МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

М. В. НОВОЖИЛОВА
О. І. ЧУБ

МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2024

УДК 519.8:004](075.8)
Н74

Автори:

Новожилова Марина Володимирівна, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій ХНУМГ ім. О. М. Бекетова;

Чуб Ольга Ігорівна, кандидат економічних наук, доцент кафедри теоретичної та прикладної системотехніки ХНУ ім. В. Н. Каразіна

Рецензенти:

С. В. Яковлев, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного моделювання та штучного інтелекту Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»

А. Л. Литвинов, доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій ХНУМГ ім. О. М. Бекетова

Рекомендовано до друку Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, протокол № 4 від 29 грудня 2023 р.

Новожилова М. В.

Н74 Методи та засоби прийняття рішень : навч. посіб. / М. В. Новожилова, О. І. Чуб ; Харків. нац. ун-т міськ. гос-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 115 с.

У навчальному посібнику розглянуто такі теми, як системологічний аналіз узагальненої процедури прийняття рішень, побудова та методи розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, характеристика методів обробки експертної інформації, класифікація експертних процедур, зокрема метод аналізу ієрархій, критерії прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику, визначення функції корисності Неймана – Моргенштерна, а також питання використання ігрових моделей в теорії прийняття рішень.

Досягнутий рівень компетентності дозволить ефективно застосовувати інструментарій теорії прийняття рішень під час виконання завдань у професійній діяльності студентами освітніх програм «Комп'ютерні науки» та «Комп'ютерні науки. Управління проєктами», спеціальності 122 – Комп'ютерні науки.

УДК 519.8:004](075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ………………………………………. 5
ВСТУП…………………………………………………………………... 6
1 СИСТЕМОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕДУРИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ………………………………………………………………… 8
1.1 Визначення абстрактної цілеспрямованої системи………………... 8
1.2 Побудова теоретико-множинного опису цілеспрямованої системи... 11
Контрольні запитання та завдання………………………………………. 14
2 УЗАГАЛЬНЕНА ПРОЦЕДУРА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ………………. 15
2.1 Аналіз основних етапів синтезу системи……………………………. 15
2.2 Формування критеріїв оцінки припустимих рішень………………... 17
Контрольні запитання та завдання………………………………………. 20
3 ПОБУДОВА ЗАДАЧІ ОЦІНЮВАННЯ АЛЬТЕРНАТИВ……………… 21
3.1 Структура множини припустимих рішень………………………….. 21
3.2 Принципи реалізації конструктивного підходу до розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації…………………………………... 27
Контрольні запитання та завдання………………………………………. 35
4 НЕФОРМАЛЬНІ МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ…………………… 36
4.1 Класифікація методів прийняття рішень……………………………. 36
4.2 Неформальні методи теорії прийняття рішень……………………… 37
Контрольні запитання та завдання………………………………………. 41
5 ЕКСПЕРТНІ ПРОЦЕДУРИ. МЕТОД ДЕЛЬФІ………………......…… 42
5.1 Методи колективних експертних оцінок……………………………. 42
5.2 Метод Дельфі…………………………………………....……….. 44
Контрольні запитання та завдання………………………………………. 47
6 МЕТОД АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ – МЕТОД ПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ…… 48
6.1 Шкала Сааті………………………………………………………… 49

6.2 Етапи методу аналізу ієрархій………………………………………….. 50
Контрольні запитання та завдання………………………………………… 59
7 ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ……………. 60
7.1 Поняття гри з природою……………………………………………….. 60
7.2 Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності………... 62
Контрольні запитання та завдання………………………………………… 66
8 ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ………………………….. 67
8.1 Система кількісних оцінок ступеня ризику ………………………….. 68
8.2 Оптимальні стратегії прийняття рішень в умовах ризику………… 70
Контрольні запитання та завдання………………………………………… 72
9 ФУНКЦІЯ КОРИСНОСТІ НЕЙМАНА – МОРГЕНШТЕРНА…………... 73
9.1 Основні визначення та аксіоми………………………………………... 73
9.2 Оцінка значень корисності припустимих результатів……………… 76
Контрольні запитання та завдання………………………………………… 79
10 ВИКОРИСТАННЯ ІГРОВИХ МОДЕЛЕЙ В ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ………………………………………………………………………… 80
10.1 Основні відомості з теорії ігор. Платіжна матриця. Ціна гри. Принципи максиміна і мінімакса…………………………………………… 80
10.2 Рішення гри в змішаних стратегіях методами лінійного програмування. Основна теорема теорії матричних ігор………………… 84
10.3 Рішення гри в змішаних стратегіях методами лінійного програмування………………………………………………………………….. 86
Контрольні запитання та завдання………………………………………… 89
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ……………………………….... 90
ДОДАТОК А Загальні відомості про оптимізаційні задачі……………… 92

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

БГЕ	– Безумовний грошовий еквівалент
ЛП	– Лінійне програмування
МАІ	– Метод аналізу ієрархій
МЗК	– Метод заперечення і конструювання
ММС	– Метод морфологічної скриньки
ОГО	– Очікувана грошова оцінка
ОПР	– Особа, що приймає рішення

ВСТУП

Метою викладання дисципліни «Методи і засоби прийняття рішень» є формування комплексних систематизованих знань з сучасної прикладної математики, комп'ютерних наук, інформатики та психології, що лежать в основі процесу прийняття рішення, тобто вирішення проблем вибору найкращої з декількох можливих альтернатив, в умовах визначеності, ризику та невизначеності наявних даних.

Вивчення цієї дисципліни студентами бакалавріату спеціальності 122 – Комп'ютерні науки, освітньо-професійні програми «Комп'ютерні науки» та «Комп'ютерні науки. Управління проєктами», безпосередньо спирається на знання з навчальних дисциплін «Програмування», «Оптимізаційні методи і моделі».

Програмним результатом навчання за дисципліною «Методи і засоби прийняття рішень» відповідно до Стандарту вищої освіти зі спеціальності 122 – Комп'ютерні науки є такий: набути знань та вмінь «використовувати методологію системного аналізу об'єктів, процесів і систем для задач аналізу, прогнозування, управління та проєктування динамічних процесів у макроекономічних, технічних, технологічних і фінансових об'єктах» [1].

Програма навчальної дисципліни складається з трьох змістових модулів.

Змістовий модуль 1 Предметна галузь та основні поняття предметної галузі прийняття рішень.

У цьому змістовому модулі розглядається класифікація інструментальних засобів моделювання та розв'язання оптимізаційних задач в умовах ризику та невизначеності з необхідністю урахування багатьох критеріїв якості, а також задач, у яких суттєвою є роль особи, що приймає рішення.

Узагальнена процедура прийняття рішення в теорії прийняття подається як синтез абстрактної цілеспрямованої системи, що забезпечує досягнення заданої мети та будується з використанням методології кількісного обґрунтування та прийняття рішень, а саме методології багатокритеріальної оптимізації.

Змістовий модуль 2 Методи формалізації експертної інформації.

Прийняття рішення в переважній більшості практичних ситуацій спирається на обробку не тільки кількісної, але і якісної (експертної) інформації про характеристики системи або процесу, що досліджується. У модулі розглядаються методи обробки експертної інформації, зокрема метод аналізу ієрархій, методи колективних експертних оцінок, метод Дельфі.

Змістовий модуль 3 Розкриття невизначеностей та аналіз багатофакторних ризиків.

Класифікація необхідних теоретичних відомостей з теорії ймовірності та математичної статистики. Множина ситуацій прийняття рішень в умовах багатофакторного ризику та невизначеності на основі моделі гри з природою. Моделювання функції корисності особи, що приймає рішення. Розглядаються елементи теорії ігор, зокрема матричні ігри двох осіб з нульовою сумою. Визначаються умови розв’язання гри в чистих стратегіях та змішаних стратегіях на основі побудови еквівалентної задачі лінійного програмування.

Отримані під час вивчення дисципліни теоретичні знання та практичні навички дозволять ефективно застосовувати інструментарій теорії прийняття рішень під час виконання завдань у професійній діяльності студентами спеціальностей галузі знань 12 – Інформаційні технології, зокрема освітніх програм «Комп’ютерні науки», «Комп’ютерні науки. Управління проєктами», спеціальності 122 – Комп’ютерні науки.

1 СИСТЕМОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕДУРИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Вся цілеспрямована людська діяльність, як побутова, так і професійна, становить послідовність актів прийняття рішень. Коли встати вранці, як одягтися, яким маршрутом їхати на роботу, поточні або унікальні професійні задачі – усе вимагає прийняття рішень. Рішення відрізняються складністю, можливими наслідками, але з формального погляду можуть бути подані однією узагальненою моделлю, яка є інваріантною конкретному змісту задачі прийняття рішень [2–9].

Основні етапи узагальненої процедури прийняття рішення:

- формування цілі;
- визначення множини можливих шляхів її досягнення (множини рішень);
- формування оцінки (міри), що дозволяє порівнювати можливі рішення між собою за якістю (задача оцінювання);
- вибір із можливої множини екстремального, тобто найкращого за якістю, одного рішення (задача оптимізації).

Теоретична основа розв'язання трьох перших задач – системний аналіз, а четвертої – теорія математичного програмування.

Основні відомості з теорії математичного програмування, що суттєво використовуються у подальшому викладенні, наведені у додатку А.

1.1 Визначення абстрактної цілеспрямованої системи

Узагальнена процедура прийняття рішення може бути визначена як синтез абстрактної системи, що забезпечує досягнення заданої цілі.

Надамо поняття абстрактної системи. Для формулювання цього поняття скористаємося допомогою chat GPT [2].

Визначення 1.1. Абстрактна система – це концептуальна модель або уявне представлення системи, яка визначається через визначення її основних складових та їхньої взаємодії, ігноруючи конкретні деталі та реалізацію.

Основні характеристики абстрактної системи включають:

– елементи (components): основні структурні частини системи, які можуть бути як матеріальними, так і інформаційними об'єктами;

– взаємодії (interactions): зв'язки та взаємодії між елементами системи, що визначають, як вони взаємодіють між собою;

– ціль (purpose): мета абстрактної системи, тобто те, для чого вона існує та які цілі вона спрямовує на досягнення;

– властивості (properties): основні характеристики або атрибути, які характеризують елементи та їхні взаємодії в системі;

– границі (boundaries): межі абстрактної системи, які визначають її область дії та взаємодії з довкіллям;

– взаємодія з навколишнім середовищем (interaction with the environment): визначення, як система взаємодіє з зовнішнім середовищем та обмінюється інформацією чи ресурсами;

– час і простір (time and space): аспекти, пов'язані з часом та простором у функціонуванні системи.

Абстрактні системи часто використовуються для аналізу та розуміння складних явищ, де формальне визначення конкретних деталей є непрактичним або зайвим. Вони також можуть слугувати основою для подальших досліджень та розвитку конкретних реалізацій систем.

Визначення 1.2. Абстрактна модель – це спрощене, узагальнене відображення реального об'єкта чи процесу, яке ігнорує деякі деталі та концентрується на ключових аспектах. Абстракція є процесом відокремлення інформації, яка не є суттєвою для певного використання чи розуміння, від тих аспектів, які важливі для певного контексту.

У прийнятті рішень абстрактна модель є узагальненим зображенням реальної ситуації, яке дозволяє розуміти та аналізувати ключові аспекти проблеми без деталей. Це важливий інструмент для ефективного прийняття рішень, оскільки допомагає в структуруванні інформації та виділенні основних елементів для аналізу.

Хоча терміни «абстрактна модель» і «концептуальна модель» іноді використовуються взаємозамінно, але є різниця в їхньому вживанні та важливих аспектах. Нижче з погляду chat GPT розглянуто основні відмінності між цими двома поняттями (рис. 1.1):

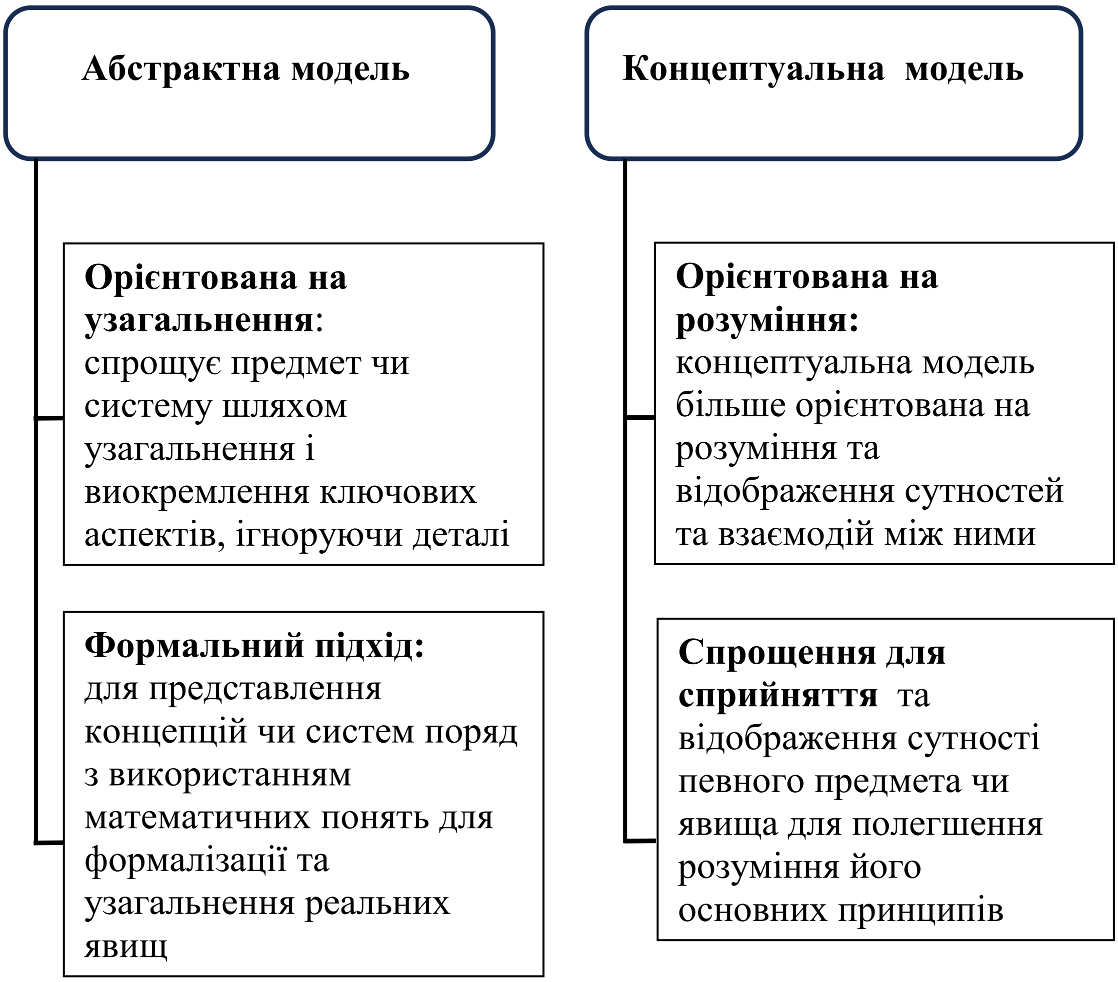

Рисунок 1.1 – Порівняння понять абстрактної і концептуальної моделі

Отже, можна сказати, що абстрактна модель частіше використовується для формалізації та узагальнення, тоді як концептуальна модель більше фокусується на визначенні ідей та їхніх взаємозв'язків для полегшення розуміння концепції чи системи.

Залежно від цілей аналізу і рівня абстрагування є відомими різні визначення системи. Найзагальнішим із них є теоретико-множинний опис.

1.2 Побудова теоретико-множинного опису цілеспрямованої системи

Визначення 1.3. Система – це множина M однорідних або різнорідних елементів, на якій є реалізованою множина відношень (зв'язків) R, що упорядковують елементи в структуру C. Разом із тим структура C має множину властивостей P, що дозволяють досягти заданої цілі.

Таким чином, упорядкування множини елементів M і відношень R між ними утворює деяку структуру C вигляду

$$C = (M \times R), \tag{1.1}$$

котра розглядається як нецілеспрямована система. Це зв'язано з тим, що кожна структура має деякі властивості, зокрема системні, тобто такі, що не випливають безпосередньо з властивостей її елементів, а є результатом упорядкування, взаємодії елементів на базі реалізованих відношень.

Розрізняють природні (нецілеспрямовані) і штучні, створені для досягнення деякої цілі (цілеспрямовані) системи.

Як нецілеспрямовану систему можна розглядати сонячну систему, елементами якої виступають Сонце, планети й інші космічні тіла, а відношення між елементами описуються законами Кеплера.

Якщо задана ціль системи, то відображення цієї цілі на множину властивостей виділяє деяку підмножину властивостей P, яка дозволяє досягти цілі. У цьому випадку вирішується завдання усвідомленого (цілеспрямованого) синтезу цілеспрямованої системи, тобто системи з властивостями, що забезпечують досягнення цілі.

Таким чином, цілеспрямована система може бути подана як упорядкована множина вигляду

$$S = < (M \times R) \times P >. \tag{1.2}$$

Прикладом цілеспрямованої системи є будь-яка економічна система. Як елементи виступають суб'єкти економіки, множину відношень утворюють виробничі, фінансові, соціальні та інші відношення. Разом вони визначають структуру економіки. Метою економічної системи є задоволення потреб суспільства.

Отже, опис системи зв'язаний з завданням множин M, R, P.

Множини M, R, P є скінченними і піддаються інформативному опису тільки в тому випадку, якщо є визначеним рівень деталізації множини елементів. Наприклад, із погляду звичайного користувача персональний комп'ютер можна розглядати як систему, що складається з чотирьох елементів – системного блока, монітора, принтера, системи управління (клавіатура і маніпулятор «миша»), для конструктора є необхідним більш докладний рівень елементного опису і так до атомно-молекулярного рівня, на якому створюється процесор. Кожному елементному рівню відповідає деяка множина відношень. Вибір рівня опису визначається цілями і задачами, для рішення яких використовується опис.

Надалі будемо розглядати тільки цілеспрямовані системи.

Залежно від мови моделі можуть бути вербальними (природно-мовними), графічними, математичними тощо.

Водночас незалежно від мови опису розрізняють два види моделей:

– імітаційні;

– оптимізаційні.

Імітаційні моделі описують на тому або іншому рівні абстракції і ступені подробиць взаємозв'язків елементів, відношень і властивостей. Такі моделі орієнтовані на дістання відповідей на питання типу «що буде, якщо...». Модель сонячної системи Кеплера є імітаційною.

На відміну від цього оптимізаційні моделі є орієнтованими на одержання відповідей на питання типу «що потрібно, щоб …», тобто визначення таких елементів, відношень і властивостей, які забезпечать досягнення бажаної цілі, при цьому найкращим, найбільш ефективним способом.

Це зв'язано з визначенням і приєднанням до імітаційної моделі оптимізаційного функціонала, що називається цільовою функцією або функцією цілі.

Прикладом оптимізаційної моделі є модель виробничого підприємства, що дозволяє з урахуванням усіх внутрішніх і зовнішніх обмежень визначити таку номенклатуру продукції, що максимізує прибуток підприємства. У цьому випадку прибуток є цільовою функцією.

Таким чином, опис будь-якої системи зв'язаний із синтезом системи.

Задачу синтезу системи можна структурувати на такі етапи:

– визначення цілі;

– аналіз цілі і вилучення властивостей, які повинна мати система (рішення) для її досягнення;

– визначення множини структур (рішень), які володіють необхідними властивостями; вибір із них найкращого варіанта.

Наведені етапи цілком збігаються з етапами узагальненої процедури прийняття рішень.

У наступному розділі проаналізуємо кожний з виділених етапів з позицій теорії прийняття рішень.

Контрольні запитання та завдання

1. Надайте характеристику основних етапів узагальненої процедури прийняття рішення.
2. Наведіть вербальне і теоретико-множинне визначення абстрактної цілеспрямованої системи.
3. Сформулюйте визначення абстрактної моделі. Чим відрізняються імітаційні та оптимізаційні моделі?
4. Поясніть різницю між цілеспрямованими та нецілеспрямованими системами.
5. Наведіть приклади цілеспрямованих та нецілеспрямованих систем.
6. Назвіть складові задачі синтезу системи.

2 УЗАГАЛЬНЕНА ПРОЦЕДУРА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

2.1 Аналіз основних етапів синтезу системи

Формування цілі. Ціль – це деякий бажаний стан, досягнення якого вимагає виконання цілеспрямованих дій. Стан системи описується значеннями її властивостей, що вимірюються у визначеній метриці, тобто за допомогою визначеної міри. Якщо фактичний і бажаний стани не збігаються, виникає проблемна ситуація. Рішення проблеми зв’язано з усуненням цієї неузгодженості. У цьому випадку бажаний стан є ціллю, а спосіб її досягнення – розв’язанням проблеми.

Визначення властивостей. На початковому етапі ціль найчастіше визначається у вигляді узагальненого природно-мовного (вербального) висловлення. Подальший конструктивний цілеспрямований аналіз і синтез системи зв’язаний із виділенням і виміром необхідних для досягнення цілі функціональних якостей (властивостей).

У загальному випадку зазвичай не вдається виділити єдину властивість, яка достатньо повно характеризує систему. Тому доводиться визначати деяку множину властивостей, кожна з яких характеризує частинну (локальну) функціональну якість, а разом вони доволі повно характеризують систему загалом. Таким чином, система характеризується множиною властивостей.

$$P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}. \tag{2.1}$$

Часткові властивості за визначенням мають різний функціональний зміст, вимірність, інтервали можливих значень і вимірюються в різних шкалах.

Наявність того або іншого набору властивостей визначає належність до класу систем визначеної цільової спрямованості, наприклад, цифрові обчислювальні машини, виробничі підприємства тощо. Конкретні значення цих властивостей, які вимірюються в певних шкалах, характеризують ступінь досягнення цілі (функціональна якість системи загалом).

Етап виділення необхідних властивостей системи є дуже важливим у зв'язку з тим, що набір властивостей визначає як ступінь відповідності цілі, так і потенційну ефективність системи. Крім того, набір має бути обмеженим, тобто враховувати тільки найбільш важливі, визначальні властивості, і, одночасно, достатньо повно характеризувати систему і її можливості. Визначення такого компромісу є далеко не тривіальним завданням.

Виділення множини припустимих рішень. Як випливає із загального визначення системи, її властивості можуть бути реалізовані тільки на упорядкованій множині елементів і відношень, тобто структур (1.2). Завдання конкретної підмножини властивостей P, якою повинна володіти система, шляхом їхнього відображення на універсуми (повні множини) елементів M і відношень R, визначає їхні підмножини M' і R', на яких фактично може бути реалізована система з заданими властивостями. Упорядкована множина також

$$C' = (M' \times R') \qquad (2.2)$$

утворює множину структур.

Множина C' містить усі можливі варіанти побудови системи, тобто визначає *область існування* системи з заданими властивостями.

Не всі рішення, що належать області існування C', є можливими, припустимими або доцільними за технічними, технологічними, соціальними, економічними, екологічними, морально-етичними та іншими міркуваннями. Урахування цих обмежень виділяє з множини C' підмножину X, що надалі буде називатися *припустимою множиною рішень*. Обмеження, що виділяють X, можуть бути задані *в явному вигляді*, що безпосередньо виключає з розгляду деякі елементи, відношення або структури, наприклад, обмеження на тривалість робочої зміни або вимога, щоб усі розрахунки здійснювалися в національній валюті, або *в неявному вигляді*, наприклад, обмеження на вартість системи загалом, екологічні вимоги тощо.

Формально обмеження у загальному випадку задаються у вигляді комбінації рівностей і нерівностей, що можуть становити лінійні або нелінійні співвідношення різної складності. Коректність обмежень визначається умовами

$$X \subset C' \quad \text{або} \quad X \cap C' \neq \varnothing. \tag{2.3}$$

Перше з них означає, що множина припустимих значень X повинна бути підмножиною області існування C', а друге, що перетин цих множин є непорожнім. У протилежному випадку синтез системи з необхідними властивостями фактично не є можливим.

2.2 Формування критеріїв оцінки припустимих рішень

Кінцева ціль задачі прийняття рішень полягає у виборі з множини припустимих рішень X єдиного кращого (ефективного) рішення $x^0 \in X$.

