а) $\frac{1}{2}=1:2=0,5;$

або
$$\begin{array}{rl}
-1 & \big|\,2 \\
\underline{0} & \big|\,0,5 \\
-10 & \\
\underline{10} & \\
0 &
\end{array}$$

б) $\frac{3}{4}=3:4=0,75;$

або
$$\begin{array}{rl}
-3 & \big|\,4 \\
\underline{0} & \big|\,0,75 \\
-30 & \\
\underline{28} & \\
-20 & \\
\underline{20} & \\
0 &
\end{array}$$

в) $\frac{1}{6}=1:6=0,1666...=0,1(6);$

або
$$\begin{array}{rl}
1 & \big|\,6 \\
-10 & \big|\,0,1666\ldots \\
\underline{6} & \\
-40 & \\
\underline{36} & \\
-40 & \\
\underline{36} & \\
4 & \text{– остача}
\end{array}$$

г) $\frac{5}{9}=5:9=0,555...=0,(5);$

або
$$\begin{array}{rl}
5 & \big|\,9 \\
-50 & \big|\,0,555\ldots \\
\underline{45} & \\
-50 & \\
\underline{45} & \\
-50 & \\
\underline{45} & \\
5 & \text{– остача}
\end{array}$$

У випадках а) і б) дроби 0,5; 0,75 – **скінченні десяткові** дроби.

У випадку в) дріб 0,1 666…= 0,1(6) – **нескінченний періодичний** дріб, 6 – період дробу.

У випадку г) дріб 0,555…= 0,(5) – також **нескінченний періодичний** дріб, 5 – період дробу.

Періодичні дроби читаємо так:

0,1(6) – нуль цілих, одна десята та шість *у періоді;*
1,(5) – одна ціла, п'ять *у періоді;*
0,(54) – нуль цілих, п'ятдесят чотири *у періоді;*
2,05(23) – дві цілих, п'ять сотих та двадцять три *у періоді.*

Щоб обернути звичайний дріб у десятковий, потрібно чисельник розділити на знаменник.

Якщо знаменник містить лише множники 2 і 5, то вийде скінченний десятковий дріб.

Якщо знаменник містить інші множники (не тільки 2 і 5), вийде нескінченний періодичний дріб.

Вправи

88. Прочитайте слова и вирази:

обернути – обертати;
обернути звичайний дріб у десятковий;
скінченний десятковий дріб – скінченні десяткові дроби;
нескінченний, нескінченна, нескінченне, нескінченні;
нескінченний десятковий дріб – нескінченні десяткові дроби;
період; періодичний дріб;
нескінченний періодичний дріб – нескінченні періодичні дроби;
містити; містить;
знаменник містить множники.

89. Прочитайте та напишіть українською мовою періодичні дроби:

0,(7); 0,(6); 0,(27); 0,8(3); 0,41(6); 1,(063); 9,33(83); 3,2(64); 2,22(21).

90. Оберніть звичайні дроби у десяткові. Результати напишіть українською мовою:

$\frac{2}{5};\ \frac{1}{8};\ \frac{4}{25};\ 1\frac{10}{11};\ 3\frac{8}{9};\ \frac{5}{7};\ 1\frac{2}{3};\ 4\frac{9}{16}.$

91. Виконайте дії:

а) $33\frac{3}{4}\cdot 1{,}1+11{,}571:5{,}7+0{,}845;$

б) $512{,}9:2\frac{1}{2}+\left(108{,}4\cdot 6\frac{3}{5}-255{,}84:78\right):1{,}25+25{,}112;$

в) $24{,}57:3{,}5+\left(3{,}35-\frac{5}{8}\right)+225:12{,}5+2\frac{1}{4}:0{,}2\,.$

92. Розв'яжіть приклади:

а) $(17\frac{11}{25}+7{,}13):3{,}5+(4\frac{5}{7}+5{,}8)\cdot\frac{7}{46};$

б) $\left[\left(20,2-76,84:8\frac{1}{2}\right)+4,72-8,4:1\frac{7}{18}\right]:7,9$;

в) $\left[10\frac{13}{20}-54,74:6\frac{4}{5}+\left(8\frac{2}{15}-3\frac{7}{15}\cdot 2\frac{1}{13}\right)\right]\cdot 3,75$;

г) $\left(12,06+4,5\cdot 3\frac{2}{3}\right):\left(11,15-3,75\cdot 2\frac{3}{5}\right)+142,1:3\frac{1}{2}$;

д) $\dfrac{\left(\frac{13}{84}\cdot 1,4-2,5\cdot\frac{7}{180}\right):2\frac{7}{18}+4\frac{1}{2}\cdot 0,1}{70,5-528:7\frac{1}{2}}$;

е) $\dfrac{2\frac{3}{4}:1,1+3\frac{1}{3}}{2,5-0,4\cdot 3\frac{1}{3}}:\frac{5}{7}-\dfrac{\left(2\frac{1}{6}+4,5\right)\cdot 0,375}{2,75-1\frac{1}{2}}$;

ж) $10\frac{1}{3}-\dfrac{5\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{14}+15,03:1\frac{1}{2}-5,02+7,8:2\frac{2}{5}}{0,08\cdot 4\frac{1}{4}+2\frac{2}{7}\cdot 2,8-4\frac{6}{25}}$;

и) $\left(\dfrac{3\frac{1}{3}+2,5}{2,5-1\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{4,6-2\frac{1}{3}}{4,6+2\frac{1}{3}}\cdot 5,2\right):\left(\dfrac{0,05}{\frac{1}{7}-0,125}+5,7\right)$;

к) $\dfrac{12-3\frac{3}{7}\cdot 2,8}{3\frac{11}{20}+101,22:8\frac{2}{5}}+\dfrac{22-159,9:7\frac{4}{5}}{2,13+2,05\cdot 1\frac{2}{5}}$;

л) $\left\{\left[18\frac{1}{6}-\left(3,06:7\frac{1}{2}+3\frac{2}{5}\cdot 0,38\right)\right]:\left(19-2,375\cdot 5\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\right\}\cdot 0,625$;

м) $17,81:0,137+\left[\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0,3}{\left(3\frac{1}{20}-2,65\right):4:\frac{1}{5}}-\dfrac{\left(0,3-\frac{3}{50}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1,88+2\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right]:4\frac{19}{28}$.

93. Дайте відповіді на питання:

а) Як обернути звичайний дріб у десятковий?
б) Як обернути десятковий дріб у звичайний?
в) 0,8 – це скінченний чи нескінченний періодичний десятковий дріб?

ЗАНЯТТЯ 9

9.1 Відношення

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Відношення	Ratio	Rapport
Частина від числа	Part of a number	Partie d´un nombre
Становить, становити	To constitute	Constituer

Відношення – це частка від ділення числа A на число B, яке не дорівнює нулю, тобто $\frac{A}{B} = k; B \neq 0.$

Читаємо так:

$\frac{A}{B} = k$ – відношення числа *A* до числа *B* дорівнює k;

$\frac{18}{2} = 9$ – відношення числа вісімнадцять до числа два дорівнює дев'яти.

Відношення показує, у скільки разів одне число більше, від іншого, або яку частину одне число становить від іншого числа.

Щоб знайти відношення двох чисел, потрібно розділити одне число на інше.

Наприклад:

1) у скільки разів число 10 більше від числа 2?

$\frac{10}{2} = 5.$ Число 10 більше від числа 2 у 5 разів;

2) яку частину становить число 2 від 10?

$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$ Число 2 складає одну п'яту частину від числа 10.

3) у скільки разів число 200 більше від числа 4?

$\frac{200}{4} = 50.$ Число 200 більше від числа 4 у 50 разів;

4) яку частину становить число 4 від числа 200?

$\frac{4}{200} = \frac{1}{50}.$ Число 4 становить одну п'ятидесяту частину від числа 200.

Вправи

94. Прочитайте слова і вирази:

відношення; знайти відношення;
частка; частка від ділення чисел;
у скільки разів одне число більше від іншого числа?
яку частину одне число становить від іншого?

95. Дайте відповіді на питання:

а) У скільки разів 16 більше від 4; 21 більше від 7; 36 більше від 9?
б) Яку частину становить число 18 від 36?
в) Яку частину становить число 7 від 35?

96. Прочитайте відношення: $\frac{9}{3} = 3$; $\frac{8}{2} = 4$.

97. Дайте відповіді на питання:

а) Що таке відношення?
б) Як знайти відношення двох чисел?
в) Що показує відношення двох чисел?

9.2 Пропорції

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Пропорція	Proportion	Proportion
Рівність	Equality	Égalité
Відноситься (число *a* відноситься до числа *b*)	Relate (number a refers to number b)	Se rapporter á (nombre a fait référence au nombre b)
Член	Term	Terme
Крайній член пропорції	Extreme term of a proportion	Terme extréme d´une proportion
Середній член пропорції	Mean term of a proportion	Terme moyen d´une proportion
Ліва частина пропорції	Left part of a proportion	Partie gauche d´une proportion
Права частина пропорції	Right part of a proportion	Partie droite d´une proportion
Невідомий член пропорції	Unknown of a proportion	Terme inconnu d´une proportion
Відомий член пропорції	Known of a proportion	Terme connu d´une proportion

Пропорція – це рівність двох відношень:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};\ a:b = c:d;\ b \neq 0,\ d \neq 0 .$$

Читаємо пропорцію так: «*a* відноситься до *b*, як *c* відноситься до *d*», де *a* і *d* – це крайні члени пропорції; *b* і *c* – це середні члени пропорції.

Приклад: $\frac{8}{2}=\frac{12}{3}$ – вісім відноситься до двох, як дванадцять відноситься до трьох; $\frac{6}{24}=\frac{8}{32}$ – шість відноситься до двадцяти чотирьох, як вісім відноситься до тридцяти двох.

Пропорція має дві частини: ліву частину та праву частину.

$$\underbrace{a:b}_{\text{ліва}}=\underbrace{c:d}_{\text{права}}$$

Помножимо ліву та праву частини пропорції на добуток $b\cdot d$:

$$\frac{a}{b}\cdot b\cdot d=\frac{c}{d}\cdot b\cdot d.$$

Отримаємо: $a\cdot d=c\cdot b;\ b\neq 0,\ d\neq 0.$

Основна властивість пропорції

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=c\cdot b;\ b\neq 0,\ d\neq 0.$$

Добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх членів пропорції.

Приклади:

1) $8:2=12:3$, 8 і 2 – це крайні члени пропорції, 2 та 12 – середні члени пропорції. $8\cdot 3=2\cdot 12$, $24=24$.

2) $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}$, 3 і 15 – крайні члени пропорції, 5 та 9 – середні члени пропорції. $3\cdot 15=5\cdot 9$, $45=45$.

Як знайти невідомий член пропорції?

Розглянемо пропорцію: $x:b=c:d$, x – невідомий крайній член пропорції, d – відомий крайній член пропорції, b та c – відомі середні члени пропорції: $x=\frac{b\cdot c}{d}$.

Щоб знайти невідомий крайній член пропорції, потрібно добуток середніх членів пропорції розділити на відомий крайній член.

Приклади:

1) $x:6=15:5;\ x=\frac{6\cdot 15}{5}=18;\ x=18;$

2) $2:3=10:x;\ x=\frac{3\cdot 10}{2}=15;\ x=1;$

3) $\frac{7}{11}=\frac{21}{x};\ x=\frac{11\cdot 21}{7}=33;\ x=33.$

Розглянемо пропорцію: $a:x=c:d$, x – невідомий середній член пропорції, c – відомий середній член пропорції, a та d – відомі крайні члени пропорції:

$$x=\frac{a\cdot d}{c}.$$

Щоб знайти невідомий середній член пропорції, потрібно добуток крайніх членів пропорції розділити на відомий середній член.

Приклади:

1) $10:x=5:3;\ x=\frac{10\cdot 3}{5}=6;\ x=6$;   2) $4:8=x:18;\ x=\frac{4\cdot 18}{8}=9;\ x=9$;

3) $\frac{3}{x}=\frac{9}{15};\ x=\frac{3\cdot 15}{9}=5;\ x=5$.

Вправи

98. Прочитайте слова і вирази:

пропорція – пропорції;
рівність; правильна рівність; рівність двох відношень;
член пропорції – члени пропорції;
середній член пропорції – середні члени пропорції;
крайній член пропорції – крайні члени пропорції;
частина – частини;
ліва частина; права частина;
властивість – властивості; основна властивість пропорції;
невідомий, невідома, невідоме, невідомі;
відомий, відома, відоме, відомі;
невідомий член пропорції – відомий член пропорції;
невідома величина – відома величина;
невідоме число – відоме число;
невідомі члени – відомі члени.

99. Прочитайте пропорції:

а) $3:5=6:10$;
б) $18:9=10:5$;
в) $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$;
г) $\frac{6}{11}=\frac{18}{33}$;
д) $2{,}4:0{,}6=5{,}6:1{,}4$;
е) $\frac{4{,}2}{6}=\frac{2{,}1}{3}$.

100. Знайдіть невідомий член пропорції:

а) $x:9=7:14$;
б) $4{,}2:0{,}7=24:x$;
в) $75:9=x:9$;
г) $x:0{,}12=0{,}3:18$;
д) $21:x=36:12$;
е) $3\frac{1}{2}:0{,}4=x:1\frac{1}{7}$;
ж) $24:x=18:5$;
и) $\frac{5}{6}:x=\frac{1}{3}:\frac{2}{9}$;
к) $\frac{x}{15}=\frac{8}{24}$;
л) $\frac{1{,}2}{0{,}6}=\frac{4{,}6}{x}$;

м) $\frac{16}{17}=\frac{48}{x}$;

н) $3{,}5:\frac{1}{2}=x:\frac{5}{7}$;

п) $x:\frac{1}{2}=\frac{3}{4}:\frac{7}{8}$;

р) $\frac{3}{5}:x=1\frac{4}{5}:2\frac{1}{2}$.

101. Знайдіть x у кожній пропорції:

а) $\frac{1}{6}:2\frac{1}{3}=3\frac{1}{4}x:1{,}3$;

б) $4{,}5:3x=4:28$;

в) $1\frac{1}{2}x:\frac{3}{4}=2\frac{1}{2}:0{,}12$;

г) $1{,}25:0{,}4=1{,}35:0{,}5x$;

д) $\dfrac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0{,}8}=\dfrac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{x}$;

е) $\dfrac{0{,}125x}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}=\dfrac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}$.

102. Дайте відповіді на питання:

а) Що таке пропорція? Наведіть приклади.
б) Як називаються члени пропорції? Наведіть приклади.
в) Сформулюйте основну властивість пропорції.
г) Як знайти невідомий крайній член пропорції? Наведіть приклади.

д) Визначте крайні члени пропорції: $1{,}9:x=0{,}4:15$.

е) Як знайти невідомий середній член пропорції? Наведіть приклади.
ж) Визначте середні члени пропорції: $0{,}005:x=2{,}4:9$.

9.3 Відсотки

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Відсоток (процент)	Percent	Pour cent
Відсоткове (процентне) відношення	Percentage ratio	Rapport en pourcentage
Знайдіть!	Find!	Trouvez !
Складати – скласти	To constitute	Constituer

Відсоток (процент) – це сота частина числа.

% – це знак відсотка (процента). 1 % = $\frac{1}{100}$=0,01; $\frac{50}{100}=50\ \%$; $\frac{100}{100}=100\ \%$.

ЗАПАМ’ЯТАЙТЕ!

Один відсоток (процент)	31 71 } відсоток (процент) 101
Два Три } відсотка (процента) Чотири	42 83 } відсотка (процента) 204
П’ять … } відсотків (процентів) двадцять	15 97 } відсотків (процентів) 112

Як знайти декілька відсотків від числа?

Щоб знайти декілька відсотків від числа, потрібно це число розділити на 100 і помножити на кількість відсотків:

$$P\ \%\ \text{від числа}\ A\ \text{дорівнюють}\ \frac{A\cdot P}{100}.$$

Приклади:

1. Знайти 6% від числа 200.

$$200 - 100\ \%$$
$$x - 6\ \%$$
$$x = \frac{200\cdot 6}{100} = 12$$

Відповідь: 6 % від числа 200 дорівнюють 12.

2. У бібліотеці 5000 книг. 20% книг – підручники. Скільки підручників у бібліотеці?

$$5\,000 - 100\ \%$$
$$x - 20\ \%$$
$$x = \frac{5000\cdot 20}{100} = 1000.$$

Відповідь: у бібліотеці 1 000 книг – це підручники.

Як знайти число, якщо ми знаємо декілька його відсотків?

Щоб знайти число за його відсотком, потрібно це число поділити на кількість відсотків і помножити на 100:

$$\text{якщо}\ P\ \%\ \text{від числа}\ A\ \text{дорівнюють}\ B,\ \text{то}\ A = \frac{B\cdot 100}{P}.$$

Приклади:

1. Знайти число, якщо 5 % від нього дорівнюють 40.

$$40 - 5\ \%$$
$$x - 100\ \%$$
$$x = \frac{40\cdot 100}{5} = 800.$$

Відповідь: якщо 5 % від числа дорівнюють 40, то це число дорівнює 800.

2. У групі 9 студентів – араби. Араби становлять 75% від кількості студентів у групі. Скільки студентів у групі?

$$9 - 75\ \%$$
$$x - 100\ \%$$
$$x = \frac{9 \cdot 100}{75} = 12.$$

Відповідь: у групі 12 студентів.

Як знайти відсоткове відношення двох чисел?

Щоб знайти відсоткове відношення (*P* %) двох чисел *A* і *B*, треба одне число *A* розділити на друге число *B* та помножити на 100 %:

$$P\ \% = \frac{A}{B} \cdot 100\ \%.$$

Відсоткове відношення показує, скільки відсотків одне число складає від іншого.

Приклади:

1. Знайти відсоткове відношення чисел 17 та 34:

$$\frac{17}{34} \cdot 100\ \% = 65\ \%.$$

Відповідь: число 17 становить 50% від числа 34.

2. У гуртожитку 400 студентів. 260 студентів – іноземці. Скільки відсотків становлять іноземці?

$$\frac{260}{400} \cdot 100\ \% = 65\ \%.$$

Відповідь: іноземці становлять 65% від усіх студентів у гуртожитку.

Вправи

103. Прочитайте слова і вирази:

відсоток – відсотки;
процент – проценти;
відсоткове відношення двох чисел;
складати; складає;
число *A* становить *P*% від числа *B*.

104. Знайдіть:

а) 16 % від 84; б) 25 % від 160; в) 17 % від 300;
г) 140 % від 15; д) 35 % від 12,5; е) $4\frac{1}{2}\%$ від 120;
ж) 145 % від 250; и) 102,5 % від 75,4; к) 1,5% від 100.

105. Знайдіть число, якщо:

а) 7 % його дорівнюють 49; б) 60 % його дорівнюють 85;
в) 3,5 % його дорівнюють 9; г) 130 % його дорівнюють 18;
д) 4,5 % його дорівнюють 140; е) 375 % його дорівнюють 7,5.

106. Знайдіть відсоткове відношення:

а) 3 до 9; б) 12 до 25; в) 14 до 20;

г) 14,5 до 29; д) $\frac{3}{4}$ до $5\frac{2}{3}$; е) 0,25 до $\frac{7}{8}$;

ж) 0,3 до 0,4; и) $3\frac{1}{5}$ до 1,28; к) 1,2 до $\frac{3}{4}$.

107. Розв'яжіть завдання:

а) Площа всіх країн світу дорівнює 135 млн. км². Площа України дорівнює 0,44% від площі всіх країн світу. Визначити площу України.

б) Дві книги коштують 120 грн. 75 к. Скільки коштує кожна книга, якщо одна книга коштує на 12 % більше, ніж інша книга?

в) У диктанті 150 слів. 6% слів студент написав неправильно. Скільки слів студент написав неправильно?

108. Дайте відповіді на питання:

а) Що таке відсоток?
б) Як знайти декілька відсотків від числа?
в) Як знайти число, якщо ми знаємо декілька його відсотків?
г) Як знайти відсоткове відношення двох чисел?

Контрольні питання до розділу «Вступний курс. Арифметика»

1. Які математичні знаки Ви знаєте?
2. Які математичні дії Ви знаєте?
3. Напишіть українською мовою: $\left(12,03+0,7\right):\frac{13}{24}-7\cdot 1,1=$
4. Що таке просте число? Наведіть приклад.
5. Що таке складене число? Наведіть приклад.
6. Що таке звичайний дріб? Наведіть приклад.
7. Які типи звичайних дробів Ви знаєте? Наведіть приклад.
8. Що таке правильний дріб? Наведіть приклад.
9. Що таке неправильний дріб? Наведіть приклад.
10. Що таке мішаний дріб (мішане число)? Наведіть приклад.
11. Що таке десятковий дріб? Наведіть приклад.
12. Що таке відношення двох чисел? Наведіть приклад.
13. Що таке пропорція? Наведіть приклад.
14. Що таке відсоток? Як він позначається? Наведіть приклад.
15. Як знайти декілька відсотків від даного числа?
16. Як знайти число за його відсотками?
17. Як знайти відсоткове відношення двох чисел?

Модель контрольної роботи до розділу «Вступний курс. Арифметика»

1. Обчисліть: $-4\frac{5}{6}+3\frac{3}{23}\cdot\left(-11\frac{4}{9}-(-3{,}6):\frac{9}{35}\right)$.

2. Записати неправильний дріб $\frac{37}{11}$, $\frac{201}{100}$, $\frac{3245}{15}$ у вигляді мішаного числа. Результат написати українською мовою.

3. Записати мішані числа $3\frac{7}{10}$, $105\frac{3}{100}$, $12\frac{9}{1000}$ у вигляді десяткового дроба. Результат написати українською мовою.

4. Знайти НСК(12, 22, 26) чисел.

5. Що таке неправильний дріб? Наведіть приклад.

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ЕЛЕМЕНТИ ГЕОМЕТРІЇ

АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ

ЗАНЯТТЯ 10

10.1 Степінь з цілим показником

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Степінь	Degree	Degré de
Показник степеня	Exponent	Exposant
Основа степеня	Basis of degree	Degré de base
У квадраті	Squared	Au carré
У кубі	Cubed	À cuba
Число a у степені n	Number a to degree n	Numéro a degré en
Властивості степенів	Properties of degrees	Propriétés des degrés
Піднести до степеня	Raise to a power	Élever au degree

Степенем a^n («a у степені ен») числа a називається добуток n множників, кожний з яких дорівнює a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n - \text{раз}},$$

де a – **основа** степеня, n – **показник** степеня, $a \in R \setminus \{0\}$, $n \in Z$.

Читаємо степені так:

a^0 – «a у нульовому степені»;

a^1 – «a у першому степені»;

a^2 – «a у другому степені» або «a у квадраті»;

a^3 – «a у третьому степені» або «a у кубі»;

a^4 – «a у четвертому степені»;

a^5 – «a у п’ятому степені»;

a^6 – «a у шостому степені»;

a^7 – «a у сьомому степені» і т. д.

Основні властивості степеня з цілим показником:

Нехай $a,\ b \in R \setminus \{0\},\ m,\ n \in Z$, тоді:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
2. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
3. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
4. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.
6. Якщо $a > 0$, то $a^n > 0$.

7. Нехай $a>1$, тогді, якщо $n>m$, то $a^n>a^m$, і, навпаки, якщо $a^n>a^m$, тоді $n>m$.

8. Нехай $0<a<1$, тогді, якщо $n>m$, то $a^n<a^m$, і, навпаки, якщо $a^n<a^m$, тоді $n>m$.

9. Якщо $a>0$ и $a\neq 1$, то рівність $a^n=a^m$ має місце тоді і лише тоді, коли $n=m$.

Розглянемо приклади:

1. Обчислити: $2^5\cdot 2^{-4}\cdot 2^0\cdot 2^2$.

$$2^5\cdot 2^{-4}\cdot 2^0\cdot 2^2=2^{5-4+0+2}=2^3=8.$$

2. Записати дріб $\dfrac{243}{3}$ у вигляді степеня з основою три.

$$\frac{243}{3}=\frac{3^5}{3^1}=3^{5-1}=3^4.$$

3. Подайте вираз у вигляді степеня та обчисліть його значення

$$\frac{25^4\cdot 125^{10}}{5^{37}}.$$

$$\frac{25^4\cdot 125^{10}}{5^{37}}=\frac{(5^2)^4\cdot(5^3)^{10}}{5^{37}}=\frac{5^{2\cdot 4}\cdot 5^{3\cdot 10}}{5^{37}}=5^{8+30-37}=5^1=5.$$

4. Спростіть вираз $\left(-5a^3b^7\right)^3\cdot\left(-\dfrac{1}{5}a^2c^6\right)^2$.

$$\left(-5a^3b^7\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{5}a^2c^6\right)^2=-5^3a^{3\cdot 3}b^{7\cdot 3}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^2a^{2\cdot 2}b^{6\cdot 2}=-5^{3-2}a^{9+4}b^{21+12}=-5a^{13}b^{33}.$$

5. Обчислить: $0{,}02^{-3}\cdot 10^{-4}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2}\cdot 0{,}4^4$.

$$\left(\frac{2}{100}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^4=\frac{50^3}{1}\cdot\frac{1}{10^4}\cdot\frac{5^2}{4^2}\cdot\frac{2^4}{5^4}=\frac{5^5\cdot 2^4}{10\cdot 2^4\cdot 5^4}=\frac{1}{2}.$$

Вправи

109. Прочитайте слова і вирази:

степінь – степені;
показник степеня, основа степеня;
число *а* у квадраті, число *а* у другому степені;
число *а* у кубі, число *а* у третьому степені;
піднести до степеня, піднести число *а* до степеня.

110. Прочитайте та запишіть українською мовою вирази:

2^2; 5^3; 7^0; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$; $0{,}28^4$; $6{,}5^7$; $\left(1\dfrac{1}{2}\right)^3$; $\left(\dfrac{10}{11}\right)^5$; $\left(3\dfrac{7}{8}\right)^2$.

111. Запишіть числовий вираз у вигляді степеня a^n:

а) $\dfrac{0,3^9 \cdot 0,3^{18}}{0,3^{23} \cdot 0,3^4}$;

б) $\left(-1\dfrac{7}{9}\right)^{10} \cdot \left(-1\dfrac{7}{9}\right)^{12} : \left(-1\dfrac{7}{9}\right)^{20}$;

в) $\dfrac{6^{12} \cdot (6^3)^5}{(6^5)^4 \cdot 6^4}$;

г) $\dfrac{10^{17} \cdot (10^2)^3}{(10^3)^4 \cdot 10^9}$;

д) $\left(4 \cdot 2^5\right) : \left(2^3 \cdot \dfrac{1}{16}\right)$;

е) $4^{-6} \cdot 4^4 \cdot \left(2^3 \cdot 2^{-4}\right)^{-1}$;

ж) $\dfrac{2^2 \cdot 4 \cdot \left(2^2\right)^4}{2^2 \cdot 2^5}$;

и) $9 \cdot 3^3 \cdot \dfrac{1}{81} \cdot (1/3)^{-2}$.

112. Обчислить:

а) $\dfrac{3^{16} \cdot 2^{10}}{54^5}$;

б) $\dfrac{7^5 \cdot 5^4}{5^5 \cdot 49^3}$;

в) $2^3 \cdot 3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 - 2^{-2} \cdot 4 + \left[\left(-2\right)^2 : \dfrac{1}{2}\right] \cdot 8$;

г) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} - \left(-\dfrac{6}{7}\right)^0 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 : 2$;

д) $25 \cdot \left(5/2\right)^{-2} \cdot \left(-2^3\right)^{-1}$;

е) $\left(3^{-2}\right)^{-2} \cdot 3^{-5} \cdot 27$.

113. Піднесіть до степеня:

а) $\left(-\dfrac{1}{4}ab^6\right)^2$;

б) $\left(0,1c^2d^3\right)^{-3}$;

в) $\left(\left(-1\right)^n \cdot \left(-1\right)^n \cdot \left(-1\right)^n \cdot \left(-1\right)^n\right)^m$;

г) $\left(-1\dfrac{1}{3}a^4c^{-2}d^{-1}\right)^{-1}$.

114. Дайте відповіді на питання:

а) Що таке степінь числа? Наведіть приклад.

б) У виразі 6^{25} назвіть основу степеня та показник степеня.

в) Назвіть основні властивості степеня з цілим показником.

10.2 Степінь з дробовим показником

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
1	2	3
Дробовий показник	Fractionalindex	Indice fractionnaire
Корінь	Root	La racine
Радикал	Radical	Radical
Арифметичний корінь	Arithmetic root	Racine arithmétique
Показник кореня	Root index	Index racine

1	2	3
Підкореневий вираз	Radical expression	Expression radicale
Корінь квадратний	Square root	Racine carrée
Корінь кубічний	Cubic root	Racine cubique
Добути корінь	Extract the root	Extraire la racine
Визначити	Define	Définir
Визначення	Definition	Définition

Степенем a^k числа a **з дробовим показаником** $k=\frac{m}{n}$ $(n \geq 2)$ називається число, яке визначається наступним чином:

$$a^k = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Читаємо так: «корінь степеня n з числа a у степені m».

Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a (позначається $\sqrt[n]{a}$) називається невід'ємне число b таке, що $b^n = a$, $(n \geq 2)$:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ n \geq 2,$$

a – це **підкореневий вираз**; n – це **показник кореня**; b – це **значення кореня**.

Читаємо так: «корінь n-го степеня з числа a» або «корінь степеня n з числа a».

Читають корені так:

$\sqrt{a}$ – «корінь квадратний з числа a» або «корінь другого степеня з числа a»;

$\sqrt[3]{a}$ – «корінь кубічний з числа a» або «корінь третього степеня з числа a»;

$\sqrt[4]{a}$ – «корінь четвертого степеня з числа a»;

$\sqrt[5]{a}$ – «корінь п'ятого степеня з числа a»;

$\sqrt[6]{a}$ – «корінь шостого степеня з числа a»;

$\sqrt[7]{a}$ – «корінь сьомого степеня з числа a» і т. д.

Наприклад, $\sqrt{10}$ – корінь квадратний з десяти (з числа десять); $\sqrt[3]{7}$ – корінь кубічний з семи (з числа сім); $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$ – корінь четвертого степеня з однієї восьмої (з числа одна восьма); $\sqrt[5]{0,9}$ – корінь п'ятого степеня з нуль цілих дев'яти десятих (з числа нуль цілих дев'ять десятих); $\sqrt[6]{12,01}$ – корінь шостого степеня з дванадцяти цілих однієї сотої (з числа дванадцять цілих одна сота); $\sqrt[7]{1,004}$ – корінь сьомого степеня з однієї цілої чотирьох тисячних (з числа одна ціла чотири тисячних).

Степінь з дробовим показником має всі властивості степеня з цілим показником.

Властивості арифметичного кореня:

нехай $a > 0,\ b > 0,\ n \geq 2,\ m \geq 2,\ k \geq 2$, тоді:

1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}=\sqrt[n\cdot m]{a^{n+m}}$.

2. $\sqrt[n]{a}:\sqrt[k]{a}=\sqrt[n\cdot k]{a^{k-n}}$.

3. $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

5. $\sqrt[n\cdot k]{a^k}=\sqrt[n]{a}$.

6. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$.

7. $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot k]{a}$.

8. $\sqrt{a^2}=|a|,\ a\in R$.

Приклад 1. Обчислити вирази: а) $\sqrt{25\cdot 49\cdot 81}$, б) $\sqrt{121\cdot 144\cdot 100}$.

а) $\sqrt{25\cdot 49\cdot 81}=\left(5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\right)^{1/2}=(5\cdot 7\cdot 9)^{2/2}=315$;

б) $\sqrt{121\cdot 144\cdot 100}=\left(11^2\cdot 12^2\cdot 10^2\right)^{1/2}=(11\cdot 12\cdot 10)^{2/2}=11\cdot 12\cdot 10=1\,320$.

Приклад 2. Обчислити вираз $\sqrt[3]{36\cdot 42\cdot 49}$, застосовуючи властивості коренів.

$\sqrt[3]{36\cdot 42\cdot 49}=\sqrt[3]{9\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7^2}=\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{7^3}=3\cdot 2\cdot 7=42$.

Приклад 3. Добути корінь з виразу $\sqrt[4]{2\cdot 4\cdot 7\cdot 14\cdot 49}$.

$\sqrt[4]{2\cdot 4\cdot 7\cdot 14\cdot 49}=\sqrt[4]{2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 7\cdot 7^2}=\sqrt[4]{2^4\cdot 7^4}=2\cdot 7=14$.

Приклад 4. Представити у вигляді степеня вираз $\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{9}}\cdot\left(a^{-\frac{7}{10}}\right)^{\frac{5}{21}}$.

$$\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{9}}\cdot\left(a^{-\frac{7}{10}}\right)^{\frac{5}{21}}=a^{\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}}\cdot a^{-\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{21}}=a^{\frac{1}{6}}\cdot a^{-\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}}=a^0.$$

Вправи

115. Прочитайте вирази:

степінь з дробовим показником – степені з дробовими показниками;
арифметичний корінь – арифметичні корені;
корінь з числа; добути корінь з числа;
корінь квадратний; корінь другого степеня;
добути корінь квадратний з числа;
корінь кубічний; корінь третього степеня;
добути корінь кубічний з числа.

116. Прочитайте і запишіть українською мовою вирази:

$$\sqrt{7};\ \sqrt[3]{\frac{1}{40}};\ \sqrt[4]{(0,05)^3};\ \sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^2};\ \sqrt{1,28^4};\ \sqrt[5]{6,5^7};\ \sqrt[6]{\left(31\frac{11}{21}\right)^3};\ \sqrt[3]{\left(\frac{10}{11}\right)^5};\ \sqrt[7]{\left(3\frac{3}{4}\right)^2}.$$

117. Замініть корінь степенем з дробовим показником:

а) $\sqrt{b}$; б) $\sqrt[3]{x^2}$;

в) $\sqrt[6]{2x-3b^3}$;   г) $\sqrt[9]{x^2+y^4}$.

118. Обчисліть, застосовуючи властивості коренів:

а) $\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}$;   б) $\sqrt[6]{10000}\cdot\sqrt[6]{100}$;

в) $\sqrt[8]{3^5\cdot5^2}\cdot\sqrt[8]{3^3\cdot5^6}$;   г) $\sqrt[3]{4^6\cdot3^9}$;

д) $\sqrt[4]{\dfrac{3^8\cdot7^4}{5^4\cdot2^{12}}}$;   е) $\dfrac{\sqrt[3]{5^8\cdot7^{10}}}{\sqrt[3]{5^2\cdot7^{16}}}$.

119. Знайдіть значення виразу:

а) $0,2\cdot\sqrt[3]{1000}-\dfrac{3}{5}\sqrt[4]{625}$;

б) $\sqrt[7]{-128}+3\cdot\left(\sqrt[5]{9}\right)^5-4\sqrt[8]{256}$;

в) $4\cdot\left(-\sqrt[8]{6}\right)^8-0,8\sqrt[4]{1000}+\left(\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{270}\right)^3$;

г) $\sqrt[6]{0,000064}+\dfrac{2}{9}\left(-3\sqrt[4]{0,4}\right)^4+\sqrt[6]{0,3^{12}}$.

120. Дайте відповіді на питання:

а) Що називають степенем з дробовим показником? Наведіть приклад.

б) Що таке арифметичний корінь n-го степеня?

в) У виразі $\sqrt{b}$ назвіть показник кореня.

г) У виразі $\sqrt{b}$ назвіть підкореневий вираз.

д) Чи правильно, що у виразі $\sqrt[3]{8}$ підкореневий вираз дорівнює восьми?

е) Чи правильно, що у виразі $\sqrt[3]{8}$ показник кореня дорівнює трьом?

ж) Чи правильно, що вираз $\sqrt[3]{x^4}$ можна записати у вигляді $x^{\frac{3}{4}}$?

и) Чи правильно, що вираз $\sqrt[3]{x^4}$ можна записати у вигляді $x^{\frac{4}{3}}$?

к) Чи правильно, що у виразі $\sqrt[5]{mn^2}$ підкореневий вираз дорівнює mn? Якщо ні, то назвіть свій варіант відповіді.

л) Чи правильно, що вираз $\sqrt[5]{mn^2}$ можна записати у вигляді $\left(mn^2\right)^{\frac{1}{5}}$? Якщо ні, то назвіть свій варіант відповіді.

м) Чи правильно, що вираз $\sqrt[5]{mn^2}$ можна записати у вигляді $\left(mn\right)^{\frac{5}{2}}$? Якщо ні, то назвіть свій варіант відповіді.

