МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Л. Б. Коваленко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 1

Підручник

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2023

УДК 51+51-33](075.8)
К56

Автор

Коваленко *Людмила Борисівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензенти:

Колісник Р. С., кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри алгебри та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

Вороновська Л. П., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано до друку
Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова,
протокол № 9 від 25 травня 2023 р.

Коваленко Л. Б.

К56 Вища математика. Модуль 1 : підручник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2023. – 273 с.

ISBN 978-966-695-589-3

У підручнику розглядаються основні розділи вищої математики. Підручник містить найважливіші теоретичні відомості, приклади їх застосування для розв’язання задач.

Особливістю підручника є доповнення розділів ілюстрацією можливостей застосування табличного процесора MS Excel у розв’язанні задач курсу вищої математики.

Розрахований на студентів будівельних спеціальностей.

УДК 51+51-33](075.8)

ISBN 978-966-695-589-3

З М І С Т

Передмова 8
Розділ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА 9
1.1 Дійсні числа 9
1.2 Визначники 11
1.2.1 Основні визначення. Правила обчислення визначників 11
1.2.2 Обчислення визначників в MS EXCEL . . . 18
1.3 Матриці 20
1.3.1 Основні визначення 20
1.3.2 Операції над матрицями 21
1.3.3 Дії над матрицями із застосуванням MS EXCEL 31
1.4 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та методи їх розв’язання 37
1.4.1. Основні визначення 37
1.4.2 Теорема Крамера 38
1.4.3 Метод послідовного виключення невідомих. Метод Гауса 39
1.4.4 Матричний метод 44
1.4.5 Умова сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі 47
1.4.6 Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь 48
1.4.7 Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь із застосуванням MS EXCEL 50
1.5 Власні вектори та власні числа матриці 60
Контрольні запитання 63
Розділ 2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА 65
2.1 Вектори. Основні визначення 65
2.2 Координати вектора 68
2.3 Добутки векторів 72
2.4 Правила дій над векторами, заданими координатами 74

2.4 n-мірний вектор та векторний простір 82
Контрольні запитання 84
Розділ 3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ . . 86
3.1 Метод координат 86
3.1.1 Декартова система координат на площині 86
3.1.2 Довжина відрізка. Відстань між двома точками 87
3.1.3 Поділ відрізка у даному відношенні 88
3.1.4 Координати середини відрізка 90
3.1.5 Площа трикутника 92
3.2 Пряма лінія на площині 95
3.2.1 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом . 95
3.2.2 Загальне рівняння прямої 96
3.2.3 Рівняння прямої у відрізках 97
3.2.4 Рівняння прямої, що проходить через дві точки 98
3.2.5 Рівняння прямої, що проходить через дану точку $A(x, y)$ у даному напрямку k . 100
3.2.6 Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих 101
3.2.7 Нормальне рівняння прямої 103
3.2.8 Відстань від точки до прямої 106
3.2.9 Взаємне розташування прямих на площині 108
3.3 Лінії другого порядку на площині 109
3.3.1 Коло 110
3.3.2 Еліпс 111
3.3.3 Гіпербола 115
3.3.4 Парабола 119
3.3.5 Приклади розв’язання задач з аналітичної геометрії на площині 121
3.3.6 Застосування платформи MS EXCEL в розв’язанні задач аналітичної геометрії на площині 123
3.4 Полярна система координат 133
3.4.1 Зв’язок між полярними і прямокутними

координатами. 134
3.4.2 Рівняння ліній другого порядку у полярних координатах 135
Контрольні запитання 138
Розділ 4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ . . . 140
4.1 Площина у просторі 140
4.1.1 Нормальне рівняння площини 140
4.1.2 Загальне рівняння площини 141
4.1.3 Зведення загального рівняння площини до нормального виду 142
4.1.4 Дослідження загального рівняння площини 143
4.1.5 Рівняння площини у відрізках 143
4.1.6 Рівняння площини, яка проходить через задану точку 145
4.1.7 Рівняння площини, яка проходить через три дані точки 145
4.1.8 Взаємне розташування площин 146
4.1.9 Точка перетину трьох площин 147
4.1.10 Відстань від точки до площини 149
4.2 Пряма лінія у просторі 150
4.2.1 Рівняння прямої 150
4.2.2 Пряма як лінія перетину двох площин. Загальні рівняння прямої 152
4.2.3 Взаємне розташування прямих 154
4.2.4 Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки 155
4.2.5 Кут між прямою та площиною 156
4.1.6 Перетин прямої і площини 157
4.1.7 Розв’язання задач на пряму і площину у просторі 158
Контрольні запитання 161
Розділ 5 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ . . 163
5.1 Змінні величини і функції. 163
5.1.1 Змінні та сталі величини 163
5.1.2 Функції. Основні визначення 164

5.1.3 Способи завдання функції 166
5.1.4 Основні характеристики поведінки функції 168
5.2 Теорія границь 171
5.2.1 Границя змінної величини. Теореми о границях 171
5.2.2 Границя функції 172
5.2.3 Нескінченно малі і нескінченно великі величини та їх властивості 174
5.2.4 Основні теореми про границі функції 176
5.2.5 Невизначеності. Розкриття деяких типів невизначеностей 179
5.2.6 Важливі границі та їх застосування 184
5.2.7 Порівняння нескінченно малих 193
5.2.8 Неперервність функцій. Властивості неперервних функцій 196
Контрольні запитання 201
Розділ 6 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ 203
6.1 Похідна та диференціал 203
6.1.1 Поняття похідної як швидкості зміни функції 203
6.1.2 Визначення похідної 204
6.1.3 Техніка диференціювання елементарних функцій 204
6.1.4 Основні правила диференціювання 205
6.1.5 Похідна складної функції 208
6.1.6 Похідні обернених функцій 210
6.1.7 Таблиця похідних 210
6.1.8 Логарифмічне диференціювання 220
6.1.9 Диференціювання неявної функції 222
6.1.10 Диференціювання функцій, заданих параметрично 223
6.1.11 Похідні вищих порядків 224
6.1.12 Диференціал функції 228
6.1.13 Властивості диференціала 229

6.1.14 Застосування диференціалу у наближених обчисленнях 231
6.1.15 Геометричний зміст похідної і диференціалу 233
6.1.16 Фізичний зміст похідної та диференціалу 236
6.2 Основні теореми диференціального числення 238
6.2.1 Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші . . 238
6.2.2 Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя 243
6.3 Поведінка функції в інтервалі 249
6.3.1 Ознаки монотонності функції 249
6.3.2 Екстремуми функції 250
6.3.3 Схема дослідження функції на монотонність та екстремум 251
6.3.4 Найбільше і найменше значення функції в інтервалі 253
6.3.5 Опуклість та угнутість функцій. Точки перегину 255
6.3.6 Схема дослідження функції на опуклість, угнутість і точки перегину 257
6.3.7 Асимптоти функції 259
6.3.8 Загальна схема дослідження функції 262
6.3.9 Побудова графіків функцій за допомогою табличного процесора MS EXCEL 266
Контрольні запитання 270
СПИСОК ДЖЕРЕЛ 271

ПЕРЕДМОВА

Підручник побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами курсу «Вища математика». Доступне, коректне подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів для практичного закріплення вивченого.

Підручник розрахований на засвоєння матеріалу першого модуля. За програмою охоплені такі розділи вищої математики, як аналітична геометрія на площині та у просторі, лінійна та векторна алгебра; диференціальне числення функції однієї змінної.

Кожний розділ підручника має достатню кількість прикладів. Це дає змогу студентам очної та заочної форм навчання самостійно опановувати даний курс вищої математики.

Сучасні програми навчання приділяють велику увагу самостійний, позааудиторній роботі студентів, тому частина запропонованого у підручнику теоретичного матеріалу може бути винесена на самостійний розгляд студентами.

Особливістю даного підручника є ілюстрація застосування табличного процесору MS EXCEL при розв’язанні задач курсу вищої математики.

Основою підручника є цикли лекцій з вищої математики для студентів інституту будівельної та цивільної інженерії Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Розділ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1 Дійсні числа

Число – це найважливіше математичне поняття, яке з'явилось у давнину і на протязі тисячоліть удосконалювалось та узагальнювалось.

Дійсні числа охоплюють:

- ***натуральні числа*** – це числа, які використовують для лічби, наприклад, $1,2,3, \dots , n$;

- ***цілі числа*** – це числа утворені внаслідок додавання до множини всіх натуральних чисел числа нуль і від’ємних цілих чисел $(\dots , -3, -2, -1,0,1,2,3, \dots)$;

- ***раціональні числа*** – це такі числа, які можна подати у вигляді $\frac{p}{q}$, де p належить до множини цілих чисел, а q – до множини натуральних чисел;

- ***ірраціональні числа*** – це такі числа, які не можна записати у вигляді $\frac{p}{q}$.

Раціональні числа можна записати у вигляді десяткового дробу (скінченного або нескінченного періодичного), а ірраціональні числа можна записати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Приклад: число $\frac{2}{3} = 0,6666 \dots = 0,(6)$ - раціональне; число $\sqrt{2}$ - ірраціональне, його можна записати раціональним числом: $\sqrt{2} \approx 1,414213 \dots$

Для кожної множини чисел введено позначення: N – натуральні; Z – цілі; Q – раціональні; S – ірраціональні; R – дійсні.

Отже, до множини Q належать множини Z та N, а множина R утворена об’єднанням множин Q та S.

Дійсні числа упорядковані по величині, тобто для кожної пари дійсних чисел x та y має місце одне і тільки одне із співвідношень:

$$x < y, \;\; x = y, \;\; x > y.$$

Дійсні числа можна відобразити точками числової прямої (осі). Числовою віссю називають нескінченну пряму (рис. 1.1), на якій узято:

1) довільна точка O, яку звуть початком координат;

2) додатний напрям, який позначаємо стрілкою;

3) масштаб для вимірювання довжин (одиниця вимірювання). Вектор $\overrightarrow{OE}$ - одиничний вектор (орт). $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$.

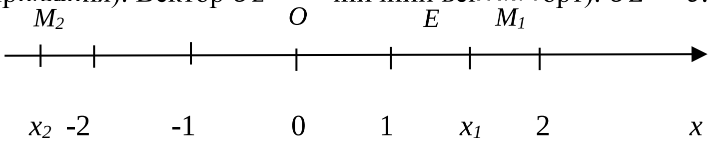


Рисунок 1.1 – Координатна вісь

Якщо число x_1 додатне, то його зображує точка M_1, яка лежить праворуч від точки O на відстані $OM_1 = x_1$; якщо число x від'ємне, то його зображує точка M_2, яка лежить ліворуч від точки O на відстані $OM_2 = -x_2$. Точка O зображує число нуль. Отже, кожне дійсне число зображається визначеною точкою числової осі. Два різних дійсних числа зображаються різними точками числової осі. Або кожна точка числової осі є відображенням тільки одного дійсного числа (раціонального або ірраціонального).

Таким чином, між всіма дійсними числами і всіма точками числової осі існує взаємно однозначна відповідність. Нагадаємо без доказу важливу властивість дійсних чисел; між двома довільними дійсними числами знайдуться як раціональні, так і ірраціональні числа.

Координатою точки M, що лежить на координатній осі, називають число x_0, яке визначається рівністю $x_0 = \pm\frac{|OM|}{|OE|}$; знак «+» беруть, якщо M праворуч і «-» – ліворуч від O.

Абсолютним значенням (або ***модулем***) числа a називається число, яке позначають $|a|$ і обчислюють за правилом

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

Абсолютне значення числа a додатне як для додатних, так і для від`ємних його значень і дорівнює нулю тільки при $a = 0$.

Приклад 1.1. Знайти абсолютні значення чисел 4 та -3.

Розв'язання: $|4| = 4$; $|-3| = 3$, тому що $|-3| = -(-3) = 3$.

Нагадаємо деякі властивості абсолютних величин:

а) $|x + y| \leq |x| + |y|$;   б) $|x - y| \geq |x| - |y|$;

в) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;   г) $|x / y| = |x| / |y|$.

Відстань d між точками M_1 і M_2 з координатами x_1 і x_2 обчислюють за формулою $d = |x_2 - x_1|$.

Приклад 1.2. Знайти відстань між точками: $M_1(-3)$; $M_1(2)$.

Розв'язання: $d = |-3 - 2| = |-5| = 5$.

1.2 Визначники

1.2.1 Основні визначення. Правила обчислення визначників

Визначення 1.1. ***Визначником*** n-го порядку називається число Δ_n, яке записано у вигляді квадратної таблиці чисел:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.1}$$

Позначають визначник ще як det від $determinate$ – «визначати», або $|a_{ij}|$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$.

Визначення 1.2. Числа a_{ij} називаються ***елементами визначника***, де i – номер рядка, а j – номер стовпця.

Елементи $a_{11},\ a_{22},\ a_{33}, \dots ,\ a_{nn}$ утворюють головну діагональ визначника.

Наша задача – навчитися обчислювати визначники, тобто «знаходити число». Правило обчислення визначників базується на таких поняттях як мінор та алгебраїчне доповнення.

Визначення 1.3. ***Мінором*** M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$ порядку, який утворюється з початкового визначника закресленням i-того рядка і j-того стовпця.

Визначення 1.4. ***Алгебраїчним доповненням*** A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Для визначників другого та третього порядків існують прості та легкі для запам'ятовування схеми обчислення. Познайомимося з ними.

Визначник другого порядку обчислюється так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Запам'ятати це легко за допомогою схеми (рис. 1.2): та за правилом «добуток множників, що розташовані на головній діагоналі береться з тим же знаком, а добуток множників, що розташовані на бічній діагоналі – з протилежним».

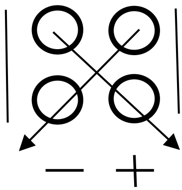


Рисунок 1.2 – Схема обчислення визначника другого порядку

Приклад 1.3. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання: $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 4 - 5 \cdot 7 = -12 - 35 = -47.$

Визначник третього порядку обчислюється за правилом Саррюса (правилом трикутників):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Запам'ятати це легко за допомогою схеми (рис. 1.3):

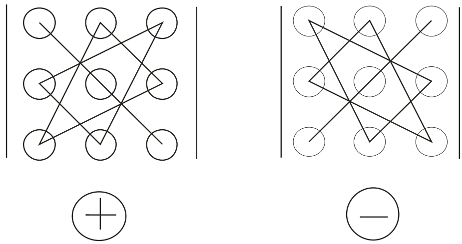


Рисунок 1.3 – Схема обчислення визначника третього порядку за правилом Сарюса

та за правилом «з тим же знаком беремо добуток елементів, що розташовані на головній діагоналі та на двох трикутниках, які будуємо так, щоб одна з сторін трикутника була паралельна головній діагоналі, яку утворюють елементи a_{11}, a_{22}, a_{33}, та всі елементи були на різних строках та в різних стовпцях; з протилежним знаком беремо добуток елементів, що розташовані на бічній діагоналі, яку утворюють елементи a_{13}, a_{22}, a_{31}, та на двох трикутниках, які будуємо так, щоб одна з сторін трикутника була паралельна бічній діагоналі та всі елементи були на різних строках та в різних стовпцях».

Приклад 1.4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 \cdot (-2) -$$

$$-1 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = -20 + 0 - 12 - 12 - 20 - 0 = -24.$$

Для обчислення визначників більш високих порядків таких зручних та легких схем не існує. Нам у нагоді буде загальне правило обчислення визначника n-го порядку.

Визначення 1.5. Визначник n-го порядку дорівнює сумі n добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}. \qquad (1.2)$$

Подане правило має назву: розкриття визначника за елементами рядка (стовпця).

***Основні властивості визначників*:**

1. Величина визначника не зміниться, якщо елементи рядків та стовпців змінити місцями.
2. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) дорівнюють нулю, такий визначник дорівнює нулю.
3. Якщо визначник має два однакових рядка (стовпця), такий визначник дорівнює нулю.
4. Якщо визначник має два пропорційні рядка (стовпця), такий визначник дорівнює нулю.
5. Якщо два рядки (стовпця) переставити місцями, то дістанемо визначник супротивного знаку.
6. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на число $k \neq 0$, то величина визначника зміниться у k разів.
7. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на одне й те саме число та додати до відповідних елементів іншого рядка (стовпця), то величина визначника не зміниться.
8. Якщо всі елементи i-того рядка (стовпця) визначника представити у вигляді суми двох додатків $a_i + b_i$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$, то визначник можна представити у вигляді суми двох визначників, у яких всі рядки (стовпці), крім i-того, такі самі, як у початковому визначнику, а i-тий рядок (стовпець) одного з визначників складається з елементів a_i, а другого – з елементів b_i .

Усі ці властивості доводяться за допомогою правила обчислення визначника. Наприклад, доведемо восьму властивість:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_1+b_1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+(a_2+b_2)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (a_3+b_3)\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_1\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_2\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_3\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} -$$

$$-b_1\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_2\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - b_3\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Початковий визначник розклали по елементах другого рядка, розкрили дужки. Перші три доданки утворюють перший визначник, а останні три доданки утворюють другий визначник.

Сьома властивість дозволяє утворювати нульові елементи у визначнику, що значно спрощує його обчислення.

Приклад 1.5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, розкриваючи його:

а) за елементами 4-го рядка; б) за елементами 3-го стовпця.

Розв'язання:

а) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 4-го рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}2&3&-1\\4&2&0\\-3&-1&5\end{vmatrix}=-2\cdot(0+4+0-0+2-60)+$$

$$+2\cdot(0+12+0-0+4-40)+4\cdot(4-36+0-0-12+8)$$

$$+2\cdot(20+0+4-6-0-60)=-2\cdot(-54)+2\cdot(-24)+$$

$$+4\cdot(-36)+2\cdot(-42)=108-48-144-84=-168.$$

б) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 3-го стовпця:

$$\begin{vmatrix}2&3&-1&0\\4&2&0&4\\-3&-1&5&1\\2&2&-4&2\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4&2&4\\-3&-1&1\\2&2&2\end{vmatrix}+$$

$$+5\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2&3&0\\4&2&4\\2&2&2\end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix}2&3&0\\4&2&4\\-3&-1&1\end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot(-8+4-24+8-8+12)+$$

$$+5\cdot(8+24+0-0-24-16)+4\cdot(4-36+0-0-12+8)$$

$$=-1\cdot(-16)+5\cdot(-8)+4\cdot(-36)=16-40-144=-168.$$

З розв’язання цього прикладу можемо зробити декілька висновків. По-перше, яким би способом ми не обчислювали визначник, відповідь буде незмінна. По-друге, при обчисленні визначника четвертого порядку, розкриваючи його за елементами рядка (стовпця), ми вимушені обчислювати чотири визначника третього порядку. По-третє, розкриваючи визначник за елементами третього стовпця, ми замість чотирьох визначників обчислили три, тому що один з елементів стовпця – нульовий. Отже, чим більше нулів у рядку (стовпці), тим менше обчислювань ми вимушені виконувати. Але не завжди за умовою ми маємо нульові елементи в визначниках!

Згадаємо сьому властивість визначників. Якщо ми зможемо підібрати множники таким чином, щоб додаючи помножені елементи одного рядка (стовпця) до елементів іншого рядка (стовпця), отримати нульові елементи (крім одного), то обчислення визначника n-го порядку зведеться до обчислення добутку одного елемента на визначник $(n-1)$-го порядку з урахуванням знаку. Скористаємось сьомою властивістю визначників для їх обчислення, розкладаючи останній по елементах рядка (стовпця) з попереднім отриманням нулів.

Зробимо ***зауваження***, які суттєво спростять обчислення визначників:

1) якщо отримуємо нулі в рядку, працюємо з стовпцями, якщо отримуємо нулі в стовпці, працюємо з рядками;

2) щоб уникнути необхідності працювати з дробовими множниками, будемо обирати елементи 1 або -1 (якщо є така можливість).

Приклад 1.6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, попередньо отримуючи нулі та розкриваючи його: а) за елементами 3-го рядка; б) за елементами 3-го стовпця.

Розв'язання:

а) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 3-го рядка, попередньо отримав нулі. Виберемо серед інших елемент 1. Щоб отримати в 3-му рядку всі елементи, крім обраного, нульовими, 4-тий стовпець (в якому знаходиться обраний елемент 1) множимо на 3 та додаємо до 1-го стовпця, множимо на 1 та додаємо до 2-го стовпця, множимо на -5 та додаємо до 3-го стовпця:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & \boxed{1} \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow(3) & \uparrow(1) & \uparrow(-5) & \end{array} \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 16 & 6 & -20 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -14 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 16 & 6 & -20 \\ 8 & 4 & -14 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-168 - 480 - 64 + 48 + 160 + 672) = -168.$$

б) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 3-го стовпця, попередньо отримав нулі. Виберемо елемент -1. Щоб отримати в 3-му стовпці всі елементи, крім обраного, нульовими, 1-ший рядок (в якому знаходиться обраний елемент -1) множимо на 5 та додаємо до 3-го рядка, множимо на -4 та додамо до 4-го рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & \boxed{-1} & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (5)\ (-4) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ 7 & 14 & 0 & 1 \\ -6 & -10 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 7 & 14 & 1 \\ -6 & -10 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(112 - 12 - 280 + 336 + 40 - 28) = -168.$$

1.2.2 Обчислення визначників в MS EXCEL

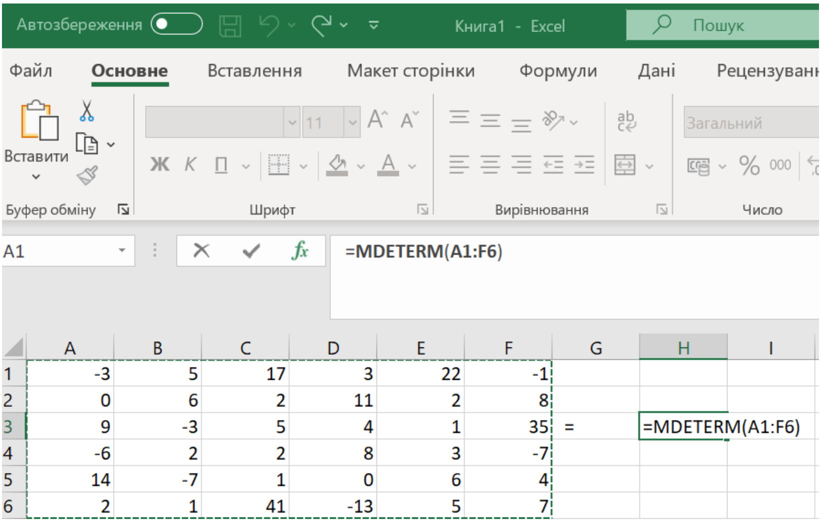
Обчислення визначників вищих порядків зазвичай проводиться багатокроковим отриманням нулів у рядку або стовпці. На даний час доступні пакети прикладних програм, які дозволяють розв'язання широкого спектру математичних задач. Запропонуємо читачеві ілюстрацію застосування однієї з найпоширеніших платформ – MS Excel – для розв'язання задач представленого курсу.

Для обчислення визначників використовується функція МОПРЕД(масив), де масив – діапазон комірок, в які внесені елементи визначника. Проілюструємо обчислення визначника в Excel на прикладі.

Приклад 1.7. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 17 & 3 & 22 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 11 & 2 & 8 \\ 9 & -3 & 5 & 4 & 1 & 35 \\ -6 & 2 & 2 & 8 & 3 & -7 \\ 14 & -7 & 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 41 & -13 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Розв'язання: Введемо в комірки елементи визначника. У комірку, де буде розміщено відповідь, вводимо функцію «=MDETERM( )». Обираємо «масив» - виділяємо курсором елементи матриці:



Натискаємо «Enter» – у виділеній комірці отримаємо відповідь:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	-3	5	17	3	22	-1		
2	0	6	2	11	2	8		
3	9	-3	5	4	1	35	=	**21043068**
4	-6	2	2	8	3	-7		
5	14	-7	1	0	6	4		
6	2	1	41	-13	5	7		

Зауважимо, що при розв'язанні задач на практичних заняттях та самостійній роботі, викладач вимагатиме навчитися обчисленню визначників за запропонованими правилами. Платформу Excel радимо застосовувати для обчислення визначників великих порядків та для самоперевірки.

1.3 Матриці

1.3.1 Основні визначення

Визначення 1.6. ***Матрицею*** $A = \|a_{ij}\|$ називається прямокутна таблиця чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.3)$$

яка складається з m рядків та n стовпців.

Визначення 1.7. Числа a_{ij} називаються ***елементами матриці***, де i – номер рядка $(i = \overline{1, m})$, а j – номер стовпця $(j = \overline{1, n})$.

Визначення 1.8. Матриця, число рядків якої дорівнює числу стовпців, називається ***квадратною*** матрицею.

Визначення 1.9. Квадратна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють *1*, а всі інші – *0*, називається ***одиничною***, та позначається як

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.4)$$

Визначення 1.10. Дві матриці A і B називаються ***рівними***, якщо вони однакового розміру та відповідні елементи a_{ij} і b_{ij} цих матриць рівні.

1.3.2 Операції над матрицями

Додавання (різниця) матриць. Додавати (віднімати) можна лише матриці однакового розміру.

Визначення 1.11. ***Сумою (різницею)*** двох матриць A і B розміру $m \times n$ називається матриця того же розміру, кожен елемент якої є сумою (різницею) елементів відповідних матриць A і B:

$$A + B = C, \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \tag{1.5}$$

$$A - B = D, \qquad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \tag{1.6}$$

Приклад 1.8. Знайти суму та різницю матриць

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 4+(-2) & -5+2 & 2+(-1) \\ 3+3 & 1+0 & -7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 4-(-2) & -5-2 & 2-(-1) \\ 3-3 & 1-0 & -7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць на число.

Визначення 1.12. Добутком матриці A на число λ називається матриця B, кожен елемент якої є добутком числа λ на відповідний елемент матриці A:

$$B = \lambda \cdot A, \qquad b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}.$$

Приклад 1.9. Знайти добуток матриці $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & 9 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 7$.

Розв’язання:

$$B = 7 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 \cdot (-5) & 7 \cdot 6 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot 9 \\ 7 \cdot 0 & 7 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 42 \\ 14 & 63 \\ 0 & -28 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць. Множити можна матриці лише в тому випадку, якщо число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої. В добутку отримаємо матрицю, у якої стільки рядків, скільки у першої матриці, і стільки стовпців, скільки у другої.

Визначення 1.13. Добутком матриць $A\ [m \times n]$ і $B\ [n \times k]$ називається матриця $C\ [m \times k]$, елементи якої обчислюються за правилом

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj} \quad (1.7)$$

$\left(\text{де } i = \overline{1,m}; j = \overline{1,k}\right)$.

Схематично розмір отриманої матриці можна зобразити наступним чином:

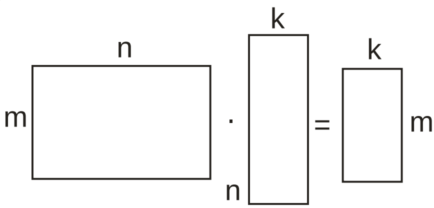


Рисунок 1.4 – Схема визначення розміру матриці-добутку

Що стосується правила для обчислення елементів матриці-добутку, то його схематично можна зобразити так:

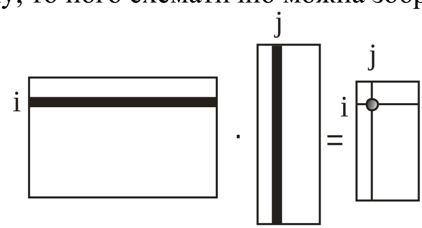


Рисунок 1.5 – Схема обчислення елементу матриці-добутку

Щоб отримати елемент c_{ij}, необхідно скласти суму добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B. При виконанні цього завдання радимо користуватися олівцем та гумкою, закреслюючи відповідні рядки першої та стовпці другої матриць.

Зауваження. В загальному випадку операція множення матриць не комутативна, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$, навіть коли це можливо.

Приклад 1.10. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти добуток матриць $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо це можливо.

Розв'язання:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-7) \cdot (-4) & 2 \cdot 0 + (-7) \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + (-7) \cdot 5 \\ 1 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) & 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) & 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + 6 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 + 28 & 0 - 7 & -4 - 35 \\ 3 - 20 & 0 + 5 & -2 + 25 \\ 12 - 24 & 0 + 6 & -8 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -7 & -39 \\ -17 & 5 & 23 \\ -12 & 6 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 & 3 \cdot (-7) + 0 \cdot 5 + (-2) \cdot 6 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & (-4) \cdot (-7) + 1 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 0 - 8 & -21 + 0 - 12 \\ -8 + 1 + 20 & 28 + 5 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -33 \\ 13 & 63 \end{pmatrix}.$$

В розглянутому прикладі можливі були операції множення $A \cdot B$ і $B \cdot A$. В результаті ми отримали матриці не тільки з різними елементами, але й різного розміру. В першому випадку ми отримали матрицю розміром 3×3, а в другому – 2×2.

Зауваження. Для квадратних матриць однакового порядку операція множення матриць можлива завжди.

Якщо A і B – дві квадратні матриці n-го порядку, то їх добуток $A \cdot B$ – матриця n-го порядку. Виникає питання, а чи пов'язані між собою визначники цих матриць?

Теорема 1.1. Визначник добутку двох квадратних матриць n-го порядку дорівнює добутку визначників матриць-множників.

Доведення цієї теореми виходить за рамки нашого курсу. Перевіримо її результати на прикладі.

Приклад 1.11. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Знайти визначники матриць A, B і $A \cdot B$.

Розв'язання:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5+3+32 & 1-1+8 & 2+0-48 \\ 10+0+20 & 2+0+5 & 4+0-30 \\ 15+3+16 & 3-1+4 & 6+0-24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 8 & -46 \\ 30 & 7 & -26 \\ 34 & 6 & -18 \end{pmatrix};$$

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 15 - 16 - 0 + 5 + 8 = -18;$$

$$detB = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -30 + 0 - 6 - 8 - 0 - 18 = -62;$$

$$det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 40 & 8 & -46 \\ 30 & 7 & -26 \\ 34 & 6 & -18 \end{vmatrix} = -5040 - 7072 - 8280 +$$

$$+10948 + 4320 + 6240 = \mathbf{1116};$$

$$detA \cdot detB = -18 \cdot (-62) = \mathbf{1116}.$$

Як бачимо, $detA \cdot detB = det(A \cdot B)$.

Транспонування матриць. Нехай дано A-матриця розміром $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Визначення 1.14. Матриця, що утворюється з матриці A заміною рядків стовпцями (або навпаки), називається ***транспонованою*** матрицею відносно матриці A і позначається A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.8)$$

Приклад 1.12. Знайти транспоновану матрицю A^T відносно матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: $A^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Обернена матриця.

Визначення 1.15. Нехай A – квадратна матриця n-го порядку. Квадратна матриця A^{-1} (n-го порядку) називається ***оберненою*** до A, якщо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Визначення 1.16. Квадратна матриця A n-го порядку називається ***невиродженою***, якщо її визначник $detA$ відрізняється від нуля, в протилежному випадку матриця називається ***виродженою***.

Теорема 1.2. Будь-яка невироджена матриця A має єдину обернену матрицю A^{-1}.

Обернену матрицю будемо знаходити за ***схемою***:

1) обчислюємо визначник матриці $detA$;

2) знаходимо транспоновану матрицю A^T;

3) обчислюємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці;

4) записуємо обернену матрицю за правилом:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix}. \qquad (1.9)$$

5) виконуємо перевірку, обчислив $A \cdot A^{-1} = E$ або $A^{-1} \cdot A = E$.

Приклад 1.13. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$detA = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 0 + 12 - 60 - 0 + 12 = -24;$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8;$$

$$A_{12}^T = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = 6;$$

$$A_{13}^T = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12;$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 20) = 24;$$

$$A_{22}^T = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24;$$

$$A_{23}^T = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(-12 - 12) = 24;$$

$$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 10 = -8;$$

$$A_{32}^T = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-3 - 0) = 3;$$

$$A_{33}^T = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6.$$

$$A^{-1} = -\tfrac{1}{24} \begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} 24 + 12 - 60 & 0 + 12 - 12 & -48 + 24 + 24 \\ -72 - 48 + 120 & 0 - 48 + 24 & 144 - 96 - 48 \\ 24 + 6 - 30 & 0 + 6 - 6 & -48 + 12 + 12 \end{pmatrix} =$$

$$= -\tfrac{1}{24} \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, перевірка показала, що обернена матриця знайдена вірно.

$$\textit{Відповідь}: A^{-1} = -\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці. Елементарні перетворення.

Нехай дано прямокутну матрицю A розміром $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(В окремому випадку можлива рівність $m = n$, тобто матриця A може бути квадратною).

Нехай k – довільне натуральне число, що не перевищує m і n. Оберемо в A довільним способом k рядків з номерами $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ та k стовбців з номерами $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$. З елементів матриці A, що розташовані на перетині обраних k рядків і k стовпців, утворимо визначник:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник називається мінором k-го порядку матриці.

Визначення 1.17. ***Рангом матриці*** A ($rangA$) називається таке ціле число r, що серед мінорів r-го порядку матриці A є хоча б один такий, що відрізняється від нуля, а всі мінори $(r+1)$-го порядку (якщо їх можна скласти) дорівнюють нулю.

Метод знаходження рангу матриці за визначенням 1.17 називається ***«методом відокремлених мінорів»***. Розберемо цей метод на прикладі.

Приклад 1.14. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

На перетині, наприклад, першого рядка і першого стовпця розташований елемент -5 $\neq 0$. Отже ранг матриці не менший від одиниці.

З елементів, що розташовані, наприклад, на перетині перших двох рядків і перших двох стовпців, утворимо мінор (визначник) другого порядку:

$\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 0 = -15 \neq 0$, Отже, ранг матриці не менший від двох.

З елементів, що розташовані, наприклад, на перетині трьох рядків і перших трьох стовпців, утворимо мінор (визначник) третього порядку:

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -120 + 4 + 0 - 24 - 0 + 20 = -120 \neq 0.$$

Отже, ранг матриці не менший від трьох. Визначник четвертого порядку скласти неможливо, тому що матриця A має 3 рядки та чотири стовпці. Тому ранг матриці дорівнює трьом.

Відповідь: $rangA = 3$.

Визначення 1.18. Під ***елементарними перетвореннями*** матриці маємо наступні операції:

1) множення будь-якого рядка (стовпця) матриці на число, що відрізняється від нуля;

2) додавання до елементів одного рядка (стовпця) матриці відповідних елементів другого рядка (стовпця), що помножені на одне й теж саме число;

3) заміна місцями двох рядків (стовпців).

Зауваження. Елементарні перетворення обернені, тобто якщо матриця B отримана з матриці A за допомогою деякого елементарного перетворення, то і матриця A може бути отримана з матриці B за допомогою деякого елементарного перетворення (що називається оберненим).

Теорема 1.3. Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці, тобто якщо $A \to B$ то $rangA = rangB$.

Цією теоремою можна скористатися для обчислення рангу матриці. Для знаходження рангу матриці розміру $m \times n$ необхідно за допомогою елементарних перетворень звести початкову матрицю до вигляду, в якому всі елементи дорівнюють одиниці або нулю. Ранг матриці буде дорівнювати числу відмінних від нуля елементів перетвореної матриці.

Цей метод знаходження рангу матриці називається ***«методом елементарних перетворень».*** Розберемо цей метод на прикладі.

Приклад 1.15. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Другий стовпець перемістили на місце першого, а третій стовпець поділили на 2. Перший рядок помножено на (-3) і додано до другого рядка. Перший рядок помножено на (-2) і додано до третього рядка.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 15 & -5 & 18 \\ 0 & 12 & 0 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

Перший стовпець має один елемент, що дорівнює 1, а інші елементи дорівнюють нулю. Цей стовпець послідовно помножимо на 5, -2 та 7 і додамо до другого, третього та четвертого стовпців. Отримаємо у першому рядку одиницю, а решту нулі.

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 15 & -5 & 18\\0 & 12 & 0 & 15\end{pmatrix}\sim$$

Третій стовпець поділимо на -5 і одержимо в ньому 2 нулі і одну одиницю. Третій стовпець помножимо на -15 і -18 та додамо до другого і третього стовпців. Отримаємо у другому рядку три нульових елементи і одну одиницю.

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 15 & 1 & 18\\0 & 12 & 0 & 15\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 12 & 0 & 15\end{pmatrix}\sim$$

Другий стовпець поділимо на 12, а четвертий стовпець поділимо на 15. Отримаємо два однакових стовпця. Від четвертого стовпця віднімемо другий і отримаємо нульовий стовпець

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже маємо три відмінних від нуля елементи перетвореної матриці, тому ранг матриці A дорівнює трьом.

Відповідь: $rangA = 3$.

1.3.3 Дії над матрицями із застосуванням MS EXCEL

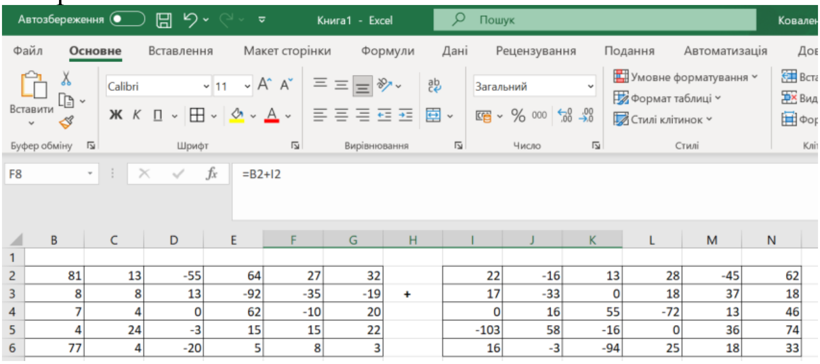
1. Додавання (віднімання) матриць

Нагадаємо, що додавати та віднімати можна лише матриці однакового розміру!

Заповнюємо масиви матриць, які необхідно додати (відняти). В першій комірці матриці суми (різниці) вводимо формулу: сума (різниця) елементів заданих матриць. Натискаємо «Enter», розтягуємо формулу на весь діапазон комірок результуючої матриці.

Приклад 1.16. Знайти суму матриць

Розв'язання: Виконаємо додавання за описаним алгоритмом:

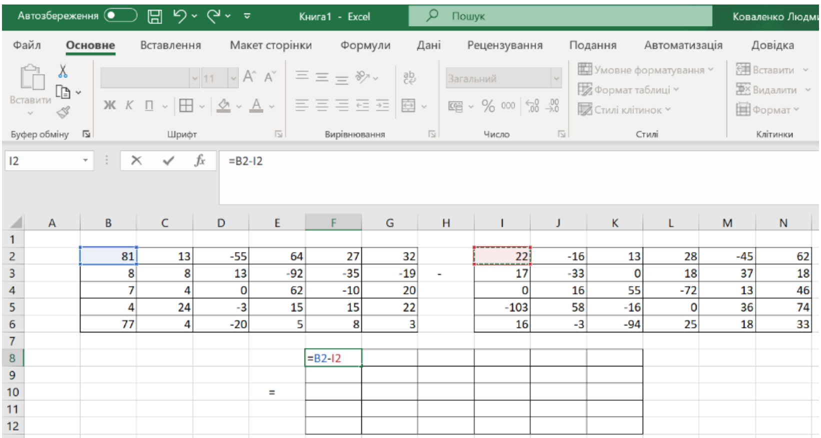


	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
2	81	13	-55	64	27	32		22	-16	13	28	-45	62
3	8	8	13	-92	-35	-19	+	17	-33	0	18	37	18
4	7	4	0	62	-10	20		0	16	55	-72	13	46
5	4	24	-3	15	15	22		-103	58	-16	0	36	74
6	77	4	-20	5	8	3		16	-3	-94	25	18	33

	103	-3	-42	92	-18	94
	25	-25	13	-74	2	-1
=	7	20	55	-10	3	66
	-99	82	-19	15	51	96
	93	1	-114	30	26	36

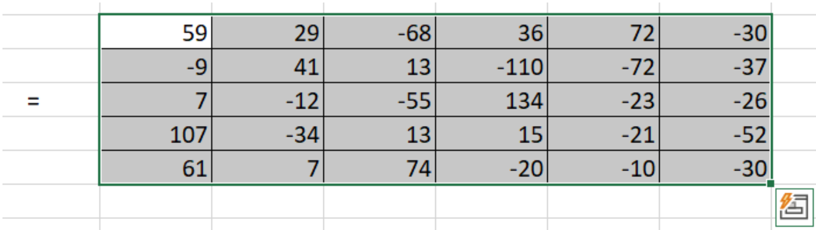
Приклад 1.17. Знайти різницю матриць.

Розв'язання: Виконаємо віднімання за описаним алгоритмом:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
2		81	13	-55	64	27	32		22	-16	13	28	-45	62
3		8	8	13	-92	-35	-19	-	17	-33	0	18	37	18
4		7	4	0	62	-10	20		0	16	55	-72	13	46
5		4	24	-3	15	15	22		-103	58	-16	0	36	74
6		77	4	-20	5	8	3		16	-3	-94	25	18	33
8						=B2-I2								
10					=									

Отримаємо результат:

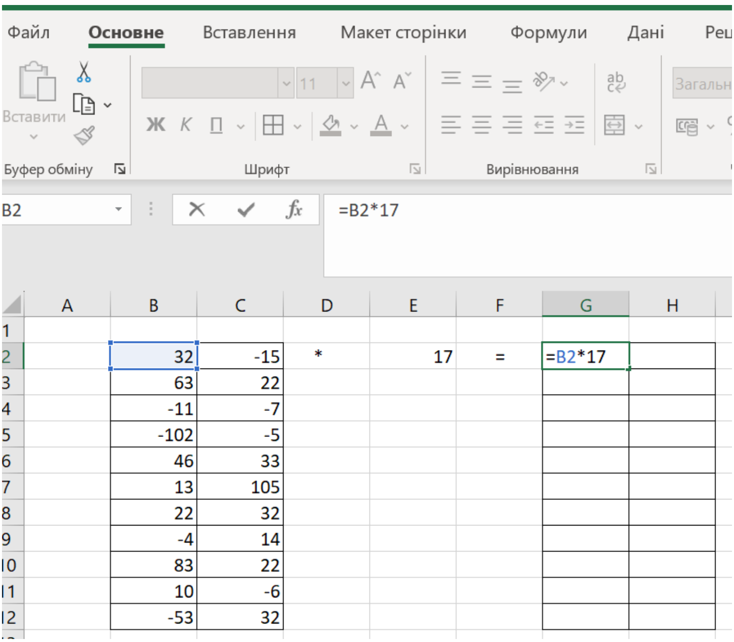


	59	29	-68	36	72	-30
	-9	41	13	-110	-72	-37
=	7	-12	-55	134	-23	-26
	107	-34	13	15	-21	-52
	61	7	74	-20	-10	-30

2. ***Множення матриці на число***. При множенні матриці на число в першу комірку матриці-добутку вводимо формулу «перший елемент заданої матриці*число», натискаємо «Enter» і розтягуємо формулу на весь діапазон комірок результуючої матриці.

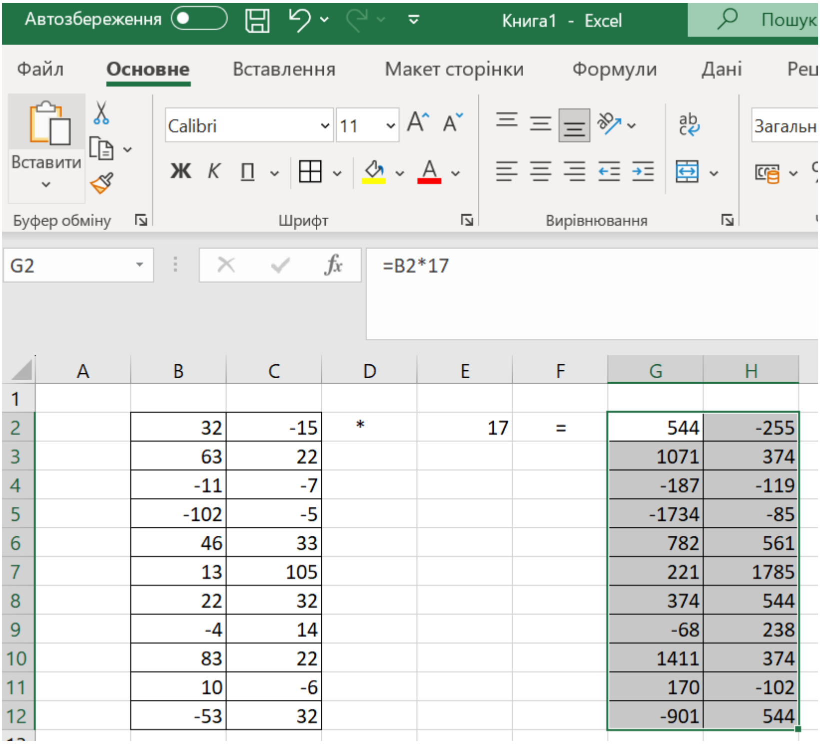
Приклад 1.18. Помножити матрицю на число.

Розв'язання: Виконаємо операцію множення матриці на число за описаним алгоритмом:



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		32	-15	*	17	=	=B2*17	
3		63	22					
4		-11	-7					
5		-102	-5					
6		46	33					
7		13	105					
8		22	32					
9		-4	14					
10		83	22					
11		10	-6					
12		-53	32					

В результаті маємо:

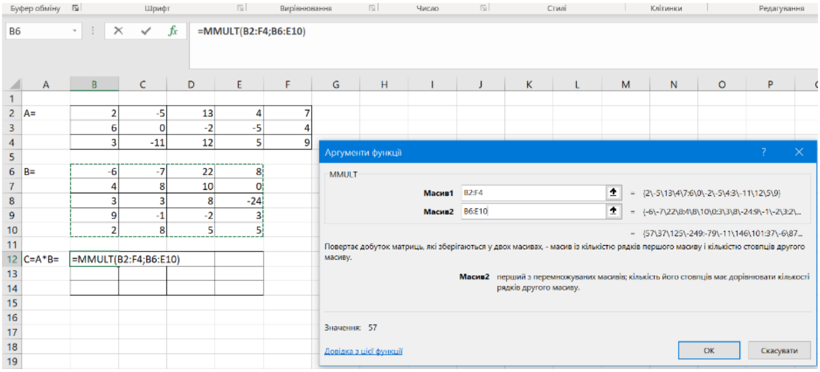


	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		32	-15	*	17	=	544	-255
3		63	22				1071	374
4		-11	-7				-187	-119
5		-102	-5				-1734	-85
6		46	33				782	561
7		13	105				221	1785
8		22	32				374	544
9		-4	14				-68	238
10		83	22				1411	374
11		10	-6				170	-102
12		-53	32				-901	544

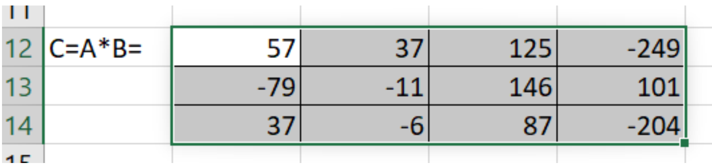
3. ***Множення матриць.*** Множення матриць в MS Excel виконується за допомогою функції **MMULT(масив1;масив2)**. Обов'язково перевіряємо, щоб кількість стовпців в **масив1** дорівнювала кількості рядків в **масив2**. При роботі з останніми версіями Microsoft365, достатньо ввести формулу у верхню ліву клітинку вихідного діапазону та натиснути "Enter". При роботі з попередніми версіями Excel необхідно спочатку виділити діапазон вихідних даних (розмір якого визначаємо відповідно до вивченого правила), ввести формулу у верхню ліву клітинку вихідного діапазону та натиснути комбінацію клавіш "Ctrl+Shift+Enter".