Досягнення зазначеної цілі зв’язано з формалізацією поняття «краще» або «ефективне» рішення, тобто формуванням деякої міри, що дозволяє об’єктивно порівнювати ефективність рішень між собою. Як така міра виступають критерії оцінки ефективності рішень.

Очевидно, що поняття «краще» або «ефективне» рішення означає найбільш повне досягнення цілі. Разом із тим не байдуже, якою ціною (витрат фінансів, ресурсів, часу, зусиль) ціль досягається. Таким чином, критерій ефективності рішень повинен враховувати як позитивний ефект (ступінь досягнення цілі), так і витрати в широкому сенсі.

Як відзначалося вище, ціль системи характеризується частинними властивостями p_i, а рівень її досягнення – їхніми кількісними значеннями. Таким чином, порівняння рішень можна здійснювати згідно з досягнутим рівнем частинних властивостей. Тому частинні властивості системи, зведені до виду, що припускає вимір у кількісних або якісних шкалах, будемо називати *частинними критеріями*.

Ця група критеріїв оцінює корисні функціональні властивості, заради яких створювалася система, і тому позначимо їх

$$K_F = \{k_{1F}, k_{2F}, .., k_{JF}\}. \quad (2.4)$$

Як випливає з визначення системи, реалізація властивостей, а отже і K_f, можлива тільки на деякій структурі (рішенні) $x \in X$. Реалізація кожної структури вимагає загалом фінансових, матеріальних, часових, екологічних витрат тощо, що у сукупності визначають «ціну», яку необхідно «заплатити» за досягнення цілі на деякому рівні. Рівень витрат кожного з ресурсів оцінюється частинними критеріями k_{jC}, які утворюють множину

$$K_C = \{k_{1C}, k_{2C}, .., k_{LC}\}. \quad (2.5)$$

Відзначимо, що в окремому випадку множини K_F і K_C можуть складатися з одного елемента, але у загальному випадку це множина різнорідних за змістом, а отже, вимірюваних у різних шкалах і інтервалах частинних критеріїв, що мають різну вимірність. Таким чином, кожне рішення $x \in X$ характеризується набором різнорідних частинних критеріїв

$$K= \{ K_F \cup K_C \} = \{k_i\},\ i=1,2, \dots , (J + L). \tag{2.6}$$

Вибір системи частинних критеріїв – це неформалізована, евристична задача. Її розв'язання ускладнюється необхідністю задоволення певних, найчастіше суперечливих, умов.

Повнота – набір критеріїв має доволі повно характеризувати рішення.

Мінімальність – набір повинен містити якомога меншу кількість критеріїв.

Ненадмірність – різні критерії не повинні враховувати ті самі якості.

Операціональність – кожний частинний критерій повинен мати зрозуміле формулювання, зрозумілий і однозначний зміст, характеризувати визначені якості.

Декомпозованість – набір критеріїв повинен припускати можливість спрощення вихідної задачі оцінки альтернатив шляхом розбивки (декомпозиції) на окремі більш прості частини.

Вимірність – кожний критерій повинен припускати можливість оцінки (кількісної або якісної) інтенсивності якості, що характеризується. Це означає, що для будь-якого рішення $x \in X$ задані відображення

$$f : X \to K,$$

і, відповідно, функціональна залежність

$$k_i(x) = f_i(x).$$

Перераховані вимоги суперечливі і не можуть бути задоволені одночасно. Вимога мінімальності орієнтує на агрегування (об'єднання) критеріїв, що часто призводить до суперечності з вимогами операціональності і вимірності. Агреговані критерії найчастіше мають менш зрозумілий і однозначний зміст і складніше вимірюються. З іншого боку, вимоги повноти й операціональності орієнтують на збільшення кількості критеріїв. Тому під час формування набору критеріїв у реальних задачах доводиться йти на компроміси, основою для яких є цілі, задача аналізу та особливості конкретної системи.

Вибір оптимального рішення. Кінцевою метою розв’язання загальної задачі прийняття рішень є вибір із припустимої множини рішень X єдиного найкращого, тобто екстремального за обраними частинними критеріями рішення

$$x^0 = \underset{x \in X}{\mathrm{agrextr}}\{k_i(x)\}, i = 1,2,\ldots,n. \tag{2.7}$$

Якщо задача є однокритеріальною, тобто n = 1, то вона має єдине рішення. Якщо n > 1, тобто задача є багатокритеріальною, її однозначне розв’язання можна одержати тільки в окремих випадках, а загалом задача не має єдиного розв’язку. Розгляду цього питання присвячено наступний розділ.

Контрольні запитання та завдання

1. Що таке область існування системи? Наведіть приклади.
2. Що таке припустима множина рішень? Які умови коректності її завдання?
3. Які задачі є багатокритеріальними?
4. Що таке локальні (частинні) критерії? Як вони формуються?
5. Які вимоги мають задовольняти частинні критерії?

3 ПОБУДОВА ЗАДАЧІ ОЦІНЮВАННЯ АЛЬТЕРНАТИВ

Отже, кінцевою метою розв’язання загальної задачі прийняття рішень є вибір із припустимої множини рішень X єдиного найкращого, тобто екстремального за обраними частинними критеріями рішення

$$x^0 = \arg \operatorname{extr}_{x \in X} \{k_i(x)\}, \ \ i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.1}$$

3.1 Структура множини припустимих рішень

У загальному випадку наявності кількох частинних критеріїв множина припустимих рішень X задачі (3.1) є композицією двох підмножин:

- *погоджених рішень* (області згоди) X^S;
- *компромісних рішень* (області компромісів) X^C.

Областю згоди X^S називається підмножина множини припустимих рішень X, на якому один або декілька частинних критеріїв можна поліпшити без погіршення якості інших частинних критеріїв.

Областю компромісів X^C називається підмножина X, на котрій жодний частинний критерій $k_i(x)$ неможливо поліпшити без погіршення значення хоча б одного іншого частинного критерію. Можливість існування такої підмножини довів італійський економіст Парето, тому її часто називають областю Парето або множиною Парето-оптимальних рішень.

З визначення випливає

$$X = X^S \cup X^C; \ \ X^S \cap X^C = \emptyset \tag{3.2}$$

Розглянемо випадок двох критеріїв: $k_1(x)$ і $k_2(x)$, кожний із яких максимізується, загальну структуру припустимої множини X показано на рисунку 3.1. В окремих випадках множина X може складатися тільки з області згоди $X^S(X^C = \emptyset)$ (рис. 3.2) або компромісу $X^C(X^S = \emptyset)$ (рис.3.3).

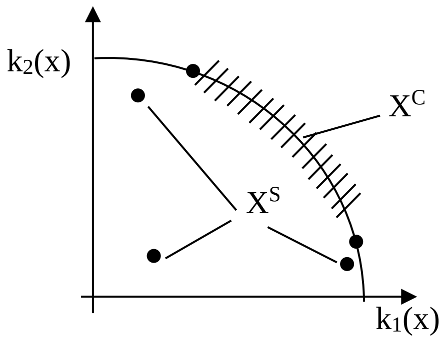

Рисунок 3.1 – Загальна структура множини X

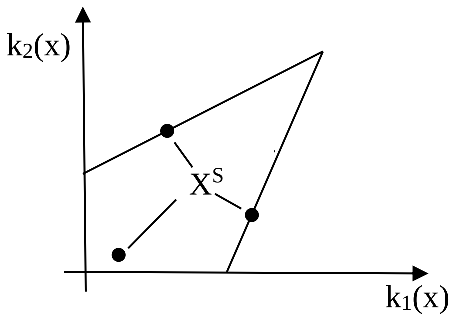

Рисунок 3.2 – Приклад множини X, що складається тільки з X^S

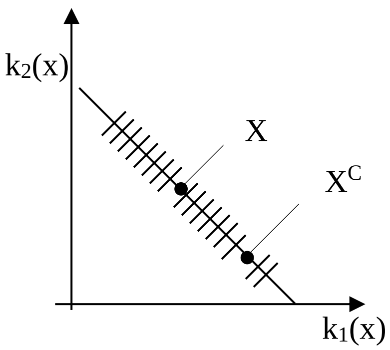

Рисунок 3.3 – Приклад множини X, яка складається тільки з X^C

За визначенням область згоди X^S взагалі не може містити екстремальних рішень, тому що кожне $x \in X^S$ можна поліпшити хоча б за одним критерієм. Тому рішення задачі (3.1) збігається з областю компромісів X^C, і якщо вона не порожня, тобто $X^C \neq \emptyset$, то усі $x \in X^C$ є рішеннями задачі.

Таким чином, задача багатокритеріальної оптимізації (3.1) має єдине рішення тільки, якщо $X = X^S$ $(X^C = \emptyset)$.

Існують два підходи до рішення задачі вибору єдиного рішення з області компромісів X^C:

– конструктивний (формальний);

– неконструктивний (евристичний).

У першому випадку визначається формальне правило-схема компромісів, що гарантує вибір рішення $x \in X$ такого, що $x \in X^C$.

У другому випадку вибір єдиного рішення здійснюється «особою, що приймає рішення» (далі – ОПР) на основі інтуїтивних, евристичних (неформальних) міркувань. Разом із тим ОПР – це людина або група людей (колективний орган), що уповноважені приймати рішення. Підготовку рішень зазвичай здійснює «експерт» – фахівець (або група), що аналізує рішення, може давати поради, але не має повноважень приймати рішення.

У разі реалізації неконструктивного підходу до вибору компромісного рішення обов'язковим етапом підготовки рішень експертом є виділення з припустимої області рішень X області компромісів $X^C \subset X$, бо тільки в ній знаходяться ефективні рішення. Для формальних схем вибору компромісних рішень ця процедура не є обов'язковою, тому що більшість таких схем гарантує вибір рішень $x \in X^C$, але часто є бажаною з обчислювальних міркувань.

Розглянемо математичні моделі визначення області компромісів X^C на множині припустимих рішень X.

Математична модель визначення точної області компромісів. Існує декілька моделей визначення X^C, але найбільш відомою і строгою є модель, яку запропоновано Ю. Гермейером:

$$X^C = \bigcup_{a \in A} \underset{x \in X}{\operatorname{argextr}} \sum_{i=1}^{n} a_i k_i(x), \qquad (3.3)$$

$a = < a_1, a_2, \ldots, a_n >$ – безрозмірні вагові коефіцієнти частинних критеріїв $k_i(x)$, які є визначеними на множині

$$A = \begin{cases} 0 \le a_i \ge 1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \ \ \forall i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Задача зводиться до визначення екстремумів лінійного функціонала (лінійна згортка)

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i k_i(x) \tag{3.4}$$

за різних $a \in A$. Об’єднання цих екстремальних рішень, як показано на рисунку 3.4, утворює область компромісів.

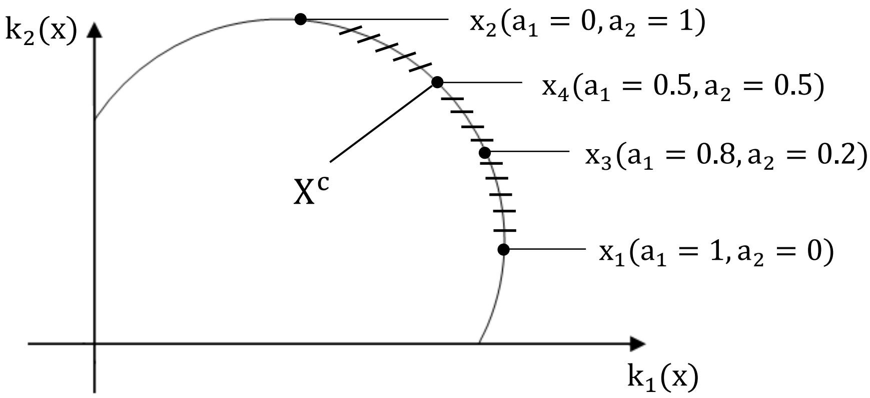

Рисунок 3.4 – Формування області X^c

Модель, що розглядається, має дві особливості:

– високу трудомісткість, що визначається дискретністю варіювання параметрів a_i і нелінійно зростає з ростом числа n частинних критеріїв;

– модель є вірною тільки в тому випадку, якщо множина X є опуклою.

У протилежному випадку необхідно використовувати інші, більш складні моделі. Зазначені недоліки можна подолати, якщо визначати не точну, а наближену область компромісів.

Визначення наближеної області компромісів. Ідея визначення наближеної області компромісів X^p полягає у вилученні не всієї множини точок $x \in X^c$, а тільки рішень, що визначають межу області.

Умовою коректності такої процедури є

$$X^c \subset X^p, \tag{3.5}$$

тобто повне включення точної області компромісів у наближену. Один із можливих методів рішення цієї задачі є таким.

На множині припустимих рішень X послідовно вирішується n однокритеріальних оптимізаційних задач за кожним частинним $k_i(x), i = \overline{1, n}$:

$$x_1^0 = \arg\max_{x \in X} k_i(x). \tag{3.6}$$

Для цього в моделі (3.3) достатньо покласти $a_i = 1$ і тоді відповідно до (3.3) всі інші коефіцієнти будуть дорівнювати 0. Для кожного рішення x_1^0 обчислюються значення всіх інших частинних критеріїв, які позначимо $k_i(x_1^0) = k_{ji}, j = \overline{1, n}$. Отримані результати заносяться в таблицю 3.1, яка складається у такий спосіб: кожний рядок утворюють значення i-го частинного критерію у точках екстремуму за всіма частинними критеріями. Разом із тим екстремальне значення критерію досягається на головній діагоналі. Наприклад, перший рядок містить значення критерію $k_1(x)$ в точках:

$$k_{11} = k_1(x_1^0),\ k_{12} = k_1(x_2^0), \dots,\ k_{n1} = k_n(x_n^0),$$

де $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ – рішення, екстремальні відповідно по 1, 2,…, n-му критеріям.

Таблиця 3.1 – Результати розрахунків X^p

$k_i(x), i = \overline{1,n}$	$k_1(x)$	$k_2(x)$	…	$k_n(x)$
$k_1(x)$	k_{11}	k_{12}	…	k_{1n}
$k_2(x)$	k_{21}	k_{22}	…	k_{2n}
⋮	⋮	⋮	…	⋮
$k_n(x)$	k_{n1}	k_{n2}	…	k_{nn}

Таким чином, у кожному рядку значення частинного критерію $k_i(x)$ змінюються від екстремального k_{ii} до найгіршого k_{iHH}. Множини цих значень за усіма $i = \overline{1,n}$ є межами відображення наближеної області компромісів X^p на простір критеріїв $K = \{k_i(x)\},\ i = \overline{1,n}$.

Область X^p у просторі частинних критеріїв задається обмеженнями

$$x \in X,\ k_{iHH} \le k_i(x) \le k_{ii},\ i = \overline{1,n}. \tag{3.7}$$

Вигляд відповідної обмеженням (3.7) наближеної області компромісів для опуклої області X, показаний на рисунку 3.5.

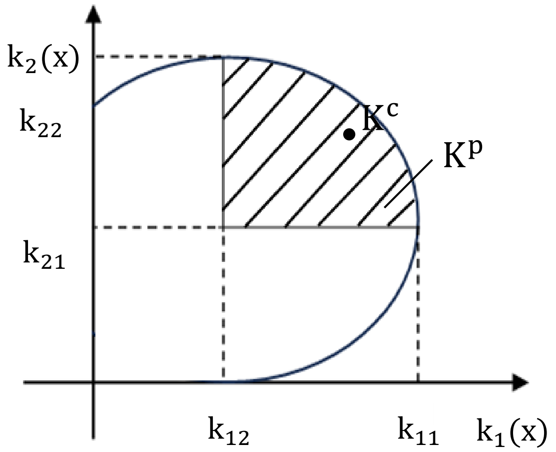

Рисунок 3.5 – Наближена область компромісів X^p на опуклому *X*

Область X^p утворено екстремальними значеннями всіх частинних критеріїв, що є достатньою умовою співвідношення $X^c \subset X^p$.

Разом із цим наближена область K^p ширше області компромісів K^C, бо містить у собі, як видно з рисунка 3.5, частину області згоди K^S.

3.2 Принципи реалізації конструктивного підходу до рішення задач багатокритеріальної оптимізації

Задача багатокритеріальної оптимізації (3.1) у загальному випадку не забезпечує визначення єдиного оптимального рішення з припустимої множини X. Це можна усунути введенням деякої додаткової інформації, математичних співвідношень або правил, що дозволяють забезпечити вибір єдиного рішення. Під час реалізації неконструктивного підходу джерелом регуляризаційної інформації є ОПР.

Але ОПР цю інформацію не формалізує, а використовує на інтуїтивному рівні. На відміну від цього конструктивний підхід орієнтовано на визначення формальних правил вибору єдиного рішення з області компромісів.

Рішення або ранжуються у порядку убування чи зростання якості на множині компромісу X^c або у загальному випадку на усій припустимій множині X, або безпосередньо визначається екстремальний (крайній) елемент ряду.

У першому випадку визначається строгий

$$x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$$

або нестрогий порядок

$$x_1 \succ x_2 \sim x_3 \succ x_4 \dots \succ x_n;$$

де $\succ$ і $\sim$ – знаки відношень переваги й еквівалентності відповідно.

У другому випадку знаходиться екстремальне рішення

$$x^* \succ \forall x \in X.$$

Загальний підхід до рішення цієї проблеми полягає в трансформації багатокритеріальної задачі в однокритеріальну зі скалярним критерієм. Це обумовлено такими двома причинами. По-перше, значення скалярного кількісного критерію можна інтерпретувати як точку на числовій осі, і ранжування таких точок є очевидним, тому що відношення переваги й еквівалентності перетворюються відповідно у відношення нерівності ($>$) і рівності ($=$). По-друге, усі методи пошуку екстремуму орієнтовані на скалярну функцію.

Існує декілька способів трансформації багатокритеріальних оптимізаційних задач в однокритеріальні. Розглянемо основні з них.

Лінійна згортка

Ідея методу лінійної згортки полягає в побудові єдиної адитивної цільової функції L(x) на основі заданої множини частинних критеріїв $\{k_i(x)\}$ вигляду

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i k_i(x).$$

Принцип головного критерію

Принцип базується на виділенні головного критерію і переведення всіх інших критеріїв у обмеження. Для цього проводиться аналіз конкретних особливостей багатокритеріальної задачі, із множини частинних критеріїв вибирається один – найважливіший, і він приймається як єдиний критерій оптимізації. Для кожного з інших частинних критеріїв призначається граничне значення, нижче якого він не може опускатися. Таким чином, усі частинні критерії, крім одного, перетворюються в обмеження, що додатково звужують область припустимих рішень X. Тоді вихідна багатокритеріальна задача (1.9) перетворюється в однокритеріальну задачу вигляду

$$x_0 = \arg \operatorname{extr}_{x \in X} k^*(x),$$
$$k_i(x) \geq k_i^{HX}(x), i = \overline{1, n-1}, \tag{3.8}$$

де $k^*(x)$ – оптимізаційний скалярний критерій;

$k_i^{HX}(x)$ – найгірші припустимі значення частинних критеріїв – обмежень.

Під час реалізації розглянутого методу потрібно звертати особливу увагу на те, щоб припустима множина рішень, яка задана частинними критеріями – обмеженнями, не виявилась порожньою.

Функціонально-вартісний аналіз

У цьому випадку вихідна множина частинних критеріїв $K = \{k_i(x)\}$, $i = \overline{1, n}$, що за визначенням достатньо повно характеризує ефективність припустимих рішень $x \in X$ у цілому, розбивається на дві підмножини: $K_ф = \{k_j(x)\}$, $j = \overline{1, m}$ і $K_в = \{k_l(x)\}$, $l = \overline{1, L}$; $m + L = n$.

Перша група критеріїв ($K_ф$) характеризує функціональну якість рішення, тобто ступінь досягнення цілі системи, що аналізується, а друга група ($K_з$) – витрати в широкому змісті, котрі є необхідними для реалізації рішення x, тобто досягнення цілі.

У кожній із зазначених підмножин вилучається один головний критерій. Позначимо ці критерії відповідно $K_ф^*$ і $K_в^*$. Інші частинні критерії переводяться в обмеження. У результаті одержуємо оптимізаційну задачу з двома скалярними критеріями. Отже, виникає необхідність приведення побудованої задачі до однокритеріальної. У функціонально-вартісному аналізі використовуються такі оптимізаційні критерії:

1. Якщо обидва критерії $K_ф^*$ і $K_в^*$ мають однакову вимірність або їх можна привести до однакової вимірності, використовується узагальнений оптимізаційний критерій вигляду

$$K_1(x) = \left[K_ф^*(x) - K_в^*(x)\right], \tag{3.9}$$

а оптимальне рішення визначається за схемою

$$x_1^0 = \max_{x \in X^*}\left[K_ф^*(x) - K_в^*\right], \tag{3.10}$$

де X^* – звужена додатковими обмеженнями область припустимих рішень.

Критерій $K_1(x)$ може бути інтерпретовано як прибуток системи.

2. Якщо критерії $K_ф^*$ і $K_в^*$ мають відмінну вимірність, використовується критерій вигляду

$$K_2(x) = [K_K^*(x)/K_в^*(x)], \tag{3.11}$$

а оптимальне рішення має вигляд

$$x_2^0 = \max_{x \in X^*}\left[K_ф^*(x)/K_в^*(x)\right]. \tag{3.12}$$

Критерій $K_2(x)$ становить нормований на одиницю витрат ефект системи.

3. В окремому випадку для зведення двокритеріальної задачі до однокритеріальної, у функціонально-вартісному аналізі використовується принцип головного критерію, який розглянуто вище. У цьому випадку один

із двох розглянутих критеріїв $К_ф^*$ або $К_в^*$ перетворюється в додаткове обмеження й оптимізаційні задачі мають відповідно вигляд:

$$x_3^0 = \min_{\substack{x \in X^* \\ К_ф^* \geq К_ф^Д}} К_в^*(x), \tag{3.13}$$

$$x_4^0 = \max_{\substack{x \in X^* \\ К_в \geq К_в^Д}} К_ф^*(x), \tag{3.14}$$

де $К_К^Д$, $К_в^Д$ – припустимі рівні відповідних критеріїв відповідно.

Функціонально-вартісний аналіз особливо широко поширений під час дослідження економічних систем. Це зумовлено тим, що для багатьох технічних, економічних, соціальних процесів є характерною однакова якісна залежність ефекту ($К_ф^*$) від витрат ($К_в^*$), яка добре описується логістичною (іноді її називають S-подібною) кривою, котру наведено на рисунку 3.6. У разі вдалого вибору головних критеріїв функціонально-вартісний аналіз таких систем є наочним і має гарну змістовну інтерпретацію. Зокрема в економіці логістичні криві використовуються для опису процесів із насиченням.

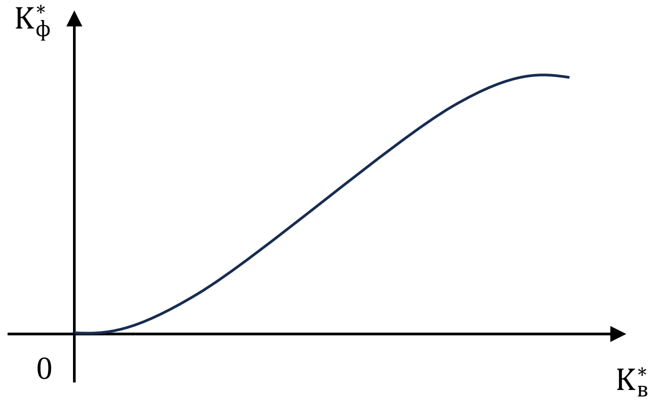

Рисунок 3.6 – Логістична (S-подібна) крива

Загалом логістична залежність широко використовується для аналізу життєвого циклу систем, тобто циклу з моменту зародження ідеї створення системи, її створення, інтенсивного розвитку, морального старіння (насичення функціональної ефективності) і заміни новою, більш прогресивною системою.

Принцип послідовної оптимізації (лексикографічного упорядкування)

Ідея цього методу полягає в трансформації багатокритеріальної оптимізаційної задачі в упорядковану послідовність однокритеріальних. Для цього всі частинні критерії упорядковуються в порядку убування важливості, тобто встановлюється лінійний порядок

$$k_1 \succ k_2 \succ . \ldots \succ k_n. \tag{3.15}$$

У цій послідовності вирішуються однокритеріальні оптимізаційні задачі за кожним частинним критерієм.

