МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до проведення практичних занять
із навчальної дисципліни

«МЕТРОЛОГІЯ І СТАНДАРТИЗАЦІЯ»

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія, освітньо-професійна програма «Промислове та цивільне будівництво»)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2024

Методичні рекомендації до проведення практичних занять із навчальної дисципліни «Метрологія і стандартизація» (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія, освітньо-професійна програма «Промислове та цивільне будівництво) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : Є. С. Сєдишев. А. В. Набока, Д. Г. Петренко, Ю. М. Круль. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 38 с.

Укладачі: ст. викл. Є. С. Сєдишев,
канд. техн. наук, ст. викл. А. В. Набока,
канд. техн. наук, ст. викл. Д. Г. Петренко,
канд. техн. наук, ст. викл. Ю. М. Круль

Рецензент

С. М. Золотов, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельних конструкцій Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою будівельних конструкцій, протокол № 12 від 02.03.2024

Методичні рекомендації призначені для здобувачів спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія. Подано вимоги щодо оформлення, засоби та послідовність виконання завдань, список рекомендованих джерел, наведено приклади оформлення робіт.

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс «Метрологія і стандартизація» – одна із завершальних дисциплін, присвячених технологіям, матеріалам і конструкціям у будівництві.

Головна мета курсу – надати майбутнім спеціалістам відомості щодо місця наук «Метрологія» і «Стандартизація» у народному господарстві і будівництві, а також у міждержавному співробітництві.

Метою цих методичних рекомендацій є ознайомлення студентів спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія з тематикою практичних занять за дисципліною «Метрологія і стандартизація», яка викладається на 3–4 курсах очної та заочної форм навчання.

На практичних заняттях для розгляду і розв’язання студентам пропонуються задачі, що мають практичне значення і застосовуються в технічних галузях, зокрема і під час статистичної обробки результатів випробування будівельних матеріалів і конструкцій.

Для практичних занять рекомендується використовувати різні літературні джерела: підручники, довідники, посібники, методичні рекомендації, нормативні документи. Для зручності в кожному розділі методичних рекомендацій наводяться короткі відомості з теорії питання і формули для розрахунків, а в додатку наведені таблиці довідкових коефіцієнтів.

Методичні рекомендації складені відповідно до програми курсу «Метрологія і стандартизація» для підготовки бакалаврів спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія, що використовується на кафедрі будівельних конструкцій Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова і становить 13…18 годин практичних занять.

1 ОСНОВНІ МЕТОДИ ВИМІРЮВАННЯ

Вимірювання – це процес експериментального відшукування значень фізичної величини за допомогою спеціальних засобів вимірювання. Виміряти деяку фізичну величину Q – означає порівняти її з іншою величиною q, прийнятою за одиницю виміру й виразити першу в частках останньої в математичній формі:

$$Q = k \cdot q, \tag{1.1}$$

де k – будь-яке позитивне ціле або дробове число, що показує в скільки разів Q більше або менше q.

Значення фізичної величини можна отримати в результаті *прямих (безпосередніх) вимірювань* (вимірювання маси на вагах, температури – термометром, довжини – за допомогою лінійних мір тощо) або *непрямих (посередніх)*, за яких вона є функцією безпосередньо обмірюваних величин (щільність за масою й геометричними розмірами, міцність бетону за часом проходження сигналу в неруйнівних методах вимірювань, визначення крену споруд за результатами кутових і лінійних вимірів тощо).

Вимірювання поділяють на *необхідні*, що дають тільки один результат вимірюваної величини, і *повторні (додаткові)*, в результаті яких одержують кілька значень вимірюваної величини. Оцінка точності вимірювань може бути зроблена тільки за наявності повторних вимірювань. З метою контролю й оцінки точності необхідно робити, принаймні, два вимірювання однієї й тієї самої фізичної величини.

У технічних галузях і будівництві застосовують такі методи вимірювань:

– *метод безпосередньої оцінки,* за яким значення величини визначають безпосередньо за відліковим пристроєм (тиск – манометром, характеристики струму – амперметром, вольтметром). Це найпоширеніший метод вимірювань;

– *метод порівняння з мірою,* за якого вимірювану величину порівнюють із величиною, відтвореною мірою (порівняння маси на вагах з гирями, лінійні виміри рулеткою, де довжину одержують як набір лінійних величин);

– *метод збігів,* за якого різницю між вимірюваною величиною і величиною, відтвореною мірою, вимірюють за збігом оцінок шкал; цим методом вимірюють усі лінійні величини вимірювальними приладами з ноніусами (штангенциркулі, мікрометри) і кутовими приладами з верньєрами (теодоліти). Наприклад, штангенциркуль (рис. 1.1) вимірює довжину за допомогою двох лінійок, ціни поділок яких перебувають у певному співвідношенні.

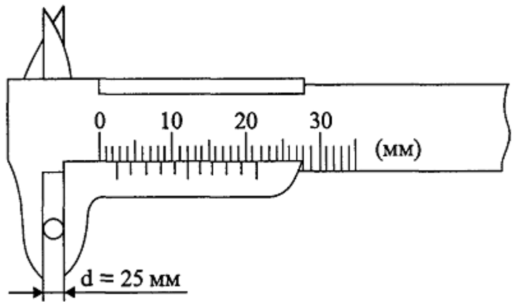


Рисунок 1.1 – Вимірювання діаметра дроту (2,5 мм) штангенциркулем за методом збігу (ноніуса)

2 ПОХИБКИ ВИМІРЮВАННЯ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Умовою будь-якого вимірювання є існування дійсного значення a вимірюваної величини. У зв’язку з тим що зовнішні умови можуть змінюватися в процесі випробування, багаторазові вимірювання однієї і тієї самої величини неоднакові. Різницю між результатом вимірювань x і його істинним значенням a називають *абсолютною похибкою* вимірювання Δ, тобто

$$\Delta = x - a. \tag{2.1}$$

Відносна похибка вимірювань

$$\frac{\Delta}{x} = \frac{x-a}{x}. \tag{2.2}$$

Абсолютні похибки вимірів зазвичай складаються із двох компонентів – *систематичної* та *випадкової*.

Систематичні похибки мають певний знак і накопичуються за певним функціональним законом в результаті однобічно діючих факторів. Вони повинні виключатися з результатів вимірювань шляхом введення *поправок*, які вираховуються за функціональним законом похибки, або компенсуватися відповідною організацією методики обробки вимірювань.

Випадкові похибки, що виникають у результаті недосконалості техніки й методів вимірювань, змінювання зовнішніх умов, за рахунок округлення чисел результатів відліків із приладів тощо неминучі й повністю виключити їх з результатів вимірювань неможливо.

Вплив похибок на результати випробувань значною мірою залежить від мети випробування. Якщо випробування проводять з метою виявлення різновиду деформування і руйнування конструкції, то вплив похибок буде позначатися менше, ніж при проведенні випробувань із метою одержання чисельних параметрів досліджуваних систем. В останньому випадку необхідно більш ретельно проводити підготовку експерименту.

Похибки випробувань зростають з ускладненням вимірювальної апаратури і методики випробувань. Варто пам'ятати також про самочинну зміну показів приладів, тобто про так званий «дрейф нуля». У прогиномірах це пов'язано з поступовим витягуванням дроту та ослабленням кріплення; у наклеєних тензорезисторів – із твердненням клею.

При обробці матеріалів випробувань будівельних матеріалів і конструкцій використовують статистичні імовірнісні методи, тому що міцнісні й пружні параметри матеріалів, варіації навантажень, похибки випробувань є випадковими, стохастичними.