Приклад 1.19. Знайти добуток матриць.

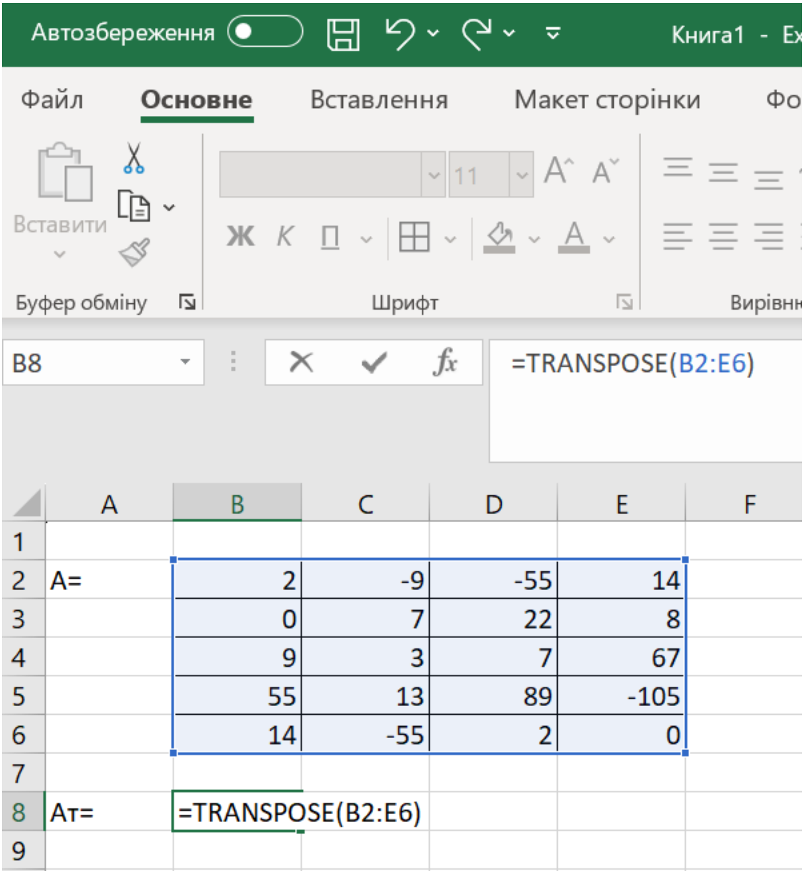
Розв'язання: Виконаємо операцію множення матриць за описаним алгоритмом:



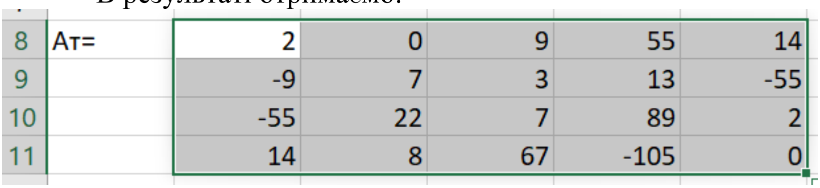
В результаті отримаємо:



4. ***Транспонування матриць***. Транспонування матриць в MS Excel виконується за допомогою функції **TRANSPOSE(масив).**



В результаті отримаємо:



1.4 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та методи їх розв'язання

1.4.1. Основні визначення

Визначення 1.19. ***Система*** m ***лінійних рівнянь*** з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.10}$$

де числа a_{ij} називаються коефіцієнтами системи; $b_i -$ вільними членами; $x_1, x_2, \dots, x_n -$ невідомими.

Визначення 1.20. Сукупність n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ називається ***розв'язком системи*** (1.10), якщо заміна невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ відповідно, кожне рівняння системи перетворює в тотожність.

Визначення 1.21. Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язка.

Визначення 1.22. Сумісна система рівнянь називається ***визначеною***, якщо має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо розв'язків більш, ніж один.

Визначення 1.23. Система рівнянь (1.10) називається ***однорідною***, якщо всі числа b_i дорівнюють нулю; і ***неоднорідною***, якщо хоча б одне з b_i відмінно від нуля.

Стосовно кожної системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна поставити наступні запитання:

- чи сумісна система лінійних рівнянь?
- у випадку сумісності, як визначити кількість розв'язків?
- як розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь?

Відповідь на всі поставлені питання нам надає теорія лінійних алгебраїчних рівнянь.

1.4.2 Теорема Крамера

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}, \qquad (1.11)$$

Визначення 1.24. Визначник, що складений з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих системи (1.11), називається ***визначником системи*** Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.12)$$

Визначення 1.25. Δ_k – це визначник, що отримується з визначника системи Δ заміною k-го стовпця вільними членами системи:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.13)$$

Теорема Крамера. Якщо визначник Δ системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими відрізняється від нуля, то така система має єдиний розв’язок, який знаходиться за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (1.14)$$

Формули (1.14) мають назву ***формул Крамера***.

Зауваження. Недоцільно застосування формул Крамера у системах з великою кількістю невідомих, тому що це вимагає від нас обчислення $n+1$ визначника n порядку. Тому формули Крамера, частіше за все, застосовують для розв’язання систем 2 – 4 порядків.

Приклад 1.20. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за правилами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -10, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 18 + 4 + 15 + 6 + 16 = 39;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 3 & -1 \\ -10 & 5 & 2 \\ 11 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 90 + 66 - 40 + 55 - 72 - 60 = 39;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -9 & -1 \\ 1 & -10 & 2 \\ 3 & 11 & -2 \end{vmatrix} = 40 - 54 - 11 - 30 - 18 - 44 = -117;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 5 & -10 \\ 3 & -4 & 11 \end{vmatrix} = 110 - 90 + 36 + 135 - 33 - 80 = 78;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-117}{39} = -3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{78}{39} = 2.$$

Перевірка. Підставимо отримані значення, наприклад, в перше рівняння системи: $2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - 2 = -9$. Ми отримали тотожність.

Відповідь: $x_1 = 1; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = 2.$

1.4.3 Метод послідовного виключення невідомих. Метод Гауса

Нехай дано систему m лінійних рівнянь з n невідомими (1.10). Розглянемо матрицю A системи (1.10) та її розширену матрицю $\tilde{A}$ (матрицю, що складається з елементів матриці A та стовпця вільних членів B):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.15)$$

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right). \qquad (1.16)$$

Метод Гауса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень розширену матрицю системи $\tilde{A}$ зводять до трапецієподібного вигляду.

До елементарних перетворень відносяться наступні дії:

- переміна рядків місцями;
- почлений добуток будь-якого рядка на число, відмінне від нуля;
- почленне додавання елементів будь-якого рядка до відповідних елементів іншого рядка.

Підбір коефіцієнтів, на які будемо множити рядки проводиться за наступним правилом: після множення коефіцієнти при першій змінній мають бути протилежними числами. А саме, при виключенні невідомої x_1 відповідні коефіцієнти знаходяться за формулою

$$-\frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = \overline{2;n};$$

При виключенні невідомої x_2:

$$-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad i = \overline{3;n},$$

де в $a_{i2}^{(1)}, a_{22}^{(1)}$ верхній індекс(1) позначає нові коефіцієнти при невідомих після першої ітерації. Таку процедуру повторюємо $n-1$ разів до приведення матриці до трапецієподібного вигляду.

Після того (як матриця $\tilde{A}$ стала трапецієподібною) з легкістю можна відповісти на запитання про сумісність системи та про кількості розв’язків. Зводити матрицю системи до трапецієподібної форми будемо у наступний спосіб. Спочатку в усіх рівняннях системи, крім першого вилучимо невідому x_1; потім в усіх рівняннях, крім першого і другого – невідому x_2 і так далі.

Так як кожному елементарному перетворенню системи відповідає елементарне перетворення розширеної матриці системи (і навпаки), то замість системи (для скорочення запису) будемо працювати з розширеною матрицею цієї системи, виконуючи перетворення лише над рядками.

Зауваження. Метод Гауса застосовують для розв’язання систем з будь-якою кількістю невідомих, тому що зі зростанням n кількість обчислень зростає несуттєво.

Для ілюстрації метода Гауса розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1.20. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Розв’язання. Поставимо у відповідність системі розширену матрицю $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -2 & 6 \end{array}\right) (-3), (-2), (-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -13 & 4 & -6 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 10 \end{array}\right) : (-5) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -13 & 4 & -6 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -13 & 4 & -6 & 17 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 10 \end{array}\right)\cdot(13),(3)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :(-9) \\ :4 \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{array}\right)\cdot(-1)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 17/12 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot 3 \\ \cdot 12/17 \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, з останнього рівняння маємо: $x_4 = 0$.

Третій рядок розширеної матриці:

$$3x_3 + 2x_4 = 3.$$

Підставимо знайдене значення x_4, отримаємо:

$$3x_3 + 2\cdot 0 = 3; \quad x_3 = 1.$$

З другого рядка маємо

$$x_2 - x_3 = -2;\ x_2 - 1 = -2; \quad x_2 = -1.$$

І, нарешті, з першого рядка розширеної матриці

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -4,$$

з урахуванням знайдених $x_2, x_3\ x_4$:

$$x_1 + 4\cdot(-1) - 2\cdot 1 + 0 = -4, \text{ маємо } x_1 = 2.$$

Після перевірки можемо записати відповідь.

Відповідь: $x_1 = 2; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 0.$

Приклад 1.21. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -3, \\ 4x_1 + 13x_2 - 22x_3 + 11x_4 = 7, \\ -2x_1 - 7x_2 + 12x_3 - 9x_4 = -3. \end{cases}$$

Розв’язання. Поставимо у відповідність системі розширену матрицю $\tilde{A}$:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 6 & -3 \\ 4 & 13 & -22 & 11 & 7 \\ -2 & -7 & 12 & -9 & -3 \end{array}\right) \cdot 1, (-4), 2 \sim$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 1 \end{array}\right) \cdot (-1), 1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже ми отримали систему $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -1, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$

Останні два рівняння перетворилися в рівняння вигляду:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0.$$

Ці рівняння задовольняються при будь-яких значеннях невідомих, тому їх можна відкинути. Щоб задовольнити другому рівнянню, ми можемо для x_3 і x_4 обрати будь-які значення α і β, тоді значення для x_2 визначиться однозначно:

$$x_2 - 2 \cdot \alpha + 7 \cdot \beta = -1; \quad x_2 = -1 + 2\alpha - 7\beta.$$

З першого рівняння

$$x_1 + 3 \cdot (-1 + 2\alpha - 7\beta) - 5\alpha + \beta = 2$$

також однозначно визначимо $x_1 = 5 - \propto + 20\beta$. Остання система рівносильна початковій, тому формули

$$x_1 = 5 - \propto + 20\beta;$$
$$x_2 = -1 + 2\alpha - 7\beta;$$
$$x_3 = \alpha;$$
$$x_4 = \beta.$$

при довільних α і β дають нам всі розв'язки системи. Як бачимо, їх нескінчена множина.

Приклад 1.22. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 \qquad\quad + 7x_4 = 0 \\ -3x_1 + 13x_2 - 5x_3 - 8x_4 = -6 \\ 5x_1 + 11x_2 + 11x_3 + 8x_4 = 11 \end{cases}.$$

Розв'язання. Поставимо у відповідність системі розширену матрицю $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 13 & -5 & -8 & -6 \\ 5 & 11 & 11 & 8 & 11 \end{array}\right) \cdot (-2), 3, (-5) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \cdot (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right).$$

Отже, задана за умовою система рівносильна наступній:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ \qquad x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2, \\ \qquad 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -3, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 9. \end{cases}$$

Ця система несумісна, тому що її останнє рівняння

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 9$$

не може бути задоволене ніякими значеннями невідомих.

Відповідь: Система несумісна.

1.4.4 Матричний метод

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (1.11). Поставимо у відповідність системі (1.11) матричне рівняння

$$A \cdot X = B, \qquad (1.17)$$

де A - матриця коефіцієнтів при невідомих, X - стовпець невідомих, B - стовпець вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Будемо вважати, що визначник матриці A системи (1.11) відрізняється від нуля. За теоремою Крамера така система має єдиний розв'язок. З іншого боку, для невиродженої матриці A існує обернена матриця A^{-1}.

Помножимо обидві частини рівності (1.17) зліва на A^{-1}. Така операція можлива, тому що A^{-1} – квадратна матриця n-го порядку, а матриці-стовпці X і B мають розмір $n \times 1$. Отримаємо

$$A^{-1} \cdot (AX) = (A^{-1} \cdot A)X = EX = X = A^{-1} \cdot B.$$

Отже, щоб розв'язати систему (1.11), представлену у вигляді (1.17), необхідно обчислити

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{1.18}$$

Зауваження. Як і для метода Крамера, практичне обмеження для застосування матричного методу при розв'язанні систем з великою кількістю невідомих, обумовлено необхідністю обчислення великої кількості визначників: одного визначника n порядку (визначник матриці A) та n визначників $(n-1)$-го порядку (алгебраїчні доповнення).

Приклад 1.23. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -11, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. У відповідності до (1.17) складемо матриці невідомих, коефіцієнтів при невідомих та вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix};\ \ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ \ B=\begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 20 - 2 - 1 - 15 - 16 = -20 \neq 0,$$

тобто матриця невироджена і обернена до неї існує.

Транспонуємо матрицю:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці:

$$A_{11}^T = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 5 = -7;$$

$$A_{12}^T = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(8 + 1) = -9;$$

$$A_{13}^T = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19;$$

$$A_{21}^T = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 5) = -1;$$

$$A_{22}^T = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7;$$

$$A_{23}^T = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(-15 - 2) = 17;$$

$$A_{31}^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3;$$

$$A_{32}^T = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 + 4) = -1;$$

$$A_{33}^T = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11.$$

Множник $(-1)^{i+j}$ тут враховано.

Отже обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 21 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Скористаємося формулою (1.20):

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 21 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 77 - 117 + 0 \\ 11 - 91 + 0 \\ 33 - 13 + 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Маємо: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = -1$.

1.4.5 Умова сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі

Питання сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.10) повністю розв'язується наступною теоремою.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь (1.10) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці A дорівнював рангу її розширеної матриці $\tilde{A}$, тобто $rangA = rang\tilde{A}$.

З теореми Кронекера-Капеллі (у випадку сумісності системи) легко отримати відповідь на питання о кількості розв'язків системи.

Теорема о кількості розв'язків системи. Нехай для системи m лінійних рівнянь з n невідомими (1.10) виконується умова сумісності, тобто ранг матриці A дорівнює рангу її розширеної матриці $\tilde{A}$. Тоді, якщо ранг матриці дорівнює кількості невідомих $(r = n)$, то система є визначеною і має єдиний розв'язок. Якщо ранг матриці менше кількості невідомих $(r < n)$, тоді система невизначена і має нескінчену кількість розв'язків, а саме: деяким $(n - r)$ невідомим, які будемо називати ***базовими*** можна надати довільні значення, тоді r невідомі, що залишились (їх будемо називати ***вільними***), визначаються вже однозначно через базові.

1.4.6 Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай дано однорідну систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Однорідна система завжди сумісна, тому що завжди має наступний розв'язок:

$$x_1 = 0, \;\; x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Цей розв'язок називається *нульовим* (або *тривіальним*). Будь-який інший розв'язок (якщо він існує), в якому хоча б один невідомий відрізнявся від нуля, називається *ненульовим* (або *нетривіальним*).

Теорема 1.4. Для того, щоб однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь (1.19) мала нетривіальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи був менше числа невідомих ($r < n$).

У випадку, коли число рівнянь дорівнює числу невідомих ($m = n$), умова ($r < n$) відповідає тому, що визначник системи дорівнює нулю ($\Delta = 0$).

Приклад 1.24. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -7 & -2 \end{vmatrix} = -24 + 12 + 70 + 45 - 8 - 56 = 39 \neq 0.$$

Ранг матриці системи дорівнює 3 ($rangA = 3$) і співпадає з числом невідомих. За умовою теореми 1.4 така система має лише тривіальний розв'язок. Отже,

Відповідь: $x_1 = 0, \;\; x_2 = 0, \;\; x_3 = 0.$

Приклад 1.25. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 3 + 6 - 18 + 1 + 4 = 0.$$

Ранг матриці менший 3, тому за умовою теореми 1.4 така система має нетривіальний розв'язок. Знайдемо його, виключивши одне з рівнянь, наприклад третє:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Нехай $x_3 = k$, де k – довільне число. Виразимо x_1 і x_2 через $x_3 = k$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -3k, \\ x_1 + 2x_2 = k. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3k & -1 \\ k & 2 \end{vmatrix} = -6k + 5 = -5k;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3k \\ 1 & k \end{vmatrix} = 2k + 3k = 5k.$$

Отже маємо: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5k}{5} = -k; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5k}{5} = k.$

Відповідь: $x_1 = -k;\ x_2 = k;\ x_3 = k;\ k \in R.$

1.4.7 Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь із застосуванням MS EXCEL

Обмеження при розв’язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь методами Крамера та матричним пов’язано з необхідністю обчислення великої кількості визначників високих порядків. Застосування можливостей платформи EXCEL дозволяє уникнути цієї проблеми. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 1.25. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 6x_4 + x_5 = 16 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 17 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 13 \end{cases}$$

Розв’язання. Заповнимо комірки таблиці в EXCEL коефіцієнтами при невідомих та стовпцем вільних членів:

2							
3		1	-3	4	5	-3	10
4		2	1	5	-6	1	16
5		-1	-2	3	4	1	17
6		3	2	-2	-1	2	5
7		2	-5	-1	3	1	13
8							

Обчислимо визначник системи за допомогою функції MDETERM(масив):

9								
10		1	-3	4	5	-3		
11	Δ=	2	1	5	-6	1		
12		-1	-2	3	4	1	=	=MDETERM(B10:F14)
13		3	2	-2	-1	2		
14		2	-5	-1	3	1		
15								

Складемо визначник Δ_1 замінивши перший стовпець визначника системи на стовпець вільних членів. Після його обчислення скористаємося правилом Крамера:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
9		1	-3	4	5	-3					
10		2	1	5	-6	1					
11	$\Delta=$	-1	-2	3	4	1	=	3483			
12		3	2	-2	-1	2					
13		2	-5	-1	3	1					
14											
15		10	-3	4	5	-3					
16		16	1	5	-6	1					
17	$\Delta_1=$	17	-2	3	4	1	=	6966		$x_1 =$	=H17/H11
18		5	2	-2	-1	2					
19		13	-5	-1	3	1					

Аналогічну процедуру повторимо для всіх допоміжних визначників та відповідних їм невідомих:

21		1	10	4	5	-3					
22		2	16	5	-6	1					
23	$\Delta_2=$	-1	17	3	4	1	=	-3483		$x_2 =$	-1
24		3	5	-2	-1	2					
25		2	13	-1	3	1					
26											
27		1	-3	10	5	-3					
28		2	1	16	-6	1					
29	$\Delta_3=$	-1	-2	17	4	1	=	10449		$x_3 =$	3
30		3	2	5	-1	2					
31		2	-5	13	3	1					
32											
33		1	-3	4	10	-3					
34		2	1	5	16	1					
35	$\Delta_4=$	-1	-2	3	17	1	=	3483		$x_4 =$	1
36		3	2	-2	5	2					
37		2	-5	-1	13	1					
39		1	-3	4	5	10					
40		2	1	5	-6	16					
41	$\Delta_5=$	-1	-2	3	4	17	=	13932		$x_5 =$	4
42		3	2	-2	-1	5					
43		2	-5	-1	3	13					

Порядок системи не спричинив нам проблем при її розв’язанні. При «ручному» обчисленні для того, щоб знайти лише один визначник п’ятого порядку нам необхідно було б його розкласти (по рядку або стовпцю) на п’ять визначників четвертого порядку, кожен з яких, в свою чергу – на чотири визначника третього, які ми вже маємо можливість обчислити, наприклад, за правилом Сарюса. Отже, обчислення визначника п'ятого порядку призводить до обчислення 20 визначників третього. А при розв'язанні системи нам довелося знаходити значення шести визначників п'ятого порядку. Тобто для розв'язання системи ми були б вимушені обчислити 120 визначників третього порядку!

Звісно, що можна було б пришвидшити цю процедуру поступовим отриманням нулів у рядку (стовпці). Але застосування можливостей платформи EXCEL дозволяє отримати розв'язок системи миттєво.

Проілюструємо можливості застосування EXCEL при розв'язанні систем матричним методом.

Приклад 1.26. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 6x_4 + x_5 = 16 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 17 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 13 \end{cases}$$

Розв'язання. Читач, мабуть, помітив, що нам запропонували розв'язати систему з прикладу 1.25. Її визначник вже знайдений, тому переходимо до наступного пункту – транспонування матриці:

B8 f_x =ТРАНСП(B2:F6)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		1	-3	4	5	-3	10			
3		2	1	5	-6	1	16			
4		-1	-2	3	4	1	17		Δ=	3483
5		3	2	-2	-1	2	5			
6		2	-5	-1	3	1	13			
7										
8		1	2	-1	3	2				
9		-3	1	-2	2	-5				
10		4	5	3	-2	-1				
11	$A^T =$	5	-6	4	-1	3				
12		-3	1	1	2	1				
13										

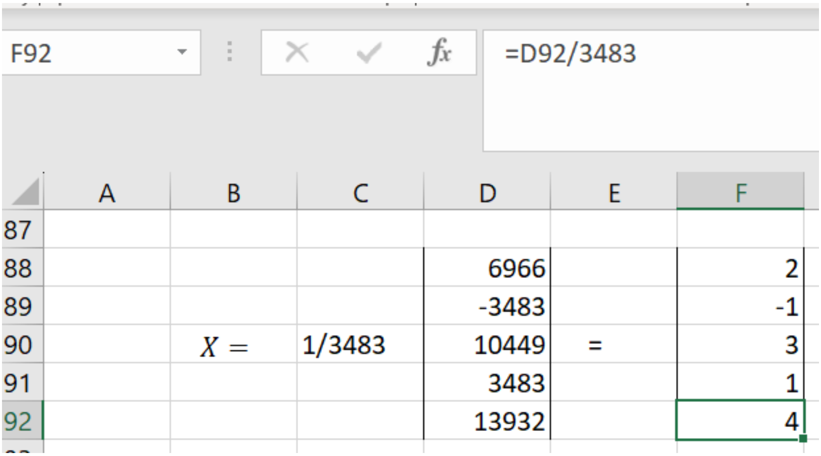
Знайдемо алгебраїчні доповнення (не забуваємо про знак!):

13															
14		1	-2	2	-5				-3	-2	2	-5		
15	$A_{11}^T =$	5	3	-2	-1	=	462	$A_{12}^T = -$	4	3	-2	-1	=	=-MDETERM(J14:M17)
16		-6	4	-1	3				5	4	-1	3		
17		1	1	2	1				-3	1	2	1		
18														

Аналогічно обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці і складемо обернену матрицю. Виконаємо множення матриць за допомогою функції MDETERM(масив1;масив):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
79										
80			462	135	-318	705	159			10
81			168	-162	201	573	-681			16
82	$A^{-1} =$	1/3483	165	297	384	3	-192		$B =$	17
83			222	-297	390	384	-195			5
84			-585	108	855	306	153			13
85										
86										
87										
88				=МУМНОЖ(C80:G84;J80:J84)						
89										
90		$X =$	1/3483		=					
91										
92										

Остаточно маємо:



Приклад 1.27. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 6x_4 + x_5 = 16 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 17 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 13 \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю і почнемо зводити її до трапецієподібного вигляду. У верхньому лівому куточку елемент 1. Підбираємо множники відповідно до правила з 1.4.3. Щоб виключити невідому x_1 з другого рівняння, необхідно перше рівняння помножити та (-2) та додати до відповідних елементів другого рівняння. Для цього вводимо в комірку формулу: $= -2 * C_1 + C_2$. Натискаємо "Enter". У комірці отримано значення нового елемента.

C2 =-2*C1+C2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			1	-3	4	5	-3	10
2			2	1	5	-6	1	16
3	$\tilde{A} = (A\|B) =$		-1	-2	3	4	1	17
4			3	2	-2	-1	2	5
5			2	-5	-1	3	1	13
6								
7			1	-3	4	5	-3	10
8			=-2*C1+C2					
9								

Для того, щоб виконати цю операцію над всіма іншими елементами рядка, ми копіюємо цю формулу (вміст комірки $C8$) і вставляємо, розтягуючи у комірки $D8$ – $H8$. В результаті отримаємо:

D8 =-2*D1+D2

	A	B	C	D	E	F	G	H
7			1	-3	4	5	-3	10
8			0	7	-3	-16	7	-4
9								

Повторимо цю процедуру над елементами інших рядків:

- в третьому рядку перший елемент протилежний елементу a_{11}, тому відповідні елементи достатньо додати: $= C_1 + C_3$;
- для отримання нулів в четвертому рядку: $= -3 * C_1 + C_4$;
- в п'ятому рядку формула має вигляд: $= -2 * C_1 + C_5$.

Не забуваємо копіювати формулу з першої коміри кожного рядку та вставляти інші комірки цього рядка. В результаті отримаємо:

7	1	-3	4	5	-3	10
8	0	7	-3	-16	7	-4
9	0	-5	7	9	-2	27
10	0	11	-14	-16	11	-25
11	0	1	-9	-7	7	-7

Для того, щоб обчислити подальшу процедуру, і мати в другому рядку перший ненульовий елемент 1, поміняємо місцями другий та п'ятий рядок:

13	**1**	-3	4	5	-3	10
14	0	**1**	-9	-7	7	-7
15	0	-5	7	9	-2	27
16	0	11	-14	-16	11	-25
17	0	7	-3	-16	7	-4

Для виключення невідомого x_2 введемо формули:

- в третьому рядку: $= 5 * C_{14} + C_{15}$;
- в четвертому рядку: $= -11 * C_{14} + C_{16}$;
- в п'ятому рядку: $= -7 * C_{14} + C_{17}$.

В результаті отримаємо:

19	**1**	-3	4	5	-3	10
20	0	**1**	-9	-7	7	-7
21	0	0	-38	-26	33	-8
22	0	0	85	61	-66	52
23	0	0	60	33	-42	45

Одиничних елементів в третьому стопці немає, тому пропонуємо п'ятий рядок поділити на 60

E29 =E23/60

	A	B	C	D	E	F	G	H
24								
25			**1**	-3	4	5	-3	10
26			0	**1**	-9	-7	7	-7
27			0	0	-38	-26	33	-8
28			0	0	85	61	-66	52
29			0	0	1	0,55	-0,7	0,75

і поміняти місцями з третім:

31			**1**	-3	4	5	-3	10
32			0	**1**	-9	-7	7	-7
33			0	0	**1**	0,55	-0,7	0,75
34			0	0	85	61	-66	52
35			0	0	-38	-26	33	-8

Для виключення невідомого x_3 введемо формули:

- в четвертому рядку: $= -85 * D + D_{34}$;
- в п’ятому рядку: $= 38 * D_{33} + D_{35}$.

В результаті отримаємо:

37			**1**	-3	4	5	-3	10
38			0	**1**	-9	-7	7	-7
39			0	0	**1**	0,55	-0,7	0,75
40			0	0	0	14,25	-6,5	-11,75
41			0	0	0	-5,1	6,4	20,5

Отримати одиничний елемент в четвертому або п’ятому рядку виявляється проблематичним, тому для виключення невідомого x_4 з п’ятого рядка розширеної матриці, помножимо четвертий рядок на коефіцієнт при x_4 в п’ятому, тобто на -5,1, а п’ятий рядок – на коефіцієнт при x_4 в четвертому, тобто на 14,24:

F46 =F40*5,1

	A	B	C	D	E	F	G	H
43			**1**	-3	4	5	-3	10
44			0	**1**	-9	-7	7	-7
45			0	0	**1**	0,55	-0,7	0,75
46			0	0	0	72,675	-33,15	-59,925
47			0	0	0	-72,675	91,2	292,125

і додаємо до п'ятого рядка четвертий:

F53 =F46+F47

	A	B	C	D	E	F	G	H
49			**1**	-3	4	5	-3	10
50			0	**1**	-9	-7	7	-7
51			0	0	**1**	0,55	-0,7	0,75
52			0	0	0	72,675	-33,15	-59,925
53			0	0	0	0	58,05	232,2

Щоб знайти x_5 поділимо п'ятий рядок на 58,05:

G59 =G53/G53

	A	B	C	D	E	F	G	H
55			**1**	-3	4	5	-3	10
56			0	**1**	-9	-7	7	-7
57			0	0	**1**	0,55	-0,7	0,75
58			0	0	0	72,675	-33,15	-59,925
59			0	0	0	0	1	4

Маємо $x_5 = 4$.

Тепер рухаючись вгору, поступово отримуємо значення невідомих:

$$x_4 = (H58 - G58 * H59)/F58;$$

B61 | =(H58-G58*H59)/F58

	A	B	C	D	E	F	G	H
55			**1**	-3	4	5	-3	10
56			0	**1**	-9	-7	7	-7
57			0	0	**1**	0,55	-0,7	0,75
58			0	0	0	72,675	-33,15	-59,925
59			0	0	0	0	1	4
60								
61	$x_4 =$	1						

$$x_3 = H57 - F57 * A61 - G57 * H59;$$

D61 | =H57-F57*B61-G57*H59

	A	B	C	D	E	F	G	H
55			**1**	-3	4	5	-3	10
56			0	**1**	-9	-7	7	-7
57			0	0	**1**	0,55	-0,7	0,75
58			0	0	0	72,675	-33,15	-59,925
59			0	0	0	0	1	4
60								
61	$x_4 =$	1	$x_3 =$	3				

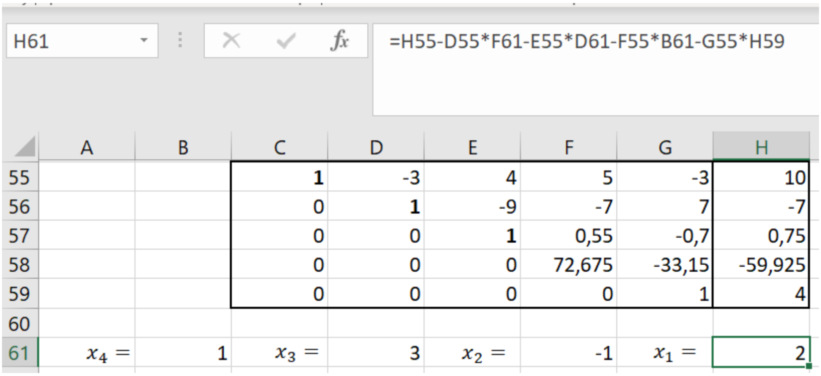
$$x_2 = H56 - E56 * D61 - F56 * B61 - G61 * H59;$$

F61 | =H56-E56*D61-F56*B61-G56*H59

	A	B	C	D	E	F	G	H
55			**1**	-3	4	5	-3	10
56			0	**1**	-9	-7	7	-7
57			0	0	**1**	0,55	-0,7	0,75
58			0	0	0	72,675	-33,15	-59,925
59			0	0	0	0	1	4
60								
61	$x_4 =$	1	$x_3 =$	3	$x_2 =$	-1		

і, нарешті,

$$x_1 = H55 - D55 * F61 - E55 * D61 - F55 * B61 - G55 * H59.$$



	A	B	C	D	E	F	G	H
55			**1**	-3	4	5	-3	10
56			0	**1**	-9	-7	7	-7
57			0	0	**1**	0,55	-0,7	0,75
58			0	0	0	72,675	-33,15	-59,925
59			0	0	0	0	1	4
60								
61	$x_4 =$	1	$x_3 =$	3	$x_2 =$	-1	$x_1 =$	2

1.5 Власні вектори та власні числа матриці

Нехай дана квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Визначення 1.26. Ненульовий вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ називається ***власним вектором*** матриці A, якщо існує таке ненульове число λ, що $AX = \lambda X$.

Число λ при цьому називається ***власним числом*** вектора X відносно матриці A.

Визначення 1.27. Матриця $A - \lambda E$ називається ***характеристичною матрицею*** матриці A, многочлен $|A - \lambda E|$ називається ***характеристичним многочленом*** матриці A, а рівняння $|A - \lambda E| = 0$ – ***характеристичним рівнянням*** матриці A.

Теорема. Власними числами матриці A є корені характеристичного рівняння $|A-\lambda E|=0$ і лише вони.

Координати власного вектора X, які відповідають власному значенню λ, знаходяться з розв'язку однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0;\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0.\end{cases} \quad (1.20)$$

Приклад 1.28. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$.

Розв'язання: Знайдемо матрицю $A-\lambda E$:

$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=0;$$

$$(2-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda)+3+2(-3-\lambda)+5(-2-\lambda)=0;$$

$$-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=0;$$

або
$$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0;$$

$$(\lambda+1)^3=0;$$

звідси маємо власне число матриці $\lambda=-1$.

Власний вектор матриці знайдемо з системи (1.20):

$$(A-\lambda E)X=0$$

або підставивши значення власного числа $\lambda = -1$

$$(A + E)X = 0.$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\,; \\ -x_1 \qquad\quad - x_3 = 0. \end{cases}$$

Обчислимо визначник цієї однорідної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 3 - 4 - 5 = 0.$$

Він дорівнює нулю, отже, ранг матриці менший кількості невідомих, тому за умовою теореми 1.4 така система має нетривіальний розв'язок. Знайдемо його, виключивши одне з рівнянь, наприклад третє:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Нехай $x_3 = k$, де $k -$ довільне число. Виразимо x_1 і x_2 через $x_3 = k$:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -2k; \\ 5x_1 - 2x_2 = -3k. \end{cases}$$

Розв'яжемо її, наприклад, за правилами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2k & -1 \\ -3k & -2 \end{vmatrix} = 4k - 3k = k;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2k \\ 5 & -3k \end{vmatrix} = -9k + 10k = k;$$

$$x_1 = -k; \;\; x_2 = -k; \;\; x_3 = k.$$

Отже, власний вектор матриці $X = \begin{pmatrix} -k \\ -k \\ k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Контрольні запитання

1. Що таке визначник? Як визначається порядок визначника?

2. Дайте визначення мінору та алгебраїчного доповнення.

3. Як обчислюються визначники другого та третього порядку? Наведіть приклади.

4. Сформулюйте правила обчислення визначників розкладанням їх за рядком (стовпцем), з попереднім отриманням нулів в рядку (стовпці). Наведіть приклади.

5. Дайте визначення матриці.

6. Які операції над матрицями ви знаєте? Сформулюйте необхідні умови та правила виконання дій над матрицями. Наведіть приклади.

7. Дайте визначення рангу матриці. Які способи обчислення рангу матриці ви знаєте? Наведіть приклади.

8. Дайте визначення системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Що називається розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?

9. Дайте визначення сумісних та несумісних, визначених та невизначених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

10. Які системи називаються однорідними (неоднорідними)?

11. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі. На які основні питання вона дає відповідь?

12. Назвіть відомі вам методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Опишіть недоліки та переваги кожного з методів.

13. Опишіть метод Крамера розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Для розв'язання яких систем рекомендують його використання?

14. Опишіть матричний метод розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Для розв’язання яких систем рекомендують його використання?

15. Опишіть метод Гауса розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Для розв’язання яких систем рекомендують його використання?

16. Як розв’язувати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь?

17. За допомогою якої функції MS Excel можна обчислити визначник?

18. Опишіть за допомогою яких функцій та «ручного» вводу формул в MS Excel можна додавати, віднімати матриці, множити матрицю на число, транспонувати, множити матриці.

19. Опишіть можливості MS Excel при розв’язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

20. Дайте визначення власному числу та власному вектору матриці.

Розділ 2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

2.1 Вектори. Основні визначення

Нехай A і B – дві різні точки площини або простору. Відрізок AB, в якому точку A вважають початком, а точку B – кінцем, називають вектором AB і позначають $\overrightarrow{AB}$.

Визначення 2.1. ***Вектор*** – це направлений відрізок. Напрям, який визначається променем AB, називають ***напрямом*** вектора $\overrightarrow{AB}$, а довжину відрізка $|AB|$ називають ***довжиною*** (або ***модулем***) вектора $\overrightarrow{AB}$. Довжину (модуль) вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

На рисунках вектор $\overrightarrow{AB}$ звичайно зображують прямолінійною стрілкою з початком у точці A і кінцем у точці B.

Серед усіх векторів з початком у точці A є один вектор, довжина якого дорівнює нулю. Його називають ***нульовим*** вектором і позначають $\overrightarrow{AA}$. Поняття напряму для нульового вектора не вводять.

Рівність векторів. Нехай $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ – два вектори. Вектор $\overrightarrow{AB}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{CD}$, якщо:

1) довжина відрізка $\overrightarrow{AB}$ дорівнює довжині відрізка $\overrightarrow{CD}$;

2) промені $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ однаково направлені.

За такого означення рівності векторів введемо наступне поняття.

Визначення 2.2. Множина всіх векторів, які дорівнюють вектору $\overrightarrow{AB}$, називається множиною ***вільних векторів***. Вільні вектори звичайно позначають малими латинськими буквами: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, а їхні довжини – відповідно $|\vec{a}|, \left|\vec{b}\right|, |\vec{c}|$.

Додавання векторів. Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два не нульові вектори. Відкладемо вектор $\vec{a}$ від точки O і позначимо його кінець буквою A: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ Відкладемо від точки A вектор $\vec{b}$ і позначимо його кінець буквою B: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Вектор з початком у точці O і кінцем у точці B $\left(\overrightarrow{OB} = \vec{c}\right)$ називають ***сумою векторів*** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і записують $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Це правило трикутника (рис. 2.1, а).

Суму двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна побудувати за правилом паралелограма (рис. 2.1, б).

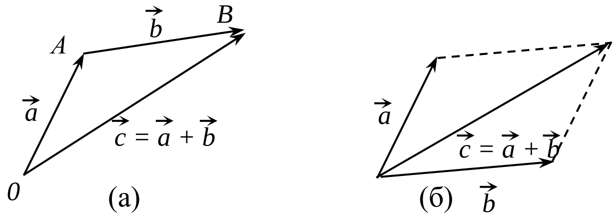


Рисунок 2.1 – Додавання векторів: за правилом трикутника (а), за правилом паралелограма (б)

Властивості операції додавання векторів:

1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

2) асоціативність: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;

3) комутативність: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Визначення 2.3. Вектором, ***протилежним*** вектору $\vec{a}$, звуть такий вектор (його позначають $-\vec{a}$), що сума вектора $\vec{a}$ і вектора $-\vec{a}$ дорівнює нульовому вектору:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0.$$

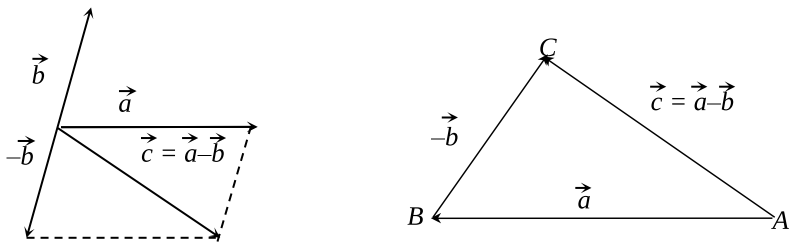
Вектор, протилежний вектору $\overrightarrow{AB}$, позначають $\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0.$$

Ненульові протилежні вектори мають рівні довжини ($|\vec{a}| = |\overrightarrow{-a}|$) і протилежні напрями.

Різниця двох векторів $\vec{a} - \vec{b}$ є сума вектора $\vec{a}$ і вектора, протилежного вектору $\vec{b}$ (рис. 2.2,а), тобто вектор $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.

Різницю двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знайти за правилом трикутника (рис. 2.2,б).



(а) (б)

Рисунок 2.2 – Віднімання векторів

Множення вектору на число. Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ на число λ називають вектор, який має напрям $\vec{a}$, якщо λ додатне, і протилежний напрям, якщо λ від'ємне; довжина цього вектора дорівнює добутку вектора $\vec{a}$ на абсолютне значення (модуль) числа λ.

Добуток вектора $\vec{a}$ на число λ позначається $\lambda\vec{a}$. Якщо $\vec{a}=0$ або $\lambda=0$, відповідно вважають:

$$\lambda\cdot 0=0 \quad \text{для будь-якого } \lambda,$$
$$0\cdot\vec{a}=0 \text{ для будь-якого } \vec{a}.$$

Властивості операції множення вектора на число:

1) комутативність: $\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$;

2) асоціативність: $\lambda(\gamma\vec{a})=(\lambda\gamma)\vec{a}$;

3) дистрибутивність: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

$(\lambda+\gamma)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\gamma\vec{a}$.

Визначення 2.4. Два ненульові вектори називають ***колінеарними***, якщо їхні напрями збігаються або протилежні.

Пряма ℓ із заданим на неї напрямом, яке приймається за додатне, зветься віссю ℓ.

Визначення 2.5. ***Проекцією*** вектора $\vec{a}$ на вісь ℓ називається число, яке позначається пр $_\ell\,\vec{a}$ і дорівнює $|\vec{a}|\cos\varphi$, де $(0\le\varphi\le\pi)$ – кут між додатним напрямом осі ℓ та напрямом вектора $\vec{a}$, тобто за визначенням пр $_\ell\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$.

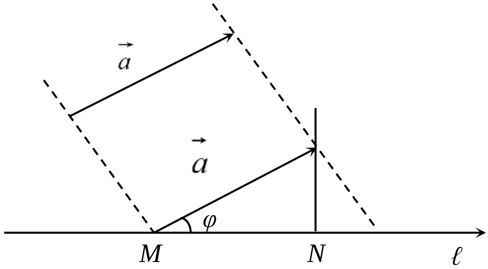


Рисунок 2.3 – Проекція вектора

Геометрично проекцію вектора $\vec{a}$ можна визначити довжиною відрізка MN (рис. 2.3), яка береться із знаком «+», якщо $0 \le \varphi \le \pi/2$, та із знаком «-», якщо $\pi/2 \le \varphi \le \pi$.

2.2 Координати вектора

Розглянемо всі можливі ситуації.

1) *На координатній осі* вектор $\overrightarrow{OM_0}$ має координату x_0 і записується так:

$$\overrightarrow{OM_0} = x_0 \cdot \vec{e}, \text{ де } \vec{e} \text{ - орт, } |\vec{e}| = 1.$$

2) *Прямокутна декартова система координат на площині* є упорядкована пара двох взаємно перпендикулярних координатних осей Ox і Oy, причому початком координат кожної з осей є їхня спільна точка O (рис. 2.4). Вісі Ox і Oy упорядковано так: якщо вісь Ox повернути навколо точки O на кут $\pi/2$ проти руху стрілки годинника, то вона співпаде з віссю Oy. При цьому точки E_1 і E_2 теж збігаються тому, що $\left|\overrightarrow{OE_1}\right| = \left|\overrightarrow{OE_2}\right|$. Вісь Ox це вісь абсцис, а вісь Oy – вісь ординат. Вектори $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$ і $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$ є базисними векторами (ортами) прямокутної декартової системи координат; їх звичайно позначають буквами $\vec{\imath}$ і $\vec{\jmath}$: $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{e_2} = \vec{\jmath}$.

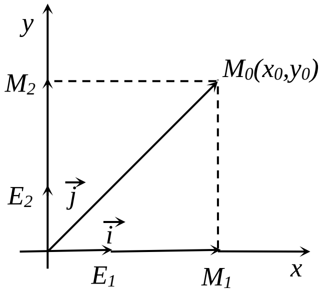


Рисунок 2.4 – Прямокутна декартова система координат на площині

Площину з побудованою системою координат називають ***координатною площиною***. Нехай M_0 – деяка точка площини. Опустимо з неї перпендикуляри до осей Ox і Oy, які перетнуть зазначені коодинатні осі відповідно у точках M_1 і M_2. Позначимо координату точки M_1, через x_0, точки M_2 - через y_0.

Визначення 2.6. ***Координатами*** точки M_0 у прямокутній системі координат називають упорядковану пару чисел $(x_0,\ y_0)$. Число x_0, називають абсцисою, а число y_0 – ординатою точки M_0 і записують $M_0(x_0,\ y_0)$.

Вектор $\overrightarrow{OM_0}$ є діагональ прямокутника $OM_1M_0M_2$ і, якщо $\overrightarrow{OM_1} = x_0 \cdot \overrightarrow{e_1} = x_0 \cdot \vec{i}$; $\overrightarrow{OM_2} = y_0 \cdot \overrightarrow{e_2} = y_0 \cdot \vec{j}$, то за правилом паралелограма запишемо:

$$\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j}$$

- це розклад вектора у заданому базисі на складові вектору. Тобто вектор $\overrightarrow{OM_0}$ має координати x_0 та y_0 і записують $\overrightarrow{OM_0}(x_0,\ y_0)$. Модуль вектора $\overrightarrow{OM_0}$ буде обчислюватись за формулою: $\left|\overrightarrow{OM_0}\right| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

Відстань між довільними точками A і B, які мають відповідно координати $(x_1,\ y_1)$ і $(x_2,\ y_2)$ обчислюють за формулою:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2.1)$$

За цією ж формулою обчислюють модуль вектора

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j}\ .$$

3) *Прямокутна декартова система координат у просторі*. Нехай α – деяка площина у просторі з узятою на ній прямокутною системою координат Oxy. Проведемо через точку O пряму, яку позначимо Oz, перпендикулярну до площини (рис. 2.5). Візьмемо на прямій Oz напрям і масштабний відрізок OE_3, який дорівнює відповідно масштабним відрізкам OE_1 і OE_2 координатних осей Ox і Oy. Пряма Oz – третя координатна вісь. Таким чином, прямокутною системою координат у просторі називають упорядковану трійку взаємно перпендикулярних координатних осей Ox, Oy і Oz. Вісь Ox називається віссю ***абсцис***, вісь Oy – віссю ***ординат***, вісь Oz – віссю ***аплікат***. Площини Oxy, Oxz, Oyz називають ***координатними площинами***; простір, у якому уведено систему координат, називається ***координатним простором***.

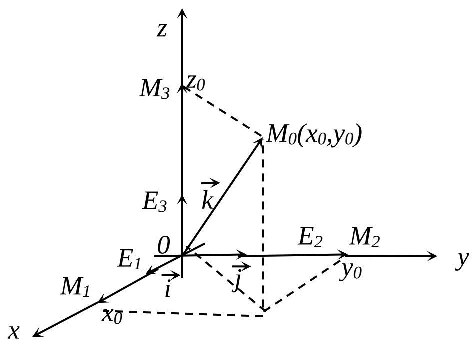


Рисунок 2.5 – Прямокутна декартова система координат у просторі

Вектори $\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3}$, є базисними векторами (ортами) прямокутної системи координат і звичайно позначають відповідно $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Нехай M_0 – деяка точка координатного простору $Oxyz$. Проведемо через неї площини, які паралельні відповідним координатним площинам. Перша з них перетне вісь Ox у точці M_1, координату точки M_1 позначимо через x_0. Друга площина перетне вісь Oy у точці M_2 і третя – перетне вісь Oz у точці M_3. Координати точок M_2 і M_3, які належать відповідно осям Oy і Oz, позначимо через y_0 і z_0.