ЗАНЯТТЯ 11

11.1 Алгебраїчні вирази

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Алгебра	Algebra	Algèbre
Алгебраїчний вираз	Algebraic expression	Expression algébrique
Одночлен	Monomial	Monomial
Стандартний вигляд	Standard view	Vue standard
Коефіцієнт	Coefficient	Coefficient
Подібні одночлени	Similar monomials	Monômes similaires
Зведення подібних (одночленів)	Bringing like (monomials)	Apportant comme (monômes)
Многочлен	Polynomial	Polynôme

Алгебраїчним виразом називається вираз, в якому числа та букви з'єднані діями додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до натурального степеня та добування арифметичного кореня. Наприклад, $\left(5xy\right)\cdot\left(-2x^2yb\right)+9,3x-\dfrac{y^3+3}{x-y}\cdot\sqrt[4]{xy}$ – алгебраїчний вираз.

Одночлен це алгебраїчний вираз, у якому числа і букви з'єднані лише двома діями – множенням та піднесення до натурального степеня. Наприклад, 7; a^2; b^3c; $-0,9x$; $-y$; $-\dfrac{12}{7}ab^4c^5$ це одночлени.

Говорять, що одночлен задано у **стандартному вигляді**, якщо спочатку записати добуток всіх його числових множників, який називають **коефіцієнтом одночлена**, а потім добуток буквених множників в алфавітному порядку. Наприклад, $0,5\cdot\left(-15\right)axca^2=-7,5a^3cx$. Числовий множник $-7,5$ є коефіцієнтом одночлена.

Одночлени називаються **подібними**, якщо записані у стандартному вигляді вони відрізняються лише коефіцієнтами.

Наприклад, одночлени $2x^6\cdot x$; x^7; $7x^2\cdot x^5$; $-5x^7$ подібні.

Щоб помножити одночлен на одночлен потрібно перемножити їх коефіцієнти і перемножити степені з однаковими основами.

Многочлен це сума декількох одночленів. Наприклад, $-x^4+2y$.

Одночлени, з яких складається многочлен, називаються його **членами**.

Звести подібні члени многочлена, означає знайти суму коефіцієнтів подібних одночленів, а їх буквену частину записати без зміни. Наприклад,

$$4x-5a+5x-8a-3c=\left(4+5\right)\cdot x+\left(-5-8\right)\cdot a-3c=9x-13a-3c.$$

Сумою (різницею) многочленів називається многочлен, коефіцієнти якого є сумою (різницею) коефіцієнтів подібних членів цих многочленів. Наприклад,

$$(5x+7xy-3)-(4x-2y+5xy)=(5-4)x+(7-5)xy+2y-3=x+2xy+2y-3.$$

Щоб помножити одночлен на многочлен, треба помножити кожен член многочлена на одночлен і додати отримані одночлени. Наприклад,

$$(-5a)\cdot\left(4-b-a^2\right)=-20a+5ab+5a^3.$$

Щоб помножити многочлен на многочлен, треба помножити кожен член першого многочлен на кожен член другого многочлен та отримані одночлени додати. Наприклад,

$$(x+y)\cdot(x-a-b)=x\cdot x+x\cdot(-a)+x\cdot(-b)+y\cdot x+y(-a)+y\cdot(-b)=$$
$$=x^2-ax-bx+yx-ya-yb.$$

Вправи

121. Прочитайте вирази:

алгебраїчний вираз – алгебраїчні вирази;
одночлен – одночлени;
стандартний вигляд одночлена;
коефіцієнт одночлена;
подібні одночлени; зведення подібних членів;
многочлен – многочлени;
сума многочленів; різниця многочленів;
помножити одночлен на многочлен;
помножити многочлен на многочлен.

122. Запишіть одночлен у стандартному вигляді та вкажіть його коефіцієнт :

а) $2a^3b(-1/2ab)a^2b$; б) $p^2x^2\left(-1/2xp^3q\right)$;

в) $-2\frac{1}{3}a^3c^2\,\frac{1}{7}ac^2\,6abc$; г) $(2y)\left(3y^2\right)\left(dy^3\right)d^2y^2$.

123. Виконайте множення одночленів:

а) $-1\frac{3}{5}m^4c^2\cdot\left(-\frac{1}{2}m^3p^6\right)^3$; б) $\left(-0,01a^2c^5\right)^2\cdot100c^4a$;

в) $2\frac{1}{4}x^5y^2\cdot\left(\frac{2}{3}xy^3\right)^3$; г) $\left(-5a^3b^7\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{5}a^2b^6\right)^2$.

124. Зведіть подібні одночлени:

а) $0,1x^2y^2-0,2x^2y^2+0,3x^2y^2$;
б) $2,1xab+2x+4xab-x+3x+3xab$;

в) $\frac{x}{6}+\frac{x}{3}+\frac{3x}{2}-\frac{4}{3}mn^2+0{,}2mn^2-1\frac{1}{3}mn^2$;

г) $\frac{13}{6}ab^2c^3-6{,}25ab^2c^3+\frac{1}{4}ab^2c^3+8ab^2c^3$.

125. Виконайте множення одночлена на многочлен:

а) $-0{,}2x\left(3x^3-xy^2+4x\right)$; б) $\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b\right)\cdot 2a-b\cdot\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b\right)$;

в) $2ab\left(3a^2-2b^2\right)-3ab\left(4b^2-a^2\right)$; г) $-0{,}7x^2y^3\left(5x^4-xy^2+3y^3\right)$.

126. Виконайте дії:

а) $\left(\frac{1}{2}ax-2(ax+3)\right)-(xa+1)-\left((ax-2)-\left(3-(ax-1)\right)\right)-4$;

б) $a-\left(b-(c-a-b)\right)+b+\left(a-(c-b-a)\right)$.

127. Виконайте множення многочленів:

а) $(a-4b)\left(a^2+3ab-6b^2\right)$; б) $\left(2x^2-x\right)\left(8x^2-2x\right)$.

128. Дайте відповіді на питання:

а) Що таке алгебраїчний вираз? Наведіть приклад.
б) Який вираз називають одночленом? Наведіть приклад.
в) Що означає одночлен стандартного вигляду? Наведіть приклад.
г) Які одночлени називаються подібними? Наведіть приклад.
д) Що означає звести подібні одночлени? Наведіть приклад.
е) Що таке многочлен? Наведіть приклад.
ж) Що називають сумою (різницею) многочленів? Наведіть приклад.
и) Як помножити одночлен на многочлен? Наведіть приклад.
к) Як помножити многочлен на многочлен? Наведіть приклад.

11.2 Формули скороченого множення

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
1	2	3
Формула	Formula	Formule
Формули скороченого множення	Abbreviated multiplication formulas	Formules de multiplication abrégées
Різниця квадратів	Difference of squares	Différence de carrés
Квадрат суми	Square amount	Montant carré
Квадрат різниці	Difference square	Carré de différence
Сума кубів	Sum of cubes	Somme de cubes

1	2	3
Різниця кубів	Cube difference	Différence de cube
Куб суми	Cube amount	Montant du cube
Куб різниці	Difference cube	Cube de différence
Виділення повного квадрата	All square selection	Sélection de tous les carrés

Для множення многочленів застосовують **формули скороченого множення**.

Основні формули скороченого множення

1. Різниця квадратів: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

2. Квадрат суми: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

3. Квадрат різниці: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

4. Сума кубів: $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

5. Різниця кубів: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

6. Куб суми: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

7. Куб різниці: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Наприклад, помножимо многочлени, застосувавши формули скороченого множення:

1) $\left(3a-c^2\right)\left(3a+c^2\right)=(3a)^2-c^2=9a^2-c^2$;

2) $(5+x)\left(25-5x+x^2\right)=5^3+x^3=125+x^3$;

3) $(0{,}1-2b)^2=0{,}1^2-2\cdot 0{,}1\cdot 2b+(2b)^2=0{,}01-0{,}4b+4b^2$.

Подання многочлена у вигляді добутку двох чи декількох многочленів називається **розкладанням многочлена на множники**. Для розкладання многочлена на множники застосовуються різні методи: формули скороченого множення, метод винесення спільного множника за дужки, метод групування та інші.

Наприклад, розкладемо многочлени на множники за допомогою формул скороченого множення:

$$1)\ a^4-b^6=\left(a^2\right)^2-\left(b^3\right)^2=\left(a^2-b^3\right)\left(a^2+b^3\right);$$

$$2)\ \frac{1}{169}x^4+2x^2y^2+169y^4=\left(\frac{1}{13}x^2+13y^2\right)^2;$$

$$3)\ 0{,}027+y^9=0{,}3^3+\left(y^3\right)^3=\left(0{,}3+y^3\right)\left(0{,}09-0{,}3y^3+y^6\right).$$

При розкладанні на множники корисно використовувати **метод виділення повного квадрата** за допомогою формули

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2.$$

Наприклад, виділимо повний квадрат у виразах:

$$1)\ x^2+6x+7=x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2+7=(x+3)^2-2;$$

2) $x^2+5x+11=x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+11=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{19}{4}$.

Вправи

129. Прочитайте вирази:

формула, формули, формули скороченого множення;
множення многочленів;
різниця квадратів;
квадрат суми, квадрат різниці;
сума кубів, різниця кубів;
куб суми, куб різниці;
розкладання многочлена на множники; розкласти многочлен на множники;
виділення повного квадрата, виділити повний квадрат.

130. Виконати множення многочленів:

а) $(2-a)(4+2a+a^2)$; б) $(3ab+1)(3ab-1)$;
в) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$; г) $\left(0,4m^5+0,1n^3\right)\left(0,1n^3-0,4m^5\right)$;
д) $(a-x)(a+x)(a^2+x^2)$; е) $(x-2y)\cdot\left(x^2+2xy+4y^2\right)$.

131. Розкладіть мноточлен на множники:

а) $2a^2+4a+2$; б) $(a+b)^2-(m-n)^2$;
в) $(3b-5)^2-49$; г) $a^4-(a-7)^2$;
д) $24ax+36a^2+4x^2$; е) $0{,}125-(m-n)^3$;
ж) $1000a^{12}+8c^3$; и) $121x^2-88xy+16y^2$.

132. Виділіть повний квадрат:

а) $x^2-10x+1$; б) x^2+3x+8;
в) $x^2+12x-14$; г) x^2-x+30.

133. Дайте відповіді на питання:

а) Навіщо використовують формули скороченого множення?
б) Напишіть формулу різниця квадратів.
в) Напишіть формулу квадрат суми.
г) Напишіть формулу квадрат різниці.
д) Напишіть формулу сума кубів.
е) Напишіть формулу різниця кубів.
ж) Напишіть формулу куб суми.
и) Напишіть формулу куб різниці.

ЗАНЯТТЯ 12

12.1 Алгебраїчні дроби

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Алгебраїчний дріб	Algebraic fraction	Fraction algébrique
Множина чисел	Set of numbers	Ensemble de nombres
Область допустимих значень (ОДЗ) дробу	Permissible rangeof fraction	Plage admissible
Виділення цілого виразу	Selection (extraction) of the whole expression	Sélection de l’expre-ssion entière
Спільний знаменник	Common denominator	Dénominateur commun
Найменший спільний знаменник (НСЗ)	Lowest common denominator	Le plus petit dénominateur commun
Справедлива рівність	Fairness is fair	L’équité est juste
Числове значення многочлена	The numerical value of a polynomial	La valeur numérique d’un polynôme

Алгебраїчний дріб це дріб, чисельник і знаменник якого є многочленами.

Наприклад, дроби $\frac{7}{a^2}$, $\frac{-8x}{3bcy}$, $\frac{14a}{x+y}$, $\frac{x+y}{(2x-y)^3}$, $\frac{3x^2-y+x}{(a-b)(x+y)}$ є алгебраїчними дробами.

Область допустимих значень (ОДЗ) алгебраїчного дробу A/B (A, B – многочлени), це множина чисел, при яких числове значення многочлена B не дорівнює нулю $(B \neq 0)$.

Наприклад, ОДЗ алгебраїчного дробу $\frac{a\cdot(c^2+d^2)}{(c+d)^3}$ це множина чисел, таких, що $c \neq -d$.

Для будь-якого многочлена P $(P \neq 0)$, справедливі рівності:

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot P}{B\cdot P};\quad \frac{A}{B}=\frac{A:P}{B:P}.$$

Наприклад,

$$\frac{x^4-16}{(x^2-4)(x+3)}=\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x^2-4)(x+3)}=\frac{x^2+4}{x+3},\text{ при } x\neq\pm 2,\quad x\neq -3.$$

12.2 Виділення цілого виразу з алгебраїчного дроба

Якщо степінь чисельника дробу більший або дорівнює степеню знаменника, то з алгебраїчного дробу можна **виділити цілий вираз (цілу частину**). Наприклад, з дробу $\frac{x^2-c}{x}$ можна виділити цілий вираз тому, що степінь чисельника більший від степеня знаменника.

Щоб виділити цілий вираз з дробу, потрібно розділити чисельник на знаменник; частку записати як цілий вираз, а остачу – у чисельник дробової частини.

Наприклад, виділимо цілий вираз з дробу $\frac{x^2-c}{x}$.

Розділимо чисельник на знаменник почленно, тобто розділимо кожен член чисельника на знаменник, отримаємо:

$$\frac{x^2-c}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{c}{x}=x-\frac{c}{x}.$$

Розглянемо ще один приклад, виділимо цілу частину з неправильного дробу $\frac{x^2-x+3}{x+2}$. Розділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^2-x+3 & x+2 \\
- & x^2+2x & \overline{x-3} \text{ – ціла частина} \\
\hline
 & -3x+3 & \\
- & \underline{-3x-6} & \\
 & 9 \text{ – остача} &
\end{array}$$

Отже, $\frac{x^2-x+3}{x+2}=x-3+\frac{9}{x+2}$.

12.3 Спільний знаменник алгебраїчних дробів

Спільним знаменником декількох алгебраїчних дробів називається многочлен, який ділиться на знаменник кожного з цих дробів.

Наприклад, для дробів $\frac{8x}{x+1}$ і $\frac{x-1}{x-3}$ спільним знаменником буде многочлен $(x+1)(x-3)$.

Найменшим спільним знаменником (НСЗ) називається спільний знаменник, на який ділиться будь-який інший спільний знаменник без остачі.

Для того, **щоб звести декілька алгебраїчних дробів до НСЗ** на ОДЗ цих дробів, треба знаменник кожного дробу розкласти на множники, а потім чисельник і знаменник кожного дробу помножити на добуток тих множників інших дробів, які не містяться в знаменнику цього дробу.

Наприклад, приведемо до найменшого спільного знаменника такі дроби:

$$\frac{1}{a-b},\ \frac{1}{a^2-b^2},\ \frac{1}{a^3-b^3}.$$

Розкладемо знаменники заданих дробів на множники:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right).$$

Чисельник і знаменник першого дробу помножимо на вираз $\left(a^2+ab+b^2\right)\cdot(a+b)$, другий – на a^2+ab+b^2, третій – на $a+b$.

Отримаємо такі дроби:

$$\frac{1}{a-b}=\frac{(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)}{(a-b)(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)},\ \frac{1}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)},$$

$$\frac{1}{a^3-b^3}=\frac{a+b}{(a-b)(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)}.$$

12.4 Арифметичні дії з алгебраїчними дробами

Додавання (віднімання)

Щоб додати (відняти) два алгебраїчних дроба з однаковими знаменниками, треба додати (відняти) їх чисельники, а знаменник залишити без зміни, тобто:

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\ \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C},$$

якщо $C\neq 0$.

Наприклад,

$$\frac{2n}{m-n}+\frac{m}{m-n}-\frac{2m+n}{m-n}=\frac{2n+m-(2m+n)}{m-n}=$$

$$=\frac{2n+m-2m-n}{m-n}=\frac{n-m}{m-n}=\frac{-(m-n)}{m-n}=-1,$$

якщо $m-n\neq 0,\ m\neq n$.

Щоб додати (відняти) два алгебраїчних дроба з різними знаменниками, потрібно привести ці дроби до найменшого спільного знаменника (НСЗ), а потім отримані дроби додати (відняти) за правилом додавання дробів з однаковими знаменниками.

Наприклад, виконаємо дії $\frac{y+12}{8y+32}-\frac{y+4}{8y-32}+\frac{9}{y^2-16}$.

$$\frac{y+12}{8y+32}-\frac{y+4}{8y-32}+\frac{9}{y^2-16}=\frac{y+12}{8(y+4)}-\frac{y+4}{8(y-4)}+\frac{9}{(y+4)(y-4)}=$$

$$=\frac{(y+12)(y-4)-(y+4)(y+4)+9\cdot 8}{8(y+4)(y-4)}=\frac{y^2-4y+12y-48-y^2-8y-16+72}{8(y+4)(y-4)}=$$

$$=\frac{-64+72}{8(y+4)(y-4)}=\frac{8}{8(y+4)(y-4)}=\frac{1}{y^2-16},$$

при $y^2-16\neq 0,\ y\neq \pm 4$.

Множення

Щоб помножити два алгебраїчних дроба, треба помножити їх чисельники та записати результат у чисельник нового дробу, і помножити їх знаменники та записати результат у знаменник нового дробу, тобто:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},$$

при $B,D\neq 0$.

Наприклад, виконаємо дії: $\frac{x^2-25}{x^2-6x}\cdot\frac{x^2-36}{x^2+5x}$.

$$\frac{x^2-25}{x^2-6x}\cdot\frac{x^2-36}{x^2+5x}=\frac{\left(x^2-25\right)\cdot\left(x^2-36\right)}{\left(x^2-6x\right)\cdot\left(x^2+5x\right)}=\frac{(x-5)(x+5)(x-6)(x+6)}{x(x-6)\cdot x(x+5)}=$$

$$=\frac{(x-5)(x+6)}{x\cdot x}=\frac{x^2+x-30}{x^2},$$

при $\begin{cases} x^2-6x\neq 0, \\ x^2+5x\neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq 6, \\ x\neq -5. \end{cases}$

Ділення

Щоб розділити два алгебраїчних дроба, треба перший дріб помножити на обернений до другого дробу, тобто:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}==\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C},$$

при $B,C,D\neq 0$

Наприклад, виконаємо дії: $\frac{x^2-4x+4}{20x^3}:\frac{x-2}{5x}$, при $x\neq 0;\ x\neq 2$.

$$\frac{x^2-4x+4}{20x^3}:\frac{x-2}{5x}=\frac{x^2-4x+4}{20x^3}\cdot\frac{5x}{x-2}=\frac{(x-2)^2\cdot 5x}{20x^3\cdot(x-2)}=\frac{x-2}{4x^2}.$$

Степінь алгебраїчного дроба

Для алгебраїчного дроба $\frac{A}{B}$ і натурального числа *n* справедлива рівність

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n},\ \text{при } B\neq 0.$$

Вправи

134. Прочитайте вирази:

алгебраїчний дріб – алгебраїчні дроби;
область допустимих значень (ОДЗ) алгебраїчного дробу;
виділення цілого виразу;
виділити цілу частину алгебраїчного дробу;
дії з алгебраїчними дробами;
додавання алгебраїчних дробів;
віднімання алгебраїчних дробів;
множення алгебраїчних дробів;
ділення алгебраїчних дробів;
піднесення до степеня алгебраїчних дробів.

135. Знайдіть ОДЗ дробів:

а) $\frac{1}{bc}-\frac{1}{a-c}$; б) $\frac{a^2-1}{a^3-1}\cdot\frac{b}{a}$;

в) $\frac{a}{b+c}-\frac{d}{b-c}$; г) $\frac{b+c}{a+d}:\frac{d-c}{c-a}$.

136. Виділіть цілий вираз з дробу:

а) $\frac{m-3}{m}$; б) $\frac{a^2-2a+7}{a-2}$;

в) $\frac{y^3+5y-3}{y^2+1}$; г) $\frac{3m^4-2m^2+9}{m^2-5}$.

137. Скоротіть дроби:

а) $\frac{4a^2b}{8ab^2}$; б) $\frac{6a^4x^3}{3a^6x^4}$;

в) $\frac{3(a+b)^2}{9a(a+b)}$; г) $\frac{8x(2-x)^3}{12x^2(2-x)}$;

д) $\frac{4(a-5)}{6(5-a)}$; е) $\frac{(a-b)(a-3)^2}{2(b-a)(a-3)}$;

ж) $\frac{ax+bx}{ax-bx}$; и) $\frac{x^2}{x^2+ax}$.

138. Зведіть дроби до найменшого спільного знаменника (НСЗ):

а) $\frac{a^2}{b(a-3)},\frac{a}{a^2-6a+9},\frac{b}{(a-3)^2}$; б) $\frac{1}{a^2+ab},\frac{1}{b^2+ab},\frac{1}{a^3b-b^3a}$;

в) $\frac{1+a}{a^2-4},\frac{a}{a^2+4a+4},\frac{1}{a^2+2a}$; г) $\frac{1}{a^3-b^3},\frac{1}{a^2-b^2},\frac{1}{a^2+ab+b^2}$.

139. Виконайте додавання (віднімання):

а) $\frac{x+5}{2x-6}-\frac{x+1}{x-3}$;

б) $\frac{4b+2}{3b-21}-\frac{3b-1}{14-2b}$;

в) $\frac{a+3}{3a-3}+\frac{2-a}{5a-5}$;

г) $\frac{a+1}{a^2-b^2}-\frac{a-1}{b-a}$;

д) $\frac{a}{x-y}-\frac{b}{y-x}+\frac{c}{x-y}$;

е) $a-\frac{a-2}{a^2-4}+\frac{a-3}{a+2}$;

ж) $\frac{5}{2a-3}+\frac{2}{2a+3}-\frac{a-1}{9-4a^2}$;

и) $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{2x+6}-\frac{x}{2x^2-12x+18}$;

к) $\frac{4a^2-3a+5}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}+\frac{6}{1-a}$;

л) $\frac{1}{a^2-ab}-\frac{3b^2}{a^4-ab^3}-\frac{b}{a^3+a^2b+ab^2}$.

140. Виконайте множення:

а) $\frac{26x^7}{51y^5}\cdot\frac{34y^3}{39x^3}$;

б) $\frac{3a^2b^2}{4xy}\cdot\frac{10x^2y}{21a^4b}$;

в) $\frac{2xy-y^2}{3}\cdot\frac{9x}{y^5}$;

г) $\frac{a^2-ax}{x}\cdot\frac{x^2}{a}$;

д) $\frac{x^2-xy}{x^2+xy}\cdot\frac{x^2y+xy^2}{x-y}$;

е) $\frac{a^2-2ab}{a^2+3ab}\cdot\frac{a^2b+3ab^2}{a^3-2a^2b}$.

141. Виконайте ділення:

а) $\frac{32a^5}{15y^8}:\frac{4a^3}{45y^4}$;

б) $\frac{72a^5b^4}{25y^8}:\left(24a^7b^9\right)$;

в) $54p^{10}n^{17}:\frac{27p^{12}n^{14}}{22a^6}$;

г) $\frac{a^2+10a+25}{a^2-25}:(a+5)$;

д) $\frac{x-3}{4x+12}:\frac{2x-6}{x^2+3x}$;

е) $\frac{x^2-9y^2}{16x^2-9y^2}:\frac{x^2+6xy+9y^2}{16x^2-24xy+9y^2}$.

142. Виконайте дії:

а) $\left(\frac{a+3}{a-3}+\frac{a-3}{a+3}\right):\frac{3a^2+27}{9-a^2}$;

б) $\left(\frac{b+9}{b-9}-\frac{b-9}{b+9}\right):\frac{18b^2}{81-b^2}$;

в) $\left(5x-\frac{10x}{x+1}\right):\frac{15x-15}{4x+4}$;

г) $\left(3x-\frac{6x}{x+5}\right):\frac{9x+27}{8x+40}$;

д) $\frac{3x}{x-4}-\frac{x+2}{5x-20}\cdot\frac{240}{x^2+2x}$;

е) $\frac{2z}{z-5}-\frac{z+7}{4z-20}\cdot\frac{200}{z^2+7z}$;

ж) $\left[\frac{8b}{b+7}-\frac{15b}{b^2+14b+49}\right]:\frac{8b+41}{b^2-49}+\frac{7b-49}{b+7}$;

и) $\left[\frac{4n}{n-4}-\frac{3n}{n^2-8n+16}\right]:\frac{4n-19}{n^2-16}+\frac{4n+16}{n-4}$.

143. Піднесіть алгебраїчний дріб до степеня:

а) $\left(-\dfrac{5a^3b^4}{0,2c^5d}\right)^2$; б) $\left(-\dfrac{0,1b^4x}{z^{-3}y^5}\right)^3$.

144. Дайте відповіді на питання:

а) Що таке алгебраїчний дріб?

б) Що називають областю допустимих значень (ОДЗ) алгебраїчного дроба?

в) Як звести алгебраїчні дроби до найменшого спільного знаменника (НСЗ)?

г) Як виділити цілу частину в алгебраїчному дробі?

д) Як додати (відняти) два алгебраїчних дроба з однаковими знаменниками?

е) Як додати (відняти) два алгебраїчних дроба з різними знаменниками?

ж) Як помножити два алгебраїчних дроба?

и) Як розділити два алгебраїчних дроба?

к) Як піднести до степеня алгебраїчний дріб?

Контрольні питання до теми «Алгебраїчні вирази»

1. Що таке степінь числа? Наведіть приклад.
2. У виразі a^m назвіть основу степеня та показник степеня.
3. Що називають степенем з дробовим показником? Наведіть приклад.
4. Що таке арифметичний корінь степеня n?
5. У виразі $\sqrt{b}$ назвіть показник кореня.
6. У виразі $\sqrt{b}$ назвіть підкореневий вираз.
7. Що таке алгебраїчний вираз? Наведіть приклад.
8. Який вираз називають одночленом? Наведіть приклад.
9. Що означає одночлен стандартного вигляду? Наведіть приклад.
10. Які одночлени називаються подібними? Наведіть приклад.
11. Що означає звести подібні одночлени? Наведіть приклад.
12. Що таке многочлен? Наведіть приклад.
13. Що називають сумою (різницею) многочленів? Наведіть приклад.
14. Як помножити одночлен на многочлен? Наведіть приклад.
15. Як помножити многочлен на многочлен? Наведіть приклад.
16. Навіщо використовують формули скороченого множення?
17. Напишіть формулу різниця квадратів.
18. Напишіть формулу квадрат суми.
19. Напишіть формулу квадрат різниці.
20. Напишіть формулу сума кубів.
21. Напишіть формулу різниця кубів.
22. Напишіть формулу куб суми.

23. Напишіть формулу куб різниці.

24. Що таке алгебраїчний дріб?

25. Що називають областю допустимих значень (ОДЗ) алгебраїчного дробу?

26. Як звести алгебраїчні дроби до найменшого спільного знаменника (НСЗ)?

27. Як виділити цілу частину в алгебраїчному дробі?

28. Як додати (відняти) два алгебраїчних дроба з однаковими знаменниками?

29. Як додати (відняти) два алгебраїчних дроба з різними знаменниками?

30. Як помножити два алгебраїчних дроба?

31. Як розділити два алгебраїчних дроба?

32. Як піднести до степеня алгебраїчний дріб?

Модель контрольної роботи до теми «Алгебраїчні вирази»

1. Знайдіть ОДЗ дробів:

а) $\dfrac{b-6}{b^2-16}$; б) $\dfrac{t-3}{t\left(t^3+1\right)}$.

2. Обчисліть:

а) $\left(\sqrt{12}-3\right)\left(\sqrt{12}+3\right)$; б) $\left(\sqrt{12}-3\right)^2$;

в) $\left(4^4:800+0,4^2\right):\left(-0,2\right)^2$; г) $81^{-2,25}\cdot 9^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{25}{9}}$.

3. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{3^7\cdot 4^{11}}}{\sqrt[5]{3^2\cdot 4^6}}$.

4. Спростіть вираз:

а) $\left[\dfrac{n}{n^2-8n+16}-\dfrac{n+6}{n^2-16}\right]:\dfrac{n+12}{n^2-16}$;

б) $\left[\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}\right]:\dfrac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$.

5. Що таке алгебраїчний дріб? Наведіть приклад.

РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ І СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

ЗАНЯТТЯ 13

13.1 Рівняння. Основні поняття

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Рівність	Equality	Équivalence
Рівняння	The equation	L'équation
Невідома величина (змінна)	Unknown quantity(variable)	Quantité inconnue (variable)
Тотожність	Identity	Identité
Розв'язати рівняння	Solve the equation	Résoudre l'équation
Розв'язок (корінь) рівняння	Solution (root) of the equation	Solution (racine) de l'équation
Лінійне рівняння	Linear equation	Équation linéaire
Квадратне рівняння	Quadratic equation	Équation quadratique
Дискримінант	Discriminant	discriminant
Тричленне рівняння	Three-term equatio	Équation à trois termes
Раціональне рівняння	Rational equation	Équation rationnelle
Заміна змінної	Variable replacement	Remplacement variable

Рівність – це математичний запис, який містить знак дорівнює (=), що розділяє два математичних об'єкта (або числа, або вирази, тощо).

Наприклад, $a = b$ – це рівність, де a – ліва частина рівності, b – права частина рівності.

Рівності бувають **числові** або **зі змінними**. Числова рівність може бути **правильною** або **неправильною**.

Наприклад, 1) $12 - 3 = 9$ або $2 \cdot 4 + 7 = 20 - 5$ – це правильні числові рівності; 8 = 18 ; 6 + 4 = 43 – це неправильні числові рівності. 2) $x + y = 0$ – це рівність зі змінними. Змінні x і y у цій рівності можуть приймати різні числові значення. Якщо x = 3, а y = -3, то $x + y = 0$ – це правильна числова рівність. Якщо x =1, а y = 0, то $x + y = 0$ – це неправильна числова рівність.

Тотожність – це рівність зі змінними, яка буде правильною числовою рівністю за будь-яких значень змінних.

Наприклад, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ та $a + b = b + a$ – це тотожності.

Рівняння – це рівність, що містить **невідому величину (змінну)**. Наприклад: $\frac{13}{24}x^2 - 7 \cdot 1{,}1x = 0$ і $5x = 10$ – це рівняння, x – це невідома величина (змінна).

Значення змінної, при якому рівняння стає тотожністю, називають **розв'язком (коренем)** рівняння. Наприклад: коренем рівняння $5x = 10$ є число 2, т. я. $5 \cdot 2 = 10, 10 \equiv 10$.

Розв'язати рівняння – значить знайти всі його корені або показати, що їх немає.

13.2 Лінійні рівняння

Лінійне рівняння – це рівняння вигляду

$$ax + b = 0,$$

де $a \neq 0$, a, b – числа, x – змінна (невідома величина).

Знайдемо корінь лінійного рівняння:

$$ax = -b,\ \ x = -\frac{b}{a}$$ – **корінь лінійного рівняння**.

Наприклад, розв'яжемо лінійне рівняння $x + \frac{x-5}{2} = \frac{1}{5} - \frac{3-2x}{3}$. Знайдемо НСК дробів: числа 2, 3, 5 є взаємно простими, тому НСК(2; 3; 5) $= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Помножимо обидві частини рівняння на тридцять, отримаємо:

$$30 \cdot x + 30 \cdot \frac{x-5}{2} = 30 \cdot \frac{1}{5} - 30 \cdot \frac{3-2x}{3},$$

скоротимо:

$$30 \cdot x + 15 \cdot (x-5) = 6 - 10 \cdot (3-2x),$$

розкриємо дужки:

$$30x + 15x - 75 = 6 - 30 + 20x,\ \ 25x = 51,\ \ x = \frac{51}{25}.$$

Відповідь: $x = \frac{51}{25}$.

13.3 Квадратні рівняння

Квадратне рівняння – це рівняння вигляду

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

де $a \neq 0$, a, b, c – числа ($a, b, c \in R$), x – змінна (невідома величина).

Щоб розв'язати квадратне рівняння, потрібно обчислити **дискримінант:**

$$D = b^2 - 4ac$$

I випадок. Якщо $D > 0$, то $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

II випадок. Якщо $D = 0$, то $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

III випадок. Якщо $D < 0$, тоді рівняння не має дійсних коренів $(x \notin R)$.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжемо квадратне рівняння $x^2-6x+8=0$. Обчислимо дискримінант, для цього знайдемо коефіцієнти квадратного рівняння: $a=1,\ b=-6,\ c=8$, тоді $D=\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot8=36-32=4$, отримали дискримінант більший від нуля (*I випадок*), тоді: $x_1=\frac{6-\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{4}{2}=2$, $x_2=\frac{6+\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{8}{2}=4.$

Відповідь: $x_1=2,\ x_2=4$.

Приклад 2. Розв'яжемо квадратне рівняння $25x^2-10x+1=0$. Обчислимо дискримінант, для цього знайдемо коефіцієнти квадратного рівняння: $a=25,\ b=-10,\ c=1$, тоді $D=\Delta=(-10)^2-4\cdot25\cdot1=100-100=0$, отримали дискримінант, який дорівнює нулю (*II випадок*), тоді: $x_1=x_2=\frac{10}{2\cdot25}=\frac{1}{5}$.

Відповідь: $x_1=x_2=\frac{1}{5}$.

Приклад 3. Розв'яжемо квадратне рівняння $2x^2+3x+9=0$. Обчислимо дискримінант, для цього знайдемо коефіцієнти квадратного рівняння: $a=2,\ b=3,\ c=9$, тоді $D=\Delta=3^2-4\cdot2\cdot9=9-72=-63$, отримали дискримінант, який менший від нуля (*це III випадок*), тоді рівняння не має дійсних коренів.

Відповідь: не має дійсних коренів.

Якщо у квадратному рівнянні коефіцієнт $a=1$, то рівняння $x^2+px+q=0,\ \left(p,\ q\in R\right)$, називають **зведеним** квадратним рівнянням. Його зручно розв'язувати за допомогою теореми Вієта.

Теорема Вієта для зведеного квадратного рівняння. Якщо $x_1,\ x_2$ корені квадратного рівняння $x^2+px+q=0$, тоді $\begin{cases} x_1\cdot x_2=q\ , \\ x_1+x_2=-p\ . \end{cases}$

Розглянемо приклад. Розв'яжемо квадратне рівняння $x^2+5x+6=0$ за теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=6, \\ x_1+x_2=-5. \end{cases}$$

Розглянемо пари чисел, які при множенні дають число шість:$1\cdot6=6,\ 2\cdot3=6,\ (-1)\cdot(-6)=6,\ (-2)\cdot(-3)=6$. З цих пар виберемо одну, яка у сумі дає мінус п'ять: $(-2)+(-3)=-5$. Значить, $x_1=-2,\ x_2=-3$.

Відповідь:$x_1=-2,\ x_2=-3$.

Узагальнена теореми Вієта. Якщо $x_1,\ x_2$ корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, тоді $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\ , \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}\ . \end{cases}$

13.4 Тричленні рівняння

Тричленне рівняння це рівняння вигляду

$$ax^{2n}+bx^n+c=0,$$

де $a\neq 0,\ n\geq 2,\ a,b,c,n$ – числа, x – змінна (невідома величина).

Щоб розв'язати тричленне рівняння, зробимо **заміну змінної:**

$$x^n=t,\ \left[\begin{array}{l} t\geq 0, \\ t\in R, \end{array}\right. \text{ при } \left[\begin{array}{l} n=2k, \\ n=2k-1, \end{array}\right. \quad k\in N,$$

тоді рівняння набуде вигляду

$$at^2+bt+c=0.$$

Далі розв'язуємо як квадратне рівняння.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжемо рівняння $x^8-17x^4+16=0$. Зробимо заміну $x^4=t,\ t\geq 0$, отримаємо рівняння $t^2-17t+16=0$, звідки знайдемо $t_1=1$ і $t_2=16$. Таким чином, дане рівняння еквівалентне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^4=1, \\ x^4=16, \end{array}\right.$$

розв'язуючи яку, знаходимо $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=2,\ x_4=-2.$

Відповідь: $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=2,\ x_4=-2.$

Приклад 2. Розв'яжемо рівняння $x^6-11x^3-12=0$. Зробимо заміну $x^3=t,\ t\in R$, отримаємо рівняння $t^2-11t-12=0$. За теоремою Вієта

$$\begin{cases} t_1\cdot t_2=-12, \\ t_1+t_2=11, \end{cases}$$

тоді $t_1=-1,\ t_2=12$. Виконаємо обернену заміну:

$$\left[\begin{array}{l} x^3=-1,\ x=\sqrt[3]{-1}=-1; \\ x^3=12,\ x=\sqrt[3]{12}\ . \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1=-1,\ x_2=\sqrt[3]{12}$.

Тричленне рівняння $ax^{2n}+bx^n+c=0$ називається **біквадратним**, якщо $n=2$, тобто рівняння вигляду

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Зробимо заміну $x^2=t,\ t\geq 0$, тоді дане рівняння можна записати у вигляді: $at^2+bt+c=0$. Далі розв'язуємо як квадратне.