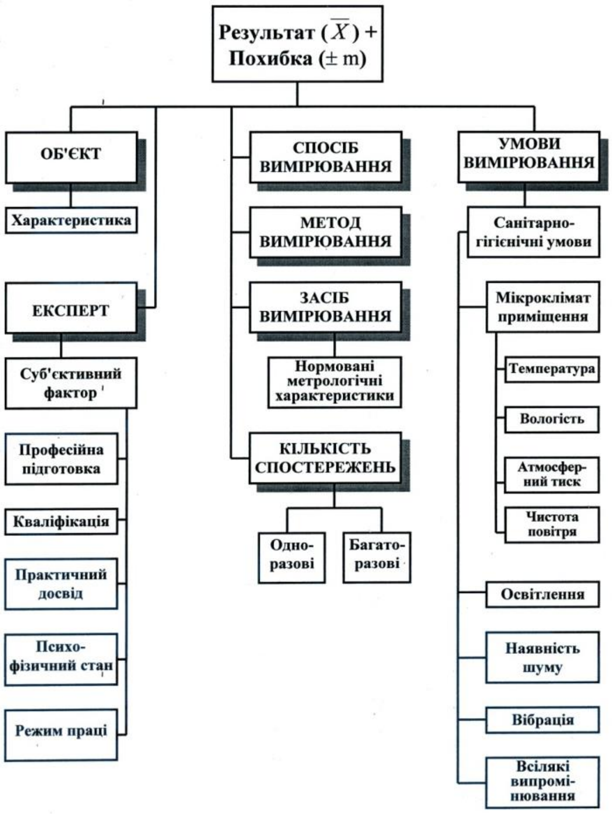


Рисунок 2.1 – Фактори, що впливають на результати вимірювання

Для *підвищення точності вимірювань*, при їх проведенні, варто дотримуватися таких правил:

– якщо *систематична похибка* є визначальною, тобто її величина істотно більша за *випадкову похибку,* властиву цьому методу, то достатньо виконати вимірювання двічі, тому що збільшення їх кількості не підвищить точності результату вимірювання. Далі треба вирахувати і ввести в кінцевий результат *поправку*;

– якщо *систематичні похибки* менші, ніж *випадкові*, то, збільшуючи кількість вимірювань, можна одержати результат, точність якого буде вища, ніж точність одного вимірювання. Маючи декілька величин вимірювання, можна провести його математичну обробку.

3 СИСТЕМАТИЧНІ ПОХИБКИ ВИМІРЮВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇХ УСУНЕННЯ

3.1 Загальна характеристика систематичних похибок

Систематичні похибки класифікуються за різновидом змінювання та причинами виникнення.

Залежно від *різновиду змінювання* систематичні похибки вимірювання поділяють на постійні та перемінні (прогресивні, періодичні та похибки, що змінюються за складним законом) (рис. 3.1).

Залежно від *причин виникнення* розрізняють такі систематичні похибки вимірювань: інструментальні (апаратурні, похибки приладів), похибки методу вимірювання, похибки, що залежать від змінювання умов вимірювання, суб’єктивні.

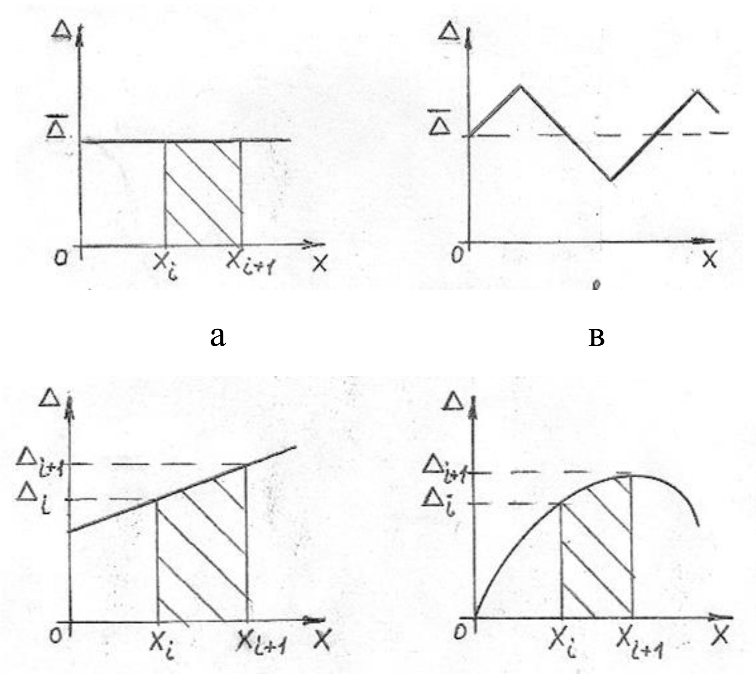


Рисунок 3.1 – Змінювання систематичних похибок залежно від вимірювання до вимірювання: а – постійні похибки; б – перемінні прогресивні; в – перемінні періодичні; г – похибки, що змінюються за складним законом

Систематичні похибки спотворюють результат вимірювання, тому їх необхідно виключати з результату вимірювання шляхом введення поправок або регулювання приладів з доведенням систематичної похибки до мінімуму.

Результати спостережень, отримані за наявності похибок, називаються невиправленими.

Врахування впливу систематичних похибок можна виконати шляхом:

– усунення джерел похибок до початку вимірювання (за паспортними даними засобу вимірювання, за результатами повірки засобу вимірювання, шляхом застосування методів вимірювання з мінімальними похибками);

– визначення поправок і внесення їх до результату вимірювання;

– оцінювання меж невиключених систематичних похибок.

Для підвищення точності вимірювань із виключенням постійних систематичних похибок застосовують такі методи: вимірювання із заміщенням, протиставленням, компенсацією похибки за знаком, рандомізацією тощо.

3.2 Метод вимірювання із заміщенням

Метод вимірювання із заміщенням – це різновид загального методу порівняння з мірою. Порівняння виконується шляхом заміщення вимірюваної величини мірою з відомим значенням величини так, щоб в засобах вимірювання, які використовуються, не відбувалися ніякі зміни.

Приклад 3.1. *Зважування на пружинних вагах, у яких є постійні систематичні похибки.*

Зважування виконується у два прийоми (рис. 3.2). Спочатку на ваги кладеться маса m_x і відмічаються положення указника (на відмітці N). Потім зважене тіло заміщають гирями такої ж маси m_0, щоб указник знов зайняв положення на відмітці N. Тоді $m_x = m_0$ і систематична похибка ваг не відобразиться на результаті важення.

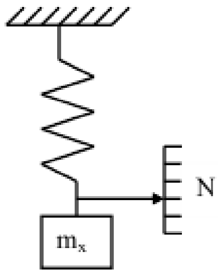


Рисунок 3.2 – Ілюстрація методу вимірювання із заміщенням
(метод Борда)

3.3 Метод доповнення

При застосуванні методу доповнення значення величини, що вимірюється, доповнюється мірою цієї самої величини з розрахунку, що на прилад порівняння буде діяти їхня сума, яка дорівнює попередньо заданому значенню.

Приклад 3.2. *Зважування на пружинних вагах, у яких є постійні систематичні похибки (рис. 3.2).*

Якщо m_x (масу, що вимірюється) доповнити масою міри m_0 так, щоб їхня сума дорівнювала положенню на відмітці шкали N, то тоді $m_x = N - m_0$.

Похибка вимірювання зменшується, тому що масу m_x визначаємо за двома заданими величинами.

3.4 Метод протиставлення *(різновид методу порівняння з мірою)*

Вимірювання виконується два рази так, щоб в обох випадках причина постійної похибки впливала на результат спостережень по-різному, але дії були відомі і закономірні.

Приклад 3.3. *Зважування на нерівноплічних вагах (рис. 3.3).*

Умова рівноваги ваг

$$m_x \cdot l_1 = m_0 \cdot l_2,$$

де m_x– маса зваженого вантажу;

m_0 – маса гирі;

l_1, l_2 – довжина пліч ваг.

Запишемо формулу у вигляді $m_x = m_0 \frac{l_2}{l_1}$.

Якщо плечі однакові, то $m_x = m_0$.