Визначення 2.7. ***Координатами*** точки M_0 відносно прямокутної просторової системи координат $Oxyz$ звуть упорядковану трійку чисел $(x_0; y_0; z_0)$ і записують як $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Число x_0 називається ***абсцисою***, y_0 – ***ординатою***, z_0 – ***аплікатою*** точки M_0.

Вектор $\overrightarrow{OM_0}$ є діагоналлю паралелепіпеда, який утворено на векторах $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ і $\overrightarrow{OM_3}$, де $\overrightarrow{OM_1} = x_0\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2} = y_0\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = z_0\vec{k}$. За правилом паралелепіпеда $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$, це розклад вектора по трьом складовим векторам. У заданому базисі: $\overrightarrow{OM_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$. Тобто, вектор $\overrightarrow{OM_0}$, має координати $x_0; y_0; z_0$, що записують $\overrightarrow{OM_0}(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Довжина (модуль) вектору $\overrightarrow{OM_0}$ обчислюється за формулою $\left|\overrightarrow{OM_0}\right| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.

Відстань між точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ обчислюють за формулою

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (2.2)$$

За цією ж формулою обчислюють і $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, який має координати:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\cdot\vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot\vec{j} + (z_2 - z_1)\cdot\vec{k}.$$

Розклад вектора за трьома некомпланарними векторами. Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - три некомпланарні ненульові базові вектори. Тоді будь-який просторовий вектор $\vec{d}$ єдиним способом можна записати у вигляді суми:

$$\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}. \qquad (2.3)$$

Доведення. Нехай існує другий розклад

$$\vec{d} = x_1 \cdot \vec{a} + y_1 \cdot \vec{b} + z_1 \cdot \vec{c}.$$

Зліва один і той же вектор, тому:

$$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = x_1 \cdot \vec{a} + y_1 \cdot \vec{b} + z_1 \cdot \vec{c}, \text{ або}$$

$$(x - x_1) \cdot \vec{a} + (y - y_1) \cdot \vec{b} + (z - z_1) \cdot \vec{c} = 0.$$

Але $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$, $|\vec{c}| \neq 0$. Тотожність можлива, якщо $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, $z - z_1 = 0$. Звідси маємо: $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Тобто, розклад єдиний.

2.3 Добутки векторів

Скалярний добуток.

Визначення 2.8. ***Скалярним добутком*** двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, який позначають $(\vec{a}, \vec{b})$, або $\vec{a} \cdot \vec{b}$, є число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \qquad (2.4)$$

де $\varphi = (\vec{a} \wedge \overrightarrow{b})$ – кут між напрямами двох ненульових векторів. Якщо хоча б один з двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ нульовий, то скалярний добуток цих двох векторів дорівнює нулю.

Зауваження 1. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ***перпендикулярні*** один до одного, їх скалярний добуток дорівнює нулю. Це прямує з того, що $\cos(\pi/2) = 0$.

Властивості скалярного добутку векторів:

1) комутативність $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;

2) асоціативність відносно множення на число

$$\left((k \cdot \vec{a}), \vec{b}\right) = k \cdot (\vec{a}, \vec{b});$$

3) операції додавання і скалярного множення векторів зв'язані дистрибутивним законом множення відносно додавання

$$\left(\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c})\right) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}).$$

Скалярний добуток вектора на цей самий вектор дорівнює квадрату числового значення його довжини:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Векторний добуток.

Визначення 2.9. ***Векторним добутком*** двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, який позначають $[\vec{a}, \vec{b}]$, або $\vec{a} \times \vec{b}$ є вектор, що визначається такими трьома умовами:

1) вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ перпендикулярний як до вектора $\vec{a}$, так і до вектора $\vec{b}$;

2) упорядкована трійка векторів $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$, де $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, відкладених від однієї точки, утворює правий (у загальному випадку косокутний) базис (рис. 2.6);

3) модуль вектора $\vec{c}$ обчислюється за формулою

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi, \tag{2.5}$$

де $\varphi = (\vec{a} \wedge \overrightarrow{b})$ - кут між напрямами двох ненульових векторів.

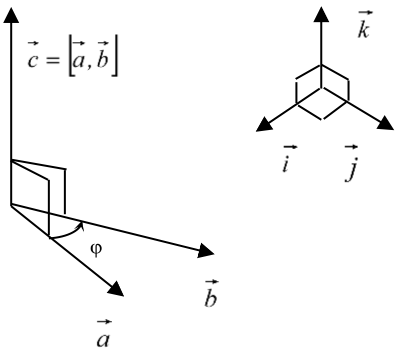


Рисунок 2.6 – Векторний добуток векторів

Зауваження 2. Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, або вони ***колінеарні*** $(\varphi = 0;\ \varphi = \pi)$, то векторний добуток двох векторів дорівнює нульовому вектору.

Властивості векторного добутку:

1) зміна місць множників дає протилежний вектор

$$[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}];$$

2) асоціативність відносно множення на число

$$[(k\vec{a}),\vec{b}] = k[\vec{a},\vec{b}];$$

3) операції додавання і векторного добутку векторів зв'язані дистрибутивним законом множення відносно додавання

$$[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}].$$

Мішаний (скалярно-векторний) добуток трьох векторів.

Визначення 2.10. ***Мішаним добутком*** трьох ненульових некомпланарних векторів є число, абсолютна величина якого дорівнює об'єму паралелепіпеда з ребрами $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, які відкладено від однієї точки.

Мішаний добуток векторів $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ позначають $\langle\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}\rangle$ або $(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})$.

Зауваження 3. Якщо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, ***компланарні***, то їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}) = 0.$$

2.4 Правила дій над векторами, заданими координатами

Якщо в прямокутній системі координат $Oxyz$ точки A і B мають координати (x_1, y_1, z_1) і (x_2, y_2, z_2), то координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ буде трійка чисел $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, тобто

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \text{ або}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\cdot\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\cdot\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\cdot\vec{k}. \qquad (2.6)$$

Нехай у базисі $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задано своїми координатами:

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1); \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2); \quad \vec{c} = (x_3, y_3, z_3).$$

Тоді ***операції арифметичних дій над векторами***, заданими координатами визначаються наступним чином:

1), 2). Координати ***суми*** (***різниці***) двох векторів дорівнюють сумі (різниці) відповідних координат доданків:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2;\ \ y_1 \pm y_2;\ \ z_1 \pm z_2). \qquad (2.7)$$

3) Координати ***добутку вектора на число*** дорівнюють добутку відповідних координат даного вектору на це число:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

4) ***Скалярний добуток*** ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2. \qquad (2.8)$$

Доведення:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \cdot \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) = x_1x_2\vec{i}^2 +$$
$$+x_1y_2\vec{i} \cdot \vec{j} + x_1z_2\vec{i} \cdot \vec{k} + y_1x_2\vec{j} \cdot \vec{i} + y_1y_2\vec{j}^2 + y_1z_2\vec{j} \cdot \vec{k} +$$
$$+z_1x_2\vec{k} \cdot \vec{i} + z_1y_2\vec{k} \cdot \vec{j} + z_1z_2\vec{k}^2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Тут $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0,\ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0,\ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, а $\vec{i}^2 = 1,\ \vec{j}^2 = 1,\ \vec{k}^2 = 1.$

Зауваження 1. ***Умова ортогональності*** набуває вигляду:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0 \qquad (2.9)$$

5) ***Векторний добуток*** двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами - це вектор $\vec{c}$, координати якого знаходяться за допомогою визначника третього порядку:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \qquad (2.10)$$

або $\vec{c} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$,

де координати вектора $\vec{c}$ є визначниками другого порядку.

Доведення:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\ \right] =$$

$$= x_1x_2[\vec{i},\vec{i}]+x_1y_2[\vec{i},\vec{j}]+x_1z_2[\vec{i},\vec{k}]+y_1x_2[\vec{j},\vec{i}]+y_1y_2[\vec{j},\vec{j}] +$$
$$+y_1z_2[\vec{j},\vec{k}] + z_1x_2[\vec{k},\vec{i}]+z_1y_2[\vec{k},\vec{j}]+z_1z_2[\vec{k},\vec{k}] =$$
$$= x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k}+y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} =$$
$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$
$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{c}.$$

Тут $[\vec{i},\vec{i}] = 0$; $[\vec{j},\vec{j}] = 0$; $[\vec{k},\vec{k}] = 0$; $[\vec{i},\vec{j}] = \vec{k}$; $[\vec{j},\vec{k}] = \vec{i}$; $[\vec{k},\vec{i}] = \vec{j}$; $[\vec{j},\vec{i}] = -\vec{k}$; $[\vec{k},\vec{j}] = -\vec{i}$; $[\vec{i},\vec{k}] = -\vec{j}$.

Як ми вже з'ясували в п. 2.3, векторний добуток колінеарних векторів дорівнює нулю. З властивостей визначника, за допомогою якого ми задаємо векторний добуток, рівність його нулю можлива, якщо відповідні рядки мають однакові або пропорційні елементи.

Зауваження 2. ***Умову колінеарності*** двох векторів – рівність або пропорційність відповідних координат – сформулюємо як

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (2.11)$$

6) ***Мішаний добуток*** векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ заданих своїми координатами, обчислюють як визначник третього порядку:

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.12)$$

Зауваження 3. З формули (2.12) випливає умова компланарності трьох векторів:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.13)$$

Зауваження 4. Трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ може утворювати новий базис, якщо їх мішаний добуток не дорівнює нулю.

7) ***Косинус кута*** φ між двома ненульовими просторовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданими своїми координатами, обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (2.14)$$

8) Косинуси кутів α, β, γ між вектором $\vec{a}$ і векторами базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ називаються ***напрямними косинусами*** та обчислюються за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|}, \qquad (2.15)$$

$$\text{де } |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Напрямні косинуси будь-якого ненульового вектора $\vec{a}$ задовольняють рівності $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, що безпосередньо випливає з їх визначення.

Якщо виключити координату z, то матимемо вектор на площині Oxy, і всі формули, які ми привели вище, крім формул, що описують векторний та мішаний добутки векторів, залишаються справедливими.

9) скориставшись визначенням (2.5) та формулою (2.14) знайдемо ***проекцію вектора*** $\vec{a}$ ***на вектор*** $\vec{b}$:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|} \qquad (2.16)$$

Зауважимо, що за допомогою операцій над векторами можна розв'язати ряд простих геометричних задач. Так, наприклад, на двох векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна побудувати паралелограм (рис. 2.7, а) або трикутник (рис. 2.7,б). Їх площини обчислюються за допомогою векторного добутку двох векторів.

Площа паралелограма обчислюється за формулою

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|, \tag{2.17}$$

а площа трикутника – за формулою

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \tag{2.18}$$

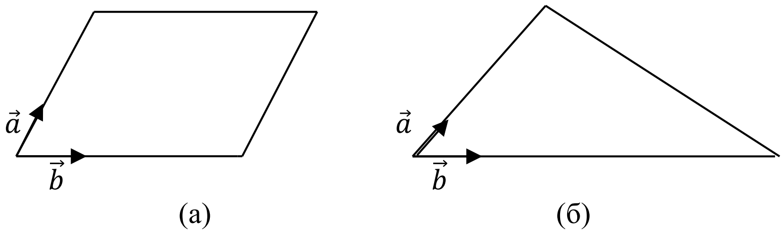


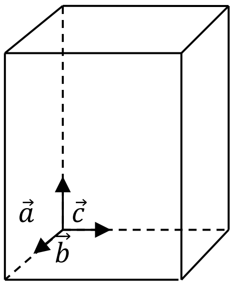
Рисунок 2.7 – Паралелограм (а) і трикутник (б), побудовані на парі векторів

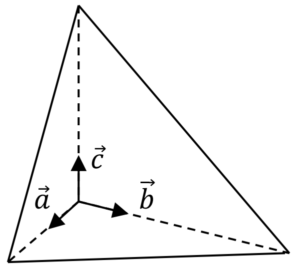
Зауважимо, що в формулах (2.17), (2.18) модуль означає довжину вектора, отриманого в результаті векторного добутку.

На трьох векторах можна побудувати паралелепіпед (рис. 2.8, а) або трикутну піраміду (рис. 2.8, б). Об’єми цих фігур знаходяться за формулами:

- паралелепіпеда $\qquad V = \left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right| \qquad (2.19)$
- піраміди $\qquad V = \frac{1}{6}\left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right| \qquad (2.20)$

В формулах (2.19), (2.20) знак модуля застосовується у значенні «модуль числа». Нам зрозуміло, що в результаті мішаного добутку отримуємо число. За умови задачі відповідь повинна бути невід’ємною, тому в формулах записуємо модуль.





(а) (б)

Рисунок 2.8 – Призма (а) та піраміда (б), побудовані на трійці векторів

Приклад 2.1. Піраміда має вершини у точках $A(-2;-5;-1)$, $B(-6;-7;9)$, $C(4;-5;1)$, $D(2;1;4)$. Знайти:

а) косинус кута ADB;

б) площу грані ABC;

в) об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання.

а) Косинус кута знайдемо за допомогою формули (2.14). Для цього знайдемо координати векторів $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{DB}$:

$\overrightarrow{DA} = (-2-2;\ -5-1;\ -1-4) = (-4;\ -6;\ -5)$;

$\overrightarrow{DB} = (-6-2;\ -7-1;\ \ 9-4) = (-8;\ -8;\ \ 5)$.

Нехай $\varphi = \angle ADB$. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DA}|\cdot|\overrightarrow{DB}|} = \frac{-4\cdot(-8)+(-6)\cdot(-8)+(-5)\cdot 5}{\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{(-8)^2+(-8)^2+5^2}} =$$

$$= \frac{32+48-25}{\sqrt{16+36+25}\cdot\sqrt{64+64+25}} = \frac{55}{\sqrt{77\cdot 153}} \approx 0{,}51.$$

б) Грань ABC – це трикутник, тому для обчислення її площі скористаємося формулою (2.18). Застосувати її можна двома способами. Спочатку побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (-6+2)\vec{\imath} + (-7+5)\vec{\jmath} + (9+1)\vec{k} = -4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 10\vec{k}$;

$\overrightarrow{AC} = (4+2)\vec{\imath} + (-5+5)\vec{\jmath} + (1+1)\vec{k} = 6\vec{\imath} + 2\vec{k}$.

Перший спосіб. Знайдемо векторний добуток векторів

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & -2 & 10\\ 6 & 0 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-2 & 10\\ 0 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-4 & 10\\ 6 & 2\end{vmatrix}+$$

$$+\vec{k}\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 6 & 0\end{vmatrix}=-4\vec{i}+68\vec{j}+12\vec{k};$$

Модуль векторного добутку

$$\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|=\sqrt{(-4)^2+68^2+12^2}=\sqrt{4784}=4\sqrt{299},$$

За формулою (2.13) маємо:

$$S=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|=2\sqrt{299}\approx 34{,}6\ (\text{од}^2).$$

Другий спосіб. Формула (2.5) дозволяє обчислити модуль векторного добутку:

$$\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\varphi.$$

Обчислимо модулі векторів

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+10^2}=\sqrt{16+4+100}=\sqrt{120}=$$

$$=2\sqrt{30},$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10},$$

В попередньому пункті ми навчились обчислювати косинус кута між векторами

$$\cos\varphi=\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-4\cdot 6-2\cdot 0+10\cdot 2}{2\sqrt{30}\cdot 2\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{300}}\approx -0{,}0577$$

та $\sin\varphi$ знайдемо з $\cos\varphi$ за допомогою основної тригонометричної тотожності

$$\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-(-0{,}0577)^2}=\sqrt{0{,}9967}\approx 0{,}9983.$$

За формулою (2.13) маємо:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{30} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 0{,}9983 \approx 34{,}6 \text{ (од}^2\text{)}.$$

На наш погляд, перший спосіб простіший, але пропонуємо читачеві самостійно обирати метод розв'язання. Як бачимо, на відповідь це не впливає.

в) Об'єм піраміди дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, який побудовано на трьох векторах: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, (см. формулу (2.20)). Названі вектори мають координати $\overrightarrow{AB}(-4,-2,10)$; $\overrightarrow{AC}(6,0,2)$, $\overrightarrow{AD}(4,6,5)$. Обчислимо мішаний добуток:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 10 \\ 6 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0 - 16 + 360 - 0 + 60 + 48 =$$

$$= 452.$$

За формулою (2.15) маємо $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 452 = 75\frac{1}{3}$ (од^3).

*Приклад 2.2.*Дано три вектори $\vec{a}(2;1;3), \vec{b}(-1;2;2)$, $\vec{c}(3;-1;1)$. З'ясувати:

а) чи є ортоногальними вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

б) чи є колінеарними вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$?

в) чи є компланарними вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$?

Розв'язання.

а) за формулою (2.9) маємо

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 6 \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \vec{a}$ і $\vec{b}$ не ортогональні;

б) за формулою (2.11) маємо

$$\frac{2}{3} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{3}{1} \;\; \Rightarrow \;\; \vec{a} \text{ і } \vec{c} \text{ не колінеарні;}$$

в) за формулою (2.13) маємо

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 3 - 18 + 1 + 4 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарні.}$$

2.4 n-мірний вектор та векторний простір

Визначення 2.11. ***n-мірним вектором*** називається впорядкована сукупність дійсних чисел $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, де x_i – i -та компонента вектора $\vec{x}$ $(i = 1, \dots, n)$.

Визначення 2.12. ***Векторним (лінійним) простором*** називається множина векторів (елементів) з дійсними компонентами, в якому визначені операції додавання векторів та добутку вектору на число.

Визначення 2.13. Вектор $\vec{a}_m$ називається ***лінійною комбінацією*** векторів $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$, якщо

$$\vec{a}_m = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_{m-1} \vec{a}_{m-1} \tag{2.21}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$ – деякі числа.

Визначення 2.14. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називаються ***лінійно залежними***, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, що не дорівнюють нулю одночасно, що

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m = 0. \tag{2.22}$$

Якщо рівність (2.22) виконується лише за умови $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називаються ***лінійно незалежними***.

Визначення 2.15. ***Розмірністю простора*** називається сукупність n лінійно незалежних векторів.

Визначення 2.16. ***Базисом n-мірного простору*** називається сукупність n лінійно незалежних векторів.

Для того, щоб відповісти на питання, чи являються вектори лінійно незалежними, необхідно скласти визначник з координат векторів. Якщо визначник дорівнює нулю, то вектори лінійно залежні, якщо відрізняються від нуля – лінійно незалежні.

Приклад 2.3. З'ясувати чи являються вектори $\vec{a}(4; -5; 2; 6)$, $\vec{b}(2; -2; 1; 3)$, $\vec{c}(6; -3; 3; 9)$, $\vec{d}(4; -1; 5; 6)$ лінійно залежними?

Розв'язання. Складемо та обчислимо визначник з координат запропонованих векторів:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & -5 & 2 & 6\\ 2 & -2 & 1 & 3\\ 6 & -3 & 3 & 9\\ 4 & -1 & 5 & 6\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ -3 & 3 & 9\\ -1 & 5 & 6\end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 6 & 3 & 9\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}+$$

$$+2\cdot\begin{vmatrix}2 & -2 & 3\\ 6 & -3 & 9\\ 4 & -1 & 6\end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 6 & -3 & 3\\ 4 & -1 & 5\end{vmatrix}=4\cdot(-36-9-45+9+$$

$$+18+90)+5\cdot(36+36+90-36-36-90)+2\cdot(-36-$$
$$-18-72+36+72+18)-6(-30-24-6+12+60+6)=$$
$$=4\cdot27+0+0-6\cdot18=108-108=0$$

$\Rightarrow$ за визначенням вектору лінійно залежні та не можуть утворювати базис.

Визначення 2.17. ***Розкладом вектора*** $\vec{x}$ за базисом $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ є

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\dots+x_n\vec{e}_n. \qquad (2.23)$$

де $x_1,x_2,\dots,x_n$ - координати вектору.

Приклад 2.4. Довести, що вектори: $\vec{a}(3;-1;0)$, $\vec{b}(2;3;1)$ і $\vec{c}(-1;4;3)$ утворюють базис; знайти розклад вектора $\vec{d}(2;3;7)$ у цьому базисі.

Розв'язання. З'ясуємо чи являються вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, лінійно залежними:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 3\end{vmatrix}=27+1+0-0+6-12=22\neq0.$$

Тобто, дані вектори утворюють базис. Розклад вектора $\vec{d}$ представимо у вигляді (за формулою (2.23)): $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$, де x,y,z – невідомі числа. Векторне рівняння перепишемо у вигляді системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими x,y,z:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 2, \\ -x + 3y + 4z = 3, \\ y + 3z = 7. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за методом Крамера. Головний визначник ми обчислили раніше, він дорівнює $\Delta = 22$. Допоміжні визначники $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ дорівнюють:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 66; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -44; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 66.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-44}{22} = -2; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3.$$

Таким чином: $\vec{d} = (3; -2; 3)$, або $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення вектора. Що таке напрям вектора, довжина вектора?
2. Які вектора називаються вільними?
3. Сформулюйте правила та властивості операцій додавання, віднімання векторів та множення векторів на число.
4. Дайте визначення проекції вектора.
5. Що таке координати вектора? Як визначаються координати та довжина вектора на числовій осі, координатній площині, координатному просторі?
6. Як розкладається вектор за трьома не компланарними векторами у тривимірному просторі? Наведіть приклад.
7. Добутки векторів. Дайте визначення скалярного, векторного, мішаного добутку векторів та опишіть їх властивості.
8. Які вектори називаються колінеарними, ортогональними, компланарними? Сформулюйте умови колінеарності, ортогональності та компланарності векторів.
9. Сформулюйте правила дій над векторами, заданими координатами. Наведіть приклади.
10. Які геометричні задачі можна розв'язати за допомогою дій над векторами? Наведіть приклади.

11. Що таке *n*-мірний вектор та векторний простір? Як визначається розмірність простора?

12. Що таке лінійна комбінація векторів? Яка лінійна комбінація векторів називається лінійно незалежною (лінійно залежною)?

13. Яка сукупність векторів утворює базис? Як розкласти вектор за базисом?

Розділ 3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

3.1 Метод координат

3.1.1 Декартова система координат на площині

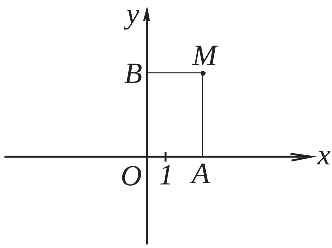


Рисунок 3.1 – Декартова система координат

Нехай на площині проведено дві взаємно перпендикулярні прямі Ox, Oy (рис. 3.1).

Визначення 3.1. Система координат, що утворена перетином двох взаємно перпендикулярних прямих, називається ***прямокутною*** (або ***декартовою***) системою координат. Вісь Ox називається віссю абсцис, вісь Oy – віссю ординат. Точка O перетину координатних осей називається ***початком координат***.

Система координат вважається заданою, якщо заданий початок координат, напрям координатних осей та масштаб (одиничний відрізок).

Нехай M – довільна точка на площині (рис. 3.1). Проведемо із неї перпендикуляри MA і MB на координатні вісі. Нас цікавлять довжини OA і OB, які беруться з певними знаками.

Правило:

1) якщо точка A розташована праворуч від початку координат, то довжині OA приписують знак «+», якщо ліворуч – « - »;

2) якщо точка B розташована вище від початку координат, то довжині OB приписують знак «+», якщо нижче – « - ».

3) Таким чином точка M має координати $x = OA,\ y = OB$ (одиниць довжини).

Перший принцип відповідності. Будь-якій точці на площині відповідає два числа – її координати. І навпаки, будь-якій парі чисел відповідає певна точка на площині, яка має ці числа своїми координатами.

3.1.2 Довжина відрізка. Відстань між двома точками

Нехай дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 3.2). Опустимо перпендикуляри з точок M_1 і M_2 на координатні вісі.

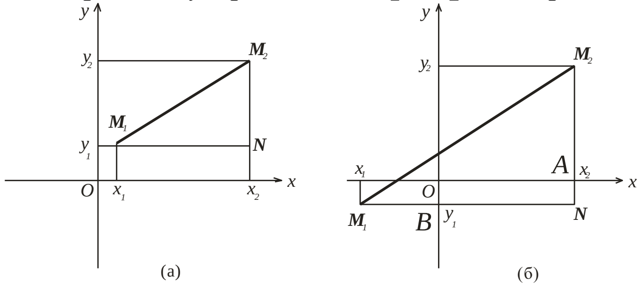


Рисунок 3.2 – Довжина відрізка

Точку перетину перпендикулярів позначимо як N, вона має координати (x_2, y_1). Ми отримали прямокутний трикутник M_1NM_2, де M_1M_2 – гіпотенуза. З теореми Піфагора маємо

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(M_1N)^2 + (M_2N)^2}.$$

На рис. 3.2,а простіше розташування точок. Тут $M_1N = x_2 - x_1$, $M_2N = y_2 - y_1$.

Отже маємо

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (3.1)$$

Розглянемо рис. 3.2,б. Тут $M_1N = M_1B + BN$, але $M_1B = -x_1$, $BN = x_2$, а тому $M_1N = x_2 - x_1$. Аналогічно $M_2N = M_2A + AN$, але $M_2A = y_2$, $AN = -y_1$, а тому $M_2N = y_2 - y_1$. Отже маємо $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Згідно з формулою (3.1) відстань від початку координат $O(0,0)$ до точки $M(x, y)$ обчислюємо за формулою

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (3.2)$$

Приклад 3.1. Дано вершини трикутника ABC: $A(-2,1), B(1,5), C(6,-4)$. Знайти периметр трикутника.

Розв'язання: Периметр трикутника обчислимо за формулою

$$P = AB + BC + CA.$$

Для цього знайдемо довжини відрізків AB, BC, CA.

$AB = \sqrt{(1+2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ (од.);

$BC = \sqrt{(6-1)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$ (од.);

$CA = \sqrt{(6+2)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{64+25} = \sqrt{89}$ (од.).

Отже маємо $P = 5 + \sqrt{106} + \sqrt{89}$ (од.).

3.1.3 Поділ відрізка у даному відношенні

Нехай дано точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ та додатні числа q_1 і q_2 $\left(\lambda = \frac{q_1}{q_2}\right)$. Необхідно знайти точку $M(x, y)$, що поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = \frac{q_1}{q_2}$, тобто

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{q_1}{q_2} = \lambda. \qquad (3.3)$$

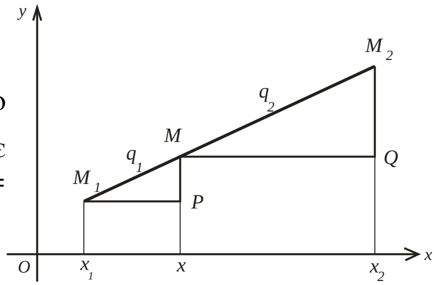


Рисунок 3.3 – Поділ відрізка в даному відношенні

Побудуємо трикутники M_1PM і MQM_2(рис. 3.3). Вони подібні (за двома кутами). А тому $\frac{M_1P}{MQ} = \frac{M_1M}{MM_2}$.

Але $M_1P = x - x_1$, $MQ = x_2 - x$.

З (3.3) маємо $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{q_1}{q_2} = \lambda$; $x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$, $x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2$. Звідси

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \qquad (3.4)$$

Аналогічно знаходимо

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (3.5)$$

Приклад 3.2. Дано відрізок AB: $A(-1,3)$, $B(4,8)$. Його поділено на чотири рівні частини. Знайти координати точок ділення.

Розв'язання: На чотири частини поділяємо відрізок трьома точками. Позначимо їх як (рис. 3.4) $C,\ D,\ E$. Визначимо λ для кожної з точок як відношення кількості частин, що пройшли від початку відрізку до обраної точки, до кількості частин, що пройшли після неї. Нехай A - початок відрізку, а B - кінець. Отже $\lambda_c = \frac{1}{3}$, $\lambda_D = \frac{2}{2} = 1$, $\lambda_E = \frac{3}{1} = 3$. Скористаємося формулами (3.4) і (3.5):

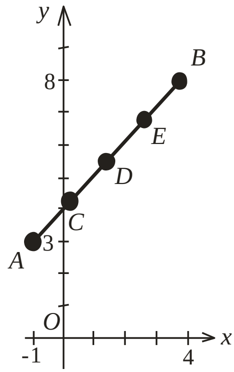


Рисунок 3.4 – Відрізок AB

$$x_C = \frac{-1+\frac{1}{3}\cdot 4}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}; \quad y_C = \frac{3+\frac{1}{3}\cdot 8}{1+\frac{1}{3}} = \frac{17}{4};$$

$$x_D = \frac{-1+4}{1+1} = \frac{3}{2}; \quad y_D = \frac{3+8}{1+1} = \frac{11}{2};$$

$$x_E = \frac{-1+3\cdot 4}{1+3} = \frac{11}{4}; \quad y_E = \frac{3+3\cdot 8}{1+3} = \frac{27}{4}.$$

Відповідь: $C\left(\frac{1}{4},\frac{17}{4}\right),\ D\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right),\ E\left(\frac{11}{4},\frac{27}{4}\right)$.

Приклад 3.3. Дано трикутник ABC: $A(2,2)$, $B(-1,1)$, $C(3,7)$. Знайти точку перетину бісектриси кута A з протилежною стороною.

Розв'язання. Скористаємося властивістю бісектрис, а саме: бісектриса поділяє протилежну сторону трикутника у відношенні, що дорівнює відношенню довжин прилеглих сторін. Позначимо через K точку перетину бісектриси і сторони (рис. 3.5). Згідно з властивістю бісектриси маємо $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = \lambda$. Обчислимо довжини AB і AC:

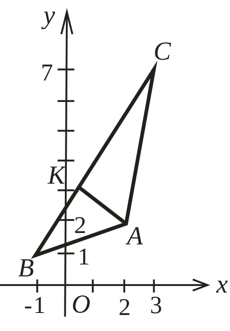


Рисунок 3.5 – Трикутник ABC

$$AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10};$$

$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}.$

Маємо $\lambda = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$. За формулами (3.4), (3.5) знайдемо координати точки K:

$$x_K = \frac{-1+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}\cdot 3}{1+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}} = \frac{-\sqrt{13}+3\sqrt{5}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}};\ y_K = \frac{1+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}\cdot 7}{1+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{13}+7\sqrt{5}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}.$$

Відповідь: $K\left(\frac{-\sqrt{13}+3\sqrt{5}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}},\ \frac{\sqrt{13}+7\sqrt{5}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}\right)$.

3.1.4 Координати середини відрізка

Нехай дано точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Необхідно знайти точку $M(x, y)$, що поділяє відрізок M_1M_2 навпіл, тобто $M_1M = MM_2$.

Побудуємо трикутники M_1PM і MQM_2 (рис. 3.6). Вони рівні (за стороною та двома кутами). А тому $M_1P = MQ$.

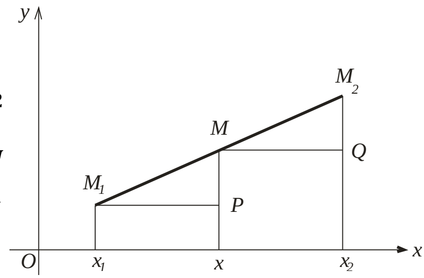


Рисунок 3.6 – Координати середини відрізка

Звідси

$$x - x_1 = x_2 - x; \quad 2x = x_1 + x_2;$$

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}. \tag{3.6}$$

Аналогічно маємо

$$y = \frac{y_1+y_2}{2}. \tag{3.7}$$

Можна скористатися формулами (3.4) – (3.7) для розв’язання питання про координати центра мас однорідного трикутника. Отже, нехай дано трикутник $M_1M_2M_3$ з координатами вершин $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ (рис. 3.7). Центр мас трикутника $N(x, y)$ розташований в точці перетину медіан. За відомою властивістю, точка перетину медіан поділяє кожну медіану у відношенні $2:1$, починаючи з вершини. Розглянемо медіану M_1K. Знайдемо координати точки K як середини M_2M_3:

$$x_K = \frac{x_2+x_3}{2};\ \ y_K = \frac{y_2+y_3}{2}.$$

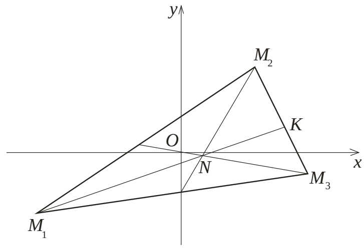


Рисунок 3.7 – Центр мас трикутника

Точка N поділяє відрізок M_1K у відношенні $2:1$. Знайдемо координати точки N за формулами (3.4), (3.5):

$$x_N = \frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \qquad y_N = \frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Остаточно маємо формули для обчислення координат центра мас однорідного трикутника:

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}. \tag{3.8}$$

$$y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}. \tag{3.9}$$

Приклад 3.4. Дано трикутник ABC: $A(4,6)$, $B(2,2)$, $C(5,-5)$. Знайти довжину медіани CL і центр мас трикутника.

Розв'язання. За визначенням медіани точка L - середина сторони AB. За формулами (3.6), (3.7) знайдемо координати точки L (рис. 3.8):

$$x_L = \frac{4+2}{2} = 3;\ \ y_L = \frac{6+2}{2} = 4.\text{ Отже } L(3,4).$$

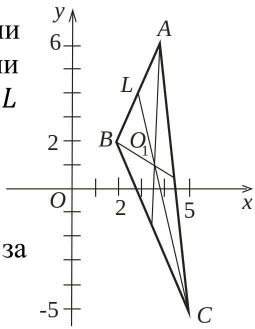


Рисунок 3.8 – Трикутник ABC

Довжину медіани CL обчислимо за формулою (3.1):

$$CL = \sqrt{(3-5)^2+(4+5)^2} = \sqrt{85}\text{ (од.)}$$

Центр мас трикутника знайдемо за формулами (3.8), (3.9):

$$x_{O_1} = \frac{4+2+5}{3} = \frac{11}{3}; \quad y_{O_1} = \frac{6+2-5}{3} = 1.$$

Відповідь: $CL = \sqrt{85}$ (од.), $O_1\left(\frac{11}{3}, 1\right)$.

3.1.5 Площа трикутника

Нехай дано трикутник $M_1M_2M_3$ з координатами вершин $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ (рис. 3.9). Необхідно знайти площу трикутника $M_1M_2M_3$.

Опустимо перпендикуляри з вершин M_1, M_2, M_3 на вісь Ox.

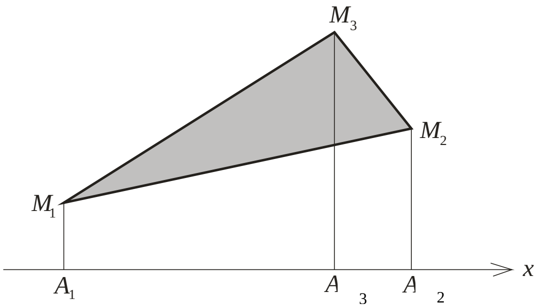


Рисунок 3.9 – Площа трикутника

Ми отримали «домівку» з трапецій $A_1M_1M_3A_3$, $A_3M_3M_2A_2$. Шуканий трикутник отримаємо видаленням із «домівки» трапеції $A_1M_1M_2A_2$. Скористаємося формулою «площа трапеції $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, де a, b – основи, h висота», отримуємо:

$$S = \frac{y_1+y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1) + \frac{y_3+y_2}{2} \cdot (x_2 - x_3) - \frac{y_1+y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1).$$

Перетворимо цей вираз, і остаточно маємо

$$S = \frac{1}{2} \cdot [(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)]. \quad (3.10)$$

Легко запам’ятати цю формулу за мнемонічним правилом:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$-$ $+$

Зауваження 1. Додатне значення площі отримуємо при додатному обігу вершин (проти руху годинникової стрілки). В противному випадку треба брати модуль отриманого результату.

Зауваження 2. Свій результат по обчисленню площі трикутника ми завжди можемо перевірити. Якщо побудувати трикутник у зошиті в клітинку, зрозуміло, що одна клітинка відповідає однієї квадратної одиниці. Підрахувавши клітинки у трикутнику, ми можемо оцінити його площу. Зрозуміло, що цей підрахунок не є точним, але порядок величини оцінити можна.

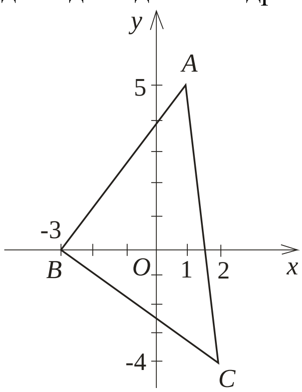


Рисунок 3.10 – Трикутник *ABC*

Приклад 3.5. Обчислити площу трикутника ABC: $A(1{,}5)$, $B(-3{,}0)$, $C(2,-4)$.

Розв'язання: Побудуємо трикутник ABC (рис. 3.10). Як бачимо, вершини розташовані за додатним напрямком. Застосуємо мнемонічне правило:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 0 \\ 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(0 + 12 + 10 + 15 - 0 + 4) = 20{,}5 \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $S = 20{,}5$ (кв. од.).

Зауваження 3. Площа довільного многокутника дорівнює сумі площ трикутників на які його можна поділити.

Приклад 3.6. Знайти площу п’ятикутника $ABCDE$:

$A(-2,-1), B(2,-2),\ C(4,3), D(1,4),$ $E(-1,2).$

Розв’язання: Розіб’ємо п’ятикутник на три трикутника (рис. 3.11). Площу п’ятикутника знайдемо так:

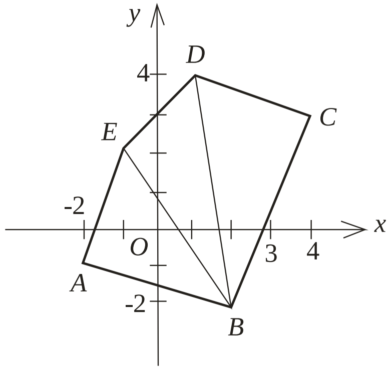


Рисунок 3.11 – П’ятикутник

$S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{EBD} + S_{DBC}.$

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(4+4+1+2-2+4) = \frac{13}{2} \text{ (кв. од.)};$$

$$S_{EBD} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2+8+2-4+2+4) = 7 \text{ (кв. од.)};$$

$$S_{DBC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-2+6+16-8+8-3) = \frac{17}{2} \text{ (кв. од.)}.$$

Отже, остаточно маємо $S_{ABCDE} = \frac{13}{2} + 7 + \frac{17}{2} = 22$ (кв. од.).

Зауваження 4. Формулу (3.10) можна застосувати для розв’язання питання про розташування точок на площині, а саме, з’ясувати, чи належать три точки до однієї прямої. Зрозуміло, що на трьох точках, що не належать до одної прямої, можна побудувати трикутник (його площа завжди відрізняється від нуля). В тому випадку, коли три точки належать до однієї прямої, трикутник перетворюється у відрізок (його площа дорівнює нулю). А тому з формули (3.10) маємо ***умову, за якою три точки належать до однієї прямої***:

$$(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1) = 0. \quad (3.11)$$

Приклад 2.7. Перевірити, чи належать точки $A(2{,}2)$, $B(8{,}6)$, $C(5{,}4)$ до однієї прямої.

Розв'язання: Скористаємося умовою (3.11):

$$(2\cdot 6 + 8\cdot 4 + 5\cdot 2) - (2\cdot 8 + 6\cdot 5 + 4\cdot 2) =$$
$$= 12 + 32 + 10 - 16 - 30 - 8 = 0.$$

Відповідь. Точки $A,\ B,\ C$ належать до однієї прямої.

3.2 Пряма лінія на площині

3.2.1 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Теорема 3.1. Будь-якій прямій відповідає рівняння першого степеню.

Доведення: Розглянемо всі можливі випадки розташування прямої на площині (рис. 3.12):

1) нехай пряма паралельна осі Oy (рис. 3.12,а). Всі точки прямої мають однакову абсцису, тому її рівняння має вигляд:
$$x = a. \quad (3.12)$$
2) нехай пряма паралельна осі Ox (рис. 3.12,б). Усі точки прямої мають однакову ординату, тому її рівняння має вигляд:
$$y = b. \quad (3.13)$$

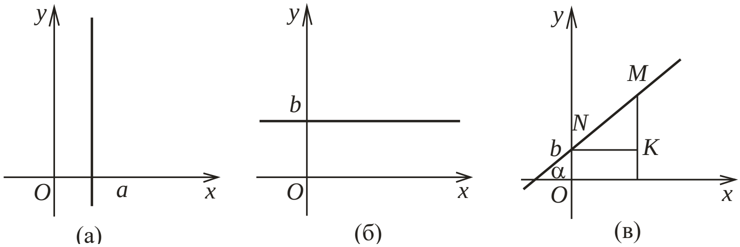


Рисунок 3.12– Всі можливі випадки розташування прямої на площині

3) розглянемо загальний випадок розташування прямої на площині (рис. 3.12,в). Нехай α – найменший кут, на якій потрібно повернути (проти руху годинникової стрілки) додатній напрямок осі Ox до сполучення з прямою. Позначимо через $k = tg\alpha$ – ***кутовий коефіцієнт прямої***. Позначимо через b – ординату точки перетину N прямої з віссю Oy. Візьмемо будь-яку точку $M(x, y)$ що належить прямій. Проведемо MK і NK паралельно координатним осям. Отриманий трикутник MKN – прямокутний (за побудовою). З прямокутного трикутника маємо:

$$\frac{MK}{NK} = tg\alpha, \;\; NK = x, \;\; MK = y - b, \quad \frac{y - b}{x} = tg\alpha, \quad \frac{y - b}{x} = k,$$

$$y = kx + b. \qquad (3.14)$$

Рівняння (3.14) має назву ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом***.

Зауваження:

1) якщо $k = 0$, пряма паралельна вісі Ox.

2) якщо k додатне, пряма утворює гострий кут з віссю Ox, якщо k від’ємне – тупий кут.

3) якщо пряма перпендикулярна осі Ox, кутовий коефіцієнт відсутній.

Як бачимо, рівняння (3.12)-(3.14) – рівняння першого степеню. Теорему доведено.

3.2.2 Загальне рівняння прямої

Теорема 3.2. Будь-якому рівнянню першого степеню відповідає деяка пряма.

Доведення: Загальний вигляд рівняння першого степеню

$$Ax + By + C = 0. \qquad (3.15)$$

Нехай $B = 0$, тоді $Ax + C = 0$, $x = -\frac{C}{A}$ (рівняння вигляду 3.12).

Нехай $A = 0$, тоді $By + C = 0$, $y = -\frac{C}{B}$ (рівняння вигляду 3.13).

Нехай $A \neq 0,\ B \neq 0$, тоді $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ (рівняння вигляду 3.14).

В будь-якому випадку рівняння першого ступеня описує пряму лінію. Теорему доведено.

Рівняння (3.15) має назву ***загальне рівняння прямої***.

Зауваження 1:

1) якщо $A = 0$, то пряма паралельна вісі Ox.
2) якщо $B = 0$, то пряма паралельна вісі Oy.
3) якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат.

Зауваження 2. Для того щоб перетворити загальне рівняння прямої в рівняння з кутовим коефіцієнтом, необхідно його розв'язати відносно y.

3.2.3 Рівняння прямої у відрізках

Нехай дано пряму $Ax + By + C = 0$, що не паралельна жодній з координатних осей та не проходить через початок координат, тобто $A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0$ (рис. 3.13).

Перетворимо це рівняння у наступний спосіб:

$$Ax + By = -C \,|\, : (-C);$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1; \qquad \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

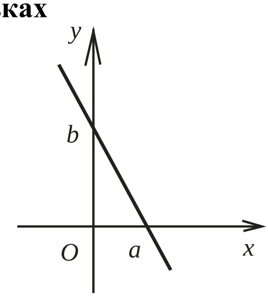


Рисунок 3.13 – Рівняння прямої у відрізках

Нехай $a = -\frac{C}{A},\ b = -\frac{C}{B}$.

Тоді рівняння набуває вигляду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{3.16}$$

Рівняння (3.16) називається ***рівнянням прямої у відрізках***. Тут a – відрізок, що відсікає пряма на осі абсцис, b – відрізок, що відсікає пряма на осі ординат (рис. 3.13).

Приклад 2.8. Дано ромб, діагоналі якого співпадають з осями координат, і дорівнюють, відповідно, 6 і 10 одиницям довжини. Скласти рівняння сторін ромбу.

Розв'язання: Згідно властивостей ромбу, його діагоналі перетинаються під прямим кутом і точкою перетину поділяються навпіл. Саме тому, ми відкладемо ліворуч і праворуч від початку координат по 3 одиниці довжини, а догори та донизу – по 5 одиниць (рис. 3.14). Як бачимо, пряма AB відсікає на осі Ox відрізок у (-3) одиниці, а на осі Oy – у 5 одиниць, тоді її рівняння $\frac{x}{-3}+\frac{y}{5}=1$; пряма BC відсікає на осі Ox відрізок у 3 одиниці, а на осі Oy - у 5 одиниць, тоді її рівняння $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$; аналогічно пряма CD відсікає відрізки на осях відповідно у 3 і -5 одиниць, її рівняння $\frac{x}{3}+\frac{y}{-5}=1$, а пряма DA відсікає відрізки на осях відповідно у -3 і -5 одиниць, її рівняння - $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-5}=1$.

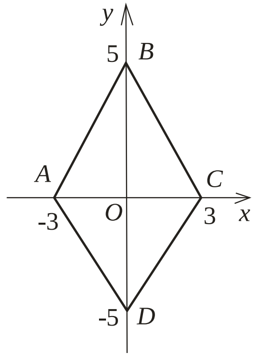


Рисунок 3.14 – Ромб

3.2.4 Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, які не співпадають (рис. 3.15). Необхідно знайти рівняння прямої, що проходить через ці точки у вигляді $y = kx + b$.

Нехай M_1 належить прямій, тоді $y_1 = kx_1 + b$. Віднімемо з (3.14) це рівняння: $y - y_1 = k(x - x_1)$. За умовою ця пряма проходить також через точку M_2, а тому координати M_2

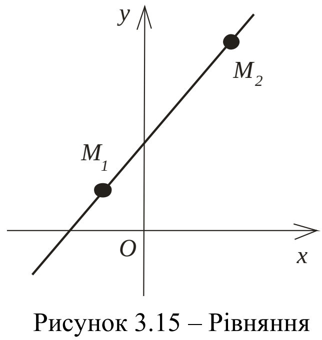


Рисунок 3.15 – Рівняння прямої, що проходить через дві точки

задовольняють рівнянню:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Кутовий коефіцієнт шуканої прямої має вигляд:

$$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{3.17}$$

Таким чином шукане рівняння має вигляд

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \cdot (x - x_1)$$

або

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{3.18}$$

Зауваження. З рівняння (3.18) маємо необхідну і достатню умову того, що три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і $M_3(x_3, y_3)$ належать до однієї прямої:

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}. \tag{3.19}$$

Приклад 3.9. Дано точки $A(-3,7)$ і $B(4,-2)$. Записати рівняння прямої AB.