Якщо рівняння $at^2 + bt + c = 0$ не має розв'язків, то тричленне рівняння також не має розв'язків.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжемо рівняння $x^4 + 13x^2 + 12 = 0$. Зробимо заміну $x^2 = t,\ t \geq 0$, тоді рівняння набуде вигляду $t^2 + 13t + 12 = 0$. За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = 12, \\ t_1 + t_2 = -13, \end{cases}$ тоді $t_1 = -1,\ t_2 = -12$. Так як обидва корені менші від нуля, то тричленне рівняння не має дійсних коренів.

Відповідь: рівняння не має дійсних коренів

Приклад 2. Розв'яжемо рівняння $x^4 - 16x^2 + 15 = 0$. Зробимо заміну $x^2 = t,\ t \geq 0$, тоді рівняння набуде вигляду $t^2 - 16t + 15 = 0$. За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = 15\ , \\ t_1 + t_2 = 16\ . \end{cases}$ тоді $t_1 = 1,\ t_2 = 15,\ t_{1,2} > 0$. Виконаємо обернену заміну: $\left[\begin{array}{l} x^2 = 1\ , \\ x^2 = 15, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm 1\ , \\ x_{3,4} = \pm\sqrt{15}. \end{array}\right.$

Відповідь: $x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \pm\sqrt{15}.$

Вправи

145. Прочитайте вирази:

рівняння;
невідома величина, змінна;
тотожність – тотожності;
розв'язок рівняння, корінь рівняння;
розв'язати рівняння;
лінійне рівняння – лінійні рівняння;
квадратне рівняння – квадратні рівняння;
дискримінант, обчислити дискримінант;
тричленне рівняння – тричленні рівняння;
біквадратне рівняння – біквадратні рівняння;
заміна змінної, зробимо заміну змінної.

146. Розв'яжіть лінійні рівняння:

а) $2x - 3 = 3x - (1 + x)$;

б) $2(x - 2{,}5) + x - 3 = 1$;

в) $\frac{x-1}{3} + 2 = \frac{x-1}{6} + \frac{1}{2}$;

г) $\frac{x-2}{6} + \frac{x-1}{15} = 3 - \frac{3-x}{12}$;

д) $\frac{2x+1}{3} - 0{,}1 = \frac{3x+2}{5} - \frac{x}{6}$;

е) $\frac{2x-1}{18} + \frac{2-3x}{24} + \frac{4-5x}{36} + \frac{1}{6} = 0$.

147. Розв'яжіть квадратні рівняння:

а) $10x^2 - 9x + 2 = 0$; б) $2x^2 - 4x - 17 = 0$;
в) $x^2 - 6x + 9 = 0$; г) $25x^2 + 10x + 1 = 0$;
д) $x^2 - 10x + 37 = 0$; е) $x^2 - 2x + 47 = 0$;
ж) $x^2 - 13x + 40 = 0$; и) $x^2 - 18x + 17 = 0$.

148. Розв'яжіть тричленні рівняння:

а) $3x^4 - 28x^2 + 9 = 0$; б) $2x^6 - 19x^3 + 9 = 0$;
в) $3x^8 - 7x^4 + 2 = 0$; г) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
д) $x^6 - 29x^3 + 100 = 0$; е) $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$;
ж) $4x^6 - 17x^3 + 4 = 0$; и) $9x^6 - 22x^3 + 8 = 0$.

149. Роз'яжіть рівняння:

а) $3(x-4)^2 = 5x - 20$; б) $7(6-5x)^2 = 15x - 18$;
в) $9(x-7)^2 = 14 - 2x$; г) $27x - 12 = 2(4-9x)^2$;
д) $45x - 18 = 5(2-5x)^2$; е) $3 - 4x = (4x-3)^2$.

150. Дайте відповіді на питання:

а) Що таке рівняння?
б) Що називають розв'язком (коренем) рівняння?
в) Що означає розв'язати рівняння?
г) Яке рівняння називається лінійним? Наведіть приклад.
д) Яке рівняння називається квадратним? Наведіть приклад.
е) Напишіть формулу для дискримінанта.
ж) Скільки коренів має квадратне рівняння, якщо дискримінант більший від нуля? Напишіть формулу для їх обчислення.
и) Скільки коренів має квадратне рівняння, якщо дискримінант дорівнює нулю? Напишіть формулу для їх обчислення.
к) Скільки коренів має квадратне рівняння, якщо дискримінант менший від нуля?
л) Яке рівняння називають тричленним? Наведіть приклад.
м) Що таке біквадратне рівняння? Наведіть приклад.

ЗАНЯТТЯ 14

14.1 Раціональні рівняння

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Раціональне рівняння	Rational equation	Équation rationnelle
Система раціональних рівнянь	System of rational equations	Le systèmedes équations
Сукупність рівнянь	Set of equations	Ensemble d'équations

Раціональне рівняння – це рівняння вигляду

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0,$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени, $Q(x)\neq 0$.

Щоб розв'язати раціональне рівняння, треба розв'язати систему

$$\begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

Наприклад, розв'яжемо рівняння $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-2}=1.$

Приведемо його до вигляду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$, для цього зведемо дроби до найменшого спільного знаменника:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}-1=0;$$

$$\frac{(x-2)+2(x+1)-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=0;$$

$$\frac{x^2-4x-2}{(x+1)(x-2)}=0;$$

$$\begin{cases} x^2-4x-2=0, \\ (x+1)(x-2)\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=2+\sqrt{6},\ x_2=2-\sqrt{6}, \\ x\neq -1,\ x\neq 2. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1=2+\sqrt{6},\ x_2=2-\sqrt{6}$.

Рівняння вигляду

$$\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c}+\frac{Bx}{ax^2+b_2x+c}=C, \qquad (14.1)$$

де $A, B, C \neq 0$, $a, c \neq 0$, заміною змінної $y = ax + \frac{c}{x}$ зводиться до розв'язання рівняння

$$\frac{A}{y+b_1} + \frac{B}{y+b_2} = C.$$

Наприклад, розв'яжемо рівняння

$$\frac{4x}{x^2+x+3} + \frac{5x}{x^2-5x+3} = -\frac{3}{2}.$$

Так як число $x = 0$ не є коренем даного рівняння, то, розділивши на x чисельник і знаменник кожного дробу в лівій частині рівняння, отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$\frac{4}{x+\frac{3}{x}+1} + \frac{5}{x+\frac{3}{x}-5} = -\frac{3}{2}.$$

Зробимо заміну: $y = x + \frac{3}{x}$, отримаємо рівняння

$$\frac{4}{y+1} + \frac{5}{y-5} = -\frac{3}{2},$$

зведемо дроби до спільного знаменника, виконаємо алгебраїчні перетворення, отримаємо рівносильне рівняння:

$$\frac{y^2+2y-15}{(y+1)(y-5)} = 0.$$

Розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} y^2+2y-15=0, \\ (y+1)(y-5)\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1=-5,\ y_2=3, \\ y\neq -1,\ y\neq 5. \end{cases}$$

Виконаємо обернену заміну:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{3}{x}=-5, \\ x+\frac{3}{x}=3. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2+5x+3}{x}=0, \\ \frac{x^2-3x+3}{x}=0. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x+3=0; \\ x^2-3x+3=0. \end{array}\right.$$

Для першого рівняння сукупності маємо:

$$D = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13,$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2},$$

для другого рівняння сукупності:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 3 = -3 < 0 \Rightarrow$$

друге рівняння сукупності не має дійсних коренів.

Відповідь: $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$.

Рівняння вигляду

$$\frac{ax^2 + b_1 x + c}{ax^2 + b_2 x + c} \pm \frac{ax^2 + b_3 x + c}{ax^2 + b_4 x + c} = A,$$

а також рівняння вигляду

$$\frac{ax^2 + b_1 x + c}{ax^2 + b_2 x + c} = \frac{A}{ax^2 + b_3 x + c}, \ A \neq 0,$$

де $a, c \neq 0$, розв'язуються аналогічно до рівнянь вигляду (14.1).

Наприклад, розв'яжемо рівняння

$$\frac{x^2 - 13x + 15}{x^2 - 14x + 15} - \frac{x^2 - 15x + 15}{x^2 - 16x + 15} = -\frac{1}{12}.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 14x + 15 \neq 0, \\ x^2 - 16x + 15 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x \neq 1, \ x \neq 15; \\ x \neq 7 \pm \sqrt{34}. \end{cases}$

Так як $x = 0$ не є коренем даного рівняння, то воно рівносильне рівнянню

$$\frac{x - 13 + \frac{15}{x}}{x - 14 + \frac{15}{x}} - \frac{x - 15 + \frac{15}{x}}{x - 16 + \frac{15}{x}} = -\frac{1}{12}.$$

Зробимо заміну: $x + \frac{15}{x} = y$, отримаємо рівняння

$$\frac{y - 13}{y - 14} - \frac{y - 15}{y - 16} = -\frac{1}{12},$$

розв'язуючи яке, знаходимо $y_1 = 20, y_2 = 10$.

Таким чином, вихідне рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{15}{x} = 20, \\ x + \frac{15}{x} = 10, \end{array} \right.$$

розв'язуючи яку, знаходимо $x_1 = 10 + \sqrt{85}$, $x_2 = 10 - \sqrt{85}$, $x_3 = 5 + \sqrt{10}$, $x_4 = 5 - \sqrt{10}$.

Для спрощення обчислень під час розв’язання раціональних рівнянь іноді застосовується **метод розкладання на прості дроби**.

Розглянемо приклад, розв'яжемо рівняння

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+4}{x-4}=4.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x-1\neq 0, \\ x+2\neq 0, \\ x+3\neq 0, \\ x-4\neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 1, \\ x\neq -2, \\ x\neq -3, \\ x\neq 4. \end{cases}$

Так як

$$\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1},\ \frac{x-2}{x+2}=1-\frac{4}{x+2},$$

$$\frac{x-3}{x+3}=1-\frac{6}{x+3},\ \frac{x+4}{x-4}=1+\frac{8}{x-4},$$

то дане рівняння набуває вигляду

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}+\frac{4}{x-4}=0.$$

Зробимо тотожні перетворення, отримаємо рівняння

$$\frac{5x-8}{(x-1)(x-4)}=\frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}.$$

Враховуючи ОДЗ, отримуємо

$$(5x-8)(x+2)(x+3)=(5x+12)(x-1)(x-4),$$

$$x^2+x-\frac{16}{5}=0,$$

$$D=1^2+4\cdot\frac{16}{5}=\frac{69}{5},$$

$$x_1=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{69}{5}}\right);\ x_2=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{\frac{69}{5}}\right).$$

Оскільки ці числа належать ОДЗ, всі вони є коренями вихідного рівняння.

При розв’язанні раціональних рівнянь іноді застосовуються такі методи: метод виділення повного квадрата; метод, який використовує однорідність рівняння щодо деяких функцій; метод зведення до розв’язання систем рівнянь, а також метод зведення до деяких спеціальних рівнянь (наприклад, квадратних, біквадратних тощо).

Наприклад, розв’яжемо рівняння

$$x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8.$$

Знайдемо ОДЗ: $x-1\neq 0,\ x\neq 1.$

Виділимо повний квадрат:

$$x^2+2x\frac{x}{x-1}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2x\frac{x}{x-1}=8,$$

$$\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x-1}=8,$$

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}=8.$$

Зробимо заміну $\frac{x^2}{x-1}=y$, отримаємо рівняння $y^2-2y-8=0$, коренями якого є числа $y_1=4,\ y_2=-2$.

Зробимо обернену заміну, отримаємо сукупність рівнянь

$$\left[\begin{aligned}&\frac{x^2}{x-1}=4,\\&\frac{x^2}{x-1}=-2,\end{aligned}\right.$$

розв’язками якої, а отже, і вихідного рівняння є $x_1=2,\ x_{2,\,3}=-1\pm\sqrt{3}$.

Розглянемо ще приклад, розв'яжемо рівняння

$$5\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-44\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+12\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$$

Знайдем ОДЗ: $x+1\neq 0,\ x-1\neq 0$.

Зауважимо, що $\frac{x^2-4}{x^2-1}\equiv\frac{x-2}{x+1}\cdot\frac{x+2}{x-1}$. Позначимо $u=\frac{x-2}{x+1}$ і $v=\frac{x+2}{x-1}$, тоді дане рівняння запишеться у вигляді

$$5u^2-44v^2+12uv=0.$$

У лівій частині рівняння стоїть однорідна функція другого степеня щодо u та v.

Якщо $v=0$, то з представленого рівняння випливає $u=0$.

Якщо $v\neq 0$, то, розділивши обидві частини отриманого рівняння на v^2, отримаємо рівняння щодо $\frac{u}{v}$:

$$5\left(\frac{u}{v}\right)^2+12\left(\frac{u}{v}\right)-44=0,$$

$$D=12^2+4\cdot 5\cdot 44=1024,$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)_1=\frac{-12+32}{10}=2;\left(\frac{u}{v}\right)_2=\frac{-12-32}{10}=-4,4.$$

Таким чином, вихідне рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+1}=0,\\[2mm] \dfrac{x+2}{x-1}=0,\end{cases}\\[4mm] \dfrac{x-2}{x+1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{-1}=2,\\[4mm] \dfrac{x-2}{x+1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{-1}=-4,4.\end{array}\right.$$

Оскільки система не має розв’язків, то вихідне рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{x+1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{-1}=2,\\[4mm] \dfrac{x-2}{x+1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{-1}=-4,4,\end{array}\right.$$

яка у свою чергу рівносильна системі

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}(x-2)(x-1)-2(x+1)(x+2)=0,\\ (x-2)(x-1)+4,4(x+1)(x+2)=0,\end{array}\right.\\ (x+2)(x-1)(x+1)\neq 0.\end{cases}$$

Розв’язком цієї системи, а отже, і вихідного рівняння є числа $x_{1,\,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{73}}{2}$.

Вправи

151. Прочитайте вирази:

раціональне рівняння – раціональні рівняння;
ОДЗ раціонального рівняння;
розв’язати раціональне рівняння;
вихідне рівняння;
сукупність рівнянь;
метод заміни змінної;
метод виділення повного квадрата;
метод розкладання на найпростіші дроби.

152. Розв’яжіть рівняння:

а) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=0$; б) $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}=1$;

в) $\frac{x}{x+3}+\frac{4}{x+1}=2$; г) $\frac{x-1}{x}-\frac{3x}{2x-2}=-\frac{5}{2}$;

д) $\frac{2x-3}{x-1}+1=\frac{6x-x^2-6}{x-1}$; е) $\frac{9+2x}{x-3}=\frac{x-3}{x+3}$;

ж) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{2}$; и) $\frac{x+5}{5-x}=\frac{11}{9}$;

к) $\frac{x-3}{x-7}+\frac{x-7}{x-3}=2$; л) $\frac{4x^2}{x-1}-8=17$.

153. Розв’яжіть рівняння:

а) $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$; б) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-\frac{5}{2}$;

в) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$; г) $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-15}=2$;

д) $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$; е) $\frac{x-1}{x}-\frac{3x}{2x-2}=-\frac{5}{2}$;

ж) $\frac{x+9}{x^2-3x-10}-\frac{x+15}{x^2-25}=\frac{1}{x+2}$; и) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2=\frac{40}{9}$;

к) $\frac{1}{x^2-3x+3}+\frac{2}{x^2-3x+4}=\frac{6}{x^2-3x+5}$;

л) $\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{x^2-2x+3}=\frac{9/2}{x^2-2x+4}$.

154. Розв’яжіть рівняння:

а) $\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^4-8\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2=9$; б) $\frac{5}{x(x-8)}+\frac{1}{(x-4)^2}=\frac{2}{3}$;

в) $\frac{33}{x^2-6x+8}-x^2+6x=16$; г) $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$;

д) $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$; е) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}$;

ж) $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$; и) $3\left(x-\frac{1}{x}\right)+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=4$;

к) $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$;

л) $2\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2-5\left(\frac{x^2-9}{x^2-1}\right)=0.$

155. Дайте відповіді на питання:

а) Які рівняння називаються раціональними? Наведіть приклад.
б) Як розв'язати раціональне рівняння?
в) Назвіть методи розв'язання раціональних рівнянь.

ЗАНЯТТЯ 15

15.1 Системи алгебраїчних рівнянь

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Система алгебраїчних рівнянь	System of algebraic equations	Système d'équations algébriques
Розв'язок системи рівнянь	Solution of the system of equations	Résoudre un système d'équations

Два або більше рівнянь утворюють **систему рівнянь**, якщо мають загальний розв'язок. **Розв'язком системи** двох рівнянь називається пара чисел (x_0, y_0), яка кожне рівняння системи перетворює на тотожність. **Розв'язати систему рівнянь** означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.

Системою алгебраїчних рівнянь називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ .... \\ P_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{cases}$$

де $P_1, P_2, \ldots, P_m$ – многочлени відносно змінних $x_1, x_2, ..., x_n$.

Основними методами розв'язання систем алгебраїчних рівнянь є метод підстановки, метод заміни змінних і метод додавання.

Наприклад, розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ x - y = -1; \end{cases}$$

методом підстановки.

З другого рівняння виразимо x через y, отримаємо $x = y - 1$; підставимо це значення у перше рівняння. Тоді дана система буде рівносильною до системи

$$\begin{cases} x = y - 1, \\ 2(y-1)^2 - y(y-1) + 3y^2 - 7(y-1) - 12y + 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1, \\ 2y^2 - 11y + 5 = 0. \end{cases}$$

Розв’язуючи друге рівняння цієї системи, знайдемо $y_1 = 5, y_2 = 1/2$. Підставляючи знайдені значення y у перше рівняння, знайдемо $x_1 = 4, x_2 = -1/2$. Отже, розв’язками даної системи є пари чисел $(4;\,5);\ (-1/2;\,1/2)$.

Розглянемо другий приклад, розв’яжемо систему

$$\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$$

методом додавання.

Перше рівняння не змінюємо, а до другого рівняння додаємо перше, отримуємо систему, рівносильну даній

$$\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ 2xy = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - x + y = 7, \\ x = \dfrac{10}{y}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - \dfrac{10}{y} + y = 7, \\ x = \dfrac{10}{y}; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 3y - 10 = 0,\ y \neq 0, \\ x = \dfrac{10}{y}; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = -5,\ x_1 = \dfrac{10}{-5} = -2, \\ y_2 = 2,\ x_2 = \dfrac{10}{5} = 5. \end{array} \right.$$

Відповідь: $(5;\,2);\ (-2;\,-5)$.

Система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases}$$

називається **алгебраїчною системою рівнянь другого порядку від двох змінних**.

Метод розв’язання даної системи полягає у заміні даної системи системою, їй рівносильною, в одне з рівнянь якої змінні входять у першому степені, та застосуванні методу підстановки для розв’язання отриманої системи. Якщо $a_1a_2 \neq 0$, то таке рівняння можна отримати, помноживши перше рівняння на a_2, друге на a_1 і віднімаючи з одного отриманого рівняння інше.

Наприклад, розв’яжемо систему

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1, \\ x^2 + 3y^2 - xy - 4y = -1. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння системи на -1 і додамо до другого рівняння.Тоді отримаємо систему

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1, \\ 7y^2 - 9y = -2, \end{cases}$$

яка рівносильна вихідній.

З другого рівняння системи знаходимо $y_1 = 2/7$ и $y_2 = 1$. Підставимо ці значення замість невідомої y у перше рівняння, отримаємо рівняння $49x^2 - 14x + 5 = 0$, яке не має рішень, та рівняння $x^2 - x = 0$, яке має корені $x = 0$ і $x = 1$.

Таким чином, дана система має два розв'язки $(0;1)$ и $(1;1)$.

Таким чином, дана система має два розв'язки

$$\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 + a, \\ y^2 = (z-x)^2 + b, abc \neq 0. \\ z^2 = (x-y)^2 + c, \end{cases}$$

Застосуємо формули скороченого множення, перепишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-x) = a, \\ (y-z+x)(y+z-x) = b, \\ (z-x+y)(z+x-y) = c. \end{cases}$$

Зробимо заміну змінних, нехай $x+y-z=u,\quad x-y+z=v,\quad -x+y+x=w,$ тоді отримаємо для u, v, w систему рівнянь

$$\begin{cases} uv = a, \\ uw = b, \\ vw = c, \end{cases}$$

звідки знаходимо $(abc \neq 0 \Rightarrow uvw \neq 0)$

$$\begin{cases} (uvw)^2 = abc, \\ u = \dfrac{uvw}{vw}, \\ v = \dfrac{uvw}{uw}, \\ w = \dfrac{uvw}{uv}. \end{cases}$$

Таким чином, якщо $abc > 0$, то $u_1 = \sqrt{abc}/c$, $u_2 = -\sqrt{abc}/c$, $v_1 = \sqrt{abc}/b$, $v_2 = -\sqrt{abc}/b$, $w_1 = \sqrt{abc}/a$, $w_2 = -\sqrt{abc}/a$, а якщо $abc < 0$, то система рішень немає.

Повертаючись до старих змінних, знаходимо, що за будь-яких $a, b, c\ (abc > 0)$ розв'язками вихідної системи є трійки чисел

$$\left(\frac{b+c}{2bc}\sqrt{abc};\ \frac{a+c}{2ac}\sqrt{abc};\ \frac{a+b}{2ab}\sqrt{abc}\right),$$

і

$$\left(-\frac{b+c}{2bc}\sqrt{abc};\ -\frac{a+c}{2ac}\sqrt{abc};\ -\frac{a+b}{2ab}\sqrt{abc}\right).$$

Вправи

156. Прочитайте вирази:

система рівнянь – системи рівнянь;
розв’язання системи рівнянь;
розв’язати систему рівнянь;
система рівнянь алгебри;
методи розв’язання систем рівнянь;
метод додавання;
метод підстановки;
метод заміни змінної.

157. Розв’яжіть системи рівнянь:

а) $\begin{cases} y+3x=11 \\ 2x-y=9 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} 4x+9y=1 \\ 5x-18y=-28 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 6x+5y=-8 \\ 4x+7y=2 \end{cases}$;   г) $\begin{cases} 5x+2y=25 \\ 3x+4y=29 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}-\dfrac{x-2y}{2}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2x+y}{2}-\dfrac{x+2y}{3}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$;   е) $\begin{cases} x+\dfrac{2}{x-y}=3 \\ y-\dfrac{2}{x-y}=-1 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} x^2-xy-3y=5 \\ y-2x=0 \end{cases}$;   и) $\begin{cases} 2x^2+xy+y^2=8 \\ x+y=3 \end{cases}$.

158. Розв’яжіть системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x^2+xy-6y^2=0 \\ x^2-4xy+3y^2=-3 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} 8x^2+2xy-3y^2=0 \\ 4x^2-3xy-9y^2=-38 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4x^2-3xy-y^2=0 \\ 32x^2-36xy+9y^2=6 \end{cases}$;   г) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=6 \\ 3x^2-2xy-2y^2=3 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$;   е) $\begin{cases} 2x^2+3y^2-4xy=3 \\ 2x^2-y^2=7 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-5 \\ 2x^2-xy+2y^2=20 \end{cases}$;   и) $\begin{cases} 5x^2+2xy+y^2=20 \\ x^2+2xy+2y^2=25 \end{cases}$;

к) $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x+y+2xy=38 \end{cases}$;   л) $\begin{cases} x+3xy+y=9 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$.

Контрольні питання до теми «Раціональні рівняння та системи рівнянь»

1. Що таке рівняння?
2. Що називають розв’язком (коренем) рівняння?
3. Що означає розв’язати рівняння?
4. Яке рівняння називається лінійним? Наведіть приклад.
5. Яке рівняння називається квадратним? Наведіть приклад.
6. Напишіть формулу для дискримінанта.
7. Скільки коренів має квадратне рівняння, якщо дискримінант більший від нуля? Напишіть формулу для їх обчислення.
8. Скільки коренів має квадратне рівняння, якщо дискримінант дорівнює нулю? Напишіть формулу для їх обчислення.
9. Скільки коренів має квадратне рівняння, якщо дискримінант менший від нуля?
10. Яке рівняння називають тричленним? Наведіть приклад.
11. Що таке біквадратне рівняння? Наведіть приклад.
12. Які рівняння називаються раціональними? Наведіть приклад.
13. Як правильно розв’язати раціональне рівняння?
14. Назвіть методи розв’язання раціональних рівнянь.
15. Що таке система алгебраїчних рівнянь? Наведіть приклад.
16. Що означає розв’язати систему?
17. Назвіть методи розв’язання систем алгебраїчних рівнянь.

Модель контрольної роботи до теми «Раціональні рівняння та системи рівнянь»

1. Розв’яжіть лінійне рівняння: $\frac{3x+7}{8}-\frac{2x+1}{3}=\frac{1+x}{2}$.

2. Розв’яжіть квадратні та тричленне рівняння:

а) $15x^2+8x+1=0$; б) $x^2+6x+9=0$;

в) $4x^2+5x+3=0$; г) $25x^4-40x^2+16=0$.

3. Розв’яжіть дробово-раціональне рівняння: $\frac{x}{x-4}-\frac{1}{x+1}=\frac{2-x}{x+1}+\frac{3}{x-4}$.

4. Розв’яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x^2-y=14; \\ 3x+y=4. \end{cases}$

5. Яке рівняння називається лінійним? Наведіть приклад.

РАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

ЗАНЯТТЯ 16

16.1 Числові проміжки

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Числовий проміжок	Numeric interval	Intervalle numérique
Закритий числовий проміжок	Closed numeric interval	Intervallenumérique fermée
Відрізок	Segment, section	Segment, coupé
Відкритий числовий проміжок (інтервал)	Open numeric interval	Intervalle numérique ouvert
Напівінтервал	Semi-interval	Demi-intervalle
Напіввідкритий інтервал	Half open	Moitié ouverte
Нескінченний інтервал	Infinite interval	Intervalle infini
Порожня множина	Empty set	Ensemble vide

Множину чисел $\{x \in R \mid a \le x \le b\}$ називають **закритим числовим проміжком** або **відрізком**, числа a і b належать цьому проміжку. Позначають відрізок так: $[a\,;b]$, запис вигляду $x \in [a\,;b]$ читають «ікс належить відрізку від *a* до *b*, де *a* та *b* включені».

Множину чисел $\{x \in R \mid a < x < b\}$ називають **відкритим числовим проміжком** або **інтервалом**, числа a і b не належать до цього проміжку. Позначають інтервал так: $]a\,;b[$ або $(a\,;b)$, запис вигляду $x \in (a\,;b)$ читають «ікс належить інтервалу від *a* до *b*, де *a* та *b* не включені».

Множину чисел $\{x \in R \mid a \le x < b\}$ і $\{x \in R \mid a < x \le b\}$ называють **напіввідкритими числовими проміжками** або **напівінтервалами,** у першому випадку число *b* не належить проміжку, у другому випадку число *a* не належить. Позначають напівінтервали так: у першому випадку $[a\,;b)$ або $[a\,;b[$, у другому випадку $(a\,;b]$ або $]a\,;b]$. Запис вигляду $x \in [a\,;b)$ читають «ікс належить напівінтервалу від *a* до *b*, *a* належить напівінтервалу»; $x \in (a\,;b]$ «ікс належить напівінтервалу від *a* до *b*, *b* належить напівінтервалу».

Числовий проміжок $(-\infty\,;+\infty)$ («від мінус нескінченності до плюс нескінченності») є множиною всіх дійсних R чисел.

Числові проміжки вигляду $]a\,;+\infty[$, $]-\infty\,;b[$, $]-\infty\,;+\infty[$ або $(a\,;+\infty)$, $(-\infty\,;b)$, $(-\infty\,;+\infty)$ називаються **нескінченними інтервалами**.

Множина, що не містить жодного елемента, називається **порожньою множиною**. Порожня множина позначається символом $\varnothing$. Запис вигляду $x \in \varnothing$ читають «ікс належить порожній множині».

16.1 Числові нерівності

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Нерівність	Inequality	L'inégalité
Строга нерівність	Strictinequality	Inégalité stricte
Нестрога нерівність	Loose inequality	Inégalité lâche
Рівносильні нерівності	Equivalent inequalities	Inégalités équivalentes
Властивість транзитивності	Transitivity property	Propriété de transitivité
Лінійна нерівність	Linear inequality	Inégalité linéaire
Розв’язок лінійної нерівності	Solution of linear inequality	Solution d’inégalité linéaire
Система лінійних нерівностей	The system of linear inequalities	Système d’inégalités linéaires
Розв’язок системи лінійних нерівностей	The solution of a system of linear inequalities	Solution d’un système d’inégalités linéaires

Два дійсних числа або два алгебраїчних вирази утворюють **нерівність**, якщо їх з’єднує знак > (більше), або знак < (менше), або знак $\le$ (менше або дорівнює), або знак $\ge$ (більше або дорівнює) або знак $\ne$ (не дорівнює).

Читаємо нерівності так:

1) $6 > -2$ («шість більше від числа мінус два»);
2) $a + b < c$ («a плюс b меньше від c»);
3) $\frac{1}{2} + x \ge 5$ («одна друга плюс ікс більше або дорівнює п’яти»);
4) $\frac{m-2}{3} \le 5m$ («дріб $\frac{m-2}{3}$ менше або дорівнює $5m$»);
5) $7 \ne 2$ («сім не дорівнює двом»).

Якщо нерівність містить знак < або знак >, то воно називається **строгою нерівністю**.

Якщо нерівність містить знак $\le$ або знак $\ge$, то воно називається **нестрогою нерівністю**.

Властивості числових нерівностей:

1. Якщо $a > b$, то $b < a$, і, навпаки, якщо $a < b$, то $b > a$.
2. Властивість транзитивності: якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.
3. Якщо $a > b$ і m – будь-яке дійсне число, то $a + m > b + m$, тобто, якщо до лівої та правої частин нерівності, додати одне й те ж саме число, то зміст нерівності не зміниться.

4. Якщо $a > b$ і $m > 0$, то $a \cdot m > b \cdot m$ і $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$, тобто, якщо ліву та праву частини нерівності помножити або розділити на одне й те саме додатне число, то зміст нерівності не зміниться.

5. Якщо $a > b$ і $m < 0$, то $a \cdot m < b \cdot m$ і $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$, тобто, якщо ліву і праву частини нерівності помножити або розділити на одне й те ж від'ємне число, то зміст нерівності зміниться на протилежний.

6. Додавання нерівностей. Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$, тобто дві нерівності однакового змісту можна додавати почленно, в результаті виходить нерівність того ж змісту.

7. Віднімання нерівностей. Якщо $a > b$ і $c < d$, то $a - c > b - d$, або, якщо $a < b$ і $c > d$, то $a - c < b - d$, тобто дві нерівності протилежного змісту можна почленно віднімати, в результаті виходить нерівність такого ж змісту, як нерівність – зменшуване.

8. Множення нерівностей. Якщо a, b, c, d – додатні числа, $a > b$ і $c > d$, то $a \cdot c > b \cdot d$, тобто дві нерівності однакового змісту з додатними членами можна почленно множити, в результаті виходить нерівність того ж змісту.

9. Якщо $a > b$, де a і b – додатні числа, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

10. Ділення нерівностей. Якщо a, b, c, d – додатні числа, $a > b$ і $c < d$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, тобто дві нерівності протилежного змісту з додатними членами можна почленно ділити, в результаті виходить нерівність такого ж змісту, як нерівність – ділене.

11. Піднесення нерівності до степеня. Якщо $a > b$, де a і b – додатні числа, і n – натуральне число, то $a^n > b^n$, тобто ліву та праву частини нерівності з додатними членами можна підносити у степінь, у результаті виходить нерівність того ж змісту.

12. Добування кореня з нерівності. Якщо $a > b$, де a і b – додатні числа, і n – натуральне число, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, тобто з лівої та правої частин нерівності з додатними членами можна добувати корінь, в результаті виходить нерівність того ж змісту.

Дві нерівності

$$f(x) > \varphi(x) \tag{16.1}$$

$$f_1(x) > \varphi_1(x) \tag{16.2}$$

називаються **рівносильними**, якщо множини їх розв'язків збігаються, тобто всі розв'язки нерівності (16.1) є розв'язками нерівності (16.2) і, навпаки, всі розв'язки нерівності (16.2) є розв'язками нерівності (16.1).

Наприклад, нерівності $2x - 1 > 3$ и $3x + 1 > x + 5$ рівносильні, тому що вони мають однакову множину розв'язків $(2, +\infty)$.

Дві нерівності, кожна з яких не має розв'язку, також рівносильні, тому що множину розв'язків кожної нерівності є порожньою: $\varnothing$.

Наприклад, нерівності $x^2 < -1$ і $2x^2 + 1 < 0$ є рівносильними.

Якщо до лівої та правої частин нерівності

$$f(x) > \varphi(x)$$

додати одне й те ж саме число або алгебраїчний вираз $F(x)$, яке має зміст при всіх допустимих значеннях *x* даної нерівності, то отримаємо нерівність

$$f(x) + F(x) > \varphi(x) + F(x),$$

яка є рівносильною вихідній нерівності.

Наприклад, нехай задано нерівність $2x^2 - 3 > 1$. Додамо до лівої та правої частин нерівності число 7, отримаємо нерівність $2x^2 + 4 > 8$, яка є рівносильною вихідній нерівності.

Нехай задано нерівність $3x < 5$. Область допустимых значень (ОДЗ) данної нерівності – множина усіх дійсних чисел. Вираз $\frac{2}{1+x^2}$ має зміст при всіх значеннях x з ОДЗ. Додамо до лівої та правої частин нерівності цей вираз, отримаємо нерівність $3x + \frac{2}{1+x^2} < 5 + \frac{2}{1+x^2}$, рівносильне вихідній нерівності. Члени нерівності можна переносити з однієї частини нерівності до іншої з протилежним знаком.

Наприклад, нерівність $3x - 8 > 2x + 5$ рівносильна нерівності $3x - 2x > 5 + 8$ або ж $x > 13$.

Якщо обидві частини нерівності

$$f(x) > \varphi(x)$$

помножити або розділити на одне й те саме додатне число m $(m > 0)$, то отримаємо нерівність $mf(x) > m\varphi(x)$ або $\frac{f(x)}{m} > \frac{\varphi(x)}{m}$, рівносильну даній нерівності.

Наприклад, дано нерівність $2x - 1 < 3 + x$. Помножимо ліву та праву частини нерівності на число 4, отримаємо $4(2x-1) < 4(3+x)$, або $8x - 4 < 12 + 4x$. Ця нерівність рівносильна даній.

Якщо обидві частини нерівності

$$f(x) > \varphi(x)$$

помножити або розділити на одне й те саме невід'ємне число n $(n < 0)$ і змінити знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність $n\,f(x) < n\varphi(x)$ або $\frac{f(x)}{n} < \frac{\varphi(x)}{n}$, рівносильну даній нерівності.

Наприклад, дано нерівність $2 - 3x < 0$. Помножимо обидві частини нерівності на (–1) та змінимо знак нерівності на протилежний, отримаємо $(2-3x)(-1) > 0(-1)$ або $3x - 2 > 0$. Ця нерівність рівносильна вихідній нерівності.

16.3 Лінійні нерівності

Нерівності вигляду

$$ax+b>0 \text{ або } ax+b<0,$$

де a і b – деякі числа, x – змінна, називаються **лінійними**.

Розв’яжемо лінійну нерівність $ax+b>0$ у загальному вигляді. Перенесемо член b з лівої частини нерівності у праву з протилежним знаком, отримаємо $ax>-b$. Знайдемо розв'язки цієї нерівності при різних значеннях a і $-b$.

Нехай $a>0$. Розділимо обидві частини нерівності $ax>-b$ на a, отримаємо $x>-\frac{b}{a}$. Ця нерівність показує, що всі значення x, які більші, від числа $-\frac{b}{a}$, є розв’язками цієї нерівності. На числовій осі (рис. 16.1) всі розв’язки нерівності утворюють множину точок, які знаходяться праворуч від точки $-\frac{b}{a}$, тобто інтервал $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$.

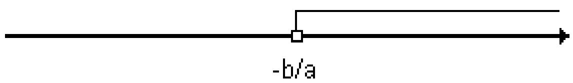


Рисунок 16.1

Нехай $a<0$. Розділимо обидві частини нерівності $ax>-b$ на a і змінимо знак нерівності на протилежний, отримаємо $x<-\frac{b}{a}$. Ця нерівність показує, що всі значення x , які менші, від числа $-\frac{b}{a}$ є розв’язками цієї нерівності. На числовій осі (рис. 16.2) усі розв’язки нерівності утворюють множину точок, що знаходяться ліворуч від точки $-\frac{b}{a}$, тобто інтервал $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$.