Відповідно до принципу послідовної оптимізації з рішень $u \in X$, $\nu \in X$ перше переважає, тобто $u \succ \nu$ за виконання умов.

$$k_j(u) = k_j(\nu), j = \overline{1, \imath - 1}, i = \overline{1, n};\ k_i(u) > k_i(\nu), i \neq j. \tag{3.16}$$

Отже, найкраще рішення визначається за такою схемою.

На першому кроці з вихідної множини припустимих рішень X виділяється підмножина x_1^0 рішень, які є еквівалентними (рівноцінними) за першим (найбільш важливим) критерієм. Для цього розв’язується однокритеріальна оптимізаційна задача вигляду:

$$x_1^0 = \arg\max_{x \in X} k_i(x). \tag{3.17}$$

Якщо множина x_1^0 містить більше одного рішення – переходимо до наступного етапу, тобто розв'язуємо задачу вибору еквівалентних рішень за другим за важливістю критерієм, але вже з множини x_1^0:

$$x_2^0 = \arg\max_{\substack{x \in X \\ x \in x_1^0}} k_2(x). \tag{3.18}$$

У загальному випадку

$$x_i^0 = \arg\max_{\substack{x \in X \\ x \in x_{i-1}^0}} k_i(x), = \overline{1, n-1}, \tag{3.19}$$

Оптимізація продовжується доти, поки на i-му кроці не дістанемо єдине рішення або не вичерпаються всі критерії. Якщо всі частинні критерії вичерпані, але єдине рішення не є отриманим, формуються додаткові критерії.

Отримане єдине рішення приймається як найкраще (оптимальне). Якщо необхідно ранжувати усю множину рішень $x \in X$, то отримане найкраще рішення виключається з X, і на множині рішень, що залишилися, повторюється описана вище процедура. У результаті визначаємо друге за якістю рішення і так далі, поки не будуть упорядковані всі рішення.

Якщо вже на перших кроках оптимізації знайдене єдине рішення, усі наступні частинні критерії втрачають сенс. У цьому разі може бути застосована схема поступки. Відповідно до схеми поступки ОПР призначає припустимий рівень зниження $\Delta k_i(x)$ частинного критерію, за яким отримано зазначене вище єдине рішення, порівняно з екстремальним значенням цього критерію:

$$x_{i+1}^0 = \arg\max_{x \in X}[k_{i+1}(x)]; \;\; i = \overline{1, n-1}, \tag{3.20}$$

якщо $k(x) > k_i(x_i^0) - \Delta k_i(x)$.

Реалізація схеми поступки для випадку двокритеріальної задачі оптимізації $k_1(x) \vdash k_2(x)$ показана на рисунку 3.7. Як видно з рисунка, призначення поступки за критерієм $\Delta k_1(x)$ істотно розширює область можливих рішень (показана сірим) за критерієм $k_2(x)$.

Вибір значення поступки є евристичною операцією, яка здійснюється ОПР. Залежність $k_i(x_i^0) = f(\Delta k_{i-1}(x))$ має неявний характер і здебільшого не є апріорно передбаченою. Тому для вибору значення поступки $\Delta k_i(x)$ часто використовуються людино-машинні процедури, коли ОПР призначає деякий ряд значень поступки і, аналізуючи результати оптимізації для кожного з них, приймає рішення про доцільний рівень поступки.

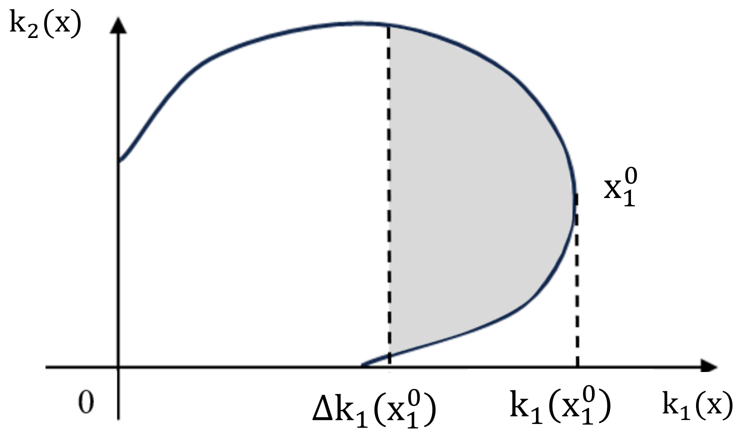

Рисунок 3.7 – Реалізація схеми поступки

Принцип послідовної оптимізації широко застосовується в ситуаціях, коли ОПР має тільки якісну інформацію про важливість частинних критеріїв.

Формування узагальненого скалярного критерію, що враховує всі різнорідні частинні критерії:

$$\overline{K} = [k_i(x)], i = \overline{1, n}. \tag{3.21}$$

Це найбільш загальний і універсальний підхід до розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації, відомий як *проблема багатофакторного оцінювання*. Центральною задачею цієї проблеми є синтез (*ідентифікація*) моделі формування узагальненої оцінки (3.21).

Контрольні запитання та завдання

1. Що таке локальні (частинні) критерії? Як вони формуються? Які вимоги повинні задовольняти?
2. Дайте визначення областей компромісів і згоди. Якій з цих областей належить оптимальне рішення? Чому?
3. Поясніть сутність перетворення лінійної згортки кількох частинних критеріїв.
4. Визначить принцип головного критерію.
5. Надайте характеристику функціонально-вартісного аналізу.
6. Якими є етапи реалізації принципу послідовної оптимізації (лексикографічного упорядкування).
7. Надайте характеристику схеми поступки.

4 НЕФОРМАЛЬНІ МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

4.1 Класифікація методів прийняття рішень

У теорії прийняття рішень використовуються методи двох типів – формальні (кількісні) і неформальні (якісні, змістовні) (рис. 4.1).

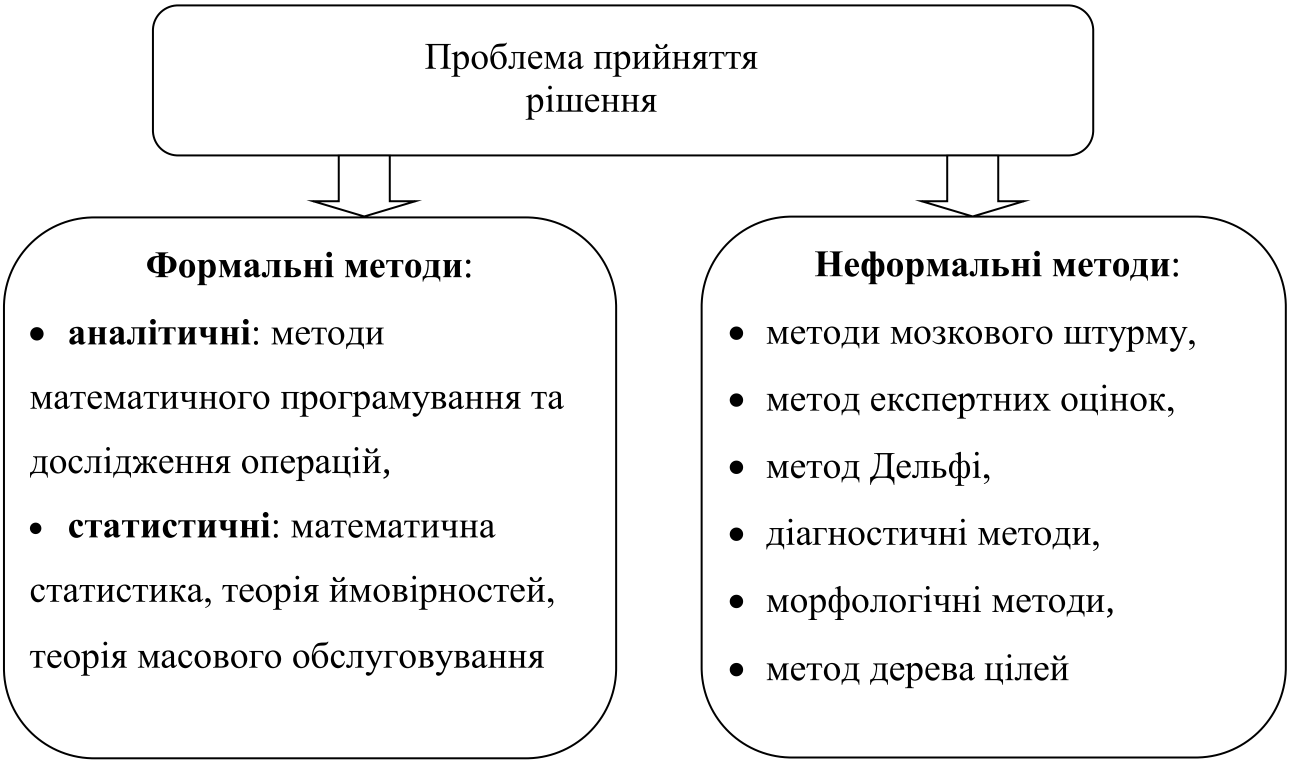

Рисунок 4.1 – Основні методи теорії прийняття рішень

Неформальні методи теорії прийняття рішень застосовуються, коли у ОПР немає достатніх відомостей про проблемну ситуацію, яка розглядається.

Це унеможливлює, принаймні на початковому етапі дослідження, формування математичної моделі об’єкта або процесу дослідження та вибір певного методу її (його) формалізованого подання.

Таким чином, методи теорії прийняття рішень розробляються для того, щоб організувати процес прийняття рішення в складних проблемних ситуаціях. Вони мають орієнтуватися на необхідність обґрунтування повноти аналізу, формування моделі прийняття рішення, адекватно відображати розглянутий процес або об'єкт.

За умови відсутності достатньої множини кількісних даних про об'єкт дослідження у теорії прийняття рішень має низку методик, що базуються на зборі та узагальненні досвіду фахівців-експертів, що накопичують цей досвід на конкретних прикладах.

Отже, основною особливістю методик теорії прийняття рішень є поєднання в них формальних методів і неформалізованого (експертного) знання. Останнє допомагає знайти нові шляхи вирішення проблеми, що, можливо, відсутні у формальній моделі, а, можливо, і сама математична модель є відсутньою.

Узагальнюючи наведене вище, необхідно зауважити, що арсенал методів прийняття рішень доволі великий, кожен із методів має свої переваги і недоліки, а також сферу застосування відносно як типу об'єкта дослідження, так і етапу дослідження об'єкта.

Зауваження. З арсеналом формальних методів прийняття рішень ми познайомилися у попередніх темах курсу, тому наразі розглянемо неформальні методи прийняття рішень.

4.2 Неформальні методи теорії прийняття рішень

Проведемо класифікацію неформальних методів теорії прийняття рішень.

Методи мозкового штурму. Методи цього типу переслідують основну мету – пошук нових ідей, їхнє широке обговорення і конструктивну критику. Основна гіпотеза полягає в припущенні, що серед великої кількості ідей є, щонайменше, кілька хороших. Під час проведення обговорень з досліджуваної проблеми застосовуються такі правила:

– сформулювати проблему в основних термінах, виділивши центральний єдиний пункт;

– не оголошувати неправдивою і не припиняти дослідження жодної ідеї;

– підтримувати ідею будь-якого роду, навіть якщо її доречність здається вам зараз сумнівною;

– надавати підтримку і заохочення, щоб звільнити учасників обговорення від скутості.

При всій простоті такі обговорення дають непогані результати.

Методи експертних оцінок. Основа цих методів – різні форми експертного опитування з подальшим оцінюванням і вибором найкращого варіанта. Можливість використання експертних оцінок, обґрунтування їхньої об’єктивності базується на тому, що невідома характеристика досліджуваного явища трактується як випадкова величина, відображенням закону розподілу якої є індивідуальна оцінка експерта щодо достовірності та значущості тієї чи іншої події.

Разом із тим передбачається, що справжнє значення досліджуваної характеристики знаходиться усередині діапазону оцінок, отриманих від групи експертів і що узагальнена колективна думка є достовірною. Найскладнішим моментом у цих методиках є встановлення вагових коефіцієнтів щодо висловлюваних експертами оцінок і приведення можливо суперечливих оцінок до деякої середньої величини.

Етапи проведення експертного оцінювання є такими:

1) формування мети експертизи;

2) розробка процедури експертизи;

3) формування групи експертів;

4) опитування, експертні вимірювання;

5) аналіз і обробка інформації.

Тип використовуваних процедур експертизи залежить від завдання оцінювання. До найбільш вживаних процедур експертного оцінювання відносяться:

– ранжування;
– парні порівняння;
– множинні порівняння;
– безпосередня оцінка;
– метод Черчмена – Акоффа;
– метод Терстоуна;
– метод фон Неймана – Моргенштерна.

Для оброблення матеріалів колективної експертної оцінки використовуються методи теорії рангової кореляції. Для кількісної оцінки ступеня узгодженості думок експертів застосовується коефіцієнт конкордації (узгодження), який дозволяє оцінити, наскільки узгоджені між собою ряди переваг, побудовані кожним експертом. Для наочності уявлення ступеня узгодженості думок двох будь-яких експертів слугує коефіцієнт парної рангової кореляції.

Доцільність застосування того чи іншого методу експертних оцінок багато в чому визначається характером інформації, що аналізується. Якщо виправдані лише якісні оцінки об’єктів за деякими якісними ознаками, то використовуються методи ранжирування, парного і множинного порівняння.

Якщо характер інформації, що аналізується, такий, що доцільно отримати чисельні оцінки об’єктів, то можна використовувати будь-який метод чисельної оцінки, починаючи від безпосередніх чисельних оцінок і закінчуючи тоншими методами Терстоуна і фон Неймана – Моргенштерна.

Метод Дельфі. Спочатку метод Дельфі був запропонований як одна з процедур під час проведення мозкової атаки з метою допомогти знизити вплив психологічних факторів і підвищити об’єктивність оцінок експертів.

Потім метод став використовуватися самостійно. Його основа – зворотний зв’язок, ознайомлення експертів з результатами попереднього туру і урахування цих результатів під час оцінювання значущості експертів.

Діагностичні методи становлять прийоми обстеження системи (об’єкта процесу), що досліджується, з метою удосконалення форм і методів їхнього функціонування.

Мета використання діагностичних методів – це встановлення і вивчення ознак, що характеризують стан систем для передбачення можливих відхилень і запобігання порушення нормального режиму функціонування системи.

Морфологічні методи. Основна ідея морфологічних методів – систематично знаходити всі можливі варіанти вирішення проблеми або реалізації системи шляхом комбінування виділених елементів або ознак. Цей підхід був розроблений і застосований швейцарським астрономом Ф. Цвіккі (метод Цвіккі).

Найвідомішими різновидами цього методу є:

– метод заперечення і конструювання (далі – МЗК), що полягає в тому, що на шляху конструктивного прогресу стоять догми і компромісні обмеження, які є сенс заперечувати, і отже, сформулювавши деякі положення, корисно замінити їх потім на протилежні і використовувати під час проведення аналізу;

– метод морфологічної скриньки (далі – ММС), який поширений найбільше. Ідея ММС полягає в тому, щоб визначити всі мислимі параметри, від яких може залежати вирішення проблеми, подати їх у вигляді матриць-рядків, а потім визначити в цій морфологічній матриці-скриньці всі можливі поєднання параметрів по одному з кожного рядка. Отримані у такий спосіб варіанти можуть знову підлягати оцінці та аналізу з метою вибору найкращого. Морфологічна скринька може бути не тільки двовимірною.

Метод дерева цілей. Термін «дерево цілей» має на увазі використання ієрархічної структури, отриманої шляхом поділу загальної мети на підцілі, а їх також на більш детальні складові.

Дерево цілей становить зв'язний граф, вершини якого інтерпретуються як цілі, а ребра або дуги як зв'язки між цілями.

Основною вимогою до дерева цілей є відсутність циклів. Дерево цілей становить головний інструмент ув'язки цілей вищого рівня з конкретними засобами їхнього досягнення на нижчому рівні через ряд проміжних ланок. Водночас у поняття цілей на різних рівнях вкладається різний за масштабом зміст.

Метод дерева цілей використовується для:

- структуризації і аналізу проблеми;
- структуризації системи;
- декомпозиції критеріїв оптимальності.

Контрольні запитання та завдання

1. Які типи методів використовуються в теорії прийняття рішень?

2. У яких ситуаціях застосовуються неформальні методи теорії прийняття рішень?

3. Наведіть класифікацію неформальних методів теорії прийняття рішень.

3. Поясніть сутність методів мозкового штурму.

4. Якими є основні особливості методів експертних оцінок?

5. Надайте характеристику етапам проведення експертного оцінювання.

6. Якими є найбільш вживані процедури експертного оцінювання?

7. Надайте характеристику морфологічним методам.

8. Для чого використовується метод дерева цілей?

5 ЕКСПЕРТНІ ПРОЦЕДУРИ. МЕТОД Дельфі

5.1 Методи колективних експертних оцінок

Методи колективних експертних оцінок ґрунтуються на принципах виявлення колективної думки експертів щодо об’єкта або процесу. Використовуючи групові експертні процедури, припускають, що під час вирішення проблем в умовах невизначеності думка групи експертів надійніше, ніж думка окремого експерта.

Група експертів може використовуватись для:

– колективної роботи «за круглим столом» (метод комісій, мозкова атака тощо);

– збирання вхідних даних у методі Дельфі тощо;

– проведення ділової гри;

– розробки сценарію дій щодо прийняття рішення;

– побудови дерева рішень і т. ін.

Можна виділити такі типи групових експертних процедур:

– відкрите обговорення поставлених питань з наступним відкритим або закритим голосуванням;

– вільне висловлення без обговорення і голосування;

– закрите обговорення з наступним закритим голосуванням або заповненням анкет експертного опитування.

Усе більше поширюються другий і третій типи групових експертних процедур.

Другий тип групових експертних оцінок одержав назву методу колективної генерації ідей або методу «мозкової атаки». Процес висування ідей протікає за визначеною темою лавиноподібно: висловлювана одним із членів групи ідея породжує творчу реакцію в інших.

Дослідження ефективності методу колективної генерації ідей показали, що групове мислення породжує на 70 % більше нових цінних ідей, ніж сума індивідуальних мислень.

До найважливіших недоліків методу колективної генерації ідей належить значний рівень інформаційного шуму, створюваного тривіальними ідеями, спонтанний і стихійний характер генерації ідей.

За використання результатів групових експертних процедур, що здійснюються за допомогою відкритого обговорення поставлених проблем, варто враховувати таке явище, як «зрушення ризику». Феномен зрушення ризику полягає в тому, що після проведення відкритої групової дискусії зростає рівень ризикованості прийнятих рішень. Існує низка гіпотез, що пояснюють це явище – дифузія відповідальності, ознайомлення, лідерство, зміна корисності, ризику як цінності та інші.

На сьогодні найрозповсюдженішим поясненням явища «зрушення ризику» є використання гіпотези ризику як цінності. Вона виходить з ідеї, відповідно до якої люди цінують ризик, і в груповій ситуації багато хто з них, зокрема і так звані «обережні» індивіди, прагнуть підвищити свій статус у групі. Тому в умовах групової дискусії вони змінюють свої оцінки у бік більшого ризику з метою створити собі імідж рішучих людей, здатних на ризик. Якщо в конкретного члена групи рівень переваги ризику виявляється значно нижче середнього для групи, то це може викликати в нього занепокоєння і побоювання з приводу того, як до цього поставиться група.

Третій тип групових експертних оцінок – закрите обговорення поставлених проблем – дозволяє в значній мірі усунути зазначені вище недоліки. Прикладом експертних процедур третього типу може слугувати метод Дельфі (походить від грецьких дельфійських оракулів).

5.2 Метод Дельфі

У методі Дельфі реалізовано спробу удосконалення групового підходу до вирішення завдань прогнозу або оцінки шляхом взаємної критики суб’єктивних поглядів, висловлюваних окремими фахівцям. Цей метод виключає безпосередні контакти між експертами та забезпечує збереження анонімності думок або аргументації в захист цих думок. Таким чином, у процесі експертного оцінювання учасники експертної групи не знають одне одного і не можуть взаємодіяти один з одним. Отже, експерт може поміняти своє судження, не оголошуючи про це, що дозволяє зменшити або виключити явище «зрушення ризику».

Метод Дельфі передбачає проведення експертного опитування в кілька турів. Під час кожного туру експерти повідомляють свою думку і дають оцінку досліджуваним явищам. Під час обробки інформації, отриманої від експертів, всі оцінки розташовують у порядку їхнього убування $N_{1;}$, ..., N_m, потім визначають медіану (M) і квартілі (Q_1, Q_2), що розбивають всі оцінки на чотири інтервали, як показано на рисунку 5.1.

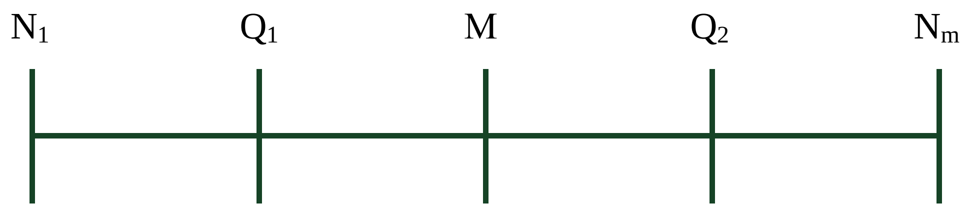

Рисунок 5.1 – Інтервали експертних оцінок

Експертів, чиї оцінки попадають у крайні інтервали (не лежать усередині діапазону $Q_1 – Q_2$), просять обґрунтувати свою думку з приводу цих оцінок. З їхнім обґрунтуванням і висновками знайомлять інших експертів анонімно, не указуючи від кого вони отримані.

Метод Дельфі передбачає проведення кількох турів і використання на кожному етапі результатів попереднього туру опитування.

Подібна процедура дозволяє фахівцям змінювати в разі потреби свою оцінку, приймаючи в розрахунок обставини, що вони могли випадково упустити або якими зневажили у попередніх турах опитування. Завдяки цьому результати другого і наступного турів опитування дають зазвичай менший розкид оцінок. Після одержання оцінок другого туру знову розраховуються медіана і квартілі. Цей процес продовжується доти, поки просування до зближення точок зору не стає незначним. Після цього фіксуються розбіжні погляди.

Загалом алгоритм реалізації методу Дельфі можна подати у вигляді блок-схеми (рис. 5.2).

Метод Дельфі найбільш доцільний під час кількісного оцінювання окремих ризиків і всього проєкту загалом: визначенні імовірності настання ризикових подій, оцінці величини втрат, імовірності потрапляння величини втрат у певний інтервал тощо.

Варто зазначити, що під час отримання оцінок експертним шляхом крім похибки, зумовленої нестачею інформації про досліджуваний об’єкт і недостатньою компетентністю експертів, можлива і похибка зовсім іншого роду, зумовлена зацікавленістю експертів у результатах експертизи, що обов’язково позначиться на їхній вірогідності. Наявність такого роду похибок може значно спотворювати оцінки.

Усуваються зазначені недоліки за допомогою правильної організації експертної процедури – від підбору експертів до обробки їхніх думок.