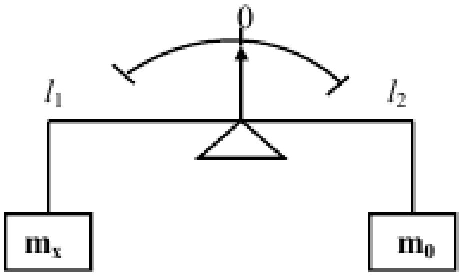


Рисунок 3.3 – Ілюстрація методу вимірювання шляхом протиставлення

Якщо $l_1 \neq l_2$, то при зважуванні кожен раз виникає систематична похибка $\Delta_c = m_0 \left(\frac{l_2}{l_1} - 1\right)$. Для виключення цієї похибки зважування виконується в два етапи. Спочатку вантаж m_x врівноважується гирями m_{01}. Тоді $m_x \cdot l_1 = m_{01} \cdot l_2$. Потім вантаж m_x переміщують на ту чашку ваг, де були гирі і заново врівноважують гирями m_{02} і $m_{02} \cdot l_1 = m_x \cdot l_2$. Виключивши з рівняння $\frac{l_2}{l_1}$, отримаємо $m_x = \sqrt{m_{01} \cdot m_{02}}$.

3.5 Диференційний метод

Диференційний метод характеризується вимірюванням різниці між вимірюваною величиною і відомою величиною, яка відтворюється мірою. Метод дозволяє отримати результат відносно високої точності при використанні відносно грубих засобів вимірювання.

Приклад 3.4 *Вимірювання довжини зразка X, якщо відома довжина міри* $l < X$*, тобто* $X = l + a$*, де* a *– вимірювана величина.*

Рисунок 3.4 – Диференційний метод вимірювання довжини (до прикладу 3.4)

3.6 Нульовий метод

Нульовий метод аналогічний до диференційного, але різниця між вимірювальною величиною і мірою приводиться до «0», що повинно контролюватися приладом (нуль-індикатором).

Метод має переваги в тому, що міра може бути в багато разів меншою, ніж величина, що вимірюється.

Приклад 3.3. *Нерівноплічні ваги (рис. 3.3).*

Рівняння рівноваги при стрілці на нулю $m_x \cdot l_1 = m_0 \cdot l_2$.

Тоді, наприклад, вимірювану величину можна вирахувати, як $m_x = m_0 \frac{l_2}{l_1}$.

3.7 Метод рандомізації

Суть методу рандомізації полягає в тому, що одна і та сама величина вимірюється різними випадковими методами (приладами). Систематичні похибки кожного з них для всієї сукупності є різні випадкові величини, тому при збільшенні кіькості методів (приладів), що використовуються, систематичні похибки взаємно компенсуються.

3.8 Метод компенсації похибки за знаком

Метод передбачає вимірювання з двома спостереженнями, які виконуються так, щоб постійна систематична похибка входила до результату кожного з них із різними знаками. Виключається вона при обрахуванні середнього значення.

Наприклад, для компенсації похибки, що обумовлена магнітним полем Землі при геофізичних вимірюваннях, перше вимірювання проводять при будь-якому положенні приладу, а для другого виміру прилад повертають у горизонтальній площині на 180º. Якщо в першому випадку магнітне поле додається до поля приладу і спричиняє позитивну похибку, то при повороті приладу магнітне поле Землі впливає на покази приладу з негативною похибкою, що дорівнює попередній.

З компенсацією похибки за знаком виконується повірка за «нуль-пунктом» перед роботою з геодезичними нівелірами й теодолітами.

3.9 Методи усунення перемінних похибок

*Аналіз знаків невиправлених похиб*ок. Якщо знаки невиправлених похибок чергуються з якою-небудь закономірністю, то спостерігається перемінна систематична похибка. Якщо послідовність знаків «+» у похибках змінюється послідовністю знаків «–», або навпаки, то присутня монотонно змінювана систематична похибка. Якщо групи знаків «+» і «–» у похибок чергуються, то присутня періодична систематична похибка.

Графічний метод – один із найпростіших способів виявлення перемінної систематичної похибки в результатах спостереження. Він полягає у графічному представленні послідовності невиправлених значень результатів спостережень. На графіку через побудовані точки проводять плавну криву, яка відображає тенденцію змінювання результату вимірювання, якщо вона існує. Якщо тенденція не спостерігається, то перемінну систематичну похибку можна визнати практично відсутньою.

Наприклад, окремим випадком похибки, яка змінюється з якоюсь закономірністю, є похибка, прогресивна за лінійним законом, наприклад пропорційно до часу (рис. 3.1, б). У цьому випадку похибку можна оцінити і виключити так. Якщо відомо, що при вимірюванні постійної величини X_0 систематична похибка змінюється лінійно в часі, тобто $X_{зм} = X_0 + C \cdot t$ (де $C = const$), то для її виключення достатньо зробити два спостереження X_1 та X_2 з фіксацією часу t_1 та t_2. Тоді шукане значення величини

$$X_0 = \frac{X_1 \cdot t_2 - X_2 \cdot t_1}{t_2 - t_1}.$$

4 ПОХИБКИ І КЛАСИ ТОЧНОСТІ ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАННЯ

4.1 Види похибок засобів вимірювання залежно від різновиду змінювання фізичної величини

Статична похибка засобу вимірювання – похибка, яка виникає при вимірюванні величини, що приймається за незмінну (вимірювання довжини, діаметра стержня тощо).

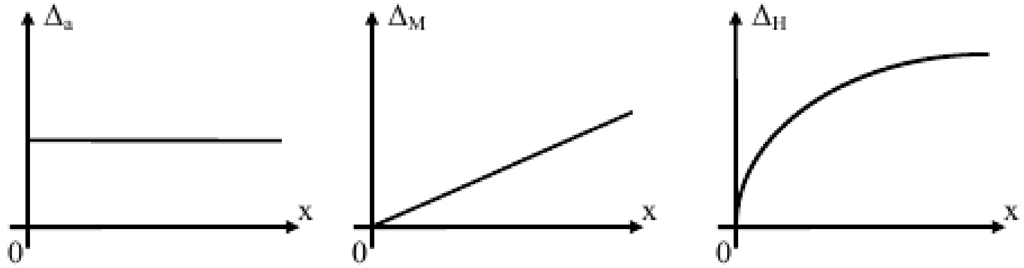
Динамічна похибка засобу вимірювання – похибка, яка виникає при вимірюванні змінної величини (у процесі вимірювання), наприклад, вимірювання температури в печі за допомогою термопари.

Розрізняють такі поняття, як *основна* і *додаткова* похибки засобів вимірювання. *Основна* похибка виявляється при нормальних (паспортних) умовах експлуатації засобу вимірювання. *Додаткова* похибка виникає, якщо прилад працює в умовах, що відрізняються від нормальних.

До *основних похибок* засобів вимірювання належать:

1. Адитивні (отримані шляхом складання), які ще називають похибками «нуля», тобто прилад показує постійні похибки при всіх значеннях вимірюваної величини. Якщо адитивна похибка є систематичною, то її усувають шляхом коректування нульового значення вихідного сигналу. Виникнення випадкової адитивної похибки обумовлено внутрішніми недоліками засобу вимірювання (тертя, дрейф «нуля», коливання сигналу).

2. Мультиплікативні (отримані шляхом помноження), які ще називають похибками чутливості засобів вимірювання. Мультиплікативна похибка лінійно змінюється зі зміною вимірюваної величини. Причинами її виникнення є змінювання коефіцієнта перетворення окремих елементів і вузлів систем вимірювань.



а б в

Рисунок 4.1 – Графіки змінювання похибок: а – адитивної; б – мультиплікативної; в – нелінійної

3. Похибка гістерезису (або оборотного ходу) – це похибка, яка важко усувається. Вона може виникати від люфту, тертя на контактах і в пружинах, пружних ефектів. Похибка гістерезису оцінюється *варіацією показів* вимірювального приладу (різницею між показами приладу на прямому і оборотному ходах):

$$w = x_{пх} - x_{ох}.$$

4.2 Класи точності засобів вимірювань

Клас точності – це характеристика засобу вимірювання, виражена межею допустимих значень його основної і додаткової похибок, а також іншими характеристиками, які впливають на точність, тобто клас точності дозволяє судити про те, у яких межах міститься похибка засобу вимірювання цього типу.