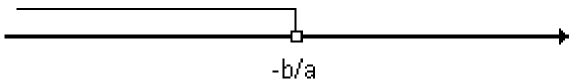


Рисунок 16.2

Якщо $a=0$ і $-b<0$, то нерівність $ax>-b$ набуває вигляду $0\cdot x>-b$. Це тотожна нерівність, тому що за будь-якого $x\in R$ ліва частина нерівності дорівнює нулю, а права частина – від’ємне число ($0>-b$ – вірна нерівність).

Отже, розв’язками нерівності є множина усіх дійсних чисел R, або нескінченний інтервал $x \in (-\infty; +\infty)$.

Якщо $a = 0$ і $-b > 0$, то отримаємо нерівність $0 \cdot x > -b$. Ліва частина отриманої нерівності при всіх $x \in R$ дорівнює нулю, а права частина – додатне число ($0 > -b$ – невірна нерівність). Отже, нерівність не має розв’язків. Множиною розв’язків нерівності є пуста множина, тобто $x \in \varnothing$.

Розглянемо приклади розв’язання нерівностей.

Приклад 1. Розв’язати нерівність $2x - 3 > x - 5$.

Перенесемо член x ліворуч зі знаком «мінус», а член (–3) праворуч зі знаком «плюс», отримаємо:

$$2x - x > 3 - 5, \text{ або } x > -2.$$

Отже, множина усіх чисел, які більші від числа (–2), є розв’язками даної нерівності (рис. 16.3):

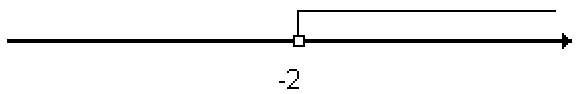


Рисунок 16.3

Наприклад, значення $x = 4{,}5$ є розв’язком нерівності. Перевіримо це. Підставимо число 4,5 замість x у цю нерівність, отримаємо $2 \cdot 4{,}5 - 3 > 4{,}5 - 5$, або $9 - 3 > -0{,}5$, или $6 > -0{,}5$ – правильна нерівність.

Відповідь: $x \in (-2; +\infty)$.

Приклад 2. Розв’язати нерівність $x + 2 > 3x - 4$.

Спростимо нерівність: $x - 3x > -4 - 2$, або $-2x > -6$. Розділимо обидві частини нерівності на (–2) та змінимо знак нерівності на протилежний, отримаємо $\dfrac{-2x}{-2} < \dfrac{-6}{-2}$, або $x < 3$. Отже, множина усіх чисел, які менші, від 3, є розв’язками даної нерівності (рис. 16.4).

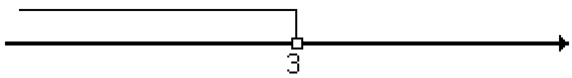


Рисунок 16.4

Відповідь: $x \in (-\infty; 3)$.

Приклад 3. Розв’язати нерівність $\dfrac{2x+1}{3} - 1 < \dfrac{x+1}{2}$.

Спростимо нерівність. Спочатку звільнимось від дробів. Помножимо ліву та праву частини нерівності на спільний знаменник 6. Отримаємо:

$$2(2x+1) - 6 < 3(x+1).$$

Розкриємо дужки та зведемо подібні члени:

$4x+2-6<3x+3$, або $4x-4<3x+3$, або $4x-3x<3+4$, або $x<7$ (рис. 16.5).

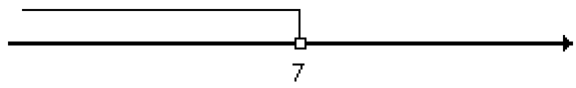


Рисунок 16.5

Відповідь: $x \in (-\infty;\, 7)$.

Приклад 4. Розв’язати нерівність $(3x+1)(x-1)-3x^2>5-2x$.

Спростимо нерівність, отримаємо:

$3x^2-3x+x-1-3x^2>5-2x$, або $-2x-1>5-2x$, або $-2x+2x>5+1$, або $0\cdot x>6$.

При всіх значеннях x ліва частина нерівності $0\cdot x>6$ дорівнює нулю, тобто не може бути більше шести. Отже, ця нерівність не має рішення.

Відповідь: $x \in \varnothing$.

16.4 Системи лінійних нерівностей

Системою лінійних нерівностей називаються дві або декілька лінійних нерівностей, які містять одну й ту саму змінну величину.

Наприклад, $\begin{cases} 2x-1>3x+5 \\ -7x<9 \end{cases}$ – це система двох лінійних нерівностей,

$\begin{cases} 5x+1<3-2x, \\ 3x>2, \\ 7>-5x+8 \end{cases}$ – це система трьох лінійних нерівностей.

Розв’язком системи лінійних нерівностей називається значення змінної, яке задовольняє кожній нерівності системи.

Наприклад, значення $x=2$ є розв’язком системи

$$\begin{cases} 3x<12, \\ x-1>0. \end{cases}$$

Перевіримо це. Підставимо значення $x=2$ у кожну нерівність системи, отримаємо:

$\begin{cases} 3\cdot 2<12 \\ 2-1>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} 6<12 \\ 1>0 \end{cases}$ – вірні нерівності.

Розв’язати систему лінійних нерівностей – значить знайти множину її розв’язків.

При розв’язанні системи спочатку знаходять безліч розв’язків кожної нерівності системи, а потім знаходять загальні для всіх нерівностей розв’язки. Тобто, розв'язок системи – це перетин множини розв’язків усіх нерівностей системи.

Розв'яжемо систему двох лінійних нерівностей

$$\begin{cases} a_1x+b_1>0, \\ a_2x+b_2>0 \end{cases}$$

у загальному вигляді. Для цього потрібно розв'язати кожну нерівність системи та знайти перетин множини їх рішень.

Нехай $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$, тоді при розв'язанні кожної нерівності системи слід розглянути два випадки.

Из першої нерівності $a_1x+b_1>0$ отримаємо $a_1x>-b_1$, звідки: а) якщо $a_1>0$, то $x>-\frac{b_1}{a_1}$; б) якщо $a_1<0$, то $x<-\frac{b_1}{a_1}$.

З другої нерівності $a_2x+b_2>0$ отримаємо $a_2x>-b_2$, звідки: а) якщо $a_2>0$, то $x>-\frac{b_2}{a_2}$, б) якщо $a_2<0$, то $x<-\frac{b_2}{a_2}$.

Позначимо $-\frac{b_1}{a_1}=a,\ -\frac{b_2}{a_2}=b$. При різних значеннях $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ можуть вийти системи чотирьох різних видів. Розв'яжемо ці системи.

1) $\begin{cases} x>a & ...\ \ ]a;+\infty[\\ x>b & ...\ \ ]b;+\infty[\end{cases} \ (b>a)$

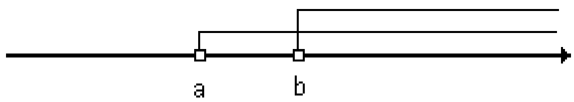


Рисунок 16.6

Значення $x>b$ – спільні розв'язки нерівностей системи (рис. 16.6).

Розв'язок системи: $]a;+\infty[\bigcap]b;+\infty[=]b;+\infty[$.

2) $\begin{cases} x<a & ...\ \ ]-\infty;a[\\ x<b & ...\ \ ]-\infty;b[\end{cases} \ (b>a)$ (рис. 16.7).

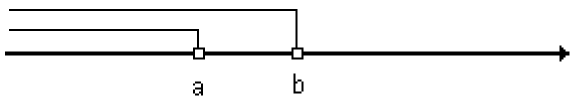


Рисунок 16.7

Значення $x<a$ – спільні розв'язки нерівностей системи.

Розв'язок системи: $]-\infty;a[\bigcap]-\infty;b[=]-\infty;a[$.

3) $\begin{cases} x>a & ...\ \ ]a;+\infty[\\ x<b & ...\ \ ]-\infty;b[\end{cases} \ (b>a)$ (рис. 16.8).

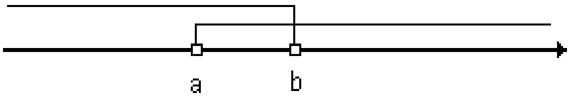


Рисунок 16.8

Значення $a < x < b$ – спільні розв’язки нерівностей системи.

Розв’язок системи: $\left]a;\,+\infty\right[\cap\left]-\infty;\,b\right[=\left]a;\,b\right[$.

4) $\begin{cases} x < a \quad \ldots \quad \left]-\infty;\ a\right[\\ x > b \quad \ldots \quad \left]b;\,+\infty\right[\end{cases}$ $\left(b > a\right)$ (рис. 16.9).

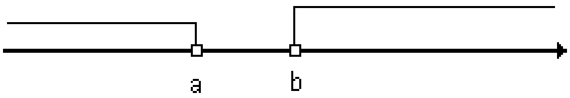


Рисунок 16.9

Нерівності системи не мають спільних розв’язків.

Розв’язок системи: $\left]-\infty;\,a\right[\cap\left]b;\,+\infty\right[=\varnothing$, тобто система не має розв'язків.

Приклад 1. Розв’язати систему трьох лінійних нерівностей

$$\begin{cases} x-3>0, \\ 2x+1>0, \\ 4x-8<0. \end{cases}$$

Потрібно розв’язати кожну нерівність системи та знайти перетин множини їх розв'язків:

$$x-3>0 \Rightarrow x>3 \Rightarrow x \in \left]3;\,+\infty\right[,$$

$$2x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left]-\frac{1}{2};\,+\infty\right[,$$

$$4x-8<0 \Rightarrow x<2 \Rightarrow x \in \left]-\infty;\,2\right[.$$

$$\left]3;\,+\infty\right[\cap\left]-\frac{1}{2};\,+\infty\right[\cap\left]-\infty;\,2\right[=\varnothing \text{ (рис. 16.10).}$$

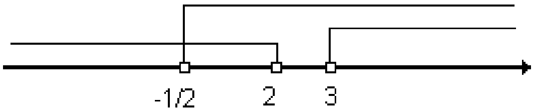


Рисунок 16.10

Система не має рішень.

Розглянемо приклади розв’язання нерівностей, які містять дробові члени.

Приклад 2. Розв’язати нерівність $\dfrac{x+2}{3x-1}>0$.

Можливі два випадки: $\begin{cases} x+2>0, \\ 3x-1>0, \end{cases}$ або $\begin{cases} x+2<0, \\ 3x-1<0. \end{cases}$

Тобто ця нерівність рівносильна сукупності двох систем. Розв'яжемо першу систему:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ 3x-1>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ 3x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x>\frac{1}{3}.$$

Інтервал $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ – розв'язок системи.

Розв'яжемо другу систему:

$$\begin{cases} x+2<0 \\ 3x-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x<\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x<-2.$$

Інтервал $]-\infty;-2[$ – розв'язок системи.

Розв'язки кожної системи є розв'язками даної нерівності. Отже, розв'язки цієї нерівності – це об'єднання інтервалів $]-\infty;-2[\,\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

Відповідь: $x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\dfrac{x-1}{2x+3}<0$.

Дріб від'ємний, коли його чисельник і знаменник мають різні знаки:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 2x+3<0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-1<0, \\ 2x+3>0, \end{cases}$$

тобто ця нерівність рівносильна сукупності двох систем. Розв'яжемо першу систему:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 2x+3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-1{,}5 \end{cases}$$

система не має розв'язків: $x\in\varnothing$.

Розв'яжемо другу систему:

$$\begin{cases} x-1<0 \\ 2x+3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x>-1{,}5 \end{cases} \Rightarrow -1{,}5<x<1.$$

Множина розв'язків системи – інтервал $]-1{,}5;1[$.

Розв'язки даної нерівності: $\varnothing\cup\,]-1{,}5;1[\,=\,]-1{,}5;1[$. Відповідь: $x\in\,]-1{,}5;1[$.

Вправи

159. Прочитайте вирази:

числовий проміжок – числові проміжки;
закритий числовий проміжок – відрізок;

відкритий числовий проміжок – інтервал;
напіввідкритий числовий проміжок
напівінтервал – напівінтервали;
нескінченний проміжок, нескінченні проміжки;
нескінченний інтервал; нескінченні інтервали;
порожня множина;
числова нерівність – числові нерівності;
рівносильні нерівності;
лінійна нерівність – лінійні нерівності;
система лінійних нерівностей;
розв’язок системи лінійних нерівностей.

160. Розв’яжіть лінійні нерівності:

а) $3-2x<12-5x$;

б) $2x-3<7(1+x)$;

в) $3{,}5(x+1)>4x-\dfrac{x-1}{2}$;

г) $\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+2}{3}<2+\dfrac{x}{6}$;

д) $\dfrac{3x+5}{4}-1\le\dfrac{x-2}{3}+x$;

е) $\dfrac{37-3x}{2}+9<\dfrac{2x-7}{4}-2x$.

161. Розв’яжіть лінійні нерівності:

а) $\dfrac{5-x}{4}-9<\dfrac{2x-1}{3}$;

б) $8+\dfrac{3x-4}{5}>\dfrac{x+1}{6}-\dfrac{5x+3}{8}$;

в) $\dfrac{6-5x}{5}-\dfrac{3x-1}{2}<7-x$;

г) $\dfrac{1}{2}(3x-1)+\dfrac{x}{5}<7x+10{,}1$;

д) $4-\dfrac{3}{2}x>\dfrac{13}{8}-\dfrac{1}{6}(4x-3)$;

е) $3-\dfrac{3x}{2}>\dfrac{5}{8}-\dfrac{4x-3}{6}$.

162. Розв’яжіть системи лінійних нерівностей:

а) $\begin{cases}3x-5>23-4x,\\ 7x+3<9x-1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}10(x-1)+11>4x+5(x+1),\\ 3x-5<2(x-1);\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x+1>3x+4,\\ 5x+3\ge 8x+21;\end{cases}$

г) $\begin{cases}2(3x-4)<3(4x-3)+16,\\ 4(1+x)<3x+5;\end{cases}$

д) $\begin{cases}5x-2\ge 2x+1,\\ 2x+3<18-3x;\end{cases}$

е) $\begin{cases}3x>2-\dfrac{2x-13}{11},\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{2}{3}(x-7)<\dfrac{3x-20}{9};\end{cases}$

ж) $\begin{cases}x-1>2x-3,\\ 4x+5>x+17;\end{cases}$

и) $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}\ge\dfrac{x-3}{4}-x,\\ 1-0{,}5x>x-4;\end{cases}$

к) $\begin{cases}3x+7>7x-9,\\ x-3>-3x+1;\end{cases}$

л) $\begin{cases}6x-7>5x-1,\\ 3x+6>8x-4.\end{cases}$

163. Розв'яжіть системи лінійних нерівностей:

а) $\begin{cases} 2-\dfrac{5+x}{7}<1-\dfrac{9-x}{14}, \\ 12-\dfrac{1}{3}\left(47-\dfrac{60}{x}\right)>3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{7-x}{2}-3\le\dfrac{3+x}{5}-4, \\ \dfrac{5}{3}x+5(3-2x)<12-5x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2<\dfrac{2x-8}{6}-\dfrac{18-4x}{3}, \\ 9-\left(\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{2}{3}\right)>x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x-1}{8}>x, \\ x-1<3-\dfrac{x+1}{2}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{4}+\dfrac{19-2x}{2}<2x, \\ \dfrac{2x+15}{9}>\dfrac{1}{5}(x-1)+\dfrac{x}{3}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 1-\dfrac{3x-88}{7}>5x, \\ 4x+5-\dfrac{1}{6}\left(25x+29\dfrac{1}{2}\right)<0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{x}{6}<2-\dfrac{x+5}{2}, \\ 1-\dfrac{x+5}{8}+\dfrac{4-x}{2}<3x-\dfrac{x+1}{4}; \end{cases}$ и) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{13-x}{2}>\dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+3)}{6}, \\ \dfrac{2x+7}{3}<\dfrac{3x+5}{7}+8+\dfrac{10-3x}{5}. \end{cases}$

164. Дайте відповіді на питання:

а) Що таке нерівність? Наведіть приклад.
б) Які нерівності називаються строгими? Наведіть приклад.
в) Які нерівності називаються нестрогими? Наведіть приклад.
г) Які нерівності називаються рівносильними? Наведіть приклад.
д) Які нерівності називаються лінійними? Наведіть приклад.
е) Що таке система лінійних нерівностей? Наведіть приклад.

ЗАНЯТТЯ 17

17.1 Квадратні нерівності

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Квадратна нерівність	Square inequality	Inégalité carrée
Квадратний тричлен	Square three-member	Carré à trois membres
Квадратична функція	Quadratic function	Fonction quadratique
Парабола	Parabola	Parabole
Вітки параболи	Parabola branches	Branches de parabole

Квадратна нерівність – це нерівності вигляду

$$ax^2+bx+c\ge 0,$$

де $a \neq 0$, a, b, c – числа, x – змінна. Знак нерівності може бути >, <, $\geq$, $\leq$.

При розв'язанні квадратних нерівностей зручно застосовувати формулу

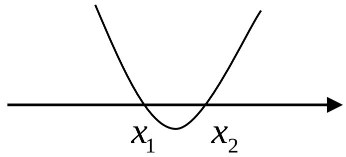
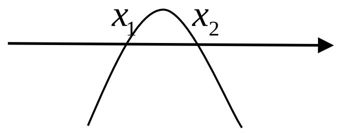
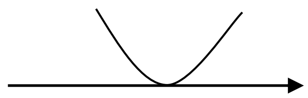
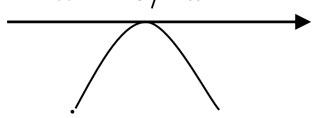
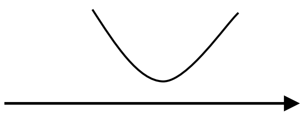
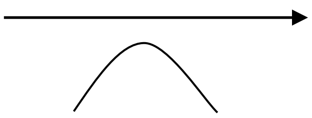
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

розкладання квадратного тричлена на множники.

Графіком квадратичної функції є парабола.

Розглянемо у загальному вигляді розв'язання квадратних нерівностей (табл. 17.1):

Таблиця 17.1 – Розв'язання квадратних нерівностей

D	a	Графік	Вид нерівності	Розв'язання
1	2	3	4	5
D>0	a>0	 вітки вгору	1) $ax^2+bx+c>0$; 2) $ax^2+bx+c\geq 0$; 3) $ax^2+bx+c<0$; 4) $ax^2+bx+c\leq 0$	1) $x<x_1, x>x_2$; 2) $x\leq x_1$, $x\geq x_2$; 3) $x_1<x<x_2$; 4) $x_1\leq x\leq x_2$
	a<0	 вітки вниз	1) $ax^2+bx+c>0$; 2) $ax^2+bx+c\geq 0$; 3) $ax^2+bx+c<0$; 4) $ax^2+bx+c\leq 0$	1) $x_1<x<x_2$; 2) $x_1\leq x\leq x_2$; 3) $x<x_1, x>x_2$; 4) $x\leq x_1$, $x\geq x_2$
D=0	a>0	 $x=-b/2a$ вітки вгору	1) $ax^2+bx+c>0$; 2) $ax^2+bx+c\geq 0$; 3) $ax^2+bx+c<0$; 4) $ax^2+bx+c\leq 0$	1) $x\in R,\ x\neq {-b}/{2a}$; 2) $x\in R$; 3) $x\in\varnothing$; 4) $x=-b/2a$
D=0	a<0	$x=-b/2a$  вітки вниз	1) $ax^2+bx+c>0$; 2) $ax^2+bx+c\geq 0$; 3) $ax^2+bx+c<0$; 4) $ax^2+bx+c\leq 0$	1) $x\in\varnothing$; 2) $x=-b/2a$; 3) $x\in R,\ x\neq {-b}/{2a}$ 4) $x\in R$
D<0	a>0	 вітки вгору	1) $ax^2+bx+c>0$; 2) $ax^2+bx+c\geq 0$; 3) $ax^2+bx+c<0$; 4) $ax^2+bx+c\leq 0$	1) $x\in R$; 2) $x\in R$; 3) $x\in\varnothing$; 4) $x\in\varnothing$
	a<0	 вітки вниз	1) $ax^2+bx+c>0$; 2) $ax^2+bx+c\geq 0$; 3) $ax^2+bx+c<0$; 4) $ax^2+bx+c\leq 0$	1) $x\in\varnothing$; 2) $x\in\varnothing$; 3) $x\in R$; 4) $x\in R$

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжемо квадратну нерівність $4x^2 - 4x - 15 \leq 0$.

Обчислимо дискримінант

$$D=16+240=256=16^2>0,$$

тому $x_1=-1,5$; $x_2=2,5$. Так як $a=4>0$ і $D=256>0$, то маємо випадок $x_1\le x\le x_2$, значить $-1,5\le x\le 2,5$ або $x\in[-1,5\,;\,2,5]$.

Відповідь: $x\in[-1,5\,;\,2,5]$.

Приклад 2. Розв'яжемо квадратну нерівність $x^2-4>4-2x$.

Виконаємо тотожні перетворення:

$$x^2-4>4-2x;\ x^2+2x-8>0.$$

Обчислимо дискримінант

$$D=4+32=36=6^2>0,$$

тому $x_1=-4$; $x_2=2$. Так як $a=1>0$ и $D=36>0$, то маємо випадок $x<x_1$, $x>x_2$, значить $x<-4$, $x>2$ або $x\in(-\infty\,;-4)\cup(2\,;+\infty)$.

Відповідь: $x\in(-\infty\,;-4)\cup(2\,;+\infty)$

Приклад 2. Розв'яжемо квадратну нерівність $2x^2-3x+4<0$.

Обчислимо дискримінант

$$D=9-32=-23<0,$$

тому квадратний тричлен дійсних коренів не має. Так як $a=2>0$ і $D=-23<0$, то маємо випадок $x\in\varnothing$.

Відповідь: $x\in\varnothing$

17.2 Раціональні нерівності

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Раціональні нерівності	Rational inequalities	Inégalités rationnelles
Нуль функції	Function zero	Fonction zéro
Корінь многочлена	Root of polynomial	Racine de polynôme
Критичні точки	Critical points	Points critiques
Метод інтервалів	Spacing method	Méthode d'espacement

Раціональною нерівністю називається нерівність вигляду

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\ge 0,$$

де $Q_m(x)\ne 0$, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени. Знак нерівності може бути >, <, $\ge$, $\le$.

Число a називається **нулем функції** $y=P_n(x)$ або **коренем многочлена** $P_n(x)$, якщо $P_n(a)=0$.

Наприклад, многочлен $P_2(x)=6-5x+x^2$ має два нуля $x=2$ і $x=3$, так як $P_2(2)=0$ і $P_2(3)=0$. Многочлен може взагалі не мати нулів: наприклад,

$P_0(x)=1$ або $P_2(x)=1+x^2$. Відомо, що кількість нулів многочлена не перебільшує його степеня.

Нулі многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ будемо називати **критичними значеннями** змінної чи **критичними точками** раціональної функції $y=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Наприклад, для функції

$$y=\frac{P_3(x)}{Q_2(x)}=\frac{x^3-6x^2-x+6}{x^2+3x+2}=\frac{(x-1)(x+1)(x-6)}{(x+1)(x+2)}$$

критичними значеннями змінної є

$$x=-2,\quad x=-1,\quad x=1,\quad x=6.$$

Щоб розв'язати раціональну нерівність, застосовують **метод інтервалів**. Він ґрунтується на наступній властивості раціональної функції: в інтервалі між двома своїми сусідніми критичними точками раціональна функція зберігає знак.

Метод інтервалів полягає в наступному:

- раціональну нерівність приводять до стандартного вигляду:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0 \text{ або } \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0 \text{ (у випадку строгої нерівності),}$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\ge 0 \text{ або } \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\le 0 \text{ (у випадку нестрогої нерівності);}$$

- потім знаходять усі критичні точки раціональної функції;
- критичні точки відзначають на числовій осі. Числова вісь розбивається критичними точками на кінцеве число інтервалів, кожному з яких ліва частина нерівності зберігає знак. Щоб визначити знак лівої частини на всьому інтервалі, достатньо визначити знак $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в одній точці цього інтервалу і тим самим встановити, чи входить цей інтервал в множину розв'язків даної нерівності.

Самі критичні точки у разі строгої нерівності не входять до множини розв'язків; а у разі нестрогої нерівності – входять, якщо не є нулями багаточлена $Q_m(x)$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-4x}>0.$$

Знайдемо нулі чисельника:

$$x^3-3x^2-x+3=x^2(x-3)-(x-3)=(x-3)(x-1)(x+1).$$

Отже, нулі чисельника $x=-1,\ x=1,\ x=3$, а нулі знаменника $x=0,\ x=4$.

Нерівність можна записати таким чином:

$$\frac{(x-3)(x-1)(x+1)}{x(x-4)} > 0 .$$

Критичними точками раціональної функції є

$$x=-1,\ x=0,\ x=1,\ x=3,\ x=4.$$

Числова вісь розбивається цими точками на шість інтервалів. Позначимо точки на числовій осі. Знайдемо знак функції на кожному інтервалі (рис. 17.1). Оскільки нерівність строга, самі критичні точки не є розв’язками.

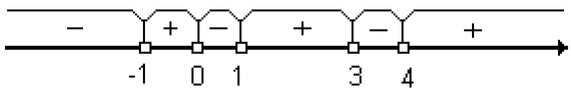


Рисунок 17.1

Відповідь: $x \in (-1\,;0) \cup (1\,;3) \cup (4\,;+\infty)$.

Деякі алгебраїчні вирази степенів вищих від другої приводять до вигляду

$$P_n(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \ . \ . \ . \ (x-a_n)^{k_n} .$$

Нерівності, многочлени яких представлені так чином, розв’язуються за допомогою **узагальненого методу інтервалів**. На числову вісь наносять числа $a_1, a_2, . . ., a_n$. У проміжку праворуч від найбільшого з цих чисел, тобто праворуч a_n, ставлять знак плюс. У наступному проміжку (читаючи зправа наліво) ставлять знак плюс, якщо k_n – парне число, і знак мінус, якщо k_n – непарне число. У наступному за ним проміжку ставлять знак згідно з правилом: многочлен $P(x)$ при переході через точку a_{n-1} змінює знак, якщо k_{n-1} – непарне число; і многочлен $P(x)$ при переході через точку a_{n-1} не змінює знак, якщо k_{n-1} – парне число. Потім розглядають наступний проміжок, і в ньому ставлять знак, користуючись тим самим правилом. Таким чином, розглядають усі проміжки.

Приклад 2. Розв’язати нерівність

$$\left(x^2-3x+2\right)\left(x^3-3x^2\right)\left(4-x^2\right) \le 0 .$$

Оскільки

$$x^2-3x+2=(x-2)(x-1), \qquad x^3-3x^2 = x^2(x-3), \qquad 4-x^2 = -(x-2)(x+2)$$

то дана нерівність рівносильна нерівності

$$-(x+2)x^2(x-1)(x-2)^2(x-3) \le 0 \text{ або } (x+2)x^2(x-1)(x-2)^2(x-3) \ge 0 .$$

Використовуючи узагальнений метод інтервалів (рис. 17.2), отримуємо розв'язок нерівності $x \in [-2\,;1] \cup \{2\} \cup [3\,;+\infty)$.

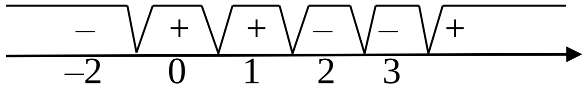


Рисунок 17.2

Відповідь: $x \in [-2\,;1] \cup \{2\} \cup [3\,;+\infty)$.

Вправи

165. Прочитайте вирази:

квадратна нерівність – квадратні нерівності;
квадратний тричлен; квадратична функція;
парабола; вітки параболи;
раціональна нерівність – раціональні нерівності;
нуль функції – нулі функції;
корінь многочлена;
критичні точки функції;
метод інтервалів – узагальнений метод інтервалів.

166. Розв’яжіть квадратні нерівності:

а) $x^2 - 16 < 0$;
б) $3x^2 + 2x - 1 > 0$;
в) $-x^2 - x + 2 > 0$;
г) $x^2 + 1 > 0$;
д) $x^2 + x + 3 \le 0$;
е) $x^2 + 2x + 1 \le 0$;
ж) $-4x^2 + 12x - 9 > 0$;
и) $3x^2 + 2 > 0$.

167. Розв’яжіть раціональні нерівності:

а) $(x+1)^2(x-2) > 0$;
б) $(x-1)(x+2) > x+2$;
в) $x^3(3-x) > 0$;
г) $(x+4)(x+6) < 6(x+6)$;
д) $(x-4)^4(1-3x) < 0$;
е) $(2x+3)(3x-2)(x^2+2) < 0$;
ж) $(1-x)^5(6-x) < 0$;
и) $(x-8)(8-5x)(x-2)^2 < 0$.

168. Розв’яжіть дробово-раціональні нерівності:

а) $\dfrac{2x-5}{x-2} > 0$;
б) $\dfrac{x+1}{x+2} > 3$;
в) $\dfrac{x+3}{7-x} < 0$;
г) $\dfrac{4-3x}{3-2x} < 1$;
д) $\dfrac{3-0{,}5x}{4-\frac{2}{3}x} > 0$;
е) $\dfrac{9x}{10+x} > 4$;
ж) $\dfrac{7x+4}{5(x+1)} < 0$;
и) $\dfrac{5-x}{x-6} < \dfrac{2}{3}$.

169. Розв’яжіть дробово-раціональні нерівності:

а) $(3x^2 - 13x + 4)(4x^2 + 12x + 9) < 0$;.
б) $\dfrac{8+4x}{4x+x^2} \le \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{4+x}$;

в) $(2x-5)(x^2-4)(x^3+8)\le 0$;

г) $\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x+1}<\frac{3}{(x-2)^2}$;

д) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-10x+20}<0$;

е) $\frac{x+2}{x^3-x^2}<\frac{2x+1}{x^3+3x^2}$;

ж) $\frac{2x-5}{x^2-6x-7}<\frac{1}{x-3}$;

и) $\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{(x+2)^2}\ge\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x}$;

к) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\ge\frac{x+1}{x}$;

л) $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}\ge\frac{2x-1}{x^3+1}$.

Контрольні питання до теми «Раціональні нерівності»

1. Що таке нерівність? Наведіть приклад.
2. Які нерівності називаються строгими? Наведіть приклад.
3. Які нерівності називаються нестрогими? Наведіть приклад.
4. Які нерівності називаються рівносильними? Наведіть приклад.
5. Що таке лінійна нерівність? Наведіть приклад.
6. Що таке система лінійних нерівностей? Наведіть приклад.
7. Які нерівності називаються квадратними? Наведіть приклад.
8. Які нерівності називаються раціональними? Наведіть приклад.
9. Яким методом розв'язуються раціональні нерівності?

Модель контрольної роботи до теми «Раціональні нерівності»

1. Розв'яжіть лінійну нерівність: $\frac{x+1}{4}-\frac{4x+1}{5}\le\frac{7-3x}{10}$.

2. Розв'яжіть систему лінійних нерівностей: $\begin{cases}\frac{3+x}{4}\ge 1\\ \frac{1-2x}{6}<0\end{cases}$.

3. Розв'яжіть квадратну нерівність: $-2x^2+9x+5\ge 0$.

4. Розв'яжіть раціональні нерівності:

а) $(x-3)^3(x+1)^4x<0$;

б) $\frac{2x-5}{x-2}<8$;

в) $\frac{(x+1)x^2(x-1)^3}{(2x-5)(x-2)^6}\ge 0$.

5. Які нерівності називаються нестрогими? Наведіть приклад.

РІВНЯННЯ З МОДУЛЯМИ, ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

ЗАНЯТТЯ 18

18.1 Рівняння з модулями

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Модуль	Module	Module
Абсолютна величина	Absolute value	Valeur absolue
Рівняння з модулем	Equation with module	Équation avec module
Ірраціональне рівняння	Irrational equation	Équation irrationnelle

Модулем (абсолютною величиною) $|a|$ дійсного числа a називається

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a \prec 0. \end{cases}$$

Читаємо вираз з модулем так:

$|a|$ – «модуль числа (виразу) *a*» або «число (вираз) *a* за модулем». Наприклад, $|x-2|$ «модуль виразу ікс мінус два» або «вираз ікс мінус два за модулем».

Модуль додатного числа дорівнює тому ж числу, наприклад $|89| = 89$. Модуль від'ємного числа дорівнює числу, йому протилежному, наприклад $|-89| = 89$.

Рівняння, яке містить під знаком модуля змінну, називають **рівнянням з модулем**.

Наприклад, $x - |2+x| = 3 + |x|$ це рівняння з модулем.

При розв'язанні рівнянь з модулями застосовується **метод проміжків**. Він полягає у наступному:

- прирівнюємо до нуля вирази, що стоять під знаком модуля;
- отримані значення буквених величин відкладаємо в області визначення даного виразу;
- досліджуємо алгебраїчний вираз в кожному з отриманих проміжків.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$|x-2| + |x-3| + |2x-8| = 9.$$

Прирівняємо до нуля вирази, що стоять під знаком модуля, отримаємо точки $x = 2,\ x = 3,\ x = 4$ (ОДЗ рівняння – вся числова вісь).

Розглянемо перший із отриманих інтервалів $x \le 2$. Тут модулі розкриваються з такими знаками $|x-2| = -(x-2)$, $|x-3| = -(x-3)$, $|2x-8| = -(2x-8)$ і, отже,

$$-(x-2+x-3+2x-8) = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

знайдене значення x задовольняє умову $x \le 2$ і є коренем рівняння.

Розглянемо другий інтервал $2 < x \le 3$. Після аналогічних перетворень $|x-2| = (x-2)$, $|x-3| = -(x-3)$, $|2x-8| = -(2x-8)$ отримаємо

$$x-2-x+3-2x+8 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Цей корінь не належить даному проміжку, і, отже, не є рішенням рівняння.

Розглянемо третій інтервал: $3 < x \le 4$. Виконуючи аналогічні перетворення $|x-2| = (x-2)$, $|x-3| = (x-3)$, $|2x-8| = -(2x-8)$ отримаємо

$$x-2+x-3-2x+8 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \varnothing.$$

На четвертому інтервалі $x > 4$. Тоді $|x-2| = (x-2)$, $|x-3| = (x-3)$, $|2x-8| = (2x-8)$ і рівняння набуває вигляду

$$x-2+x-3+2x-8 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 22 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5{,}5.$$

Знайдене значення $x \in (4; +\infty)$ і є коренем рівняння.

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = 5{,}5$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Рішення: Зробимо заміну $\sqrt{x-1} = y \quad \Rightarrow \quad x = y^2 + 1$. Отримаємо

$$\sqrt{y^2+4-4y} + \sqrt{y^2+9-6y} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |y-2| + |y-3| = 1.$$

Таким чином, ірраціональне рівняння після перетворення перетворилося на рівняння з модулями. Оскільки $y \ge 0$, розглянемо рівняння у наступних проміжках:

$0 \le y \le 2$, тогді

$$|y-2| = -(y-2), \; |y-3| = -(y-3),$$

і, отже,

$$-y+2-y+3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2;$$

$2 < y \le 3$, тогда $|y-2| = (y-2)$, $|y-3| = -(y-3)$,

$$y-2+3-y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 1;$$

рівняння перетворилося у тотожність, отже, всі точки відрізка $[2; 3]$ є розв'язками;

$y \ge 3$, тогді

$$|y-2| = (y-2), \; |y-3| = (y-3)$$

і рівняння запишемо у вигляді

$$y-2+y-3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3.$$

Таким чином, розв'язок рівняння можна записати у вигляді

$2 \le y \le 3 \quad \Rightarrow \quad 2 \le \sqrt{x-1} \le 3 \quad \Rightarrow \quad 4 \le x-1 \le 9 \quad \Rightarrow \quad 5 \le x \le 10.$

Відповідь: $x \in [5; 10]$.

18.2 Ірраціональні рівняння

Рівняння, що містять невідому величину під знаком кореня, називаються **ірраціональними рівняннями**. При розв’язанні ірраціональних рівнянь доцільно використовувати такі теореми:

Теорема 1. В області дійсних чисел

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x).$$

Якщо ж показник степеня парний, тоді доводиться накладати додаткові умови.

Теорема 2. Якщо $f(x) \ge 0$ і $g(x) \ge 0$, то в області дійсних чисел

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2n}(x) = g^{2n}(x).$$

Зауважимо, що у загальному випадку

$$f(x) = g(x) \;\; \Leftrightarrow \;\; f^{n}(x) = g^{n}(x).$$

Крім того, при розв’язанні ірраціональних рівнянь слід виконати попереднє дослідження області допустимих значень (ОДЗ) невідомих.