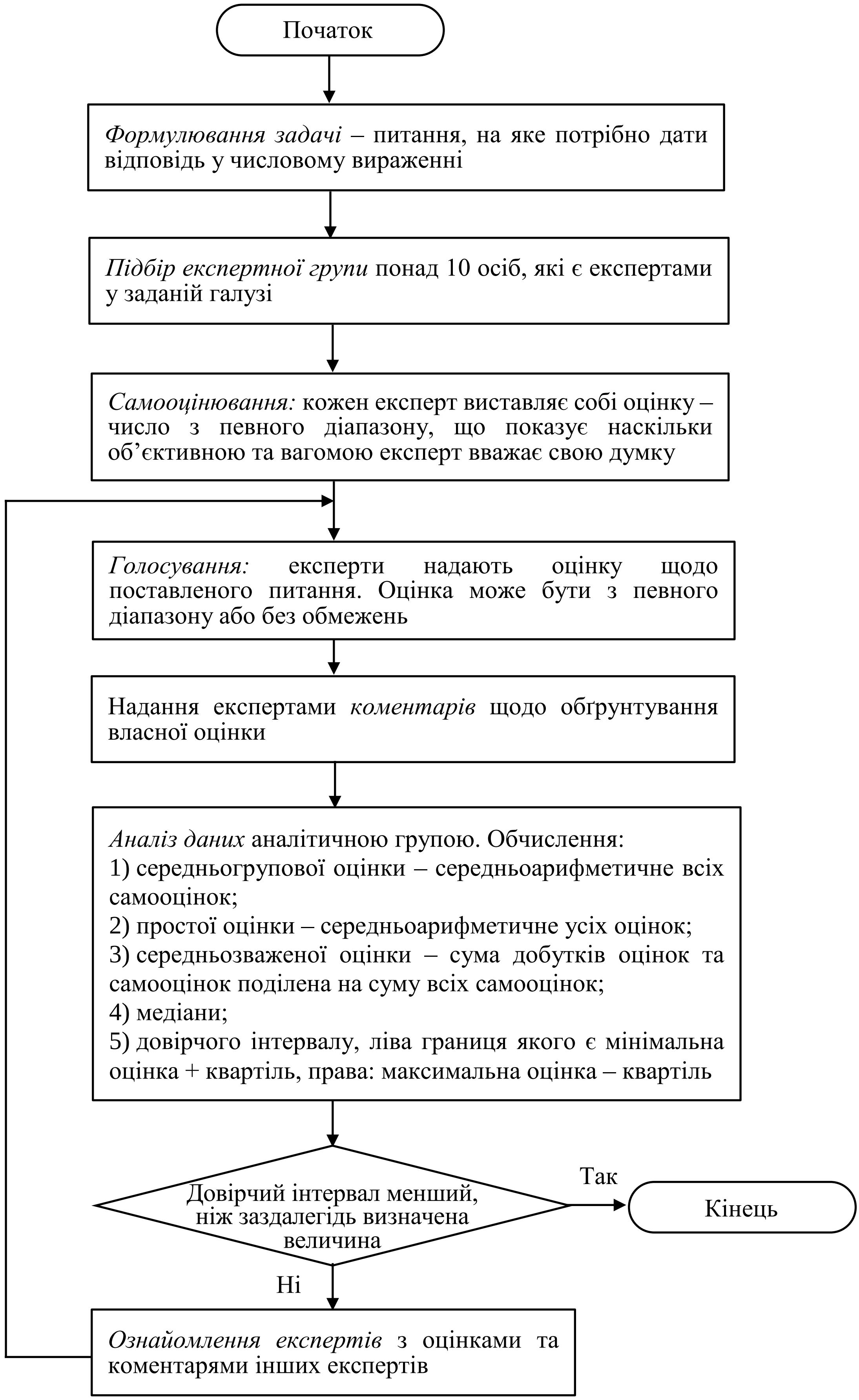

Рисунок 5.2 – Блок-схема алгоритму реалізації методу Дельфі

Контрольні запитання та завдання

1. Надайте характеристику методам колективних експертних оцінок.
2. Розкрийте сутність методу колективної генерації ідей.
3. Поясніть походження явища «зрушення ризику».
4. Проілюструйте алгоритм імплементації методу Дельфі.
5. Надайте визначення медіани і квартілів.
6. Проведіть ділову гру з реалізації методу Дельфі, обравши певну проблему та запросивши як експертів студентів вашої групи.

6 МЕТОД АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ – МЕТОД ПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ

Метод аналізу ієрархій (далі – МАІ) є яскравим представником групи методів експертних оцінок. Розроблений відомим американським математиком Томасом Сааті, з успіхом (перш за все – комерційним) цей метод використовується для розв’язання багатьох практичних задач на різних рівнях планування. МАІ широко розповсюдився в останні десятиріччя. Згідно з цим методом вибір пріоритетних рішень з певного набору рішень здійснюється за допомогою парних порівнянь.

Розглянемо сутність та структуру методу аналізу ієрархій.

МАІ є систематичною процедурою ієрархічного представлення елементів, що визначають сутність будь-якої проблеми. Існує кілька видів ієрархій:

- домінантні – схожі на перевернуте дерево;
- холархії – з оберненим зв’язком;
- модулярні – від простого до складного.

Ієрархія виникає, коли системи, що функціонують на одному рівні, є як частинами (підсистемами) системи більш високого рівня. МАІ є ієрархічною процедурою для ієрархічного подання елементів, що визначають сутність проблеми. Метод полягає в декомпозиції проблеми на більш прості складові подальшої обробки послідовності суджень ОПР по парних порівняннях. Разом із тим МАІ включає процес синтезу багатьох суджень, отримання пріоритетності критеріїв і знаходження альтернативних рішень.

Наприклад, нехай є 3 музичні твори, які потрібно упорядкувати за їхньою емоційною насиченістю. Попарно порівнюючи твори за ознакою емоційної насиченості, можна зробити висновок на кшталт такого: твір А більш емоційно впливовий, ніж за Б, а Б емоційніший за С. Аналогічно можна порівняти відносну важливість будь-яких кількісно невизначених факторів.

6.1 Шкала Сааті

Для подання результатів оцінок у кількісному виразі Т. Сааті вводить шкалу парних порівнянь (табл. 6.1).

Таблиця 6.1 – Шкала парних порівнянь Т. Сааті

Кількісна оцінка	Значення шкали попарних порівнянь
1	рівна важливість
2	
3	помірна перевага одного над іншим
4	
5	істотна перевага одного над іншим
6	
7	значна перевага одного над іншим
8	
9	дуже сильна перевага одного над іншим
	2, 4, 6, 8 – відповідні проміжні значення

Основною перевагою цього методу є те, що він є безрозмірним і не виникає проблем під час зведення до однакових одиниць виміру.

Правомірність цієї шкали доведена теоретично і практично під час порівняння з багатьма іншими відомими даними.

Емпіричні дослідження процесу визначення експертних оцінок показали, що під час проведення парних порівнянь переважно ставляться такі запитання: «Який з елементів є важливішим?», «Який найвірогідніший?», «Який з них найпривабливіший?».

6.2 Етапи методу аналізу ієрархій

Наведемо етапи методу аналізу ієрархій. Вони є такими:

1. Окреслити проблему і певну мету – перший рівень ієрархії.

2. Побудувати ієрархію, починаючи з вершини:

- перший рівень: мета;
- другий рівень: критерії;
- третій рівень: перелік альтернатив.

3. Побудувати множину матриць парних порівнянь для кожного з нижніх рівнів на підставі думки експертів.

4. Після проведення всіх парних порівнянь для кожної з матриць попарних порівнянь визначаються:

– вектор пріоритетів;

– коефіцієнт узгодженості матриці попарних порівнянь, що, між іншим, характеризує досвідченість експерта за допомогою визначення λ_{max} – максимального власного числа матриці та відповідного йому головного власного вектора.

5. Етапи 3, 4 провести для всіх рівнів і груп ієрархії.

6. Побудувати вектор глобальних пріоритетів.

7. Визначити результат.

Розглянемо детально етапи методу аналізу ієрархій на прикладі.

Приклад 6.1. Проблема вибору стільців для офісу.

Етап 1. *Окреслити проблему і певну мету – перший рівень ієрархії*

Вибір стільців для офісу проводиться та такими критеріями:

– К.1 зовнішній вигляд;

– К.2 колір оббивки;

– К.3 ергономічність;

– К.4 матеріал оббивки;

– К.5 практичність.

Такі критерії, як ціна, вага – не розглядаються, бо це кількісні критерії, які упорядковуються однозначно.

Нехай є пропозиція офісних стільців чотирьох типів: Классік, Iso, Універсал, Daupfin. Це альтернативні рішення (альтернативи), відповідно В1, В2, В3, В4.

Етап 2. Побудувати ієрархію, починаючи з вершини «Вибір стільця»

Ієрархія методу для цієї задачі подана на рисунку 6.1.

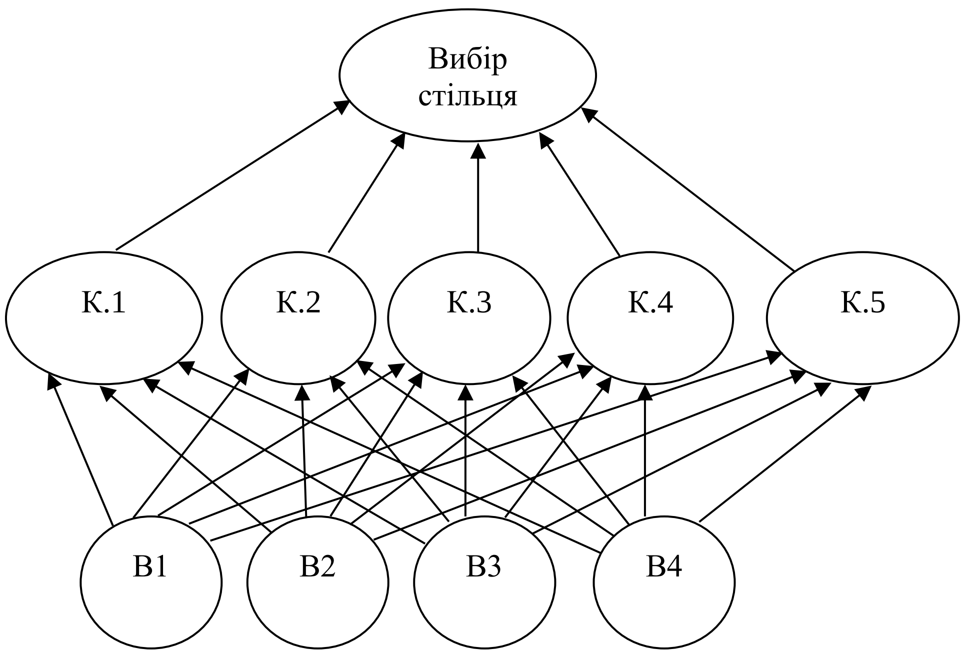

Рисунок 6.1 – Ієрархія методу для задачі

Етап 3.1. *Побудувати матрицю парних порівнянь критеріїв на основі думки експертів.*

Будуємо матрицю парних порівнянь для критеріїв і розраховуємо оцінки. Для цього будуємо матрицю розмірністю 5 × 5 (по числу критеріїв) і підпишемо рядки і стовпці найменуваннями порівнюваних критеріїв (табл. 6.2). Заповнюємо таблицю 6.2. Для цього попарно порівнюємо критерій з рядка з критерієм з стовпця по відношенню до мети – вибору типу стільця. Значення з шкали відносної важливості (табл. 6.1) вписуємо в осередки, утворені перетином відповідного рядка і стовпця.

Очевидно, на головній діагоналі матриці порівнянь завжди стоять одиниці. Необхідно заповнити тільки верхню трикутну частину матриці попарних порівнянь (виділено сірим).

Таблиця 6.2 – Матриця попарних порівнянь частинних критеріїв

Критерії	К.1	К.2	К.3	К.4	К.5
К.1 зовнішній вигляд (каркас)	1	1/5	1/5	1/6	1/6
К.2 колір оббивки	5	1	1/3	1/3	1/3
К.3 ергономічність	5	3	1	1/2	2
К.4 матеріал оббивки	6	3	2	1	2
К.5 практичність	6	3	1/2	1/2	1

Наприклад, значення 1/5 на перетині першого рядка і стовпця К.2 означає, що для ОПР критерій К.2 істотно переважає критерій К.1

Осередки нижньої трикутної матриці обчислюються як обернено-симетричні відносно головної діагоналі.

Етап 3.2. *Побудувати множину матриць парних порівнянь альтернатив із кожним із критеріїв на основі думки експертів*.

Цю множину матриць парних порівнянь складатимуть п’ять матриць (за кожним з критеріїв). Кожна з п’яти матриць порівнянь на цьому етапі має 4 рядки та 4 стовпчика – за числом альтернатив.

Наприклад, матриця парних порівнянь альтернатив за критерієм К.2 колір оббивки з урахуванням того, що Классік – сірий або колір «кави з молоком», Iso – чорний, Універсал – темно-коричневий або чорний, Daupfin – синій, має вигляд (табл. 6.3).

Таблиця 6.3 – Матриця попарних порівнянь за частинним критерієм К.2 колір оббивки

Альтернативи	Классік	Iso	Універсал	Daupfin
Классік	1	1/5	1/4	1/4
Iso	5	1	6	7
Універсал	1/4	1/6	1	3
Daupfin	1/4	1/7	1/3	1

Аналогічно створюються всі необхідні матриці попарних порівнянь.

Етап 4. Визначення оцінок векторів локальних пріоритетів за кожною з матриць порівнянь.

Оцінки вектора пріоритетів можна отримати у такий спосіб: знайти суму значень кожного рядка матриці порівнянь, що розглядається, та поділити кожну з таких сум на суму всіх значень матриці.

Наприклад, для матриці (табл. 6.2) маємо (табл. 6.4).

Таблиця 6.4 – Оцінка вектора пріоритетів

Критерії	К.1	К.2	К.3	К.4	К.5	Сума елементів рядка	Вектор пріоритетів
К.1 зовнішній вигляд (каркас)	1	1/5	1/5	1/6	1/6	1,73	0,038 319 82
К.2 колір оббивки	5	1	1/3	1/3	1/3	7,00	0,154 753 13
К.3 ергономічність	5	3	1	1/2	2	11,50	0,254 237 29
К.4 матеріал оббивки	6	3	2	1	2	14,00	0,309 506 26
К.5 практичність	6	3	1/2	1/2	1	11,00	0,243 183 49

З таблиці 6.3 випливає, що найбільш важливим є матеріал оббивки.

Отже, на етапі 3.1. методу побудовано матрицю парних порівнянь критеріїв на основі думки експертів та на етапі 4 визначено вектор

$$P = (P^1, P^2, P^3, P^4, P^5)$$

локальних пріоритетів першого рівня (табл. 6.5):

Таблиця 6.5 – Вектор локальних пріоритетів першого рівня

Критерії	Вектор пріоритетів критеріїв P
К.1 зовнішній вигляд (каркас)	P^1 = **0,038 319 82**
К.2 колір оббивки	P^2 = **0,154 753 13**
К.3 ергономічність	P^3 = **0,254 237 29**
К.4 матеріал оббивки	P^4 = **0,309 506 26**
К.5 практичність	P^5 = **0,243 183 49**

На етапі 3.2 методу побудовано 5 матриць парних порівнянь альтернатив вибору: Классік (В1), Iso (В2), Універсал (В3), Daupfin (В4) за критеріями вибору К.1–К.5 та на етапі 4 визначені вектори локальних пріоритетів за кожною з цих матриць порівнянь.

Позначимо ці вектори локальних пріоритетів як

$$P_i = (P_{1i}, P_{2i}, P_{3i}, P_{4i}),\ i = 1,2,\ldots,5.$$

Тим самим виконано етап 5 методу, що містить проведення етапів 3, 4 для всіх рівнів і груп ієрархії.

Результатом етапу 5 є зведена матриця локальних пріоритетів 2-го рівня (табл. 6.6).

Таблиця 6.6 – Зведена матриця локальних пріоритетів 2-го рівня

	К.1	К.2	К.3	К.4	К.5
B_1	P11	P12	P13	P14	P15
B_2	P21	P22	P23	P24	P25
B_3	P31	P32	P33	P34	P35
B_4	P41	P42	P43	P44	P45

На етапі 6. Визначається вектор глобальних пріоритетів

$$P_G = (P_{G1}, P_{G2}, P_{G3}, P_{G4}).$$

Для визначення вектора P_G зведену матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня помножують на транспонований вектор $P^T = (P^1, P^2, P^3, P^4, P^5)^T$ локальних пріоритетів першого рівня (рис. 6.2):

$$\begin{pmatrix} P_{G1} \\ P_{G2} \\ P_{G3} \\ P_{G4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{15} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & P_{35} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} & P_{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{pmatrix}$$

Рисунок 6.2 – Визначення вектора глобальних пріоритетів

У результаті отримаємо узагальнений (глобальний) вектор P_G пріоритетів альтернатив відносно основної мети вирішення проблеми прикладу 6.1 – вибору типу стільця.

Повернемось до етапу 4 та визначимо коефіцієнт узгодженості матриць попарних порівнянь, що характеризує досвідченість тобто «несуперечливість», «неангажованість» суджень (вербальної інформації) експертів, чиї судження та парні порівняння обробляються МАІ.

Підхід до вимірів за допомогою МАІ допускає певний рівень неузгодженості. Група експертів може прийняти рішення за допустимої неузгодженості для кожного члена групи. При цьому вони не будуть відчувати, що їхні «пріоритети» були порушені значною мірою.

У загальному випадку під узгодженістю розуміють: за наявності основного масиву необроблених даних всі інші дані можуть бути логічно отриманими з основного масиву.

Порядкова узгодженість означає:

Якщо альтернатива B_i переважніша за B_j, а B_j переважніша за B_k, то B_i переважніша за B_k.

Кардинальна узгодженість означає:

$$b_{ij} \times b_{jk} = b_{ik}$$

для значень (b_{ij}, b_{jk}, b_{ik}) матриці парних порівнянь.

Повна узгодженість включає як порядкову узгодженість, так і кардинальну узгодженість.

Як міру узгодженості розглядаються два показники:

- індекс узгодженості ($I_У$);
- відношення узгодженості ($B_У$).

Матриці парних порівнянь є обернено симетричними. Відомо, що узгодженість обернено симетричної матриці еквівалентна вимозі рівності її максимального власного значення λ_{max} і числа n об’єктів, що порівнюються:

$$\lambda_{max} = n.$$

Розглянемо метод отримання наближеної оцінки узгодженості квадратної матриці порівнянь розмірності n.

1. Помножимо матрицю порівнянь справа на отриману оцінку відповідного вектора локальних пріоритетів. Отримаємо новий вектор.

2. Розділимо першу компоненту цього нового вектора на першу компоненту оцінки вектора локальних пріоритетів, другу компоненту нового вектора на другу компоненту оцінки вектора локальних пріоритетів і так далі, визначимо ще один вектор.

3. Розділимо суму компонент цього вектора (вектора, що визначений в п. 2) на число компонент n вектора, знайдемо наближення до числа λ_{max}.

Чим ближче max λ до n (числа об’єктів або вимірності матриці порівнянь), тим більш узгоджений результат.

Індекс узгодженості ($I_У$) має вигляд:

$$I_У = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}.$$

Індекс узгодженості ($I_У$) необхідно порівняти з середнім відношенням (СВ) узгодженості для випадкових матриць (табл. 6.7).

Таблиця 6.7 – Середні відношення (СВ) узгодженості

Розмірність матриці	1	2	3	4	5	6	7	8	9
СВ	0	0	0,58	0,9	1,12	1,41	1,45	1,49	1,51

Отже, відношення узгодженості ($В_У$) визначається як

$$В_У = \frac{І_У}{СВ_У}.$$

Величина відношення узгодженості ($В_у$) не повинна бути більша за 10 % (у деяких випадках, коли немає потреби у високій точності, дозволяється не більше 20 %). Якщо $В_у$ виходить за ці межі, то учасникам варто дослідити задачу і перевірити свої судження.

МАІ успішно застосовується в багатьох галузях: наприклад, є досвід застосування його при розподіленні енергії у промисловості, висуванні кандидатів на вибори, проєктуванні цін на нафту, проєктуванні літаків, як інструмента для вимірювання якості (бажана якість порівнюється з фактичною) та при стратегічному плануванні майбутнього корпорацій, оскільки воно вимагає від спеціалістів урахування та узгодженості багатьох критеріїв.

Таким чином, МАІ – математично обґрунтований підхід для отримання шкали відношень під час вирішення складних проблем.

Важливо відзначити, що МАІ, як і інші аналітичні процедури, може бути неправильно використаний у тих випадках, коли обробляються твердження, засновані на упереджених поглядах експертів. Тому необхідна наявність незалежних експертів.

Контрольні запитання та завдання

1. Які існують види ієрархій?
2. Розкрийте сутність та структуру методу аналізу ієрархій.
3. Що таке шкала парних порівнянь Т. Сааті?

4. Надайте характеристику етапам методу аналізу ієрархій.

5. Як визначаються оцінки векторів локальних пріоритетів за матрицями порівнянь?

6. Як визначається вектор глобальних пріоритетів?

7. Що таке узгодженість думок експерта?

8. Надайте визначення відношенню узгодженості.

9. Надайте визначення індексу узгодженості.

7 ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

7.1 Поняття гри з природою

Під теорією гри розуміють теорію математичних моделей та методів з прийняття раціональних рішень в умовах конфлікту та невизначеності.

Конфліктні ситуації характеризуються наявністю декількох суб'єктів, що мають фактично різні цілі.

Відмінна ознака гри з природою полягає в тому, що в ній свідомо діє тільки один з учасників, що у більшості випадків називається гравцем 1.

Гравець 2 (природа або економічне середовище, тощо) свідомо проти гравця 1 не діє, а виступає як такий партнер по грі, що не має конкретної мети і випадково визначає чергові «ходи». Тому термін «природа» характеризує деяку об'єктивну дійсність, що не варто розуміти буквально, хоча цілком можуть зустрітися ситуації, у яких гравцем 2 дійсно може бути природа (наприклад, обставини, пов'язані з погодними умовами або природними стихійними силами).

Отже, ситуація прийняття рішень характеризується множиною

$$\{X; \Theta; \Phi\},$$

де X – множина рішень (стратегій) суб'єкта керування (гравця 1);

Θ – множина станів (стратегій) природи або економічного середовища (гравця 2);

$\Phi = \{\phi(x;\theta);\ x \in X;\ \theta \in \Theta\}$ – функціонал оцінювання, визначений на множині $X \times \Theta$, і такий, що приймає значення з простору R^1 (одновимірного простору), функція $\phi(x;\theta)$ – функція виграшу гравця 1 (суб'єкта керування).

У дискретному випадку ($X=\{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_m\}$; $\Theta=\{\theta_1;\ \theta_2;\ldots;\ \theta_n\}$) ситуація прийняття рішень характеризується матрицею виграшів:

$$\Phi\{\phi_{kj};\ k=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}\theta_1 & \dots & \theta_j & \dots & \theta_n\end{array} \\ \begin{pmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1j} & \dots & \phi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{k1} & \dots & \phi_{kj} & \dots & \phi_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{m1} & \dots & \phi_{mj} & \dots & \phi_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ \dots \\ x_k \\ \dots \\ x_m \end{array}, \qquad (7.1)$$

елемент ϕ_{kj} якої – це кількісна оцінка рішення $x_k \in X$ за умови, що середовище знаходиться у стані $\theta_j \in \Theta$.

Отже, рішенню x_k відповідає вектор оцінювання $\Phi_k = \{\phi_{k1}, \phi_{k2}, \dots, \phi_{kn}\}$, $k = \overline{1,m}$.

$$\begin{aligned}\Phi &= \{\phi(x_k;\theta) = \phi_k(\theta);\ x_k \in X;\ k=\overline{1,m};\ \theta \in \Theta\} = \\ &= \{\phi_1(\theta);\ \dots;\phi_k(\theta);\ \dots;\phi_m(\theta)\}\end{aligned} \qquad (7.2)$$

Під *критерієм прийняття рішення* розуміють алгоритм, який визначає оптимальне рішення (розв'язок) $X_{k_0} \in X$ або множину таких розв'язків $\overline{X} \subset X$, які називаються еквівалентними відносно цього критерію.

Визначимо функцію ризику гравця 1:

1) для Φ^+, коли зафіксувати стан економічного середовища $\theta_j \in$ та покласти $l_j^+ = \max_{x_k \in X} \phi_{kj}^+$, функція ризику визначається у вигляді:

$$r_{kj}^- = r^-(x_k, q_j) = l_j^+ - \phi_{kj}^+; k=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}.; \qquad (7.3)$$

2) для Φ^- за фіксованого $\theta_j \in \Theta$, поклавши $l_j^- = \min_{x_k \in X} \phi_{kj}^-$, функцію ризику визначають як

$$r_{kj}^- = r^-(x_k, q_j) = \phi_{kj}^- - l_j^-; k=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}. \qquad (7.4)$$

Матриця ризику $R^- = \{r_{kj}^-\}$ дозволяє оцінити кількісно відмінні рішення та встановити, наскільки вигідно реалізуються в них існуючі можливості досягнення успіху за наявності ризику. Тому її можна назвати також *матрицею невикористаних можливостей.*

Методи прийняття рішень в іграх із природою залежать від характеру ОПР. Розгляд методів супроводжуватимемо прикладами застосування, використовуючи таку матрицю виграшів:

$$\Phi = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} . \qquad (7.5)$$

Відповідно до введеного визначення r_{kj} одержуємо матрицю ризиків:

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} . \qquad (7.6)$$

7.2 Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності

У випадках, коли невизначеність пов’язана з повною відсутністю інформації про ймовірності станів середовища (природи), для визначення найкращих рішень використовуються такі критерії: максимаксу, Вальда, Севіджа, Гурвиця та Лапласа. Застосування кожного з перерахованих критеріїв проілюструємо на прикладі матриці виграшів (7.5) чи зв’язаної з нею матриці ризиків (7.6).