Способи завдання класів точності приладів (рис. 4.2):

– 1-й спосіб (використовується для мір). Вказується порядковий номер класу точності (1-й, 2-й тощо, наприклад: динамометр зразковий III класу точності. Порядок вирахування похибок визначають за документацією (паспортом), яка додається до міри;

– 2-й спосіб задає клас точності для приладів із рівномірною шкалою (рис. 4.3) і адитивними похибками. Клас задається у вигляді числа *R*, яке виражається у відсотках від діапазону шкали. Основна похибка приладу не повинна перевищувати число *R*, яке дорівнює **1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 4,0; 5,0; 6,0**;

– 3-й спосіб задає клас точності для приладів з нерівномірною шкалою (рис. 4.4) і адитивними похибками. При цьому нормується основна відносна похибка у відсотках від величини показу. Число, що характеризує клас точності, задається у кружечку – ®;

– 4-й спосіб використовують для приладів із порівнюваними адитивними й мультиплікативними похибками. Точність задається двома числами – ${}^{c}/_{d}$, де число c відповідає за адитивну, а d за мультиплікативну складові;

– 5-й спосіб (для приладів з нерівномірною шкалою). Клас точності задають числом R над знаком ∨, що нормує основну приведену похибку у відсотках від довжини основного діапазону шкали.

Формула для границь допустимих похибок	Приклади границь допустимої основної похибки	Позначення класу точності		Примітка
		в документації	на засобах вимірювань	
$\Delta = \pm a$	-	Клас точності М	М	-
$\Delta = \pm(a + bx)$	-	Клас точності С	С	-
$\gamma = \frac{\Delta}{X_N} = \pm p$	$\gamma = \pm 1{,}5$	Клас точності 1,5	1,5	Якщо X_N виражається в одиницях вимірюваної величини
	$\gamma = \pm 1{,}5$	Клас точності 1,5	$\underset{\vee}{1{,}5}$	Якщо X_N визначається довжиною шкали
$\delta = \frac{\Delta}{x} = \pm q$	$\delta = \pm 0{,}5$	Клас точності 0,5	0,5	-
$\delta = \pm\left[c + d\left(\left\|\frac{X_K}{x}\right\| - 1\right)\right]$	$\delta = \pm\left[0{,}02 + 0{,}01\left(\left\|\frac{X_K}{x}\right\| - 1\right)\right]$	Клас точності 0,02/0,01	0,02/0,01	-

Рисунок 4.2 – Класи точності засобів вимірювальної техніки

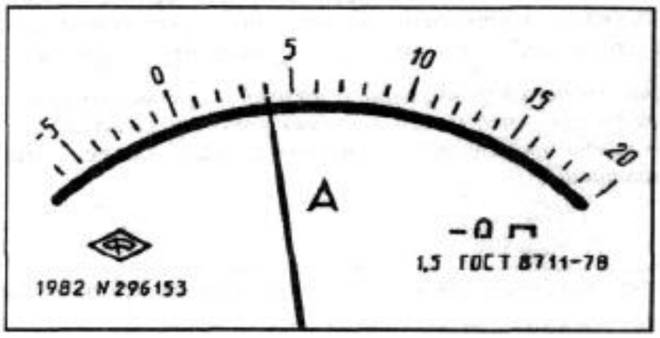


Рисунок 4.3 – Лицьова панель амперметру класу точності **1,5**
з рівномірною шкалою

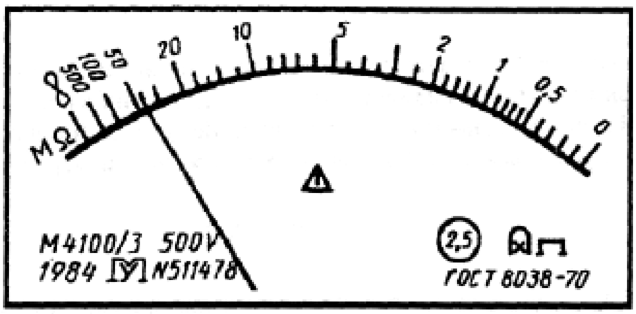


Рисунок 4.4 – Лицьова панель мегаомметру класу точності **2,5**
з нерівномірною шкалою

Приклад 4.1.

Амперметр класу точності **1,0** з межами вимірювання 10 А…+25 А показує 5 А. Визначити межу допустимої абсолютної похибки.

Розв'язання.

Клас точності амперметра задано межею допустимої приведеною відносною похибкою

$$\delta = \pm\frac{\Delta}{X_N}\cdot 100\% = 1\%.$$

Нормуюче значення по діапазону вимірів

$$X_N = |-10| + |+25| = 35\text{А}.$$

Межа допустимої абсолютної похибки

$$\Delta = \pm\frac{\delta\cdot X_N}{100\%} = \pm\frac{1{,}0\cdot 35}{100} = \pm 0{,}35\text{А}.$$

Приклад 4.2.

Лічильник електричної енергії класу точності 0,5 показує витрати 500 кВт·год. Визначити межу допустимої абсолютної похибки лічильника.

Розв'язання.

Відносна похибка лічильника

$$\delta = \pm\frac{\Delta}{X}\cdot 100\% \le \pm 0{,}5\%.$$

Межа допустимої абсолютної похибки

$$\Delta = \pm\frac{\delta\cdot X}{100\%} = \pm\frac{0{,}5\cdot 500}{100} = \pm 2{,}5\text{кВт·год}.$$

Приклад 4.3.

Амперметр класу точності **0,2/0,1** з рівномірною шкалою і діапазоном 0…50 А показує 10 А. Визначити межу допустимої абсолютної похибки.

Розв'язання.

Межа допустимої відносної похибки

$$\delta = \pm\left[c + d\cdot\left(\left|\frac{X_N}{X}\right| - 1\right)\right]\% = \pm\left[0{,}2 + 0{,}1\cdot\left(\left|\frac{50}{10}\right| - 1\right)\right] = \pm 0{,}6\%.$$

Межа допустимої абсолютної похибки

$$\Delta = \pm\frac{\delta\cdot X}{100\%} = \pm\frac{0{,}6\cdot 10}{100} = \pm 0{,}06\text{А}.$$

Приклад 4.4.

Амперметр з діапазоном шкали 0…50 А показує відлік 25 А. Ігноруючи інші види похибок вимірювання, оцінити межі допустимої абсолютної похибки цього відліку при використанні різних приладів з класами точності: **0,5/0,2**; 0,5 та **0,5**.

Визначимо межу допустимої абсолютної похибки:

– для приладу класу точності **0,5/0,2** маємо:

$$\delta = \pm\left[c + d\cdot\left(\left|\frac{X_N}{X}\right| - 1\right)\right]\% = \pm\left[0{,}5 + 0{,}2\cdot\left(\left|\frac{50}{25}\right| - 1\right)\right] = \pm 0{,}7\%,$$

$$\Delta = \pm\frac{\delta\cdot X}{100\%} = \pm\frac{0{,}7\cdot 25}{100} = \pm 0{,}175\text{А};$$

– для приладу з класом точності (0,5):

$$\Delta = \pm\frac{\delta \cdot X}{100\%} = \pm\frac{0{,}5 \cdot 25}{100} = \pm 0{,}125\text{А};$$

– для приладу з класом точності **0,5**:

$$\Delta = \pm\frac{\delta \cdot X_N}{100\%} = \pm\frac{0{,}5 \cdot 50}{100} = \pm 0{,}25\text{А}.$$

5 ВИПАДКОВІ ПОХИБКИ ВИМІРЮВАННЯ

5.1 Загальна характеристика випадкових похибок і точкові оцінки істинного значення величин, що вимірюються

Випадкові похибки (зокрема грубі похибки й погрішності) змінюються випадково при повторних вимірюваннях однієї і тієї самої величини. Випадкова похибка не може бути виключена з результатів вимірювання, однак її вплив можна зменшити за рахунок повторних вимірювань однієї і тієї самої величини та математичної обробки експериментальних даних.

Грубі похибки і погрішності виникають через помилки або неправильні дії виконавця, а також при короткочасних різних змінюваннях (температура, вібрація, поштовх приладу) при проведенні вимірювання.

Результат величини, що вимірюється, завжди містить в собі систематичну й випадкову похибки, тому похибки результатів вимірювань взагалі можна розглядати як випадкову величину. Тоді систематична похибка – це математичне очікування цієї величини, а випадкова похибка – центрована випадкова величина.