Приклад 1. Розв’язати рівняння:

$$\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{1-x} = 0.$$

Область визначення лівої частини знаходимо з умов

$$\begin{cases} x-2 \ge 0; \\ 1-x \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2; \\ x \le 1. \end{cases}$$

Як бачимо, це порожня множина. Тому ОДЗ рівняння також порожня множина, отже, рішень немає.

Приклад 2. Розв’язати рівняння:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1 - 2x.$$

Виділимо повний квадрат у підкореневому виразі

$$\sqrt{(x-2)^2} = 1 - 2x;$$

отримане рівняння еквівалентно наступному

$$|x-2| = 1 - 2x,$$

а оскільки модуль невід’ємний, то і $1 - 2x \ge 0$, звідки $x \le \frac{1}{2}$. Значить, $x - 2 < 0$ і модуль розкривається зі знаком мінус. Отже, рівняння еквівалентне рівнянню

$$-(x-2) = 1 - 2x,$$

Звідки маємо $x = -1$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння:

$$\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{2x - 6}.$$

Еквівалентним даному рівнянню є рівняння

$$\left(\sqrt{x^2-3x}\right)^2=\left(\sqrt{2x-6}\right)^2,$$

однак рівняння

$$x^2-3x=2x-6$$

буде лише наслідком попереднього, бо перетворення типу $\left(\sqrt{f}\right)^2=f$ не є тотожним (воно розширює ОДЗ). Тому, розв’язавши останнє рівняння $\left(x_1=2,\ x_2=3\right)$, треба зробити перевірку (вихідному рівнянню задовольняє лише $x=3$). Зауважимо, що перетворення $\left(\sqrt{f}\right)^2=f$ є тотожним за додаткової умови $f\geq 0$. Це дозволяє провести рішення без перевірки.

Таким чином, вихідне рівняння еквівалентне системі

$$\begin{cases} x^2-3x=2x-6; \\ x^2-3x\geq 0; \\ 2x-6\geq 0, \end{cases}$$

а ця система еквівалентна системі

$$\begin{cases} x^2-3x=2x-6; \\ x\geq 3 \end{cases}$$

(ми знайшли розв’язок системи двох нерівностей). Розв’язоком отриманої системи є $x=3$.

Приклад 4. Розв’язати рівняння

$$\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5.$$

Відокремлюючи корінь, отримуємо рівняння, еквівалентне даному:

$$\sqrt{2x-6}=5-\sqrt{x+4}.$$

Це рівняння еквівалентне системі

$$\begin{cases} 2x-6=25-10\sqrt{x+4}+x+4; \\ 5-\sqrt{x+4}\geq 0; \\ 2x-6\geq 0;\quad x+4\geq 0. \end{cases}$$

Розв’язавши систему нестрогих нерівностей, отримаємо

$$\begin{cases} 10\sqrt{x+4}=35-x; \\ 3\leq x\leq 21. \end{cases}$$

Перейдемо ще до однієї системи, еквівалентної вихідному твердженню:

$$\begin{cases} 100\left(x+4\right)=\left(35-x\right)^2; \\ 3\leq x\leq 21; \\ 35-x\geq 0. \end{cases}$$

Рівняння, що входить до цієї системи, має корені $x_1=5,\ x_2=165$. Системі задовольняє лише $x=5$.

Приклад 5. Розв’язати рівняння

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{3}{2}.$$

Знайдемо ОДЗ цього рівняння із системи нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} \ge 0; \\ x+1 \ne 0; \\ x-1 \ne 0. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, отримуємо допустимі значення змінної $x \in \left]-\infty;-1\right[\bigcup \left]1;+\infty\right[$. Нехай $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. Тогді $y-\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$, звідки $y_1=2,\ y_2=-\frac{1}{2}$. Очевидно, $y_2=-\frac{1}{2}$ не підходить, так як $y>0$. Тому наслідком цього рівняння є рівняння $\frac{x+1}{x-1}=4$, з якого $x=\frac{5}{3}$. Дане значення x задовольняє ОДЗ, і, отже, є рішенням вихідного рівняння.

Вправи

170. Прочитайте вирази:

модуль – модулі;
абсолютна величина – абсолютні величини;
модуль додатного числа;
модуль від’ємного числа;
рівняння з модулем – рівняння з модулями;
ірраціональне рівняння – ірраціональні рівняння;
модуль додатного числа дорівнює тому ж числу;
модуль від’ємного числа дорівнює числу, протилежному даному.

171. Розв’язати рівняння з модулями:

а) $|2x-3|+|2x+3|=14$;
б) $|1-2x|+|3x+2|+|x|=5$;
в) $|x+3|+|x-5|=3x-4$;
г) $|2x-3|+|2x+3|=6-x$;
д) $|2x-1|+|3x+2|+|x|=3$; ;
е) $|3-2x|=|2+x|-3$;
ж) $||x|-2|=1$;
и) $||x|-1|=4+x$;
к) $|x^2-2x-3|=|2x-5|+1$;
л) $x+1+|x^2-x-3|=0$.

172. Розв’язати ірраціональні рівняння:

а) $\sqrt{x^2-7}=\sqrt{2}$;
б) $3x^2+2\sqrt{x^2+5x+1}=2-15x$;
в) $\sqrt{6-x}=x$;
г) $3x-\sqrt{18x+1}+1=0$;
д) $x-\sqrt{x-1}=3$;
е) $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=1$;

ж) $1+\sqrt{2x+7}=x-3$;

и) $\sqrt{21+x}=\sqrt{20-4x}+\sqrt{5+3x}$;

к) $\sqrt{2x^2-x-2}=x$;

л) $x-1=\sqrt{2x^2-3x-5}$.

173. Розв'язати рівняння:

а) $\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=6$;

б) $\sqrt[3]{x^2+15}=2\sqrt[3]{x+1}$;

в) $\sqrt{x}\sqrt{1-x}=x$;

г) $\sqrt[3]{x^3-2x-3}=x-1$;

д) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1}$;

е) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3$;

ж) $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-7}}=\sqrt{x-4}$;

и) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$;

к) $\dfrac{2x+3}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{6x+1}$;

л) $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x-6}$.

174. Розв'язати рівняння:

а) $x-\sqrt{x}-6=0$;

б) $x^2-x+9+\sqrt{x^2-x+9}=12$;

в) $7\sqrt{x}-2x+15=0$;

г) $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$;

д) $x+\sqrt{x-1}-3=0$;

е) $x^2-4x-3\sqrt{x^2-4x+20}+10=0$;

ж) $3x-10\sqrt{x+1}+6=0$;

и) $x^2+2\sqrt{x^2-3x+11}=3x+4$;

к) $5x^2+35x+2\sqrt{x^2+7x+1}=46$;

л) $\sqrt{2x^2-3x+7}+\sqrt{2x^2-3x+2}=5$.

175. Розв'язати рівняння:

а) $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}=22\sqrt[15]{x^7}$;

б) $\sqrt[3]{5x+7}=1+\sqrt[3]{5x-12}$;

в) $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2$;

г) $\sqrt{4x+5}+\sqrt{10x+6}=\sqrt{24x+25}$;

д) $x^{\frac{4}{5}}-7x^{-\frac{2}{5}}+6x^{-1}=0$;

е) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{x-1}$;

ж) $\sqrt{20+x}+\sqrt{20-x}=\sqrt{6x}$;

и) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$;

к) $\sqrt{2x^2+8x+7}-x=2$;

л) $x+\sqrt{2x^2-7x+5}=1$.

176. Дайте відповіді на питання:

а) Що називають модулем?

б) Чому дорівнює модуль додатного числа?

в) Чому дорівнює модуль від'ємного числа?

г) Що таке рівняння з модулем? Наведіть приклад.

д) Які рівняння називаються ірраціональними? Наведіть приклад.

е) Чи є рівняння $|2x-3|+|2x+3|=14$ рівнянням з модулями? Якщо так, то чому, якщо ні, теж чому?

ж) Чи є рівняння $|2x-3|+|2x+3|=14$ ірраціональним рівнянням? Якщо так, то чому, якщо ні, теж чому?

з) Чи є рівняння $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$ ірраціональним рівнянням? Якщо так, то чому, якщо ні, теж чому?

ЗАНЯТТЯ 19

19.1 Нерівності з модулями

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Нерівність з модулем	Inequality with the module	Inégalité avec le module
Ірраціональна нерівність	Irrational inequality	Inégalité irrationnelle

Нерівністю з модулем називають нерівність, що містить змінну під знаком модуля. Наприклад, $x+|7x+4|\geq 1$.

Для розв'язання нерівностей, що містять змінну під знаком модуля, треба розбити числову вісь на окремі проміжки так, щоб на кожному з них можна було записати нерівність, не використовуючи символ абсолютної величини.

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$x^2-|5x+6|>0.$$

Усю числову вісь розіб'ємо на два проміжки $\left]-\infty;-\frac{6}{5}\right[$ и $\left[-\frac{6}{5};+\infty\right[$. На кожному з цих проміжків нерівність може бути записана без модуля знака.

Для першого проміжку $\left]-\infty;-\frac{6}{5}\right[$ вірна рівність $|5x+6|=-(5x+6)$, и, отже, нерівність набуває вигляду

$$x^2+5x+6>0 \text{ або } (x+3)(x+2)>0,$$

звідки $x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-2;+\infty\right[$. Враховуючи те, що змінна належить проміжку $\left]-\infty;-\frac{6}{5}\right[$, отримуємо розв'язок вихідної нерівності: $x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-2;-\frac{6}{5}\right[$.

На другому проміжку $\left[-\frac{6}{5};+\infty\right[$ справедлива рівність $|5x+6|=5x+6$, і, отже, нерівність записується так:

$$x^2-5x-6>0,\qquad (x+1)(x-6)>0,$$

звідки $x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left]6; +\infty\right[$. Враховуючи те, що змінна належить проміжку $\left[-6/5; +\infty\right[$, отримуємо множину розв'язків нерівності: $x \in \left[-6/5; -1\right[\cup \left]6; +\infty\right[$.

Відповідь: $x \in \left]-\infty; -3\right[\cup \left]-2; -1\right[\cup \left]6; +\infty\right[$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\frac{|2x-1|}{x^2-x-2} > \frac{1}{2}.$$

Розіб'ємо числову вісь на два інтервали. На інтервалі $x \in \left[1/2; +\infty\right[$, $|2x-1| = 2x-1$, отже, нерівність можна записати у вигляді

$$\frac{2x-1}{x^2-x-2} > \frac{1}{2}.$$

Це раціональна нерівність. Наводимо її до стандартного вигляду

$$\frac{x(5-x)}{(x+1)(x-2)} > 0.$$

Застосовуючи метод інтервалів, отримуємо $x \in \left]-1; 0\right[\cup \left]2; 5\right[$. Обмеження $x \geq 1/2$ дозволяє залишити лише інтервал $\left]2; 5\right[$.

Якщо $x \in \left]-\infty; 1/2\right[$, $|2x-1| = -(2x-1)$, то нерівність набуває вигляду

$$\frac{-2x+1}{x^2-x-2} > \frac{1}{2}.$$

Приводимо нерівність до стандартного виду

$$\frac{(1-x)(x+4)}{(x+1)(x-1)} > 0.$$

Застосовуючи метод інтервалів, отримуємо $x \in \left]-4; -1\right[\cup \left]1; 2\right[$. Обмеження $x < 1/2$ дозволяє залишити лише інтервал $\left]-4; -1\right[$.

Відповідь: $x \in \left]-4; -1\right[\cup \left]2; 5\right[$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$|x-1| + |x+1| < 4.$$

Розіб'ємо числову вісь на три інтервали.

На інтервалі $\left]-\infty; -1\right[$ маємо $|x-1| = -(x-1)$, $|x+1| = -(x+1)$ і, отже, на цьому інтервалі нерівність рівнозначна лінійній нерівності $-2x < 4$, яка справедлива при $x > -2$. Таким чином, у множину рішень входить інтервал $\left]-2; -1\right[$.

На інтервалі $\left[-1; 1\right[$ маємо $|x-1| = (x-1)$, $|x+1| = -(x+1)$. Тут вихідна нерівність рівносильна вірній числовій нерівності $2 < 4$. Тому всі значення змінної, що належать цьому відрізку, входять до множини рішень.

На інтервалі $[1;+\infty[$ маємо $|x-1|=x-1$, і виходить лінійна нерівність $2x<4$, справедлива при $x<2$. Тому проміжок $[1;2[$ входить до множини рішень.

Поєднуючи отримані результати, робимо висновок, що нерівності задовольняють усі значення змінної з інтервалу $]-2;\,2[$.

Той самий результат можна отримати з наочних і водночас строгих геометричних міркувань. На малюнку 19.1 побудовано графіки функцій

$$y=f(x)=|x-1|+|x+1|; \qquad y=4.$$

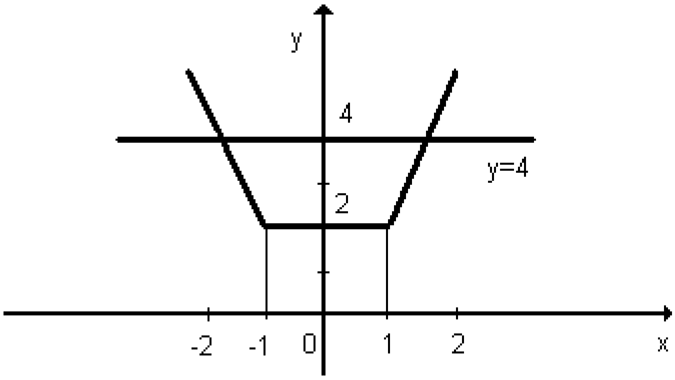


Рисунок 19.1

На інтервалі $]-2;\,2[$ графік функції $y=f(x)$ розташований під графіком функції $y=4$, а це і означає, що нерівність $f(x)<4$ є вірною.

Відповідь: $x\in\,]-2;\,2[$.

19.2 Ірраціональні нерівності

Ірраціональними нерівностями називаються нерівності, що містять змінну під знаком кореня (радикала). Звичайний спосіб розв’язання таких нерівностей полягає у зведенні їх до раціональних нерівностей. Звільнитися від радикалів іноді вдається шляхом піднесення обох частин нерівності до степеня. На жаль, ця операція часто призводить до нерівності, яка не є рівносильною до вихідної нерівності. Тому при вирішенні ірраціональних нерівностей рекомендується виявляти максимальну обережність. Насамперед, слід обмежитися розглядом лише тих значень змінної, при яких обидві частини нерівності мають сенс. Розглянемо типовий приклад.

Приклад 1. Розв’язати нерівність

$$\sqrt{x^2-4x+3}\ge 2-x.$$

Часто наводиться таке міркування: «при розв’язанні ірраціональних рівнянь і нерівностей, необхідно перш за все позбавитися кореня, тому піднесемо у квадрат обидві частини нерівності, тобто напишемо

$$x^2-4x+3\geq 4-4x+x^2,$$

але звідси випливає, що $3\geq 4$, що неправильно; отже, запропонована нерівність рішень немає».

Чи правдивим є отриманий результат?

В даному випадку досить уважно подивитися на нерівність, щоб побачити, що отриманий результат не лише неправдоподібний, а й просто невірний. При $x=5$, наприклад, ліва частина нерівності додатна, тоді як права від'ємна. Отже, нерівність має розв'язки і, отже, наведене міркування є неправильним.

Дамо правильне рішення прикладу.

Очевидно, слід розглянути лише ті значення x, при яких $x^2-4x+3\geq 0$. Нулі многочлена це $x_1=1$, $x_2=3$. Отже, множина розв'язків нерівності $x^2-4x+3\geq 0$ це $x\in\left]-\infty;1\right]\cup\left[3;+\infty\right[$. Ясно, що на інтервалі $\left]1;3\right[$ немає рішень, оскільки ліва частина нерівності за будь-якого x з цього інтервалу немає сенсу.

Зауважимо далі, що $x^2-4x+3\geq 0$ (радикал розуміється в арифметичному сенсі), і так як за будь-якого $x\geq 3$ права частина нерівності менша від нуля, то всі $x\geq 3$ є розв'язками.

Якщо ж $x\leq 1$, то $2-x>0$ і, підносячи обидві частини нерівності у квадрат, отримаємо рівносильну нерівність

$$x^2-4x+3\geq 4-4x+x^2,$$

яке не має рішень, оскільки нерівність $3\geq 4$ є хибною.

Відповідь: $x\in\left[3;+\infty\right[$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>\frac{3}{2}.$$

Необхідно знайти ОДЗ цієї нерівності. Ліва частина нерівності має сенс лише тоді, коли $1-4x^2\geq 0$ і $x\neq 0$. Таким чином, ОДЗ $x\in\left[-\frac{1}{2};0\right[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right]$.

Якщо $-\frac{1}{2}\leq x<0$, то ліва частина нерівності від'ємна і, отже, рішень на цьому інтервалі немає.

Нехай $0<x\leq\frac{1}{2}$, тоді, після перетворень отримаємо

$$\sqrt{1-4x^2}<1-\frac{3}{2}x.$$

Обидві частини нерівності невід'ємні, тоді, підносячи обидві частини до квадрату, отримаємо рівносильну нерівність

$$1-4x^2<1-3x+\frac{9}{4}x^2.$$

Послідовно спрощуючи цю нерівність, отримаємо

$$\frac{25}{4}x^2-3x>0,\qquad \frac{25}{4}x-3>0,\qquad x>\frac{12}{25}.$$

Враховуючи обмеження $0 < x \le \frac{1}{2}$, приходимо до остаточного результату

$$\frac{12}{25} < x \le 1/2 .$$

Відповідь: $x \in \left(\frac{12}{25}; \frac{1}{2} \right]$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-5} \ge \sqrt{5-2x} .$$

Знайдемо ОДЗ цієї нерівності. Обидві частини нерівності мають сенс лише для тих значень, які задовольняють системі нерівностей

$$\begin{cases} 2x+1 \ge 0, \\ 2x-5 \ge 0, \\ 5-2x \ge 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \ge -1/2, \\ x \ge 5/2, \\ x \le 5/2 \end{cases}$$

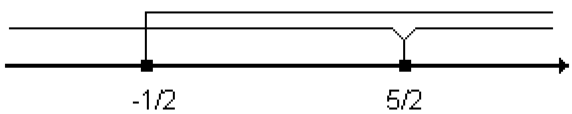


Рисунок 19.2

Ми бачимо (рис. 19.2), що ця система та вихідна нерівність мають лише один розв'язок $x = 5/2$.

Відповідь: $\{2{,}5\}$.

Вправи

177. Прочитайте вирази:

модуль – модулі;
абсолютна величина – абсолютні величини;
модуль додатного числа;
модуль від'ємного числа;
нерівність з модулем – нерівності з модулями;
ірраціональна нерівність – ірраціональні нерівності.

178. Розв'язати нерівності:

а) $|2x-1| < |3x+1|$; б) $|3x-5| > 9x+1$;

в) $|x^2 - x + 1| \ge |x^2 - 3x + 4|$; г) $|3x-8| < x-2$;

д) $|x^2 + x - 6| < x$; е) $|x-1| + |x+1| < 4$;

ж) $|x-3| + |x-5| \ge 6 - x$; и) $|2x-4| - |x-4| > 4$.

179. Розв'язати нерівності:

а) $\dfrac{|x+7|}{x^2+8x+7}<5$;

б) $\left|\dfrac{2x+5}{4x+1}\right|<1$;

в) $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|<\left|\dfrac{2}{x-2}\right|$;

г) $\dfrac{x^2-3|x|-4}{x+1}<-3x$;

д) $\left|x^2-|x|\right|\ge 0,25$;

е) $\left|\left|x^2-3x+2\right|-1\right|\le x-2$;

ж) $\dfrac{|x-18|}{|x-9|-9}<1$;

и) $\dfrac{(x+2)(x+1)}{x^2-|x|-2}\le -3x$;

к) $\dfrac{x^2-|x|-6}{x^2+5x+6}>x-\dfrac{3}{2}$;

л) $\dfrac{\left|x^2-2x\right|-1-2x}{x^2-2+\left|x^2+3x\right|}<0$.

180. Розв'язати нерівності:

а) $\sqrt{x^2-40x+39}\le x-1$;

б) $\sqrt{x^2-4x}>x-3$;

в) $\sqrt{3x-4}+\sqrt{2x-13}>\sqrt{13-2x}$;

г) $\sqrt{x^2-x-12}>x-1$;

д) $\sqrt{45x^2-30x+1}<7+6x-9x^2$;

е) $\sqrt{x^2-3x-4}>x-2$;

ж) $\sqrt{2x+5}>x+1$;

и) $\sqrt{x^2-3x-10}<8-x$.

181. Розв'язати нерівності:

а) $\sqrt{x^2-x-2}>2x+3$;

б) $\dfrac{2x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}\le 3$;

в) $20\sqrt{\left(x^2-x\right)^2}<1$;

г) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-4}$;

д) $\sqrt{\left(x(x+3)\right)^2}\ge 2-x^2$;

е) $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}}>x-2$;

ж) $\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{3-2x}\right)^2}>1$;

и) $\sqrt{2-x}\le\sqrt{x+17}+\sqrt{2x-4}$.

182. Дайте відповіді на питання:

а) Яка нерівність називається нерівністю з модулями? Наведіть приклад.
б) Яка нерівность називається ірраціональнальною? Наведіть приклад.

Контрольні питання до теми «Ірраціональні рівняння та нерівності»

1. Що називають модулем?
2. Чому дорівнює модуль додатного числа?
3. Чому дорівнює модуль від'ємного числа?
4. Що таке рівняння з модулем? Наведіть приклад.
5. Які рівняння називаються ірраціональними? Наведіть приклад.

6. Яка нерівність називається нерівністю з модулями? Наведіть приклад.
7. Які нерівності називаються ірраціональними? Наведіть приклад.

Модель контрольної роботи до теми «Ірраціональні рівняння та нерівності»

1. Розв’язати рівняння:

а) $\sqrt{6+x-x^2}=-x$;

б) $|8-x|=|1+x|+1$;

в) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{6x-5}=\sqrt[3]{2x-3}$.

2. Розв’язати нерівності:

а) $\sqrt{2x+5}\geq x+1$;

б) $|x|-|x+2|>\dfrac{1}{3}$.

3. Які рівняння називаються ірраціональними? Наведіть приклад.

4. Напишіть українською мовою:

а) $1+\sqrt{2x+7}=x-3$;

б) $|5x-1|\leq|24-x|$;

в) $\sqrt[3]{0,2x+1,07}+\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{4}}\geq 0$.

ФУНКЦІЇ

ЗАНЯТТЯ 20

20.1 Функції – поняття і методи задання

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Функція	Function	Fonction
Область визначення	Domain of definition	Domaine de définition
Область значень	Range of values	Gamme de valeurs
Графік функції	Function graph	Graphe de fonction
Аналітичний метод	Analytical method	Méthode analytique
Табличний метод	Tabular method	Méthode tabulaire
Графічний метод	Graphic method	Méthode graphique
Вісь абсцис	Abscis axis	Axe de l'abscis
Вісь ординат	Y-axis	Axe Y
Координатний кут	Coordinate Angle	Angle de coordonnée
Лінійна функція	Linear function	Fonction linéaire
Пряма	Straight	Ligne droite
Бісектриса	Bisector	Bisecteur
Парабола	Parabole	Parabola
Гіпербола	Hyperbola	Hyperbole
Обернена функція	Inverse function	Fonction inverse

Числова функція є відображення деякої підмножини D множини дійсних чисел R на іншу підмножину E множини R. При цьому множина D називається **областю визначення** функції, а множина E – **областю значень** функції.

Таким чином, кожному елементу $x \in D$ ставиться у відповідність хоча б одне значення $y \in E$.

В елементарній математиці зазвичай розглядаються функції, які задані формулами. При цьому мається на увазі, що:

- область визначення функції складається з незалежної змінної, при підстановці якої усі дії, вказані у правій частині формули виконуються та призводять до дійсних чисел;

- область значень функції – частина множини дійсних чисел (яка, можливо, збігається з усією множиною). Її опис для задання функції не є обов'язковим.

Таким чином, якщо функція задана формулою, то необхідно ставити питання про знаходження її області визначення та області значень.

Приклад 1. Знайти область визначення та область значень функції

$$y = x^2 - 5x + 6.$$

Область визначення цієї функції є множина всіх дійсних чисел. Для того щоб значення y потрапило до множини значень, необхідно і достатньо, щоб квадратне рівняння $x^2-5x+6-y=0$ мало хоча б один дійсний розв'язок, тобто щоб його дискримінант був невід'ємний: $25-4(6-y)\geq 0$. Звідси $y\geq -\frac{1}{4}$. Отже, область визначення функції є множина $D=(-\infty;+\infty)$, а область значень – $E=\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Приклад 2. Знайти область визначення та область значень функції

$$y=\frac{1}{x^2-5x+6}.$$

Величина x буде належати області визначення функції тоді і лише тоді, коли знаменник цього дробу не дорівнює нулю. Отже, область визначення функції складається з усіх дійсних значень x, крім коренів $x_1=2$ і $x_2=3$ квадратного тричлена x^2-5x+6. Отже, $D=(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$. Щоб знайти множину значень функції, зробимо заміну $y=\frac{1}{z}$. У попередньому прикладі ми з'ясували, що множина значень z це $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$. Тому, коли z пробігає всі додатні значення, y теж пробігає всю множину додатних чисел. Коли ж $-\frac{1}{4}\leq z<0$, то $y\leq -4$; $z=0$ виключаємо. Отже, $E=(-\infty;-4]\cup(0;+\infty)$.

Приклад 3. Знайти область визначення та область значень функції

$$y=\sqrt{x}.$$

Область визначення цієї функції задається нерівністю $x\geq 0$. При цьому y набуває всіх невід'ємних значень.

Функцію $y=f(x)$ можна задати рівнянням, тобто формулою, цей метод називають **аналітичним**.

Формула $y=5x+1$ встановлює відповідність між множинами X і Y. Ця відповідність є функцією з областю визначення X і множиною значень Y. Позначимо цю функцію буквою φ, тоді $\varphi(1)=6$; $\varphi(2)=11$; $\varphi(-2)=-9$. Рівняння функції можна записати: $y=\varphi(x)$, де $\varphi(x)=5x+1$.

Функція задана **табличним методом**, якщо у таблиці для функції $y=f(x)$ задано значення аргументу та відповідні значення функції (табл. 20.1):

Таблиця 20.1

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Наприклад, розглянемо таблицю квадратів натуральних чисел (табл. 20.2):

Таблиця 20.2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Ця таблиця встановлює відповідність між множиною натуральних чисел $X = N = \{1; 2; 3; \ldots\}$ і множиною квадратів цих чисел $Y = \{1; 4; 9; \ldots\}$.

Ця відповідність є функцією. Позначимо її літерою h або $y = h(x)$. Тоді для будь-кого $x \in X$ можна з таблиці отримати відповідне значення $y \in Y$. Наприклад, $h(1) = 1$; $h(2) = 4$; $h(3) = 9$; $h(4) = 16$ і так далі.

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок на числовій площині з координатами $(x, f(x))$, де x пробігає множину $D(f)$.

Оскільки функція f повністю визначається заданням множини всіх упорядкованих пар $(x, f(x))$, де x пробігає $D(f)$, то задання графіка функції еквівалентне заданням функції. **Нулем функції** називають значення аргумента з ОДЗ, при якому функція дорівнює нулю.

Функцію $y = f(x)$ можна задати **графіком (графічним методом)**. За графіком можна для будь-якого значення $x \in X$ визначити відповідне значення $y \in Y$. Графіком функції може бути пряма лінія, крива лінія (рис. 20.1), множина окремих точок, сукупність точок та ліній тощо.

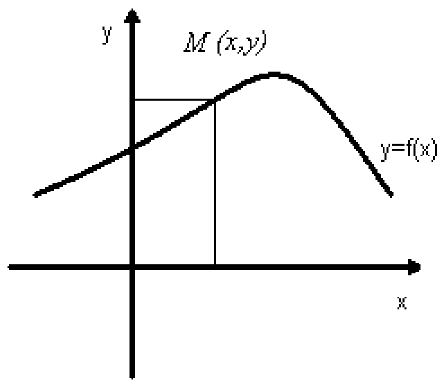


Рисунок 20.1 – Графік довільної функції

20.2 Графіки основних елементарних функцій

Графік лінійної функції $y = kx+b$ (рис. 20.2). Графіком лінійної функції є пряма. Для побудови прямої достатньо двох точок. Величина k, називається кутовим коефіцієнтом: $k = tg\alpha$, где α – кут, утворений прямою з додатним напрямом осі абсцис.

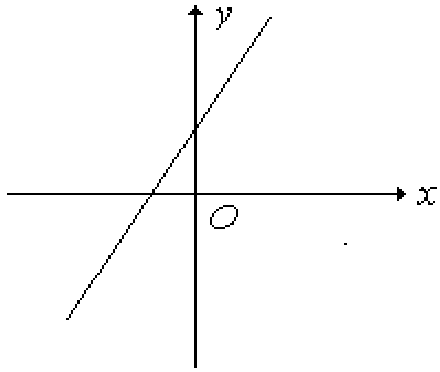


Рисунок 20.2 – Графік лінійної функції

Графік функції *y* = *kx*. Графіком є пряма, яка проходить через початок координат, точку *O*(0,0).

Якщо $k > 0$, то пряма утворює гострий кут α з додатним напрямом осі *Ox* такий, що $tg\alpha = k$ (рис. 20.3,а).

Якщо $k < 0$, то відповідний кут α є тупим (рис. 20.3,б).

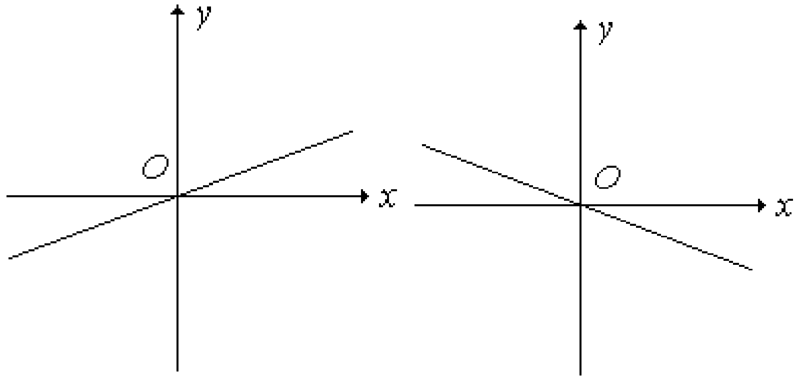


Рисунок 20.3 –Графіки прямої: а – утворює гострий кут, б – утворює тупий кут з віссю *Ox*

Графік функції *y* = *x*. Графіком функції $y = x$ є бісектриса першого та третього координатних кутів (рис. 20.4).

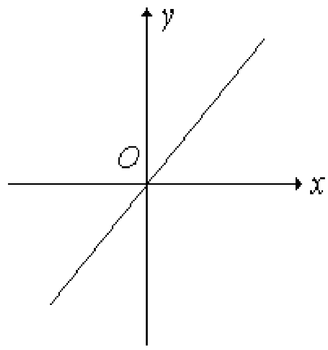


Рисунок 20.4 – Графік бісектриси першого та третього координатних кутів.

Графік функції $y = x^2$. Графіком цієї функції є **парабола** (рис. 20.5).

Графік функції $y = \frac{1}{x}$ Графіком є **гіпербола** (рис. 20.6). Проведемо коротке дослідження цієї функції:

при $x > 0$ функція спадає зі зростанням x;
при $x \to \infty$ маємо $y \to 0$ (при цьому $y > 0$);
при $x = 0$ функція не визначена;
при $x \to 0$ функція $y \to \infty$;
при $x < 0$ функція зростає зі спаданням x.

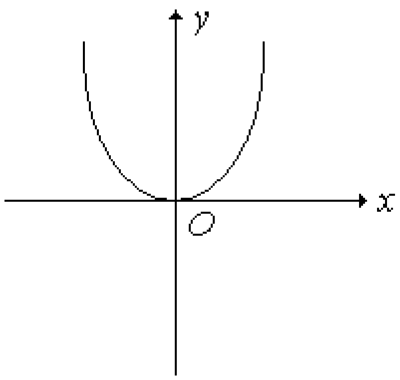


Рисунок 20.5 – Парабола

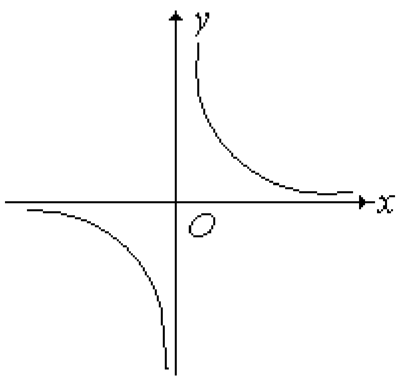


Рисунок 20.6 – Гіпербола

Обернена функція та її графік. Розглянемо функцію $y = f(x)$ з областю визначення $D(f) = X$ і множиною значень $E(f) = Y$. На рисунку 20.7 зображено її графік. Розглянемо області X і Y, на яких є відрізки $[a, b]$ і $[c, d]$ відповідно.

Нехай функція $y = f(x)$ має наступну властивість: різним значенням аргументу відповідають різні значення функції.

За допомогою функції $y = f(x)$, що має цю властивістю, можна побудувати нову функцію $x = g(y)$:

а) область визначення її – множина значень вихідної функції $D(g) = Y = E(f)$;

б) множина значень $E(g) = X = D(f)$ – область визначення вихідної функції;

в) кожному $y \in Y$ функції g ставлять у відповідність його прообраз x при відображенні f.

Очевидно, функція $x = g(y)$, в свою чергу, є оберненою до $y = f(x)$, і можна говорити про пару взаємно обернених функцій.

Графік оберненої функції. Щоб отримати зображення для $y = g(x)$ потрібно симетрично відобразити щодо бісектриси першого координатного кута графік функції $y = f(x)$. Отже, для отримання графіка оберненої функції потрібно графік вихідної функції відобразити симетрично щодо прямої $y = x$ (рис. 20.7).

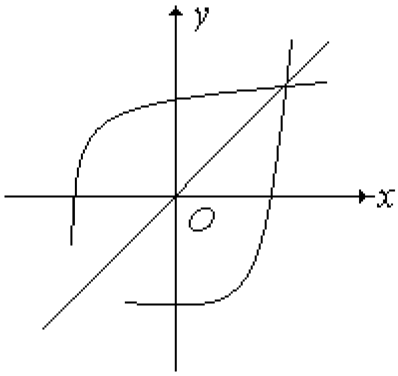


Рисунок 20.7 – Графік взаємно обернених функцій

Вправи

182. Прочитайте вирази:

функція – функції;
область визначення функції;
область значення функції;
графік функції – графіки функцій;
методи задання функцій;
аналітичний метод; табличний метод; графічний метод;
лінійна функція; квадратична функція;
парабола; гіпербола;
обернена функція.

183. Знайдіть область визначення кожної з функцій:

а) $f(x) = x - 1$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

в) $f(x) = \sqrt{x + 2}$; г) $f(x) = \dfrac{15}{4x - 32}$;

д) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$; е) $f(x) = \sqrt{27 - x^3}$.

184. Побудуйте графіки заданих функцій:

а) $y = 2x$ і $y = 0{,}5x$; б) $y = 3x + 2$ і $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$;

в) $y = 4x + 5$ і $y = \dfrac{x-5}{4}$; г) $y = x^2,\ x \le 0$ і $y = -\sqrt{-x}$;

д) $y = x^2 + 4, x \ge 0$ і $y = \sqrt{x - 4}$; е) $y = \dfrac{5}{x-5}$ і $y = 5 - \dfrac{5}{x}$.

185. Дайте відповідь на питання:
а) Що таке функція? Наведіть приклад.

б) Що таке область визначення функції? Як вона позначається?
в) Що таке область значення функції? Як вона позначається?
г) Назвіть методи функцій.
д) Що таке графік функції?
е) Що таке лінійна функція? Накресліть її графік.
ж) Що таке квадратична функція? Накресліть її графік.
и) Що таке гіпербола? Накресліть її графік.
к) Що таке обернена функція? Як побудувати її графік?

ЗАНЯТТЯ 21

21.1 Показникова і логарифмічна функції

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Показникова функція	Exponential function	Fonction indicative
Логарифмічна функція	Logarithmic function	Fonction logarithmique
Логарифмування	Logarithm	Logarithme
Показникове рівняння	Indicative equation	Équation indicative
Показникова нерівність	Indicative inequality	Inégalité indicative
Потенціювання	Potentisation	Potentialisation
Логарифмічне рівняння	Logarithmic equation	Équation logarithmique
Логарифмічна нерівність	Logarithmic inequality	Inégalité logarithmique

Функція вигляду

$$y = a^x \left(a > 0,\ a \neq 1\right) \tag{21.1}$$

називається **показниковою.**

Областю визначення показникової функції є вся числова вісь, тобто $D:\ x \in R$, область значень: $E(y) = (0; +\infty)$.