Критерій максимаксу. З його допомогою визначається стратегія, що максимізує максимальні виграші для кожного стану природи. Це критерій крайнього оптимізму. Найкращим визнається рішення, за якого досягається максимальний виграш:

$$M = \max_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le j \le n}} \phi_{kj}.$$

Неважко побачити, що для матриці (7.5) найкращим рішенням буде x_1, за якого досягається максимальний виграш – 9.

Варто зазначити, що ситуації, які вимагають застосування такого критерію, в економіці, загалом, часті, і використовують цей критерій не тільки безоглядні оптимісти, але й гравці, які потрапили в безвихідне становище, й змушені керуватися принципом «або пан, або пропав».

Максимінний критерій Вальда. З позицій цього критерію природа розглядається як агресивно налаштований і свідомо діючий супротивник. Вибирається рішення, для якого досягається значення, що обчислюється за формулою:

$$W = \max_{1 \le k \le m} \min_{1 \le j \le n} \phi_{kj}.$$

Для матриці виграшів (7.5) неважко розрахувати:

– для першої стратегії (k = 1) $\min\limits_{1 \le j \le 4} \phi_{kj} = 1$;

– для другої стратегії (k = 2) $\min\limits_{1 \le j \le 4} \phi_{kj} = 3$;

– для третьої стратегії (k = 3) $\min\limits_{1 \le j \le 4} \phi_{kj} = 2$.

Тоді, W = 3, що відповідає другій стратегії x_2 гравця 1.

Відповідно до критерію Вальда, з усіх найбільш невдалих результатів вибирається кращий (W = 3). Це позиція крайнього песимізму, розрахована на гірший випадок. Така стратегія прийнятна, наприклад, коли гравець не стільки зацікавлений у великому виграші, скільки хоче себе застрахувати від несподіваних програшів. Вибір такої стратегії визначається ставленням гравця до ризику.

Критерій мінімаксного ризику Севіджа. Вибір стратегії аналогічний вибору стратегії за принципом Вальда з тією відмінністю, що гравець керується не матрицею виграшів (7.5), а матрицею ризиків (7.6):

$$S = \min_{1 \le k \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{kj}.$$

Для матриці R (7.6) неважко розрахувати:

– для першої стратегії (k = 1) $\max\limits_{1 \le j \le 4} r_{kj} = 4$;

– для другої стратегії (k = 2) $\max\limits_{1 \le j \le 4} r_{kj} = 6$;

– для третьої стратегії (k = 3) $\max\limits_{1 \le j \le 4} r_{kj} = 7$.

Мінімально можливий із найбільших ризиків, що дорівнює 4, досягається у разі використання першої стратегії x_1.

Критерій песимізму-оптимізму Гурвиця. Цей критерій під час вибору рішення рекомендує керуватися деяким середнім результатом, що характеризує стан між крайнім песимізмом і невтримним оптимізмом. Відповідно до цього критерію стратегія в матриці виграшів вибирається згідно зі значенням:

$$H\Phi = \max_{1 \le k \le m} \left\{ \alpha \min_{1 \le j \le n} \phi_{kj} + (1-\alpha) \max_{1 \le j \le n} \phi_{kj} \right\},$$

де $\propto$ – коефіцієнт песимізму ($0 \le \propto \le 1$).

За $\propto = 0$ критерій Гурвиця збігається з максимаксним критерієм, а за $\propto = 1$ – із критерієм Вальда.

Покажемо процедуру застосування цього критерію для матриці виграшів (7.5) за $\propto = 0{,}5$:

– для першої стратегії (k = 1): $0{,}5\left(\min\limits_{1\le j\le 4}\phi_{kj} + \max\limits_{1\le j\le 4}\phi_{kj}\right) = 0{,}5(1+9) = 5$;

– для другої стратегії (k = 2): $0{,}5\left(\min\limits_{1\le j\le 4}\phi_{kj} + \max\limits_{1\le j\le 4}\phi_{kj}\right) = 0{,}5(3+8) = 5{,}5$;

– для третьої стратегії (k = 3): $0{,}5\left(\min\limits_{1\le j\le 4}\phi_{kj} + \max\limits_{1\le j\le 4}\phi_{kj}\right) = 0{,}5(2+6) = 4$.

Тоді $H_\Phi = \max\limits_{1\le k\le 3}\left\{0{,}5\left(\min\limits_{1\le j\le 4}\phi_{kj} + \max\limits_{1\le j\le 4}\phi_{kj}\right)\right\} = 5{,}5$, тобто оптимальною є друга стратегія x_2.

Стосовно матриці ризиків R критерій песимізму-оптимізму Гурвиця має вигляд:

$$H_R = \min_{1\le k\le m}\left\{\alpha \max_{1\le j\le n} r_{kj} + (1-\alpha)\min_{1\le j\le n} r_{kj}\right\}.$$

За $\propto = 0$ вибір стратегії гравця 1 здійснюється за умовою найменшого з усіх можливих ризиків $\min\limits_{k,j} r_{kj}$; при $\propto = 1$ – за критерієм мінімаксного ризику Севіджа.

Приклад. На завершення наведемо результати застосування розглянутих вище критеріїв на прикладі такої матриці виграшів:

$$\Phi = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 30 & 15 & 15 \\ 75 & 20 & 35 & 20 \\ 25 & 80 & 25 & 25 \\ 85 & 5 & 45 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}.$$

Для гравця 1 кращими є стратегії:

– за критерієм Вальда – x_3;

– за критерієм Севіджа – x_2 та x_3

– за критерієм Гурвиця (за $\alpha = 0{,}6$) – x_3;

– за критерієм максимаксу – x_4.

Оскільки стратегія x_3 фігурує як оптимальна за трьома критеріями вибору з чотирьох, ступінь її надійності можна визнати достатньо високим, для того щоб рекомендувати цю стратегію до практичного застосування.

Контрольні запитання та завдання

1. Надайте поняття гри з природою.
2. Опишіть ситуацію прийняття рішень в умовах невизначеності.
3. Визначте функцію ризику гравця.
4. Проведіть порівняльний аналіз критеріїв прийняття рішень в умовах повної невизначеності.
5. Введіть критерій песимізму-оптимізму Гурвиця стосовно матриці ризиків R.

8 ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ

Введемо поняття ризику, розглянемо його основні елементи й ознаки.

Визначення 8.1. Ризик – це ймовірність виникнення збитків або недоодержання доходів порівняно з прогнозованим варіантом.

У зазначених визначеннях виділяється така характерна риса ризику, як небезпека, можливість невдачі.

Якщо існує можливість кількісно та якісно визначити ступінь ймовірності появи того або іншого варіанта, то це й буде ситуація ризику.

Ризиковану ситуацію супроводжують три умови:

– відсутність детермінованості;

– необхідність вибору альтернативи (разом із тим варто мати на увазі, що відмова від вибору також є різновидом вибору);

– можливість оцінити імовірність здійснення обираних альтернатив.

Зазначимо, що ситуація ризику якісно відрізняється від ситуації невизначеності. Ситуація невизначеності характеризується тим, що ймовірність настання результатів рішень або подій у принципі не встановлювана.

Прагнучи «зняти» ризиковану ситуацію, суб’єкт робить вибір і реалізує його.

Цей процес знаходить своє вираження в понятті «ризик». Останній існує як на стадії *вибору рішення* (плану дій), так і на стадії його *реалізації.*

Важливим елементом ризику є наявність імовірності відхилення від обраної мети. Водночас можливі відхилення як негативного, так і позитивного характеру.

Таким чином, основними джерелами ризику є:

1. Спонтанність природних процесів і явищ, стихійні лиха.
2. Випадковість.
3. Наявність протиборчих тенденцій, зіткнення суперечливих інтересів.

4. Неповнота, недостатність інформації про об'єкт, процес, явище, стосовно якого приймається рішення, обмеженість можливостей людини у зборі й переробці інформації, постійна зміна цієї інформації.

8.1 Система кількісних оцінок ступеня ризику

Нагадаємо основні положення та методи теорії ймовірності.

Випадкова величина – змінна, що в результаті дослідів залежно від випадку набуває одне з можливої множини своїх значень (яке саме, заздалегідь не відомо).

Приклади: кількість опадів у наступному році, точність влучення в мішень, результат випадання значення на кубику тощо.

Дискретна випадкова величина – випадкова величина, можливі значення якої є окремі ізольовані числа (такі, що між двома сусідніми можливими значеннями немає інших можливих значень), які ця величина приймає з визначеними ймовірностями.

Іншими словами, усі можливі значення випадкової величини можна перенумерувати. Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченним чи нескінченним.

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

Для дискретної випадкової величини закон розподілу може бути заданий у вигляді таблиці, аналітично (у вигляді формули) і графічно.

Математичне сподівання (перший початковий момент) дискретної випадкової величини M(X) – сума добутків усіх її значень на відповідні їм імовірності.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \qquad (8.1)$$

Дисперсія P(X) дискретної випадкової величини X (другий центральний момент) – математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 . \qquad (8.2)$$

Середньоквадратичне відхилення (стандартне відхилення або стандарт) випадкової величини *X* – арифметичне значення кореня квадратного з її дисперсії:

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} . \qquad (8.3)$$

Функція розподілу випадкової величини *X* – функція *F(X)*, що виражає для кожного *x* імовірність того, що випадкова величина *X* набуде значення, менше *x*:

$$F(X) = P(X < x). \qquad (8.4)$$

Функцію *F(X)* іноді називають *інтегральним законом розподілу* або *інтегральною функцією розподілу*.

Розглянемо загальні властивості функції розподілу.

1. Функція розподілу випадкової величини є невід'ємна функція, значення якої належать відрізку [0,1]:

$$0 \le F(x) \le 1. \qquad (8.5)$$

2. Функція розподілу є не спадна функція по всій числовій осі.

3. На мінус нескінченності функція розподілу дорівнює 0, на плюс нескінченності – 1.

4. Імовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $[x_1, x_2)$ дорівнює збільшенню її функції розподілу F(x) на цьому інтервалі, тобто

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_1) - F(x_2). \tag{8.6}$$

Приклад 8.1. Знайти імовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [1, 3)

Розв'язання. За формулою (8.6):

$$P(1 \le X < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Випадкова величина X називається неперервною, якщо її функція розподілу неперервна у будь-якій точці і диференційована всюди, крім, можливо, окремих точок.

Щільністю ймовірності (щільністю розподілу або просто щільністю) $\varphi(x)$ неперервної випадкової величини *X* називають, похідну її функції розподілу:

$$\varphi(x) = F'(x). \tag{8.7}$$

8.2 Оптимальні стратегії прийняття рішень в умовах ризику

Методи прийняття рішень в умовах ризику розробляються та обґрунтовуються у межах так званої теорії статистичних рішень. Водночас у випадку «доброякісної», або стохастичної, невизначеності, коли станам природи поставлені у відповідність ймовірності p_j, задані експертно або обчислені.

Рішення зазвичай приймається на підставі критерію максимуму очікуваного середнього виграшу або мінімуму очікуваного середнього ризику (матриці виграшів або матриці ризиків відповідно).

Нагадаємо вигляд (формула 7.1) матриці виграшів (платіжної матриці):

$$\Phi\left\{\phi_{kj};\ k=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right\}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}\theta_1 & \dots & \theta_j & \dots & \theta_n\end{array} \\ \begin{pmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1j} & \dots & \phi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{k1} & \dots & \phi_{kj} & \dots & \phi_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{m1} & \dots & \phi_{mj} & \dots & \phi_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ \dots \\ x_k \\ \dots \\ x_m \end{array}, \quad (8.8)$$

А також вигляд матриці ризиків з підрозділу 7.2:

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}. \quad (8.9)$$

Якщо для деякої гри з природою, що задається платіжною матрицею $\Phi=\{\varphi_{kj}\}$, стратегіям природи θ_j відповідають імовірності p_j, то кращою стратегією гравця 1 буде та, що забезпечує йому максимальний середній виграш, тобто:

$$\max_{1\le k\le m} \sum_{j=1}^{n} p_j \phi_{kj}. \quad (8.10)$$

Стосовно матриці ризиків (матриці втрачених вигод) кращою буде та стратегія гравця, що забезпечує йому мінімальний середній ризик:

$$\min_{1\le k\le m} \sum_{j=1}^{n} p_j r_{kj}. \quad (8.11)$$

На практиці доцільно віддавати перевагу матриці виграшів (8.8) або матриці ризиків (8.9) залежно від того, яка з них визначається більшою вірогідністю. Це особливо важливо враховувати під час експертних оцінок елементів цих матриць.

Контрольні запитання та завдання

1. Надайте поняття ризику, розгляньте основні елементи й ознаки ризику.
2. Які умови супроводжують ризиковану ситуацію?
3. Які існують основні джерела ризику?
4. Наведіть систему кількісних оцінок ступеня ризику.
5. Надайте характеристику теорії статистичних рішень.
6. Визначить критерій максимуму очікуваного середнього виграшу.
7. Визначить критерій мінімуму очікуваного середнього ризику.
8. Визначить перший початковий момент та другий центральний момент для неперервної випадкової множини.

9 ФУНКЦІЯ КОРИСНОСТІ НЕЙМАНА – МОРГЕНШТЕРНА

9.1 Основні визначення та аксіоми

Обґрунтування вибору рішення раніше виконувалося з позицій об'єктивіста. Якщо ж ОПР – суб'єктивіст, то він буде керуватися індивідуально визначеним *безумовним грошовим еквівалентом* – БГЕ.

Безумовним грошовим еквівалентом (далі – БГЕ) гри називається максимальна сума грошей, яку ОПР готовий заплатити за участь у грі (лотереї), або, що те ж саме, та мінімальна сума грошей, за якої він готовий відмовитися від гри. Кожен індивід має свій БГЕ. Індивіда, для якого БГЕ збігається з очікуваною грошовою оцінкою (далі – ОГО) гри, тобто із середнім виграшем у грі (лотереї), умовно називають об'єктивістом; індивіда, для якого БГЕ не дорівнює ОГО – суб'єктивістом.

Пояснимо зміст цієї величини. Розглянемо ситуацію, коли гравець з імовірністю 0,8 виграє 40 грн і з імовірністю 0,2 програє 20 грн. Спробуємо з'ясувати, за яку суму ОПР поступиться своїм правом брати участь у грі. Як відзначалося, об'єктивіст користується правилом: БГЕ = ОГО = $0{,}8 \times 40 + {}$ $+0{,}2(-20) = 28$ грн. Тому своє право на гру він віддасть не менш ніж за 28 грн. Суб'єктивіст зазвичай готовий поступитися своїм правом на гру за меншу суму, оскільки для нього БГЕ < ОГО. Причинами такої поведінки можуть бути:

– фінансовий стан гравця (можливо, він на грані банкрутства і йому необхідні гроші);

– ставлення гравця до ризику взагалі (несхильність до ризику);

– настрій або стан здоров'я гравця;

– безліч інших причин, навіть таких, що безпосередньо не стосуються бізнесу.

Величина БГЕ може змінюватися згодом залежно від обумовлених зазначеними причинами обставин. Наприклад, у випадку катастрофічної нестачі фінансових засобів (готівки) право на гру можна віддати і за більш низький еквівалент.

Дослідимо реалістичність критерію вибору рішення, заснованого на розрахунку ОГО. Розглянемо дві альтернативи:

1 Виграш 1 000 000 грн з імовірністю 1.

2 Гра (лотерея): виграш 2 100 000 грн з імовірністю 0,5 і програш 50 000 грн з імовірністю 0,5. У цьому випадку: ОГО = 0,5 × 2100 000 - - 0,5 × 500 00 = 1 025 000 грн.

Щодо одержуваного середнього виграшу зазначені альтернативи практично еквівалентні, і, якщо гравець байдужий до ризику, він вибере другу альтернативу. Якщо він до ризику не байдужий, а переважна більшість саме такими й є, то вибір буде залежати переважно від фінансового стану гравця. Гравці, що мають скромний грошовий дохід, волітимуть не ризикувати і виберуть гарантований виграш. Для ОПР, що володіє достатньо великим капіталом, програш у 50 00 грн невеликий, і вона вирішить ризикнути.

Методологія раціонального прийняття рішень в умовах невизначеності, що заснована на функції корисності індивіда, спирається на п'ять аксіом. Припустімо, що конструюється лотерея (гра), у якій індивід з імовірністю p одержує грошову суму x та з імовірністю (1-p) – суму z. Цю ситуацію будемо позначити L(x, p, z).

Аксіома 9.1 Порівнянності (повноти). Для всієї множини S невизначених альтернатив (можливих наслідків) індивід може сказати, що або результат x вагоміший за результат y ($x \succcurlyeq y$), або $y \succcurlyeq x$, або індивід байдужий щодо вибору між x і y (x~y). Запис $x \succcurlyeq y$ означає, що результат x вагоміший за результат y або індивід байдужий стосовно вибору між x і y.

Аксіома 9.2 Транзитивності (заможності). Якщо $x \succcurlyeq y$ і $y \succcurlyeq z$, то $x \succcurlyeq z$. Якщо x~y і y~z, то x~z.

Аксіома 9.3 Сильної незалежності. Припустімо, що ми конструюємо лотерею, у якій індивід з імовірністю p одержує грошову суму x та з імовірністю (1-p) – суму z, тобто L(x, p, z). Сильна незалежність означає, що якщо індивід байдужий щодо вибору між x і y (x~y), то він також буде байдужий стосовно вибору між лотереєю L(x, p, z) і лотереєю L(y, p, z), тобто з x~y випливає: L(x, p, z)~ L(y, p, z).

Аксіома 9.4 Вимірності. Якщо x $\succcurlyeq$ y~z або x~y $\succcurlyeq$ z, то існує єдина імовірність p, така що y~ L(x, p, z).

Пояснимо зміст цієї аксіоми. Нехай, наприклад, маємо три результати: x = 1000; y = 0; z – означає смерть гравця. Виходячи зі здорового глузду, наслідок z не можна порівняти з жодним виграшем, і відповідного до цього результату значення ймовірності p існувати не може. Однак у житті трапляються ситуації, коли певний програш рівнозначний смерті. Тоді твердження в p ~ L(x, p, z) можна вважати справедливим для деякого значення $0 \leq p \leq 1$.

Аксіома 9.5 Ранжирування. Якщо альтернативи y та u знаходяться за перевагою між альтернативами x та z і можна побудувати лотереї, такі, що індивід байдужий щодо вибору між y і L(x, p_1, z), а також до вибору між u і L(x, p_2, z), то за $p_1 > p_2$ буде виконуватися співвідношення: y $\succcurlyeq$ u.

Пояснимо зміст цієї аксіоми.

Нехай існують такі альтернативи: x = 1 000; y = 500; u = 200; z = -10. Нехай еквівалентні дві пари ситуацій, одна з яких неігрова, а інша ігрова:

– гарантовано одержати 500 або лотерея: з імовірністю p_1 виграти 1 000 і з імовірністю (1 - p_1) програти 10, тобто 500 ~ L(1 000, p_1, -10);

– гарантовано одержати 200 або лотерея: з імовірністю p_2 виграти 1 000 і з імовірністю (1 - p_2) програти 10, тобто 200 ~ L(1 000, p_2, -10).

Очевидно, що за зазначених умов $p_1 > p_2$. Якщо $p_1 = p_2$, то y ~ u.

Твердження аксіоми 9.5 цілком відповідає здоровому глуздові: чим більша ймовірність великого виграшу, тим більше гра «коштує», тобто тим більша плата потрібна за здобуття права брати участь у цій грі.

Якщо прийняти наведені аксіоми і припустити, що люди віддають перевагу більшій кількості деякого блага порівняно з меншою кількістю, то все це в сукупності визначає раціональну поведінку ОПР.

За умови названих припущень американськими вченими Дж. фон Нейманом і О. Моргенштерном було показано, що ОПР у разі ухвалення рішення буде прагнути до максимізації очікуваної корисності.

Іншими словами, з усіх можливих рішень він вибирає те, що забезпечує найбільшу очікувану корисність.

9.2 Оцінка значень корисності припустимих результатів

Сформулюємо визначення корисності за Нейманом – Моргенштерном.

Визначення 9.1. Корисність – це деяке число, приписуване особою, що приймає рішення, кожному можливому результату. Функція корисності Неймана – Моргенштерна для ОПР показує корисність, яку вона приписує кожному можливому результату. У кожної ОПР своя функція корисності, що показує її перевагу тих чи інших наслідків залежно від її відношення до ризику.

Визначення 9.2. Очікувана корисність події дорівнює сумі добутків ймовірностей результатів на значення корисностей цих результатів.

Детермінований еквівалент лотереї L – це гарантована сума $\hat{\boldsymbol{x}}$, одержання якої є еквівалентним участі в лотереї $\hat{\boldsymbol{x}}$~L: u($\hat{\boldsymbol{x}}$)=M(u(x)).

Премія за ризик π(x) – це сума, що ОПР готова виділити із середнього виграшу (ця сума менше математичного чекання виграшу) за те, щоб уникнути ризику, зв'язаного з лотереєю. Для зростаючої функції корисності величина премії за ризик π(x) дорівнює різниці між очікуваним виграшем і детермінованим еквівалентом: $\boldsymbol{\pi(x)}$=M(x)- $\hat{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}$.

Для ухвалення рішення у випадку небайдужості ОПР до ризику необхідно вміти оцінювати значення корисності кожного з припустимих результатів.

Дж. фон Нейман і О. Моргенштерн запропонували процедуру побудови індивідуальної функції корисності, що полягає в такому: ОПР відповідає на ряд питань, виявляючи водночас свої індивідуальні переваги, що враховують її ставлення до ризику.

Значення корисностей можуть бути знайдені за два кроки.

Крок 1. Призначаються довільні значення корисностей виграшам для гіршого і кращого наслідків, причому першій величині (гірший результат) ставиться у відповідність менше число.

Крок 2. Гравцеві пропонується на вибір: одержати деяку гарантовану грошову суму v, що знаходиться між кращим і гіршим значеннями S і s, або взяти участь у грі, тобто одержати з імовірністю p найбільшу грошову суму S і з імовірністю (1 -p) – найменшу суму s.

Разом із тим ймовірність варто змінювати (знижувати або підвищувати) доти, поки ОПР стане байдужим щодо вибору між одержанням гарантованої суми і грою.