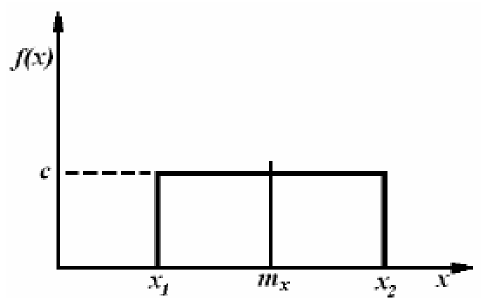
Повним описом величини, а отже, й похибки слугує закон її розподілу, яким визначаються особливості поведінки різних результатів окремих вимірювань.

Якщо неперервна випадкова величина x рівномірно розподілена в інтервалі з межами x_1 і x_2 (рис. 5.1, а), то густина розподілу в цьому інтервалі постійна, а за його межами дорівнює нулю:

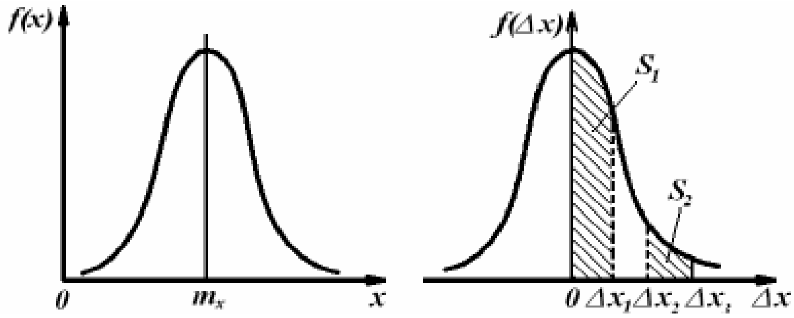
$$c = \frac{1}{x_1 - x_2}. \qquad (5.1)$$

Статистична обробка результатів випробувань будівельних матеріалів і конструкцій доводить, що більшість аналізованих випадкових величин змінюються за нормальним законом розподілу Гауса (рис. 5.1, б) із щільністю розподілу за формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}}. \tag{5.2}$$



а



б

Рисунок 5.1 – Графіки розподілу випадкової величини *X* (функції щільності ймовірності): а – рівномірний розподіл; б – нормальний розподіл (за законом Гауса)

Закон розподілу можна охарактеризувати числовими показниками, які використовуються для кількісної оцінки похибки. Основними числовими характеристиками законів розподілу є математичне очікування і дисперсія або середньоквадратичне відхилення σ_x, що зазвичай використається замість дисперсії.

Точковими оцінками цих параметрів називають оцінки, виражені одним числом. Точковою оцінкою математичного очікування результатів вимірювань $M[X]$ є середнє арифметичне значення величини, що виміряється:

$$\overline{x} = \sum_1^n x_i/n, \qquad (5.3)$$

де n – кількість одиничних вимірів (вибірка);

x_i – результат i-го одиничного вимірювання.

Точковою оцінкою дисперсії $D[X]$ є статистична дисперсія, що характеризує розкид (розсіювання) значень одиничних вимірювань відносно середнього арифметичного значення:

$$S_x = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}{n-1}. \qquad (5.4)$$

Точкову оцінку середньоквадратичного відхилення можна визначити за формулою

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}. \qquad (5.5)$$

Точкові оцінки можна розглядати, як випадкові величини, значення яких залежать від обсягу вибірки n: що більша вибірка і точніше визначена функція розподілу значень фізичної величини, що вимірюється, то точніше за допомогою середньоарифметичного значення оцінюється істинне (дійсне) значення фізичної величини, а з допомогою середньоквадратичного відхилення – розкид результатів вимірювань.

Для попередньої оцінки закону розподілу параметра можна використовувати коефіцієнт варіації

$$\nu_x = \frac{\sigma_x}{\overline{x}}. \qquad (5.6)$$

При $\nu_x \leq 0{,}33\ldots0{,}35$ можна вважати, що розподіл випадкової величини підпадає під нормальний закон.

5.2 Інтервальне оцінювання результатів вимірювань

У задачах, де потрібно оцінити вірогідність результатів вимірювань, знати точкові оцінки недостатньо.

Коли розподіл похибки теоретично безмежний (при нормальному законі розподілу), то можна говорити лише про інтервал, за межі якого похибка не вийде з деякою ймовірністю. Цей інтервал називають довірчим, характеризуючи його ймовірність, як довірчу, а межі цього інтервалу – як значення похибки. Довірчий інтервал і довірча ймовірність вибираються залежно від конкретних умов вимірювання.

Довірчий інтервал із межами у вигляді абсолютного значення похибки Δ можна записати так:

$$\bar{x} - \Delta < x < \bar{x} + \Delta. \tag{5.7}$$

Відповідно до теорії ймовірності доведено, що в межах $\bar{x} \pm \sigma_x$ містяться 68,3 % всіх вимірюваних значень величин, у межах $\bar{x} \pm 2\sigma_x$ – до 95,4 %, а в межах $\bar{x} \pm 3\sigma_x$ – 99,7 %, тому й у статистичній обробці результатів зазвичай використовують стандартні довірчі ймовірності P = 0,68; 0,95; 0,99; 0,999. Здебільшого для випробувань будівельних матеріалів і конструкцій P = 0,95, а для характеристик ґрунтів при інженерно-геологічних випробуваннях P = 0,85 і 0,95.

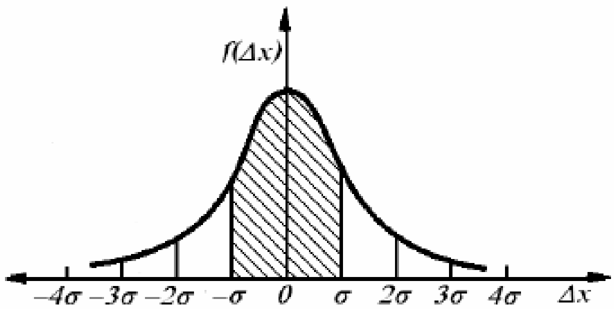


Рисунок 5.2 – До поняття довірчий інтервал

Однак щоб середнє квадратичне відхилення наближалося до стандарту, необхідно виконати багато вимірювань, що при випробуванні матеріалів і конструкцій не завжди можливо. Для знаходження оцінки довірчого інтервалу при невеликій кількості вимірювань (вибірки) використовують розподіл

Стьюдента у вигляді коефіцієнта Стьюдента, що залежить від кількості вимірювань *n* і ймовірності *P:*

$$t_p = \frac{\Delta \cdot \sqrt{n}}{\sigma}. \tag{5.8}$$

Коефіцієнт Стьюдента визначають за спеціальними таблицями залежно від кількості дослідів і ймовірності потрапляння величини a в заданий інтервал.

Довірчий інтервал досліджуваної величини *x* при заданій імовірності можна записати так:

$$\bar{x} - t_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < x < \bar{x} + t_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{5.9}$$

З формули (5.9) випливає, що величини довірчих інтервалів збільшуються зі збільшенням довірчої ймовірності та зменшуються зі збільшенням кількості вимірювань.

Приклад 5.1.

При вимірюванні розмірів (висоти) стандартного куба для випробувань бетону отримано ряд результатів (X_i), см: 15,3; 15,0; 15,1; 15,2;15,2;15,4. Потрібно визначити довірчий інтервал вибірки при довірчій ймовірності *P* = 0,90.

Розв'язання.

Середнє арифметичне вибірки – $\overline{X} = \frac{91{,}2}{6} = 15{,}2$см.

Середньоквадратичне відхилення –

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1^2 + 2 \cdot 0{,}2^2}{6-1}} = 0{,}141.$$

Коефіцієнт Стьюдента за таблицею А.1 – $t_p = 2{,}02$.

Межа довірчого інтервалу – $\Delta = \frac{t_p \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}02 \cdot 0{,}141}{\sqrt{6}} = 0{,}12$см.

Довірчий інтервал – $\overline{X} \pm \Delta = 15{,}2 \pm 0{,}12$ см.

Це означає, що істинне значення розміру, що вимірюється, з імовірністю 90 % міститься в межах 15,08…15,32 мм при заданій кількості вимірювань.