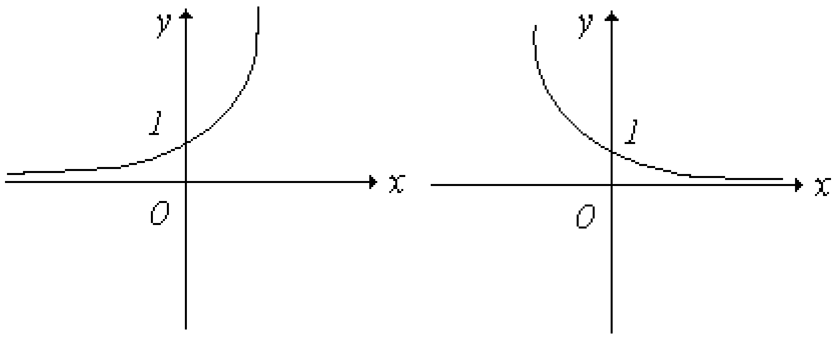
При $a > 1$ функція зростає, а при $0 < a < 1$ спадає.

У випадку $a > 1$ при $x \to +\infty$ маємо $a^x \to +\infty$, а при $x \to -\infty$ маємо $a^x \to 0$. У випадку $0 < a < 1$ отримаємо $a^x \to 0$ при $x \to +\infty$ і $a^x \to +\infty$ при $x \to -\infty$.

Властивості показникової функції:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$;
4. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$;
5. $a^0 = 1$;
6. $a^1 = a$;
7. $1^x = 1$.

Властивості показникової функції можна простежити, наприклад, на графіках функцій $y = 2^x$ та $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 21.1, а, б).



а б

Рисунок 21.1, а, б – Графік показникової функції: а – зростаючої, б – спадної

Логарифмом додатного числа за основою a $(a > 0, a \neq 1)$ називається показник степеня x, до якого треба піднести a, щоб отримати y. Інакше

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y,$$

де y – **підлогарифмічний вираз**, a – **основа логарифма**.

Читають логарифми так:

$\log_a y$ – «логарифм числа ігрек за основою *а*»;

$\log_{10} x = \lg x$ – «логарифм числа ікс за основою десять» або «десятковий логарифм числа ікс»;

$\log_e x = \ln x$ – «логарифм числа ікс за основою *e*» або «натуральний логарифм числа ікс».

Визначення логарифму можна записати і у вигляді

$$a^{\log_a y} = y \qquad (21.2)$$

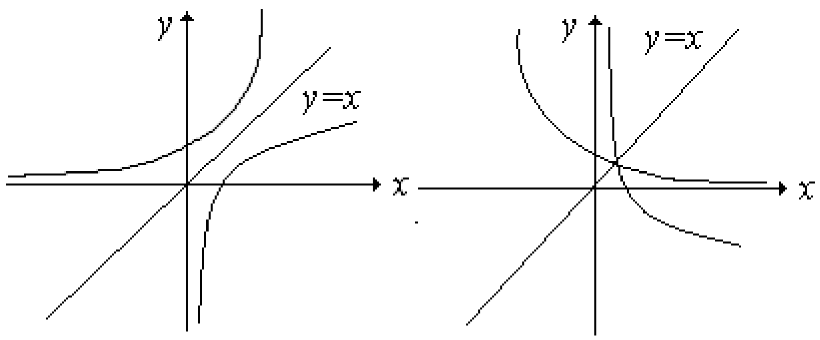
Функція

$$y = \log_a x \qquad (21.3)$$

називається **логарифмічною**.

Ця функція є оберненою до показникової.

Оскільки рівняння (21.3) рівносильне рівнянню $x = a^y$, яке відрізняється від (21.1) лише перестановкою змінних x та y, то графік логарифмічної функції (21.3) можна отримати з графіка показникової функції (21.1) перестановкою координатних осей. Один з можливих способів цієї перестановки – відображення графіка та осей щодо бісектриси першого та третього координатних кутів.



а б

Рисунок 21.2 – Графік показникової та логарифмічної функцій:
а – зростаючою, б – спадної

На рисунку 21.2, а зображені графіки $y = 2^x$ та $y = \log_2 x$, а на рисунку 21.2, б – графіки $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ та $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

На цих графіках легко простежити властивості логарифмічної функції, які є наслідком відповідних властивостей показникової функції: областю визначення логарифмічної функції є множина дійсних додатних чисел $X \in \left]0; +\infty\right[$; множина значень – множина усіх дійсних чисел $Y \in R$; симетрія відсутня; при $x = 1$ логарифмічна функція дорівнює нулю; якщо основа $a > 1$, то функція зрастає, причому $\log_a x \to +\infty$ при $x \to \infty$; якщо $0 < a < 1$, то $\log_a x$ спадає зі зростанням x і $\log_a x \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

Тому при переході через точку $x = 1$ функція $y = \log_a x$ змінює знак з мінуса на плюс у випадку $a > 1$ і з плюсу на мінус у разі $0 < a < 1$.

Властивості логарифмів ($x > 0$ і $y > 0$):

1. $a^{\log_a x} = x$ (основна логарифмічна тотожність).
2. $\log_a a^x = x$.
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (формула логарифму добутку).
4. $\log_a \left(1/x\right) = -\log_a x$.
5. $\log_a \left(x/y\right) = \log_a x - \log_a y$ (формула логарифму частки).
6. $\log_a x^c = c \cdot \log_a x$, $c \in R$ (формула логарифму степеня).
7. $\log_{a^c} = \frac{1}{c} \log_a x$ для будь-якого $c \neq 0$.
8. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ (формула переходу до нової основи).
9. $\log_a a = 1$.
10. $\log_a 1 = 0$.

При розв'язанні показникових та логарифмічних рівнянь часто використовують два перетворення методи: *логарифмування* та *потенціювання*.

Логарифмування за основою $c > 0,\ c \neq 1$ є перехід від рівності

$$a = b \qquad (21.4)$$

до рівності

$$\log_c a = \log_c b \qquad (21.5)$$

тут a та b можуть позначати як числа, так і вирази, що містять змінні, якщо (21.4) – правильна рівність та обидві її частини додатні, то і (21.5) – правильна рівність.

Потенціюванням за основою $c > 0,\ c \neq 1$, називається перехід від рівності (21.5) до рівності (21.4). Якщо (21.5) правильна рівність, то й (21.4) також правильна.

21.2 Показникові і логарифмічні рівняння

Показниковим називається рівняння, що містить показникову функцію, тобто рівняння вигляду

$$a^{f(x)} = b,$$

де $a > 0,\ a \neq 1,\ b \in R$.

Одним із *методів розв'язання показникових рівнянь є логарифмування* обох його частин.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$4^x = 8^{2x-1}.$$

Перший спосіб. Логарифмуючи обидві частини рівняння за основою 2, отримаємо рівняння, еквівалентне даному

$$2x = 3(2x-1),$$

звідки $x = \dfrac{3}{4}$.

Другий спосіб. Це рівняння легко привести до вигляду

$$2^{2x} = 2^{3(2x-1)}$$

і врахувати властивість монотонності показникової функції за основою 2, що приводить до того ж самого результату.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$3^{2x-1} \cdot 5^{3x+2} = \frac{9}{5} \cdot 5^{2x} \cdot 3^{3x}.$$

Логарифмуємо обидві частини за будь-якою основою, наприклад, за основою 10, отримуємо рівняння, еквівалентне даному,

$$(2x-1)\lg 3 + (3x+2)\lg 5 = 2\lg 3 - \lg 5 + 2x\lg 5 + 3x\lg 3,$$

звідки $x = -3$.

Можна розвязати й другим способом: це рівняння зводиться до еквівалентного рівняння

$$\frac{3^{2x-1}}{3^2 3^{3x}}\frac{5^{3x+2}\cdot 5}{5^{2x}}=1, \qquad \left(\frac{5}{3}\right)^{x+3}=\left(\frac{5}{3}\right)^{0},$$

звідки $x+3=0,\ x=-3$.

Часто показникові рівняння зводяться до найпростіших шляхом підстановок.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}=4.$$

Помітивши, що добуток величин, що стоять у лівій частині, дорівнює одиниці

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}\cdot\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}=(4-3)^{x}=1,$$

позначимо $y=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}$. Рівняння зводиться до квадратного відносно y; знаючи y, легко знайти x. При цьому зауважимо, що x задовольняє вихідному рівнянню тоді й лише тоді, коли y задовольняє системі

$$\begin{cases} y=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}; \\ y+\dfrac{1}{y}=4. \end{cases}$$

Звідси, $x=\pm 2$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$5^{2x}-2\cdot 5^{x}-15=0.$$

Для того щоб x був коренем цього рівняння, необхідно і достатньо, щоб x та y були розв'язками системи

$$\begin{cases} y=5^{x}; \quad (y>0); \\ y^2-2y-15=0. \end{cases}$$

Маємо $y_1=5;\ y_2=-3$. Друге значення не задовольняє системі, а перше дає $x=\log_5 5=1$.

Багато прикладів розраховані на використання певної техніки перетворень.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}=3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}.$$

У лівій частині рівняння винесемо за дужку 2^x, а у правій – 3^x. Отримаємо рівняння, еквівалентне даному

$$2^{x}\left(1+2+2^{2}\right)=3^{x}\left(1+3+3^{2}\right),$$

яке легко розв'язується за допомогою логарифмування

$$x\lg 2+\lg 7=x\lg 3+\lg 13;$$

$$x=\frac{\lg 13-\lg 7}{\lg 2-\lg 3}=\frac{\lg 13/7}{\lg 2/3}.$$

Логарифмічним називається рівняння, що містить логарифмічну функцію, тобто

$$\log_a f(x) = b,$$

де $a > 0,\ a \neq 1,\ b \in R,\ f(x) > 0.$

При розв'язанні логарифмічних рівнянь зазвичай *використовують потенціювання.*

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\log_2\left(x^2 - 3x + 2\right) = \log_2\left(2x - 4\right).$$

Дане рівняння еквівалентне системі

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 2x - 4; \\ 2x - 4 > 0; \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 2x - 4; \\ 2x - 4 > 0 \end{cases}$$

З двох розв'язків квадратного рівняння $x_1 = 3,\ x_2 = 2$ лише перше задовольняє нерівності $2x - 4 > 0$.

Якби ми обмежилися потенціюванням і здобули б лише рівняння $x^2 - 3x + 2 = 2x - 4$, що є наслідком цього, то знадобилася б перевірка, яка тут досить громіздка. Зайвий корінь за такого переходу утворюється за рахунок розширення ОДЗ, що відбувається під час заміни суми логарифмів логарифмом добутку.

Якщо розширення ОДЗ небажане, тому що призводить іноді до появи зайвого коріння, то звуження ОДЗ неприпустиме, бо може призвести до втрати коренів, а це груба помилка.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{x}{2}} x^2 + \log_{2x} x^3 = 0$.

Перейдемо до логарифмів за основою x

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x \frac{x}{2}} + \frac{\log_x x^3}{\log_x 2x} = 0.$$

При цьому ми звузили ОДЗ, нам для такого переходу доводиться накладати умови, щоб $x > 0$ и $x \neq 1$. Першу з цих умов дотримано. Якщо друге порушується, тобто $x = 1$, то задовольняється вихідне рівняння. Пропустивши цей випадок, ми втратили б корінь $x_1 = 1$.

Далі розглянемо випадок, коли $x \neq 1$. Отримане рівняння зводиться заміною $y = \log_x 2$ до вигляду

$$\frac{2}{1-y} + \frac{3}{1+y} = 0,$$

звідки $y = 5$, повертаючись до вихідної змінної, маємо $x_2 = \sqrt[5]{2}$.

Розглянемо рівняння менш стандартного типу.

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$$\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}}.$$

Оскільки $\sqrt{x}$ існує для $x \geq 0$, але $x \neq 0$, так як 0^0 немає сенсу, то ОДЗ складається з усіх $x > 0$. Логарифмуючи обидві частини за будь-якою основою (наприклад, 10), отримуємо

$$\frac{x}{2}\lg x = \sqrt{x}\lg x, \text{ або } \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right)\lg x = 0,$$

звідки $x = 4$, $x = 1$.

Якби ми логарифмували обидві частини за основою x, то не отримали б другого розв'язку.

21.3 Показникові і логарифмічні нерівності

Деякі показникові і логарифмічні нерівності можна розв'язати безпосередньо, використовуючи властивості зростання та спадання показникової та логарифмічної функцій. Зазначені властивості показникових та логарифмічних функцій реалізуються у вигляді рівносильних нерівностей:

- при $a > 1$

$$a^x > a^y \quad \Leftrightarrow \quad x > y, \tag{21.6}$$

$$\log_a x > \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x > y, \end{cases} \tag{21.7}$$

- при $0 < a < 1$

$$a^x > a^y \quad \Leftrightarrow \quad x < y, \tag{21.8}$$

$$\log_a x > \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x < y. \end{cases} \tag{21.9}$$

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$0{,}5^{1/x} \geq 0{,}0625.$$

Помітивши, що $0{,}0625 = 0{,}5^4$, запишемо нерівність у вигляді

$$0{,}5^{1/x} \geq 0{,}5^4.$$

Скориставшись властивістю (21.8), отримаємо рівносильну нерівність

$$\frac{1}{x} \leq 4 \text{ або } \frac{1-4x}{x} \leq 0.$$

Цій нерівності задовольняють такі значення x: $x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left[1/4, +\infty\right[$.

Відповідь: $x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left[1/4, +\infty\right[$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} > 1.$$

Перепишемо вихідну нерівність у вигляді

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}.$$

На підставі властивості (21.9) маємо систему нерівностей

$$0<\frac{3x-1}{x+2}<\frac{1}{3}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{3x-1}{x+2}>0,\\ \dfrac{3x-1}{x+2}<\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Розв'язуючи першу нерівність, отримаємо $x>\frac{1}{3}$ або $x<-2$; розв'язуючи другу нерівність, отримаємо $-2<x<\frac{5}{8}$. Зображуючи розв'язки нерівностей на числовій прямій (рис. 21.3), знаходимо розв'язок заданої нерівності.

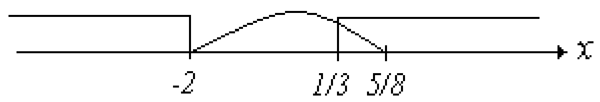


Рисунок 21.3

Відповідь: $x\in\left(\frac{1}{3};\ \frac{5}{8}\right)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$\log_{x^2-3}729>3.$$

Запишемо рівносильну нерівність

$$\log_{x^2-3}729>3\log_{x^2-3}\left(x^2-3\right).$$

Розглянемо два випадки:

1) якщо $x^2-3>1$, то отримаємо

$$729>\left(x^2-3\right)^3\quad\Leftrightarrow\quad 9^3>\left(x^2-3\right)^3\quad\Leftrightarrow\quad x^2-3<9.$$

Далі, розв'язуючи систему нерівностей, маємо

$$1<x^2-3<9\quad\Leftrightarrow\quad 4<x^2<12\quad\Leftrightarrow\quad 2<|\,x\,|<\sqrt{12}$$

або

$$x\in\left(-2\sqrt{3};-2\right)\cup\left(2;2\sqrt{3}\right);$$

2) якщо $0<x^2-3<1$, маємо нерівність $729<\left(x^2-3\right)^3\quad\Leftrightarrow\quad x^2-3>9$. Далі

$$\begin{cases}x^2-3>9,\\ 0<x^2-3<1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x\in\varnothing.$$

Відповідь: $x\in\left(-2\sqrt{3};-2\right)\cup\left(2;2\sqrt{3}\right)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність

$$\log_x\log_3\left(9^x-7\right)\ge 1.$$

Розв'язуючи систему нерівностей

$$\begin{cases} x > 0,\ x \neq 1, \\ \log_3\left(9^x - 7\right) > 0, \end{cases}$$

знаходимо область визначення: $x > \log_9 8$. Представимо вихідну нерівність у вигляді

$$\log_x \log_3\left(9^x - 7\right) \geq \log_x x.$$

Розглянемо два випадки:

1) якщо $x > 1$, то $\log_3\left(9^x - 7\right) \geq x \Leftrightarrow 9^x - 7 \geq 3^x$. Підстановка $3^x = y$ приводить до нерівності, вирішуючи яку, знаходимо

$$\left[\begin{array}{l} y \geq \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}, \\ y \leq \dfrac{1-\sqrt{29}}{2}. \end{array}\right.$$

Оскільки $y > 0$ $\left(y = 3^x\right)$, то значення $y \leq \dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$ не задовольняє нерівність. Розв'язуючи нерівність $3^x \geq \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$, отримаємо $x \geq \log_3 \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$ (це розв'язок задовольняє умову $x > 1$);

2) якщо $0 < x < 1$, отримаємо

$$\begin{cases} x > \log_9 8, \\ 0 < x < 1, \\ 9^x - 7 \leq 3^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_9 8 < x < 1, \\ \dfrac{1-\sqrt{29}}{2} \leq 3^x \leq \dfrac{1+\sqrt{29}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_9 8 < x < 1, \\ x \leq \log_3 \dfrac{1+\sqrt{29}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_9 8 < x < 1.$$

Відповідь: $x \in \left(\log_9 8; 1\right) \cup \left[\log_3 \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right[$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність

$$3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2.$$

Виконаємо перетворення обох частин нерівності:

$$3^{2+\lg x} < 3^{2(\lg x + 2) + 1} - 2.$$

Заміна $3^{2+\lg x} = y$ приводить до нерівності $y < 3y^2 - 2$. Розв'язуючи цю нерівність, отримаємо $y > 1;\ y < -2/3$, тобто $y \in \left(-\infty; -2/3\right) \cup \left(1; +\infty\right)$. Залишаємо другий інтервал, оскільки $y > 0$. Далі маємо

$$3^{2+\lg x} > 1 \Leftrightarrow 3^{2+\lg x} > 3^0 \Leftrightarrow 2 + \lg x > 0 \Leftrightarrow \lg x > -2 \quad x > 10^{-2}.$$

Відповідь: $x \in \left(0{,}01; +\infty\right)$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність

$$\left(0{,}5\right)^{\sqrt[x]{2}} < 0{,}0625.$$

Виконаємо перетворення $\left(0{,}5\right)^{\sqrt[x]{2}} < \left(0{,}5\right)^4$. Так як основа менша від одиниці, то отримаємо

$$\sqrt[x]{2} > 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\frac{1}{x}} > 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} > 2 \quad \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Вправи

187. Прочитайте вирази:

показникова функція – показникові функції;
логарифмічна функція – логарифмічні функції;
властивості показникової функції;
властивості логарифмічної функції;
основа логарифму;
десятковий логарифм;
натуральний логарифм;
основна логарифмічна тотожність;
логарифмування; потенціювання;
показникове рівняння; показникова нерівність;
логарифмічне рівняння; логарифмічна нерівність.

188. Обчисліть:

а) $\log_4 \sqrt[4]{8}$;
б) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9}$;
в) $\log_9 \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$;
г) $2^{\log_2 32}$;
д) $3^{\log_3 \frac{1}{9}}$;
е) $5^{\log_5 0,35}$;
ж) $49^{\log_7 2}$;
и) $25^{0,5 \log_5 10}$;
к) $\log_{\frac{1}{3\sqrt{3}}} 9$;
л) $\dfrac{\lg(3+2\sqrt{2})}{\lg(\sqrt{2}+1)}$.

189. Знайдіть число x, якщо:

а) $\log_2 x = 3$;
б) $\log_2 x = -3$;
в) $\log_{\frac{1}{2}} x = 5$;
г) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$;
д) $\log_{\sqrt{3}} x = 7$;
е) $\log_{\sqrt{3}} x = -3$;
ж) $\log_a x = a$;
и) $\log_2 x = 0$;
к) $\log_{0,1} x = 1$.

190. Знайдіть основу x, якщо:

а) $\log_x 2 = 2$;
б) $\log_x 243 = 5$;
в) $\log_x \frac{1}{243} = -5$;
г) $\log_x 3\frac{3}{8} = -3$;
д) $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{4}$;
е) $\log_x 2\sqrt[3]{2} = -6$;

ж) $\log_x \sqrt[5]{2} = -\frac{3}{5}$; и) $\log_x \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} = -0{,}8$; к) $\log_x \sqrt[10]{3} = -0{,}1$.

191. Знайдіть x з рівнянь:

а) $\log_{(x-2)} 9 = 2$;

б) $\log_{(3-x)} 2\left(x^2 + 2x - 1\right) = 2$;

в) $\log_{(x-2)}\left(x^3 - 14\right) = 3$;

г) $\log_2\left(x^2 + 6x + 17\right) = 3$;

д) $\log_{x^2+x+1} \log_{3x^2+5x-6}(x^2 + 9x) = 0$;

е) $\log_{3-x}(x^2 - x - 1) = 1$;

ж) $\log_{x^2+4x+3} \log_{2x^2-x+8}(x^2 - 7x) = 0$;

и) $\log_{\sqrt{5-2x}} 9 = 2$;

к) $\log_{\frac{1}{5}} \log_5 \sqrt{5x} = 0$;

л) $\log_{\log_3 x} 27 = -3$.

192. Розв’яжіть рівняння:

а) $5\log_2 x = 3\log_2 x + 6$;

б) $2\log_3 x - 3\log_9 81 = 5\log_3 x$;

в) $\left(\log_3 x\right)^2 - 6\log_3 x + 9 = 0$;

г) $\left(\log_2 x\right)^2 - \log_2 x - 6 = 0$;

д) $3\log_3^2 x + 7\log_3 x - 6 = 0$;

е) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;

ж) $\log_{64} x + \log_8 x = 0{,}5$;

и) $\log_{81} x + \log_9 x + \log_3 x = 3{,}5$;

к) $\lg^6 x - 9\lg^3 x + 8 = 0$;

л) $\log_2^2 x^3 - \log_2 x^8 - 1 = 0$.

193. Розв’яжіть рівняння:

а) $\log_x\left(9x^2\right)\cdot\left(\log_3 x\right)^2 = 4$;

б) $1 + \frac{\log_8(10-4x)}{\log_8 4x} = \frac{2}{1+\log_4 x}$;

в) $\sqrt[x]{3^{5\sqrt{x}}} = 3^{\sqrt{x}-4}$;

г) $\sqrt{8^x \sqrt[3]{64^x \cdot \sqrt[x]{0{,}5}}} = 2\sqrt[3]{16}$;

д) $2\log_4 x + 3\log_x 4 = 5$;

е) $\log_{\sqrt{x}} 4 \cdot \log_2 \sqrt[4]{\frac{16}{8-x}} = 1$;

ж) $2x^2 = (2x+5)\log_x 4 \cdot \log_8 x$;

и) $\log_4(x+12)\cdot \log_x 2 = 1$;

к) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$;

л) $\sqrt{2\log_8(-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0$.

194. Розв’яжіть рівняння:

а) $5^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 100$;

б) $\left(\frac{2}{7}\right)^{x^2-1} \cdot \left(\frac{49}{4}\right)^{2x} = \left(\frac{8}{343}\right)^{\frac{4}{3}}$;

в) $\log_{\frac{x}{4}} 2x - \log_{4x} \frac{x}{\sqrt{2}} = -\frac{13}{4}\log_8 4$;

г) $\log_{9x} 27 - \log_{3x} + \log_9 243 = 0$;

д) $\sqrt[x]{\frac{9}{4}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = \log_4^2 8$;

е) $\left(x^2 - x - 1\right)^{x^2-1} = (x-3)^{x^2-1}$;

ж) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$

и) $(x+2)^{x^2} = (x+2)^{x+1}$.

195. Розв’яжіть рівняння:

а) $\log_{25}^2 x^2 = \log_5 x \cdot \log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{x+5}-1\right);$ б) $\log_3 8^{x-1} \cdot \log_4 27 = x+3;$

в) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{8x} 2;$ г) $(0,5)^x \cdot 2^{2x+3} = \dfrac{1}{8};$

д) $5^{1+\log_4 x} + 5^{-1-\log_4 x} = \dfrac{26}{5};$ е) $\log_7(x-1) = \log_7\left(\log_{\sqrt{3}} 3\right);$

ж) $\log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 = \dfrac{1}{6};$ и) $9^{x+1} - 3\cdot 3^{x+3} - 27\cdot 3^{x-2} + 27 = 0;$

к) $\dfrac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2} + \log_{2x} \cdot \log_{\frac{1}{2}} 2x = 0;$ л) $20\log_{4x}\sqrt{x} + 7\log_{16x} x^3 = 3\log_{\frac{x}{2}} x^2.$

196. Розв’яжіть рівняння:

а) $\log_2\left(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1\right) - 2\log_4\left(\sqrt{\lg x} + 1\right) = 1;$

б) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1} = \dfrac{101}{10\left(2-\sqrt{3}\right)};$

в) $\lg\left(3^x - 4\right) + \lg 2 = \dfrac{x}{2}\lg\dfrac{1}{9} + \lg 2,5;$ г) $3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 6;$

д) $4^{x+3} - (0,25)^{x=1} = 15;$ е) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250;$

ж) $\lg(10x)\cdot\lg(0,1x) = \lg x^3 - 3;$ и) $\log_2\left(12 - 2^x\right) = 5 - x;$

к) $x\log_{x+1} 5 \cdot \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{5}}}(x+1) = \dfrac{x-4}{x};$ л) $\sqrt{\log_5 x} + \sqrt[3]{\log_5 x} = 2.$

197. Розв’яжіть рівняння:

а) $3^{2-\log_3 x} = 81x;$ б) $x^{2-0,5\lg x} = 100;$

в) $7^{\lg x} - 5^{\lg x+1} = 3\cdot 5^{\lg x-1} - 13\cdot 7^{\lg x-1};$ г) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10;$

д) $4^{\log_{16} x} - 3^{\log_{16} x - \frac{1}{2}} = 3^{\log_{16} x + \frac{1}{2}} - 2^{2\log_{16} x - 1};$ е) $27x^{\log_{27} x} = x^{\frac{10}{3}}.$

198. Розв’яжіть рівняння:

а) $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x = 5\cdot 6^x;$ б) $5^{1+\frac{2}{x}} - 7\cdot 10^{\frac{1}{x}} + 2\cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0;$

в) $4\sqrt[x]{81} - 12\sqrt[x]{36} + 9\sqrt[x]{16} = 0;$ г) $3\cdot 9^x + 5\cdot 6^x = 2^{2x+1};$

д) $\sqrt[x]{100} + \sqrt[x]{25} = 4,25\sqrt[x]{50};$ е) $5^{\lg x} - 3^{\lg x} = 5,(3)\cdot 3^{\lg\sqrt{x}} \cdot 5^{\frac{1}{2}(\lg x - 2)}.$

199. Розв’яжіть нерівності:

а) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 2x - 1\right) < 1;$ б) $\log_8\left(x^2 - 4x + 3\right) < 1;$

в) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4-3x} < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2-x^2}$;

г) $\log_{0,5}\left(\log_8 \dfrac{x^2-2x}{x-3}\right) < 0$;

д) $\log_{x^2}(2+x) < 1$;

е) $2^{x^2+3x} > 8 \cdot 2^x$;

ж) $4^x - 2 \cdot 5^{2x} < 10^x$;

и) $(0{,}5)^{x-2} > 6$;

к) $\log_{0,2}\left(x^2-4\right) \geq -1$;

л) $\log_2\left(\log_{0,5}\left(2^x - \dfrac{15}{16}\right)\right) \leq 2$.

200. Розв’яжіть нерівності:

а) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$;

б) $\log_{\frac{x-1}{x\_5}} 0{,}3 > 0$;

в) $\log_x\left(x^2+3x-3\right) > 1$;

г) $\sqrt{\log_{0,5}\left(x^2+4x-4\right)} < 1$;

д) $\log_{0,5}\log_2\log_{x-1} 9 > 0$;

е) $2^x < 3^{1/x}$;

ж) $\log_3\left(x^2-16\right) \leq \log_3(4x-11)$;

и) $\log_x(x+3) > 2$;

к) $(x-3)^{2x^2-7x} > 1$;

л) $\left(x^2-2{,}5x+1\right)^{x+1} \leq 1$.

201. Розв’яжіть нерівності:

а) $\log_2 \log_{\frac{1}{3}}(2-x) < 2$;

б) $\log_x \dfrac{x-3}{x-2} > -1$;

в) $\log_x \log_2\left(4^x-3\right) \leq 1$;

г) $\log_2\left(4 \cdot 3^x - 6\right) - \log_2\left(9^x-6\right) > 1$;

д) $9^{\log_{\sqrt{x}} 3} \geq 27x$;

е) $\dfrac{2\lg x}{\lg x - 1} > \dfrac{2}{\lg x - 1} - \lg x$;

ж) $3\log_5 2 + 2 - x < \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right)$;

и) $2\log_x 27 - 3\log_{27} x \leq 1$;

к) $\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right) > 1$;

л) $\log_{1/x} \dfrac{2x-1}{x-1} \leq -1$.

202. Розв’яжіть нерівності:

а) $\dfrac{\lg 2x}{\lg(4x-15)} < 2$;

б) $x^{\lg x - 1} \geq 100$;

в) $\log_3\left(35-x^3\right) > 3\log_3(5-x)$;

г) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{1-x}} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

д) $\log_{\frac{1}{2}}(x+5)^2 > \log_{\frac{1}{2}}(3x-1)^2$;

е) $\log_x \dfrac{3}{8-2x} \geq -2$;

ж) $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$;

и) $\log_{0,5} \dfrac{x^2-4x+6}{x} < 0$;

к) $2\log_2(x-1) > \log_2(5-x) + 1$;

л) $\dfrac{7}{9^x-2} \geq \dfrac{2}{3^x-1}$.

203. Дайте відповідь на питання:

а) Що таке показникова функція? Накресліть її графік.

б) Напишіть властивості показникової функції.
в) Що таке логарифмічна функція? Накресліть її графік.
г) Напишіть властивості логарифмічної функції.
д) Що таке показникове рівняння? Наведіть приклад.
е) Що таке логарифмічне рівняння? Наведіть приклад.
ж) Що таке показникова нерівність? Наведіть приклад.
и) Що таке логарифмічна нерівність? Наведіть приклад.

Контрольні питання до теми «Функції»

1. Що таке функція? Наведіть приклад.
2. Що таке область визначення функції? Як вона позначається?
3. Що таке область значення функції? Як вона позначається?
4. Назвіть методи задання функцій.
5. Що таке графік функції?
6. Що таке лінійна функція? Накресліть її графік.
7. Що таке квадратична функція? Накресліть її графік.
8. Що таке гіпербола? Накресліть її графік.
9. Що таке обернена функція? Як побудувати її графік?
10. Що таке показникова функція? Накресліть її графік.
11. Напишіть властивості показникової функції.
12. Що таке логарифмічна функція? Накресліть її графік.
13. Напишіть властивості логарифмічної функції.
14. Що таке показникове рівняння? Наведіть приклад.
15. Що таке логарифмічне рівняння? Наведіть приклад.
16. Що таке показникова нерівність? Наведіть приклад.
17. Що таке логарифмічна нерівність? Наведіть приклад
18. Чи є функція $y = \log_2 x$ показниковою? Якщо так, то чому? Якщо ні, то також чому?
19. Чи є функція $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ логарифмічною? Якщо так, то чому? Якщо ні, то також чому?

Модель контрольної роботи до теми «Функції»

1. Побудувати графік функції:
а) $y = x^2 - 2x - 3$;
б) $y = -2x + 3$.
2. Розв'яжіть рівняння:
а) $2^{x-4}\left(2^x + 10\right) = 9$;
б) $\lg\left(2x - 19\right) - \lg\left(3x - 20\right) = -1$.
3. Розв'яжіть нерівності:

а) $4\sqrt[x]{81}-12\sqrt[x]{36}+9\sqrt[x]{16}\geq 0$;

б) $3\left(\log_2 x\right)\left(\log_4 x\right)\left(\log_8 x\right)\leq 4$.

4. Що таке показникова функція? Накресліть її графік.

5. Напишіть українською мовою вирази:

$\ln\left(0,02-x\right)$; $\lg 100^{x+4}$; $7^{\log_{49}(x-9)}$.

ТРИГОНОМЕТРІЯ

ЗАНЯТТЯ 22

22.1 Тригонометричні функції

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Тригонометрія	Trigonometry	Trigonométrie
Радіанна міра	Radiane measure	Mesure radiane
Прямокутний трикутник	Right triangle	Triangle rectangle
Катет	Catet	Catet
Гіпотенуза	Hypotenuse	Hypoténuse
Синус	Sinus	Sinus
Косинус	Cosine	Cosinus
Тангенс	Tangent	Tangente
Котангенс	Cotangent	Cotangent
Секанс	Secant	Sécante
Косеканс	Cosecant	Cosecant

Слово «тригонометрія» складається з грецьких слів: «тригонон» трикутник і «метрезис» – вимірювання. **Основне завдання тригонометрії** полягає у розв’язанні трикутників, тобто у обчисленні невідомих величин трикутника за даними значення інших його величин.

Разом із градусною мірою в тригонометрії використовується й інша міра, яка називається **радіанною**. У ній за одиницю виміру приймається гострий центральний кут $\angle MON$ (рис. 22.1), під яким видно з центру кола її дугу, яка дорівнює радіусу кола $\left(\overline{MN} = OM\right)$. Такий кут називається радіаном. Величина цього кута не залежить від радіусу кола та від положення дуги. MN на колі. Так як півколо видно з центру під кутом 180°, а його довжина дорівнює π радіусам, то радіан в π раз менший, від кута у 180°, тобто один радіан дорівнює $\frac{180^{\circ}}{\pi}$ градусів:

$$1 \text{ радіан} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \approx 57^{\circ},2958 \approx 57^{\circ}17'45''.$$

Навпаки, один градус дорівнює $\frac{\pi}{180^{\circ}}$ радіана.

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \text{радиана} \approx 0,017453 \text{ радіана.}$$

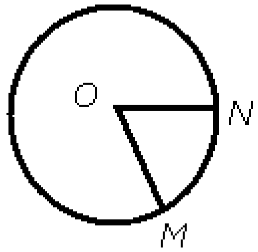


Рисунок 22.1 – Радіанна міра кута

Рішення будь-яких трикутників зрештою зводиться до рішення прямокутних трикутників. Відношення різних пар сторін прямокутного трикутника називають **тригонометричними функціями** його гострого кута.

У прямокутному трикутнику ABC (рис. 22.2) кожна із сторін має свою назву. Сторони прямокутного трикутника, що прилягають до прямого кута, називаються **катетами**. (AC, BC – катети), а сторона, яка є протилежною до прямого кута – **гіпотенузою** (AB - гіпотенуза).

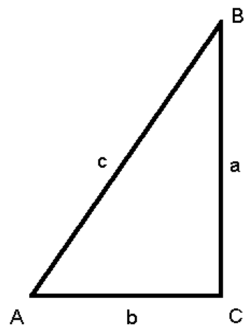


Рисунок 22.2 – Прямокутний трикутник

По відношенню до гострого кута A тригонометричні функції мають такі назви та визначення:

Синус гострого кута A це відношення протилежного катета a до гіпотенузи c, тобто $\sin A = \frac{a}{c}$.

Косинус гострого кута A це відношення прилеглого катета b до гіпотенузи c, тобто $\cos A = \frac{b}{c}$.

Тангенс гострого кута A це відношення протилежного катета a до прилеглого катета b, тобто $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$.

Котангенс гострого кута A це відношення прилеглого катета b до протилежного катета a, тобто $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$.

Секанс гострого кута A це відношення гіпотенузи c до прилеглого катета a, тобто

$\sec A = \frac{c}{b}$.

Косеканс гострого кута A це відношення гіпотенузи c до протилежного катета a, тобто $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$.

22.2 Властивості та графіки тригонометричних функцій

Функція $y = \sin x$. Область визначення функції множина дійсних чисел, область значень – відрізок $[-1;1]$. Функція періодична, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x,\ k \in \mathbf{Z}$. Найменший додатний період $T = 2\pi$. $\sin x$ зростає від –1 до 1 на проміжках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$ і спадає від 1 до –1 на проміжках $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.