Розв'язання: Скористаємось формулою (3.18):

$\frac{y-7}{-2-7} = \frac{x+3}{4+3}$; $\frac{y-7}{-9} = \frac{x+3}{7}$;

$7(y-7) = -9(x+3)$;

$7y = -9x + 22$;

$y = -\frac{9}{7}x + \frac{22}{7}$.

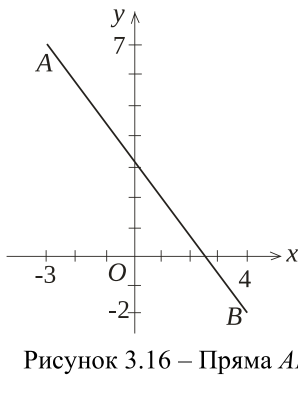


Рисунок 3.16 – Пряма *AB*

Перевіримо результат за рисунком 3.16. Дійсно, шукана пряма утворює тупий кут з додатнім напрямком осі абсцис (кутовий коефіцієнт від'ємний) і відтинає відрізок більший трьох одиниць на додатному напрямку осі ординат ($b = 3\frac{1}{7}$).

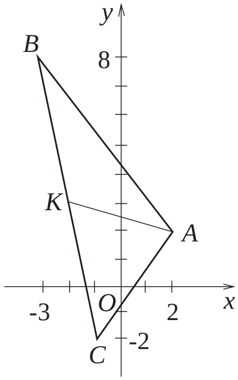


Рисунок 3.17 – Трикутник *ABC*

Приклад 3.10. Дано трикутник ABC: $A(2,2)$, $B(-3,8)$, $C(-1,-2)$. Знайти рівняння медіани AK.

Розв'язання: За визначенням медіана поділяє сторону навпіл. За формулами (3.6), (3.7) знайдемо координати точки K як середини відрізку BC (рис. 3.17):

$$x_k = \frac{-3-1}{2} = -2; \quad y_k = \frac{8-2}{2} = 3; \quad K(-2,3).$$

За формулою (3.17) шукане рівняння медіани має вигляд:

$$\frac{y-2}{3-2} = \frac{x-2}{-2-2}; \quad \frac{y-2}{1} = \frac{x-2}{-4};$$

$$-4(y-2) = x-2; \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}.$$

3.2.5 Рівняння прямої, що проходить через дану точку $A(x, y)$ у даному напрямку k

Будемо шукати рівняння у вигляді (3.14). Кутовий коефіцієнт за умовою відомий, а невідомий параметр b знайдемо з умови проходження прямої через точку A: $b = y_1 - kx_1$. Підставимо b у рівняння (3.14): $y = kx + y_1 - kx_1$, або

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (3.20)$$

Приклад 3.10. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(3,5)$ і утворює кут $\alpha = 45^0$ з додатним напрямком осі Ox.

Розв'язання: За означенням $k = tg\alpha = tg45^0 = 1$. Скористаємось формулою (3.20), отримаємо $y - 5 = 1 \cdot (x - 3)$. Шукане рівняння має вигляд $y = x + 2$.

3.2.6 Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Нехай дано прямі I і II: $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$. Їх кутові коефіцієнти $k_1 = tg\alpha_1$ і $k_2 = tg\alpha_2$.

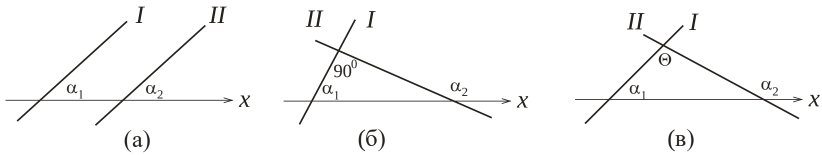


Рисунок 3.18 – Всі можливі випадки взаємного розташування прямих на площині

Розглянемо всі можливі випадки взаємного розташування двох прямих на площині:

1) нехай прямі I і II паралельні (рис. 3.18, а), тоді кути, що утворюють ці прямі з додатним напрямком осі абсцис рівні: $\alpha_1 = \alpha_2$. Тому $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$, і, відповідно

$$k_1 = k_2; \qquad (3.21)$$

2) нехай прямі I і II перпендикулярні (рис. 3.18, б). З теореми про зовнішній кут трикутника прямує $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^0$. Отже

$$k_2 = tg\alpha_2 = tg(\alpha_1 + 90^0) = -ctg\alpha_1 =$$

$$= -\frac{1}{tg\alpha_1} = -\frac{1}{k_1};$$ остаточно маємо

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (3.22)$$

3) нехай прямі I і II перетинаються під довільним кутом ϑ (рис. 3.18, в). Під ϑ ми розуміємо найменший кут, на який потрібно повернути проти ходу годинникової стрілки пряму I до прямої II щоб вони збіглися. Таким чином прямі I і II не рівноправні! Скористаємось теоремою про зовнішній кут трикутника:

$$\alpha_2 = \vartheta + \alpha_1; \qquad \vartheta = \alpha_2 - \alpha_1;$$

$$tg\vartheta = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2};$$

або

$$tg\vartheta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (3.23)$$

Приклад 3.12. Дано пари прямих:

1) $y = 7x - 13; \quad y = 7x + 5;$
2) $y = \frac{1}{3}x + 2; \quad y = -3x + 8;$
3) $y = 2x - 6; \quad y = 5x - 1.$

З'ясувати взаємне розташування прямих, визначити кут між ними.

Розв'язання:

1) кутові коефіцієнти прямих $k_1 = k_2 = 7$ задовольняють умові паралельності прямих (3.21). Прямі паралельні;

2) кутові коефіцієнти прямих $k_1 = \frac{1}{3}$; $k_2 = -3$ задовольняють умові перпендикулярності прямих (3.22). Прямі перпендикулярні;

3) кутові коефіцієнти прямих $k_1 = 2,\ k_2 = 5$. Знайдемо кут між прямими за формулою (3.23):

$$tg\vartheta = \frac{5-2}{1+2\cdot 5} = \frac{3}{11}; \qquad \vartheta = arctg\,\frac{3}{11}.$$

Приклад 3.13. Дано трикутник ABC: $A(-4,3)$, $B(2,5)$, $C(-5,9)$. Знайти:

1) кути трикутника;
2) рівняння висоти CN;
3) рівняння прямої l, що проходить через вершину B паралельно стороні AC.

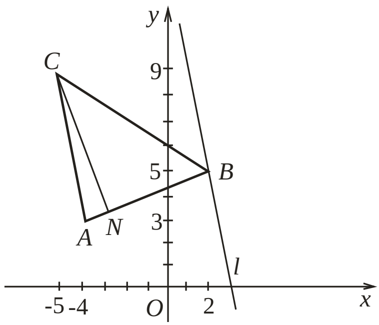


Рисунок 3.19 – Трикутник *ABC*

Розв'язання: Побудуємо трикутник (рис. 3.19). Знайдемо за формулою (3.17) кутові коефіцієнти сторін трикутника: $k_{AB} = \frac{5-3}{2+4} = \frac{1}{3}$; $k_{BC} = \frac{9-5}{-5-2} = -\frac{4}{7}$; $k_{AC} = \frac{9-3}{-5+4} = -6$.

1) знайдемо кути трикутника за формулою (3.23):

$$tg\angle BAC = \frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}k_{AB}} = \frac{-6-\frac{1}{3}}{1+(-6)\cdot\frac{1}{3}} = \frac{19}{3}; \quad \angle BAC = arctg\frac{19}{3};$$

$$tg\angle ABC = \frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}k_{Bc}} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{4}{7}}{1+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)} = \frac{19}{17}; \quad \angle ABC = arctg\frac{19}{17};$$

$$tg\angle ACB = \frac{k_{BC}-k_{AC}}{1+k_{AC}k_{Bc}} = \frac{-\frac{4}{7}+6}{1+(-6)\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)} = \frac{38}{31}; \quad \angle ACB = arctg\frac{38}{31}.$$

2) висота CN перпендикулярна до сторони AB. За умовою перпендикулярності прямих (3.22) маємо:

$$k_{CN} = -\frac{1}{k_{AB}} = -3.$$

Скористаємося формулою (3.20): $y-9=-3(x+5)$. Рівняння шуканої висоти має вигляд: $y=-3x-6$.

3) за умовою паралельності прямих: $k_l = k_{AC} = -6$.

За формулою (3.20): $y-5=-6(x-2)$,
рівняння шуканої прямої має вигляд: $y=-6x+17$.

3.2.7 Нормальне рівняння прямої

Нехай пряма задана загальним рівнянням (3.15). Помножимо це рівняння на деякий множник $M \neq 0$:

$$MAx + MBy + MC = 0.$$

Позначимо $MA = cos\alpha$; $MB = sin\alpha$; $MC = -p$. В такому випадку (3.15) рівняння набуде вигляду:

$$x \cdot cos\alpha + y \cdot sin\alpha - p = 0. \qquad (3.24)$$

Рівняння (3.24) має назву ***нормального рівняння*** прямої.

Коефіцієнт M називається ***нормуючим множником***. Знайдемо його за допомогою основної тригонометричної тотожності: $(MA)^2 = cos^2\alpha$; $(MB)^2 = sin^2\alpha$; $(MA)^2+(MB)^2 = cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$; $M^2(A^2+B^2)=1$, або

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3.25)$$

Знак нормуючого множника обирається протилежним до знаку C.

Спробуємо з'ясувати геометричний зміст кута α:

$$MA = cos\alpha;\ MB = sin\alpha.$$

$$cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

$$sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Поділимо ці вирази: $\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{B}{A}$, тобто $k = tg\alpha = \frac{B}{A}$.

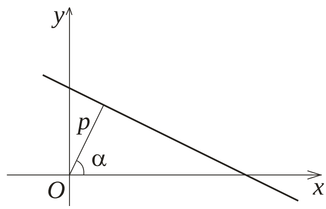


Рисунок 3.20 – Нормальне рівняння прямої

В рівнянні (3.15) кутовий коефіцієнт прямої $k = -\frac{B}{A}$. Бачимо, що ці кутові коефіцієнти задовольняють умові перпендикулярності (3.22). А тому зрозуміло, що кут α описує пряму, що перпендикулярна до шуканій. Довжина відрізка від початку координат до точки перетину цих прямих дорівнює p (рис. 3.20).

Приклад 3.14. Прямі задані рівняннями:

1) $3y - 2x + 7 = 0$;
2) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y - 12 = 0$;
3) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$.

З'ясувати, чи задані ці прямі нормальними рівняннями? Якщо ні, привести рівняння до нормального вигляду.

Розв'язання:

Перевіримо виконання умови $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$. Якщо пряма задана нормальним рівнянням, то коефіцієнт при x є $cos\alpha$, а при $y -\ sin\alpha$:

1) $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 3^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13 \neq 1$. Умова не виконується. Рівняння не є нормальним. Приведемо його до нормального вигляду:

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Обираємо знак обернений до C, а саме «$-$».

$$3y - 2x + 7 = 0 \Big| \quad \cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{13}}\right);$$
$$-\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{7}{\sqrt{13}} = 0.$$

2) $cos^2\alpha + sin^2\alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{1}{9} = \frac{97}{144} \neq 1$ Умова не виконується. Рівняння не є нормальним. Приведемо його до нормального вигляду:
$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \pm\frac{1}{\frac{\sqrt{97}}{12}} = \pm\frac{12}{\sqrt{97}}.$$
Обираємо знак протилежний C, а саме «+».
$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y - 12 = 0 \Big| \quad \cdot\frac{12}{\sqrt{97}};$$
$$\frac{9}{\sqrt{97}}x + \frac{4}{\sqrt{97}}y - \frac{144}{\sqrt{97}} = 0.$$

3) $cos^2\alpha + sin^2\alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1.$
Умова виконується, тому це рівняння – нормальне.

Приклад 3.15. Дано рівняння прямої
$$\frac{x-7}{2} + 5 = -\frac{2}{3} - (3x - 2y).$$
Записати рівняння цієї прямої у вигляді:
1) загального рівняння;
2) рівняння з кутовим коефіцієнтом;
3) рівняння у відрізках;
4) нормального рівняння.

Розв'язання:

1) перетворимо початкове рівняння. Помножимо весь вираз на 6 (щоб позбутися знаменників): $3x - 21 + 30 = -4 - 18x + 12y$; перенесемо все ліворуч; приведемо подібні; остаточно маємо загальне рівняння прямої:
$$21x - 12y + 34 = 0;$$
2) розв'яжемо отримане у п. 1 загальне рівняння відносно y і отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:
$$y = \frac{7}{4}x + \frac{17}{6};$$

3) перенесемо у загальному рівнянні вільний член праворуч $21x - 12y = -34$. Поділимо отриманий вираз на -34, скоротимо. Отримаємо рівняння прямої у відрізках:

$$-\frac{21}{34}x + \frac{6}{17}y = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x}{-\frac{34}{21}} + \frac{y}{\frac{17}{6}} = 1;$$

4) помножимо загальне рівняння на нормуючий множник $M = -\frac{1}{\sqrt{21^2+(-12)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{585}} = -\frac{1}{3\sqrt{65}}$. Нормальне рівняння заданої прямої має вигляд:

$$-\frac{7}{\sqrt{65}}x + \frac{4}{\sqrt{65}}y - \frac{34}{3\sqrt{65}} = 0.$$

3.2.8 Відстань від точки до прямої

Нехай дано пряму $Ax + By + C = 0$ і довільну точку $M(x_0, y_0)$. Позначимо шукану відстань як d. Якщо точка M належить прямій, відповідь очевидна: $d = 0$. В загальному випадку (M не належить прямій), для знаходження відстані від точки до прямої, необхідно виконати додаткові побудови (рис. 3.21).

Позначимо задану пряму як II, а пряму, що їй перпендикулярна як I. Розглянемо замкнену ламану $OPKMRO$. На відрізку OP оберемо додатній напрям від точки O до точки P і позначимо цю вісь як l.

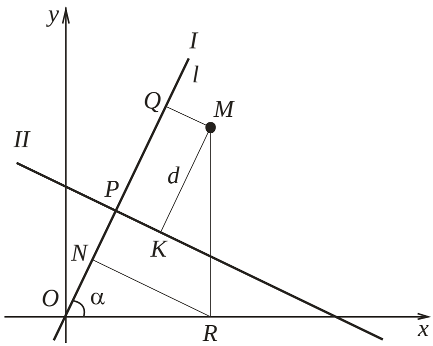


Рисунок 3.21 – Відстань від точки до прямої

Довжина відрізка $KM = d$.

Знайдемо проекцію замкненої ламаної на вісь l. Відомо, що сума проекцій замкненої ламаної дорівнює нулю:

$$np_l OP + np_l PK + np_l KM + np_l MR + np_l RO = 0.$$

Розглянемо кожну проекцію: $np_l OP = p$; $np_l PK = 0$; $np_l KM = d$; $np_l MR = -NQ = -y_0 \cdot sin\alpha$; $np_l RO = -NO = -x_0 \cdot cos\alpha$.

Виконаємо додавання отриманих значень

$$p + d - y_0 \cdot sin\alpha - x_0 \cdot cos\alpha = 0.$$

Остаточно маємо

$$d = |x_0 \cdot cos\alpha + y_0 \cdot sin\alpha - p|. \qquad (3.26)$$

Отже, для того, щоб знайти відстань від точки до прямої, необхідно привести її рівняння до нормального вигляду і підставити в нього координати x_0, y_0 точки M. Оскільки нас цікавить відстань від точки до прямої, а не її розташування, то у формулі (3.26) обчислену величину d беремо за модулем.

Зауваження. Якщо задана точка M і початок координат розташовані з різних сторін прямої II, то d отримаємо зі знаком «+», якщо з однієї – зі знаком «−».

Якщо пряма задана загальним рівнянням, то формула (3.26) набуває вигляду:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.27)$$

Приклад 3.16. Дано трикутник ABC: $A(-4, -6)$, $B(-2,4)$, $C(6,0)$. Знайти довжину висоти BN.

Розв'язання: Довжина висоти BN - це відстань від точки B до прямої AC (рис. 3.22). Знайдемо рівняння сторони AC як прямої, що проходить через дві задані точки (3.18): $\frac{y+6}{0+6} = \frac{x+4}{6+4}$. Запишемо це рівняння у вигляді загального рівняння прямої:

$$3x - 5y - 18 = 0.$$

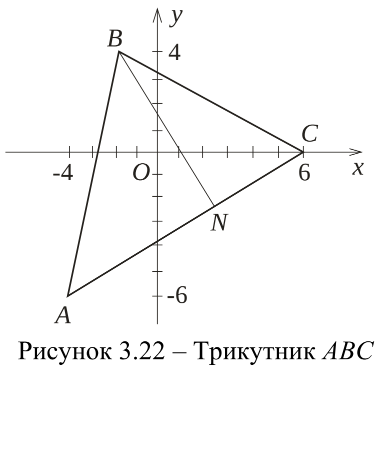


Рисунок 3.22 – Трикутник *ABC*

Для знаходження довжини висоти скористаємось формулою (3.27):

$$d = BN = \frac{|3\cdot(-2)-5\cdot4-18|}{\sqrt{3^2+(-5)^2}} = \frac{44}{\sqrt{34}} \text{ (од.).}$$

3.2.9 Взаємне розташування прямих на площині

Нехай дано дві прямі, що задані загальними рівняннями (3.15):

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0; \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Із загальних міркувань зрозуміло, що можливі наступні випадки взаємного розташування прямих на площині: прямі можуть перетинатися в одній точці, можуть не перетинатися – бути паралельними або збігатися.

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2. \end{cases} \qquad (3.28)$$

Для розв'язання системи (3.28) за правилами Крамера, обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}.$$

Можливі наступні випадки:

1) визначник системи $\Delta \neq 0$ (ранг матриці дорівнює двом), тобто система (3.28) сумісна і визначена. За формулами Крамера маємо:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}. \qquad (3.29)$$

Цей випадок відповідає ситуації, коли прямі перетинаються, тому за формулами (3.29) знаходимо координати точки перетину прямих;

2) визначник системи $\Delta = 0$. В даному випадку можливі ситуації:

а) ранг розширеної матриці дорівнює двом, тобто хоча б один з визначників Δ_x або Δ_y відмінний від нуля. Тоді за теоремою Кронекера-Капеллі система (3.28) несумісна. Це означає, що прямі паралельні;

б) ранг розширеної матриці дорівнює одиниці, тобто всі визначники дорівнюють нулю: $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. За теоремою Кронекера-Капеллі така система має нескінчену множину розв'язків. Це відповідає ситуації, коли прямі збігаються.

Приклад 3.17. Знайти точки перетину двох прямих

$$3x - 5y + 7 = 0 \text{ і } -4x + 2y + 3 = 0.$$

Розв'язання. $A_1 = 3,\ B_1 = -5,\ C_1 = 7;\ A_2 = -4,\ B_2 = 2,$ $C_2 = 3$. За формулами (3.29) маємо:

$$x = \frac{-5\cdot 3 - 2\cdot 7}{3\cdot 2 - (-4)\cdot(-5)} = \frac{29}{14}; \quad y = \frac{-4\cdot 7 - 3\cdot 3}{3\cdot 2 - (-4)\cdot(-5)} = \frac{37}{14}.$$

Отже точка перетину прямих має координати $P\left(\frac{29}{14}, \frac{37}{14}\right)$.

3.3 Лінії другого порядку на площині

Визначення 3.2. Якщо $F(x, y)$ - многочлен другого степеня, то лінія, яка визначається цим рівнянням називається ***лінією другого порядку***

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0. \tag{3.30}$$

В залежності від співвідношення коефіцієнтів рівняння (3.30) може визначати коло, еліпс, гіперболу, параболу.

3.3.1 Коло

Визначення 3.3. ***Коло*** – це геометричне місце точок, що рівновіддалені від однієї точки, яка називається ***центром кола.*** Відстань від центра кола до будь-якої точки кола називається ***радіусом кола***.

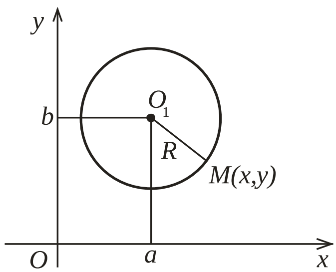


Рисунок 3.23 – Коло

Виведемо рівняння кола згідно з визначенням. Нехай $M(x,y)$ – будь-яка точка кола, $O(a,b)$ – центр кола, R - радіус (рис. 3.23):

$$R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 \qquad (3.31)$$

Рівняння (3.31) називається ***канонічним рівнянням кола***.

Перетворимо (3.31):

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 - R^2 = 0.$$

Порівнюємо з (3.30), маємо $A = 1,\ B = 1,\ C = 0,\ D = -2a,$ $E = -2b,\ F = a^2 + b^2 - R^2$. Отже, рівняння (3.30) описують коло, якщо коефіцієнти при квадратах x і y дорівнюють один одному, а коефіцієнт при добутку xy дорівнює нулю.

Приклад 3.18. Скласти канонічні рівняння кола якщо:

а) центр знаходиться у точці $O_1(2,-5)$ і $R = 4$;

б) центр знаходиться у точці $O_1(3,7)$ і коло проходить через точку $M(-4,2)$;

в) відомі координати кінців одного з діаметрів кола AB: $A(2,-3),\ B(6,5)$.

Розв'язання:

а) за формулою (3.31) маємо $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$;

б) знайдемо радіус кола за формулою (2.1):

$$R = O_1M = \sqrt{(-4-3)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{74};$$

$$(x-3)^2 + (y-7)^2 = 74;$$

в) за визначенням діаметру, знайдемо за формулами (2.6), (2.7) координати центра кола як координати середини відрізка AB: $x_{o_1} = \frac{2+6}{2} = 4$; $y_{o_1} = \frac{-3+5}{2} = 1$. Радіус знайдемо як довжину відрізка AO_1:

$$R = AO_1 = \sqrt{(4-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,.$$

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 20.$$

Приклад 3.19. Визначити, яку лінію задає рівняння

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0?$$

Розв'язання: Коефіцієнти $A = 1,\ B = 1,\ C = 0,$ тому загальне рівняння лінії другого порядку описує коло. Для того, щоб привести його до канонічного вигляду, необхідно виділити повний квадрат

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 8y + 16) - 16 - 11 = 0;$$
$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36.$$

Отже, центр кола розташовано в точці $O_1(3,-4)$, а радіус $R = 6$.

3.3.2 Еліпс

Визначення 3.4. ***Еліпс*** – це геометричне місце точок, сума відстаней до яких від двох заданих точок (що називаються фокусами) є величина стала і більша за відстань між фокусами.

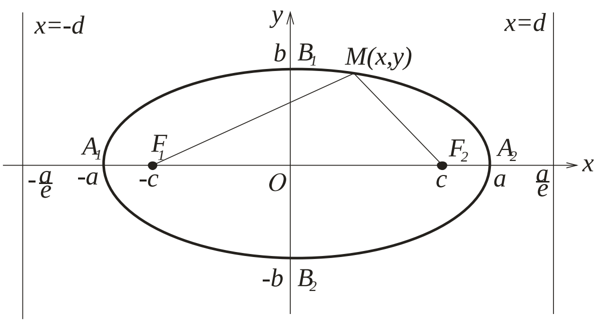


Рисунок 3.24 – Еліпс

Нехай $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$ - фокуси еліпса. Якщо точка $M(x,y)$ – будь-яка точка еліпса (рис. 3.24), то за визначенням маємо

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a, \qquad (3.32)$$

де a – дана стала величина. $|F_1M|$ і $|F_2M|$ - фокальні радіуси. Знайдемо їх довжини:

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \qquad |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Підставимо їх у рівність (3.32):

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Піднесемо його до квадрату і виконаємо відповідні перетворення:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 =$$
$$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2;$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx; \quad |:4$$
$$a^2((x-c)^2 + y^2) = (a^2 - cx)^2;$$
$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2;$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \ |: \ a^2(a^2 - c^2).$$

Позначимо $b^2 = a^2 - c^2$ і отримаємо ***канонічне рівняння еліпсу***:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.33)$$

Точки перетину з осями симетрії, які в нашому випадку співпадають з осями координат, називаються вершинами еліпса: $A_1(-a,0), A_2(a,0),\ B_1(0,b), B_2(0,-b)$. $|OA| = a$ – велика піввісь еліпса, $|OB| = b$ – мала піввісь еліпса.

Визначення 3.5. ***Ексцентриситетом*** називається відношення відстані між фокусами еліпса до довжини його великої осі:

$$e = \frac{2c}{2a} < 1 \quad \text{або} \quad e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \qquad (3.34)$$

Ексцентриситет характеризує форму еліпса: чим ближче e до 1, тим менше відношення $\frac{b}{a}$, і тим більше витягнутий еліпс; і навпаки: чим менше ексцентриситет, тим ближче відношення $\frac{b}{a}$

до 1 і тим ближче еліпс за формою наближається до кола.

Визначення 3.6. Нехай $a > b$ (рис. 3.24). Дві прямі, що перпендикулярні великій осі і розташовані на відстані $\frac{a}{e}$ від центра, називаються ***директрисами еліпса***:

$$x = -\frac{a}{e}, \quad x = \frac{a}{e}. \tag{3.35}$$

Оскільки $e < 1$, то права директриса розташована праворуч від правої вершини, а ліва – ліворуч від лівої вершини.

Властивість директрис еліпса. Якщо r – відстань від будь-якої точки еліпса до будь-якого фокуса, d – відстань від тієї ж точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ величина незмінна і дорівнює ексцентриситету еліпса:

$$\frac{r}{d} = e. \tag{3.36}$$

Приклад 3.20. Знайти довжину півосей, ексцентриситет, координати фокусів і вершин, скласти рівняння директрис еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Розв'язання. За умовою $a^2 = 16; \quad \rightarrow \quad a = 4$; отже велика піввісь дорівнює 4, аналогічно $b^2 = 9; \quad \rightarrow \quad b = 3$ – мала піввісь дорівнює 3. Координати вершин еліпса $A_1(-4{,}0)$, $A_2(4{,}0)$, $B_1(0{,}3)$, $B_2(0,-3)$.

Знайдемо координати фокусів. Для цього скористаємось основною тотожністю для еліпса:

$$b^2 = a^2 - c^2; \quad \rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7; \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{7};$$

отже фокуси мають координати $F_1\left(-\sqrt{7},\ 0\right),\ F_2\left(\sqrt{7},\ 0\right)$.

Для знаходження ексцентриситету скористаємось формулою (3.34):

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} < 1.$$

Директриси знайдемо за формулою (3.35): $d = \frac{a}{e} = \frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{16}{\sqrt{7}}$;

їх рівняння

$$x = \pm\frac{16}{\sqrt{7}}.$$

Приклад 3.21. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що:

а) мала піввісь дорівнює 3, а фокус розташований у точці $F(\sqrt{5}, 0)$;

б) велика піввісь дорівнює 10, а ексцентриситет $e = \frac{2}{5}$;

в) еліпс проходить через точки $A(4{,}0), B(-3, \sqrt{2})$.

Розв'язання:

а) за умовою $b = 3,\ c = \sqrt{5}$. Знайдемо a із тотожності

$$b^2 = a^2 - c^2.\ a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{9+5} = \sqrt{14}.$$

Канонічне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

б) за умовою $a = 10,\ e = \frac{2}{5}$. Скористаємось формулою (3.34): $\frac{c}{a} = \frac{2}{5}$, $\quad c = \frac{2}{5}a = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4.$

Знайдемо малу піввісь:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

Канонічне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{84} = 1.$$

в) за умовою дані точки A і B належать еліпсу, тому їх координати задовольняють його рівнянню:

$$\begin{cases} \frac{4^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(-3)^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{16}{a^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a^2 = 16 \\ \frac{9}{16} + \frac{2}{b^2} = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a^2 = 16 \\ \frac{2}{b^2} = 1 - \frac{9}{16} \end{cases}; \quad \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = \frac{32}{7} \end{cases}.$$

Канонічне рівняння еліпса має вигляд: $\frac{x^2}{16} + \frac{7y^2}{32} = 1.$

Приклад 3.22. Обчислити ексцентриситет еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює середньому арифметичному довжин його осей.

Розв'язання. За умовою $2c=\frac{2a+2b}{2}$ або $2c=a+b$. Скористаємося основною тотожністю для еліпса $b^2=a^2-c^2$:

$$2c=a+\sqrt{a^2-c^2}.$$

Піднесемо цю рівність до квадрату і виконаємо відповідні перетворення:

$$4c^2=a^2+2a\sqrt{a^2-c^2}+a^2-c^2;$$

$$5c^2=2a^2+2a\sqrt{a^2-c^2} \qquad |:a^2.$$

За визначенням $e=\frac{c}{a}$, маємо: $5e^2=2+2\sqrt{1-e^2}$. Розв'яжемо це рівняння відносно e:

$$\left(2\sqrt{1-e^2}\right)^2=(5e^2-2)^2;$$

$$4-4e^2=25e^4-20e^2+4;$$

$$25e^4-16e^2=0.$$

Рівняння розпадається на два: $e^2=0$ або $25e^2-16=0$. Перше не має сенсу, з другого маємо $e=\frac{4}{5}$ (може бути лише додатнім).

3.3.3 Гіпербола

Визначення 3.7. ***Гіперболою*** називається геометричне місце точок, для яких різниця відстаней від двох заданих точок (що називаються фокусами) є стала додатна величина, менша за відстань між фокусами.

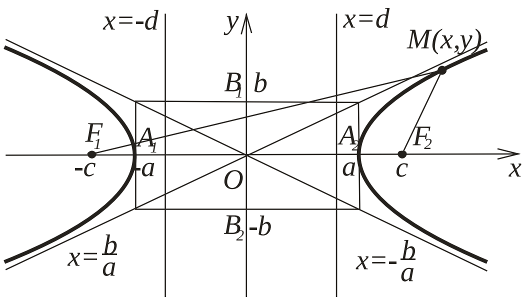


Рисунок 3.25 – Гіпербола

Нехай $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ – фокуси гіперболи. Якщо точка $M(x, y)$ – будь-яка точка гіперболи (рис. 3.25), то за визначенням маємо

$$|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a, \tag{3.37}$$

тут a – деяка стала додатна величина з визначення, $|F_1M|$ і $|F_2M|$ – фокальні радіуси. Знак «плюс» беремо, коли $|F_1M| > |F_2M|$ і «мінус», коли $|F_1M| < |F_2M|$.

За визначенням (3.37) і умовою, що $|F_1M| > |F_2M|$, маємо:

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$; або

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Піднесемо цю рівність до квадрату і виконаємо відповідні перетворення:

$$x^2+2cx+c^2+y^2 =$$
$$= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2;$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4cx - 4a^2; \quad |:4$$
$$a^2((x-c)^2+y^2) = (cx-a^2)^2;$$
$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4;$$
$$(a^2-c^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \quad |:\ a^2(a^2-c^2)$$

Позначимо $b^2 = c^2 - a^2$ і отримаємо ***канонічне рівняння гіперболи***:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.38}$$

Точки перетину гіперболи з віссю Ox називаються її вершинами гіперболи: $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ Початок координат $O(0,0)$ – є центром гіперболи, відрізки A_1A_2 – дійсною віссю, B_1B_2 – умовною віссю гіперболи.

Визначення 3.8. ***Асимптотами*** гіперболи є прямі лінії, які задовольняють умові: якщо точка $(x, f(x))$ рухається вздовж вітки графіка функції до нескінченності, відстань від цієї точки до названої прямої прямує до нуля.

Знайдемо рівняння асимптоти. Розв'яжемо рівняння (3.38) відносно y:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}.$$

За визначенням асимптоти спрямуємо $x \to \infty$, маємо:

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (3.39)$$

Визначення 3.9. ***Ексцентриситетом*** називається відношення відстані між фокусами гіперболи до довжини його дійсної осі:

$$e = \frac{2c}{2a} > 1 \quad \text{або} \quad e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (3.40)$$

Ексцентриситет характеризує форму гіперболи: чим менше e, тим більше витягнутий основний прямокутник гіперболи у напрямку осі, яка об'єднує вершини.

Визначення 3.10. Дві прямі, що перпендикулярні великій осі і розташовані на відстані $\frac{a}{e}$ від центра, називаються ***директрисами гіперболи***:

$$x = -\frac{a}{e}, \quad x = \frac{a}{e}. \quad (3.41)$$

Оскільки $e > 1$, то права директриса розташована між правою вершиною і центром гіперболи, а ліва – між лівою вершиною і центром (рис. 3.25).

Властивість директрис гіперболи. Якщо r – відстань від будь-якої точки гіперболи до будь-якого фокуса, d – відстань від тієї ж точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення $\frac{r}{d}$ величина стала і дорівнює ексцентриситету гіперболи:

$$\frac{r}{d} = e. \quad (3.42)$$

Визначення 3.11. Гіпербола, у якої дійсна і уявна піввісь мають однакову довжину $(a = b)$ називається ***рівносторонньою***.

Визначення 3.12. Гіпербола $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ називається ***спряженою*** до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Її дійсна вісь розташована вздовж осі Oy. Спряжені гіперболи мають ті ж самі асимптоти.

Приклад 3.23. Знайти довжину півосей, ексцентриситет, координати фокусів і вершин, скласти рівняння директрис і асимптот гіперболи $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Розв'язання. За умовою $a^2 = 32; \ \rightarrow \ a = 4\sqrt{2}$; отже дійсна піввісь дорівнює $4\sqrt{2}$, аналогічно $b^2 = 4; \ \rightarrow \ b = 2$ – уявна піввісь дорівнює 2. Координати вершин гіперболи $A_1\left(-4\sqrt{2}, 0\right)$, $A_2\left(4\sqrt{2}, 0\right)$.

Знайдемо координати фокусів. Для цього скористаємось основною тотожністю для гіперболи:

$$b^2 = c^2 - a^2; \quad \rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 = 32 + 4 = 36; \quad \rightarrow \quad c = 6.$$

Отже фокуси мають координати $F_1(-6,\ 0)$, $F_2(6,\ 0)$.

Для знаходження ексцентриситету скористаємось формулою (3.40):

$$e = \frac{c}{a} = \frac{6}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} > 1.$$

Директриси знайдемо за формулою (3.41): $d = \frac{a}{e} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{3}{2\sqrt{2}}} = \frac{16}{3}$; їх рівняння $x = \pm\frac{16}{3}$.

Кутовий коефіцієнт асимптоти, згідно з формулою (3.39):

$$k = \frac{b}{a} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Отже, рівняння асимптот $y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}x$.

Приклад 3.24. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що:

а) уявна вісь дорівнює 5, а фокус розташований в точці $F(-12,0)$;

б) ексцентриситет гіперболи дорівнює $\frac{7}{5}$, а відстань від вершини до найближчого фокуса дорівнює 2;

в) точка $M(3,-1)$ належить гіперболі, а асимптотами є прямі $y = \pm 2x$.

Розв'язання:

а) скористаємося основною тотожністю для гіперболи:

$b^2 = c^2 - a^2$, $a^2 = c^2 - b^2 = 144 - 25 = 119$. Шукане рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{x^2}{119} - \frac{y^2}{25} = 1$;

б) за умовою $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{5}$ і $c - a = 2$. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{7}{5} \\ c - a = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} c = \frac{7}{5}a \\ \frac{7}{5}a - a = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} c = 7 \\ a = 5 \end{cases}.$$

Скористаємося основною тотожністю:

$b^2 = c^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$, маємо рівняння: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$;

в) за умовою точка $M(3, -1)$ належить гіперболі, отже її координати задовольняють рівнянню гіперболи: $\frac{3^2}{a^2} - \frac{(-1)^2}{b^2} = 1$; кутовий коефіцієнт асимптоти дорівнює $k = \frac{b}{a} = 2$. Складемо систему і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{b}{a} = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{1}{4a^2} = 1 \\ b = 2a \end{cases}; \quad \begin{cases} 4a^2 = 35 \\ b = 2a \end{cases}; \quad \begin{cases} a = \frac{\sqrt{35}}{2} \\ b = \sqrt{35} \end{cases}.$$

Отже шукане рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{4x^2}{35} - \frac{y^2}{35} = 1$.

3.3.4 Парабола

Визначення 3.13. ***Параболою*** називається геометричне місце точок, для яких відстань від заданої точки, що називається фокусом, дорівнює відстані до певної заданої прямої, що називається директрисою.

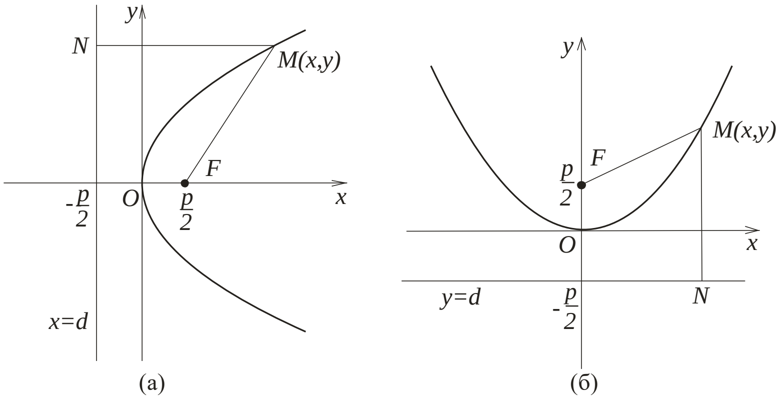


Рисунок 3.26 – Парабола

Нехай $M(x, y)$ – будь-яка точка гіперболи (рис. 3.26, а), то за визначенням маємо

$$|FM| = |MN|. \quad (3.43)$$

Нехай фокус має координати $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а директриса задана рівнянням $x = -\frac{p}{2}$, згідно з умовою (3.43) маємо:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}; \qquad x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px. \quad (3.44)$$

Точка перетину параболи з віссю симетрії називається вершиною параболи. В нашому випадку вершина співпадає з початком координат.

Рівняння (3.44) описує параболу, що симетрична вісі Ox.

Якщо розглянемо параболу (рис. 3.26, б) симетричну вісі Oy, то її фокус має координати $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, а директриса задана рівнянням $y = -\frac{p}{2}$. Канонічне рівняння такої параболи має вигляд:

$$x^2 = 2py. \qquad (3.45)$$

Параметр p, що входить до рівнянь (3.44), (3.45) називається ***параметром параболи***.

Ексцентриситет параболи $e = 1$.

Приклад 3.25. Визначити координати фокуса і записати рівняння директриси параболи $y^2 = 7x$.

Розв'язання. За умовою $2p = 7$, тобто $p = \frac{7}{2}$. Отже фокус має координати $F\left(\frac{7}{4}, 0\right)$, а рівняння директриси $x = -\frac{7}{4}$.

Приклад 3.26. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо відомо, що:

а) фокус має координати $F(-3{,}0)$;

б) відстань між фокусом і директрисою дорівнює 8 (парабола симетрична відносно осі Ox);

в) рівняння директриси $y = -\frac{3}{5}$.

Розв'язання:

а) шукана парабола симетрична відносно осі Ox. За умовою $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, тому $\frac{p}{2} = -3$; $p = -6$. Рівняння параболи має вигляд: $y^2 = -12x$;

б) відстань між фокусом і директрисою (см. рис. 3.26,а) дорівнює p, а тому $p = 8$. Шукане рівняння: $y^2 = 16x$;

в) за визначенням $y = -\frac{p}{2}$. Отже $-\frac{p}{2} = -\frac{3}{5}$, $p = \frac{6}{5}$, рівняння параболи має вигляд: $x^2 = \frac{12}{5}y$.

3.3.5 Приклади розв'язання задач з аналітичної геометрії на площині

Спробуємо об'єднати отримані у другому розділі знання для розв'язання деяких задач. Приклади, що були наведені у кожному підрозділі, можна назвати «шаблонними». Їх розв'язання зводилось к використанню тієї чи іншої представленої в розділі формули. Зараз ми розглянемо приклади, які потребують від нас більшої уваги і кмітливості, тому що розв'язання кожного з них вимагає знання понять і формул відразу декількох тем.

Приклад 3.27. Записати рівняння прямої, що проходить через ліву та верхню вершини еліпса $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$.

Розв'язання: За умовою $a=8$, $b=5$, тобто координати шуканих вершин – $A_1(-8{,}0)$, $B_1(0{,}5)$. Скористаємося рівнянням прямої у відрізках (2.16), запишемо рівняння шуканої прямої

$$\frac{x}{-8}+\frac{y}{5}=1.$$

Приклад 3.28. Записати рівняння кола, що має центр в точці перетину прямих $2x-3y+8=0$ і $x+2y-3=0$, і дотикається осі Oy.

Розв'язання: Знайдемо точку перетину прямих за формулами (3.29):

$$x=\frac{-3\cdot(-3)-2\cdot 8}{2\cdot 2-(-3)\cdot 1}=\frac{-7}{7}=-1;\quad y=\frac{1\cdot 8-2\cdot(-3)}{2\cdot 2-(-3)\cdot 1}=\frac{14}{7}=2.$$

Отже центр кола має координати: $O_1(-1{,}2)$. За означенням, відстань від центра кола до будь якої точки, що йому належить, дорівнює радіусу. Знайдемо радіус кола як відстань від центра до осі Oy $(x=0)$за формулою (3.27): $R=d=1$. Остаточно маємо канонічне рівняння кола: $(x+1)^2+(y-2)^2=1$.

Приклад 3.29. Записати рівняння еліпсу, вершини якого співпадають з фокусами гіперболи $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$, а фокуси розташовані у вершинах гіперболи.

Розв'язання: За умовою $a_{\text{г}}=c_{\text{е}}$, $c_{\text{г}}=a_{\text{е}}$. Маємо $a_{\text{г}}=5$, $b_{\text{г}}=2\sqrt{6}$. Знайдемо $c_{\text{г}}=\sqrt{a_{\text{г}}^2+b_{\text{г}}^2}=\sqrt{25+24}=7$. Отже $c_{\text{е}}=5, a_{\text{е}}=7$. Знайдемо $b_{\text{е}}=\sqrt{a_{\text{е}}^2-c_{\text{е}}^2}=\sqrt{49-25}=2\sqrt{6}$. А тому канонічне рівняння еліпсу має вигляд: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$.

Приклад 3.30. Записати рівняння параболи, вершина якої розташована у початку координат, а директриса проходить через правий фокус еліпса $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$.

Розв'язання: Зрозуміло, що шукана парабола симетрична відносно осі Ox, а тому її рівняння знайдемо у вигляді (3.44). Знайдемо координати правого фокуса еліпса: $c_\text{е}=\sqrt{a_\text{е}^2-b_\text{е}^2}=\sqrt{169-144}=5,\ F_\text{е}(5{,}0)$. Отже, рівняння директриси параболи має вигляд: $x=5$. Відомо, що $x=-\frac{p}{2}$, тому параметр параболи дорівнює $p=-10$. Остаточно маємо канонічне рівняння параболи $y^2=-20x$.

3.3.6 Застосування платформи MS EXCEL в розв'язанні задач аналітичної геометрії на площині

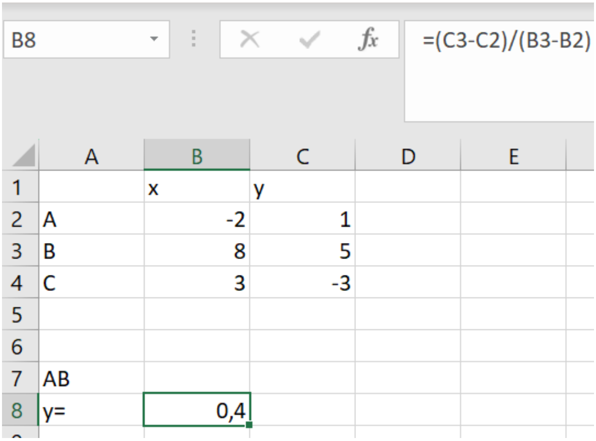
Приклад 3.31. Дано вершини трикутника ABC: $A(-2;1);B(8;5);C(3;-3)$. Виконати наступні завдання:

1) записати рівняння сторін;
2) побудувати трикутник;
3) обчислити довжину медіани BM ;
4) обчислити довжину висоти CK;
5) знайти кут A;
6) обчислити площу трикутника.