Нехай таке значення ймовірності дорівнює p_0. Тоді корисність гарантованої суми визначається як середньозважене за ймовірністю значення (математичне сподівання) корисностей найменшої і найбільшої сум, тобто

$$U(v) = p_0U(S) + (1-p_0)U(s). \tag{9.1}$$

У загальному випадку графік функції корисності може бути трьох типів (рис. 9.3, 9.4, 9.5):

ОПР не схильний до ризику тоді і тільки тоді, коли її функція корисності строго увігнута, у якої кожна дуга кривої лежить вище від своєї хорди:

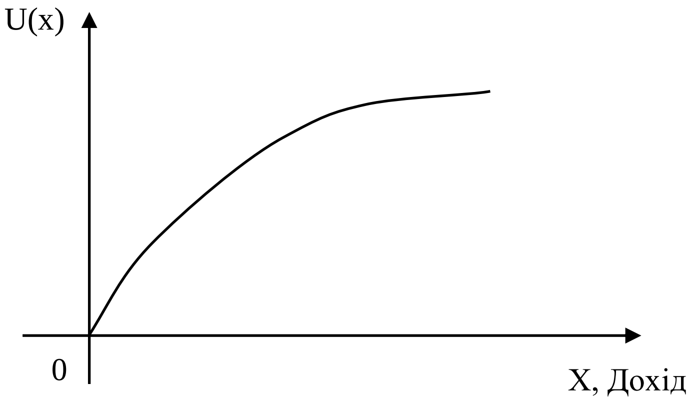

Рисунок 9.1 – Функція корисності для ОПР, який є не схильним до ризику

ОПР схильний до ризику тоді і тільки тоді, коли функція корисності строго опукла вниз, у якої кожна дуга кривої лежить нижче від своєї хорди:

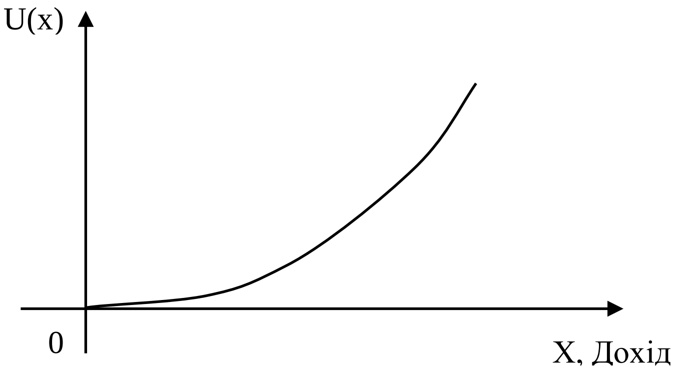

Рисунок 9.2 – Функція корисності для ОПР, який є схильним до ризику

ОПР нейтральний до ризику тоді і тільки тоді, коли функція корисності – пряма лінія:

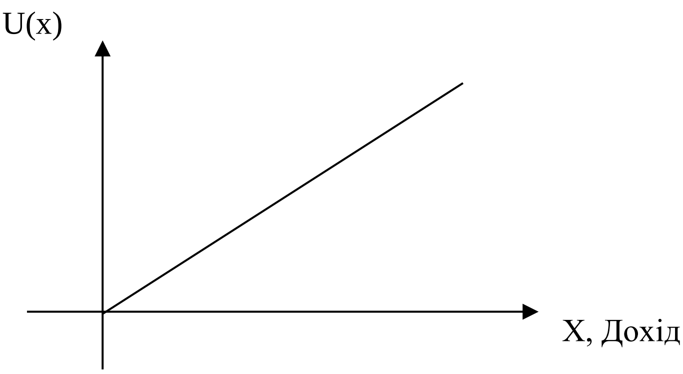

Рисунок 9.3 – Функція корисності для ОПР, який є нейтральним до ризику

Існує також функція схильності-несхильності до ризику (рис. 9.4). На різних рівнях доходу (багатства) ставлення ОПР до ризику може змінюватися. Доволі реалістичною гіпотезою є схильність до ризику при невеликих сумах загального статку і несхильність до ризику при значних сумах.

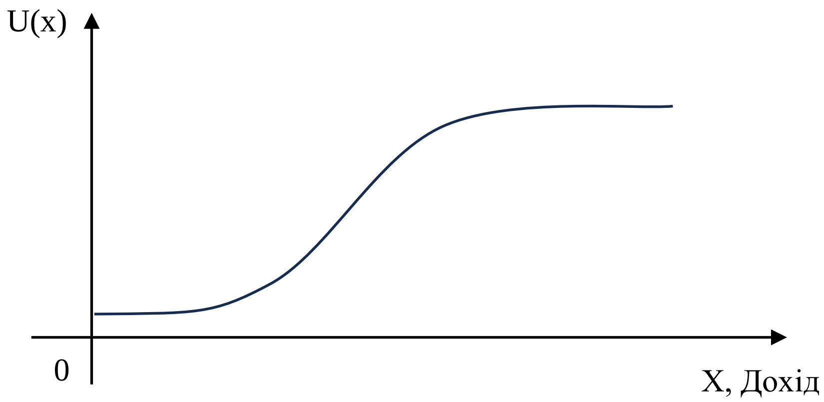

Рисунок 9.4 – Функція схильності-несхильності до ризику

Контрольні запитання та завдання

1. Що таке безумовний грошовий еквівалент?
2. Що таке очікувана грошова оцінка?
3. Надайте визначення аксіомам методології раціонального прийняття рішень в умовах невизначеності, що заснована на функції корисності індивіда, спирається на п’ять аксіом.
4. Як визначається раціональна поведінка ОПР?
5. Сформулюйте визначення корисності за Нейманом – Моргенштерном.
6. Надайте оцінку значень корисності припустимих результатів.
7. Наведіть процедуру побудови індивідуальної функції корисності.
8. Який вигляд має функція корисності для ОПР, не схильного до ризику?
9. Який вигляд має функція корисності для ОПР, схильного до ризику?
10. Який вигляд має функція корисності для ОПР, нейтрального до ризику?

10 ВИКОРИСТАННЯ ІГРОВИХ МОДЕЛЕЙ В ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

10.1 Основні відомості з теорії ігор. Платіжна матриця. Ціна гри. Принципи максиміна і мінімакса

Матричною грою в математичній теорії ігор називається гра двох осіб (нехай це будуть два гравці: A і B) з нульовою сумою, у якій в розпорядженні кожного з них є скінчена множина стратегій.

Визначення 10.1. Гра називається грою з нульовою сумою (матричною грою), якщо виграш гравця *A* дорівнює програшу гравця B (або навпаки).

Правила матричної гри визначає платіжна матриця (табл. 10.1), елементи якої – виграші першого гравця, які є також програшами другого гравця. Будемо вважати, що за $a_{ij}>0$ гравець A виграє, а гравець B програє величину a_{ij}. Якщо $a_{ij}<0$, то, навпаки, виграє гравець B і програє гравець A. У цьому випадку замість програшу часто говорять про від'ємний виграш гравця A.

Отже, a_{ij} – це результат гри, тобто число, що характеризує виграш гравця A і програш гравця B.

Гравці A і B виконують ряд послідовних ходів, тобто ряд послідовних дій, передбачених правилами гри.

Визначення 10.2. Стратегія гравця – це сукупність правил, що визначають вибір варіанта дій при кожному ході залежно від ситуації, що склалася в ході гри.

Теорія ігор дає вказівки гравцям під час вибору ходів, тобто рекомендує їм кращі стратегії.

Матрична гра є антагоністичною грою. Гравець A отримує максимальний гарантований (що не залежить від поведінки гравця B) виграш, що дорівнює ціні гри, аналогічно, гравець B намагається отримати мінімальний гарантований програш.

Таблиця 10.1 – Платіжна матриця гри

	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	
…	…	…	…	…	…	…	
A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}	
…	…	…	…	…	…	…	
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	
β_j							

Завдання пари стратегій гравців A і B у грі двох осіб цілком визначає її результат, тобто виграш одного гравця і програш іншого. Гра називається скінченою, якщо у кожного гравця є лише скінчена кількість стратегій. Якщо таких стратегій нескінченно багато (навіть якщо тільки в одного гравця), то гра називається нескінченною.

Розглянемо скінчену гру, у якій гравець A має m стратегій (A_1, A_2, …, A_m), а гравець B – n стратегій (B_1, B_2, …, B_n) (табл. 6.1). Така гра називається грою $m \times n$. Зазначимо, що рядки платіжної матриці (табл. 6.1) відповідають стратегіям A_i, а стовпці – стратегіям B_j.

Якщо вибір стратегій A і B однозначно визначає результат гри a_{ij}, то ці стратегії називаються чистими.

Якщо в грі використовуються випадкові ходи, то виграш при двох стратегіях A_i і B_j є випадковим. У цьому випадку за оцінку очікуваного виграшу береться його математичне сподівання.

Визначення 10.3. Підхід до гри, за якого для виграшу використовується випадковий вибір стратегій, називається *підходом з використанням змішаних стратегій*.

Отже, змішані стратегії визначають шляхом випадкової послідовності окремих чистих стратегій.

Розглянемо платіжну матрицю загального вигляду (табл. 6.1) для того, щоб узагальнити правила визначення рішення гри.

Припустимо, що гра складена так, що існує її рішення в чистих стратегіях. Спочатку визначимо найкращу зі стратегій гравця А, тобто найкращу з A_1, A_2, …, A_m з урахуванням того, що на будь-яку стратегію A_i гравець В відповість стратегією B_j, для якої виграш гравця А виявиться мінімальним. Щоб знайти цю стратегію B_j, потрібно в рядку платіжної матриці, що відповідає стратегії A_i (рядку з номером i), знайти мінімальне з чисел a_{ij}:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \; j=1,2,\ldots,n. \quad (10.1)$$

При зміні стратегій гравця А число α_i, що відповідає кожній з цих стратегій, теж буде змінюватися. Природно, що гравцеві А вигідніше всього зупинитися на такій стратегії A_i, для якої значення α_i буде максимальним. Позначимо це максимальне значення α:

$$\alpha = \max_i \alpha_i, \; i=1,2,\ldots,m \qquad \text{або} \qquad \alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}. \quad (10.2)$$

Величину α прийнято називати *нижньою ціною гри* або максимінним виграшем (скорочено максиміном). Стратегію гравця А, що відповідає максимін α, назвемо максимінною стратегією.

Якщо гравець А дотримуватиметься максимінної стратегії, то йому за будь-якої поведінки гравця В гарантований виграш, завжди не менше, ніж α. Тому величину α називають нижньою ціною гри, тобто це той гарантований мінімум, що одержить гравець А в цій грі.

Аналогічно можна визначити найкращу зі стратегій гравця В. Він прагне звести виграш гравця А до мінімуму. Для цього гравець В, по-перше, має для кожної своєї стратегії B_j оцінити максимальне значення свого програшу, перебравши всі можливі стратегії гравця А.

Таким чином, гравець В визначає значення β_j таке, що

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \ j=1,2,\dots,m. \tag{10.3}$$

Однак гравець В може звести до мінімуму свій програш, обравши свою стратегію так, щоб їй відповідала мінімальна оцінка β_j.

Отже, на другому кроці алгоритму гравець В визначає величину β, обумовлена виразом:

$$\beta = \min_i \max_j a_{ij}. \tag{10.4}$$

Ця величина β називається *верхньою ціною гри*, або мінімаксним виграшем (мінімаксом).

Відповідна мінімаксу стратегія гравця В називається мінімаксною стратегією. Це найбільш обережна стратегія гравця В, що забезпечує йому в будь-якому випадку програш не більше β і, відповідно, виграш гравцю А також не більше β.

У теорії ігор принцип обережності, що рекомендує гравцям дотримувати максимінної і мінімаксної стратегії, називається принципом мінімакса. Він випливає з припущення про обережність гравців або з бажання розв'язати конфліктну ситуацію найкраще для всіх сторін, що беруть участь у ній.

Якщо верхня ціна гри збігається з нижньою ціною, то їхнє загальне значення $\alpha = \beta = \nu$ називається *чистою ціною* гри.

Мінімаксні стратегії, що відповідають чистій ціні гри, є оптимальними стратегіями, а їхня сукупність – оптимальним рішенням. Пари чистих стратегій дає оптимальне рішення тоді і тільки тоді, коли відповідний їй елемент a_{ij} є одночасно найбільшим у своєму стовпці і найменшим у своєму рядку. У цьому випадку говорять, що гра має сідлову точку.

10.2 Рішення гри в змішаних стратегіях. Основна теорема теорії матричних ігор

Змішані стратегії становлять математичну модель гнучкої тактики гравця, за якої конфронтуючий йому гравець не може знати заздалегідь те положення, з яким йому доведеться зустрітися в грі, тому що перед кожною партією здійснюється випадковий вибір однієї з чистих стратегій за допомогою деякого механізму, який проводить цей вибір з визначеними і заздалегідь заданими ймовірностями. Визначимо ці імовірності, виходячи з вимоги одержання максиміна, тобто оптимального рішення гри.

Розглянемо гру $m \times n$, коли в гравця A є m стратегій, а в гравця B – n стратегій. Введемо позначення для змішаних стратегій гравців A і B:

$$S_A = S_A(p_1, p_2, \ldots, p_m); \qquad S_B = S_B(q_1, q_2, \ldots, q_n), \qquad (10.5)$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – імовірності використання чистих стратегій $A_1, A_2, \ldots, A_m$;
$q_1, q_2, \ldots, q_n$ – імовірності чистих стратегій $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Оскільки ці стратегії за умовою гри цілком вичерпують можливі ходи гравців A і B, то вони утворюють повну групу подій. Тому для імовірностей p_i і q_j справедливі, відповідно, умови

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1; \ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Очевидно, кожна чиста стратегія є частинним випадком змішаної стратегії, коли всі стратегії, крім обраної чистої стратегії, мають імовірності, дорівнюють нулю, а ця обрана стратегія – імовірність, яка дорівнює одиниці.

Основна теорема матричних ігор: будь-яка матрична гра має рішення в змішаних стратегіях.

З цієї теореми випливає, що кожна матрична гра має ціну ν, до того ж ця ціна завжди лежить між нижньою α і верхньою β ціною гри:

$$\alpha \le \nu \le \beta. \quad (10.6)$$

Дійсно, α є мінімальний гарантований виграш, що може забезпечити собі гравець A, застосовуючи тільки свої чисті стратегії. Застосовуючи змішані стратегії, гравець A у всякому разі не зменшить свій виграш, тобто $\alpha \le \nu$. Для гравця B аналогічні міркування приведуть до висновку, що $\nu \le \beta$. Тому в загальному випадку: $\alpha \le \nu \le \beta$.

Якщо в деякій грі $m \times n$ знайдене оптимальне рішення, що полягає у використанні двох оптимальних змішаних стратегій вигляду (10.5), то чисті стратегії $A_1, A_2, \ldots, A_m$ і $B_1, B_2, \ldots, B_n$, для яких імовірності p_i і q_j виявилися відмінними від нуля, називаються активними стратегіями гравців A і B.

У теорії ігор доводиться теорема про активні стратегії: якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш не менше ціни гри, незалежно від того, що робить інший гравець.

Зміст цієї теореми полягає в тому, що якщо один із гравців почне послідовно дотримуватися своєї оптимальної змішаної стратегії, то конфронтуючий йому гравець уже не зможе змінити результат гри.

10.3 Рішення гри в змішаних стратегіях методами лінійного програмування

Покажемо, що рішення будь-якої скінченої гри може бути зведене до задачі лінійного програмування.

Будемо вважати, що платіжна матриця гри $\{a_{ij}\}$ нам відома (табл. 10.1). Знайдемо рішення гри, тобто дві оптимальні змішані стратегії гравців A і B:

$$S_A^*(p_1, p_2, ..., p_m); \qquad S_B^*(q_1, q_2, ..., q_n).$$

Знайдемо спочатку оптимальну стратегію S_A^*. Ця стратегія повинна забезпечувати гравцю A виграш не менше ν за будь-якої поведінки гравця B і виграш, який дорівнює ν, за оптимальної поведінки гравця B.

Припустимо, що ціна гри $\nu > 0$. Дійсно, для виконання умови $\nu > 0$ достатньо, щоб всі елементи платіжної матриці a_{ij} були невід'ємними. Цього можна домогтися в будь-якій грі, додаючи до всіх елементів a_{ij} достатньо велику величину M. Разом із тим ціна гри збільшиться на M, а саме рішення (вибір стратегій) не зміниться.

Припустимо далі, що гравець A застосовує свою оптимальну змішану стратегію S_A^* (поки нам невідому), а гравець B – тільки свою будь-яку чисту стратегію B_j. Тоді середній виграш гравця A складе:

$$a_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + ... + p_m a_{mj}. \tag{10.6}$$

Але кожне з чисел a_j не може бути менше за ν відповідно до теорем теорії ігор. Звідси одержуємо в загальному випадку n нерівностей:

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \ldots + p_m a_{m1} \geq \nu, \\ p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \ldots + p_m a_{m2} \geq \nu, \\ \ldots \\ p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + \ldots + p_m a_{mn} \geq \nu. \end{cases} \quad (10.7)$$

Уведемо нові позначення: $x_1 = \dfrac{p_1}{\nu}, x_2 = \dfrac{p_2}{\nu}, \ldots, x_m = \dfrac{p_m}{\nu}$.

Тоді після ділення всіх нерівностей системи (6.7) на ν одержимо:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{m1} x_m \geq \nu, \\ a_{12} x + a_{22} x_2 + \ldots + a_{m2} x_m \geq \nu, \\ \ldots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots + a_{mn} x_m \geq \nu. \end{cases} \quad (10.8)$$

де за умовою всі x_i – невід'ємні змінні, які задовольняють умові: $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \dfrac{1}{\nu}$.

Гравець А прагне зробити свій гарантований виграш ν максимальним. Це значить, що величина $\dfrac{1}{\nu}$ повинна прийняти мінімальне значення. Таким чином, задача рішення гри звелася до такої задачі лінійного програмування: визначити невід'ємні значення змінних x_1, x_2, …, x_m, які доставляють мінімум лінійній функції:

$$L(\overline{x}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \min,$$

за умови, що виконуються зазначені обмеження.

Аналогічно, послідовно фіксуючи чисті стратегії A_i гравця A, оптимальну стратегію гравця B визначимо, вирішуючи таку задачу лінійного програмування: визначити такі невід'ємні значення змінних y_1, y_2, …, y_n, які доставляють максимум лінійній функції:

$$L(\bar{y}) = y_1 + y_2 + ... + y_m = \max,$$

за умови, що виконуються обмеження:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y + a_{22}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1, \\ ... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1. \end{cases} \qquad (10.9)$$

де $y_1 = \dfrac{q_1}{\nu}$, $y_2 = \dfrac{q_2}{\nu}$,..., $y_n = \dfrac{q_n}{\nu}$.

Замість вимоги мінімізації функції $L(\bar{x}) = \dfrac{1}{\nu}$ тепер використовується вимога максимізації функції $L(\bar{y}) = \dfrac{1}{\nu}$, тому що гравець B на відміну від гравця A прагне мінімізувати ν (програти якнайменше).

Отже, рішення гри m × n звелося до рішення двоїстої пари задач лінійного програмування. Відповідно до теорем теорії ігор, це рішення завжди існує.

Контрольні запитання та завдання

1. Що таке платіжна матриця гри?

2. Надайте визначення нижньої ціни гри, верхньої ціни гри.

3. Що таке чиста ціна гри?

4. Сформулюйте основну теорему матричних ігор.

5. Сформулюйте теорему про активні стратегії.

6. Розкрийте сутність методу рішення гри як задачі лінійного програмування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Стандарт вищої освіти України 122 Комп’ютерні науки, перший (бакалаврський) рівень, Липень 2019 [Електрон. ресурс]. – Електрон. текст. дані. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/vishcha-osvita/zatverdzeni%20standarty/2019/07/12/122-kompyut.nauk.bakalavr-1.pdf, вільний (дата звернення 13.12.2023). – Назва з екрана.
2. ChatGPT [Електрон. ресурс] : сайт. – Електрон. текст. дані. – Режим доступу: https://chat.openai.com/, вільний (дата звернення 15.12.2023). – Назва з екрана.
3. Дистанційний курс «Методи і засоби прийняття рішень» [Електрон. ресурс]. – Електрон. текст. дані. – Режим доступу: https://dl.kname.edu.ua/course/view.php?id=1753, вільний (дата звернення 20.12.2023). – Назва з екрана.
4. Катренко А. В. Прийняття рішень: теорія та практика : підручник / А. В. Катренко, В. В. Пасічник. – Львів : Новий Світ – 2000, 2020. – 447 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: Pryyniattia_rishen-.pdf/2000.com.ua, вільний).
5. Петров Е. Г. Методи і засоби прийняття рішень у соціально-економічних системах / Е. Г. Петров, М. В. Новожилова, І. В. Гребеннік. – Київ : Техніка, 2003. – 256 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books /2015/Petrov_2004_256.pdf, вільний).
6. Бродський Ю. Б. Системний аналіз та теорія прийняття рішень: навч. посіб. : в 3 ч. / Ю. Б. Бродський. – Житомир: ДУ «Житомирська політехніка», 2022. – Частина 1 : Системологія. – 92 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://goo.su/D5mf, вільний).
7. Жураковська О. С. Теорія прийняття рішень: навч. посіб. / О. С. Жураковська / – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 99 с. – Існує

електрон. версія. (Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/38902/ 1/TPR_Posibnyk.pdf, вільний).

8. Ус С. А. Моделі й методи прийняття рішень: навч. посіб. / С. А. Ус, Л. С. Коряшкіна/ – Д. : НГУ, 2014. – 300 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://sau.nmu.org.ua/ua/osvita/metod/Models_and_decision-making_techniques(Us_Koryashkina)_NMU_SAU.pdf, вільний).

9. Нестеренко О. В. Інтелектуальні системи підтримки прийняття рішень : навч. посіб. / О. В. Нестеренко, О. І. Савенков, О. О. Фаловський. – Київ : Національна академія управління, 2016. – 188 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://nam.kyiv.ua/files/publications/978-966-8406-94-2-pos.pdf, вільний).

ДОДАТОК А

Загальні відомості про оптимізаційні задачі

Постановка будь-якої задачі оптимізації починається з визначення набору незалежних змінних і зазвичай містить умови, що характеризують їхні прийнятні значення. Ці умови є обмеженнями задачі. Ще однією обов'язковою компонентою опису є скалярна міра «якості», яка має назву цільової функції і залежить якимось способом від змінних. Розв'язок оптимізаційної задачі – це прийнятний набір значень змінних, якому відповідають оптимальні значення цільової функції. Під оптимальністю, звичайно, розуміють максимальність або мінімальність. Наприклад, мова може йти про максимізацію прибутку або мінімізацію собівартості продукції.

Класифікація задач математичного програмування

Загальну задачу математичного програмування можна записати в такому вигляді:

$$f(x) \to extr,$$

при обмеженнях

$$g_i(x) \le 0,\ i = 1, ..., k, \qquad (A.1)$$

$$h_j(x) = 0,\ j = k+1,...,m,$$

$$x \in X \subset R^n.$$

Водночас умови вигляду $g_i(x) \le 0$, $i = 1, ..., k$, називаються обмеженнями-нерівностями, вигляду $h_j(x) = 0$, $j = k+1,...,m$, – обмеженнями-рівностями, обидва ці типи умов – функціональними обмеженнями; умова

$x \in R^n$ є прямим обмеженням.

Задача опуклого програмування

Задача (А.1) є задачею опуклого програмування, якщо функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, ..., k$, опуклі на R^n, функції $h_j(x)$, $j = k+1,...,m$ є лінійними. Легко перевірити, що припустима множина задачі опуклого програмування є опуклою, отже, задача є опуклою. На розглянуту задачу поширюються твердження про властивості опуклих функцій. Теорія і чисельні методи розв'язання задач опуклого програмування істотно розвинені порівняно з загальним випадком.

Задача лінійного і квадратичного програмування

Задачею лінійного програмування (далі – ЛП) є задача мінімізації або максимізації лінійної функції при лінійних обмеженнях. Зокрема, задача (А.1) є задачею ЛП, якщо функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, ..., k$, $h_j(x)$, $j = k+1,...,m$ – лінійні функції.

Задача дискретної оптимізації

Надалі скінчені множини і рахункові множини без граничних точок будемо називати дискретними. Задача (А.1) є задачею дискретної оптимізації, якщо сама припустима множина $X \subset R^n$ є дискретною, або хоча б деякі з координат вектора $x = (x_1, ... , x_n)$ пробігають дискретні множини на числовій осі, коли x пробігає X. Така задача є задачею цілочисельного програмування, якщо X – це множина цілих чисел.

Очевидно, що за своєю постановкою задача дискретного програмування відрізняється від загальної задачі математичного програмування спеціальним завданням прямого обмеження. Тут також використовується запис (А.1). Якщо функції $f(x)$,), $g_i(x)$, $i = 1, ..., k$, $h_j(x)$, $j = k + 1,...,m$ є лінійними, то задача (А.1) є цілочисельною задачею ЛП.

Якщо $X = \{0, 1\}$, то іноді говорять про (частково) бульову задачу ЛП.

Розв'язання оптимізаційних задач лінійного програмування у середовищі MS Excel

Наведемо методику розв'язання лінійних оптимізаційних задач у програмному середовищі MS Excel на прикладі таких типових задач лінійного програмування, як:

- задача планування виробництва;
- транспортна задача.

Математична постановка задачі планування виробництва

Дві моделі кольорових телевізорів, що виробляються корпорацією «TheBest», позначимо як A і B. Прибуток від реалізації моделі A складає c_1 грн, а від реалізації моделі B – c_2 грн. Метою компанії є максимізація сумарного прибутку. Однак існують певні обмеження, які заважають корпорації виробляти і продавати тисячі телевізорів щоденно.