5.3 Виключення грубих похибок при обробці результатів вимірювань

Критерій Шовіне

Якщо кількість одиничних вимірювань становить $n \leq 10$, зазвичай використовують критерій Шовіне. Результат має грубу похибку за умови (5.10).

$$\left|X_i - \overline{X}\right| > \begin{cases} 1{,}6\sigma_x \text{ при } n = 3; \\ 1{,}7\sigma_x \text{ при } n = 6; \\ 1{,}9\sigma_x \text{ при } n = 8; \\ 2{,}0\sigma_x \text{ при } n = 10. \end{cases} \tag{5.10}$$

Приклад 5.2.

При вимірюванні діаметра стержня Ø $20^{(+0,33)}$ отримано такі результати: 20,32; 20,18; 20,38 мм. Необхідно перевірити, утримував чи ні останній результат грубу похибку.

Розв’язання.

Вибірка $n = 3$, тому застосуємо критерій Шовіне.

Середнє арифметичне вибірки –

$$\overline{X} = \frac{20{,}32 + 20{,}18 + 20{,}38}{3} = 20{,}29\text{мм}.$$

Середньоквадратичне відхилення –

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}03^2 + 0{,}11^2 + 0{,}09^2}{3-1}} = 0{,}098.$$

$$\left|X_i - \overline{X}\right| = |20{,}18 - 20{,}29| = 0{,}11 < 1{,}6\sigma_x = 1{,}6 \cdot 0{,}098 = 0{,}158.$$

Результат не містить грубої похибки і деталі до вибракування можна відправляти тільки за вимогами класу точності виробу.

Приклад 5.3.

За даними прикладу 5.1 перевірити, з яких розмірів починаються погрішності.

Розв'язання.

Вибірка $n=6$, тому застосуємо критерій Шовіне.

Середнє арифметичне вибірки – $\overline{X} = 15{,}2$см.

Середньоквадратичне відхилення – $\sigma_x = 0{,}141$.

$$\left|X_i - \overline{X}\right| = |15{,}4 - 15{,}2| = 0{,}2 < 1{,}7\sigma_x = 1{,}7 \cdot 0{,}141 = 0{,}24 \text{ см.}$$

Грубих результатів вибірка не має. Як погрішності, можна враховувати розміри менші за 14,96 см і більші 15,44 см.

Критерій Романовського

Якщо кількість одиничних вимірювань $n \leq 20\ldots25$, то на результати статистичної обробки значний вплив мають грубі похибки (погрішності). Для виключення промахів визначають критерій Романовського:

$$\frac{|X_i - \overline{X}|}{\sigma_x} < t', \quad (5.11)$$

де t' береться за таблицею А.2 залежно від заданої довірчої імовірності.

Якщо нерівність не додержується, то такий результат (X_i) з вибірки відкидається.

Приклад 5.4.

За даними прикладу 5.1 потрібно встановити грубі похибки (погрішності) за критерієм Романовського з довірчою імовірністю $P = 0{,}95$.

Коефіцієнт критерію Романовського при $n = 6$ за таблицею А.2 $t' = 2{,}78$.

Для $X_i = 15{,}4$ см – $\frac{|X_i - \overline{X}|}{\sigma_x} = \frac{|15{,}4 - 15{,}2|}{0{,}141} = 1{,}42 < t' = 2{,}78$.

Результат не грубий і його виключати з вибірки не треба.

Правило трьох сигм

Якщо кількість одиничних вимірювань $20 < n \leq 50$, то можна застосувати критерій $3\sigma_x$. Суть правила трьох сигм полягає в тому, що якщо випадкові величини розподілені нормально, то абсолютні величини їх відхилення від математичного очікування не перевищують потроєного середнього квадратичного відхилення. Сумнівний результат повинен бути виключений із ряду одиничних вимірювань, якщо

$$\left|X_i - \overline{X}\right| > 3\sigma_x. \tag{5.12}$$

6 ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Задача 6.1.

Необхідно визначити гарантований клас бетону за результатами випробування на стиск 6-ти кубів.

У табличній формі виконаємо розрахунки середнього арифметичного значення вибірки, відхилення від середнього арифметичного та квадрати значень відхилення. Міцність кожного куба на стиск наведена в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 – До статистичної обробки результатів випробування кубів

Номер куба	Міцність куба, МПа $X_i = f_{ci}$	Відхилення від середнього, МПа $X_i - \overline{X}$	$(X_i - \overline{X})^2$
1	25,4	- 1,83	3,35
2	26,2	- 1,07	1,14
3	27,7	0,43	0,18
4	28,0	0,73	0,53
5	28,1	0,83	0,69
6	28,2	0,93	0,86
	$\overline{X} = 27{,}27$	$\sum \approx 0$	$\sum = 6{,}75$

Середнє квадратичне відхилення –

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{6{,}75}{6-1}} = 1{,}16\text{МПа}.$$

Коефіцієнт варіації –

$$\nu = \frac{\sigma_x}{\overline{\overline{X}}} = \frac{1{,}16}{27{,}27} = 0{,}0425 \text{ (4,25 \%)}.$$

Для міцності будівельних матеріалів норми рекомендують приймати довірчу ймовірність $P = 0{,}95$, тобто при випробуваннях матеріалів або конструкцій встановлена похибка вимірювання не повинна перевищувати 5 % випадків.

При P = 0,95 коефіцієнт Стьюдента за таблицею А.1 $t_P = 2{,}57$, а коефіцієнт критерію Романовського за таблицею А.2 $t^{'} = 2{,}78$.

Максимальне відхилення від середнього в 1-го результату. Перевіримо його на грубість:

$$\frac{\left|X_i - \overline{X}\right|}{\sigma_x} = \frac{|-1{,}83|}{1{,}16} = 1{,}58 < t^{'} = 2{,}78.$$

Цей результат не є погрішністю і його виключати з результатів обробки не треба.

Похибка вимірювання –

$$\Delta = \frac{t_P \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}57 \cdot 1{,}16}{\sqrt{6}} = 1{,}22 \text{ МПа}.$$

Відносна похибка вимірювання –

$$\delta = \frac{\Delta}{\overline{\overline{X}}} = \frac{1{,}22}{27{,}27} = 0{,}044 \text{ (4,47 \%)} < 5 \text{ \%}.$$

Довірчий інтервал вибірки при $P = 0{,}95$ – $\Delta = \pm 2\sigma_X$ –

$$(\overline{X} - 2\sigma_x) < X < \left(\overline{X} + 2\sigma_x\right),$$

$$27{,}27 - 2 \cdot 1{,}16 = 24{,}95 < X < 27{,}27 + 2 \cdot 1{,}16 = 29{,}59 \text{ МПа}.$$

За нижньою межею інтервалу бетон, який випробовувався, можна віднести до класу С20/25.

На практиці при обчисленні розрахункових характеристик матеріалів для будівельних конструкцій використовують *коректуючі коефіцієнти*, які враховують обсяг вибірки і гарантовану забезпеченість результатів випробування.

Для визначення ***характеристичного значення міцності бетону*** використовують формулу

$$f_{ck} = \overline{f_c}(1 - \beta \cdot \nu), \tag{6.1}$$

де $\overline{f_c}$ – середнє арифметичне вибірки (за результатами випробування окремих зразків);

$\nu = \frac{\sigma_x}{\overline{f_c}}$ – коефіцієнт варіації, який розраховується при статистичній обробці вибірки;

β – коректувальний коефіцієнт при забезпеченості довірчої імовірності) $P = 0{,}95$ (табл. 6.2).

Таблиця 6.2 – Коректувальний коефіцієнт до формули 6.1

Кількість зразків n, шт.	5	7	9	12	15	20	50	∞
β	3,34	2,8	2,58	2,39	2,28	2,16	1,94	1,64

Задача 6.2.

За результатами задачі 6.1 потрібно визначити клас бетону з використанням коректувального коефіцієнта вибірки.

При $P = 0{,}95$ і $n = 6$ (за табл. 6.2) $\beta = \frac{3{,}34+2{,}80}{2} = 3{,}07$.

Із задачі 6.1 $\nu = 0{,}0432$, $\overline{f_c} = 23{,}27$МПа.