Розв'язання: Введемо координати вершин трикутника ABC:

	A	B	C
1		x	y
2	A	-2	1
3	B	8	5
4	C	3	-3

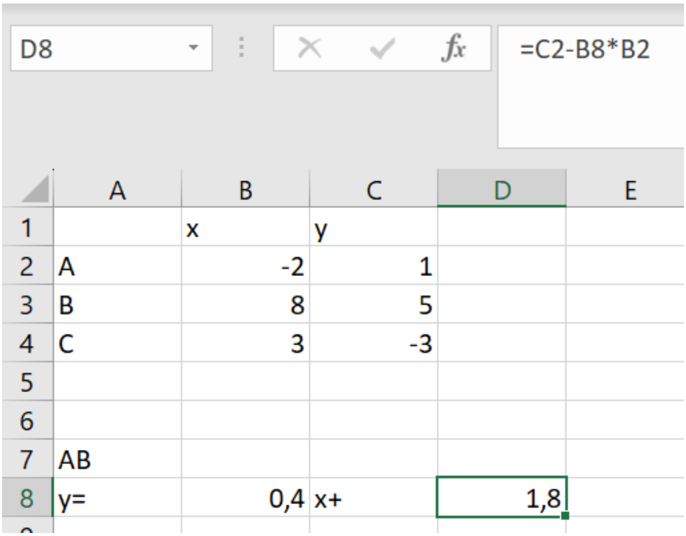
3) отримаємо рівняння сторін трикутника у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (3.14). Визначимо кутовий коефіцієнт за формулою (3.17):



B8 =(C3-C2)/(B3-B2)

	A	B	C	D	E
1		x	y		
2	A	-2	1		
3	B	8	5		
4	C	3	-3		
5					
6					
7	AB				
8	y=	0,4			

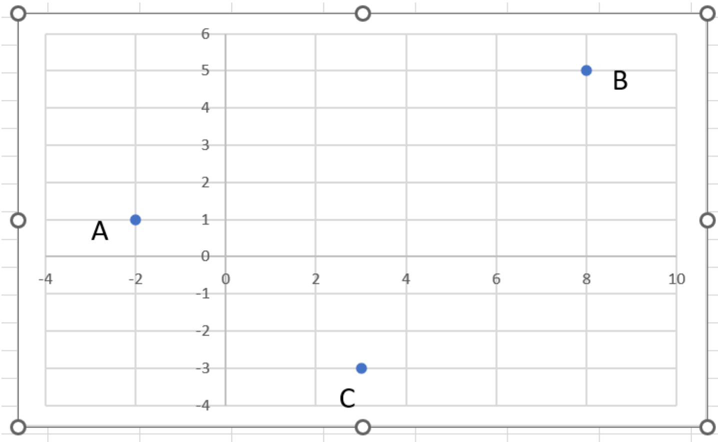
та відрізок, що відтинає пряма на осі ординат:



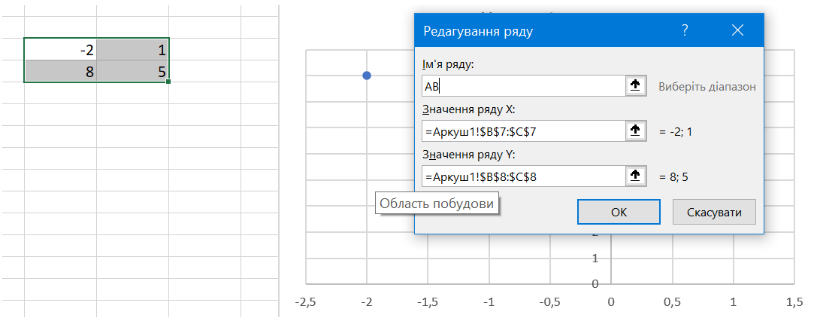
D8 =C2-B8*B2

	A	B	C	D	E
1		x	y		
2	A	-2	1		
3	B	8	5		
4	C	3	-3		
5					
6					
7	AB				
8	y=	0,4	x+	1,8	

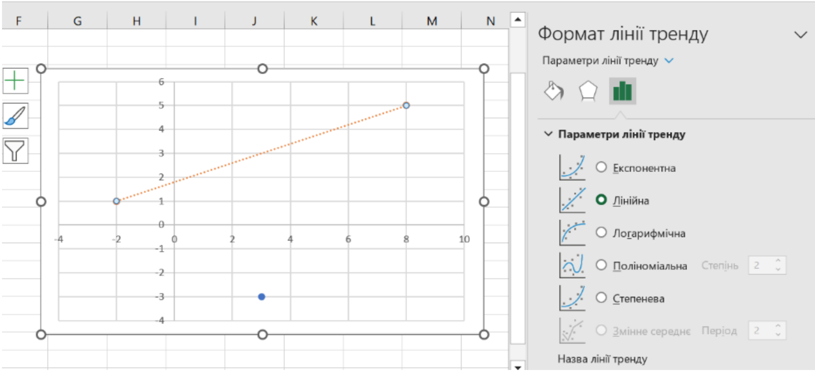
Побудуємо координати вершин за допомогою точкової діаграми. Для цього виділимо комірки B2:C4, натискаємо «Вставка», «Діаграми», «Точкова діаграма», отримаємо:



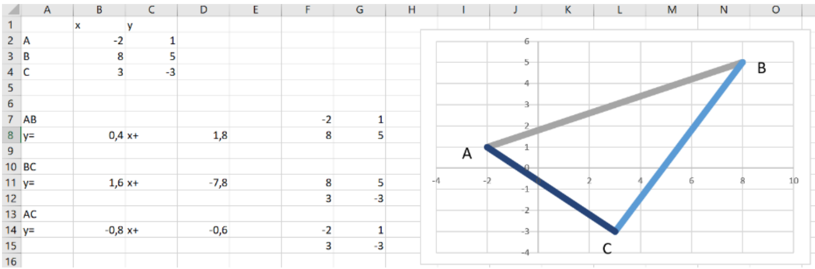
4) Побудуємо сторони трикутника. Будуємо точкову діаграму для прямої *AB*. Для того, щоб всі ліній були розташовані на одному рисунку, натискаємо на вже отриману діаграму, обираємо «Вибрати дані», «Додати», обираємо назву ряду «*AB*», «Значення X» - абсциси точок *A* і *B*, «Значення Y» - ординати точок *A* і *B*, натискаємо «ОК»:



Отримаємо точки, які вже побудовані на діаграмі. Для того, щоб отримати пряму, найпростішій спосіб – натиснути на отриману діаграму, «Додати лінію тренда», обрати «Лінійна»:



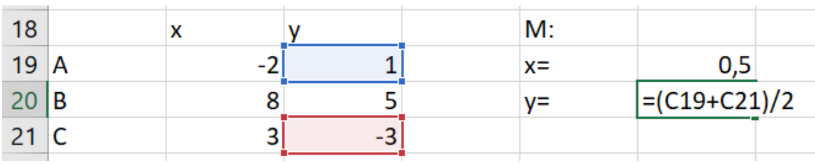
Аналогічну процедуру повторити для інших сторін трикутника.



	A	B	C	D	E	F	G
1		x	y				
2	A	-2	1				
3	B	8	5				
4	C	3	-3				
5							
6							
7	AB					-2	1
8	y=	0,4	x+	1,8		8	5
9							
10	BC						
11	y=	1,6	x+	-7,8		8	5
12						3	-3
13	AC						
14	y=	-0,8	x+	-0,6		-2	1
15						3	-3
16							

Рисунок 3.27 – Трикутник *ABC*

5) Знайдемо координати точки *M* – середини сторони *AC*:



18		x	y		M:	
19	A	-2	1		x=	0,5
20	B	8	5		y=	=(C19+C21)/2
21	C	3	-3			

Введемо формулу для обчислення довжини відрізка (3.1):

B23 =SQRT(POWER((F19-B20);2)+POWER((F20-C20);2))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
18		x	y		M:				
19	A	-2	1		x=	0,5			
20	B	8	5		y=	-1			
21	C	3	0						
22									
23	BM=	9,604686							
24									

6) Для того, щоб знайти довжину висоти CK, як відстань від точки C до прямої AB, перепишемо рівняння прямої AB у загальному вигляді та скористаємося формулою (3.27):

B28 =ABS(B25*B26+D25*C26+G25)/SQRT((POWER(B25;2)+POWER(D25;2)))

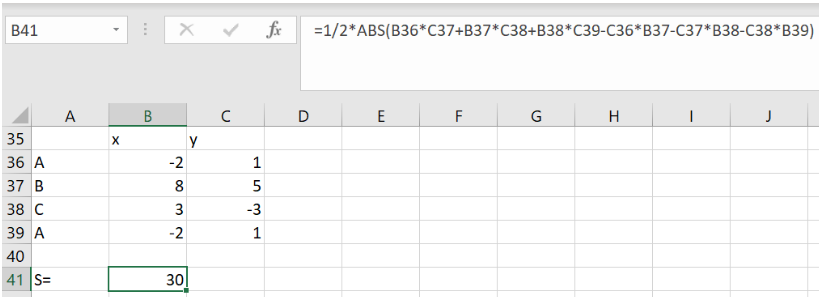
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
25	AB	0,4	x	-1	y	+	1,8	=	0	
26	C	3	-3							
27										
28	CK=	5,57086								

7) Кут A утворено прямими AB і AC. Випишемо їх кутові коефіцієнти та застосуємо формулу (3.23):

B33 =ATAN((B30-B31)/(1+B30*B31))

	A	B	C	D	E	F	G
30	k(AB)=	0,4					
31	k(AC)=	-0,8					
32							
33	$\angle A =$	1,055247	рад				

8) Обчислимо площу трикутника за формулою (3.10):



	A	B	C
35		x	y
36	A	-2	1
37	B	8	5
38	C	3	-3
39	A	-2	1
40			
41	S=	30	

Приклад 3.32. Побудувати криві другого порядку за допомогою діаграм MS EXCEL:

1) еліпс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1;$
2) гіперболу $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1;$
3) параболу $x^2=4y$.

Розв'язання:

1) Велика вісь еліпса – між вершинами $A_1(-4;0)$ і $A_2(4;0)$. Сформуємо колонку значень аргументу функції від -4 до +4 із кроком 0,5 (за бажанням крок можна зменшити).

Перепишемо рівняння еліпсу, виділивши

$$\text{верхню } y=3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$$

$$\text{та нижню } y=-3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$$

дуги еліпса.

Введемо формулу у комірку, що відповідає першому значенню аргументу (C6), натиснемо «Enter», скопіюємо формулу, та розтягнемо і вставимо для всіх значень аргументу (C7:C21).

Аналогічно виконаємо обчислення значення функції для значень аргументу для нижньої дуги еліпса – комірки (D6:D21).

D21 | f_x | =-3*SQRT(1-POWER(A21;2)/16)

	A	B	C	D	E	F	G
3							
4	x	$y = 3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$		$y = -3\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$			
5	-4		0	0			
6	-3,5		1,452369	-1,45237			
7	-3		1,984313	-1,98431			
8	-2,5		2,341874	-2,34187			
9	-2		2,598076	-2,59808			
10	-1,5		2,781074	-2,78107			
11	-1		2,904738	-2,90474			
12	-0,5		2,97647	-2,97647			
13	0		3	-3			
14	0,5		2,97647	-2,97647			
15	1		2,904738	-2,90474			
16	1,5		2,781074	-2,78107			
17	2		2,598076	-2,59808			
18	2,5		2,341874	-2,34187			
19	3		1,984313	-1,98431			
20	3,5		1,452369	-1,45237			
21	4		0	0			

Виділимо комірки A6:C21, обираємо «Вставка» – «Точкова діаграма» – «Enter», отримуємо верхню дугу еліпса.

Натискаємо на діаграму: «Обрати дані» – «Додати» – «Ряд X»: A6:A21 –«Ряд Y»: D6:D21 – «Enter».

В результаті отримаємо графік еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Для отримання «більш згладженої» лінії пропонуємо взяти менший крок обчислення значень функції.

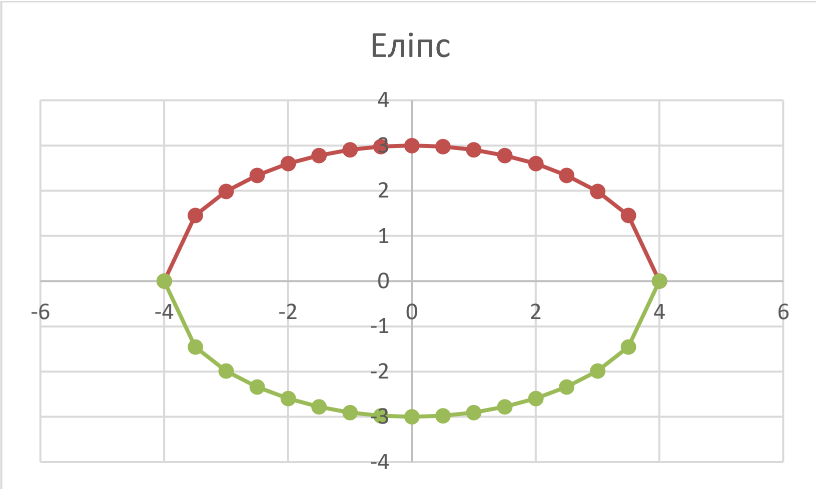


Рисунок 3.28 – Еліпс

2) Вершини гіперболи розташовані в точках $A_1(-2;0)$ і $A_2(2;0)$. Відповідно до цього визначимо проміжки зміни аргументу $[-5;-2]$ і $[5;2]$ з кроком 0,25 і обчислимо значення функції для

$$\text{верхньої } y = 3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$$

$$\text{та нижньої } y = -3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$$

дуг гіперболи.

Введення формул виконаємо за наведеним вище алгоритмом. Зауважимо, що окремо обчислюємо значення лівої та правої гілки гіперболи. В результаті отримаємо таблицю значень:

C4 | f_x | =3*SQRT(POWER(A4;2)/4-1)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	x		$y = 3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$	$y = -3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$			
3							
4	-5		6,873864	-6,87386			
5	-4,75		6,462633	-6,46263			
6	-4,5		6,046693	-6,04669			
7	-4,25		5,625	-5,625			
8	-4		5,196152	-5,19615			
9	-3,75		4,758217	-4,75822			
10	-3,5		4,308422	-4,30842			
11	-3,25		3,842607	-3,84261			
12	-3		3,354102	-3,3541			
13	-2,75		2,831188	-2,83119			
14	-2,5		2,25	-2,25			
15	-2,25		1,546165	-1,54616			
16	-2		0	0			

	A	B	C	D	E	F	G
18	2		0	0			
19	2,25		1,546165	-1,54616			
20	2,5		2,25	-2,25			
21	2,75		2,831188	-2,83119			
22	3		3,354102	-3,3541			
23	3,25		3,842607	-3,84261			
24	3,5		4,308422	-4,30842			
25	3,75		4,758217	-4,75822			
26	4		5,196152	-5,19615			
27	4,25		5,625	-5,625			
28	4,5		6,046693	-6,04669			
29	4,75		6,462633	-6,46263			
30	5		6,873864	-6,87386			

Графік гіперболи отримано в чотири етапи: побудовою та поступовим додаванням верхньої, нижньої частин лівої та правої гілок гіперболи (рис. 3. 29).

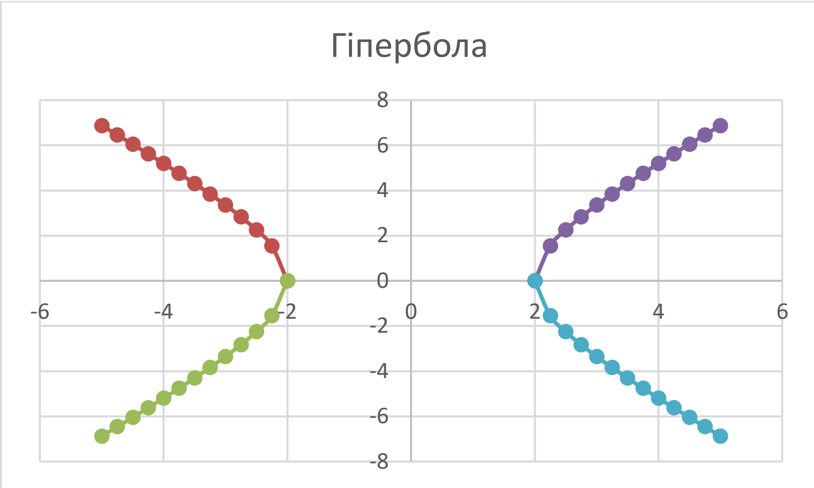


Рисунок 3.29 – Гіпербола

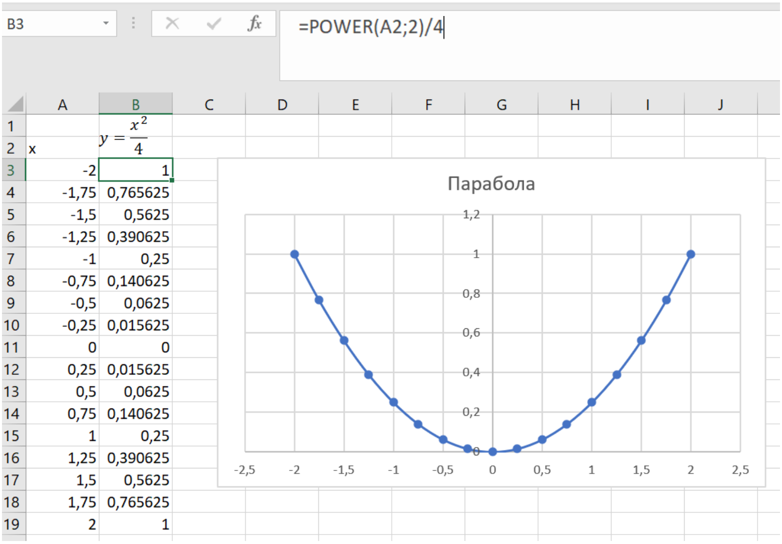
3) Перепишемо рівняння параболи у вигляді

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

Таблицю значень з кроком 0,25 сформуємо в інтервалі $[-2; 2]$. Введемо формулу для обчислень значень функції, скопіюємо та розтягнемо для всіх значень аргументів.

Сукупність точок, за якими буде побудований графік функції, представлено у вигляді таблиці.

За допомогою точкової діаграми побудовано графік параболи (рис. 3.30)



	A	B
1		
2	x	$y=\frac{x^2}{4}$
3	-2	1
4	-1,75	0,765625
5	-1,5	0,5625
6	-1,25	0,390625
7	-1	0,25
8	-0,75	0,140625
9	-0,5	0,0625
10	-0,25	0,015625
11	0	0
12	0,25	0,015625
13	0,5	0,0625
14	0,75	0,140625
15	1	0,25
16	1,25	0,390625
17	1,5	0,5625
18	1,75	0,765625
19	2	1

Рисунок 3.30 – Парабола

3.4 Полярна система координат

Щоб визначити положення точки на площині, крім розглянутої вище декартової прямокутної системи координат, ще потрібна полярна система координат. Визначимо її. Для цього візьмемо на площині довільну точку O, яку звуть ***полюсом***, і направлений промінь OP, який звуть ***полярною віссю***. На ній відкладемо відрізок OE який звуть одиничним або ***масштабним відрізком*** (рис. 3.31).

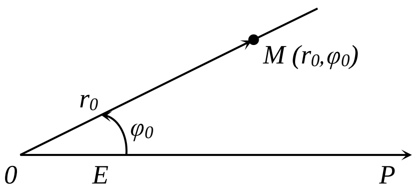


Рисунок 3.31 – Полярна система координат

Визначення 3.14. Упорядкована пара чисел (r_0, φ_0), що ставиться у відповідність точці M_0, яка належить площині і відмінна від точки O, називається ***полярними координатами*** точки M_0. Число r_0 – довжина відрізка OM_0 – називається ***полярним радіусом*** точки M_0. Число φ_0, яке звуть ***полярним кутом***, є радіанною величиною кута EOM_0.

Між множиною всіх точок площини (крім точки O) і множиною упорядкованих пар чисел (r, φ), де $r \geq 0$ і $\varphi \in [0; 2\pi]$ існує взаємно однозначна відповідність. Для точки O величина полярного кута не визначена.

Приклад 3.31. Знайти координати точки $M_0\left(3; \frac{\pi}{6}\right)$ у полярній системі координат.

Розв'язання. На рис. 3.32 побудована точка M_0. Вона розташована на перетині дуги радіуса $r_0 = 3$ і променя з початком у точці O, який утворює кут $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ з полярною віссю.

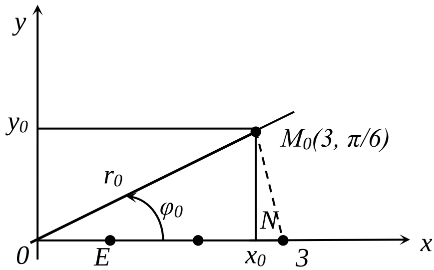


Рисунок 3.32 – Побудова точки в полярній системі координат

3.4.1 Зв'язок між полярними і прямокутними координатами

Перехід від полярних до декартових координат. Якщо за полюс узяти початок прямокутної декартової системи координат, а за полярну вісь – додатний напрям осі Ox (рис. 3.28), то полярні координати точки M_0, яка не збігається з полюсом, і її прямокутні координати зв'язані рівностями:

$$x_0 = r_0 \cos\varphi_0, \quad y_0 = r_0 \sin\varphi_0, \tag{3.46}$$

які маємо з прямокутного ΔOM_0N.

Перехід від прямокутних до полярних координат точки M_0 виконується за формулами:

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}; \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0}{x_0}\right). \tag{3.47}$$

Приклад 3.32. Знайти прямокутні координати точки $M\left(8; \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. За формулами (3.46) маємо

$$x = 8 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4; \quad y = 8 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3};$$

Отже координати точки в прямокутній системі координат $M\left(4; 4\sqrt{3}\right)$.

Приклад 3.33. Знайти полярні координати точки $M(1; -1)$.

Розв'язання. За формулами (3.47) переходу від прямокутних координат до полярних, маємо:

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right) = \operatorname{arctg}(-1).$$

$\operatorname{arctg}(-1)$ відповідає кутам $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ та $\varphi = \frac{7\pi}{4}$. Оскільки існує умова $\varphi \in [0; 2\pi]$, то обираємо значення $\varphi = \frac{7\pi}{4}$. Отже маємо координати точки $M\left(\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

3.4.2 Рівняння ліній другого порядку у полярних координатах

Нехай ABC (рис. 3.33) – крива лінії другого порядку (еліпса, гіперболи або параболи), у якої: точка B – вершина; точка F – фокус і лінія DE – відповідна директриса. Полярну систему координат розташуємо таким чином, щоб полюс був у точці F (тобто у фокусі), а полярна вісь збігалася з віссю симетрії. Ексцентриситет кривої раніше позначено буквою e. Нехай M_0 – точка кривої ABC, яка лежить на перпендикулярі FK до полярної осі. Позначимо довжину відрізка FM_0 через p. Ця величина називається параметром кривої.

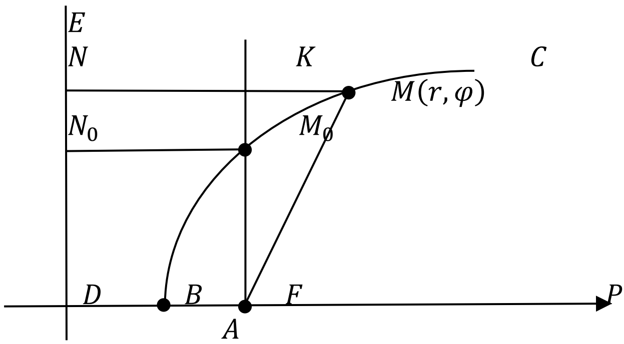


Рисунок 3.33 – Крива лінії другого порядку в полярній системі координат

Нехай M_0 – довільна точка кривої у обраній полярній системі координат. Складемо рівняння, яке виявляє залежність між її полярними координатами r,φ та даними числами e і p. З попереднього відомо, що $e=\frac{|FM|}{|MN|}$. Відрізок $NM=NK+KM$. Тут $KF \parallel DE$, і $NK \parallel N_0M_0$, тому $NK=N_0M_0$. З ΔFKM маємо: $KM=FM\cdot\cos\varphi$. Таким чином,

$$NM=N_0M_0+FM\cdot\cos\varphi \qquad (3.48)$$

З іншого боку, $e=\frac{|FM_0|}{|N_0M_0|}$ або $N_0M_0=\frac{p}{e}$.

Перше відношення для e дає: $NM=\frac{FM}{e}$ або $NM=\frac{r}{e}$, тому що $FM=r$. Формула (3.48), після підстановки обчислених величин, має вигляд:

$$\frac{r}{e}=\frac{p}{e}+r\cos\varphi, \text{ звідки:}$$

$$r=\frac{p}{1-e\cdot\cos\varphi}. \qquad (3.49)$$

Рівняння (3.49) відповідає: еліпсу, якщо $e<1$; параболі, якщо $e=1$; гіперболі, якщо $e>1$.

Фокальний параметр p зв’язаний з параметрами a і b еліпса і гіперболи співвідношенням: $p=\frac{b^2}{a}$.

Приклад 3.34. Записати рівняння параболи $y^2 = 8x + 16$ (рис. 3.34) у полярній системі координат.

Розв'язання: Скористаємося формулами переходу від прямокутної системи координат до полярної (3.46), які підставимо у дане рівняння. Маємо $r^2 \sin^2 \varphi = 8 \cdot r \cdot \cos \varphi + 16$. Додамо до обох частин останнього рівняння величину $r^2 \cos^2 \varphi$. Тоді:

$$r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi = r^2 \cos^2 \varphi + 8 \cdot r \cdot \cos \varphi + 16,$$

$$r^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = (r \cdot \cos \varphi + 4)^2, \quad r = r \cdot \cos \varphi + 4.$$

Розв'язавши останнє рівняння відносно r, маємо шукане рівняння

$$r = \frac{4}{1 - \cos \varphi}.$$

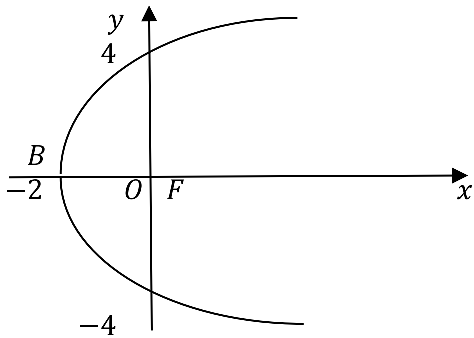


Рисунок 3.34 – Парабола

Контрольні запитання

1. Що таке декартова система координат на площині? Як визначаються координати точки, довжина відрізка?
2. Виведіть формулу для визначення координати точки, що поділяє відрізок у заданому відношенні.
3. Виведіть формулу для визначення координати середини відрізку.
4. Як обчислити площу трикутника, якщо відомі координати його вершин? Як можна скористатися цією формулою для обчислення площі будь-якого многокутника?
5. Які види рівняння прямої вам відомі?
6. Наведіть приклад запису будь-якого рівняння першого степеня у вигляді загального рівняння прямої, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, рівняння прямої у відрізках, нормального рівняння прямої.
7. Як записати рівняння прямої, якщо відомі координати двох будь-яких точок, що належать даній прямій?
8. Виведіть формулу для визначення відстані від точки до прямої.
9. Дайте визначення кута між прямими. За допомогою якої формули необхідно обчислювати цей кут? Як сформульовані умови паралельності та перпенди-кулярності двох прямих, якщо відомі їх кутові коефіцієнти?
10. Запишіть загальне рівняння кривої другого порядку. Проаналізуйте його. Сформулюйте умови, за якими це рівняння описує коло, еліпс, гіперболу або параболу.
11. Дайте визначення кола. Виведіть канонічне рівняння кола.
12. Дайте визначення еліпса. Виведіть канонічне рівняння еліпса.
13. Дайте визначення гіперболи. Виведіть канонічне рівняння еліпса.
14. Дайте визначення параболи. Виведіть канонічне рівняння параболи.

15. Що таке ексцентриситет? Яким співвідношенням відповідає ексцентриситет еліпса, гіперболи, параболи?

16. Що таке директриса? Опишіть властивості директрис еліпса, гіперболи, параболи.

17. Дайте визначення асимптотам гіперболи.

18. Дайте визначення полярній системі координат. Як визначається зв'язок між полярною та прямокутною системою координат?

19. Запишіть формули переходу від полярної до прямокутної та від прямокутної до полярної систем координат.

20. Який вигляд має рівняння будь-якої кривої другого порядку в полярній системі координат? Яка величина в цьому рівнянні визначає, чи буде дане рівняння описувати еліпс, гіперболу, параболу?

21. Опишіть, які можливості MS EXCEL Ви застосували при розв'язанні задач з аналітичної геометрії.

Розділ 4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

4.1 Площина у просторі

4.1.1 Нормальне рівняння площини

Положення площини у просторі буде повністю визначено, якщо задати її відстань p від початку координат O, тобто довжину перпендикуляра OT, який опущено з точки O на площину, та одиничний вектор $\vec{e}$, перпендикулярний до площини і направлений від початку O до площини (рис. 4.1).

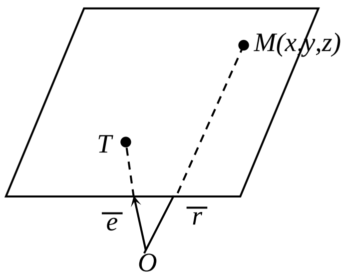


Рисунок 4.1 – Площина у просторі

Нехай точка $M(x, y, z)$ – довільна точка площини, її радіус-вектор $\vec{r}$ змінюється так, що весь час пр$_{\vec{e}}\overrightarrow{OM} = OT = p$. Ця умова має місце лише для точок площини; воно не виконується, якщо точка M не лежить на площині. Отже, маємо властивість точок площини, яку запишемо у векторній формі:

$$\text{пр}_{\vec{e}}\overrightarrow{OM} = \vec{r} \cdot \vec{e}.$$

Величина у лівій частині дорівнює p. Маємо:

$$\vec{r} \cdot \vec{e} - p = 0. \tag{4.1}$$

Рівняння (4.1) висловлює умову, за якої точка M лежить на даній площині, і має назву ***нормального рівняння площини***. Воно записано у векторній формі. Вектор $\vec{r}$ має координати x, y, z. Вектор $\vec{e}$ своїми проекціями має косинуси кутів α, β, γ, які він утворює з координатними осями Ox, Oy та Oz. Тобто, маємо:

$$\vec{r} = (x; y; z) \text{ і } \vec{e} = (\cos\alpha\,; \cos\beta\,; \cos\gamma).$$

Скалярний добуток векторів $\vec{r}$ і $\vec{e}$ дає нормальне рівняння площини у координатній формі:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0. \tag{4.2}$$

Одержане рівняння (4.2) – першого порядку відносно x, y, z, тобто всяка площина може бути подана рівнянням першого порядку відносно поточних координат.

4.1.2 Загальне рівняння площини

Вище було доведено, що будь-яка площина може бути подана рівнянням першого порядку. Доведемо зворотне: будь-яке рівняння першого порядку (степеню) між трьома змінними визначає площину.

Візьмемо рівняння першого степеню загального вигляду:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.3}$$

де $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Розглядатимемо A, B і C як проекції на вісі координат Ox, Oy і Oz деякого вектора $\vec{N}$, а x, y, z як проекції радіус-вектора $\vec{r}$ точки M. Тоді рівняння (4.3) може бути переписане у вигляді

$$\vec{r} \cdot \vec{N} + D = 0, \tag{4.4}$$

яке зводиться до вигляду (4.1), якщо останнє розділити на довжину вектора $\vec{N}$. Тобто, матимемо: $\vec{e} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ і $p = -\frac{D}{|\vec{N}|}$.

Таким чином, рівняння (4.4) завжди може бути зведено через рівняння (4.1) до нормального вигляду (4.2). Але нормальне рівняння (4.2) завжди визначає площину. Отже, рівняння (4.4), відповідно, і початкове рівняння (4.3), визначає площину, що й треба було довести.

Рівняння вигляду (4.3) має назву ***загального рівняння площини***.

4.1.3 Зведення загального рівняння площини до нормального виду

З п. 4.1.2 маємо спосіб перетворення загального рівняння (4.3) площини до рівняння (4.2) площини у нормальній формі. Щоб привести загальне рівняння (4.3) першого степеню до нормального виду необхідно помножити його на множник

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{1}{|\vec{N}|}, \qquad (4.5)$$

де знак множника належить брати протилежним знаку вільного члена D. Цей множник має назву ***нормуючого множника***.

Після множення на M рівняння (4.3) матиме вигляд:

$$M \cdot Ax + M \cdot By + M \cdot Cz + M \cdot D = 0$$

і співпадає з (4.2), якщо:

$$M \cdot A = \cos\alpha\,; \quad M \cdot B = \cos\beta\,; \quad M \cdot C = \cos\gamma\,; \quad M \cdot D = -p.$$

Звідси маємо формули для обчислення напрямних косинусів і числа p:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{|\vec{N}|}; \quad \cos\beta = \pm\frac{B}{|\vec{N}|}; \quad \cos\gamma = \pm\frac{C}{|\vec{N}|}; \quad p = \mp\frac{D}{|\vec{N}|},$$

$$\text{де } \left|\vec{N}\right| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}. \qquad (4.6)$$

З формул (4.6) маємо рівність

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (4.7)$$

Приклад 4.1. Рівняння площини $x - 2y + 2x - 3 = 0$ перетворити до нормального вигляду.

Розв'язання. Обчислимо нормуючий множник

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{9}} = \pm\frac{1}{3}.$$

Помножимо на нього дане рівняння. Маємо:

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}x - 1 = 0.$$

Для даної площини:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}; \cos\beta = -\frac{2}{3}; \cos\gamma = \frac{2}{3}; p = 1.$$

4.1.4 Дослідження загального рівняння площини

Проаналізуємо частинні випадки розташування відносно системи координат $Oxyz$ площини

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

якщо певні коефіцієнти цього рівняння дорівнюють нулю:

а) $D = 0$. $Ax + By + Cz = 0$ – площина проходить через початок координат;

б) $A = 0$, або $B = 0$, або $C = 0$. Тобто коефіцієнт біля однієї з змінних дорівнює нулю.

Наприклад, $A = 0$: $By + Cz + D = 0$, $\Rightarrow$ це площина, яка паралельна осі Ox. $B = 0$: $Ax + Cz + D = 0$, $\Rightarrow$ це площина, яка паралельна осі Oy. $C = 0$: $Ax + By + D = 0$, $\Rightarrow$ це площина, яка паралельна осі Oz.

в) $D = 0$; $A = 0$, або $B = 0$, або $C = 0$. Тобто, коефіцієнти біля однієї з змінних та вільний член дорівнюють нулю. Наприклад, $A = 0$ і $D = 0$: $By + Cz = 0$. Це площина, яка містить вісь Ox. У другому і третьому випадках маємо площини, які містять осі Oy і Oz відповідно;

г) коефіцієнти біля двох змінних дорівнюють нулю. Наприклад, $A = 0$ і $B = 0$. Маємо $Cz + D = 0$. Це рівняння площини, яка паралельна координатній площині xOy. Якщо $A = 0$ і $C = 0$, або $B = 0$ і $C = 0$ будемо мати площини, які паралельні координатним площинам xOz і yOz відповідно;

д) коефіцієнти біля двох змінних і вільний член дорівнюють нулю. Наприклад, $A = 0$, $B = 0$ і $D = 0$. Маємо $Cz = 0$, $C \neq 0$, тоді $z = 0$ – рівняння координатної площини xOy. Якщо $A = 0$, $C = 0$ і $D = 0$ або $B = 0$, $C = 0$ і $D = 0$, матимемо відповідно рівняння координатних площин xOz і yOz.

4.1.5 Рівняння площини у відрізках

Розглянемо площину $Ax + By + Cz + D = 0$, яка перетинає всі три координатні вісі. З попереднього відомо, що у цьому випадку жоден з коефіцієнтів не дорівнює нулю. Позначимо через a, b і c довжини відрізків, які відсікає площина на осях координат (рис. 4.2).

Оскільки точка $P(a; 0; 0)$ лежить на площині, то її координати задовольняють рівнянню площини $A \cdot a + D = 0$, або $A = -\frac{D}{a}$. Аналогічно координати точки $Q(0; b; 0)$ задовольняють рівнянню площини, тобто $B \cdot b + D = 0$, або $B = -\frac{D}{b}$. Нарешті, координати точки $R(0; 0; c)$ задовольняють рівнянню площини. Маємо: $C \cdot c + D = 0$. Звідки $C = -\frac{D}{c}$.

Підставимо обчислені коефіцієнти у загальне рівняння площини (4.3):

$$-\frac{D}{a}x - -\frac{D}{b}y - -\frac{D}{c}z + D = 0.$$

Скоротивши це рівняння на $-D \neq 0$, знайдемо:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0, \quad \text{або} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (4.8)$$

Останнє рівняння має назву ***рівняння площини у відрізках***.

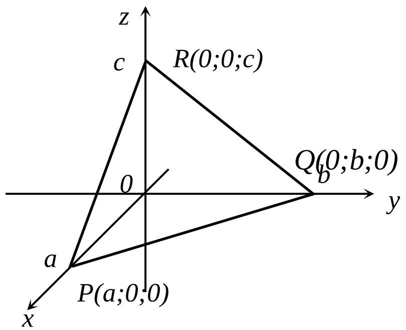


Рисунок 4.2 – Площина у відрізках

Приклад 4.2. Записати рівняння площини $3x - 4y + z - 5 = 0$ у відрізках.

Розв'язання. Перенесемо вільний член праворуч

$$3x - 4y + z = 5| \quad : 5$$

і поділимо на нього рівняння:

$$\frac{3x}{5}-\frac{4y}{5}+\frac{z}{5}=1 \quad \text{або} \quad \frac{x}{\frac{5}{3}}+\frac{y}{-\frac{5}{4}}+\frac{z}{5}=1.$$

Звідси відрізки, які відрізає площина на координатах осях дорівнюють: $a=\frac{5}{3},\ b=-\frac{5}{4},\ c=5.$

4.1.6 Рівняння площини, яка проходить через задану точку

Нехай треба знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$. Візьмемо шукане рівняння у вигляді (4.3): $Ax+By+Cz+D=0$.

Шукана площина проходить через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, тому координати цієї точки повинні задовольняти цьому рівнянню. Тобто маємо умову:

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0.$$

Віднімемо цю тотожність з попереднього рівняння, маємо шукане рівняння:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \tag{4.9}$$

4.1.7 Рівняння площини, яка проходить через три дані точки

Нехай маємо три точки: $M_1(x_1,y_1,z_1)$; $M_2(x_2,y_2,z_2)$ і $M_3(x_3,y_3,z_3)$. З попереднього розділу відомо, що рівняння площини, яка проходить через дану точку M_1, має вигляд (4.9). Щоб знайти рівняння шуканої площини, необхідно припустити, що рівнянню (4.9) задовольняли координати двох інших точок:

$$\begin{aligned} A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0,\\ A(x_3-x_1)+B(y_3-y_1)+C(z_3-z_1)=0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Об’єднавши (4.9) і (4.10) у систему трьох рівнянь. З трьома невідомими A, B і C, бачимо, що це однорідна система. З теорії розв’язання таких систем відомо, що вона має ненульове рішення, якщо її визначник дорівнює нулю. Тобто,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.11)$$

Розкривши визначник по елементах першого рядка, маємо шукане ***рівняння площини, яка проходить через три точки***.

Приклад 4.3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(-1;0;0)$ і $M_3(3;0;1)$.

Розв'язання. Складемо визначник (4.11) з відомими координатами точок:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & x-3 \\ -1-1 & 0-2 & 0-3 \\ 3-1 & 0-2 & 1-3 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1)(4-6) - (y-2)(4+6) + (z-3)(4+4) = 0;$$

$$-2x + 2 - 10y + 20 + 8z - 24 = 0.$$

Після скорочення на -2 шукане рівняння матиме вигляд:

$$x + 5y - 4z + 1 = 0.$$

4.1.8 Взаємне розташування площин

Нехай рівняння площин мають вигляд:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Кутом між двома площинами будемо називати один з двох суміжних двогранних кутів, утворених цими площинами (якщо вони паралельні, то кут беремо рівним 0 або π Позначимо вибраний кут через φ. Кожна з площин описується нормальним вектором, а саме: $\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{N}_2(A_2, B_2, C_2)$. Кут між площинами є той же кут φ між векторами $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, які перпендикулярні до відповідної площини. Таким чином, згадавши формулу (2.14), за якою визначають кут між векторами маємо:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (4.12)$$

Аналогічно відповідним умовам для векторів, введемо умови паралельності та перпендикулярності площин.

Умова перпендикулярності двох площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (4.13)$$

Останнє можливо коли $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тому що $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (4.14)$$

має місце коли $\vec{N}_1 = \lambda\vec{N}_2$. Тобто, якщо $\lambda \neq 0$, маємо $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ і $C_1 = \lambda C_2$. З пропорційності відповідних координат вектора маємо умову (4.14).

Приклад 4.4. Знайти косинус кута між площинами $x + y - z = 1$ і $2x + y - 2z + 3 = 0$.

Розв'язання. Координати векторів, нормальних до площин мають координати $\vec{N}_1(1;1;-1)$, $\vec{N}_2(2;1;-2)$. За формулою (4.12) маємо:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot2+1\cdot1+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{9}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

4.1.9 Точка перетину трьох площин

Нехай задані три площини своїми рівняннями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

Щоб знайти координати точки їх перетину, необхідно розв'язати ці рівняння разом відносно x, y і z, так як координати точки перетину повинні одночасно задовольняти всім трьом рівнянням площин. Розв'язати отриману систему можна будь-яким з вивчених в першому розділі методів.

Приклад 4.5. Знайти точку перетину площин

$$x - y + x = 0,\ x + 2y - 1 = 0,\ x + y - z + 2 = 0.$$

Розв'язання. Складемо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} x - y + x = 0, \\ x + 2y \quad\ = 1, \\ x + y - z = -2. \end{cases}$$

Застосуємо метод Крамера. Обчислимо відповідні визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 1 - 2 - 1 - 0 = -4 \neq 0.$$

Система має єдине рішення.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 + 4 - 1 - 0 = 4;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 - 2 - 1 - 0 - 0 = -4;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 + 0 - 0 - 2 - 1 = -8.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{4}{-4} = -1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2.$$

Отже, шукана точка має координати $(-1; 1; 2)$.

4.1.10 Відстань від точки до площини

Нехай рівняння площини (рис. 4.3) зведено до нормального виду $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0$ і точка $M(x_0, y_0, z_0)$ не належить до цієї площини. Треба знайти відстань d точки M від даної площини δ, тобто узяти з належним знаком довжину перпендикуляра MK, де K належить площині.

Проведемо через початок координат вісь ℓ перпендикулярно до площини і встановимо на ній додатний напрям від O до $T(T \in \delta)$. Розглянемо ламану $OPNMKTO$ і знайдемо її проекцію на вісь ℓ. Вісь ℓ має напрям, який співпадає а напрямом нормального вектора до даної площини, тобто

$$\vec{N} = (\cos\alpha\,, \cos\beta\,, \cos\gamma).$$

Кожна частина ламаної має відповідну проекцію на вісь ℓ: $\text{пр}_\ell OP = x_0 \cos\alpha$, $\text{пр}_\ell PN = y_0 \cos\beta$, $\text{пр}_\ell NM = z_0 \cos\gamma$, $\text{пр}_\ell MK = -d$, $\text{пр}_\ell KT = 0$, $\text{пр}_\ell TO = -p$, тому що вісь ℓ утворює кути α, β і γ, з координатними осями Ox, Oy і Oz відповідно. Оскільки ламана замкнена, то її проекція на будь-яку вісь дорівнює нулю. Маємо формулу, за якою обчислюють ***відстань від точки до площини***:

$$x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - d - p = 0. \quad \Rightarrow$$

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|. \tag{4.15}$$

Таким чином, щоб знайти відстань від точки до площини, треба загальне рівняння площини привести до нормального вигляду а потім замість поточних координат підставити значення координат даної точки. Від знайденого числа треба взяти абсолютну величину (тому що нам необхідно знати саме відстань, а не по який бік від площини знаходиться точка). Звідси якщо площина задана загальним рівнянням формула (4.15) набуває вигляду:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4.16}$$

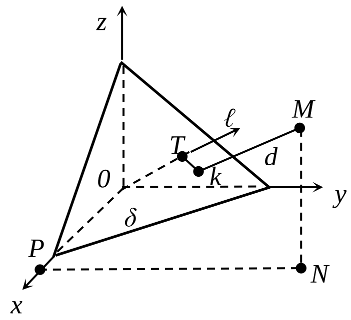


Рисунок 4.3 – Відстань від точки до площини

Приклад 4.6. Знайти відстань від точки $N(1,2,3)$ до площини $2x - 2y + z = 3$.

Розв'язання. За формулою (4.16) обчислимо шукану відстань:

$$d = \frac{|2\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1\cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

Під знаком модуля маємо від'ємну величину. Це означає, що точка N і початок координат лежать по один бік від даної площини.

4.2 Пряма лінія у просторі

4.2.1 Рівняння прямої

Положення прямої лінії у просторі буде цілком визначеним, якщо на прямій визначено точку $M_0(a; b; c)$ за допомогою її радіуса-вектора $\vec{r}$ і вектора $\vec{S}\left(\left|\vec{S}\right| \neq 0\right)$, якому пряма паралельна (рис. 4.4).

Нехай точка $M(x; y; z)$ змінна точка прямої. Вона має радіус-вектор $\vec{r}$. За правилом паралелограма маємо:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}.$$

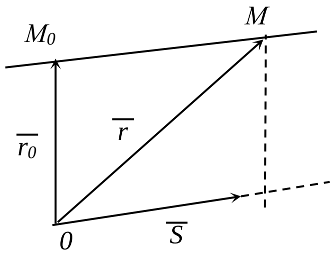


Рисунок 4.4 – Пряма у просторі

Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0M}$ паралельний вектору $\vec{S}$, то його виразимо таким чином: $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S} \cdot t$, де $t \in R$. Отже, маємо ***векторне рівняння прямої лінії*** $\overrightarrow{M_0M}$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{S} \cdot t. \tag{4.17}$$

Перепишемо це рівняння у координатній формі. Для цього представимо вектори у координатах:

$$\vec{r}(x; y; z); \quad \vec{r}_0(a; b; c); \quad \vec{S}(m; n; p).$$

Рівність (4.17) має місце, якщо:

$$x = a + mt; \quad y = b + nt; \quad z = c + pt, \tag{4.18}$$

де t - змінний параметр. Тобто, коли t змінюється, точка $M(x; y; z)$ рухається по даній прямій. Рівняння (4.18) має назву ***параметричних рівнянь прямої лінії***.

Якщо з рівнянь (4.18) вилучити параметр t, матимемо ***канонічне рівняння прямої лінії***:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \tag{4.19}$$

Подивимось, чи можна визначити $\cos\alpha, \cos\beta$ і $\cos\gamma$, коли відомі m, n і p. Очевидно, маємо:

$$\vec{S} = \vec{e}\left|\vec{S}\right|,$$

де $\vec{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Перепишемо останню рівність у проекціях:

$$m = \cos\alpha \left|\vec{S}\right|, \quad n = \cos\beta \left|\vec{S}\right|, \quad p = \cos\gamma \left|\vec{S}\right| \qquad (4.20)$$

тобто m, n і p пропорційні напрямним косинусам прямої лінії, причому множником пропорційності є довжина вектора $\vec{S}$: $\left|\vec{S}\right| = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$.

Таким чином, з рівностей (4.20), маємо:

$$\cos\alpha = \frac{m}{|\vec{S}|}; \quad \cos\beta = \frac{n}{|\vec{S}|}; \quad \cos\gamma = \frac{p}{|\vec{S}|}. \qquad (4.21)$$

Рівність нулю однієї з проекцій вектора $\vec{S}$ означає перпендикулярність прямої до відповідної осі. Наприклад, якщо $m = 0$, то пряма перпендикулярна осі Ox.

4.2.2 Пряма як лінія перетину двох площин. Загальні рівняння прямої

Нехай у канонічних рівняннях прямої (4.19) коефіцієнт $p \neq 0$, тобто пряма не паралельна площині xOy. Запишемо ці рівняння окремо:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{z-c}{p}; \quad \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \qquad (4.22)$$

Кожне з цих рівнянь визначає площину, притому перша паралельна осі Oy, а друга – осі Ox.

Таким чином, визначаючи пряму лінію рівняннями вигляду (4.22), розглядаємо її як перетин двох площин, що проектують цю пряму на координатні площини xOz і yOz. Аналогічні вирази можемо отримати, вважаючи $m \neq 0$, або $n \neq 0$.

Але визначати пряму зовсім не обов’язково саме такою парою площин тому, що через кожну пряму проходить безліч площин. Будь-які дві з них, перетинаючись, визначають її у просторі. Отже, рівняння будь-яких двох таких площин, розглянутих сумісно, визначають рівняння цієї прямої.

Взагалі будь-які дві не паралельні між собою площини з загальними рівняннями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (4.23)$$

визначають пряму їх перетину.

Рівняння (4.23), які розглядають сумісно, називають ***загальними рівняннями прямої***.

Від загальних рівнянь прямої (4.23) можна перейти до її канонічних рівнянь (4.19). Для цього треба знати координати будь-якої точки на прямій та її напрямний вектор.

Приклад 4.7. Привести до канонічного вигляду рівняння прямої: $2x - 3y + z - 5 = 0,\ \ 3x + y - 2z - 4 = 0.$

Розв'язання:

Перший спосіб. Знайдемо точку на прямій. Нехай, наприклад, $z = 1$. Тоді отримаємо систему

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 3x + y = 6. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, маємо: $x = 2, y = 0$. Таким чином, знайшли деяку точку $M(2; 0; 1)$, що належить прямій. Згадаємо, що будь-яка пряма може бути задана вектором, паралельним прямій. Знайдемо його як результат векторного добутку векторів нормалі до площин. Вивчаючи векторну алгебру, ми з'ясували, що в результаті векторного добутку отримуємо вектор, перпендикулярний одночасно і першому, і другому векторам, а тому зрозуміло, що він буде напрямним вектором шуканої прямої. Отже, за умовою, вектори нормалі до заданих площин мають координати $\vec{N}_1(2; -3; 1)$, $\vec{N}_2(3; 1; -2)$.