Функція $\sin x$ – **непарна**, тобто

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

З непарності функції випливає, що її графік симетричний початку координат. Графік функції $\sin x$ (синусоїда) зображено на рисунку 22.3:

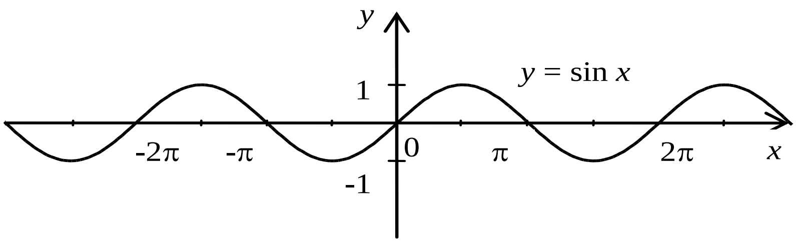


Рисунок 22.3 – Графік синусоїди

Функція $y = \cos x$. Область визначення функції множина дійсних чисел, область значень – відрізок $[-1;1]$. Функція $\cos x$ періодична, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x,\ k \in \mathbf{Z}$. Найменший додатний період $T = 2\pi$. Функція $\cos x$ зростає від -1 до 1 на проміжках $[-\pi + 2k\pi; 2k\pi], k \in \mathbf{Z}$ і спадає від –1 до 1 на проміжках $[2k\pi; \pi + 2k\pi], k \in \mathbf{Z}$.

Функція $\cos x$ – **парна**, тобто

$$\cos(-x) = \cos x.$$

З парності функції випливає, що її графік симетричний осі ординат. Графік функції $\cos x$ (косинусоїда) зображено на рисунку 22.4:

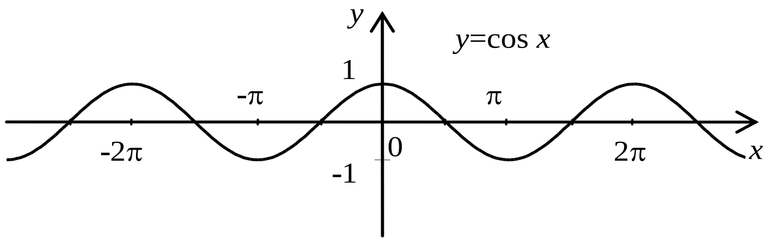


Рисунок 22.4 – Графік косинусоїди

Функція $y = \operatorname{tg} x$. Область визначення функції $\operatorname{tg} x$ – множина всіх дійсних чисел, крім $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, безліч значень включає усі дійсні числа. Функція $\operatorname{tg} x$ – періодична, $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$. Найменший додатний період $T = \pi$. Тангенс зростає у кожному з інтервалів $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in Z$. Функція $\operatorname{tg} x$ – **непарна**, тобто

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$

З непарності функції випливає, що її графік симетричний початку координат. Графік функції $\operatorname{tg} x$ (тангенсоїда) зображено на рисунку 22.5:

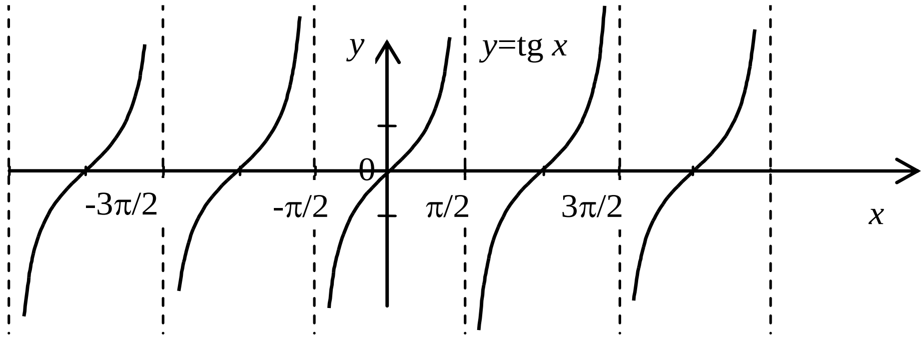


Рисунок 22.5 – Графік тангенсоїди

Функція $y = \operatorname{ctg} x$. Область визначення функції $\operatorname{ctg} x$ – множина всіх дійсних чисел, крім $x = k\pi, k \in Z$, безліч значень включає усі дійсні числа. Функція $\operatorname{ctg} x$ – періодична, $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$. Найменший додатний період $T = \pi$. Котангенс зростає у кожному з інтервалів $]k\pi; \pi + k\pi[, k \in Z$. Функція $\operatorname{ctg} x$ **непарна**, тобто

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

З непарності функції випливає, що її графік симетричний початку відліку. Графік функції $\operatorname{ctg} x$ (котангенсоїда) зображено на рисунку 22.6:

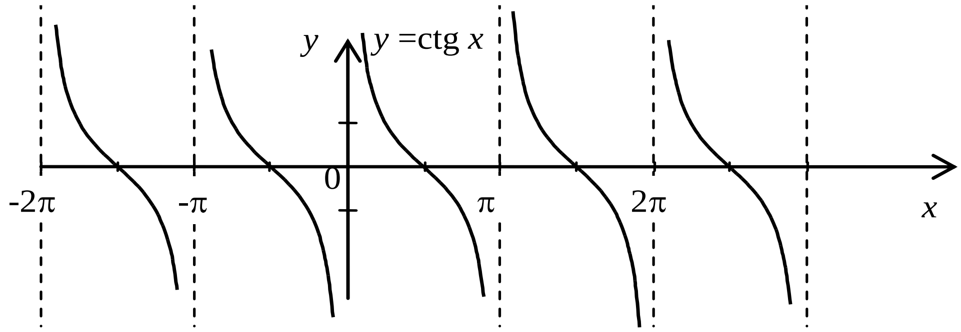


Рисунок 22.6 – Графік котангенсоїди

Знаки синуса, косинуса, тангенса та котангенса у кожній з чвертей показано на рисунку 22.7:

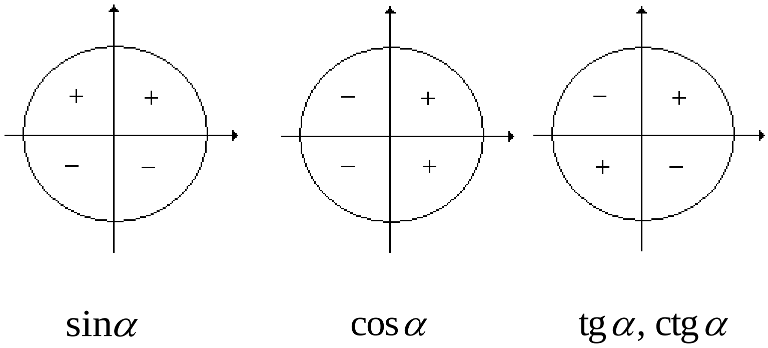


Рисунок 22.7 – Знаки тригонометричних функцій

Зауваження. Знаки синуса, косинуса, тангенса та котангенса не змінюються при додаванні до кута цілої кількості обертів (тобто $n \cdot 2\pi$).

Для деяких кутів можна записати точні вирази їх тригонометричних величин. Найважливіші випадки наведено в таблиці 22.1:

Таблиця 22.1 – Значення тригонометричних функцій деяких кутів

		Аргумент α						
Градуси		0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
Радіани		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Функція	$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
	$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
	$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	0	Не існує
	$ctg\alpha$	Не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не існує	0

22.3 Основні тригонометричні формули

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (**основна тригонометрична тотожність**);

2) $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

3) $\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

4) $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$;

5) $\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$;

6) $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$;

7) $\mathrm{cosec}\,\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$;

8) $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

9) $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Рівності (1) – (9) є тотожностями. Їх називають основними тригонометричними формулами. Розглянемо приклади використання цих формул.

Приклад 1. Знайти $\cos\alpha, \mathrm{tg}\,\alpha, \mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо відомо, що $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$ і $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Знайдемо спочатку $\cos\alpha$. З формули (1) отримуємо, що

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha.$$

Так як α є кутом другої чверті, то його косинус від’ємний. Значить,

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}.$$

Знаючи синус і косинус кута, можна знайти його тангенс та котангенс:

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12};$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}=-\frac{12}{5}.$$

Приклад 2. Спростити вираз

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Маємо

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+1+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{2+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2}{\sin\alpha}.$$

Приклад 3. Довести тотожність

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$$

Перетворимо ліву частину цієї рівності:

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)=$$

$$=\sin^2\alpha\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha-1\right)=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$$

Ми отримали вираз, що стоїть у правій частині рівності. Таким чином, тотожність доведена.

Формули, що виражають тригонометричні функції аргументів через функції аргументу, називають **формулами зведення**. Самі функції називаються зведеними.

Правило зведення. Якщо у формулі зведення кут віднімається від чисел $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$ або додається до них, то функція, що зводиться, змінюється на кофункцію («синус» на «косинус», «тангенс на котангенс» і навпаки). Якщо α віднімається з чисел π і 2π або додається до них, то назва функції зберігається. Функція від α має той самий знак, що і функція, що зводиться (в цьому випадку α вважається гострим кутом).

Формули додавання це формули, що дозволяють виражати тригонометричні функції суми та різниці двох кутів через тригонометричні функції цих кутів.

Косинус суми двох кутів дорівнює добутку косинусів цих кутів мінус добуток синусів цих кутів:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$ – **косинус суми**.

Косинус різниці двох кутів дорівнює добутку косинусів цих кутів плюс добуток синусів цих кутів:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$ – **косинус різниці**.

Синус суми двох кутів дорівнює добутку синуса першого кута на косинус другого плюс добуток косинуса першого кута на синус другого:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$ – **синус суми**.

Синус різниці двох кутів дорівнює добутку синуса першого кута на косинус другого мінус добуток косинуса першого кута на синус другого:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$ – **синус різниці**.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$ – **тангенс суми**;

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$ – **тангенс різниці**.

Приклад 1. Обчислити

$$\cos 15^{\circ} \text{ и } \sin 15^{\circ}.$$

Представимо 15° у вигляді різниці $45^{\circ}-30^{\circ}$, тоді

$$\cos 15^{\circ} = \cos\left(45^{\circ} - 30^{\circ}\right) = \cos 45^{\circ}\cos 30^{\circ} + \sin 45^{\circ}\sin 30^{\circ} = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Приклад 2. Спростити вираз

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta).$$

Скориставшись формулами косинуса суми та косинуса різниці, отримаємо:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta =$$
$$= 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Формули додавання дозволяють виразити $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}\,2\alpha$ через тригонометричні функції кута α. Для цього необхідно покласти у формулах додавання β рівним α. Отримаємо **формули подвійного аргументу:**

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$ – синус подвійного кута;

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$ – косинус подвійного кута;

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$$ – тангенс подвійного кута;

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$$ – котангенс подвійного кута.

Приклад 3. Знайти значення $\sin 2\alpha$, якщо відомо, що $\cos 2\alpha = -0{,}8$ і α – кут другої чверті.

Спочатку обчислимо $\sin\alpha$. Так як α – кут другої чверті, то $\sin\alpha > 0$. Тому

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6.$$

За формулою синуса подвійного аргументу знаходимо

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot 0{,}6\cdot(-0{,}8) = -0{,}96.$$

Приклад 4. Спростити вираз

$$\sin\alpha\cos^3\alpha - \sin^3\alpha.$$

Винесемо за дужки $\sin\alpha\cos\alpha$ і скористаємося формулами подвійного кута:

$$\sin\alpha\cos^3\alpha - \sin^3\alpha = \sin\alpha\cos\alpha\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = \frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)\cdot\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha.$$

Інші важливі тригонометричні формули можна переглянути в Додатку Б.

22.4 Доведення тотожностей. Спрощення виразів

При розв’язанні прикладів на доведення тригонометричних тотожностей потрібно знати всі основні формули і вміти перетворювати обидві частини тотожності, що доводиться. В окремих випадках застосовують спеціальні прийоми. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Довести тотожність $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\operatorname{cosec} x$.

Виконаємо перетворення

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x}=2\operatorname{cosec} x,$$

що і потрібно було довести.

Приклад 2. Довести тотожність $\frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$, $\alpha\neq\frac{\pi}{4}(2n+1)$.

Застосовуючи формули зведення $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$ та формули подвійного кута, маємо

$$\frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

що і потрібно було довести.

Приклад 3. Довести тотожність $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{2}{3}$.

Заміна $\sin^2\alpha=t$ приводить до тотожного виразу:

$$\frac{t^2+(1-t)^2-1}{t^3+(1-t)^3-1}=\frac{2t^2-2t}{3t^2-3t}=\frac{2}{3},$$

що і потрібно було довести.

Приклад 4. Довести тотожність $4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

Використовуємо формулу перетворення добутку на суму:

$$4\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha+\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha-\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right)=$$

$$=2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right).$$

Помножимо і розділимо отриманий вираз на $\sin\alpha$ і перетворимо:

$$\frac{2\sin\alpha\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos 2\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha},$$

що і потрібно було довести.

При доведенні деяких тотожностей застосовують нестандартні прийоми. Покажемо це на прикладах.

Приклад 5. Довести тотожність $\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0=\frac{1}{8}$.

Помножимо і розділимо ліву частину рівності на $\sin 20^0$, а потім застосуємо формулу $\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$:

$$\frac{\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\left(180^\circ-20^\circ\right)}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}.$$

Приклад 6. Довести тотожність

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$$

У лівій частині рівності згрупуємо доданки та застосуємо формулу сума косинусів:

$$\left(\cos\alpha+\cos 7\alpha\right)+\left(\cos 2\alpha+\cos 6\alpha\right)=2\cos 4\alpha\cos 3\alpha+2\cos 4\alpha\cos 2\alpha=$$

$$=2\cos 4\alpha\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$$

Розглянемо приклади на спрощення тригонометричних виразів.

Приклад 7. Спростити $\frac{1+\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

Виконаємо перетворення у чисельнику:

$$1+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 2\alpha\sin\alpha+\cos 2\alpha\cos\alpha}{\sin 2\alpha\sin\alpha}=\frac{\cos\left(2\alpha-\alpha\right)}{\sin 2\alpha\sin\alpha}.$$

Знаменник дробу $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$. Остаточно маємо

$$\frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha\sin\alpha}:\frac{2}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Приклад 8. Спростити $\sin^3\alpha\cos 3\alpha+\cos^3\alpha\sin 3\alpha$

Виконаємо перетворення

$$\sin^3\alpha\cos 3\alpha+\cos^3\alpha\sin 3\alpha=\sin^2\alpha\left(\sin\alpha\cos 3\alpha\right)+\cos^2\alpha\left(\cos\alpha\sin 3\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2\alpha\right)\frac{1}{2}\left(\sin 4\alpha-\sin 2\alpha\right)+\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\alpha\right)\frac{1}{2}\left(\sin 4\alpha+\sin 2\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\sin 4\alpha+2\cos 2\alpha\sin 2\alpha\right)=\frac{3}{4}\sin 4\alpha.$$

Вправи

204. Прочитайте вирази:

тригонометрія; тригонометричні функції;
кут; радіанна міра кута;
прямокутний трикутник;
катет – катети; гіпотенуза – гіпотенузи;
синус; косинус; тангенс; котангенс; секанс; косеканс;
періодична функція; періодичні функції;
основна тригонометрична тотожність;
формули зведення;
формули додавання;
формули подвійного аргументу;
доведення тотожностей; спрощення виразів.

205. Доведіть тотожності:

а) $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=2ctg\alpha$; б) $\frac{1}{1+tg\alpha\cdot tg2\alpha}=\cos 2\alpha$;

в) $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$; г) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$.

206. Скоротіть дроби:

а) $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$; б) $\frac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ}$.

207. Подайте у вигляді добутку:

а) $\sin 40^\circ + \sin 16^\circ$; б) $\cos 46^\circ - \cos 74^\circ$.

208. Спростіть вирази:

а) $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha-1$; б) $(1+\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$;

в) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; г) $\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}$.

209. Дайте відповідь на питання:

а) Що таке прямокутний трикутник?
б) Що таке катет прямокутного трикутника?
в) Що таке гіпотенуза прямокутного трикутника?
г) Що таке косинус гострого кута?
д) Що таке синус гострого кута?
е) Що таке тангенс гострого кута?
ж) Що таке котангенс гострого кута?
и) Напишіть властивості функції $y=\sin x$. Побудуйте її графік.

к) Напишіть властивості функції $y = \cos x$. Побудуйте її графік.

л) Напишіть властивості функції $y = \mathrm{tg} x$. Побудуйте її графік.

м) Напишіть властивості функції $y = \mathrm{ctg} x$. Побудуйте її графік.

н) Напишіть основну тригонометричну тотожність.

п) Напишіть формули подвійного аргументу.

ЗАНЯТТЯ 23

23.1 Обернені тригонометричні функції

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Обернена тригонометрична функція	Inverse trigonometric function	Fonction trigonométrique inverse
Арксинус	Arcsine	Arcsine
Арккосінус	Arccosine	Arccosine
Арктангенс	Arctangent	Arctangent
Арккотангенс	Arccots	Arccots
Тригонометричне рівняння	Trigonometric equation	Équation trigonométrique

Функція, яка обернена до функції $y = \sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, називається **арксинусом**: $y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Областю визначення функції $y = \arcsin x$ є відрізок $[-1;1]$, областю значень – відрізок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Функція непарна: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. Графік цієї функції зображено на рисунку 23.1.

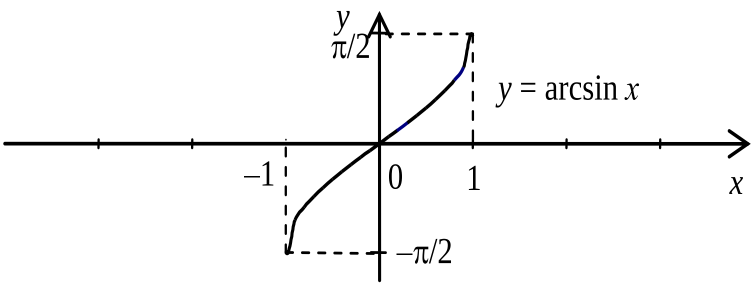


Рисунок 23.1 – Графік арксинуса

Функція, яка обернена до функції $y=\cos x$ на відрізку $[0;\pi]$, називається **арккосинусом**: $y=\arccos x \Leftrightarrow \cos y = x,\ y\in[0;\pi]$. Областю визначення функції $y=\arccos x$ є відрізок $[-1;1]$, областю значень – відрізок $[0;\pi]$. Функція ні парна, ні непарна.

Доведемо, що $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$. За визначенням арккосинусу, $0\le\arccos x\le\pi$, число $\pi-\arccos x$ належить цьому ж відрізку, тобто

$$0\le\pi-\arccos x\le\pi.$$

Обидва числа мають однаковий косинус, $\cos(\arccos(-x))=-x$ і $\cos(\pi-\arccos x)=-\cos(\arccos x)=-x$, отже, числа є рівними.

Графік цієї функції зображено рисунку 23.2.

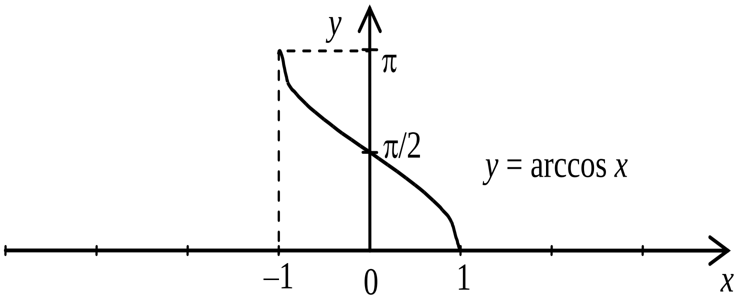


Рисунок 23.2 – Графік арккосинуса

Функція, яка обернена до функції $\operatorname{tg} x$ на інтервалі $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, називається **арктангенсом**. Функція $y=\operatorname{arctg} x$ визначена на множині всіх дійсних чисел, множина значень функції – інтервал $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Функція непарна: $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x$.

Графік цієї функції зображено на рисунку 23.3.

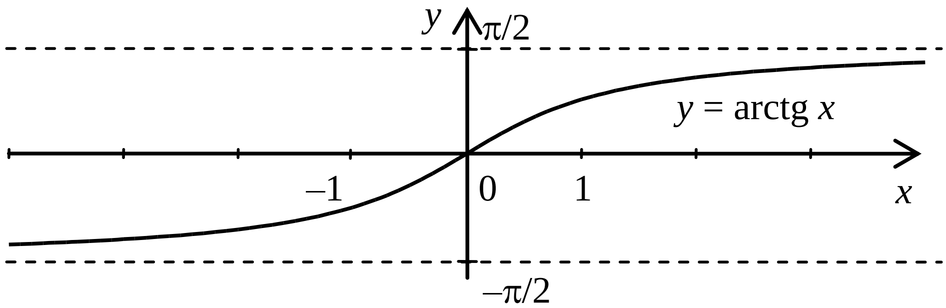


Рисунок 23.3 – Графік арктангенса

Функція, яка обернена до функції $\operatorname{ctg} x$ на інтервалі $]0;\pi[$, називається **арккотангенсом**. Функція $y=\operatorname{arcctg} x$ визначена на множині всіх дійсних чисел, множина значень функції – інтервал $]0;\pi[$. Функція ні парна, ні непарна: $\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg}x$ (доведення аналогічне доведенню для арккосинусу).

Графік цієї функції зображено рисунку 23.4.

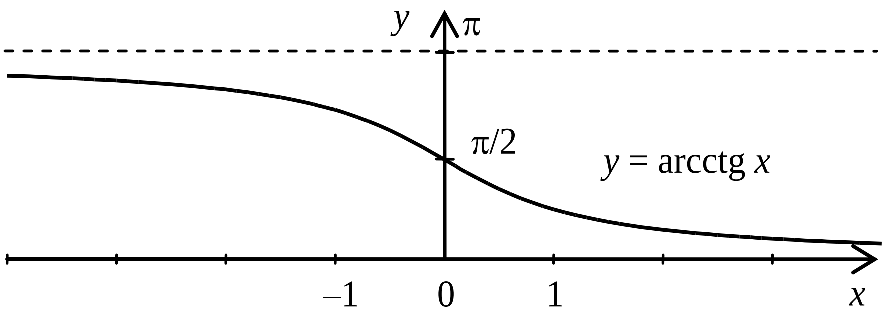


Рисунок 23.4 – Графік арккотангенса

23.2 Елементарні тригонометричні рівняння

Рівняння $\sin x=m$**.** Рішення існує при $|m|\le 1$ і виражається формулою

$$x=(-1)^k\arcsin m+k\pi,\ \text{где}\ k\in Z \qquad (23.1)$$

Приклад 1. Розв’язати рівняння $\sin x+\frac{1}{2}=0$.

Застосуємо формулу (23.1): $x=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right)+k\pi,\ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z$.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $\sin 2x-\frac{1}{3}=0$.

Застосуємо формулу (23.1):

$$2x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,\quad x=\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Рівняння $\cos x=m$**.** Рішення існує при $|m|\le 1$ і виражається формулою

$$x=\pm\arccos m+2k\pi,\ \text{где}\ k\in Z \qquad (23.2)$$

Приклад 3. Розв’язати рівняння $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$.

Застосуємо формулу (23.2):

$x-\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$, откуда $x=\frac{5}{12}\pi+2k\pi$ или $x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi$, $k\in Z$.

Рівняння $\operatorname{tg}x=m$**.** Рішення існує при будь-якому дійсному m і виражається формулою $x=\operatorname{arctg}m+k\pi,$ где $k\in Z$ (23.3)

Приклад 4. Розв’язати рівняння $\operatorname{tg}x-\sqrt{3}=0$.

За формулою (23.3) маємо $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, где $k \in Z$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} x^2 + 1 = 0$.

Рівняння $x^2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ має розв'язок, якщо $-\frac{\pi}{4} + k\pi \geq 0$, тобто при $k \in N$. Отримуємо $x = \pm\sqrt{-\frac{\pi}{4} + k\pi}$, где $k \in N$.

Рівняння $\operatorname{ctg} x = m$**.** Рішення існує при будь-якому дійсному m і виражається формулою

$$x = \operatorname{arcctg} m + k\pi, \text{ где } k \in Z \tag{23.4}$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Застосуємо формулу (23.4): $3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k$, где $k \in Z$.

Частинні розв'язки тригонометричних рівнянь:

1. $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.
2. $\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in Z$.
3. $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.
4. $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.
5. $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.
6. $\cos x = 1$; $x = 2\pi k$, $k \in Z$.
7. $\operatorname{tg} x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.
8. $\operatorname{tg} x = 0$; $x = \pi k$, $k \in Z$.
9. $\operatorname{tg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.
10. $\operatorname{ctg} x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.
11. $\operatorname{ctg} x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.
12. $\operatorname{ctg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Розглянемо декілька тригонометричних рівнянь, які шляхом простих перетворень приводяться до найпростіших рівнянь.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\mathrm{tg}\left(x-15^{\circ}\right)\mathrm{ctg}\left(x+15^{\circ}\right)=\frac{1}{3}.$

Перетворимо ліву частину рівняння:

$$\frac{\sin\left(x-15^{\circ}\right)\cos\left(x+15^{\circ}\right)}{\cos\left(x-15^{\circ}\right)\sin\left(x+15^{\circ}\right)}=\frac{\frac{1}{2}\left(\sin 2x-\sin 30^{\circ}\right)}{\frac{1}{2}\left(\sin 2x+\sin 30^{\circ}\right)}=\frac{2\sin 2x-1}{2\sin 2x+1}.$$

Далі розв'язуємо рівняння

$$\frac{2\sin 2x-1}{2\sin 2x+1}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 6\sin 2x-3=3\sin 2x+1\Leftrightarrow 2\sin 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\sin^3 z\cos z-\sin z\cos^3 z=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Перетворимо ліву частину рівняння:

$$\sin z\cos z\left(\sin^2 z-\cos^2 z\right)=\frac{1}{2}\sin 2z\left(-\cos 2z\right)=-\frac{1}{4}\sin 4z.$$

Потім розв'язуємо найпростіше рівняння

$$-\frac{1}{4}\sin 4z=\frac{\sqrt{2}}{8}\Leftrightarrow \sin 4z=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 4z=\left(-\frac{\pi}{4}\right)(-1)^k+k\pi.$$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{16}(-1)^{k+1}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in Z$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$.

Застосовуючи формулу зниження степеня, отримуємо:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0\Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x+\cos 4x=0\Leftrightarrow$$

$$\cos 4x(2\cos 2x+1)=0.$$

Далі розв'язуємо рівняння

$$\cos 4x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4};$$

$$2\cos 2x=-1\Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, где $k,n\in Z$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\mathrm{ctg}3x+\sin(\pi+2x)-\sqrt{2}\cos 5x=0.$$

Виконаємо перетворення

$$\cos 2x\frac{\cos 3x}{\sin 3x}-\sin 2x-\sqrt{2}\cos 5x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\cos 3x-\sin 2x\sin 3x-\sqrt{2}\cos 5x\sin 3x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x-\sqrt{2}\cos 5x\sin 3x=0\Leftrightarrow \cos 5x\left(1-\sqrt{2}\sin 3x\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 5x=0,\\ \sin 3x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{10}(2n+1),\\ 3x=(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{10}(2n+1)$; $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$, где $n,k\in Z$.

Приклад 11. Розв’язати рівняння $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin 3x$.

Розглянемо рівносильні рівняння:

$$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 3x\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin 3x=0\Leftrightarrow$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=0\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{x}{2}\right)=0,\\ \cos\left(\dfrac{5x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{x}{2}=\pi n,\\ \dfrac{5x}{2}+\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}-2\pi n,\\ x=\dfrac{3\pi}{20}+\dfrac{2\pi k}{5}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{4}-2\pi n$; $x=\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}$, где $n,\ k\in Z$.

Часто під час розв’язання тригонометричних рівнянь застосовують метод заміни змінної. Розглянемо приклади.

Приклад 12. Розв’язати рівняння $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-\frac{1}{2}$.

Додамо до обох частин рівняння вираз $2\sin^2 x\cos^2 x$ і розглянемо рівносильні рівняння

$$\sin^4 x++2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=\sin 2x-\frac{1}{2}+2\sin^2 x\cos^2 x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=\sin 2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin^2 2x\Leftrightarrow \sin 2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Заміна $\sin x=y$ приводить до рівняння

$$1=y-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y^2\Leftrightarrow y^2+2y-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-3,\\ y=1.\end{array}\right.$$

Далі розв’язуємо рівняння:

$$\sin 2x=-3\Leftrightarrow x\in\varnothing;$$

$$\sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, где $k\in Z$.

Приклад 13. Розв'язати рівняння $\sin 2x+2\operatorname{ctg} x=3$.

Перевіряємо, що $\operatorname{ctg} x\neq 0$, отже, $\operatorname{tg} x$ існує. Застосовуючи формулу $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, отримаємо рівносильне рівняння

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+\frac{2}{\operatorname{tg} x}=3.$$

Зробимо заміну $y=\operatorname{tg} x$, отримаємо

$$\frac{2y}{1+y^2}+\frac{2}{y}=3\Leftrightarrow 3y^3-4y^2+3y-2=0.$$

Це рівняння має єдиний дійсний корінь $y=1$. Далі маємо

$$\operatorname{tg} x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi .$$

Відповідь: $x=\pi/4+k\pi$, где $k\in Z$.

Вправи

210. Прочитайте вирази:

обернені тригонометричні функції;
арксинус; арккосинус; арктангенс; арккотангенс;
тригонометричне рівняння – тригонометричні рівняння;
найпростіше тригонометричне рівняння.

211. Обчисліть:

а) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)-\cos\left(-3\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

б) $\cos\left(3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

в) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}+3\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

212. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin(1-2x)=-\frac{1}{2}$;
б) $\cos 2x\cdot\cos 3x=\cos 5x$;
в) $\sin^2 x-\cos^2 x=0,5-\sin x\cdot\cos x$;
г) $\sin x+\sqrt{3}\cdot\cos x=1$;
д) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$;
е) $2\sin 4x+16\cdot\sin^3 x\cdot\cos x+3\cos 2x-5=0$.

213. Дайте відповіді на питання:

а) Напишіть властивості функції $y = \arccos x$. Побудуйте її графік.

б) Напишіть властивості функції $y = \arcsin x$. Побудуйте її графік.

в) Напишіть властивості функції $y = \mathrm{arctg} x$. Побудуйте її графік.

г) Напишіть властивості функції $y = \mathrm{arcctg} x$. Побудуйте її графік.

д) Що таке тригонометричне рівняння? Наведіть приклад.

Контрольні питання до теми «Тригонометрія»

1. Що таке прямокутний трикутник?
2. Що таке катет прямокутного трикутника?
3. Що таке гіпотенуза прямокутного трикутника?
4. Що таке косинус гострого кута?
5. Що таке синус гострого кута?
6. Що таке тангенс гострого кута?
7. Що таке котангенс гострого кута?
8. Напишіть властивості функції $y = \sin x$. Побудуйте її графік.
9. Напишіть властивості функції $y = \cos x$. Побудуйте її графік.
10. Напишіть властивості функції $y = \mathrm{tg} x$. Побудуйте її графік.
11. Напишіть властивості функції $y = \mathrm{ctg} x$. Побудуйте її графік.
12. Напишіть основну тригонометричну тотожність.
13. Напишіть формули подвійного аргументу.
14. Напишіть властивості функції $y = \arccos x$. Побудуйте її графік.
15. Напишіть властивості функції $y = \arcsin x$. Побудуйте її графік.
16. Напишіть властивості функції $y = \mathrm{arctg} x$. Побудуйте її графік.
17. Напишіть властивості функції $y = \mathrm{arcctg} x$. Побудуйте її графік.
19. Що таке тригонометричне рівняння? Наведіть приклад.

Модель контрольної роботи до теми «Тригонометрія»

1. Побудуйте графіки тригонометричних функцій:

а) $y = \cos x - 1$; б) $y = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} + 1$.

2. Побудуйте графіки обернених тригонометричних функцій:

а) $y = \arccos x + 1$; б) $y = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{3}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $3\sin x = 2\cos^2 x$; б) $7\mathrm{tg}x - 4\mathrm{ctg}x = 12$.

4. Спростіть вираз:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta) + 2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha - \beta)}.$$

5. Напишіть формули подвійного аргументу.

ЕЛЕМЕНТИ ГЕОМЕТРІЇ

ЗАНЯТТЯ 24

24.1 Основні геометричні поняття і фігури

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Пряма лінія	Straight line	Ligne droite
Півпряма	Semi-straight	Demi-droite
Відрізок	Section	Coupé
Кут	Angle	Angle
Вершина кута	Vertex of an angle	Haut du coin
Сторона кута	Side of the angle	Côté de l'angle
Бісектриса	Bisectrix	Bissectrice
Прямий кут	Right angle	Angle droit
Гострий кут	Acute angle	Angle aigu
Тупий кут	Obtuse angle	Angle obtus
Суміжні кути	Adjacent angles	Angles adjacents
Вертикальні кути	Vertical angles	Angles verticaux

Пряму лінію (рис. 24.1, а) можна подумки продовжити в обидві сторони безмежно. Частина прямої лінії, з одного боку обмежена, з другого ні, називається **півпрямою** або **променем** (рис. 24.1, б). Частина прямої лінії, обмежена по обидва боки, називається **відрізком** (рис. 24.1, в).

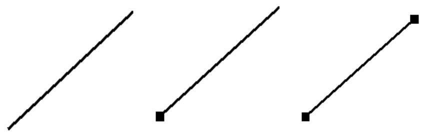


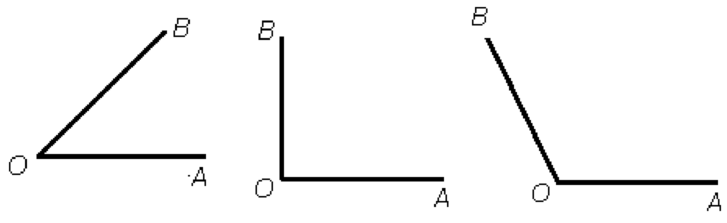
Рисунок 24.1 – Види ліній: а – прямая, б – промінь, в – відрізок

Кут це фігура (рис. 24.2, а), утворена двома променями OA і OB (**сторони кута)**, що виходять з однієї точки O (**вершини кута**).

Мірою кута служить величина повороту навколо вершини O, що переводить промінь OA у положення OB. Широко поширені дві системи вимірювання кутів: радіанна та градусна.

У градусній системі виміру кутів за одиницю приймається кут, отриманий поворотом променя на $^1\!/_{360}$ частину одного повного обороту – **градус** (позначення $^{\circ}$). Повний оборот, таким чином, складає 360°. Градус ділиться на 60 хвилин (позначення $'$); хвилина – на 60 секунд (позначення $''$). Кут у 90° називається **прямим** (рис. 24.2 б). Кут менший

90^o, називається гострим (рис. 24.2, а); кут більший 90^o – **тупим** (рис. 24.2, в). Прямі лінії, що утворюють прямий кут, називаються **перпендикулярними.**



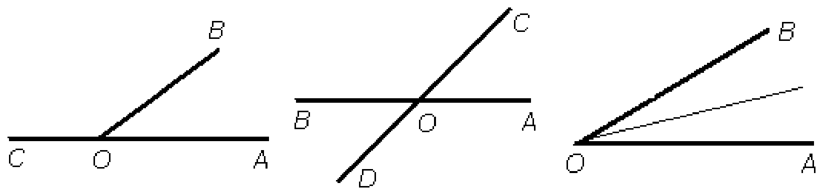
а б в

Рисунок 24.2 – Кути: а – гострий, б - прямий, в - тупий

Суміжні кути (рис. 24.3, а) – пара кутів *AOB* і *COB* з загальною вершиною *O* та спільною стороною *OB*; дві інші сторони *OA* і *OC* є сторонами розгорнутого кута. Сума суміжних кутів дорівнює 180^o.

Вертикальні кути (рис. 24.3, б) – це пара кутів, у яких вершина спільна, а сторони одного є продовженням сторін іншого. На рисунку 24.3, б $\angle AOC$ і $\angle DOB$, а також $\angle COB$ і $\angle AOD$), – вертикальні. Вертикальні кути рівні між собою.

Бісектрисою кута називається промінь, що ділить кут навпіл (рис. 24.3, в). Бісектриси вертикальних кутів є продовженням одна одної. Бісектриси суміжних кутів взаємно перпендикулярні.



а б в

Рисунок 24.3 – Кути: а – суміжні, б – вертикальні, в – бісектриса

24.2 Многокутники

Словник нових слів

Українська	Английська	Французька
Многокутник	Polygon	Polygone
Вершина многокутника	Polygon vertex	Sommet de polygone
Сторона многокутника	Polygon side	Côté polygone
Діагональ	Diagonal	Diagonale
Периметр	Perimeter	Périmètre
Опуклий многокутник	Convex polygon	Polygone convexe

Плоска фігура, утворена декількома прямолінійними відрізками, що з’єднані між собою, називається **многокутником**. На рисунку 24.4, а зображено шестикутник $ABCDEF$. Точки A, B, C, D, E, F – **вершини** многокутника; кути при них – **кути** многокутника ($\angle A, \angle B, \ldots$). Відрізки, які сполучають дві несусідні сторони многокутника AC, AD, BE і так далі – це **діагоналі** многокутника, $AB, BC, CD, \ldots$ – **сторони** многокутника. Сума довжин сторін $AB + BC + CD + \ldots + FA$ – називається **периметром** і позначається P.