Міцність бетону –

$$f_{ck} = f_c(1 - \beta \cdot \nu) = 27{,}27(1 - 3{,}07 \cdot 0{,}0425) = 23{,}71\text{МПа.}$$

За вирахуваним характеристичним значенням міцності бетон можна віднести до класу C20/25.

Задача 6.3.

При неруйнівних випробуваннях за визначеною міцністю бетону за допомогою склерометра Шмідта отримано результати, наведені в таблиці 6.3.

Таблиця 6.3 – До статистичної обробки результатів випробування склерометром Шмідта

Номер результату	Покази приладу H	$(H_i - \overline{H})$	$(H_i - \overline{H})^2$
1	33	1,8	3,24
2	30	- 1,2	1,44
3	32	0,8	0,64
4	30	-1,2	1,44
5	29	- 2,2	4,84
6	26	- 5,2	27,04
7	38	6,8	46,24
8	40	8,8	77,44
9	25	- 6,2	38,44
10	29	- 2,2	4,84
	$\overline{H} = 31{,}2$	$\sum = 0$	$\sum = 205{,}6$

Середнє квадратичне відхилення вибірки результатів випробувань –

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{205{,}6}{10-1}} = 4{,}779.$$

Коефіцієнт варіації –

$$\nu = \frac{\sigma_x}{\overline{H}} = \frac{4{,}7796}{31{,}2} = 0{,}1532 \ (15{,}32\ \%).$$

Перевіримо інтервал грубих результатів за критерієм Шовіне. При $n = 10$ $\left|H_i - \overline{H}\right| < 2\sigma_x = 2 \cdot 4{,}779 = 9{,}6$, тобто грубих результатів у вибірці немає.

На грубість можна перевірити результат № 8 за критерієм Романовського. При довірчій імовірності $P = 0{,}95$ і n=10 за таблицею А.2 коефіцієнт $t' = 2{,}37$.

$$\frac{\left|H_i - \overline{H}\right|}{\sigma_x} = \frac{8{,}8}{4{,}7796} = 1{,}84 < t' = 2{,}37.$$

Результат № 8 не грубий.

Міцність бетону за результатами неруйнівних випробувань оберемо за графіком або тарувальними таблицями, розроблеми для склерометра. Наприклад: $\overline{f_c} = 0{,}85\overline{H} = 0{,}85 \cdot 31{,}2 = 26{,}52$ МПа.

Характеристичне значення кубічної міцності бетону –

$$f_{ck} = f_c(1 - \beta \cdot \nu) = 26{,}52 \cdot (1 - 2{,}52 \cdot 0{,}1532) = 16{,}28\text{МПа},$$

де за інтерполяції коефіцієнт $\beta = 2{,}58 - \frac{2{,}58 - 2{,}39}{3} = 2{,}52$.

За результатами неруйнівних випробувань бетон можна віднести до класу С12/15.

Для підвищення точності вимірювань, якщо наявна випадкова похибка, потрібно збільшити вибірку (кількість ударів склерометром). Наприклад, при вибірці $n = 25$ коректувальний коефіцієнт $\beta = 2{,}10$, а при середній міцності і коефіцієнті варіації, як у попередньому розрахунку, характеристичне значення кубічної міцності бетону

$$f_{ck} = f_c(1 - \beta \cdot \nu) = 26{,}52 \cdot (1 - 2{,}10 \cdot 0{,}1532) = 17{,}98\text{МПа},$$

що дозволяє підвищити клас бетону до С16/20.

Межу течійності, або тимчасовий спротив сталі, за результатами випробувань зразків вираховують за формулою

$$f_{yk} = \overline{f_y} \cdot \left(1 - \alpha_y \cdot \sigma_x\right), \tag{6.2}$$

де $\overline{f_y}$ – середнє арифметичне вибірки (за результатами випробування окремих зразків);

σ_x – середньоквадратичне відхилення вибірки;

α_y – коректувальний коефіцієнт при забезпеченості (довірчої імовірності) $P = 0{,}95$ (за табл. 6.4).

Таблиця 6.4 – Коректувальний коефіцієнт до формули 6.2

Кількість зразків n, шт.	10	15	20	25	30	≥ 40
α_y	2,911	2,569	2,396	2,298	2,220	2,125

7 АПРОКСИМАЦІЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ ЗАЛЕЖНОСТЯМИ. РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ

Якщо з’єднати експериментальні точки на графіку відрізками прямих, то отримаємо ломану лінію, форма якої не відновиться при повторних вимірюваннях.

Відстань лінії від точки в кожну сторону по горизонталі і вертикалі вказує значення похибки відповідно по осі абсцис і ординат. Якщо середньоквадратичне відхилення отриманої функції від експериментальних точок буде мінімальним, то можна отримати рівняння для параметрів функції $y = \phi(x)$. На цьому і ґрунтується метод найменших квадратів.

Якщо в результаті експерименту отримаємо декілька значень функції y_i в заданих точках x_i, то можна апроксимувати її декотрою аналітичною функцією $\phi(x)$, у яку входить n-кількість констант $a_к$.

Необхідною умовою найкращого середньоквадратичного наближення буде мінімізація суми середньоквадратичних відхилень:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \phi(x_i)]^2 \to 0. \qquad (7.1)$$

Кореляційний зв’язок між двома величинами встановлюється за коефіцієнтом кореляції (для апроксимації повинен бути не менше 0,5):

$$r_{xy} = \frac{1/n \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \ |r_{xy}| \leq 1, \qquad (7.2)$$

де середньоквадратичні відхилення за координатами –

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}, \ \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n-1}}. \qquad (7.3)$$

Задача 7.1. *Побудувати градуйовану залежність за результатами випробувань.*

Побудуємо градуйовану залежність для визначення міцності бетону молотком Кашкарова (за відбитком на поверхні).

Випробування виконувалися на кубах проєктного класу бетону С25/30 на 6-ти серіях контрольних зразків (по 3 куби). На кожному кубі виконувалися не менше 5-ти відбитків. Потім кожна партія кубів випробовувалася на пресі до руйнування, із визначенням середньої міцності в серії.

Сукупність кубів дала міцність бетону в межах $f_{ci} = 27\ldots41$МПа (табл. 7.1).

Коефіцієнт кореляції при

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i-\overline{Z}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{117{,}7\cdot10^{-4}}{5}} = 4{,}85\cdot10^{-2},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{c_i}-\overline{f_c}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{138{,}84}{5}} = 5{,}27.$$

$$r_{xy} = \frac{{}^1\!/_n\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})\cdot(f_{c_i}-\overline{f_c})}{\sigma_x\cdot\sigma_y} = \frac{126{,}9\cdot10^{-2}}{6\cdot4{,}85\cdot10^{-2}\cdot5{,}27} = 0{,}827 > 0{,}5.$$

Рівняння регресії можна побудувати.

У першому наближенні як рівняння регресії використаємо гіперболу у вигляді

$$f_c = a_0 + \frac{a_1}{H},\ \text{або}\ f_c = a_0 + a_1\cdot Z,\ \text{де}\ Z = {}^1\!/_H\,.$$

Коефіцієнти в рівнянні (проміжні підрахунки проведені в табл. 7.1):

$$a_1 = \frac{\sum_1^n(Z_i-\overline{Z})\cdot(f_{ci}-\overline{f_c})}{\sum_1^n(Z_i-\overline{Z})^2} = \frac{126{,}9\cdot10^{-2}}{117{,}7\cdot10^{-4}} = 107{,}8,$$

$$a_0 = \overline{f_c} - a_1\cdot Z = 33{,}8 - 107{,}8\cdot0{,}72 = -43{,}8.$$

Тоді градуйованої залежність $\boldsymbol{f_c = \frac{107{,}8}{H} - 43{,}8}$ (МПа).