Обчисливши векторний добуток нормальних векторів, матимемо напрямний вектор $\vec{S}$ прямої:

$$\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 11\vec{k}.$$

Таким чином, канонічне рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z-1}{11}.$$

Другий спосіб. Розглянемо систему

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 5 = 0, \\ 3x + y - 2z - 4 = 0. \end{cases}$$

Тут два рівняння і три змінні. Перепишемо систему таким чином:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -z + 5, \\ 3x + y \ \ = 2z + 4. \end{cases}$$

Розв'яжемо її відносно x і y. Маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -z+5 & -3 \\ 2z+4 & 1 \end{vmatrix} = 5z + 17; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -z+5 \\ 3 & 2z+4 \end{vmatrix} = 7z - 7;$$

$$x = \frac{5z+17}{11}; \qquad y = \frac{7z-7}{11}.$$

Кожне з цих рівнянь розв'яжемо відносно z:

$z = \frac{11x-17}{5}$; $\quad z = \frac{11y+7}{6}$. Звідси $\qquad \frac{x-\frac{17}{11}}{5} = \frac{y+\frac{7}{11}}{7} = \frac{z}{11}$.

Це канонічні рівняння тієї ж самої прямої, але з іншою точкою.

4.2.3 Взаємне розташування прямих

Кутом між прямими у просторі будемо називати будь-який з кутів, утворених двома прямими, які проведено через довільну точку паралельно даним. При цьому домовимось брати кут у межі від 0 до π, якщо нема додаткових вказівок. Нехай маємо канонічні рівняння двох прямих ліній:

$$\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1}; \qquad \frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2}.$$

Очевидно, що за кут φ між ними можна взяти кут між їх напрямними векторами $\vec{S}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{S}_2 = (m_2; n_2; p_2)$, або кут, який додає його до π. За формулами з векторної алгебри маємо:

$$\cos\gamma = \pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (4.24)$$

У формулі (4.24) можна брати як «+» так і «-», що відповідає вибору одного з двох різних кутів між даними прямими.

Приклад 4.8. Знайти кут між прямими

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1} \quad \text{і} \quad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}.$$

Розв'язання. Запишемо напрямні вектори: $\vec{S}_1=\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\vec{S}_2=2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-\vec{k}$.

Підставимо відповідні значення проекцій цих векторів у рівняння (4.24), маємо:

$$\cos\varphi=\pm\frac{1\cdot2+(-4)\cdot(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\pm\frac{9}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Звідки $\varphi=\frac{\pi}{4}$ або $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

Умова паралельності двох прямих. Оскільки напрям прямої визначається напрямним вектором $\vec{S}(m;n;p)$, а дві прямі паралельні, то їх напрямні вектори пропорційні. Тобто, $\vec{S}_1=k\vec{S}_2$ Звідси маємо:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (4.25)$$

Умова перпендикулярності двох прямих. У випадку перпендикулярності двох прямих $\cos\varphi=0$, і з формули (4.24) маємо умову перпендикулярності:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \qquad (4.26)$$

4.2.4 Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки

Нехай треба знайти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Будемо шукати ці рівняння у канонічній формі.

Для розв'язання задачі достатньо знати координати однієї з точок, яка лежить на цій прямій, і напрямний вектор. За таку точку можна взяти будь-яку з двох даних. Візьмемо, наприклад, $M_1(x_1; y_1; z_1)$. За напрямний вектор прямої приймемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Проекціями його на координатні осі будуть: $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$, $(z_2 - z_1)$.

Шукане рівняння прямої матиме вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{4.27}$$

Приклад 4.9. Скласти рівняння прямої лінії, яка проходить через точки $M_1(1; 2; -1)$ і $M_2(2; -1; 1)$.

Розв'язання. Скористуємося рівняннями (4.27):

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{-1-2} = \frac{z+1}{1+1} \text{ або } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{2}.$$

4.2.5 Кут між прямою та площиною

Нехай є рівняння прямої лінії $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ і рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Кутом φ між прямою та площиною будемо називати будь-який з двох суміжних кутів, утворених прямою і її проекцією на площину. Знайдемо синус кута φ при цьому далі можна вважати, що $\varphi \le \frac{\pi}{2}$, тому що синуси суміжних кутів рівні, кут $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ буде, як видно з рис. 4.5, кутом між прямою (a) і перпендикуляром $\vec{N}$ до площини (α).

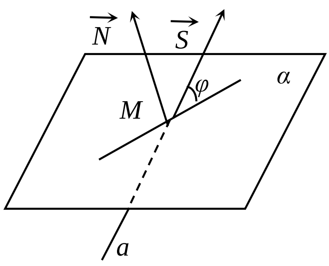


Рисунок 4.5 – Кут між прямою та площиною

Його косинус знайдемо через коефіцієнти A, B, C нормального вектора $\vec{N}$ площини і коефіцієнти m, n і p напрямного вектора $\vec{S}$ прямої; зауважимо, що $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$, маємо:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{4.28}$$

Чисельник дробу має абсолютне значення тому, що $\sin\varphi\geq 0$. З цього рівняння маємо ***умову паралельності*** прямої і площини $\sin\varphi=0$*:*

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{4.29}$$

Умову перпендикулярності прямої і площини отримаємо, з'ясувавши, що в цьому випадку вектор нормалі до площини та напрямний вектор прямої мусять бути паралельними. Отже це можливо за умови $\vec{N}=k\vec{S}$, звідки маємо

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{4.30}$$

Приклад 4.10. Знайти кут між площиною $x-y+z-1=0$ і прямою $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (4.28):

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot(-1)+(1)\cdot 1+1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3};\quad \varphi\approx 19{,}5^0.$$

4.1.6 Перетин прямої і площини

Нехай маємо рівняння прямої лінії у канонічній формі $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ і рівняння площини у загальній формі $Ax+By+Cz+D=0$. Треба знайти координати точки їх перетину. Припустимо, що пряма не належить до площини, або вони не паралельні.

Переведемо канонічні рівняння прямої до рівнянь прямої у параметричній формі:

$$x=a+mt;\quad y=b+nt;\quad z=c+pt. \tag{4.31}$$

Підставимо ці вирази у рівняння площини замість поточних координат, маємо:

$$A(a+mt)+B(b+nt)+C(c+pt)+D=0$$

Звідки знайдемо:

$$t=\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp}. \qquad (4.32)$$

Якщо занести обчислене значення t у рівняння (4.31), матимемо координати шуканої точки перетину прямої та площини. Рівняння (4.32) дає умови належності прямої до площини:

$$Am+Bn+Cp=0 \quad \text{і} \quad Aa+Bb+Cc+D=0. \qquad (4.33)$$

Приклад 4.11. Знайти точку перетину

прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ і площини $x+2y-z-2=0$.

Розв'язання: Перейдемо до параметричного завдання прямої: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-2}=t$; $\Rightarrow$ $\begin{cases} x-1=2t, \\ y-2=t, \\ z-3=-2t. \end{cases}$

Звідси параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=t+2, \\ z=-2t+3. \end{cases}$

Обчислимо параметр t. Для цього підставимо параметричні рівняння прямої в загальне рівняння площини:

$$2t+1+2\cdot(t+2)-(-2t+3)-2=0;$$
$$2t+1+2t+4+2t-3-2=0;$$
$$6t=0; \qquad \Rightarrow \qquad t=0.$$

Підставимо знайдене значення параметра t в параметричні рівняння прямої і знайдемо координати шуканої точки перетину:

$$x=1;\ \ y=2;\ \ z=3.\ \ \Rightarrow\ \ P(1;2;3).$$

4.1.7 Розв'язання задач на пряму і площину у просторі

Перед розв'язанням задач узагальнимо вивчене в цьому розділі. Для нас важливішим є розуміння того, що будь-яка ***площина*** же бути задана ***вектором нормалі***, а ***пряма*** – ***напрямним вектором***. Пригадавши вивчені в другому розділі правила дій над векторами та властивості векторів, розв'язати запропоновані задачі для нас не буде проблемою.

Приклад 4.12. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(3;-1;5)$ паралельно прямій $\frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-5}$.

Розв'язання. Напрямний вектор шуканої прямої паралельний напрямному вектору заданої прямої, тому з умови паралельності векторів (2.11) маємо:

$$\vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2; \quad \vec{S}_1(4;2;-5) \quad \Rightarrow \quad \vec{S}_2(4;2;-5).$$

За формулою (4.19) маємо рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-5}{-5}.$$

Приклад 4.13. Записати рівняння площини, що проходить паралельно площині $7x-y+2z-5=0$ через точку $M(2;1;-7)$.

Розв'язання. Вектор нормалі шуканої площини паралельний вектору нормалі заданої площини, тому з умови паралельності векторів (2.11) маємо:

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2; \quad \vec{n}_1(7;-1;2) \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_2(7;-1;2).$$

За формулою (4.9) запишемо рівняння шуканої площини:

$$7\cdot(x-2)-1\cdot(y-1)+2\cdot(z+7)=0;$$
$$7x-14-y+1+2z+14=0;$$
$$7x-y+2z+1.$$

Приклад 4.14. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;1;1)$ перпендикулярно площині

$$8x+5y-z+13=0.$$

Розв'язання. Зрозуміло, що напрямний вектор шуканої прямої паралельний вектору нормалі заданої площини, тому з умови паралельності векторів (2.11) маємо:

$$\vec{S} \parallel \vec{n}; \quad \vec{n}(8;5;-1) \quad \Rightarrow \quad \vec{S}(8;5;-1).$$

За формулою (4.19) запишемо рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{-1}.$$

Приклад 4.15. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M(4;3;2)$ перпендикулярно прямій $\frac{x+2}{7}=\frac{y}{-4}=\frac{z-5}{1}$.

Розв'язання. Зрозуміло, що вектор нормалі шуканої площини паралельний напрямному вектору заданої прямої, тому з умови паралельності векторів (2.11) маємо:

$$\vec{n}\parallel\vec{S};\qquad \vec{S}(7;-4;1)\quad\Rightarrow\quad\vec{n}(7;-4;1).$$

З формулою (4.9) отримаємо рівняння шуканої площини:

$$7\cdot(x-4)-4\cdot(y-3)+1\cdot(z-2)=0;$$
$$7x-28-4y+12+z-2=0;$$
$$7x-4y+z-18=0.$$

Приклад 4.16. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(-4;2;5)$ паралельно площинам

$$4x+3y-5z+1=0 \text{ і } x-2y+3z-17=0.$$

Розв'язання. Згадаємо, що в результаті векторного добутку отримуємо вектор, перпендикулярний і першому, і другому. Саме він буде паралельний напрямному вектору шуканої прямої. За формулою (2.10) знайдемо векторний добуток векторів нормалі заданих площин:

$$\vec{n}_1(4;3;-5);\quad \vec{n}_2(1;-2;3);\quad \vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_1$$

$$\vec{l}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 4 & 3 & -5\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=\vec{\imath}\begin{vmatrix}3 & -5\\ -2 & 3\end{vmatrix}-\vec{\jmath}\begin{vmatrix}4 & -5\\ 1 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=-\vec{\imath}-17\vec{\jmath}-11\vec{k}.$$

За умови паралельності векторів (2.11) маємо:

$$\vec{l}\parallel\vec{S}\qquad\Rightarrow\qquad\vec{S}(1;17;11).$$

Звідси рівняння шуканої прямої: $\frac{x+4}{1}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-5}{11}$.

Приклад 4.17. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M(1;0;-3)$ паралельно прямим

$$\frac{x+3}{7}=\frac{y-2}{6}=\frac{z}{-2} \quad \text{і} \quad \frac{x}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{9}.$$

Розв'язання. Згадаємо, що в результаті векторного добутку отримуємо вектор, перпендикулярний і першому, і другому. Саме він буде паралельний вектору нормалі шуканої площини. За формулою (2.10) знайдемо векторний добуток напрямних векторів заданих прямих:

$$\vec{S}_1(7;6;-2); \quad \vec{S}_2(3;4;9); \quad \vec{l}=\vec{S}_1\times\vec{S}_1$$

$$\vec{l}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 7 & 6 & -2\\ 3 & 4 & 9\end{vmatrix}=\vec{\imath}\begin{vmatrix}6 & -2\\ 4 & 9\end{vmatrix}-\vec{\jmath}\begin{vmatrix}7 & -2\\ 3 & 9\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}7 & 6\\ 3 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=62\vec{\imath}-69\vec{\jmath}+10\vec{k}.$$

За умови паралельності векторів (2.11) маємо:

$$\vec{l}\parallel\vec{n} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{n}(62;-69;10).$$

Звідси рівняння шуканої площини:

$$62(x-1)-69y+10(z+3)=0;$$
$$62x-62-69y+10z+30=0;$$
$$62x-69y+10z-32=0.$$

Контрольні запитання

1. Як визначається розташування площини у просторі?
2. Запишіть нормальне рівняння площини у векторній та координатній формі.
3. Проведіть аналіз загального рівняння площини.
4. Запишіть рівняння площини у відрізках. Проілюструйте зручність його використання для побудови площини.

5. Як отримати рівняння площини, якщо відомі координати трьох точок, що належать заданій площині?
6. Розгляньте всі можливі варіанти взаємного розташування площин у просторі. Як визначити кут між площинами? Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
7. Як визначити точку перетину трьох площин? Результатами якого з попередніх розділів ви скористаєтесь для розв'язання цієї задачі?
8. Як визначити відстань між точкою та площиною?
9. Як визначається розташування прямої у просторі?
10. Запишіть канонічне рівняння прямої у векторній та координатній формі.
11. Опишіть загальне рівняння прямої як результат перетину двох площин.
12. Як записати рівняння прямої, якщо відомі координати двох точок, що їй належать?
13. Розгляньте всі можливі варіанти взаємного розташування прямих у просторі. Як визначити кут між прямими? Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.
14. Як визначити кут між прямою та площиною? Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини у просторі.
15. Як знайти точку перетину прямої та площини? Сформулюйте алгоритм розв'язання.
16. Як саме елементи векторної алгебри допомагають вам у розв'язанні задач на пряму та площину у просторі? Наведіть приклади.

Розділ 5 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

5.1 Змінні величини і функції

5.1.1 Змінні та сталі величини

Визначення 5.1. ***Змінною величиною*** називається величина, яка набуває будь-яких значень.

Домовимось позначати змінні величини як $x, y, z, u, v, w, t, \ldots$

Визначення 5.2. ***Сталою величиною*** називається величина, значення якої не змінюється.

Домовимось позначати сталі величини як $a, b, c, d, k, \ldots$

Визначення 5.3. Величини, значення яких не змінюється за будь-яких обставин, називаються ***абсолютними сталими***. Наприклад, відношення довжини кола до діаметра є абсолютно сталою величиною: $\pi = 3{,}14159 \ldots$

Визначення 5.4. Пряма лінія, на якій вказані початок, масштаб та напрям відрахування, називається ***числовою віссю***.

Важливо, що між множиною точок числової осі і множиною дійсних чисел є взаємно однозначна відповідність, а саме: будь-яка точка числової осі відображує певне дійсне число, і навпаки, будь-яке число є координатою певної точки числової осі.

Визначення 5.5. Сукупність всіх числових значень змінної величини називається її ***областю зміни***.

Визначимо наступні області зміни:

- ***інтервал (проміжок)*** – це сукупність всіх значень x, що розташовані між певними числами a і b $(a < b)$, при цьому самі числа a і b не належать вказаній сукупності: $a < x < b$ або $x \in (a, b)$;
- ***відрізок (сегмент)*** – це сукупність всіх значень x, що розташовані між певними числами a і b, при цьому самі числа a і b належать вказаній сукупності: $a \leq x \leq b$ або $x \in [a, b]$;

- ***полузамкнений інтервал*** – це сукупність всіх значень x, що розташовані між певними числами a і b, при цьому одно з чисел a або b належать вказаній сукупності: $a \leq x < b$ або $x \in [a, b)$; $a < x \leq b$ або $x \in (a, b]$;
- якщо змінна x набуває будь-яких значень, більших a (або менших b), такий інтервал називається ***напівнескінченним*** : $x > a$ або $x \in (a, \infty)$; $x < b$ або $x \in (-\infty, b)$;
- якщо змінна x набуває будь-яких дійсних значень, її областю змін буде ***нескінченний інтервал:*** $-\infty < x < \infty$ або $x \in (-\infty, \infty)$.

5.1.2 Функції. Основні визначення

Будь-який процес у природі може бути охарактеризований взаємною зміною декількох змінних величин. Визначення зв'язку між величинами, що беруть участь у процесі, який досліджується, є головною задачею природничих наук. Залежність значень змінних величин між собою описується функційною залежністю.

Нехай дано деяку множину значень змінної величини x (позначимо цю множину D). Якщо кожному значенню x із множини D по будь-якому правилу поставлено у відповідність значення іншої змінної величини y, то кажуть, що ця величина y є функція величини x, тобто x і y зв'язані між собою функційною залежністю.

Визначення 5.6. Величина y називається ***функцією*** змінної x в області D, якщо кожному значенню x з цієї області відповідає одно певне значення величини y. Змінна x називається ***незалежною змінною*** або ***аргументом*** функції. Значення функції y залежать від значення незалежної змінною, тому функцію називають також і ***залежною змінною***.

Позначати функцію будемо як $y = f(x)$.

Визначення 5.7. Сукупність значень x, для яких визначається значення функції y по правилу $f(x)$, називається

областю визначення функції: $D(f)$. Сукупність, що створена з різних значень y, які обчислюють за правилом $f(x)$ називається ***областю значення функції***: $E(f)$.

Визначення 5.8. Якщо змінні x і y розглядати як декартови координати точок на площині xOy, то ***графіком функції*** $y = f(x)$ називається множина точок координатної площини xOy є координатами $(x, f(x))$.

Складна функція. Нехай $y = f(x)$ – деяка функція з областю визначення $D(f)$ і областю значень $E(f)$, а $z = g(y)$ – деяка функція, що задана на множині $E(f)$ або на деякій її підмножині з областю значень $E(g)$.

Визначення 5.9. Відповідність, яка надає кожному даному значенню x з множини $D(f)$ єдине число y з множини $E(f)$, а числу y – єдине число z з множини $E(g)$, називається ***складною функцією***: $z = g(f(x))$. Більшість функцій, які ми будемо досліджувати – складні, при чому операція «функція від функції» може виконуватися будь-яке число разів. Наприклад, $y = log_3(\sqrt[5]{x^4 - 3} + 8)$, де $u = x^4 - 3,\ v = \sqrt[5]{u},\ w = v + 8,$ $y = log_3 w.$

Обернена функція. Нехай $y = f(x)$ – деяка функція з областю визначення $D(f)$ і областю значень $E(f)$. Для будь-якого y_0 з множини $E(f)$ обов'язково знайдеться хоча б одне значення $x = x_0$ з множини $D(f)$ таке, що $f(x_0) = y_0$. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна, то для кожного x_0 з множини $D(f)$ знайдеться єдине значення y_0 з множини $E(f)$ таке, що $f(x_0) = y_0$.

Визначення 5.10. Відповідність, яка надає кожному даному числу y_0 з множини $E(f)$ єдине число x_0 з множини $D(f)$, називається ***оберненою функцію*** f^{-1} до функції f: $x = f^{-1}(y)$.

5.1.3 Способи завдання функції

З приведених в п. 5.1.2. визначень прямує, що задати функцію означає з'ясувати її область визначення та правило, за яким кожному значенню незалежної змінної ставиться у відповідність певне значення функції. Розглянемо наступні способи задання функції: табличний, графічний, аналітичний.

1. ***Табличний спосіб***. До табличного способу завдання часто звертаються у науці та техніці. Данні спостережень у певному порядку заносять до таблиці. При такому способі завдання виписуються послідовно значення незалежної змінної та відповідні їм значення функції. Нам добре відомі таблиці значень тригонометричних функцій, таблиці теплоємності речовин і т.ін.

Наприклад, в таблиці 5.1 наведено функціональну залежність пасажиропотоку від часу доби на ділянці автобусного маршруту між пунктами A і B.

Таблиця 5.1.

Час	6:00	8:00	10:00	12:00	14:00	16:00	18:00	20:00	22:00
Кількість пасажирів	458	624	322	167	153	388	477	298	164

Перевагою табличного способу завдання функції є те, що для кожного наведеного значення аргументу можна знайти відповідне значення функції без обчислень і вимірювань.

Недоліками цього способу є те, що неможливо задати функцію повністю, тобто для будь-яких значень аргументів, а також відсутність наочності при великих розмірах таблиці; при табличному завданні важко з'ясувати характер залежності функції від аргументу. До табличного способу завдання неможна застосувати апарат математичного аналізу.

2. ***Графічний спосіб***. Якщо взяти за абсцису певне значення незалежного аргументу, тоді ордината буде відповідати значенню функції при даному значенні аргументу. Цю точку можна зобразити на координатній площині. Множина точок, абсциси яких є значеннями незалежних аргументів, а ординати – відповідними значеннями функції, утворюють графік функції (рис. 5.1). В деяких випадках графічний спосіб є єдиним способом завдання функції, наприклад, при використанні самописців (приборів, які автоматично записують зміну однієї величини від зміни іншої).

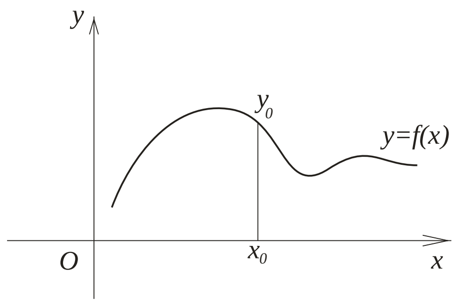


Рисунок 5.1 – Графік функції

Перевагою графічного способу є наочність. А *недолік* – як і у табличному способі, до графіку не можна застосувати апарат математичного аналізу.

3. ***Аналітичний спосіб***. Функція задається формулою, за допомогою якої для будь-якого значення аргументу можна обчислити відповідне значення функції. Аналітичний спосіб є основним способом завдання функції в математичному аналізі.

Перевагами аналітичного способу завдання функції є компактність, можливість обчислити значення даної функції для будь-якого аргументу, можливість застосування апарату математичного аналізу. *Недоліками* аналітичного завдання є недостатня наочність та необхідність обчислень.

Аналітичний спосіб завдання можемо поділити на три типи:

а) ***явна форма завдання***. Функцію задають у вигляді формули $y = f(x)$, що визначає операції і їх послідовність, які необхідно виконати над значенням аргументу для того, щоб обчислити значення функції. Наприклад,

$$y = 2^x - \sqrt{sin3x + 5};$$

б) ***неявна форма завдання*** – це завдання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, яке задає її тоді і лише тоді, коли множина упорядкованих пар (x, y) є розв'язком цього рівняння. Наприклад,

$$x^3 arctgy - 6y + 5x^2 - 13 = 0;$$

в) ***параметрична форма завдання***. Якщо функцію задано параметрично, то значення x і y, що відповідають одне одному, обчислюють через третю величину t, яку називають параметром: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$. Наприклад,

$$\begin{cases} x = 3e^t - 7t^2 \\ y = 5e^t + 2t^3 \end{cases}.$$

5.1.4 Основні характеристики поведінки функції

Вивчення будь якої функції полягає в з'ясуванні її поведінки. Апарат математичного аналізу дозволить нам навчитися проводити повне дослідження функції, а зараз згадаємо та узагальнимо відомі з елементарної математики простіші властивості функції.

Визначення 5.11. Значення незалежного аргументу, при якому функція обертається в нуль, $f(x) = 0$, називається ***нулем*** функції.

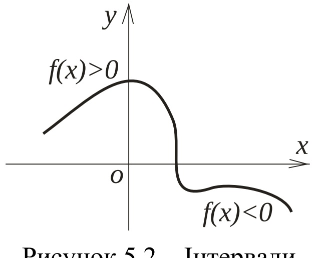


Рисунок 5.2 – Інтервали знакосталості

Між нулями функції розташовані інтервали знакосталості функції, тобто інтервали, де функція додатна – $f(x) > 0$ (графік функції розташований над віссю Ox), та інтервали, де функція від'ємна – $f(x) < 0$ (графік – під віссю Ox) (см. рис. 5.2).

Визначення 5.12. Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо при заміні знаку у будь-якого аргументу функції, значення самої функції залишається незмінним:

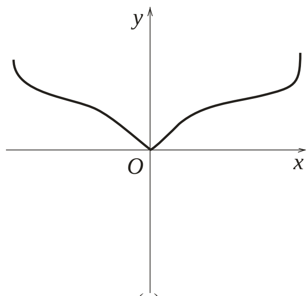
$$f(-x) = f(x).$$

Функція $y = f(x)$ називається ***непарною***, якщо при заміні знаку у будь-якого аргументу функції, значення самої функції теж змінює знак на протилежний, не змінюючи при цьому свого абсолютного значення:

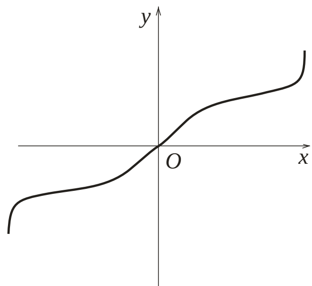
$$f(-x) = -f(x).$$

Зауважимо, що графік парної функції симетричний відносно осі Oy (рис. 5.3, а), а графік непарної функції симетричний відносно початку координат (рис. 5.3, б).

Визначення 5.13. Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною***, якщо існує таке додатне число T, що для будь-якого x справедлива рівність $f(x+T) = f(x)$. Найменше додатне число T, для якого виконується ця умова, називається ***періодом*** функції (рис. 5.4).



(а)



(б)

Рисунок 5.3 – Парність функції

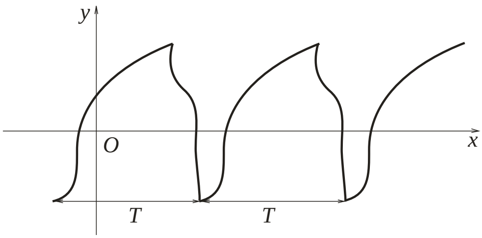


Рисунок 5.4. – Періодичність функції

Визначення 6.14. Функція $y = f(x)$ називається ***зростаючою*** на інтервалі (a, b), якщо більшим значенням аргументу відповідають більші значення функції. Тобто із умови $x_1 < x_2$ прямує $f(x_1) < f(x_2)$ для будь-яких x з інтервалу (a, b). Функція $y = f(x)$ називається ***спадною*** на інтервалі (a, b), якщо більшим значенням аргументу відповідають менші значення функції. Тобто з умови $x_1 < x_2$ прямує $f(x_1) > f(x_2)$ для будь-яких x з інтервалу (a, b).

Визначення 5.15. Інтервал незалежної змінної, в якому функція зростає, називається ***інтервалом зростання*** функції; інтервал незалежної змінної, в якому функція спадає, називається ***інтервалом спадання*** функції. Інтервали зростання і спадання функції називаються ***інтервалами монотонності***.

Функція може мати декілька інтервалів монотонності. Так, наприклад, на рис. 5.5 зображена функція, яка спадає на інтервалах $(a,\ x_1)$ і $(x_2,\ x_3)$, та зростає на інтервалах $(x_1,\ x_2)$ і $(x_3,\ b)$.

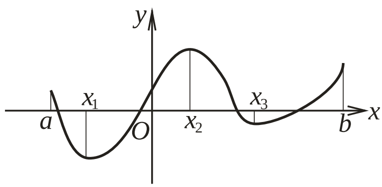


Рисунок 5.5 – Інтервали монотонності

Визначення 5.16. Значення функції, більше (або менше) всіх інших значень функції в деякому інтервалі, називається ***найбільшим*** (або ***найменшим***) значенням функції в інтервалі.

Наприклад, на рис. 5.5 на інтервалі $(a,\ x_2)$ функція набуває найменшого значення в точці x_1, а на інтервалі $(x_1,\ x_3)$ – найбільшого значення в точці x_2.

5.2 Теорія границь

5.2.1 Границя змінної величини. Теореми о границях

Визначення 5.16. Стале число a називається границею деякої числової послідовності дійсних чисел x_n, якщо, яким би не був окіл точки a, він включає всі члени вказаної послідовності, починаючи з деякого номера, тобто $|x_n - a| < \varepsilon$. Границю змінної будемо позначати як $x_n \to a$ або $\lim x_n = a$.

Приклад 5.1. Змінна величина послідовно набуває значення:

$$x_1 = 1 + \tfrac{1}{2}, \quad x_2 = 1 + \tfrac{1}{4}, \quad x_3 = 1 + \tfrac{1}{8}, \ \ldots, \ x_n = 1 + \tfrac{1}{2^n}.$$

Доведемо, що змінна величина має границю, яка дорівнює одиниці.

Розв'язання: Обчислимо $|x_n - 1| = \left|\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) - 1\right| = \frac{1}{2^n}$. Бачимо, що для будь-якого наперед заданого малого додатного числа ε всі наступні значення змінної, починаючи з x_n, де $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, буде виконуватися нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon$, що і треба було довести.

Основні властивості змінних величин

1. ***Границя константи дорівнює самій константі***.

Дійсно, якщо при будь-яких n $x_n = c$, то при будь-якому $\varepsilon > 0$ справедливо наступне $c - \varepsilon < x_n < c + \varepsilon$. Ця умова буде виконуватися, починаючи з $n = 1$,тобто $x_n \to c$.

2. ***Змінна величина не може прямувати до двох різних границь***.

Якщо би так сталося, що $x_n \to a$ і $x_n \to b$ (рис. 5.6), то розглядаючи навколо a і b два проміжки, що не перетинаються, м опинилися одночасно в обох цих

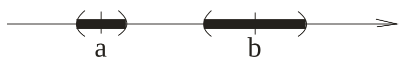


Рисунок 5.6 – Ілюстрація неможливості прямування змінної до двох різних границь

тому що ці проміжки не перетинаються, звідси прямує, що змінна може мати лише одну границю.

Зауваження: не треба думати, що кожна змінна обов'язково має границю. Наприклад, змінна $(-1)^n$ границі не має.

3. ***Теорема про стиснуту змінну (принцип двох поліцейських)***.

Якщо $x_n \leq y_n \leq z_n$, $n = 1,2,\ldots$ і $\lim x_n = \lim z_n = a$, то $\lim y_n = a$.

Тобто, якщо дві змінні прямують до однієї й тієї ж границі, а третя границя замкнена між ними, то вона теж прямує до тієї ж границі (рис. 5.7).

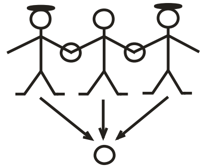


Рисунок 5.7 – Принцип двох поліцейських

5.2.2 Границя функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай незалежна змінна x нескінченно наближається до числа x_0. Може так статися, що відповідне значення функції $y = f(x)$ нескінченно наближається до деякого числа A. Тоді кажуть, що число A – границя функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$.

Визначення 5.17. Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від числа x_0, відповідні значення функції $y = f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A. Границю функції позначають

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A. \tag{5.1}$$

Згідно з визначенням 5.17, число A є границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якого наперед узятого малого додатного числа ε можна підібрати таке ж мале число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівності

$$|x - x_0| < \delta,$$

буде справедливою також нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Графічно існування у функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$ границі, яка дорівнює A, можна проілюструвати наступним чином (рис. 5.8). Проведемо перпендикуляри до координатних осей – в точці x_0 до осі Ox, в точці A до осі Oy – до їх перетину в точці M. Довільно оберемо додатне число ε, тоді знайдеться таке δ-окіл точки $x = x_0$, що частина графіка функції $y = f(x)$, що відповідає цьому околу, буде знаходиться в смузі, яка обмежена прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$.

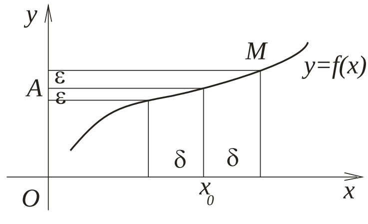


Рисунок 5.8 – Границя функції

Приклад 5.2. Довести, що границя функції $y = 4x + 5$ при $x \to 2$ дорівнює 13.

Розв'язання. Задаємо довільне додатне число $\varepsilon > 0$. Щоб була справедлива нерівність

$$|(4x + 5) - 13| < \varepsilon,$$

або (що те ж саме) $4|x - 2| < \varepsilon,$

необхідно, щоб виконувалася нерівність

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тобто, для будь-яких x, які відрізняються від 2 менше, ніж на $\frac{\varepsilon}{4}$, наша функція буде відрізнятися від 13 менше, ніж на ε, де ε – довільне додатне число.

Зауваження 1. Визначення границі не дає способів його знаходження! Надалі ми визначимо деякі правила, за якими будемо знаходити границі функцій.

Зауваження 2. Не треба думати, що кожна функція при будь-якому значенні аргументу обов'язково має границю.

Односторонні границі

Визначення 5.18. Число A називається ***лівою границею функції*** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якого малого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, де $\delta(\varepsilon)$ таке, що для всіх $x \in (a, x_0)$, які задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначається ліва границя як

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$$

Аналогічно визначається ***права границя*** функції:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Визначення 5.19. Ліва та права границі функції називаються односторонніми границями функції .

Якщо функція визначена на деякому інтервалі (a, b), крім, можливо, точки $x = x_0$, то для існування границі функції необхідно і достатньо, щоб ліва і права границі функції існували і дорівнювали один одному:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A. \tag{5.2}$$

Зауваження 3. В загальному випадку ліва і права границя можуть існувати, але не дорівнювати одне одному. Такі випадки ми детально розглянемо у наступних розділах.

5.2.3 Нескінченно малі і нескінченно великі величини та їх властивості

Визначення 5.20. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно великою*** величиною при $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від x_0, відповідні значення функції за абсолютною величиною перебільшують будь-яке наперед задане яке завгодно велике додатне число:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty. \tag{5.3}$$

Тобто якщо для будь-якого наперед заданого як завгодно великого додатного числа M можна підібрати таке додатне число δ, що для всіх x, які задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, буде справедлива і нерівність $|f(x)| > M$, то $y = f(x)$ буде нескінченно великою величиною при $x \to x_0$.

Наприклад, функції $y = \frac{1}{x-2}$ при $x \to 2$; $y = \frac{5}{x^2}$ при $x \to 0$; $y = 4^x$ при $x \to \infty$ є нескінченно великими.

Зауваження 1. Необхідно відрізняти поняття дуже великого числа з нескінченно великою величиною! Наприклад, число $10^{10^{10^{10}}}$ є величиною колосальною, але є сталою величиною і не прямує до нескінченності.

Визначення 5.21. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно малою*** величиною при $x \to x_0$, якщо її границя при $x \to x_0$ прямує до нуля:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0. \tag{5.4}$$

Наприклад, функції $y = (x-2)^3$ при $x \to 2$; $y = 4(x+3)$ при $x \to -3$; $y = 5^x$ при $x \to -\infty$ є нескінченно малими.

Зауваження 2. Не можна змішувати поняття дуже малого числа з нескінченно малою величиною! Єдине число, яке ми вважаємо нескінченно малою величиною є 0, тому що границя константи дорівнює самій константі.

Для з'ясування способів знаходження границь функції нам необхідно познайомитися з наступними теоремами.

Теорема. Якщо при $x \to x_0$ $f(x)$ – нескінченно велика величина, то $\frac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала величина, і навпаки, якщо $\varphi(x)$ – нескінченно мала величина, то $\frac{1}{\varphi(x)}$ – нескінченно велика величина.

Доведення:

Нехай $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Оберемо будь-яке мале $\varepsilon > 0$ і візьмемо $M = \frac{1}{\varepsilon}$. За умовою теореми $f(x)$ – нескінченно велика величина, а тому для всіх x, близьких до x_0, буде виконуватися умова:

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Але в такому випадку буде справедливо і наступне:

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M} = \varepsilon.$$

З цього випливає, що $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$. Тобто величина $\frac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою. Що потрібно було довести.

Аналогічно доводиться і друга частина теореми.

Пряма теорема. Якщо функція має границю, то її можна представити у вигляді суми сталої, яка дорівнює її границі, і нескінченно малої величини.

Доведення:

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Якщо ε – будь-яке додатне мале число, то $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всіх x, які мало відрізняються від x_0. З цього випливає, що різниця $f(x) - A$ є нескінченно малою величиною:

$$f(x) - A = \alpha(x) \text{ або } f(x) = A + \alpha(x).$$

Обернена теорема. Якщо функцію можна представити у вигляді суми сталої і нескінченно малої величини, то сталий доданок і є границею функції.

Доведення:

З рівності $f(x) = A + \alpha(x)$, де A – стала, а $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ – нескінченно мала, прямує, що якщо ε – будь-яке мале додатне число, то $|f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon$ для всіх x, які мало відрізняються від x_0. Проте це означає, що функція $f(x)$ має своєю границею сталу величину A, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

5.2.4 Основні теореми про границі функції

Теорема 1. Границя алгебраїчної суми кінцевого числа доданків дорівнює сумі границь доданків:

$$\lim_{x\to x_0}(u_1+u_2+\cdots+u_n)=$$
$$=\lim_{x\to x_0}u_1+\lim_{x\to x_0}u_2+\cdots+\lim_{x\to x_0}u_n. \qquad (5.5)$$

Доведення:

Нехай $\lim_{x\to x_0}u_1=a_1$, $\lim_{x\to x_0}u_2=a_2$, …, $\lim_{x\to x_0}u_n=a_n$ тоді $u_1=a_1+\alpha_1$, $u_2=a_2+\alpha_2$, … , $u_n=a_n+\alpha_n$ де α_1, $\alpha_2,\dots$, α_n - нескінченно малі (за прямою теоремою п. 5.2.3). Тобто можна суму функцій представити у вигляді

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n).$$

Тут $(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ - стала величина, а $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$ - нескінченно мала величина, тому

$$\lim_{x\to x_0}(u_1+u_2+\cdots+u_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n=$$
$$=\lim_{x\to x_0}u_1+\lim_{x\to x_0}u_2+\cdots+\lim_{x\to x_0}u_n.$$

Наслідок 1. Сума кінцевого числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала, тобто, якщо $u_1\to 0$ і $u_2\to 0$, то $u_1+u_2\to 0$.

Теорема 2. Границя добутку кінцевого числа множників дорівнює добутку границь множників:

$$\lim_{x\to x_0}(u_1\cdot u_2\cdot\ldots\cdot u_n)=\lim_{x\to x_0}u_1\cdot\lim_{x\to x_0}u_2\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to x_0}u_n. \qquad (5.6)$$

Доведення: аналогічно теоремі 1.

Наслідок 1. Сталий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x\to x_0}c\cdot u=c\cdot\lim_{x\to x_0}u. \qquad (5.7)$$

Наслідок 2. Добуток кінцевого числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

Наслідок 3. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно мала величина.

Теорема 3. Границя частки дорівнює частці цих границь, якщо границя знаменника відрізняється від нуля:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u}{v}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}u}{\lim\limits_{x\to x_0}v},\ \text{якщо}\ \lim_{x\to x_0}v\neq 0. \qquad (5.8)$$

Доведення: Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}u=a,\ \ \lim\limits_{x\to x_0}v=b\neq 0.$

Звідси $u=a+\alpha,\ v=b+\beta$, де α і β - нескінченно малі величини. Запишемо і перетворимо тотожність:

$$\frac{u}{v}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}=\frac{a}{b}+\left(\frac{a+\alpha}{b+\beta}-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{ab+\alpha b-ab-a\beta}{b(b+\beta)}=\frac{a}{b}+\frac{\alpha b-a\beta}{b(b+\beta)}.$$

Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u}{v}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{a}{b}+\frac{\alpha b-a\beta}{b(b+\beta)}\right).$$

Тут перший дріб – стала величина, а другий – нескінченно мала (з наслідку 3 до теореми 2). Тобто

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u}{v}=\frac{a}{b}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}u}{\lim\limits_{x\to x_0}v}.$$

Приклад 5.3. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-7x^2+5x+4}{6x^2-13}.$$

Розв'язання: Скористаємося доведеними теоремами, маємо

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-7x^2+5x+4}{6x^2-13}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(2x^3-7x^2+5x+4\right)}{\lim\limits_{x\to 3}(6x^2-13)}=$$

$$=\frac{2\left(\lim\limits_{x\to 3}x\right)^3-7\left(\lim\limits_{x\to 3}x\right)^2+5\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}4}{6\left(\lim\limits_{x\to 3}x\right)^2-\lim\limits_{x\to 3}13}=\frac{2\cdot 3^3-7\cdot 3^2+5\cdot 3+4}{6\cdot 3^2-13}=\frac{10}{41}.$$

Зауважимо, що в даному прикладі ми обчислювали границю дрібно-раціональної функції, аргумент якої прямує до скінченого значення, не обертаючи знаменник до нуля. Обчислення таких границь не створює проблем, при розв'язанні ми користувалися лише визначенням границі і основними теоремами про границі.

5.2.5 Невизначеності. Розкриття деяких типів невизначеностей

Визначення 5.22. Дріб, в якому і чисельник, і знаменник є змінними величинами, які прямують до нуля, називається ***невизначеністю*** типу $\frac{0}{0}$. Знаходження границі такого дробу називається ***розкриттям невизначеності***.

Зауваження 1: Крім невизначеності $\frac{0}{0}$ є також невизначеності: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, $\infty^{0\infty}$, 0^{0}..

Зауваження 2: При обчисленні границь нам часто прийдеться працювати з нескінченно малими та нескінченно великими величинами. Спробуємо узагальнити вивченні поняття та властивості у таблиці 5.2. Відзначимо, що дії з нескінченно малими та нескінченно великими величинами мають умовний характер.

Таблиця 5.2 – «Дії» з нескінченно малими та нескінченно великими величинами

$a\cdot 0=0$	$a\cdot\infty=\infty$
$\frac{0}{a}=0$	$\frac{\infty}{a}=\infty$
$\frac{a}{0}=\infty$	$\frac{a}{\infty}=0$

1. Невизначеність типу $\frac{0}{0}$, що задана відношенням двох многочленів.

Правило. Щоб розкрити невизначеність типу $\frac{0}{0}$, що задана у формі

$$\lim_{x\to a}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\cdots+K}{Lx^m+Mx^{m-1}+\cdots+P},$$

необхідно і в чисельнику, і в знаменнику виділити критичний множник $(x-a)$ і скоротити дріб на нього.

Зауваження 1. Критичний множник $(x-a)$ обов'язково виділиться і в чисельнику, і в знаменнику, тому що $(x-a)$ є коренем обох многочленів, звідси прямує, що з наслідку теореми Бізу обидва многочлени можуть бути поділені на $(x-a)$ без залишку.

Зауваження 2. Можливо, що операцію скорочення на критичний множник прийдеться виконувати декілька разів.

Формули, що можуть стати у нагоді:

- розкладання квадратного тричлена на множники:
  $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,
  де x_1, x_2 – корені квадратного тричлена;
- формули скороченого множення:
  а) різниця квадратів: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;
  б) сума (різниця) кубів:
  $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$;
  в) квадрат суми (різниці):
  $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;
  г) куб суми (різниці):
  $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+2ab^2\pm b^3$ і т.п.

Приклад 5.4. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^3+8}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. В чисельнику розкладемо квадратний тричлен на множники, а в знаменнику скористаємося формулою суми кубів:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^3+8}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-3)}{(x^2-2x+4)}=-\frac{5}{12}.$$

2. Невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, що задана відношенням двох многочленів.

Правило. Щоб розкрити невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, що задана відношенням двох многочленів, необхідно і чисельник, і знаменник скоротити на найбільшу степінь многочленів, що входить у функцію.

Приклад 5.5. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2-7x+4}{2x^3+3x-6}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скоротимо і чисельник, і знаменник на найбільший степінь - x^3, скористаємося таблицею 5.2, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2-7x+4}{2x^3+3x-6}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{2+\frac{3}{x^2}-\frac{6}{x^3}}=\frac{5}{2}.$$

Приклад 5.6. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-4x^3+9}{x^3+8x^2-4x}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скоротимо і чисельник, і знаменник на найбільший степінь – x^5, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-4x^3+9}{x^3+8x^2-4x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^5}}{\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{4}{x^5}}=\frac{3}{0}=\infty.$$

Приклад 5.7. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-1}{5x^3-3x^2-12}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скоротимо і чисельник, і знаменник на найбільший степінь - x^3, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-1}{5x^3-3x^2-12}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^5}}{5-\frac{3}{x}-\frac{12}{x^3}}=\frac{0}{5}=0.$$

Якщо уважно проаналізувати розв'язання прикладів 5.5 – 5.7, можна помітити цікаву закономірність: результат визначається співвідношенням максимальних степенів многочленів чисельника і знаменника. Узагальнимо ці спостереження у вигляді формули:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\cdots+K}{Lx^m+Mx^{m-1}+\cdots+P}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ 0, & n<m,\\ \frac{A}{L}, & n=m.\end{cases}\qquad(5.9)$$

Зауваження. При обчисленні більш складних границь ми зможемо використовувати (3.9) не запобігаючи попередніх обчислень.

Приклад 5.8. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+6}+\sqrt[3]{5x^2-2}}{\sqrt[6]{x^8-3x^7-4}-6x}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Порівняємо максимальні степені в чисельнику $\left(n=\frac{7}{5}\right)$ і знаменнику $\left(m=\frac{4}{3}\right)$: $n>m$. За формулою (5.9) границя прямує до нескінченності.

3. Невизначеності типу $\frac{0}{0}$ *або* $\infty-\infty$*, що задані ірраціональними виразами*

Правило. Щоб розкрити невизначеності типу $\frac{0}{0}$ або $\infty-\infty$ у функціях, які мають ірраціональності, необхідно належним образом позбутися ірраціональності.

Формули, що використовуються: формули скороченого множення і, при необхідності, розкладання квадратного тричлена на множники (см. п.1).

Приклад 5.9. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{x+4}-3}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Чисельник розкладемо на множники, а щоб позбутися ірраціональності у знаменнику, скористаємося формулою різниці квадратів. Помножимо і чисельник, і знаменник на множник $\sqrt{x+4}+3$, звідси маємо

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{x+4}-3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-1)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{\left(\sqrt{x+4}-3\right)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-1)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{x+4-3^2}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-1)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to 5}(x-1)\left(\sqrt{x+4}+3\right)=4\cdot 6=24.$$

Приклад 5.10. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{2x+11}-3}.$$

Розв'язання: Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. В даній функції маємо ірраціональність і в чисельнику, і в знаменнику. Щоб позбутися ірраціональності і чисельник, і знаменник одночасно помножимо на $\left(\sqrt{x+5}+2\right)$ і $\left(\sqrt{2x+11}+3\right)$. Отже маємо:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{2x+11}-3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x+5}-2\right)\left(\sqrt{x+5}+2\right)\left(\sqrt{2x+11}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+11}-3\right)\left(\sqrt{2x+11}+3\right)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+5-4)\left(\sqrt{2x+11}+3\right)}{(2x+11-9)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{2x+11}+3\right)}{2(x+1)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{2x+11}+3\right)}{2\left(\sqrt{x+5}+2\right)}=\frac{3}{4}.$$

Приклад 5.11. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right).$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\infty - \infty$. Для того щоб позбутися ірраціональності, скористаємося формулою різниці кубів, для цього помножимо і поділимо функцію на

$$\left(\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)^2 + \sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{(x-1)^2} + \left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)^2\right),$$

виконавши ряд перетворень, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}\right)}.$$

Порівняємо максимальні степені чисельника $(n = 1)$ і знаменника $\left(m = \frac{4}{3}\right)$, за формулою (5.9) отримуємо відповідь: границя прямує до нуля.