Такими обмеженнями є:

- сукупний щоденний час роботи ділянки збирання телевізорів – b_1 годин (обмеження трудових ресурсів), причому для збирання кожного телевізора моделі A (вища якість) потрібно a_{11} годин роботи, тоді як для збирання телевізора моделі B потрібно a_{12} годин;
- сукупний щоденний час підготовки комплектуючих для збирання – b_2 годин (технічне обмеження), причому час для виготовлення виробництва комплектуючих для одного телевізора моделі A – a_{21} годин, тоді як для телевізора моделі B – a_{22} годин;
- можливість продавати не більш як b_3 телевізорів моделі A в день (торгове обмеження).

Проблема корпорації полягає в тому, щоб визначити, скільки телевізорів кожної моделі потрібно виробляти щоденно для того, щоб сумарний прибуток був максимально можливим.

Сформульована задача має назву задачі планування виробництва. Для побудови математичної моделі необхідно визначити:

– незалежні змінні задачі;
– цільову функцію задачі;
– обмеження на значення незалежних змінних задачі.

Незалежними змінними в цьому випадку є:

x_1 – кількість телевізорів моделі А, що виробляються щоденно;

x_2 – кількість телевізорів моделі В, що виробляються щоденно.

Цільова функція. Щоденний прибуток, одержаний від продажу телевізорів А складає a_1x_1 (тобто прибуток від продажу однієї одиниці продукції, помноженої на кількість проданих одиниць продукції). Аналогічно для моделі В, одержаний прибуток складе a_2x_2.

Сумарний прибуток z (цільова функція) складає

$$c_1x_1 + c_2x_2.$$

Необхідно максимізувати сумарний прибуток, тобто максимізувати значення цільової функції z.

Обмеження, що накладаються на множину допустимих розв’язків

1. Обмеження трудових ресурсів можна записати так:

$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 \le b_1.$$

Відмітимо, що тут використовується знак «менше» чи «дорівнює» (≤), тобто b_1 годин – максимально доступний обсяг часу, який не обов’язково має бути використаний повністю.

2. Обмеження на час виробництва комплектуючих:

$$a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 \le b_2.$$

3. Торгове обмеження:

$$a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\, x_2 \le b_3.$$

4. Обмеження невід'ємності. Неможливо виробити від'ємну кількість телевізорів, тому x_1 і x_2 мають бути більшим за нуль або дорівнювати нулю:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Далі можна підвести підсумки і подати математичну модель задачі.

Знайти

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \qquad (А.2)$$

при обмеженнях

$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 \le b_1, \qquad (А.3)$$

$$a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 \le b_2, \qquad (А.4)$$

$$a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\, x_2 \le b_3 \qquad (А.5)$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \qquad (А.6)$$

У подальшому можна не писати обмеження (А.6) при постановці задачі. Однак вони завжди існують. Крім того, оскільки виробництво телевізорів виконується день за днем, необов'язково закінчувати збирання всіх телевізорів до кінця дня, тобто можливі допустимі дрібні значення (наприклад, 5,73 телевізорів). Однак, якщо б необхідно було завершити збирання всіх телевізорів, то потрібно було б ввести ще й додаткові обмеження, які б множину припустимих значень x_1 і x_2 подавали як множину цілих чисел. У такому випадку задача (А.2 – А.6) зводиться до одного з видів задач цілочисельного програмування.

Відмітимо, що розглянута модель є лінійною, тому що цільова функція і обмеження лінійно залежать від змінних.

Введемо вхідні дані для розв'язання задачі планування виробництва за допомогою засобу «Розв'язувач» MS Excel.

Покладемо

- $c_1 = 300$, $c_2 = 250$.
- $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $b_1 = 40$.
- $a_{21} = 1$, $a_{22} = 3$, $b_2 = 45$;
- $a_{31} = 1$, $a_{32} = 0$, $b_3 = 12$.

Для введення вхідних даних для розв'язання задачі планування виробництва на робочому аркуші програмного середовища MS Excel необхідно виконати такі дії:

1. Відвести клітинки A3 і B3 під значення змінних x_1 і x_2 відповідно (рис. А.1).
2. Ввести в комірку C4 функцію цілі (як формулу):

= 300 * A3 + 250 * B3.

3. Ввести в комірки діапазону A7:A11 ліві частини обмежень, а в комірки B7:B11 діапазону – відповідні праві частини обмежень (табл. А.1):

Зауваження 1. На початковому етапі розв'язання задачі в комірки діапазону A3:B3, що відведені під незалежні змінні, вводяться нульові значення. Тому в комірках діапазону A7:A9 і в комірці C4 на початковій стадії розв'язання відображаються нулі.

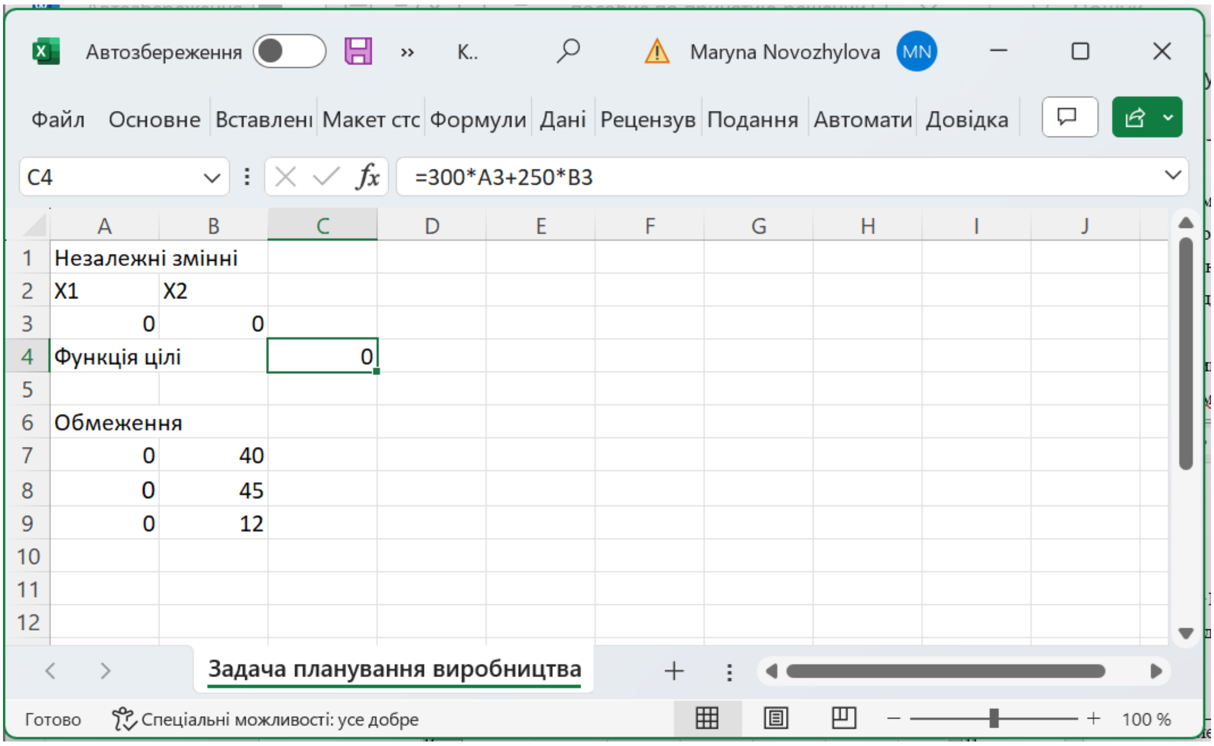

Рисунок А.1 – Діапазони, що відведені під незалежні змінні, цільову функцію і змінні в задачі планування виробництва

Таблиця А.1 – Введення формул для засобу «Розв’язувач»

Комірка	Формула	Комірка	Значення
A7	= A3 + 2 * B3	B7	40
A8	= 2 * A3 + B3	B8	45
A9	= B3	B9	12

Після розв’язання задачі за допомогою засобу «Розв’язувач» у комірках діапазону A3:B3 MS Excel з’являться оптимальні значення, які в загальному випадку не будуть нульовими. Тоді й у комірках діапазону A7:A9 і в комірці C4 будуть відображатися ненульові значення.

Зауваження 2. Розв’язувач є однією з надбудов (add-ins) MS Excel. Якщо в пункті меню «Дані» відсутня команда «Розв’язувач», то для її встановлення:

1. Виберіть команду «Файл > Параметри».

2. Виберіть пункт «Надбудови», а потім у полі «Керування» виберіть

пункт «Надбудови» Excel.

3. Натисніть кнопку «Перейти».

4. У полі «Наявні надбудови» встановіть прапорець для надбудови «Розв'язувач» та натисніть кнопку «ОК».

Розглянемо алгоритм визначення оптимального розв'язку задачі планування виробництва.

1. Виберіть команду «Дані / Розв'язувач». На екрані монітора відобразиться діалогове вікно Розв'язувача, елементи якого наведені в таблиці А.2.

Таблиця А.2 – Елементи вікна «Розв'язувач»

Елемент	Опис
Поле «Оптимізувати цільову функцію»	Наводиться посилання на комірку з функцією, максимум або мінімум значення якої Розв'язувач відшукує, змінюючи значення параметрів так, щоб вони задовольняли обмеження, які на них накладені. У наведеному прикладі в полі «Оптимізувати цільову функцію» введіть С4
Група «До»	Тип взаємодії між розв'язком і цільовою коміркою встановлюється шляхом вибору перемикача у групі «До». У наведеному прикладі виберіть перемикач «Максимум»
Поле «Змінюючи клітинки змінних»	Наводиться посилання на діапазон клітинок або групу діапазонів клітинок, що відводяться під невідомі. Значення в цих клітинок повинні змінюватися в процесі пошуку розв'язку задачі, так, щоб можна було знайти розв'язок, який задовольняє задані обмеження.
Список «Підлягає обмеженням: »	Допускаються обмеження у вигляді рівностей, нерівностей, вимоги того, що невідомі можуть приймати лише цілі значення, або значення 0 чи 1. Обмеження можна додати всі за один раз, якщо вони мають один знак відношення, для чого натисніть кнопку «Додати» (рис. А.2). Натисніть кнопку «ОК» для завершення вводу обмежень. На екрані знову відобразиться вікно «Розв'язувач», але тепер вже заповнене.

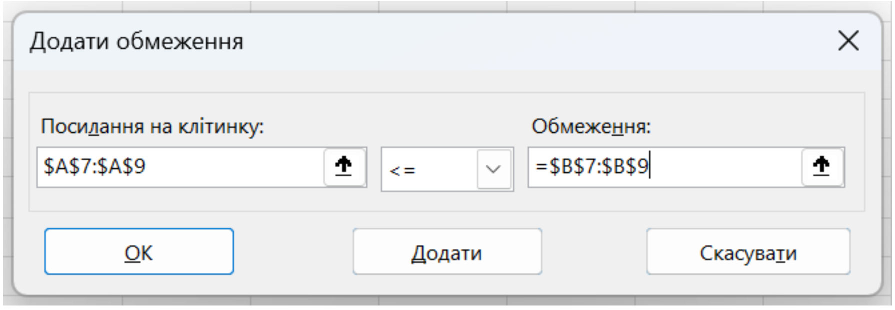

Рисунок А.2 – Вікно «Додати обмеження»

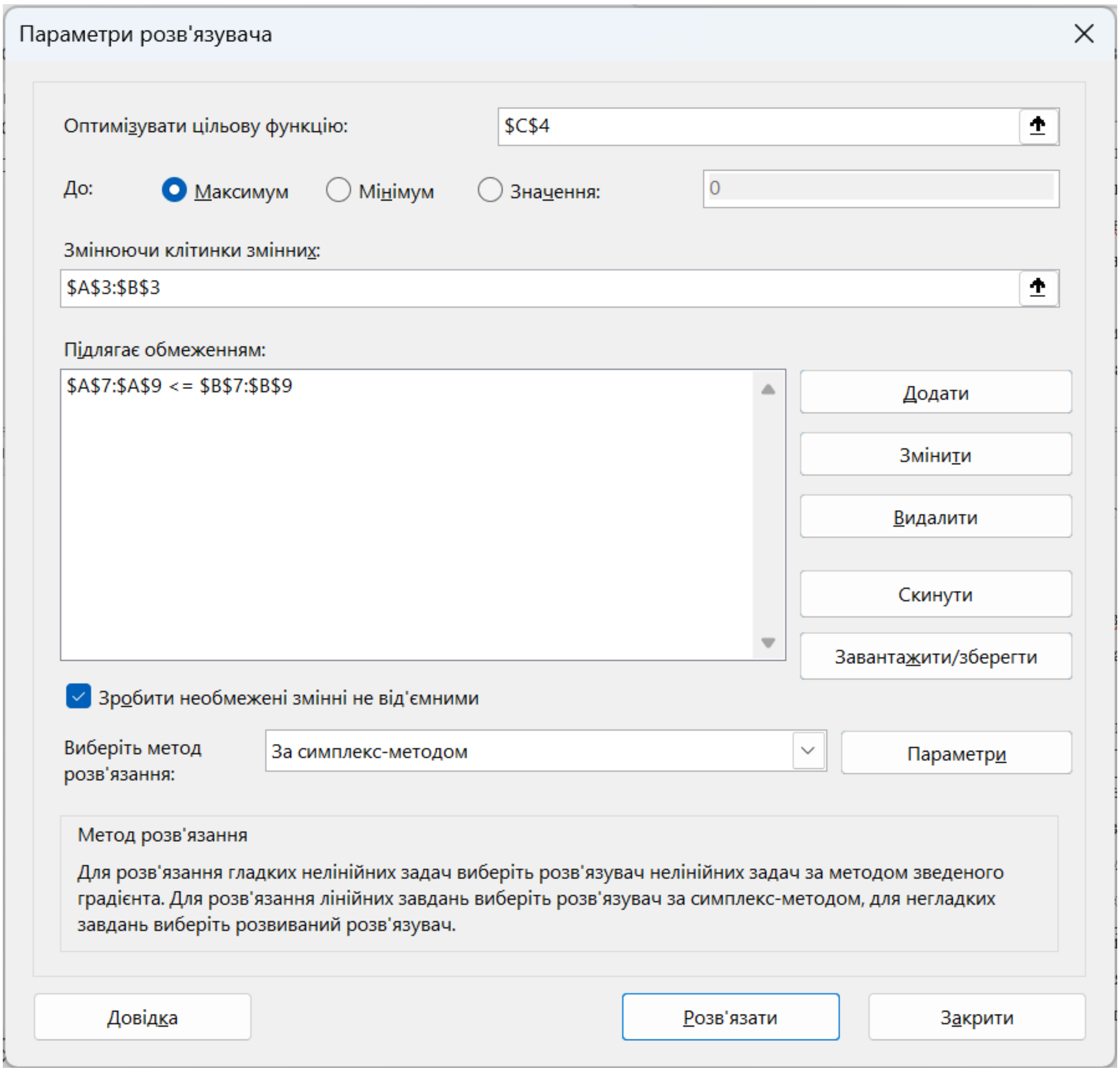

Рисунок А.3 – Вікно «Розв’язувач» після заповнення для задачі планування виробництва

Зауваження 3. Під час введення посилань на комірки й діапазони у вікні «Розв’язувач» вони автоматично перетворюються в абсолютні посилання.

2. Натисніть кнопку «Параметри». На екрані відобразиться діалогове вікно «Параметри» (рис. А.4). У діалоговому вікні «Параметри» можна змінювати умови й варіанти пошуку розв’язання задачі, що досліджується. Значення і стан елементів управління, що використовуються за замовчуванням, підходять для розв’язання більшості задач.

Опишемо деякі елементи цього вікна (табл. А.3).

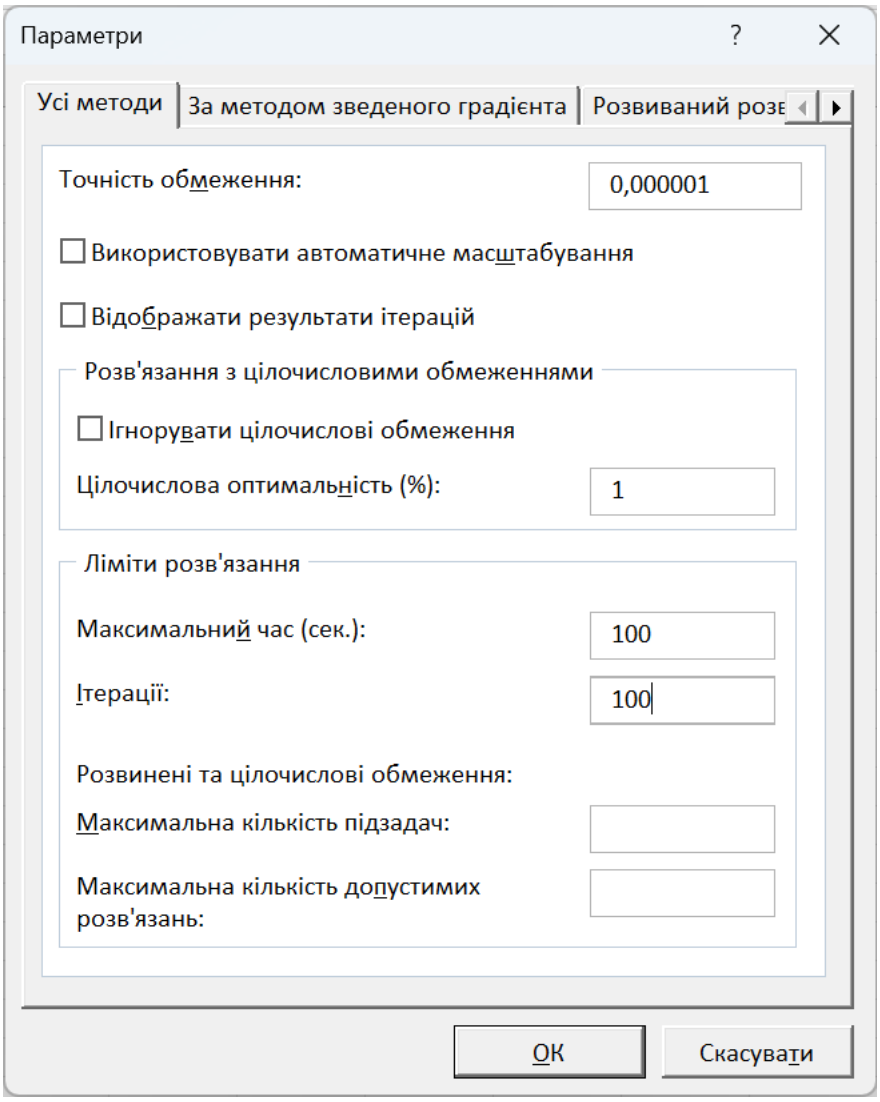

Рисунок А.4 – Вікно «Параметри»

Таблиця А.3 – Деякі елементи вікна «Параметри»

Елемент	Опис
Поле «Максимальний час»	Використовується для обмеження часу на пошук розв'язку задачі
Поле «Ітерації»	Використовується для обмеження числа проміжних обчислень
Прапорець «Використовувати автоматичне масштабування»	Слугує для включення автоматичної нормалізації вхідних і вихідних значень, що якісно відрізняються за величиною. Наприклад, максимізація прибутку у відсотках відносно вкладень, що обчислюються в мільйонах гривень

Повернемося до основного вікна «Параметри розв'язувача». У нашому випадку встановіть прапорець «Зробити необмежені змінні невід'ємними» та виберіть метод розв'язання «За симплекс-методом».

Натисніть кнопку «Розв'язати». На екрані монітора відобразиться вікно «Результати розв'язувача» (рис. А.5).

На вибір пропонуються варіанти: «Зберегти розв'язання розв'язувача» або «Відновити первинні значення». Виберіть перше. Можна також вивести звіти: по відповідям, по стійкості, по лімітам.

Після натиснення кнопки «ОК», результати будуть занесені в робочий аркуш MS Excel. Засіб «Розв'язувач» знайшов оптимальний план задачі, що дає максимальний прибуток. З рисунка А.5 видно, що вхідних даних, які розглядаються, оптимальним є виробництво за добу 12 телевізорів марки А і 11 телевізорів марки В. Цей обсяг виробництва принесе 6 350 тис. грн прибутку.

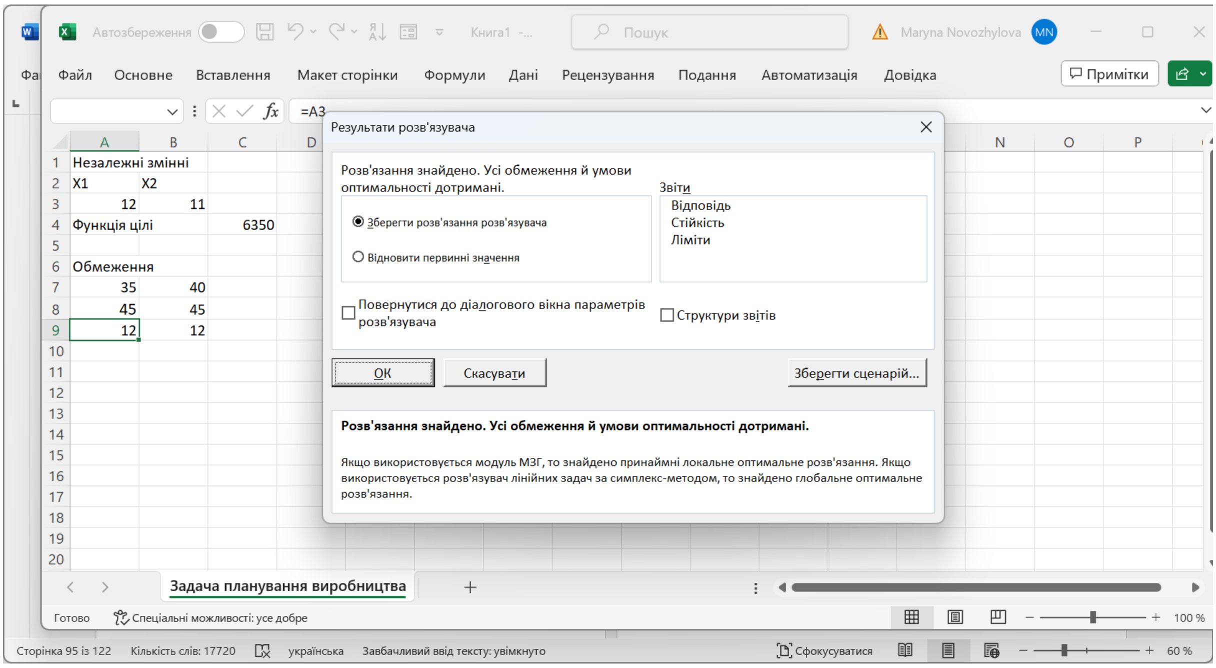

Рисунок А.5 – Вікно «Результати розв’язувача»

Транспортна задача

Важливим класом задач лінійного програмування є транспортна задача.

Нехай на m пунктах відправки $A=\{A_i\}$, $i=1,...m$, зосереджено однорідний вантаж у кількості a_i, $i = 1,...m$, який потрібно доставити в n інших пунктів доставки $B=\{B_j\}$, $j=1,..,n$ у кількості b_j, $j = 1,..,n$.

Відомо, що вартість доставки одиниці вантажу з пункту A_i в пункт B_j дорівнює c_{ij}. Необхідно мінімізувати загальну вартість перевезень за умови повного вивезення вантажу з пунктів відправки і розвезення його в необхідних, наперед заданих кількостях, у пункти доставки.

Математична модель транспортної задачі

1. Незалежні змінні. Позначимо кількість вантажу, що перевозиться з пункту A_i в пункт B_j через x_{ij}, водночас вартість перевезення дорівнює $c_{ij}x_{ij}$.

2. Цільова функція визначається як сума всіх можливих добутків цього типу у вигляді:

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min. \qquad (A.7)$$

3. Обмеження.