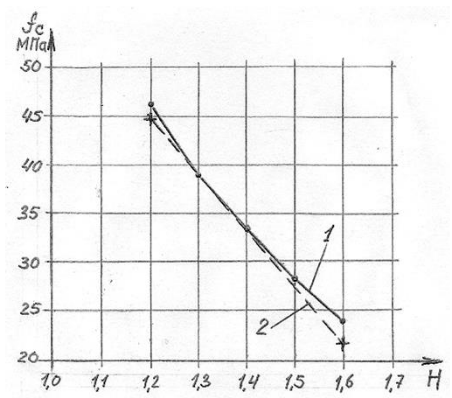


Рисунок 7.1 – Графіки рівнянь регресії до задачі 7.1:

1 – гіперболічна регресія; 2 – лінійна регресія

Таблиця 7.1 – Розрахункові дані до побудови градуйованої залежності гіперболою

Номер серії	H_i	f_{ci}, МПа	$Z_i = \frac{1}{H_i}$	$f_{ci} - \overline{f}_c$	$(f_{ci} - \overline{f_c})^2$	$Z_i - \overline{Z}$ х 10^{-2}	$(Z_i - \overline{Z})^2$ х 10^{-4}	$(f_{ci} - \overline{f}_c) \cdot (Z_i - \overline{Z})$ х 10^{-2}
1	1,50	27	0,658	- 6,8	46,24	- 6,2	38,4	42,2
2	1,48	29	0,676	- 4,8	23,04	- 4,4	19,4	21,1
3	1,38	34	0,725	- 0,2	0,04	0,5	0,25	- 0,1
4	1,40	34	0,714	- 0,2	0,04	- 0,6	0,36	0,1
5	1,30	38	0,767	4,2	17,46	4,7	22,1	19,7
6	1,28	41	0,781	7,2	51,24	6,1	37,2	43,9
	$\overline{H} = 1{,}39$	$\overline{f_c} = 33{,}8$	$\overline{Z} = 0{,}72$	$\sum = 0$	$\sum = 138{,}84$	$\sum = 0$	$\sum = 117{,}7$ х 10^{-4}	$\sum = 126{,}9$ х 10^{-2}

На графіку (рис. 7.1) отримана градуйованої залежність «1» в заданому інтервалі майже лінійна, тому доцільно використати більш просте лінійне рівняння $f_c = a_0 + a_1 \cdot H$.

За даними таблиці 7.1 виконаємо розрахунки коефіцієнтів лінійного рівняння, результати занесемо в таблицю 7.2.

Таблиця 7.2 – Розрахункові дані до побудови лінійної градуйованої залежності

H_i	f_{ci}, МПа	$H_i - \overline{H}$	$f_{ci} - \overline{f}_c$	$(H_i - \overline{H})^2$ x 10^{-3}	$(H_i - \overline{H}) \cdot (f_{ci} - \overline{f_c})$
1,50	27	+ 0,11	- 6,8	12,1	- 0,748
1,48	29	+ 0,09	- 4,8	8,1	- 0,432
1,38	34	+ 0,01	- 0,2	0,1	- 0,002
1,40	34	- 0,01	- 0,2	0,1	0,002
1,30	38	- 0,09	4,2	8,1	- 0,378
1,28	41	- 0,11	7,2	12,1	- 0,792
$\overline{H} = 1{,}39$	$\overline{f_c} = 33{,}8$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\sum = 40{,}6 \text{x} 10^{-3}$	$\sum = -2{,}35$

Коефіцієнти в рівнянні

$$a_1 \quad 33 \frac{\sum^n (H_i - \overline{H}) \cdot (f_{ci} - \overline{f_c})}{\sum_1^n (H_i - \overline{H})^2} = \frac{-2{,}35}{40{,}6 \cdot 10^{-3}} = -57{,}9,$$

$$a_0 = \overline{f_c} - a_1 \cdot \overline{H} = 33{,}8 + 57{,}9 \cdot 1{,}39 = 114{,}3.$$

Тоді градуйована залежність $f_c = 114{,}3 - 57{,}9 \cdot H$ (МПа).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бичківський Р. В. Метрологія, стандартизація, управління якістю і сертифікація : підруч. для вищ. навч. закл. / Р. В. Бичківський, П. Г. Столярчук, П. Р. Гамула ; М-во освіти і науки України, Нац. ун-т «Львівська політехніка»; за ред. Р. В. Бичківського. – Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2002. – 560 с.

2. Тарасова В. В. Метрологія, стандартизація і сертифікація : підручник / В. В. Тарасова, А. С. Малиновський, М. Ф. Рибак. – Київ : Центр навч. літератури, 2006. – 264 с.

3. Топольник В. Г. Метрологія, стандартизація, сертифікація і управління якістю : навч. посіб. / В. Г. Топольник, М. А. Котляр. – Донецьк : ДонДУЕТ, 2006. – 211 с.

4. Цюцюра С. В. Метрологія, основи вимірювань, стандартизація та сертифікація : навч. посіб. / С. В. Цюцюра, В. Д. Цюцюра. – Київ : Знання, 2005. – 242 с.

5. Сєдишев Є. С. Конспект лекцій з дисципліни «Метрологія і стандартизація» для студентів 3–4 курсів денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія / Є. С. Сєдишев ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 97 с.

6. Стринадко М. Т. Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Метрологія та стандартизація» / М. Т. Стринадко. – Чернівці : Чернівецький національний. Університет імені Юрія Федьковича, 2022. – 275 с.

7. Метрологія, стандартизація, сертифікація в будівництві: питання та відповіді : навч. посіб. / В. Р. Сердюк. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 162 с.

8. Гара О. А. Основи метрології і стандартизації в будівництві : навч. посіб. / О. А. Гара. – Одеса : ПОЛІГРАФ, 2016. – 256 с.

9. Бутенко Т. І. Конспект лекцій з дисципліни «Метрологія, сертифікація та контроль якості продукції» / Т. І. Бутенко, С. О. Колінько, В. А. Ващенко. – Черкаси : ЧДТУ, 2021. – 99 с.

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Значення коефіцієнта Стьюдента t_p залежно від числа вибірки *n*

n	Довірча імовірність *P*			*n*	Довірча імовірність *P*		
	0,9	0,95	0,99		0,9	0,95	0,99
2	6,31	12,71	63,70	18	1,74	2,11	2,90
3	2,92	4,30	9,92	19	1,73	2,10	2,88
4	2,35	3,18	5,84	20	1,72	2,09	2,86
5	2,13	2,78	4,60	25	1,71	2,06	2,80
6	2,02	2,57	4,03	30	1,70	2,05	2,76
7	1,94	2,45	3,71	35	1,69	2,03	2,73
8	1,89	2,37	3,50	40	1,68	2,02	2,71
9	1,86	2,31	3,36	45	1,68	2,02	2,69
10	1,83	2,26	3,25	50	1,68	2,01	2,67
11	1,81	2,23	3,17	60	1,67	2,00	2,66
12	1,79	2,20	3,11	70	1,67	1,99	2,65
13	1,78	2,18	3,06	80	1,66	1,99	2,64
14	1,77	2,16	3,01	90	1,66	1,99	2,63
15	1,76	2,15	2,98	10	1,66	1,98	2,63
16	1,75	2,13	2,95	120	1,66	1,98	2,62
17	1,74	2,12	2,92	∞	1,65	1,96	2,58

Таблиця А.2 – Значення коефіцієнта критерію Романовського t' залежно від числа вибірки *n*

n	Довірча імовірність *P*		*n*	Довірча імовірність *P*	
	0,95	0,99		0,95	0,99
2	15,56	77,96	10	2,37	3,41
3	4,97	11,46	12	2,29	3,23
4	3,56	6,53	14	2,24	3,12
5	3,04	5,04	16	2,20	3,04
6	2,78	4,36	18	2,17	3,00
7	2,62	3.96	20	2,15	2,93
8	2,51	3,71	30	2,08	2,80
9	2,43	3,54	∞	1,96	2,58

Електронне навчальне видання

Методичні рекомендації
до проведення практичних занять
із навчальної дисципліни

«МЕТРОЛОГІЯ І СТАНДАРТИЗАЦІЯ»

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія, освітньо-професійна програма «Промислове та цивільне будівництво»)

Укладачі: **СЄДИШЕВ** Євгеній Серафимович,
НАБОКА Анатолій Віталійович,
ПЕТРЕНКО Дмитро Григорович,
КРУЛЬ Юрій Миколайович

Відповідальний за випуск *С. М. Золотов*
Редактор *О. А. Норик*
Комп'ютерне верстання *А. В. Набока*

План 2024, поз. 397М

Підп. до друку 09.04.2024. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 2,2.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.