5.2.6 Важливі границі та їх застосування

Перша важлива границя

Теорема. Функція $\frac{sin\alpha}{\alpha}$ при $\alpha \to 0$ має границю, яка дорівнює 1:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{sin\alpha}{\alpha} = 1. \tag{5.10}$$

Доведення: Будемо виходити з геометричного визначення синуса (рис. 5.9). Беремо коло з одиничним радіусом і кут α в радіанах $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Функція $\frac{sin\alpha}{\alpha}$ – парна, а тому достатньо розглянути випадок, коли $\alpha > 0$. З рис. 5.9 бачимо, що

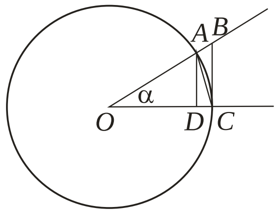


Рисунок 5.9 – Одиничне коло

$$S_{\Delta OAC} < S_{\text{сектора}OAC} < S_{\Delta OBC}.$$

Площі обраних фігур наступні:

$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} OC \cdot AD = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot sin\alpha;$

$S_{\text{сектора}OAC} = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC} \cdot R = \frac{1}{2} \alpha \cdot R \cdot R;$

$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} OC \cdot BC = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot tg\alpha.$

Тобто можна записати

$$\frac{1}{2} R \cdot R \cdot sin\alpha < \frac{1}{2} \alpha \cdot R \cdot R < \frac{1}{2} R \cdot R \cdot tg\alpha$$

з цього прямує, що $sin\alpha < \alpha < tg\alpha$.

Скоротимо всі члени нерівності на $sin\alpha > 0$, отримаємо

$$1 < \frac{\alpha}{sin\alpha} < \frac{1}{cos\alpha} \qquad \text{або} \qquad cos\alpha < \frac{sin\alpha}{\alpha} < 1.$$

З геометричного визначення косинуса зрозуміло, що $\lim\limits_{\alpha \to 0} cos\alpha = 1$, звідси з теореми про стиснуту змінну остаточно маємо

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Приклад 5.12. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinax}{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinax}{x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{a \cdot sinax}{a \cdot x} = a \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sinax}{ax} =$$

$$= \begin{bmatrix} y = ax \\ y \to 0 \end{bmatrix} = a \cdot 1 = a.$$

Приклад 5.13. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinax}{sinbx}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{sinbx}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot sinax}{x\cdot sinbx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinbx}=\frac{a}{b}.$$

Приклад 5.14. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgax}{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgax}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}\cdot\frac{1}{cosax}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosax}=a\cdot 1=a.$$

Приклад 5.15. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\begin{bmatrix} x=siny \\ arcsinx=arcsin(siny)=y \\ y\to 0\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{siny}=1.$$

Приклад 5.16. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 5x-sin^2 x}{7x^2}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 5x-sin^2 x}{7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(sin5x-sinx)(sin5x+sinx)}{7x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2sin2xcos3x\cdot 2sin3xcos2x}{7x^2}=$$

$$=\frac{4}{7}\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}cos3x\cdot cos2x=$$

$$=\frac{4}{7}\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 1=\frac{24}{7}.$$

Приклад 5.17. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx.$$

Розв'язання. Застосовувати першу важливу границю можна лише за умови, що аргумент функції прямує до нуля. Введемо нову змінну, яка буде прямувати до нуля, зробимо відповідні перетворення

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx=|0\cdot\infty|=\begin{bmatrix}y=\frac{\pi}{2}-x\\ y\to 0\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{y\to 0}y\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\lim_{y\to 0}y\cdot ctgy=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot cosy}{siny}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{siny}\cdot\lim_{y\to 0}cosy=1\cdot 1=1.$$

Ми розглянули багато прикладів на застосування першої важливої границі і можемо зробити деякі висновки. По-перше, завдання на обчислення границі за допомогою першої важливої границі потребують від нас знання основних тригонометричних формул і вміння їх правильно застосовувати; по-друге, наслідки першої важливої границі (деякі з них ми вже довели) можна застосовувати надалі без доведення.

Наслідки першої чудової границі:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;$
2) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=1;$
3) $\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1;$
4) $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x}=a;$
5) $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{sinbx}=\frac{a}{b}.$

Друга важлива границя

Теорема. Функція

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

має границю при $n \to \infty$.

Доведення: За формулою бінома Ньютона маємо:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}.$$

Перетворимо праву частину

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{(n-1)}{n}\right).$$

Бачимо, що функція $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ зростаюча при зростаючому n. Покажемо, що вона обмежена. Для цього замінимо в усіх членах праворуч виразу в дужках, одиницями, отримаємо

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Ще більше збільшимо праву частину, якщо замінимо

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2 \cdot 3} \text{ на } \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{4!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ на } \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}, \quad \ldots$$

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \text{ на } \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

звідси

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Тим більше, дописавши в праву частину члени прогресії $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{2^{n+1}}$, ... , отримаємо

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\right).$$

У дужках отримали суму нескінченно спадаючої геометричної прогресії, яка дорівнює 2. Звідси маємо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Якщо $n = 1$, ліва частина нашої формули дорівнює 2. Отже остаточно маємо

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Визначення 5.23. Числом e називається границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Воно приблизно дорівнює $e \approx 2{,}718$ ....

Виявляється, що функція має границю не лише тоді, коли її аргумент приймає цілочислені значення, але й при неперервній його зміні та прямуванні до нескінченності.

Теорема. Функція $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ має границю, яка дорівнює e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (5.11)$$

Доведення цієї теореми виходить за межі нашого курсу.

Зауваження. За допомогою другої важливої границі розкриваються невизначеності типу 1^∞.

Приклад 5.18. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x.$$

Розв'язання. Скористаємося другою важливою границею:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x = |1^\infty| = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^4 = e^4.$$

Приклад 5.19. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-2}\right)^{5x}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-2}\right)^{5x} = |1^\infty| = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{7}}\right)^{\frac{7}{x-2}\cdot 5x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{35x}{x-2}} = e^{35}.$$

Приклад 5.20. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+5}\right)^{6x-1}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+5}\right)^{6x-1} = |1^\infty| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-3}{4x+5}-1\right)^{6x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-3-4x-5}{4x+5}\right)^{6x-1} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{4x+5}\right)^{\frac{4x+5}{-8}}\right)^{\frac{-8}{4x+5}\cdot(6x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8(6x-1)}{4x+5}} = e^{-12}.$$

Приклад 5.21. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)[ln(5x+2)-ln(5x-4)].$$

Розв'язання. Звернемо увагу, що в даному прикладі ми змушені позбавлятися невизначеності типу $|\infty-\infty|$. Як ми зауважили, друга важлива границя допомагає позбавлятися невизначеності типу $|1^\infty|$, але, після застосування властивостей логарифмів, нам вдасться звести дану границю до другої важливої границі.

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)[ln(5x+2)-ln(5x-4)] = |\infty-\infty| =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(2x+3)ln\left(\frac{5x+2}{5x-4}\right) = \lim_{x\to\infty} ln\left(\frac{5x+2}{5x-4}\right)^{(2x+3)} =$$

$$= ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-4}\right)^{(2x+3)} = |1^\infty| =$$

$$= ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5x+2}{5x-4}-1\right)^{(2x+3)} =$$

$$= ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{5x-4}\right)^{\frac{5x-4}{6}}\right)^{\frac{6}{5x-4}\cdot(2x+3)} =$$
$$= lne^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6(2x+3)}{5x-4}} = lne^{\frac{12}{5}} = \frac{12}{5}lne = \frac{12}{5}.$$

Приклад 5.22. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{7x+6}\right)^{11x-3}.$$

Розв'язання. Ми розглянули вже достатньо прикладів, щоб навчитися обчислювати границі за допомогою другої важливої границі, і найпоширеніша помилка, яку допускають при обчисленні таких границь, є помилка, коли побачивши знайому структуру, починають слідувати за вже знайомим алгоритмом, не перевіривши, чи є тут невизначеність. В даної границі невизначеності нема, і ми відповідь отримуємо миттєво:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{7x+6}\right)^{11x-3} = \left(\frac{5}{7}\right)^{\infty} = 0.$$

Три важливі границі

Теорема 1. Справедлива формула

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = 1. \qquad (5.12)$$

Доведення: З другої важливої границі маємо, що $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ при $z\to 0$ прямує до e, отже маємо

$$\frac{ln(1+x)}{x} = ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] \xrightarrow{\text{при } x\to 0} lne = 1.$$

Що і треба було довести.

Теорема 2. Справедлива формула

$$\lim_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u} = lna. \qquad (5.13)$$

Доведення: Якщо $u\to 0$, то величина $a^u-1\to 0$, тобто в чисельнику величина нескінченно мала. Нехай $a^u-1=z$

З теореми 1 прямує, що $z\sim ln(1+z)$ тобто

$a^u - 1 \sim ln[1 + (a^u - 1)] = lna^u = u \cdot lna,$ з цього прямує, що

$$\lim_{u\to 0} \frac{a^u - 1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{u \cdot lna}{u} = lna.$$

Що і треба було довести.

Теорема 3. Справедлива формула

$$\lim_{u\to 0} \frac{(1+u)^a - 1}{u} = a. \qquad (5.14)$$

Доведення: Величина $(1+u)^a - 1$ при $u \to 0$ прямує до нуля, тобто є величиною нескінченно малою. Як і при доведенні теореми 2 положимо $(1+u)^a - 1 = z$.

З цього прямує $z \sim ln(1+z)$, тобто

$$(1+u)^a - 1 \sim$$
$$\sim ln\big[1 + [(1+u)^a - 1]\big] = ln(1+u)^a = a \cdot ln(1+u).$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{(1+u)^a - 1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{a \cdot ln(1+u)}{u} = a.$$

Що і треба було довести.

Приклад 5.23. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+7x)}{4x}.$$

Розв'язання. Скористаємося теоремою 1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+7x)}{4x} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{7ln(1+7x)}{7x} = \frac{7}{4}.$$

Приклад 5.24. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0} \frac{15^x - 5^x}{x}.$$

Розв'язання. Скористаємося теоремою 2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{15^x - 5^x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{15^x - 1}{x} - \frac{5^x - 1}{x}\right) = ln15 - ln5 =$$

$$= ln\frac{15}{5} = ln3.$$

Приклад 5.25. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+x}-1}{3x}.$$

Розв'язання. Скористаємося теоремою 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+x}-1}{3x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{7}}-1}{x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{21}.$$

5.2.7 Порівняння нескінченно малих

Нехай декілька нескінченно малих величин α, β, γ ... є функціями одного того ж самого аргументу x и прямують до нуля при $x \to a$ (або $x \to \infty$).

Визначення 5.23. Якщо відношення α і β має кінцеву і відмінну від нуля границю при $x \to a$, тобто

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0, \text{ а } \lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{A} \neq 0,$$

То $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі одного порядку малості.

Приклад 5.26. Нехай $\alpha(x) = 1 - cos^3x$, $\beta(x) = x \cdot sin5x$, де $x \to 0$ – нескінченно малі. Обчислимо границю їх відношення:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^3x}{x\cdot sin5x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{(1-cosx)\left(1+cosx+cos^2x\right)}{x\cdot sin5x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x\cdot sin5x}\cdot\lim_{x\to 0}(1+cosx+cos^2x) = 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x\cdot sin5x} =$$

$$= 6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{sin5x} = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1/2}{5} = \frac{3}{10}.$$

Згідно з визначенням 5.23 нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку.

Визначення 5.24. Якщо $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = 0$, а $\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha} = \infty$, то нескінченно мала α вищого порядку, ніж нескінченно мала β; а нескінченно мала β меншого порядку малості, ніж нескінченно мала α при $x \to a$.

Приклад 5.27. Нехай $\alpha(x)=\frac{x^2-1}{x^3}$, $\beta(x)=\frac{x^2+1}{x^4}$, де $x\to\infty$ – нескінченно малі. Обчислимо границю їх відношення:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^4}}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4(x^2-1)}{x^3(x^2+1)}=\infty.$$

Згідно з визначенням 5.24 нескінченно мала $\alpha(x)$ – меншого порядку, ніж $\beta(x)$.

Визначення 5.25. Нескінченно мала β називається нескінченно малою k-го порядку відносно нескінченно малої α, якщо β і α^k – нескінченно малі одного порядку при $x\to a$, тобто якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha^k}=A\neq 0.$$

Приклад 5.28. З'ясувати порядок відносно x функції $\beta(x)=\frac{3x^5}{x^3+1}$, нескінченно малої при $x\to 0$.

Розв'язання. Порівнюючи степені x, положимо $k=2$. Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta}{\alpha^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x^5}{x^3+1}}{x^2}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^5+x^3}=3.$$

Звідси маємо, що нескінченно мала $\beta(x)$ є нескінченно малою 2-го порядку відносно нескінченно малої x (за визначенням 5.25).

Визначення 5.26. Якщо відношення двох нескінченно малих α і β прямує до 1 при $x\to a$, тобто якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=1.$$

то нескінченно малі α і β називаються еквівалентними і позначаються: $\alpha\sim\beta$.

Приклад 5.29. Нехай $\alpha(x)=\frac{1-x}{1+x}$, $\beta(x)=1-\sqrt{x}$, де $x\to 1$ – нескінченно малі. Обчислимо границю їх відношення:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 1}(1+\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

За визначенням 5.26 ці нескінченно малі еквівалентні.

Зауваження 1. Якщо відношення двох нескінченно малих α і β не має границі при $x \to a$ і не прямує до нескінченності, то нескінченно малі α і β не порівняні між собою.

Приклад 5.30. Нехай $\alpha(x) = x$ і $\beta(x) = x \cdot sin\left(\frac{3}{x}\right)$ при $x \to 0$ α і β є нескінченно малими, але їх відношенням не має границі, тому що $\left|sin\left(\frac{3}{x}\right)\right| \le 1$ не має границі. Звідси прямує, що ці нескінченно малі не порівняні між собою.

Зауваження 2. Нескінченно великі величини порівнюють між собою так само, як і нескінченно малі.

Приклад 5.31. Нехай $\alpha(x) = 7x^4 + 4x$ і $\beta(x) = x^4 - 5x^3 + 12$ – нескінченно великі при $x \to \infty$. Знайдемо границю їх відношення:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+4x}{x^4-5x^3+12} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 7.$$

Звідси прямує, що ці нескінченно великі – одного порядку величини.

Порівняння нескінченно малих має практичне застосування. Поняття еквівалентних нескінченно малих ми застосуємо при обчисленні границь функцій.

Принцип заміни нескінченно малих

При розкритті невизначеності типу $\left|\frac{0}{0}\right|$ можна і чисельник, і знаменник замінити еквівалентними їм величинами.

З розглянутих важливих границь та їх наслідків, маємо еквівалентні функції, використання яких значно полегшує обчислення границь:

$sinx \sim x$; $tgx \sim x$;

$arcsinx \sim x$; $arctgx \sim x$;

$$ln(1+x) \sim x; \qquad e^x - 1 \sim x.$$

Приклад 5.32. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg7x}{e^{3x}-1}$.

Розв'язання. Скористаємося еквівалентними нескінченно малими

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg7x}{e^{3x}-1} = \left|\frac{0}{0}\right| = \begin{bmatrix} arctg7x \sim 7x \\ e^{3x}-1 \sim 3x \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0}\frac{7x}{3x} = \frac{7}{3}.$$

5.2.8 Неперервність функцій. Властивості неперервних функцій

Визначення 5.27. ***Приростом функції*** $y = f(x)$ в даній точці x_0 називається різниця

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, де Δx – ***приріст аргументу*** (рис. 5.10).

Визначення 5.28. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною у точці*** x_0, якщо ця функція визначена у деякому околі точки x_0, і якщо виконується умова: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

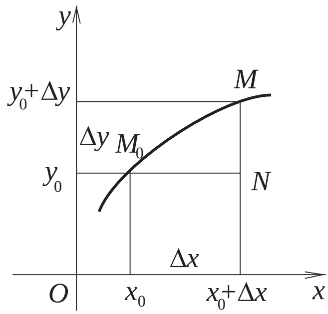


Рисунок 5.10 – Приріст функції

Приклад 5.33. Перевірити чи є функція $y = 2^x$ неперервною у будь якій точці x_0.

Розв'язання. Знайдемо приріст функції Δy:

$$\Delta y = 2^{x_0+\Delta x} - 2^{x_0} = 2^{x_0}\cdot 2^{\Delta x} - 2^{x_0} = 2^{x_0}\left(2^{\Delta x} - 1\right).$$

Отже при $\Delta x \to 0,\ 2^{\Delta x} \to 1,\ \Delta y \to 0$, тобто функція неперервна.

Скористаємося визначеннями 5.27, 5.28 і дамо ще одне визначення неперервності функції в точці. Для цього приріст функції Δy перепишемо як

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$$

$$\text{або} \quad \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0).$$

Якщо ввести позначення $x_0 + \Delta x = x$, то $x \to x_0$ (при $\Delta x \to 0$) і остаточно маємо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.15}$$

Визначення 5.29. Функція $y = f(x)$ ***неперервна в точці*** x_0, якщо вона визначена в будь-якому околі цієї точки, і якщо границя функції існує і дорівнює значенню функції при $x = x_0$ (за умовою, що незалежна змінна x прямує до x_0).

Визначення 5.30. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в інтервалі***, якщо вона неперервна у будь-якій точці інтервалу.

Для кінців інтервалу визначення неперервності в точці треба уточнити: для лівого кінця Δx треба брати додатнім, а для правого – від'ємним.

Зауваження 1. Графік неперервної функції можна нарисувати, не відриваючи олівця.

Зауваження 2. Всі основні елементарні функції неперервні в своїх областях визначення.

Однобічна неперервність

Визначення 5.31. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a;x_0]$. Кажуть, що функція $y = f(x)$ ***неперервна в точці*** $\boldsymbol{x_0}$ ***ліворуч***, якщо

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0). \tag{5.16}$$

Визначення 5.32. Нехай $y = f(x)$ визначена на інтервалі $[x_0; b)$. Кажуть, що функція $y = f(x)$ ***неперервна в точці*** $\boldsymbol{x_0}$ ***праворуч***, якщо

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \tag{5.17}$$

Якщо функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$ і точка x_0 належить цьому інтервалу, то для неперервності функції в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб функція $y = f(x)$ була неперервна ліворуч і праворуч від точки x_0:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x). \qquad (5.18)$$

Якщо умови (5.16), (5.17) не виконуються, то функція $y = f(x)$ розривна у точці x_0, а точка x_0 називається ***точкою розриву функції***.

Класифікація розривів

Визначення 5.33. Якщо функція $y = f(x)$ не визначена в точці x_0 або має стрибок скінченної величини, то кажуть, що в точці x_0 функція $y = f(x)$ має ***розрив першого роду***. Тобто, точкою розриву функції $y = f(x)$ першого роду називається така точка x_0, в якій функція має ліву та праву границю, не рівні між собою (рис. 5.11):

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x). \qquad (5.19)$$

Визначення 5.34. Якщо функція $y = f(x)$ в точці x_0 не має хоча б однієї з однобічніх границь, або вона дорівнює $\pm\infty$, то кажуть, функція $y = f(x)$ має в точці x_0 ***розрив другого роду*** (рис. 5.12).

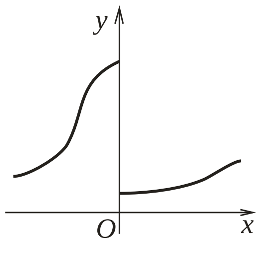


Рисунок 5.11 – Розрив першого роду

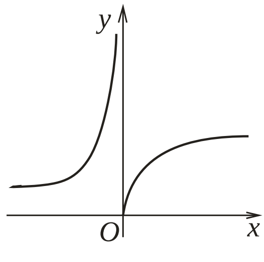


Рисунок 5.12 – Розрив другого роду

Зауваження. У випадках і розриву першого роду, і розриву другого роду, точка x_0 може належати або не належати області визначення функції.

Приклад 5.34. Перевірити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases} x+5, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ 5x-6, & x>2. \end{cases}$$

Розв'язання.

Побудуємо графік функції (рис. 5.13):

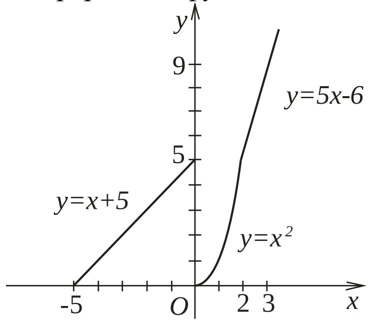


Рисунок 5.13 – Графік функції

Функція задана трьома елементарними функціями, неперервними у своїх областях визначення, тому, якщо вона і має розриви, то лише у точках $x=0$ і $x=2$. Дослідимо на неперервність функції у точках:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(x+5)=5;$$
$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} x^2=0;$$
$$\lim_{x\to 0-0} f(x)\ne\lim_{x\to 0+0} f(x);$$
$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0} x^2=4;$$
$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(5x-6)=4;$$
$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} f(x).$$

Отже, у точці $x=2$ функція неперервна, а у точці $x=0$ має розрив першого роду.

Приклад 5.35. Перевірити на неперервність функцію $f(x)=5^{\frac{7}{x-4}}$ в точці $\text{y}=4$.

Розв'язання. Обчислимо ліву та праву границю функції у точці $x=4$:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4-0} 5^{\frac{7}{x-4}}=5^{-\frac{7}{0}}=5^{-\infty}=0;$$
$$\lim_{x\to 4+0} f(x)=\lim_{x\to 4+0} 5^{\frac{7}{x-4}}=5^{\frac{7}{0}}=5^{\infty}=\infty.$$

Отже, права границя функція у точці $x = 4$ дорівнює нескінченності, а тому вона має в ній розрив другого роду.

Деякі властивості неперервних функцій

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $x \in [a; b]$, то на цьому відрізку знайдеться хоча б одна точка $x = x_1$ така, що значення функції у цій точці буде задовольняти нерівності $f(x_1) \geq f(x)$, і знайдеться хоча б одна точка $x = x_2$ така, що значення функції у цій точці буде задовольняти нерівності $f(x_2) \leq f(x)$.

Тут $f(x_1) = M$ – найбільше, а $f(x_2) = m$ – найменше значення функції $y = f(x)$ на інтервалі $[a; b]$ (рис. 5.14).

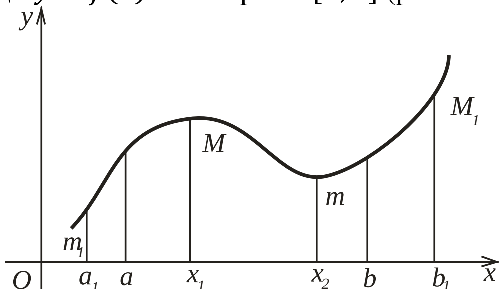


Рисунок 5.14 – Найбільше та найменше значення функції

Зауваження. Твердження теореми може бути невірним, якщо розглядати функцію $y = f(x)$ на незамкненому інтервалі $(a; b)$.

Теорема 2. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на інтервалі $x \in [a; b]$ і на кінцях інтервалу має значення різних знаків, тоді між точками a і b знайдеться хоча б одна точка $x = c$, у якій функція дорівнює нулю: $f(c) = 0$, $a < c < b$ (рис. 5.15).

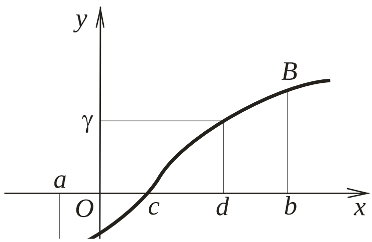


Рисунок 5.15 – Властивості неперервних функцій

Теорема 3. Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $x \in [a; b]$. Якщо на кінцях цього відрізку значення функції відрізняються $f(a) = A$ і $f(b) = B$, то яке б не було число γ, яке розташоване між числами A і B, знайдеться така точка $x = d$, яка розташована між a і b, що $f(d) = \gamma$.

На рисунку 5.15 будь-яка пряма $y = \gamma$ перетинає графік.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення сталих та змінних величин.
2. Дайте визначення області зміни змінної величини. Які типи області зміни змінної величини ви знаєте?
3. Дайте визначення функції. Що таке область визначення та область значень функції?
4. Дайте визначення складної функції. Наведіть приклади.
5. Дайте визначення оберненої функції. Наведіть приклади.
6. Які способи завдання функції ви знаєте? Назвіть переваги та недоліки кожного з способів.
7. Дайте визначення парної функції. Наведіть приклади.
8. Дайте визначення періодичної функції. Наведіть приклади.
9. Дайте визначення монотонної функції.
10. Дайте визначення границі змінної величини. Назвіть та доведіть основні властивості змінної величини.
11. Дайте визначення границі функції. Назвіть та доведіть основні властивості функції.
12. Що таке односторонні границі?
13. Дайте визначення нескінченно малих та нескінченно великих величин. Які властивості нескінченно малих та нескінченно великих величин ви знаєте.
14. Доведіть основні теореми про границю функції.
15. Що таке невизначеність? Які типи невизначеностей ви знаєте?
16. Опишіть простіші прийоми розкриття невизначеностей.

17. Назвіть «важливі» границі. Проілюструйте прикладами застосування важливих границь.

18. Як порівнювати нескінченно малі та нескінченно великі величини?

19. Сформулюйте принцип заміни нескінченно малих. Проілюструйте застосування цього принципу в обчисленні границь.

Розділ 6 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6.1 Похідна та диференціал

6.1.1 Поняття похідної як швидкості зміни функції

Нехай дано функцію $y = f(x)$. Знайдемо швидкість зміни функції на інтервалі $(x, x + \Delta x)$. Для цього по приросту аргументу Δx знайдемо приріст функції Δy і розглянемо їх відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Визначення 6.1. Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ називається середньою швидкістю $V_{сер.}$ зміни функції на інтервалі $(x, x + \Delta x)$.

Зрозуміло, що чим менший інтервал, тим краще середня швидкість характеризує зміну функцію, тому примушуємо приріст аргументу прямувати до нуля: $\Delta x \to 0$.

Визначення 6.2. Швидкістю зміни функції в даній точці x називається границя середньої швидкості зміни функції на інтервалі $(x, x + \Delta x)$ при прямуванні Δx до нуля:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} V_{сер.} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Отже, швидкість зміни функції $y = f(x)$ визначається послідовним виконанням наступних дій:

1) по приросту Δx, яке надається даному значенню незалежної змінної x, знаходиться відповідний приріст функції
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$
2) складається відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
3) знаходиться границя цього відношення (якщо вона існує) при довільному прямуванні Δx до нуля.

6.1.2 Визначення похідної

Визначення 6.3. ***Похідною*** даної функції називається границя відношення приросту функції до приросту незалежної змінної при довільному прямуванні цього приросту до нуля, якщо така границя існує:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{6.1}$$

Поняття похідної – одне з фундаментальних понять в математичному аналізі. Один з засновників аналізу І. Ньютон прийшов до поняття похідної, розв'язуючи питання про швидкість руху. $f'(x)$ – читаємо «еф штрих від ікс».

Користуючись визначенням похідної, можна сказати, що:

1) швидкість прямолінійного руху є похідна від закону руху $S = F(t)$ по часу t;
2) лінійна щільність є похідна від маси $m = \phi(s)$ по довжині s;
3) теплоємність є похідна від кількості тепла $q = \psi(\tau)$ по температурі τ;
4) швидкість хімічної реакції є похідна від кількості речовини $\gamma = F(t)$ по часу t.

6.1.3 Техніка диференціювання елементарних функцій

1. *Похідна константи*. Нехай $y = C$.
   При значенні незалежної змінної x функція дорівнює $y = C$. Новому значенню аргументу $x + \Delta x$ відповідає значення функції $y + \Delta y = C$. Але звідси $\Delta y = 0$ і $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Отже $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.
   $$\boxed{C' = 0}. \tag{6.2}$$
2. *Похідна незалежної змінної*. Нехай $y = x$,тоді $y + \Delta y = x + \Delta x$. Звідси $\Delta y = \Delta x$ і $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, тому і $y' = 1$.
   $$\boxed{x' = 1}. \tag{6.3}$$

3. *Похідна степеневої функції*. Нехай $y = x^n$.

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n = \left[x\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right]^n = x^n\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n$.

Тоді $\Delta y = x^n\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - x^n = x^n\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1\right]$.

Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1\right]}{\Delta x} = \frac{\frac{x^n}{x}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1\right]}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{n-1}\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1\right]}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Положимо $\frac{\Delta x}{x} = u$ і згадаємо «важливу границю» $\lim\limits_{u\to 0}\frac{(1+u)^a - 1}{u} = a$, маємо

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{n-1}\cdot n$$

або

$$\boxed{(x^n)' = n\cdot x^{n-1}}. \qquad (6.4)$$

6.1.4 Основні правила диференціювання

1. **Похідна суми.**

Теорема 1. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі похідних доданків.

Доведення:

Нехай $y = u + v$.

Нове значення аргументу $x + \Delta x$, при цьому набуває приросту і u, і v: $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, звідси $y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$.

Віднімаючи, знаходимо $\Delta y = \Delta u + \Delta v$.

Звідси

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Спрямуємо $\Delta x \to 0$. За визначенням похідної маємо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v'.$$

Звідси $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = u' + v'$, або

$$\boxed{(u+v)' = u' + v'} \tag{6.5}$$

Приклад 6.1. Знайти похідну функції $y = x^5 - x^3 + 6$.
Розв'язання. $y' = 5 \cdot x^{5-1} - 3 \cdot x^{3-1} + 0 = 5x^4 - 3x^2$.

2. Похідна добутку.

Теорема 2. Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу і похідної другої функції на першу.

Доведення:

Нехай $y = u \cdot v$.

$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) = u \cdot v + \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$.

Приріст функції дорівнює $\Delta y = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$.

Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

при $\Delta x \to 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v' + u' \cdot 0.$$

Отже остаточно маємо

$$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} \tag{6.6}$$

Приклад 6.2. Знайти похідну функції

$$y = (x^4 - x^2 + 7) \cdot \left(3 + \sqrt[5]{x^8}\right).$$

Розв'язання. $u = x^4 - x^2 + 7$; $\quad v = 3 + \sqrt[5]{x^8} = 3 + x^{\frac{8}{5}}$;

$u' = 4x^3 - 2x$; $\quad v' = \frac{8}{5} x^{\frac{3}{5}} = \frac{8}{5}\sqrt[5]{x^3}$.

$$y' = (4x^3 - 2x) \cdot \left(3 + \sqrt[5]{x^8}\right) + (x^4 - x^2 + 7) \cdot \frac{8}{5}\sqrt[5]{x^3}.$$

3. Винесення постійного множника за знак похідної.

Нехай $y = C \cdot u$. За теоремою 2 маємо $y' = C' \cdot u + C \cdot u'$. Так як $C' = 0$, то маємо $y' = C \cdot u'$ або

$$\boxed{(C \cdot u)' = C \cdot u'}. \tag{6.7}$$

Наслідок. Справедлива формула

$$\boxed{\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}}. \tag{6.8}$$

Доведення: Розглянемо функцію $y = \frac{u}{C}$. Винесемо константу за знак похідної: $y' = \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u' = \frac{u'}{C}$.

Приклад 6.3. Знайти похідну функції

$$y = 8x^9 - 5\sqrt{x} + 13.$$

Розв'язання:

$$y' = 8 \cdot 9x^8 - 5 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 72x^8 - \frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

4. **Похідна частки.**

Теорема 3. Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, знаменник якого дорівнює квадрату дільника, а чисельник – різниці між добутком похідної діленого на дільник і добутком діленого на похідну дільника.

Нехай $y = \frac{u}{v}$, тоді $y + \Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$.

Приріст функції дорівнює

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u+\Delta u)v - u(v+\Delta v)}{(v+\Delta v)v} = \frac{uv+\Delta uv - uv - u\Delta v}{(v+\Delta v)v} = \frac{\Delta uv - u\Delta v}{(v+\Delta v)v}.$$

Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}.$$

при $\Delta x \to 0$ (так як $\Delta v \to 0$) отримаємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Отже остаточно маємо

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}. \tag{6.9}$$

Наслідок. Справедлива формула

$$\boxed{\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C\cdot v'}{v^2}}. \quad (6.10)$$

Доведення: Розглянемо функцію $y=\frac{C}{v}$. За теоремою 3 маємо $y'=\frac{C'v-Cv'}{v^2}$. Так як $C'=0$, остаточно маємо $y'=-\frac{C\cdot v'}{v^2}$.

Приклад 6.4. Знайти похідну функції $y=\frac{x^2-4x+2}{3x^2+4}$.

Розв'язання: $u=x^2-4x+2$; $v=3x^2+4$; $u'=2x-4$; $v'=6x$.

$$y'=\frac{(2x-4)\cdot(3x^2+4)-(x^2-4x+2)\cdot 6x}{(3x^2+4)^2}=\frac{6x^3-12x^2+8x-16-6x^3+24x^2-12x}{(3x^2+4)^2}=$$

$$=\frac{12x^2-4x-16}{(3x^2+4)^2}.$$

6.1.5 Похідна складної функції

Теорема. Похідна складної функції дорівнює похідної даної функції по проміжному аргументу, помноженої на похідну цього аргументу по незалежній змінній.

Доведення:

Нехай $y=f(u),\ u=\varphi(x)$. Доведемо, що

$$y'=f'(u)\cdot u'=f'(u)\cdot\varphi'(x)=f'_u\cdot u'_x.$$

Дамо аргументу x приріст Δx; цей приріст спричиняє приріст проміжного аргументу Δu, яке зумовить зміну функції y на Δy. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Обчислимо границю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так як $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'_u$ і $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x$, то

$$\boxed{y' = f_u' \cdot u_x'} \tag{6.11}$$

Приклад 6.5. Знайти похідну функції $y = (7x^5 - 12)^6$.

Розв'язання: Тут проміжний аргумент $u = 7x^5 - 12$, $y = u^6$, отже $f_u' = 6u^5$, $u_x' = 35x^4$:

$$y' = f_u' \cdot u_x' = 6u^5 \cdot 35x^4 = 6(7x^5 - 12)^5 \cdot 35x^4.$$

Зауваження: Припустимо тепер, що функція $y = f(x)$ може бути представлена ланцюгом, що складається не з двох, а з трьох функцій:

$$y = f(u),\ \ u = \varphi(v),\ \ \ v = \psi(x).$$

Згідно з теоремою маємо $y' = f_u' \cdot u'$.
де u' - похідна від u, яка в свою чергу є функцією від незалежної змінної. За тією ж теоремою маємо $u' = \varphi_v' \cdot v' = \varphi_v' \cdot \psi_x'$.

Отже, похідна даної функції знаходиться за правилом:

$$y' = f_u' \cdot \varphi_v' \cdot \psi_x'.$$

Саме так знаходимо формулу при будь-якої кінцевої кількості проміжних аргументів. А тому можна сформулювати правило:

Похідна складної функції дорівнює добутку похідних від функцій, що її складають.

Приклад 6.6. Знайти похідну функції

$$y = \left(15 - \sqrt[3]{2x^7 - 3}\right)^{11}.$$

Розв'язання: Представимо цю функцію у вигляді ланцюжка $y = u^{11},\ \ u = 15 - \sqrt[3]{v},\ \ \ v = 2x^7 - 3$, отримаємо

$$y' = (u^{11})' \cdot \left(15 - \sqrt[3]{v}\right)' \cdot (2x^7 - 3)' = 11u^{10} \cdot \frac{1}{3} v^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 \cdot 7x^6 =$$

$$= \frac{154}{3}\left(15 - \sqrt[3]{2x^7 - 3}\right)^{10} \cdot \frac{x^6}{\sqrt[3]{(2x^7-3)^2}}.$$

6.1.6 Похідні обернених функцій

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій. Нам відома похідна $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ і вона не дорівнює нулю.

Так як $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$, то з тотожності $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ отримаємо

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

тобто

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Отже, можемо сформулювати правило:

Похідні від взаємно обернених функцій обернені за величиною:

$$\boxed{y'_x = \frac{1}{x'_y}}, \quad \boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}}. \tag{6.12}$$

Приклад 6.7. Знайти похідну функції $y = \sqrt[5]{x}$.

Розв'язання: Функція $x = y^5$ обернена задані і $x'_y = 5y^4$. Отже,

$$y'_x = \frac{1}{5y^4} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

6.1.7 Таблиця похідних

Похідні тригонометричних функцій.

1. *Похідна синуса*: $y = sinx$.

$y + \Delta y = sin(x + \Delta x)$. Знайдемо приріст функції

$$\Delta y = sin(x + \Delta x) - sinx = 2sin\frac{\Delta x}{2} cos\frac{2x + \Delta x}{2}.$$

Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

Скористаємося першою чудовою границею $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$

Остаточно маємо $y' = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right] = cosx.$

$$\boxed{(sinx)' = cosx} \qquad (6.13)$$

2. *Похідна косинуса*: $y = cosx$_.

$y + \Delta y = cos(x + \Delta x)$. Знайдемо приріст функції

$$\Delta y = cos(x+\Delta x) - cosx = -2sin\frac{\Delta x}{2}sin\frac{2x+\Delta x}{2}.$$

Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$.

Скористаємося першою чудовою границею $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$

Остаточно маємо $y' = \lim\limits_{x\to 0}\left[-\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right] = -sinx.$

$$\boxed{(cosx)' = -sinx}. \qquad (6.14)$$

3. *Похідна тангенса*. Нехай $y = tgx$.

Скористаємося формулою похідної частки:

$$y' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)'\cdot cosx - sinx\cdot(cosx)'}{(cosx)^2} = \frac{cosx\cdot cosx + sinx\cdot sinx}{(cosx)^2} = \frac{1}{(cosx)^2}.$$

Отже, маємо

$$\boxed{(tgx)' = \frac{1}{(cosx)^2}} \qquad (6.15)$$

4. *Похідна котангенса*. $y = ctgx$.

Скористаємося формулою похідної частки

$$y' = \left(\frac{cosx}{sinx}\right)' = \frac{(cosx)'\cdot sinx - cosx\cdot(sinx)'}{(sinx)^2} = \frac{-sinx\cdot sinx - cosx\cdot cosx}{(sinx)^2} =$$
$$= -\frac{1}{(sinx)^2}.$$

Отже, маємо

$$\boxed{(ctgx)' = -\frac{1}{(sinx)^2}} \qquad (6.16)$$

Похідна показникової функції. $y = a^x$.

$y + \Delta y = a^{x+\Delta x} = a^x \cdot a^{\Delta x}$. Приріст функції дорівнює

$$\Delta y = a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right).$$

Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$.

Спрямуємо $\Delta x \to 0$ і згадаємо «важливу границю» $\lim\limits_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u} = lna$, отримаємо

$$y' = a^x \cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \cdot lna.$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot lna}. \qquad (6.17)$$

Якщо $a = e,\ lne = 1$, то

$$\boxed{(e^x)' = e^x}. \qquad (6.18)$$

Похідна логарифмічної функції.

1) $y = lnx$.

$y + \Delta y = ln(x + \Delta x)$. Приріст функції дорівнює

$$\Delta y = ln(x + \Delta x) - lnx = ln\frac{x+\Delta x}{x} = ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$.

Спрямуємо $\Delta x \to 0$ і згадаємо «важливу границю» $\lim\limits_{z\to 0}\frac{ln(1+z)}{z} = 1$, отримаємо

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\right] = \frac{1}{x}.$$

$$\boxed{(lnx)' = \frac{1}{x}}. \qquad (6.19)$$

2) $y = \log_a x$.

Тоді за визначенням логарифму $a^y = x$. Логарифмуємо цю тотожність за основою e:

$$lna^y = lnx; \quad y \cdot lna = lnx; \quad y = \frac{1}{lna} \cdot lnx.$$

Отже, $y' = \frac{1}{lna} \cdot (lnx)' = \frac{1}{x \cdot lna}$.

Остаточно маємо

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna}}. \tag{6.20}$$

Похідні обернених тригонометричних функцій:

1. *Похідна арксинуса:* $y = arcsinx$.

Функція обернена до арксинуса $x = siny$, її похідна $x'_y = cosy$.

За формулою (6.12) маємо $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{cosy}$.

Відомо, що $cosy = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

Корінь беремо арифметичний, тому що значення функції $y = arcsinx$ лежить в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а косинус в цьому інтервалі додатний. Остаточно маємо

$$\boxed{(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}. \tag{6.21}$$

2. *Похідна арккосинуса:* $y = arccosx$.

Аналогічно отримуємо

$$\boxed{(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}. \tag{6.22}$$

3. *Похідна арктангенса*: $y = arctgx$.

Функція обернена до арктангенса $x = tgy$, її похідна $x'_y = \frac{1}{cos^2 y}$.

За формулою (6.12) маємо

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

звідси

$$\boxed{(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}}. \qquad (6.23)$$

4. *Похідна арккотангенса*: $y = arcctgx$.

Аналогічно отримуємо

$$\boxed{(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}}. \qquad (6.24)$$

Похідні гіперболічних функцій:

1. *Похідна гіперболічного синуса:* $y = \operatorname{sh} x$.

Згідно з визначенням $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Продиференцюємо $\operatorname{sh} x$:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - (-e^{-x})\right) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x\ ,$$

Отже остаточно маємо

$$\boxed{(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x} \qquad (6.25)$$

2. *Похідна гіперболічного косинуса:* $y = \operatorname{ch} x$.

Аналогічно отримуємо

$$\boxed{(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x} \qquad (6.26)$$

3. *Похідна гіперболічного тангенса:* $y = \operatorname{th} x$.

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{ch} x)'}{(\operatorname{ch} x)^2} = \frac{(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2}{(\operatorname{ch} x)^2}.$$

Відомо, що $(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 = 1$, отже, остаточно маємо

$$\boxed{(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}} \qquad (6.27)$$

4. *Похідна гіперболічного котангенса:* $y = \operatorname{cth} x$.

Аналогічно отримуємо

$$\boxed{(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{(\operatorname{sh} x)^2}} \qquad (6.28)$$

Зведемо отримані формули у таблицю 6.1. Організуємо нашу таблицю наступним чином: ліворуч розташуємо формули для обчислення похідних простих функцій, а праворуч – складних. Незважаючи та те, що ці формули начебто дублюють один одного, але, на наш погляд, таке подання формул полегшує знаходження похідних, і ми спробуємо в цьому переконати на прикладах, які розглянемо після запису таблиці.

Таблиця 6.1 – Таблиця похідних

$y = f(x)$	$y = f\big(u(x)\big)$
$C' = 0$	
$x' = 1$	
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \cdot lna$	$(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot lna}$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot lna} \cdot u'$
$(lnx)' = \dfrac{1}{x}$	$(lnu)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
$(sinx)' = cosx$	$(sinu)' = cosu \cdot u'$
$(cosx)' = -sinx$	$(cosu)' = -sinu \cdot u'$
$(tgx)' = \dfrac{1}{cos^2x}$	$(tgu)' = \dfrac{1}{cos^2u} \cdot u'$

$(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$
$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(arcsinu)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(arccosu)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$	$(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$
$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$	$(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$
$(\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{(\mathrm{ch}\, x)^2}$	$(\mathrm{th}\, u)' = \frac{1}{(\mathrm{ch}\, u)^2} \cdot u'$
$(\mathrm{cth}\, x)' = -\frac{1}{(\mathrm{sh}\, x)^2}$	$(\mathrm{cth}\, u)' = -\frac{1}{(\mathrm{sh}\, u)^2} \cdot u'$

Приклад 6.8. Знайти похідну функції

$$y = 7x^5 - 15\log_3 x - 4 \cdot 2^x + 3arctgx - 11.$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді алгебраїчної суми, тому кожний з доданків будемо диференціювати окремо, пам'ятаємо, що сталий множник можна виносити за знак похідної. Кожний з доданків – проста функція, тому скориставшись таблицею похідних, маємо:

$$y' = 7(x^5)' - 15(\log_3 x)' - 4 \cdot (2^x)' + 3(arctgx)' - (11)' =$$
$$= 7 \cdot 5x^4 - 15 \cdot \frac{1}{xln3} - 4 \cdot 2^x \cdot ln2 + 3 \cdot \frac{1}{1+x^2} - 0 =$$
$$= 35x^4 - \frac{15}{xln3} - 4 \cdot 2^x ln2 + \frac{3}{1+x^2}.$$

Приклад 6.9. Знайти похідну функції

$$y = (7arcsinx - 15) \cdot (2lnx + 3x^2).$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою (6.6). Для цього розіб'ємо функцію на

$$u = 7arcsinx - 15 \quad \text{і} \quad v = 2lnx + 3x^2.$$

Знайдемо u' і v':

$$u' = \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}; \quad v' = \frac{2}{x} + 6x.$$

За формулою (6.6) маємо:

$$y' = \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (2lnx + 3x^2) + (7arcsinx - 15) \cdot \left(\frac{2}{x} + 6x\right).$$

Приклад 6.10. Знайти похідну функції $y = \frac{2e^x - cosx}{5tgx+8}$.

Розв'язання. Функція представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (6.9). Для цього розіб'ємо функцію на

$$u = 2e^x - cosx \quad \text{і} \quad v = 5tgx + 8.$$

Знайдемо u' і v':

$$u' = 2e^x + sinx; \quad v' = \frac{5}{cos^2x}.$$

За формулою (6.9) маємо:

$$y' = \frac{(2e^x+sinx)\cdot(5tgx+8) - (2e^x - cosx)\cdot\frac{5}{cos^2x}}{(5tgx+8)^2} =$$

$$= \frac{(2e^x+sinx)\cdot(5tgx+8)\cdot cos^2x - 5(2e^x - cosx)}{(5tgx+8)^2\cdot cos^2x}.$$

Приклад 6.11. Знайти похідну функції

$$y = ln\, arctg\left(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}\right).$$

Розв'язання. Функція, похідну якої нам запропонували знайти, складна. Тут є і степенева, і показникова, і логарифмічна, і обернена тригонометрична функції. З якої функції почати диференціювання? Ланцюжок складної функції, який ми можемо скласти, дуже великий. Тому радимо скористатися наступним прийомом: будемо аналізувати кожного разу послідовність, в якої утворювалася надана функція; диференціювати ми завжди будемо в зворотному порядку. Тут можна провести аналогію з процесом одягання – роздягання: ми завжди одягаємося в одному порядку, а роздягаємося в зворотному.

З'ясуємо порядок дій, за якими складено функцію:

- Помножили x на 3;
- аргумент $3x$ возведено до експоненти;
- з одиниці відняли отриману функцію;
- взяли корінь квадратний з цього виразу;
- додали одиницю;
- обчислили арктангенс;
- взяли логарифм отриманого виразу.

Отже, «утворення» функції ми закінчили логарифмом, тому й диференціювати почнемо з логарифму.

Скористаємося формулою $(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$. Де за u приймемо: $u = arctg\left(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}\right)$.

$$y' = \frac{1}{arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)} \cdot \left(arctg\left(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}\right)\right)'.$$

Читаємо наш список в зворотному порядку. Тепер будемо диференціювати арктангенс, а за u приймемо

$$u = 1 + \sqrt{1 - e^{3x}}:$$

$$y' = \frac{1}{arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)} \cdot \frac{1}{1+\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)^2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}\right)'.$$

Продовжуємо диференціювання. Похідна від сталої дорівнює нулю, а корінь квадратний продиференцюємо за формулою $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, де $u = 1 - e^{3x}$.

$$y' = \frac{1}{arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)} \cdot \frac{1}{1+\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{3x}}} \cdot (1 - e^{3x})'.$$

Тепер похідна від експоненти:

$$y' = \frac{1}{arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)} \cdot \frac{1}{1+\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-e^{3x}}} \cdot (-e^{3x}) \cdot (3x)'.$$

Остаточно маємо:

$$y' = -\frac{3e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{3x}}arctg\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)\left(1+\left(1+\sqrt{1-e^{3x}}\right)^2\right)}.$$

Кожного разу при диференціюванні складних функцій ми будемо діяти аналогічно.