Система обмежень описує умови повного вивезення вантажу з пунктів A_i і повного задоволення потреб пунктів B_j, тобто маємо дві групи обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m, \qquad (A.8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n, \qquad (A.9)$$

Очевидна необхідність накладання на змінні задачі природних обмежень невід'ємності

$$x_{ij} \geq 0,\ \ i = 1,...m,\ j = 1,..,n,$$

оскільки перевезення вантажів з пунктів B_j в пункт A_i не дозволяється. Зауважимо, що сума всіх вивезених з пунктів A_i вантажів повинна дорівнювати сумі всіх завезених в пункти B_j, тобто:

$$\sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}. \qquad (A.10)$$

Сформульована задача є транспортною задачею по критерію вартості з правильним балансом (А.10), або закритою транспортною задачею. У разі невиконання співвідношення (А.10), формули (А.8) або (А.9) набувають вигляду:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1, \dots, m, \qquad (A.8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, j = 1, \dots, n. \qquad (A.9)$$

і тоді розглядається задача з неправильним (зруйнованим) балансом, інакше – відкрита задача.

Розглянемо приклад розв'язання транспортної задачі з використанням засобу «Розв'язувач».

Фірма «LTD LIMITED» має 4 фабрики і 5 центрів розподілу її товарів. Фабрики розташовані в містах Харків, Запоріжжя, Суми і Чернівці, що мають виробничі можливості відповідно 200, 150, 225 і 175 одиниць продукції щоденно. Розподільні центри розташовані в містах Київ, Полтава, Чернігів, Житомир і Луцьк з потребами в 100, 200, 50, 250, 150 одиниць продукції щоденно відповідно. Зберігання на фабриці одиниці продукції, що не надійшла до розподільного центру, коштує 0,75 грн у день. Штраф за затримку поставки одиниці продукції, що замовлена споживачем, до центру розподілу, якщо ця продукція там не знаходиться, дорівнює 2,5 грн у день. Ціна перевезення одиниці продукції з фабрик у пункти розподілу наведена в таблиці А.4. Необхідно спланувати перевезення так, щоб сумарні транспортні витрати були мінімальними.

Зауважимо, що ця модель збалансована, тобто сумарний обсяг виробленої продукції дорівнює сумарному обсягу споживання, тому в цій моделі не треба враховувати витрати, що пов’язані як із складуванням, так і з недопоставками продукції.

Таблиця А.4 – Транспортні витрати

	1 Київ	2 Полтава	3 Чернігів	4 Житомир	5 Луцьк	Виробництво
Харків	1,5	2	1,75	2,25	2,25	200
Запоріжжя	2,5	2	1,75	1	1,5	150
Суми	2	1,5	1,5	1,75	1,75	225
Чернівці	2	0,5	1,75	1,75	1,75	175
Потреби	100	200	50	250	150	–

Інакше в модель потрібно ввести:

– у разі перевиробництва – фіктивний пункт розподілу; вартість перевезень одиниці продукції в цьому фіктивному пункті приймається рівною вартості складування, а обсяги перевезень в цьому пункті дорівнюють обсягам складування надлишків продукції на фабриках;

– у разі дефіциту – фіктивну фабрику; вартість перевезень одиниці продукції з фіктивної фабрики приймається рівню вартості штрафів за недопоставку продукції, а обсяги перевезень з цієї фабрики дорівнюють обсягам недопоставок продукції в пункти розподілу.

Приймаючи a_{ij} – обсяг виробництва на і-й фабриці, b_j – попит в j-му центрі розподілу, математичну модель цієї задачі подамо у вигляді (А.7–А.9).

Виконаємо таку підготовчу роботу для розв’язання транспортної задачі за допомогою засобу «Розв’язувач» (рис. А.6).

1. Введіть у комірки діапазону B3:F6 вартість перевезень (рис. А.6).

2. Відведіть комірки діапазону B8:E11 під значення невідомих (об’ємів перевезень).

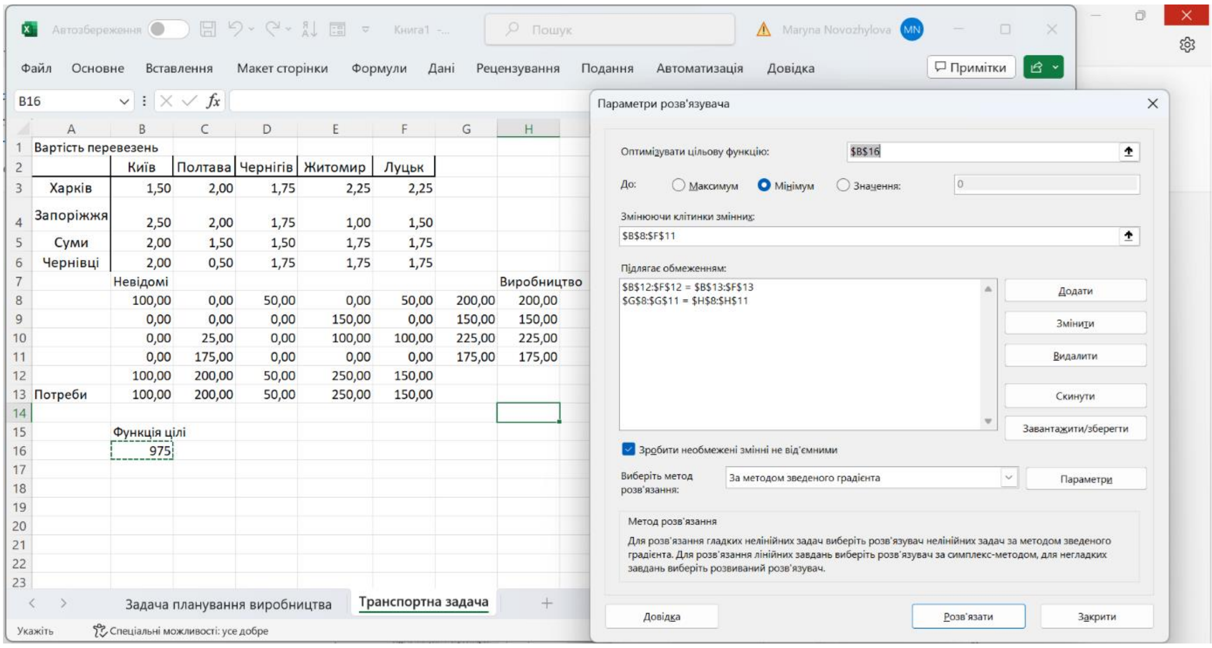

Рисунок А.6 – Розв’язання транспортної задачі

3. Введіть у комірки діапазону H8:H11 обсяги виробництва на фабриках.

4. Введіть у комірки діапазону B13:F13 попит продукції у пунктах розподілу.

5. У комірку B16 введіть функцію цілі

=СУММПРОИЗВ (B3:F6;B8:F11)

6. У комірки діапазону G8:G11 введіть формули, за якими обчислюються об’єми виробництва на фабриках, у комірки діапазону B12:F12 – обсяги продукції, що доставляється в пункти розподілу (табл. А.5):

Таблиця А.5 – Введення екзогенних параметрів моделі

Комірка	Формула	Комірка	Формула
G8	=СУММ(В8:Г8)	B12	=СУММ(В8:В11)
G9	=СУММ(В9:F9)	C12	=СУММ(С8:С11)
G10	=СУММ(В10:Г10)	D12	=СУММ(D8:D11)
511	=СУММ(В11:П1)	E12	=СУММ(Е8:Е11)
		F12	=СУММ(F8:F11)

7. Виберіть команду «Дані / Розв’язувач» і заповніть діалогове вікно розв’язувача, як показано на рисунку А.6.

8. Натисніть кнопку «Розв’язати».

Засіб «Розв’язувач» знайде оптимальний план поставок продукції і відповідні йому транспортні витрати (рис. А.6).

Розглянемо методику розв’язання оптимізаційних задач цілочисельної оптимізації у середовищі MS Excel на прикладах наступних задач.

Задача про добрива

Фірма випускає два пакети добрив для газонів: стандартний і поліпшений. До стандартного пакету входять 3 кг азотних, 4 кг фосфорних і 1 кг калійних добрив, а до поліпшеного – 2 кг азотних, 6 кг фосфорних і 2 кг калійних добрив. Відомо, що для конкретного газону потребується щонайменше 10 кг азотних, 20 кг фосфорних і 7 кг калійних добрив. Стандартний пакет коштує 3 грн, а поліпшений – 4 грн. Скільки і яких пакетів добрив необхідно купити, щоб забезпечити ефективність ґрунту у газоні й мінімізувати ціну пакета з добривами?

Розв’язання. Як і в прикладах задачі ЛП та транспортної задачі, побудуємо математичну модель.

Нехай x_1 – кількість стандартних пакетів добрив, x_2 – кількість поліпшених пакетів добрив.

Математична модель задачі про добрива має вигляд:

$$f(x, y) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \min \tag{A.13}$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 20, \\ x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ x_i \geq 0,\ i=1,2. \end{cases} \tag{A.14}$$

На робочому аркуші MS Excel математична модель (А.13–А.14) має таку реалізацію (рис. А.7).

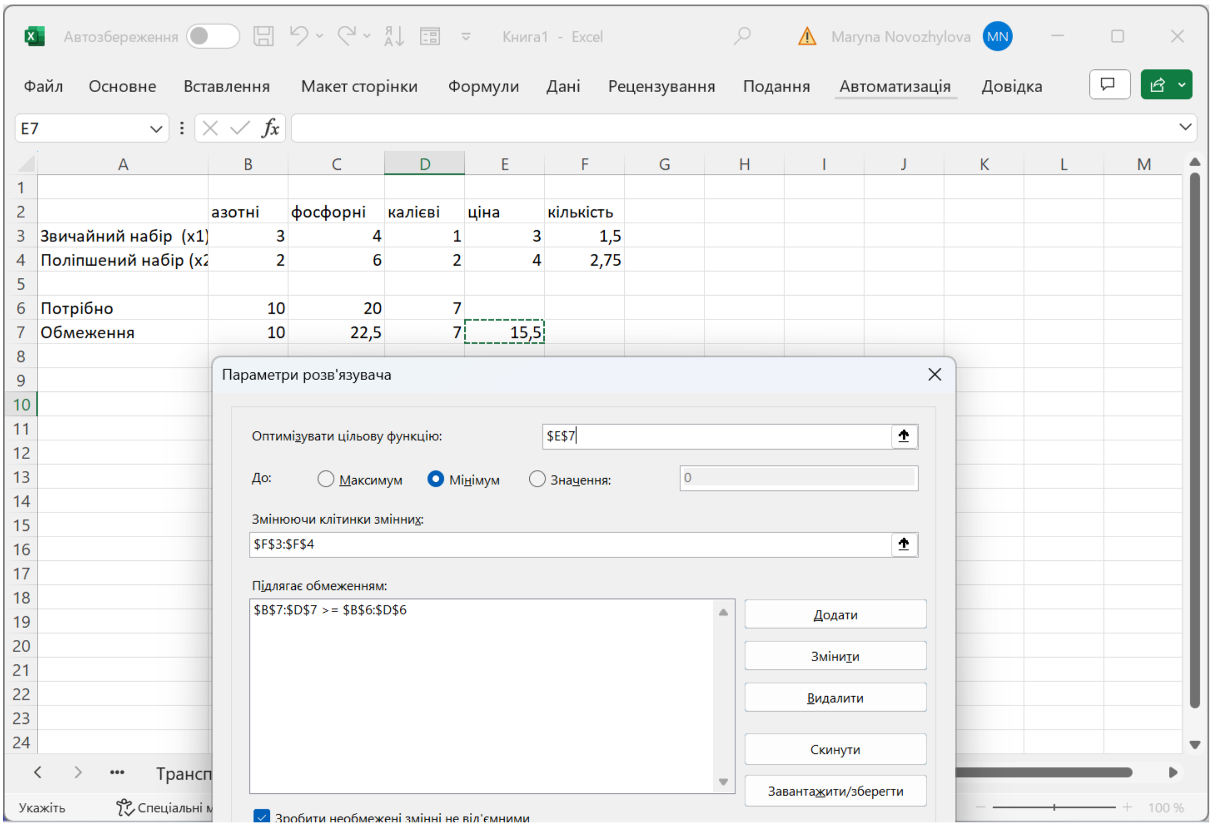

Рисунок А.7 – Розв'язок задачі без обмежень на цілочисельність

Наведемо формули для реалізації моделі: B7 = СУММПРОИЗВ (B3:B4, F3:F4). Ця формула скопійована в C7:D7 і в E7.

Виділимо комірку E7 з цільовою функцією і завантажимо «Дані / Розв'язувач». У діалоговому вікні розв'язувача потрібно вказати:

Оптимізувати цільову функцію: $E$7, Мінімум, Змінюючи клітинки змінних: $F$3:$F$4, Підлягає обмеженням : $B$7:$D$7 >= $B$6:$D$6.

Після запуску до виконання «Розв'язувач» дає такий результат: x_1 = 1.5, x_2 = 2.75. Цільова функція дорівнює 15.5.

На цьому етапі розв'язання обмеження на цілочисельність не враховуються.

Але ж пакети добрив не можна купувати частинами! Потрібно додати ще одне обмеження: x, y – цілі числа.

Знову звертаємось до засобу «Розв'язувач», натискаємо кнопку «Додати» і в діалоговому вікні «Додати обмеження» вказуємо, що $F$3:$F$4 — цілі (в тому ж списку, звідки раніше вибирали символ для обмеження). Як результат з'явиться нове обмеження: $F$3:$F$4 = ціле.

Після запуску до виконання «Розв'язувач» надає новий результат: одержано значення цільової функції 17 (воно змінилося), а кількість пакетів стала таким: x_1 = 3, x_2 = 2 (рис. А.8).

Зверніть увагу, що ці значення не є результатом округлення в більший бік значень x_1 та x_2, одержаних без обмежень цілочисельності.

Задача про призначення (задача з бінарними змінними)

Нехай є n виконавців та n видів робіт. Вартість c_{ij} виконання i-м виконавцем j-ї роботи наведена в таблиці А.6, де під рядком розуміємо виконавця, а під стовпчиком – роботу.

Таблиця А.6 – Вартість виконання робіт

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">Види робіт</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>...</td><td>n</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Виконавці</td><td>1</td><td>c_{11}</td><td>c_{12}</td><td>...</td><td>c_{1n}</td></tr>
<tr><td>2</td><td>c_{21}</td><td>c_{22}</td><td>...</td><td>c_{2n}</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>n</td><td>c_{n1}</td><td>c_{n2}</td><td>...</td><td>c_{nn}</td></tr>
</table>

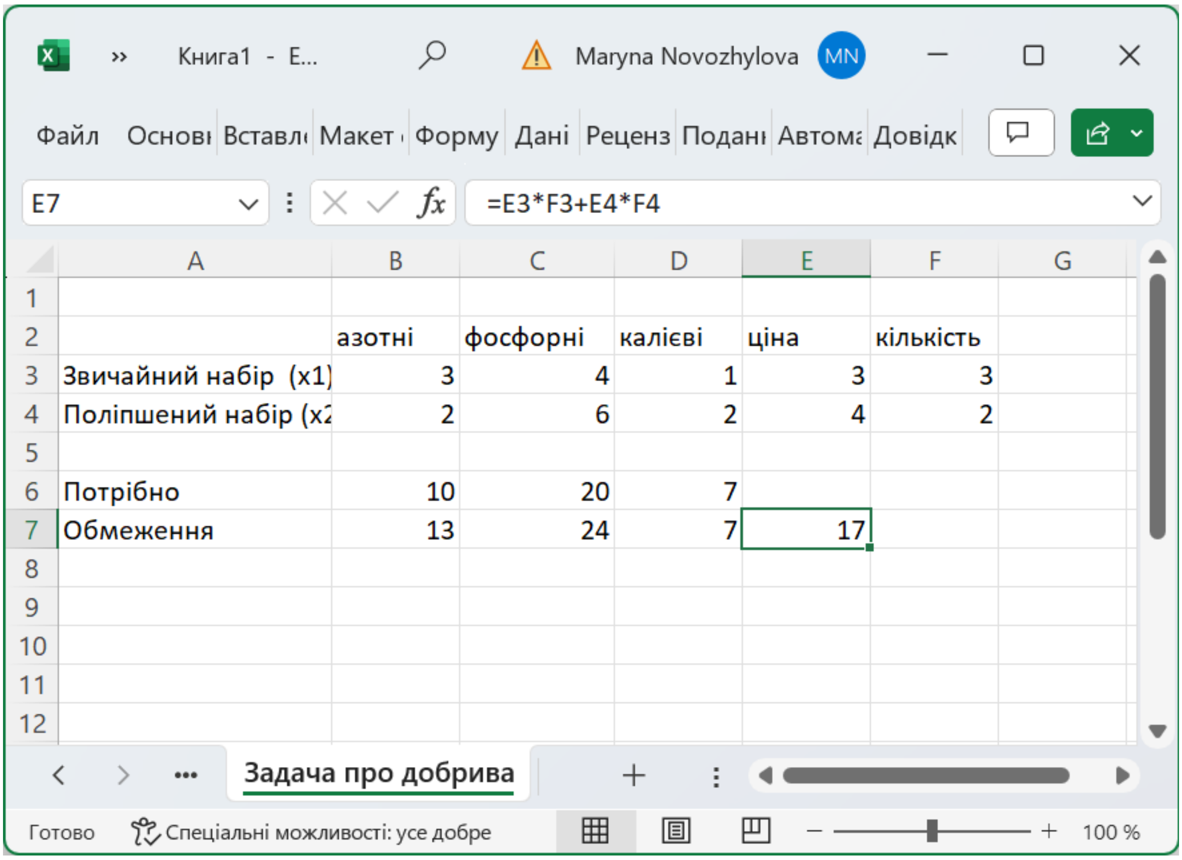

Рисунок А.8 – Розв’язок задачі з обмеженням на цілочисельність

Необхідно так скласти план виконання робіт, щоб усі роботи були виконаними, водночас кожному виконавцю була призначена тільки одна робота, а сумарна вартість виконання всіх робіт була мінімальною.

Зауваження 4. Цю задачу можна розглядати як особливий випадок транспортної задачі і вважати її збалансованою тому, що число робіт збігається з числом виконавців. Якщо задача незбалансована, то перед початком розв’язання її потрібно збалансувати, для чого потрібно ввести необхідне число фіктивних рядків або стовпчиків з достатньо великими штрафними вартостями робіт.

Побудуємо математичну модель цієї задачі. Позначимо символом x_{ij} змінну, яка має лише два допустимих значення: 0 або 1. Такі змінні є двоїстими. Причому будемо вважати, що:

– $x_{ij} = 1$, якщо j-та робота призначена i-му виконавцю;

– $x_{ij} = 0$, якщо j-та робота не призначена i-му виконавцю.

Тоді математичну модель задачі про призначення можна сформулювати у такий спосіб:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \qquad (A.15)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i=1,\dots,n, j=1,\dots,n.$$

Для розв'язання цієї задачі за допомогою засобу «Розв'язувач» здійснимо такі попередні дії:

1. Покладемо для цього прикладу n = 4.
2. Покладемо, що матриця вартості виконання робіт має вигляд (табл. А.7).

Таблиця А.7 – Вартість виконання робіт

		Види робіт			
		1	2	3	4
Виконавці	1	1	4	6	3
	2	9	10	7	9
	3	4	5	11	7
	4	8	7	8	5

1. У комірки діапазону A2:D5 аркушу MS Excel введемо вартість робіт (табл. А.7).

2. Відведемо комірки діапазону A1:D11 аркушу MS Excel під незалежні змінні x_{ij} задачі. На початку розв’язання ці комірки містять нулі.

3. У комірку С13 введемо функцію цілі, що обчислює вартість робіт:

=SUMPRODUCT(A2:D5;A8:D11).

4. У комірки діапазону B16:B19 і G16:G19 введемо формули, які задають ліві частини обмежень математичної моделі задачі про призначення.

5. У комірки діапазону C16:C19 і H16:H19 введемо праві частини обмежень задачі (рис. А.9).

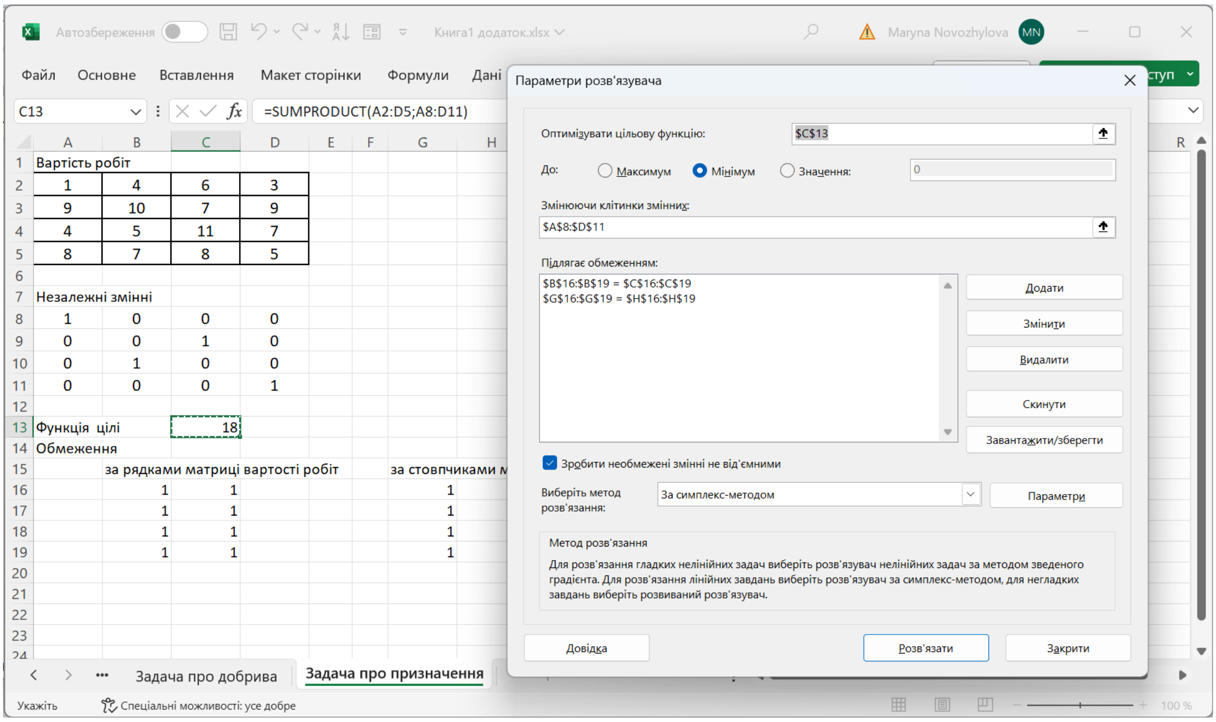

Рисунок А.9 – Вихідні дані та розв’язання задачі про призначення із заповненим діалоговим вікном «Розв’язувач»

Оптимальний розв’язок задачі про призначення, що розглядається:

– значення функції цiли – сумарна вартість виконання робіт – 18 умовних одиниць (комірка C13);

– розподіл робіт між виконавцями – оптимальні значення змінних x_{ij} – задається матрицею A8:D11.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу оптимізації.
2. Як визначаються обмеження в задачі оптимізації?
3. Дайте визначення функції цілі.
4. Як формулюються задачі математичного програмування?
5. Наведіть класифікацію задач математичного програмування.
6. Назвіть типи оптимізаційних задач.
7. Визначте функції цілі й обмеження задачі планування виробництва.
8. Визначте функції цілі й обмеження задачі про суміші (задача про дієту).
9. Визначте функції цілі й обмеження задачі про добрива для газонів.
10. Визначте функції цілі й обмеження для транспортної задачі.
11. Визначте функції цілі й обмеження задачі про призначення.
12. Наведіть методику розв’язання лінійних оптимізаційних задач.
13. Наведіть алгоритм розв’язання задачі планування виробництва.
14. Наведіть алгоритм розв’язання задачі про добрива для газонів.
15. Наведіть алгоритм розв’язання транспортної задачі.
16. Наведіть алгоритм розв’язання задачі про призначення.

Електронне навчальне видання

НОВОЖИЛОВА Марина Володимирівна,
ЧУБ Ольга Ігорівна

МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Відповідальний за випуск *М. В. Булаєнко*

Редактор *О. В. Михаленко*

Комп'ютерне верстання *М. В. Новожилова*

Підп. до друку 11.01.2024. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 6,7

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова,17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.