В елементарній геометрії розглядаються лише прості многокутники, тобто контури яких не мають самоперетинів. Многокутники, контури яких мають самоперетинання, називаються **зірчастими** многокутниками (рис. 24.4, б).

Якщо всі діагоналі многокутника лежать усередині нього, многокутник називається **опуклим**. Шестикутник на рисунку 24.4, а є опуклим; п'ятикутник на рисунку 24.4, в є неопуклим (діагональ лежить усередині многокутника).

Сума внутрішніх кутів у кожному опуклому многокутнику дорівнює $180^\circ(n-2)$, де n – число сторін многокутника.

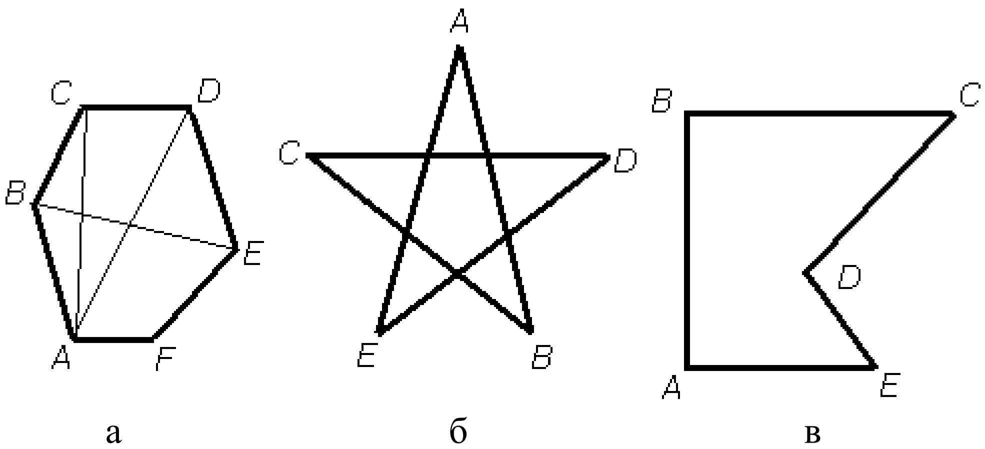


Рисунок 24.4 – Види многокутників: а – опуклий, б – зірчастий, в – неопуклий

24.3 Коло, круг

Словник нових слів

Українська	**Англійська**	**Французька**
1	2	3
Коло	Circle	Circonférence
Радіус	Radius	Rayon
Дуга	Arc	Arc
Січна	Secant	Sécante

1	2	3
Хорда	Chord	Corde
Діаметр	Diameter	Diamètre
Круг	A circle	Cercle
Сегмент	Segment	Segment
Сектор	Sector	Secteur

Коло є геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від однієї її точки, яка називається **центром кола**.

Рівні відрізки, що з’єднують центр із точками кола, називаються **радіусами** (позначення: r або R). Частина кола, наприклад, AD, (рис. 24.5) називається **дугою**. Пряма MN, що проходить через дві точки кола, називається **січною**, а її відрізок KL, який лежить усередині кола – хордою.

З наближенням до центру хорда збільшується. Хорда BD, що проходить через центр, називається **діаметром** (позначення: d або D). Діаметр дорівнює двом радіусам $(d = 2r)$.

Кругом називається частина площини, що лежить усередині кола.

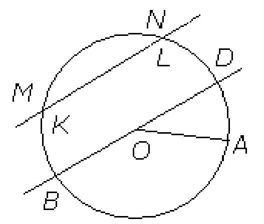


Рисунок 24.5 – Коло та його елементи

Нехай січна PQ (рис. 24.6) проходе через точки A та B, які належать колу. Нехай точка B рухається по колу, наближаючись до A. Січна PQ буде змінювати положення, обертаючись навколо точки A. По мірі наближення точки B до точки A січна PQ будет прямувати до деякого граничного положення MN. Пряма MN називається **дотичною** до кола у точці A. Дотична та коло мають лише одну спільну точку.

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса OA, проведеному у точку дотику A.

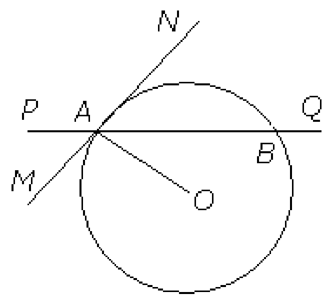


Рисунок 24.6 – Дотична до кола

Сегментом називається частина кола, обмежена дугою ACB і хордою, що її стягує (рис. 24.7, а).

Перпендикуляр, проведений із середини хорди AB до перетину з дугою AB, називається стрілкою дуги AB. Довжина стрілки DC називається висотою сегмента.

Сектором називається частина кола, обмежена дугою та двома радіусами, проведеними до кінців дуги (рис. 24.7, б, в). Сектор, що відсікається радіусами, що утворюють кут 90°, називається **квадрантом** (рис. 24.7, г).

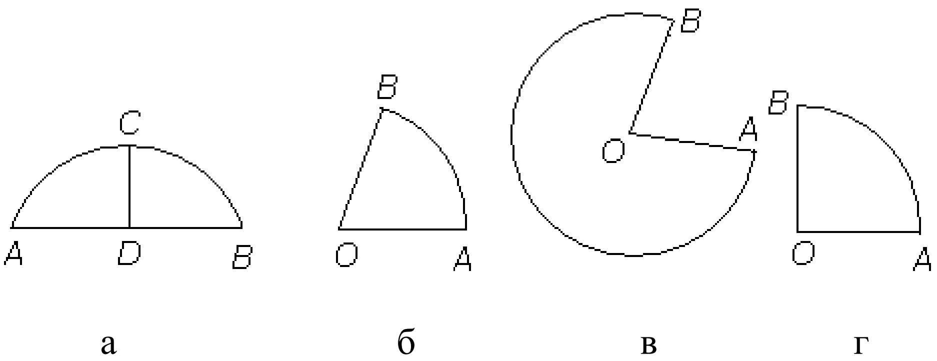


Рисунок 24.7 – Частини круга: а – сегмент, б, в – сектор, г – квадрант

Вправи

214. Прочитайте вирази:

пряма; півпряма; промінь; відрізок;
кут, вершина кута, сторони кута;
гострий кут, прямий кут, тупий кут;
вертикальні кути; суміжні кути;
многокутник – многокутники;
вершина, сторона, діагональ многокутника;
опуклий многокутник; неопуклий многокутник;
коло, центр кола, радіус кола;
діаметр, хорда, січна, дуга кола;
круг, сегмент, сектор, дотична.

215. Дайте відповіді на питання:

а) Що таке промінь? Чим промінь відрізняється від прямої?
б) Що таке відрізок? Чим відрізок відрізняється від променя?
в) Чому дорівнює 1 радіан? Які види кутів Ви знаєте?
г) Які кути є суміжними? Які кути є вертикальними?
д) Назвіть види многокутників?
е) Що таке коло? Назвіть елементи кола.
ж) Що таке радіус кола? Напишіть формулу для обчислення діаметра кола.
и) Що таке круг? Назвіть елементи круга.

ЗАНЯТТЯ 25

25.1 Трикутники

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Трикутник	Triangle	Triangle
Гострокутний трикутник	Acute triangle	Triangle aigu
Прямокутний трикутник	Right triangle	Triangle rectangle
Тупокутний трикутник	Obtuse triangle	Triangle obtus
Рівнобедрений трикутник	Isosceles triangle	Triangle isocèle
Рівносторонній трикутник	Equilateral triangle	Triangle équilatéral
Бічні сторони	Sides	Côtés
Основа трикутника	Base of the triangle	Base du triangle
Катет	Catet	Catet
Гіпотенуза	Hypotenuse	Hypoténuse
Площа	Square	Zone
Висота	Height	Haut
Медіана	Median	Médiane
Бісектриса	Bisecteur	Bisecteur
Ортоцентр	Orthocenter	Orthocentre
Центр мас трикутника	Triangle center of gravity	Centre de gravité triangle

Трикутник – многокутник з трьома сторонами. **Вершини трикутника** позначають великими латинськими літерами $A, B, C, D, E, F\ldots$ і т. д. (рис. 25.1, а, б, в). **Сторони трикутника** часто позначаються однією малою літерою, яка відповідає позначенню протилежної вершини, або двома великими. Якщо всі три кути трикутника гострі, то трикутник – **гострокутний** (рис. 25.1, а). Якщо один із кутів трикутника прямий, то трикутник – **прямокутний** (рис. 25.1, б); сторони, що утворюють прямий кут, називаються **катетами** (рис. 25.1, б), а сторона, що лежить проти прямого кута – **гіпотенузою** (рис. 25.1, б). Якщо один із кутів трикутника тупий, то трикутник – **тупокутний** (рис. 25.1, в).

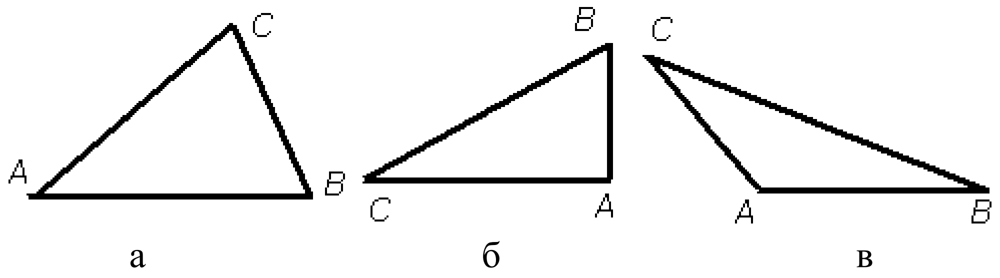


Рисунок 25.1 – Види трикутників: а – гострокутний, б – прямокутний, в – тупокутний

Трикутник ABC називається **рівнобедреним** (рис. 25.2, а), якщо дві його сторони рівні. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називаються **бічними**; третя сторона є **основою**. Трикутник ABC називається **рівностороннім** (рис. 25.2 б), якщо три сторони його рівні.

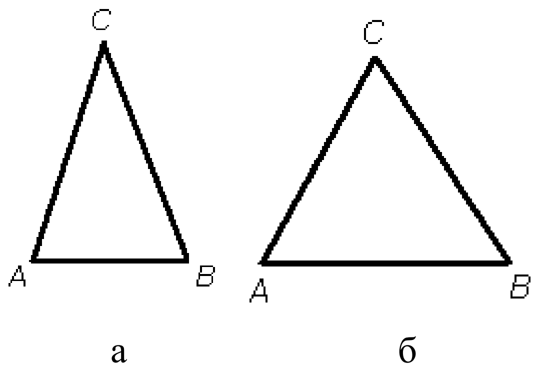


Рисунок 25.2 – Трикутники: а – рівнобедрений, б – рівносторонній

У будь-якому трикутнику сума його кутів дорівнює 180°, а в рівносторонньому трикутнику кожен кут дорівнює 60°.

У кожному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут; проти рівних сторін рівні кути, і навпаки.

Будь-яка сторона трикутника менше суми і більше різниці двох інших сторін $(a < b + c;\ a > b - c)$.

Для **обчислення площі** трикутника використовують такі формули:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a;$$

$$S = \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \sin\alpha, \text{ де } \alpha = \angle BAC;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона)},$$

де $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – напівпериметр.

Ознаки рівності трикутників:

Два трикутники рівні, якщо у них відповідно рівні:

1) дві сторони та кут, який лежить між ними; наприклад $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$ (рис. 25.3);
2) сторона і два прилеглих до неї кута; наприклад $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle C = \angle C'$ (рис. 25.3);
3) три сторони: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ (рис. 25.3).

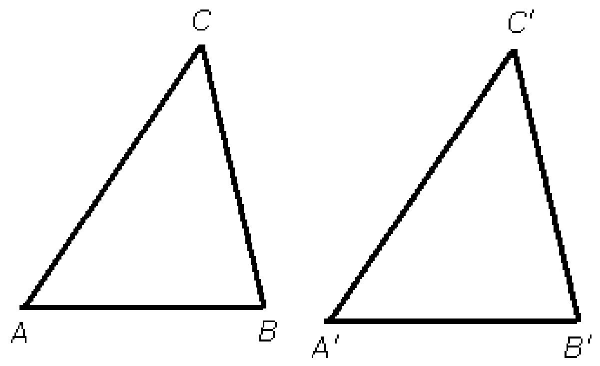


Рисунок 25.3 – Ознаки рівності трикутників

Висотою трикутника називається перпендикуляр, опущений з будь-якої вершини трикутника на протилежну сторону або її продовження (сторона, на яку опускається перпендикуляр, називається у такому випадку основою трикутника). У тупокутному трикутнику основи двох висот потрапляють на продовження сторін (рис. 25.4 а). Ці висоти лежать поза трикутником. У гострокутному трикутнику (рис. 25.4 б) всі три висоти лежать усередині трикутника. У прямокутному трикутнику катети є також висотами. Три висоти у трикутнику завжди перетинаються в одній точці, яка називається **ортоцентр**; у тупокутному трикутнику ортоцентр лежить поза трикутником; у прямокутному він збігається з вершиною прямого кута; у гострокутному трикутнику ортоцентр лежить всередині трикутника.

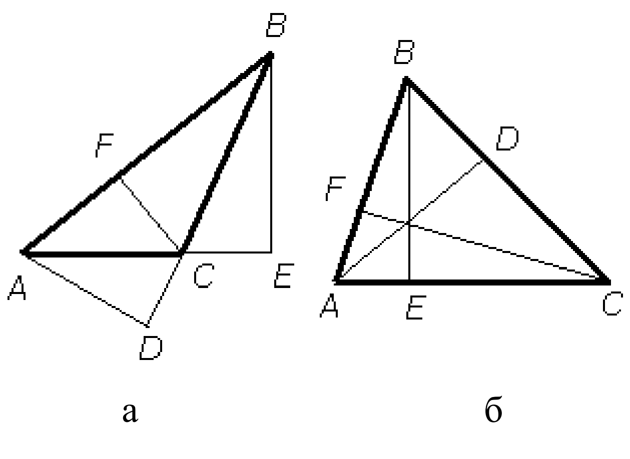


Рисунок 25.4 – Висоти в трикутнику: а – у тупокутному, б – у гострокутному

Медіаною трикутника називається відрізок, що з'єднує будь-яку вершину трикутника із серединою протилежної сторони (рис. 25.5). Три медіани трикутника перетинаються в одній точці (яка завжди лежить усередині трикутника), що є **центром мас** трикутника. Ця точка ділить кожну медіану щодо двох до одного (2:1), рахуючи від вершини.

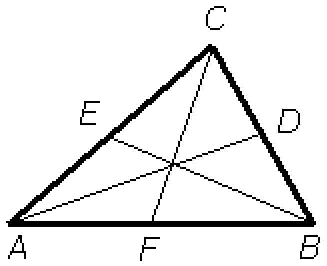


Рисунок 25.5 – Медіани у трикутнику

Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси будь-якого кута від вершини до перетину з протилежною стороною (рис. 25.6). Три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці (яка лежить завжди всередині трикутника), що є **центром вписаного кола**.

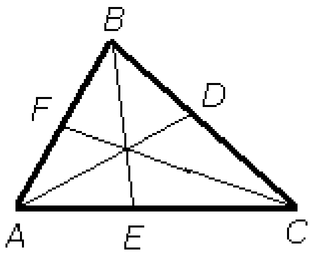


Рисунок 25.6 – Бісектриси у трикутнику

25.2 Чотирикутники

Словник нових слів

Українська	Англійська	Французька
Паралелограм	Parallelogram	Parallélogramme
Основа	Base	La base
Прямокутник	Rectangle	Rectangle
Ромб	Rhombus	Losange
Квадрат	Square	Carré
Трапеція	Trapezium	Trapèze
Середня лінія трапеції	Trapezium center line	Trapèze central

Паралелограмом (рис. 25.7) називається чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні.

Властивості паралелограма:

1. Протилежні сторони паралелограма рівні: $AD = CD,\ AD = BC$. Будь-які дві протилежні сторони можна вважати **основами**. Відстань між ними (по перпендикуляру) називається **висотою** (BF).

2. Діагоналі паралелограма у точці перетину діляться навпіл $(AO = OC, BO = OD)$.

3. Протилежні кути паралелограма рівні $(\angle A = \angle C, \angle B = \angle D)$.

4. Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів чотирьох його сторін.

Площа S **паралелограма** дорівнює добутку основи (a) на висоту (h_a):

$$S = ah_a.$$

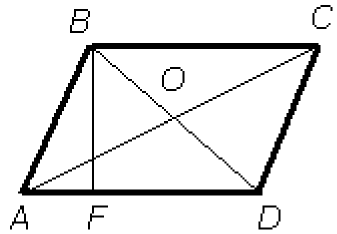


Рисунок 25.7 – Паралелограм

Прямокутник це паралелограм, у якого всі кути прямі (рис. 25.8, а). Сторони прямокутника a і b одночасно служать його висотами.

Площа прямокутника дорівнює добутку сторін. У прямокутнику діагоналі рівні: $AC = BD$.

У прямокутнику квадрат діагоналі дорівнює сумі квадратів двох суміжних сторін: $AC^2 = AD^2 + DC^2$.

Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називається **ромбом** (рис. 25.8, б).

У ромба діагоналі взаємно перпендикулярні $(AC \perp BD)$ і ділять кути ромба навпіл ($\angle DCA = \angle BCA$ і так далі).

Площа ромба дорівнює половині добутка діагоналей:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \left(AC = d_1, BD = d_2\right).$$

Квадратом називається прямокутник, у якого всі сторони рівні (рис. 25.8, в). Квадрат є частинним видом прямокутника, а також окремим видом ромба. Тому він має всі вище перелічені властивості. **Площа квадрата** дорівнює квадрату його сторони:

$$S = a^2.$$

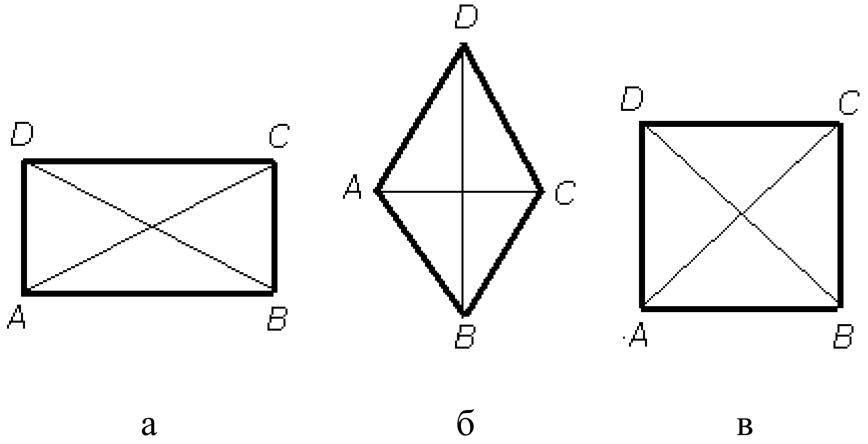


Рисунок 25.8 – Чотирикутники: а – прямокутник, б – ромб, в – квадрат

Трапецією називається чотирикутник, дві протилежні сторони якого паралельні ($BC \parallel AD$) (рис. 25.9, а). Паралелограм можна вважати окремим видом трапеції.

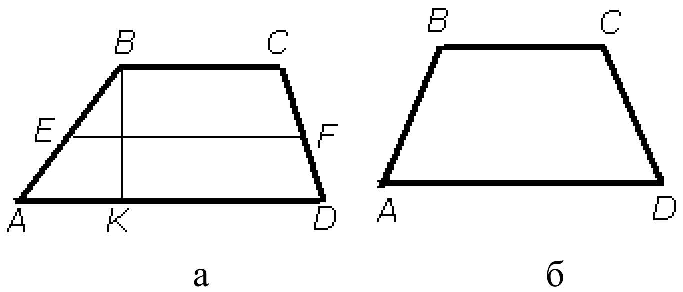


Рисунок 25.9 – Види трапецій: а – різностороння, б – рівнобока

Паралельні сторони називаються **основами** трапеції, дві інші (AB, CD) **бічними сторонами.** Відстань між основами (по перпендикуляру) називається **висотою** (BK). Відрізок, що з'єднує середини бічних сторін, називається **середньою лінією трапеції**.

Середня лінія трапеції дорівнює півсумі основ $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$ і паралельна їм $EF \parallel AD$.

Площа трапеції дорівнює добутку середньої лінії на висоту:

$$S = \frac{1}{2}(a + b)h \ \ (AD = a, BC = b, BK = h).$$

Трапеція з рівними бічними сторонами (якщо вона не паралелограм) називається **рівнобокою** ($AB = CD$, рис. 25.9, б). У рівнобокій трапеції кути при основах рівні $(\angle A = \angle D, \angle B = \angle C)$.

Вправи

216. Прочитайте вирази:

трикутник – трикутники;
гострокутний, тупокутний, прямокутний трикутники;
рівнобедрений, рівносторонній трикутники;
висота, медіана, бісектриса трикутника;
чотирикутник – чотирикутники;
паралелограм, властивості паралелограма;
ромб, прямокутник, квадрат, трапеція;
площа паралелограма;
рівнобока трапеція.

217. Сторона квадрата дорівнює 10 см. Чому дорівнюють радіуси вписаного та описаного кіл?

218. Прямокутник вписано у коло радіуса 5 см, одна з його сторін дорівнює 8 см. Знайдіть іншу сторону прямокутника.

219. Діагоналі ромба дорівнюють 10 і 24 см. Знайдіть його сторони.

220. Знайдіть площу ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 4 і 6 см.

221. У паралелограма $ABCD$ сторона AB = 4 см, AD = 5 см, кут A дорівнює 45°. Обчисліть довжину діагоналі BD.

222. Дайте відповідь на питання:

а) Що таке трикутник? Накресліть довільний трикутник.
б) Які види трикутників Ви знаєте?
в) Що таке висота трикутника?
г) Що таке медіана трикутника?
д) Що таке бісектриса трикутника?
е) Напишіть формули для обчислення площі трикутника.
ж) Який трикутник називається прямокутним?
и) Який трикутник називається рівнобедреним?
к) Який трикутник називається рівностороннім?
л) Що таке паралелограм? Назвіть властивості паралелограма.
м) Чи є прямокутник паралелограмом?
н) Що таке ромб? Назвіть властивості ромба.
п) Що таке прямокутник? Назвіть властивості прямокутника.
р) Що таке квадрат? Назвіть властивості квадрата.
с) Що таке трапеція? Яка трапеція називається рівнобокою?
т) Напишіть формулу для обчислення площі паралелограма.
у) Напишіть формулу для обчислення площі прямокутника.
ф) Напишіть формулу для обчислення площі квадрата.
х) Напишіть формулу для обчислення площі трапеції.

Контрольні питання до теми «Елементи геометрії»

1. Що таке промінь? Чим промінь відрізняється від прямої?

2. Що таке відрізок? Чим відрізок відрізняється від променя?
3. Чому дорівнює 1 радіан?
4. Які види кутів Ви знаєте?
5. Які кути є суміжними?
6. Які кути є вертикальними?
7. Які види многокутників Ви знаєте?
8. Що таке коло?
9. Що таке радіус кола?
10. Назвіть формулу для обчислення діаметра кола.
11. Що таке круг?
12. Що таке трикутник? Накресліть довільний трикутник.
13. Які види трикутників ви знаєте?
14. Що таке висота трикутника?
15. Що таке медіана трикутника?
16. Що таке бісектриса трикутника?
17. Напишіть формули для обчислення площі трикутника.
18. Який трикутник називається прямокутним?
19. Який трикутник називається рівнобедреним?
20. Який трикутник називається рівностороннім?
21. Що таке паралелограм? Назвіть властивості паралелограма.
22. Чи є прямокутник паралелограмом?
23. Що таке ромб? Назвіть властивості ромба.
24. Що таке прямокутник?
25. Що таке квадрат?
26. Що таке трапеція? Яка трапеція називається рівнобокою?
27. Напишіть формулу для обчислення площі паралелограма.
28. Напишіть формулу для обчислення площі прямокутника.
29. Напишіть формулу для обчислення площі квадрата.
30. Напишіть формулу для обчислення площі трапеції.

Модель контрольної роботи до теми «Елементи геометрії»

1. Накресліть прямокутний трикутник *ABC* із прямим кутом В. Вкажіть у ньому катети та гіпотенузу.

2. Накресліть ромб *ABCD*. Вкажіть діагоналі ромба. Проведіть висоту ВК. Чому дорівнює градусний міра кута *ВКА*? Чи правильно, що у ромба діагоналі перпендикулярні?

3. У трапеції *ABCD* основа *BC* дорівнює 6 см, а бічна сторона *AB* дорівнює 5 см. Висота *ВК* відсікає на основі *АВ* відрізки *АК* = 3 см і *KD* = 7 см. Знайдіть висоту та площу трапеції.

4. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 4 см, а кут, що прилягає до нього, дорівнює 45°. Знайдіть інший катет та гіпотенузу.

5. Що таке коло? Накресліть коло радіуса 1 см. Знайдіть діаметр отриманого кола.

ВІДПОВІДІ

35. а) 200; б) 600; в) 90; г) 1 500. **36.** а) 199; б) 9 427 000; в) 689; г) 200; д) 301. **86.** а) $2\frac{2}{3}$. **91.** 40. **92.** а) $8\frac{31}{50}$. **100.** а) 4,5; з) $x=4$; и) $x=0{,}002$; к) $x=10$; н) $x=5$. **112**. б) $\frac{1}{35}$; в) 87; г) $2\frac{1}{8}$. **113.** в) 1. **122.** $-a^6b^3$. **135.** $\begin{cases} b\neq 0, \\ c\neq 0, \\ a\neq c. \end{cases}$

136. в) y – ціла частина, $4y-3$ – остача. **137.** в) $\frac{a+b}{3a}$. **139.** а) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{2a+21}{15(a-1)}$, ж) $\frac{15a+8}{4a^2-9}$. **140.** в) $\frac{3(2x-y)x}{y^4}$. **141.** д) $\frac{x}{8}$. **142.** а) $-\frac{2}{3}$; д) $\frac{3(x+4)}{x}$.

146. а) $x\in\varnothing$; б) $x=3$; в) $x=-8$; **147.** в) $x_{1,2}=3$; г) $x_{1,2}=-\frac{1}{5}$; д) $x\notin R$; е) $x\notin R$; ж) $x_1=5$, $x_2=8$; з) $x_1=1$, $x_2=17$. **152.** а) $x=-2$; б) $x_1=-4$, $x_2=2$; г) $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{4}$; и) $x\in\varnothing$. **153.** б) $x=-1$. **154.** а) $x_1=\frac{4}{5}$, $x_2=\frac{2}{7}$; б) $x_{1,2}=4\pm 2\sqrt{6}$;. $x_3=3$; $x_4=5$ **157.** а) $(-2;-3),(3;2)$; д) $(1;2)$; ж) $(-1;-2)$, $(-5;-10)$; и) $(3;2),(-3;-2)$. **158.** а) $(3;2),(-3;-2)$. **161.** б) $x\in(-7;+\infty)$. **163.** з) $x\in\left(\frac{3}{29};10\right)$. **171.** а) $x_1=-\frac{7}{2}$, $x_2=\frac{7}{2}$; г) $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$; з) $x=-\frac{5}{2}$.

172. а) $x_{1,2}=\pm 3$; в) $x=2$; д) $x=5$; и) $x=2$. **173.** г) $x_1=2$, $x_2=-\frac{1}{3}$. **211.** а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **212.** а) $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$; б) $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z; \\ x=\frac{\pi}{2}m,\ m\in Z; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} x=-arctg3+\pi n,\ n\in Z; \\ x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z; \end{array}\right.$ г) $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$;

д) $\left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{5}n,\ n\in Z; \\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m,\ m\in Z; \\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z; \end{array}\right.$ е) $x=arctg\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z$. **217.** $R=5\sqrt{2}$ см, $r=5$ см.

218. 6 см. **219.** 13 см. **220.** 12 см^2. **221.** $\sqrt{41-20\sqrt{2}}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вороновская Л. П. Математика (для студентов подготовительного отделения) : учеб. пособ. / Л. П. Вороновская, Л. Б. Коваленко. – Харьков : ХНАГХ, 2007. – 150 с.

2. Кузнецова А. А. Математика [Электрон. ресурс]: учеб. пособ. для иностр. студентов подгот. отделения / А. А. Кузнецова ; Харьков. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Электрон. текст. данные. – Харьков : ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2019. – 199 с. Режим доступа: https://eprints.kname.edu.ua/55305/, свободный (дата обращения : 19.06.2024). – Название с экрана.

3. Кузнецова Г. А. Словник з математики (з перекладом російською, українською, англійською, французькою та арабською мовами для іноземних студентів підготовчого відділення) [Електрон. ресурс] / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 56 с. Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/45146/, вільний (дата звернення: 19.06.2024). – Назва з екрана.

4. Мерзляк А. Г. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики : 9 клас / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків : Гімназія, 2019. – 160 с. – ISBN 978-966-474-251-8.

5. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях : навч. посіб. для учнів 7–11 кл. – Харків : Гімназія, 2011. – 128 с.

6. Нелін Є. П. Геометрія в таблицях : навч. посіб. для учнів 7–11 кл. / Є. П. Нелін. – 6-те вид. – Харків : Гімназія, 2016. – 128 с.

7. Печенежский Ю. Е. Задания для самостоятельных и контрольных работ по разделу «Системы нелинейных уравнений» курса элементарной математики / Харьков. инст. инж. город. хоз-ва ; сост. Ю. Е. Печенежский. – Харьков : ХИИГХ, 1990. – Ч. 1. – 64 с.

8. Збірник задач з математики для вступників до втузів / В. К. Єгерєв, В. В. Зайцев, Б. А. Кордємський та ін..; за ред. М. І. Сканаві ; пер. з рос. : Є. В. Бондарчук, Ю. Ю. Костриця, Л. П. Оніщенко. – 3-тє вид., стер. – Київ : Вища шк., 1996. – 445 с. : іл.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ДОДАТОК А

Додаткові математичні знаки

Таблиця А.1 – Словник додаткових математичних знаків

Знак	**Українська**	**Англійська**	**Французська**
1	2	3	4
∞	Нескінченність	Infinity	L'infini
$+\infty$	Плюс нескінченність	Plus infinity	Plus l'infini
$-\infty$	Мінус нескінченність	Minus infinity	Moins l'infini
$\in$	Належить	Belongs	Appartient à
$\notin$	Не належить	Not belong	N'appartient pas
%	Відсоток	Percent	Pourcentage de
$\exists$	Квантор існування	Quantifier of existence	Quantificateur d'existence
$\nexists$	Не існує	There does not exists	Il n'existe pas
$\forall$	Квантор загальності	Quantifier of universality (for all)	Quantificateur de l'universalité
$\Leftrightarrow$	Еквівалентно	Is equivalent to	Est équivalent à
$\Rightarrow$	Отже	Consequently (implies)	Donc
$\varnothing$	Порожня множина	Empty set	Ensemble vide
$\bigcup$	Знак об’єднання множин	Set union sign	Mettre le signe de l'union
$\bigcap$	Знак перетину	Crossing sign	Signe de croisement
$\subset$	Знак підмножини	Subset sign	Signe de sous-ensemble
a^n	Степінь	Power	Degré de
$\sqrt[n]{a}$	Корінь	Root	La racine
$\log_a x$	Логарифм	Logarithm	Logarithme
$\ln x$	Натуральний логарифм	Natural logarithm	Logarithme naturel
$\lg x$	Десятковий логарифм	Decimal logarithm	Logarithme décimal
$n!$	Факторіал	Factorial	Factoriel
a_n	Індекс	Index	Index
$y = f(x)$	Функція	Function	Fonction
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	Границя	Limit	La limite

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4
Δx	Приріст аргументу	Increment argument	Augmentation un argument
y'	Похідна	Derivative	Dérivé
$\int_a^b f(x)dx$	Інтеграл	Integral	Intégrale
$\lvert a \rvert$	Модуль	Module	Module
$\parallel$	Паралельність	Parallelism	Parallélisme
$\perp$	Перпендикуляр-ність	Perpendicularity	Perpendicularité
a°	Градус	Degree	Degré
a'	Хвилина	Minute	Minute
a''	Секунда	Second	Deuxième
$\angle$	Кут	Angle	Coin
$\vec{a}$	Вектор	Vector	Vecteur
ΔABC	Трикутник	Triangle	Triangle
P	Периметр	Perimeter	Périmètre
l	Довжина	Length	La longueur
S	Площа	Square	Carré
V	Об’єм	Volume	Volume
H, h	Висота	Height	La hauteur
R, r	Радіус	Radius	Rayon

Читаємо додаткові математичні знаки так:

∞ нескінченність

$+\infty$ плюс нескінченність

$-\infty$ мінус нескінченність

$\in$ належить (чому?) ($x \in R$ «ікс належить множині дійсних чисел»)

$\notin$ не належить (чому?) ($x \notin N$ «ікс не належить множині натуральних чисел»)

% відсоток

$\exists$ квантор існування («існує»)

$\forall$ квантор загальності («для будь-якого»)

$\Leftrightarrow$ знак еквівалентності, рівнозначності («еквівалентно»)

$\Rightarrow$ знак слідування («отже» або «відтак»)

$\varnothing$ порожня множина

$\bigcup$ знак об’єднання множин

$\bigcap$ знак перетину множин

$\subset$ знак підмножини ($A \subset B$ «*A* підмножина *B*»)

a^n степінь (« число *a* у степені ен»)

$\sqrt[n]{a}$ корінь («корінь степеня ен з числа a »)

$\log_a x$ логарифм («логарифм ікс за основою a»)

$\ln x$ «натуральний логарифм числа ікс»

$\lg x$ «десятковий логарифм числа ікс»

$n!$ «ен факторіал»

a_n «a з індексом ен» або «a енне»

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ знак границі («границя a енного якщо ен прямує до нескінченності»)

$y = f(x)$ ігрек є функцією ікс («ігрек дорівнює еф від ікс»)

Δx приріст аргумента («дельта ікс»)

y' ($\dot{y}$) перша похідна ігрек («ігрек штрих»)

y'' ($\ddot{y}$) друга похідна ігрек («ігрек два штриха»)

$\frac{dy}{dx}$ перша похідна ігрек («де ігрек по де ікс»)

$\int\limits_a^b f(x)dx$ інтеграл («інтеграл від a до b еф від ікс по де ікс»)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сума («сума u_n від одного до нескінченності»)

$|a|$ знак модуля («модуль a»)

$||$ знак паралельності ($a \parallel b$ «пряма a паралельна до прямої b»)

$\perp$ знак перпендикулярності ($a \perp b$ «пряма a перпендикулярна до прямої b»)

a° a градусів (30° «тридцять градусів»)

a' a хвилин ($15'$ «п’ятнадцять хвилин»)

a'' a секунд ($19''$ «дев’ятнадцять секунд»)

$\angle$ знак кута ($\angle A$ «кут A»)

$\vec{a}$ знак вектора («вектор a»)

$\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$ кут між векторами a і b

ΔABC «трикутник ABC»

P периметр (чого?)

l довжина (чого?)

S площа (чого?)

V об’єм (чого?)

H, h висота (чого?)

R, r радіус (чого?)

ДОДАТОК Б

Формули потрійних та половинних кутів

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$ – синус потрійного кута;

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$ – косинус потрійного кута;

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$$ – тангенс потрійного кута;

$$ctg 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$$ – котангенс потрійного кута;

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}$$ – синус половинного кута;

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)}$$ – косинус половинного кута;

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$ – тангенс половинного кута;

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$$ – котангенс половинного кута.

Формули зниження степеня

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha);\ \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha).$$

Формули суми (різниці) тригонометричних функцій

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$ – сума синусів;

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$ – різниця синусів;

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$ – сума косинусів;

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$ – різниця косинусів.

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$ – сума (різниця) тангенсів;

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$ – сума (різниця) котангенсів.

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму (різницю)

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right].$$

Формули вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного кута

$$\sin\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Електронне навчальне видання

КУЗНЕЦОВА Ганна Анатоліївна

МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для іноземних студентів підготовчого відділення

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *О. А. Норик*
Комп’ютерне верстання *Г. А. Кузнецова*

Підп. до друку 18.06.2024. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 11,6.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.