Приклад 6.12. Знайти похідну функції

$$y = sin^4 5x \cdot \log_7(tg3x + 18).$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою (6.6):

$$u = sin^4 5x; \quad v = \log_7(tg3x + 18).$$

$$u' = 4sin^3 5x \cdot (sin5x)' = 4sin^3 5x \cdot cos5x \cdot (5x)' =$$

$$= 20sin^3 5xcos5x;$$

$$v' = \frac{1}{(tg3x+18)ln7} \cdot (tg3x + 18)' = \frac{1}{(tg3x+18)ln7} \cdot \frac{1}{cos^2 3x} \cdot (3x)' =$$

$$= \frac{3}{cos^2 3x(tg3x+18)ln7}.$$

Остаточно маємо:

$$y' = 20sin^3 5xcos5x \cdot \log_7(tg3x + 18) + \frac{3sin^4 5x}{cos^2 3x(tg3x+18)ln7}.$$

Приклад 6.13. Знайти похідну функції $y = \frac{5^{arcctg8x^3}}{ln^2(cos9x)}$.

Розв'язання. Функція представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (6.9):

$$u = 5^{arcctg8x^3}; \quad v = ln^2(cos9x).$$

$$u' = 5^{arcctg8x^3} \cdot ln5 \cdot (arcctg8x^3)' =$$

$$= 5^{arcctg8x^3} \cdot ln5 \cdot \left(-\frac{1}{1+(8x^3)^2}\right) \cdot (8x^3)' = -\frac{5^{arcctg8x^3} \cdot ln5 \cdot 24x^2}{1+64x^6}.$$

$$v' = 2ln(cos9x) \cdot \big(ln(cos9x)\big)' = 2ln(cos9x) \cdot \frac{1}{cos9x} \cdot (cos9x)' =$$

$$= 2ln(cos9x) \cdot \frac{1}{cos9x} \cdot (-sin9x) \cdot (9x)' = -18ln(cos9x) \cdot tg9x.$$

Остаточно маємо:

$$y' = \frac{-\frac{5^{arcctg8x^3} \cdot ln5 \cdot 24x^2}{1+64x^6} \cdot ln^2(cos9x) - 5^{arcctg8x^3} \cdot (-18ln(cos9x) \cdot tg9x)}{\left(ln^2(cos9x)\right)^2} =$$

$$= \frac{6 \cdot 5^{arcctg8x^3} \cdot ln(cos9x)\left(3tg9x \cdot (1+64x^6) - 4x^2 ln5 \cdot ln(cos9x)\right)}{(1+64x^6)ln^4(cos9x)} =$$

$$= \frac{6 \cdot 5^{arcctg8x^3}\left(3tg9x \cdot (1+64x^6) - 4x^2 ln5 \cdot ln(cos9x)\right)}{(1+64x^6)ln^3(cos9x)}.$$

6.1.8 Логарифмічне диференціювання

Розглянемо функцію виду

$$y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)},$$

де і основа, і показник степені є функціями незалежної змінної. Така функція має назву ***степенево-показникової функції***. Диференціювати її за формулами для степеневої, або показникової функції неможливо. Тому скористаємося наступним алгоритмом:

- логарифмуємо цю функцію за основою e:

$$\ln y = \ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)};$$

- за властивістю логарифмів і перепишемо показник степені підлогарифмичного виразу як коефіцієнт перед логарифмом:

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln\left(f(x)\right);$$

- продиференцюємо розташовану праворуч частину отриманої функції за формулою похідної від добутку (або похідної частки), а ліворуч – за формулою складної функції:

$$\frac{y'}{y} = \varphi'^{(x)} \cdot \ln\left(f(x)\right) + \varphi(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)};$$

- виразимо шукану похідну:

$$y' = y \cdot \left[\varphi'^{(x)} \cdot \ln\bigl(f(x)\bigr) + \varphi(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right],$$

або

$$\boxed{y' = \bigl(f(x)\bigr)^{\varphi(x)} \cdot \left[\varphi'^{(x)} \cdot \ln\bigl(f(x)\bigr) + \varphi(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right]}. \quad (6.29)$$

Подане має назву ***логарифмічного диференціювання***, а отримана похідна називається ***логарифмічною похідною***.

Зауваження 1. Немає необхідності запам'ятовувати цю формулу. Значно простіше при диференціюванні степенево-показникових функцій на кожному прикладі застосовувати запропонований алгоритм.

Приклад 6.14. Знайти похідну функції $y = (cos5x)^{\sqrt{x+3}}$.

Розв'язання. Скористаємося методом логарифмічного диференціювання:

$$\ln y = \ln(cos5x)^{\sqrt{x+3}};$$
$$\ln y = \sqrt{x+3} \cdot \ln(cos5x) \quad ;$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x+3}} \cdot \ln(cos5x) + \sqrt{x+3} \cdot \frac{1}{cos5x} \cdot (-\sin5x) \cdot 5;$$
$$y' = (cos5x)^{\sqrt{x+3}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x+3}} \cdot \ln(cos5x) - 5\sqrt{x+3} \cdot \mathrm{tg}5x\right].$$

Зауваження 2. Метод логарифмічного диференціювання застосовують не лише при диференціюванні показниково-степеневих функцій, а й при диференціюванні похідної від добутку або частки в тому випадку, якщо множників більше двох. Застосування цього метода дозволяє швидше та без зайвих обчислень отримати результат. Доведемо це на прикладі.

Приклад 6.15. Знайти похідну функції

$$y = 7^{\log_3(2x+3)} \cdot arcctg^4 5x \cdot \sqrt[5]{x^3 - 4x}.$$

Розв'язання. Дана функція має вигляд добутку трьох множників. Якщо спробувати скористатися формулою похідна від добутку, ми будемо змушені застосовувати цю формулою двічі, групуючи множники, та уважно підставляючи формулу до формули. А якщо множників 4, 5, 6…? Збільшення кількості множників суттєво ускладнює обчислення. Застосування ж методу логарифмічного диференціювання цієї проблеми уникає.

Логарифмуємо дану функцію:

$$\ln y = \ln\left(7^{\log_3(2x+3)} \cdot arcctg^4 5x \cdot \sqrt[5]{x^3 - 4x}\right).$$

Згадаємо ще одну властивість логарифмів: «логарифм від добутку дорівнює сумі логарифмів множників»:

$$\ln y = \ln 7^{\log_3(2x+3)} + \ln arcctg^4 5x + \ln \sqrt[5]{x^3 - 4x}.$$

Запишемо показники степенів підлогарифмічних функцій як коефіцієнти перед логарифмами:

$$\ln y = \log_3(2x+3) \cdot \ln 7 + 4 \cdot \ln arcctg 5x + \frac{1}{5} \cdot \ln(x^3 - 4x).$$

Продиференцюємо отриману функцію:

$$\frac{y\prime}{y} = \frac{2}{(2x+3)\ln 3} \cdot \ln 7 + 4 \cdot \left(-\frac{5}{1+25x^2}\right) + \frac{1}{5} \cdot \frac{3x^2-4}{x^3-4x}.$$

Остаточно маємо:

$$y' = 7^{\log_3(2x+3)} \cdot arcctg^4 5x \cdot \sqrt[5]{x^3 - 4x} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{2\ln 7}{(2x+3)\ln 3} - \frac{20}{1+25x^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3x^2-4}{x^3-4x}\right].$$

Як бачимо, збільшення кількості множників приводить до збільшення доданків. Тому при диференціюванні таких функцій будемо давати перевагу методу логарифмічного диференціювання.

6.1.9 Диференціювання неявної функції

Визначення неявної форми завдання функції було надано у розділі 5.1.3.

Диференціювання функції, яка задана деяким рівнянням $F(x, y) = 0$, де незалежна змінна x зв'язана з функцією y, що не розв'язується відносно y, зводиться до наступного:

- диференціюємо обидві частини рівняння за допомогою таблиці похідних та за правилами диференціювання, пам'ятаючи, що y є функція незалежної змінної x (тобто складна функція);
- розв'язуємо отримане рівняння відносно шуканої похідної y'.

Проілюструємо наведений алгоритм на прикладі.

Приклад 6.16. Знайти похідну функції

$$5x^3y - cos2x = 4y^2.$$

Розв'язання. Диференцюємо по x і пам'ятаємо, що y є функцією x:

$$15x^2 \cdot y + 5x^3 \cdot y' + 2sin2x = 8y \cdot y'.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно y'. Для цього згрупуємо доданки з похідною у один бік рівняння, без похідної - в інший

$$8y \cdot y' - 5x^3 \cdot y' = 15x^2 \cdot y + 2sin2x.$$

Винесемо y' за дужки і знайдемо шукану похідну:

$$y'(8y - 5x^3) = 15x^2 \cdot y + 2sin2x;$$

$$y' = \frac{15x^2y + 2sin2x}{8y - 5x^3}.$$

Отже, будь-яку неявну функцію можна диференціювати за приведеними правилами. Похідна такої функції виражається через незалежну змінну і саму функцію.

6.1.10 Диференціювання функцій, заданих параметрично

Визначення параметричної форми завдання функції також було надано у розділі 5.1.3. Отже нехай задано функцію

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

де t – параметр, а $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні і диференційовані функції аргументу t у деякому інтервалі $t \in (a, b)$.

Нехай в деякій точці $t_0 \in (a, b)$ існує похідна, яка не дорівнює нулю $x'_t = \varphi'_t(t_0) \neq 0$. Нехай для визначеності ця похідна в точці додатна, тоді додатною вона буде і в деякому околі точки t_0. З цього прямує, що функція $\varphi(t)$ монотонно зростаюча, а тому має обернену $t = t(x)$. Похідна оберненої функції (за формулою 6.12) дорівнює

$$x'_t = \frac{1}{t'_x}.$$

Виконаємо операцію виключення параметра, тобто підставимо $t = t(x)$ у вираз для $\psi(t)$, маємо:

$$y = \psi\big(t(x)\big) = \psi(x).$$

Знаходимо її похідну як похідну складної функції (6.11):

$$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x.$$

Підставимо похідну оберненої функції

$$y'_x = \psi'_t \cdot \frac{1}{\varphi'_t} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}.$$

Остаточно маємо

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}. \tag{6.30}$$

Приклад 6.17. Знайти похідну функції $\begin{cases} x = \ln(t^2+1) \\ y = arcctgt \end{cases}$.

Розв'язання: Обчислимо похідні функцій x і y за змінною t:

$$x'_t = \frac{2t}{t^2+1}; \quad y'_t = -\frac{1}{1+t^2}.$$

Підставимо отримані вирази у формулу (6.30), спростимо результат:

$$y'_x = \frac{\frac{2t}{t^2+1}}{-\frac{1}{1+t^2}} = -2t.$$

6.1.11 Похідні вищих порядків

1. *Функція задана явно $\boldsymbol{y = f(x)}$.*

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ в деякому інтервалі незалежної змінної x. Похідна від отриманої функції (якщо вона існує) називається похідною другого порядку або другою похідною від функції і позначається $f''(x)$.

За визначенням похідної

$$f''(x) = [f'(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Отже, якщо існує ця границя, то існує і друга похідна функції $y = f(x)$.

Саме так визначається і похідна третього порядку (як похідна від другої похідної) і так далі. Тому можемо дати визначення.

Визначення 6.4. ***Похідною n-го порядку*** $\boldsymbol{f^{(n)}(x)}$ називається похідна від похідної $(n-1)$–го порядку

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}. \quad (6.31)$$

Похідні вищих порядків мають велике прикладне значення для визначення фундаментальних понять математики, фізики та ін. Так, наприклад, згадаємо, що поняття похідної ми вводили розв'язуючи задачу про швидкість руху матеріальної точки. Похідна ж другого порядку характеризує швидкість зміни швидкості, або прискорення функції. Зауважимо, що надалі ми ще скористаємося похідними вищих порядків для дослідження функцій.

Приклад 6.18. Знайти третю похідну функції $y = x^3 arctgx$ і обчислити її значення у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Згідно з визначенням, нам необхідно поступово знайти похідні першого, другого (як похідну від першої похідної) і третього (як похідну від другої похідної) порядку:

$$y' = 3x^2 \cdot arctgx + x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} = 3x^2 \cdot arctgx + \frac{x^3}{1+x^2};$$

$$y'' = (y')' = 6x \cdot arctgx + 3x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= 6x \cdot arctgx + \frac{3x^2}{1+x^2} + \frac{3x^2+3x^4-2x^4}{(1+x^2)^2} =$$

$$= 6x \cdot arctgx + \frac{3x^2+3x^4+3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} = 6x \cdot arctgx + \frac{4x^4+6x^2}{(1+x^2)^2};$$

$$y''' = (y'')' = 6 \cdot arctgx + 6x \cdot \frac{1}{1+x^2} +$$

$$+ \frac{(16x^3+12x)(1+x^2)^2 - (4x^4+6x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= 6 \cdot arctgx + \frac{6x}{1+x^2} + \frac{4x(1+x^2)[(4x^2+3)(1+x^2) - (4x^4+6x^2)]}{(1+x^2)^4} =$$

$$= 6arctgx + \frac{6x}{1+x^2} + \frac{4x(4x^2+3+4x^4+3x^2-4x^4-6x^2)}{(1+x^2)^3} =$$

$$= 6arctgx + \frac{6x(1+x^2)^2+4x(x^2+3)}{(1+x^2)^3} =$$

$$= 6arctgx + \frac{2x(3x^4+8x^2+9)}{(1+x^2)^3}.$$

Обчислимо значення отриманої функції у точці x_0:

$$y'''(x_0) = y'''(0) = 0.$$

2. ***Функція задана неявно*** $\boldsymbol{F(x,y) = 0}$.

При знаходженні похідних вищих порядків неявно заданої функції застосуємо той самий алгоритм, що і для знаходження похідної першого порядку неявно заданої функції. Згідно з визначенням похідних вищих порядків для знаходження n-ої похідної цю процедуру треба буде виконати n раз. При цьому при знаходженні наступної похідної, в отриманий вираз можна підставити знайдене значення попередньої похідної. Проілюструємо цей алгоритм на прикладі.

Приклад 6.19. Знайти похідну другого порядку функції

$$x^2 + 2xy^3 = cos4y.$$

Розв'язання. Знайдемо похідну першого порядку:

$$2x + 2y^3 + 6xy^2y' = -4siny \cdot y';$$

$$y'(6xy^2 + 4siny) = -(2x + 2y^3);$$

$$y' = -\frac{x+y^3}{3xy^2+2siny}.$$

Диференцюємо отриманий вираз ще раз, пам'ятаючи, що y є функція x:

$$y'' = -\frac{(1+3y^2y')(3xy^2+2siny)-(x+y^3)(3y^2+6xyy'+2cosy\cdot y')}{(3xy^2+2siny)^2} =$$

$$= -\frac{3xy^2+2siny-3xy^2-3y^5+y'(9xy^4+6y^2siny-6x^2y-6xy^4-2xcosy-2y^3cosy)}{(3xy^2+2siny)^2} =$$

$$= -\frac{2siny-3y^5+y'(3xy^4+6y^2siny-6x^2y-2xcosy-2y^3cosy)}{(3xy^2+2siny)^2}.$$

Підставимо в отриманий вираз знайдену раніше першу похідну заданої функції:

$$y'' = -\frac{2siny-3y^5-\frac{x+y^3}{3xy^2+2siny}(3xy^4+6y^2siny-6x^2y-2xcosy-2y^3cosy)}{(3xy^2+2siny)^2} =$$

$$= \frac{9x^2y^7+6y^2siny+3x^3y^7+6y^5-4sin^2y-3x^2y^4-6x^3y-2x^2cosy-4xy^3cosy-2y^6cosy}{(3xy^2+2siny)^3}.$$

3. ***Функція задана параметрично*** $\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t)} \\ \boldsymbol{y = y(t)} \end{cases}$.

Обчислити похідні вищих порядків для функції заданої параметрично складніше. Тому ми обмежимося знаходженням формули для обчислення другої похідної, при цьому зауважимо, що запропонований алгоритм можна використовувати для знаходження будь-якої похідної вищого порядку.

Для знаходження другої похідної від функції, що задана параметрично, диференцюємо вираз для першої похідної (6.30) як складну функцію незалежної змінної. Нехай $x = \varphi(t)$, $y = y(x) = y(\varphi(t)) = y(t)$. Маємо

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Диференцюємо цей вираз:

$$y'' = \frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{y''_{tt}x'_t-y'_tx''_{tt}}{\left(x'_t\right)^2}\frac{dt}{dx}.$$

Згадаємо, що $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{x'_t}$. Підставимо в y'' і отримаємо остаточний вираз для другої похідної:

$$\boxed{y'' = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}}. \qquad (6.32)$$

Приклад 6.20. Знайти похідну другого порядку функції

$$\begin{cases} x = arcsint \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємося формулою (6.32), для цього обчислимо перші і другі похідні x і y по t:

$$x'_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}};$$

$$x''_{tt} = -\frac{1}{2}\frac{(-2t)}{\sqrt{(1-t^2)^3}} = \frac{t}{\sqrt{(1-t^2)^3}};$$

$$y'_t = \frac{1}{2}\frac{(-2t)}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}};$$

$$y''_{tt} = -\frac{\sqrt{1-t^2} - t\cdot\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{1-t^2} = -\frac{1-t^2+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)^3}}.$$

Підставимо у формулу (6.32) отримані вирази, маємо:

$$y''_{xx} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)\cdot\frac{t}{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)^3} = \frac{\frac{-1+t^2}{\left(1-t^2\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}}} = -\sqrt{1-t^2}.$$

6.1.12 Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна и диференційована при певних значеннях незалежного аргументу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

З цього прямує, що відношення приросту функції до приросту аргументу можна представити у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon.$$

де ε - нескінченно мала при $\Delta x \to 0$. Звідси знаходимо

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x.$$

Отже, бачимо, що нескінченно малий приріст функції Δy може бути представлений у вигляді двох доданків: величини, яка пропорційна нескінченно малому приросту незалежної змінної Δx та нескінченно малої, більш високого порядку у порівнянні з Δx.

Визначення 6.5. Головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту незалежної змінної, називається ***диференціалом функції***:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Приріст Δx незалежної змінної називається її ***диференціалом*** dx:

$$\Delta x = dx.$$

Отже, остаточно маємо:

Диференціал функції дорівнює її похідної, помноженої на диференціал незалежної змінної:

$$\boxed{dy = f'(x)dx}. \tag{6.33}$$

Бачимо, що якщо відома похідна, легко знайти диференціал, та навпаки, якщо відомий диференціал, відразу знаходимо похідну. Тому дії знаходження похідної та диференціала мають спільну назву – ***диференціювання***.

6.1.13 Властивості диференціала

Диференціали основних елементарних функцій

За визначенням диференціала, диференціал функції дорівнює похідної, помноженої на диференціал незалежної змінної. Нам відомі похідні основних елементарних функцій,отже, щоб знайти їх диференціали, необхідно відомі похідні помножити на диференціал незалежної змінної:

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx; \qquad d(a^x) = a^x lna\, dx;$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x\, lna}dx; \qquad d(sinx) = cosx\, dx\ldots$$

Правила обчислення диференціалів

За відомими правилами обчислення похідних, знайдемо правила знаходження диференціалів:

а) ***диференціал алгебраїчної суми двох функцій***.

Згадаємо похідну суми: $(u \pm v)' = u' \pm v'$. Помножимо обидві частини рівності на dx. Оскільки $du = u'dx,\ dv = v'dx$, маємо формулу для обчислення диференціалу алгебраїчної суми:

$$d(u \pm v) = du \pm dv.$$

б) ***диференціал добутку двох функцій***.

Згадаємо похідну добутку: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Помножимо обидві частини рівності на dx. Оскільки $du = u'dx,$ $dv = v'dx$, маємо формулу для обчислення диференціалу добутку:

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv.$$

в) ***диференціал частки двох функцій***.

Згадаємо похідну частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv\prime}{v^2}$. Домножимо обидві частини рівності на dx. Оскільки $du = u'dx,\ dv = v'dx$, маємо формулу для обчислення диференціалу частки:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Диференціал складної функції. Інваріантність диференціала

Нехай дано функції $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – неперервні і диференційовані функції своїх аргументів. Похідна функції y за змінною x знаходиться за формулою (6.11) для обчислення похідної складної функції:

$$y' = f'_u \cdot u'_x.$$

Помножимо обидві частини рівності на dx,отримаємо

$$dy = f'_u \cdot u'_x dx.$$

Згадаємо, що $du = u'_x dx$,звідси маємо

$$dy = f'_u \cdot du. \tag{6.34}$$

Тобто бачимо, що диференціал функції $y = f(u)$ має такий же самий вигляд, якщо б u була незалежною змінною функції y.

Ця властивість має назву ***інваріантності форми диференціала від аргументу функції***.

Диференціал функції $y = f(u)$ має незмінний вигляд в незалежності від того, чи є її аргумент u незалежною змінною або функцією незалежної змінної.

Приклад 6.21. Знайти диференціал функції

$$y = 7x^5 - 2ln(tgx) + 2^{cosx} \cdot arcsin5x.$$

Розв'язання.

$$dy = 7d(x^5) - 2d\big(ln(tgx)\big) + arcsin5x \cdot d(2^{cosx}) +$$
$$+2^{cosx} \cdot d(arcsin5x) = 35x^4dx - 2 \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{cos^2x}dx +$$
$$+ arcsin5x \cdot 2^{cosx} \cdot ln2 \cdot (-sinx)dx + 2^{cosx} \cdot \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}dx =$$
$$= \left(35x^4 - \frac{4}{sin2x} - arcsin5x \cdot 2^{cosx} \cdot ln2 \cdot sinx + \frac{5 \cdot 2^{cosx}}{\sqrt{1-25x^2}}\right)dx.$$

6.1.14 Застосування диференціалу у наближених обчисленнях

Згадаємо, що приріст функції визначається за формулою

$$\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o).$$

Явний вираз приросту функції може бути виражений через приріст аргументу досить складною формулою. Спробуємо замінити приріст функції його диференціалом:

$$\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) \approx f'(x_o)dx = dy$$

похибка цієї заміни мала (див. п. 6.1.12).

Отже, якщо відомі значення $f(x_o)$, $f'(x_o)$, dx, то наближене значення $f(x_o + dx)$ знайдемо за формулою:

$$\boxed{f(x_o + dx) \approx f(x_o) + f'(x_o)dx} \qquad (6.35)$$

Приклад 6.22. Знайти наближене значення функції
$y = x^5 - 2x^4 + 7x^2 + 15$, коли $x = 1{,}003$.

Розв'язання. Приймаємо $x_0 = 1$, $dx = 0{,}003$. Обчислимо значення функції у точці $x_0 = 1$:

$$f(x_0) = f(1) = 1 - 2 + 7 + 15 = 21.$$

Знайдемо похідну функції

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 14x.$$

Обчислимо її значення у точці $x_0 = 1$:

$$f'(x_0) = f'(1) = 5 - 8 + 14 = 11.$$

Скористаємося формулою (6.35), остаточно маємо:

$$f(1{,}003) \approx f(1 + 0{,}003) = 21 + 11 \cdot 0{,}003 = 21{,}033.$$

Приклад 6.23. Знайти наближене значення функції

$$y = arccos0{,}4991.$$

Розв'язання. Приймаємо $y = arccosx$, $x_0 = 0{,}5$ $dx = -0{,}0009$. Обчислимо значення функції у точці $x_0 = 0{,}5$:

$$f(x_0) = f(0{,}5) = arccos0{,}5 = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}0472.$$

Знайдемо похідну функції

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

та обчислимо її значення у точці

$$f'(x_0) = f'(0{,}5) = -\frac{1}{\sqrt{1-0{,}25}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \approx -1{,}1547.$$

Скористаємося формулою (6.35), остаточно маємо:
$arccos0{,}4991 \approx f(0{,}5 - 0{,}0009) =$
$= 1{,}0472 + (-1{,}1547) \cdot (-0{,}0009) = 1{,}0482.$

6.1.15 Геометричний зміст похідної і диференціалу

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і неперервна в точці x_0. Нехай відомі точки $M_0(x_0, y_0)$, $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, та відомо, що $x_0 + \Delta x \in (a, b)$.

Проведемо січну M_0M (рис. 6.1). Вона визначається рівнянням

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

кутовий коефіцієнт якої дорівнює

$$k = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

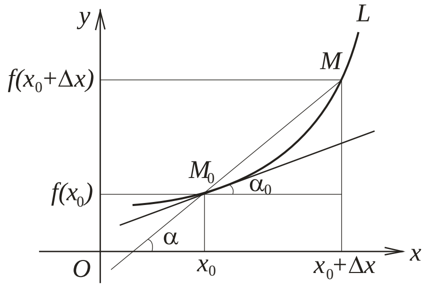


Рисунок 6.1 – Геометричний зміст похідної

Покажемо, що при $\Delta x \to 0$ відстань $|M_0M|$ між точками M_0 і M прямує до нуля. Дійсно, з неперервності функції $y = f(x)$ при $x = x_0$ маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Тобто, при $\Delta x \to 0$

$$|M_0M| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0.$$

Отже, якщо існує кінцева границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k_д$, то пряма лінія, рівняння якої ми отримуємо з рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ при $\Delta x \to 0$ (рис. 6.1) називається ***дотичною*** до графіку функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Бачимо, що дотичною до графіку функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається граничне положення січної, якщо точка M прямує до точки M_0.

З розв'язання цієї задачі прямує геометричний зміст похідної, а саме:

Визначення 6.6. Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці дотику x_0 дорівнює ***кутовому коефіцієнту дотичної*** до кривої в цієї точці:

$$k_{д} = f'(x_0),\qquad (6.36)$$

а ***рівняння дотичної*** має вигляд:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}\qquad (6.37)$$

Зауваження. Якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то пряма (рис. 6.2), рівняння якої

$$x = x_0,$$

отримуємо при $\Delta x \to 0$ з рівняння січної, називається ***вертикальною дотичною*** до графіку функції $y = f(x)$ в точці x_0.

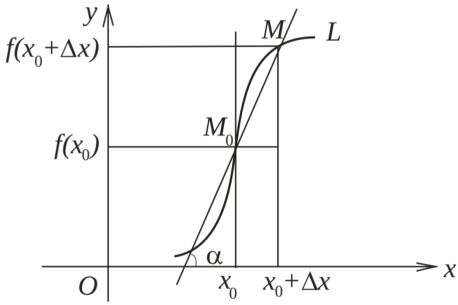


Рисунок 6.2 – Вертикальна дотична

Визначення 6.7. ***Нормаллю до кривої*** $y = f(x)$ ***в точці*** x_0 називається пряма лінія, перпендикулярна до дотичної у точці дотику.

З умови перпендикулярності прямих (3.22) знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі

$$k_{н} = -\frac{1}{k_{д}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.\qquad (6.38)$$

Шукане рівняння нормалі має вигляд

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}.\qquad (6.39)$$

Приклад 6.24. Записати рівняння дотичної до кривої

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 13$$

в точці з абсцисою $x_0 = 3$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 8.$$

і обчислимо значення функції та її похідної в точці:

$$y_0 = y(x_0) = y(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 13 =$$
$$= 54 - 27 + 24 - 13 = 38;$$
$$f'(x_0) = f'(3) = 6 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 44.$$

Скористаємося формулою (6.37) і отримаємо шукане рівняння дотичної

$$y - 38 = 44(x - 3);$$
$$y = 44x - 94.$$

Приклад 6.25. З'ясувати, в яких точках кривої $y = -\frac{3}{x} + 12$ її нормаль паралельна прямій $y = -\frac{4}{3}x + 2$.

Розв'язання. За умовою паралельності (3.21) кутові коефіцієнти нормалі та заданої прямої повинні дорівнювати одне одному:

$$k_{н} = k.$$

Знайдемо похідну функції

$$f'(x) = \frac{3}{x^2},$$

Отже кутовий коефіцієнт нормалі $k_{н} = -\frac{1}{f\prime(x_0\,)} = -\frac{x^2}{3}$ і скористаємося умовою паралельності

$$-\frac{x^2}{3} = -\frac{4}{3}; \qquad x^2 = 4; \qquad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

Виявилося, що точок, які задовольняють умові, дві. Їх ординати знайдемо, підставивши знайдені абсциси до рівняння кривої:

$$\begin{cases} y_1 = -\dfrac{3}{-2} + 12 = \dfrac{27}{2}, \\ y_2 = -\dfrac{3}{2} + 12 = \dfrac{21}{2}. \end{cases}$$

Отже, в точках $M_1\left(-2, \frac{27}{2}\right)$, $M_2\left(2, \frac{21}{2}\right)$ нормалі до кривої $y = -\frac{3}{x} + 12$ паралельні прямій $y = -\frac{4}{3}x + 2$.

З'ясуємо геометричний зміст диференціала функції $y = f(x)$ (рис. 6.3). З того що $f'(x) = tg\alpha$, прямує що диференціал $dy = f'(x)dx$ дорівнює довжині відрізку RT.

Визначення 6.8. ***Диференціал*** $\boldsymbol{dy}$ функції $y = f(x)$ в точці x може бути зображений приростом ординати точки дотичної, яка проведена до лінії $y = f(x)$ у відповідній точці $\big(x, f(x)\big)$.

Зауваження. Диференціал функції $y = f(x)$ у відповідній точці може бути як більше приросту функції $\Delta f(x)$ (рис. 4.3,а), так і менше його (рис. 6.3,б).

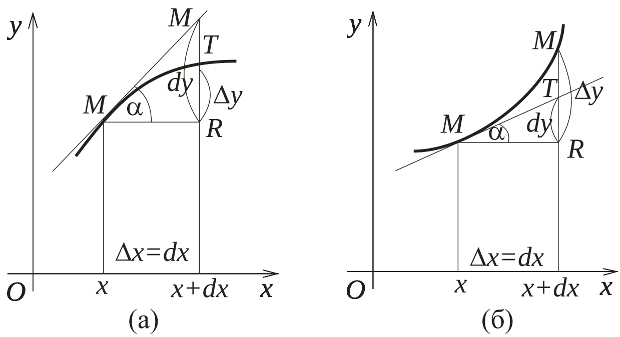


Рисунок 6.3 – Геометричний зміст диференціалу

6.1.16 Фізичний зміст похідної та диференціалу

Згадаємо, що поняття похідної ми вводили, коли розв'язували задачу про швидкість зміни функції:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} V_{\text{сер.}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Нехай $s = s(t)$ – закон руху матеріальної точки, s – довжина шляху, t – час. Нехай M_1 – координата точки в момент часу t, а M_2 – в момент часу $t + \Delta t$; Δs – довжина шляху між точками M_1 і M_2, тобто $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

Відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ є середня швидкість руху на відрізку від M_1 до M_2, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ – *миттєвою швидкістю* в момент часу t, тобто

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t). \tag{6.40}$$

За визначенням диференціала, $ds = vdt$, з цього прямує, що диференціал шляху дорівнює відстані, яку б пройшла матеріальна точка за проміжок часу Δt від моменту t до моменту $t + \Delta t$, якщо б рухалася рівномірно з швидкістю, яка дорівнює миттєвої швидкості точки в момент t.

Аналогічно, прискорення руху – це швидкість зміни швидкості

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = s''(t), \qquad (6.41)$$

тобто обчислюється за другою похідною від закону руху матеріальної точки.

Приклад 6.26. Відомий закон руху матеріальної точки

$$s = \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 7t^2 - 18t + 5.$$

Знайти швидкість та прискорення точки через $t = 3$ с після начала руху.

Розв'язання. Скористаємося формулами (6.40) і (6.41). Для цього знайдемо першу та другу похідні закону руху

$$v(t) = s'(t) = 3t^3 - t^2 + 14t - 18;$$

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9t^2 - 2t + 14.$$

Обчислимо їх значення в момент часу $t = 3$:

$$v(3) = 81 - 9 + 42 - 18 = 96 \ {}^{\text{м}}/_{\text{с}};$$

$$a(3) = 81 - 6 + 14 = 89 \ {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}.$$

Приклад 6.27. Відомі закони руху двох матеріальних точок, що рухаються рівномірно та прямолінійно вздовж осі Ox:

$$x_1 = 6t^2 + 4t - 8, \ \ x_2 = 5t^2 + 5t - 6.$$

З'ясувати, з якою швидкістю віддалялися матеріальні точки в момент зустрічі.

Розв'язання. Для зустрічі матеріальних точок необхідно і достатньо, щоб їх координати були рівними. Для цього прирівняємо x_1 і x_2 одне одному:

$$6t^2 + 4t - 8 = 5t^2 + 5t - 6;$$

$$t^2 - t - 2 = 0;$$
$$t_1 = 2 \ \ c; \quad t_2 = -1 \ \ c.$$

Зауважимо, що час не може приймати від'ємні значення. Отже, матеріальні точки зустрілися через 2 с після начала руху.

Знайдемо їх швидкості в момент $t = 2$. Для цього знайдемо похідні від законів руху і обчислимо їх значення в момент $t = 2$:

$$v_1 = x_1' = 12t + 4; \qquad v_2 = x_2' = 10t + 5;$$
$$v_1(2) = 24 + 4 = 28 \ \ ^{\text{м}}/_{\text{с}}; \qquad v_2(2) = 20 + 5 = 25 \ \ ^{\text{м}}/_{\text{с}}.$$

Швидкості матеріальних точок в момент зустрічі мають однаковий знак. Це свідчить про те, що точки рухаються в одному напрямку, тому віддалятися вони будуть зі швидкістю

$$\Delta v = v_1 - v_2 = 28 - 25 = 3 \ \ ^{\text{м}}/_{\text{с}}.$$

6.2 Основні теореми диференціального числення

6.2.1 Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші

Теорема Ферма. Нехай дано функцію $y = f(x)$, неперервну на інтервалі $[x_1, \ x_2]$. Нехай функція $y = f(x)$ приймає своє найбільше (або найменше) значення у деякій точці x_0, що належить інтервалу $[x_1, \ x_2]$. Якщо в точці x_0 похідна існує, то вона дорівнює нулю:

$$f'(x_0) = 0. \tag{6.42}$$

Доведення: Нехай для визначеності в точці x_0 функція $y = f(x)$ приймає своє найбільше значення. З цього випливає, що для будь-якої точки, що належить інтервалу $[x_1, \ x_2]$ повинна виконуватися умова:

$$f(x) \le f(x_0).$$

Отже, якщо $x < x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0,$$

а якщо $x > x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0.$$

Якщо існує похідна, то існує і границя

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Якщо перейдемо до границі при $x \to x_0 - 0$ в першої нерівності, то отримаємо $f'(x_0) \geq 0$, аналогічно, з другої нерівності при $x \to x_0 + 0$ маємо $f'(x_0) \leq 0$. Ці нерівності одночасно виконуються лише при $f'(x_0) = 0$.

Аналогічно доводиться теорема, якщо в точці x_0 функція приймає найменше значення.

Геометрична інтерпретація теореми Ферма: якщо в точці x_0 функція приймає своє найбільше (або найменше) значення в деякому околі точки x_0, то дотична до графіку функції в цій точці паралельна осі Ox (см. рис 6.4).

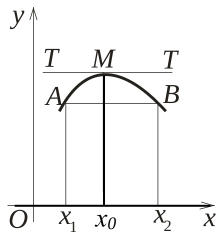


Рисунок 6.4 – Геометрична інтерпретація теореми Ферма

Теорема Ролля. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в замкненому інтервалі $[x_1,\ x_2]$, диференційована в усіх його внутрішніх точках і має на кінцях інтервалу рівні значення: $f(x_1) = f(x_2)$. Тоді існує хоча б одна така точка x_0, для якої справедливо наступне:

$$f'(x_0) = 0. \tag{6.43}$$

Доведення: Якщо на кінцях інтервалу значення функції дорівнюють одне одному, то можливі дві ситуації:

1) функція незмінна в усіх точках інтервалу $f(x) = f(x_1) = f(x_2)$. В такому випадку її похідна дорівнює нулю при будь-яких значеннях x;

2) якщо функція змінюється в інтервалі, то вона буде приймати своє найбільше (або найменше) значення хоча б у одній точці цього інтервалу $[x_1,\ x_2]$. За умовою теореми похідна існує в усіх внутрішніх точках інтервалу, а тому і в точках, де приймає свої найбільші або найменші значення. За теоремою Ферма похідна в цих точках дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$.

Отже, теорему доказано.

Геометрична інтерпретація теореми Ролля: На лінії $y = f(x)$, де функція задовольняє умовам теореми Ролля, знайдеться точка, дотична у якій паралельна осі Ox (рис. 6.4).

Якщо $f(x_1) = f(x_2) = 0$, то ***теорема Ролля*** набуває вигляду: між будь-якими нулями функції існує хоча б один нуль похідної.

Приклад 6.28. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = x^3 + 4x^2 - 7x + 10$ в інтервалі $[-1,2]$.

Розв'язання. Обчислимо значення функції на кінцях інтервалу:

$$y(-1) = -1 + 4 + 7 + 10 = 20;$$
$$y(2) = 8 + 16 - 14 + 10 = 20.$$

Отже, задана функція задовольняє умовам теореми Ролля.

Знайдемо похідну функції і дорівняємо її до нуля:

$$y' = 3x^2 + 8x - 7; \qquad 3x^2 + 8x - 7 = 0.$$

Отримаємо точки $x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{37}}{3}$. Точка $x_1 = \frac{-4+\sqrt{37}}{3}$ належить інтервалу $[-1,2]$, звідси прямує, що теорема Ролля справедлива.

Теорема Лагранжа. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в замкненому інтервалі $[x_1,\ x_2]$, диференційована в усіх його внутрішніх точках. Тоді існує хоча б одна така точка x_0, для якої справедливо наступне:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_0). \qquad (6.44)$$

Доведення: Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - \lambda x$$

і визначимо число λ так, щоб виконувалася умова $F(x_1) = F(x_2)$, тобто щоб $f(x_1) - \lambda x_1 = f(x_2) - \lambda x_2$. З цього прямує, що

$$\lambda = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Для функції $F(x)$ виконуються всі умови теореми Ролля: вона неперервна, диференційована в усіх внутрішніх точках інтервалу і приймає рівні значення на кінцях інтервалу: $F(x_1) = F(x_2)$. З цього прямує, що існує хоча б одна така точка, для якої виконується умова $F'(x_0) = 0$. Зрозуміло, що $F'(x) = f'(x) - \lambda$, а тому $f'(x) - \lambda = 0$. Підставимо сюди отримане нами значення λ, маємо

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Отже, теорему доказано.

Формулу (6.44) називають ще *формулою кінцевих приростів Лагранжа*:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x) \cdot (x_2 - x_1).$$

Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа: Нехай AB – хорда, яка стягує точки $A\big(x_1,\ f(x_1)\big)$ і $B\big(x_2,\ f(x_2)\big)$ (см. рис. 6.5). А тому відношення $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ дорівнює тангенсу кута β нахилу хорди AB до додатного напрямку осі Ox, тобто

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = tg\beta,$$

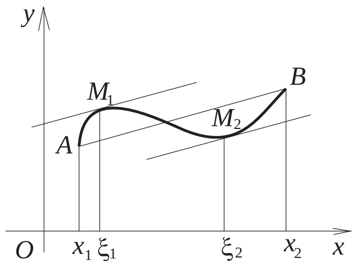


Рисунок 6.5 – Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа

а похідна, як нам вже відомо, дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці $\big(x_0,\ f(x_0)\big)$ і додатним напрямком осі Ox, тобто $f'(x_0) = tg\alpha$. Звідси зрозуміло, що $tg\alpha = tg\beta$.

Отже теорема Лагранжа показує, що в інтервалі $[x_1,\ x_2]$ повинна знайтися точка (хоча б одна), дотична в якої була б паралельна хорді AB.

Приклад 6.29. Перевірити справедливість теореми Лагранжа для функції $y = lnx$ в інтервалі $[1, e]$.

Розв'язання. Обчислимо значення функції на кінцях інтервалу:

$$y(1) = ln1 = 0; \quad y(e) = lne = 1.$$

Знайдемо похідну функції: $y' = \frac{1}{x}$.

Підставимо у формулу (6.44)

$$\frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{x}$$

знайдемо точку $x = e - 1$. Вона належить інтервалу $[1, e]$, тобто теорема Лагранжа для даної функції справедлива.

Теорема Коши. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в замкненому інтервалі $[x_1,\ x_2]$, диференційовані в усіх його внутрішніх точках, причому $\varphi'(x)$ в цих точках не обертається в нуль. Тоді існує хоча б одна така точка x_0, для якої справедливо наступне:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}. \tag{6.45}$$

Зауважимо, що $\varphi(x_2) \neq \varphi(x_1)$, тому що в протилежному випадку за теоремою Ролля в розглянутому інтервалі існувала би точка x_0, в якої похідна б дорівнювала нулю: $\varphi'(x) = 0$. А це заперечує умові теореми.

Доведення: Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - \lambda\varphi(x),$$

де λ оберемо так, щоб $F(x_1) = F(x_2)$, тобто щоб

$$f(x_1) - \lambda\varphi(x_1) = f(x_2) - \lambda\varphi(x_2).$$

Звідси

$$\lambda = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}.$$

Функція $F(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля. Звідси прямує, що існує така точка x_0 з інтервалу $[x_1,\ x_2]$, для якої $F'(x_0) = 0$. Продиференцюємо функцію $F(x)$: $F'(x) = f'(x) - \lambda\varphi'(x)$. Звідси $f'(x) - \lambda\varphi'(x) = 0$, а λ набуває вигляду

$$\lambda = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Прирівняємо отримані вирази для λ, маємо

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}=\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Отже, теорему доказано.

Формулу (6.45) називають ***формулою кінцевих приростів Коші***.

Геометрична інтерпретація теореми Коші: Теорема Коші з геометричної точки зору має таку ж саме інтерпретацію, що і теорема Лагранжа. Позначимо незалежну змінну через t і будемо вважати, що функції $f(t)$ і $\varphi(t)$ є параметричними рівняннями деякої лінії, причому $y=f(t)$, $x=\varphi(t)$. Коли параметр t пробігає інтервал $[t_1,\ t_2]$, змінна точка переміщується по лінії, початкова точка якої має координати $\left(\varphi(t_1), f(t_1)\right)$, а кінцева $\left(\varphi(t_2), f(t_2)\right)$. Кутовий коефіцієнт хорди, яка стягує ці точки, дорівнює відношенню $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}$. Похідна від функції, що задана параметрично (6.30), дорівнює $\frac{dy}{dx}=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$. Звідси формула

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}=\frac{f'(t_0)}{\varphi'(t_0)},\quad (t_1<t_0<t_2)$$

знов описує рівність кутового коефіцієнта хорди, що стягує кінці дуги, кутовому коефіцієнту дотичної, яка проведена в деякій точці розглянутого проміжку.

6.2.2 Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя

У п. 5.2 ми вже познайомилися з деякими правилами граничного переходу при розкритті невизначеностей. Познайомимося ще з одним простим і зручним прийомом обчислення границь – правилом Лопіталя. Це правило надалі ми будемо застосовувати при дослідженні функцій.

Теорема Лопіталя. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to x_0$ (або $x\to\infty$) одночасно прямують до нуля або до нескінченності. Якщо відношення їх похідних має границю, то відношення самих функцій також має границю, яка дорівнює границі відношення похідних, тобто

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.\qquad(6.46)$$

Доведення цієї теореми в загальному випадку досить складне, тому розглянемо лише основні випадки.

Отже, нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначенні і неперервні в деякому околі точки x_0, і при $x\to x_0$ прямують до нуля і їх похідні в точці x_0 існують, причому $\varphi'(x)\neq 0$. За теоремою Лопіталя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Оскільки $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$, то

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}}.$$

Перейдемо до границі при $x\to x_0$ і скористаємося теоремою про границю частки (5.8), отримаємо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}},$$

за визначенням похідної остаточно маємо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Доведемо, що ця формула справедлива и при $x\to\infty$, за умовою, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовані при достатньо великих x. Зробимо заміну $x=\frac{1}{z}$, зрозуміло, що, якщо $x\to\infty$, то $z\to 0$. Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}.$$

Скоротимо отриманий вираз на $\left(-\frac{1}{z^2}\right)$ і зробимо обернену заміну $\frac{1}{z}$ на x, отримаємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Отже, для основних, найпростіших випадків теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо відношення похідних, як і відношення функції, дає невизначеність типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, то правило Лопіталя, якщо в цьому є сенс, можна застосовувати знов і знов до отримання результату. При повторному застосуванні правила Лопіталя рекомендується спочатку виконати всі можливі спрощення, наприклад, скоротити чисельник та знаменник на спільні множники або скористатися вже відомими границями.

Приклад 6.30. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{3x^2-12}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{6x-8}{6x}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

Тут правило Лопіталя для розкриття невизначеності необхідно було застосувати двічі.

Приклад 6.31. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{ln(1+x)}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{ln(1+x)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to\infty}(1+x)=\infty.$$

Приклад 6.32. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx^2}{x^2sinx^2}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx^2}{x^2sinx^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot sinx^2}{2x\cdot sinx^2+x^2\cdot 2x\cdot cosx^2}=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot sinx^2}{2x \cdot (sinx^2 + x^2 \cdot cosx^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx^2}{sinx^2 + x^2 \cdot cosx^2} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot cosx^2}{2x \cdot cosx^2 + 2x \cdot cosx^2 - x^2 \cdot 2x \cdot sinx^2} = \lim_{x \to 0} \frac{cosx^2}{2cosx^2 - x^2 sinx^2} = \frac{1}{2}.$$

При обчисленні границі двічі застосували правило Лопіталя, попередньо двічі скоротивши чисельник і знаменник дробі на спільний множник $2x$.

Зауваження 2. Важливо, що обчислення границь за правилом Лопіталя має сенс лише в тому випадку, якщо в результаті отримуємо скінчену або нескінчену границю. Розглянемо приклад, коли правило Лопіталя для обчислення границь не можна застосовувати.

Приклад 6.33. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + sinx}{x}.$$

Розв'язання. Якщо спробуємо застосувати правило Лопіталя при розкритті невизначеності типу $\frac{\infty}{\infty}$, отримаємо

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + sinx}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \to \infty} \frac{(x + sinx)'}{(x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + cosx}{1},$$

цей вираз при $x \to \infty$ постійно приймає значення в інтервалі від 0 до 2 (тому що $|cosx| \le 1$), а тому границі немає. Спробуємо обчислити методами, з якими познайомилися у розділі 5.2. Для цього почленно поділимо чисельник на знаменник:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + sinx}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{sinx}{x}\right) = 1.$$

Отже, границя існує і дорівнює 1.

Зауваження 3. За допомогою правила Лопіталя часто вдається знайти границі функцій у випадках, крім вже розглянутих невизначеностей типу $\left|\frac{0}{0}\right|$ і $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, а саме $|\infty - \infty|$, $|0 \cdot \infty|$, $|1^\infty|$, $|\infty^0|$, $|0^0|$. Розкриття таких невизначеностей шляхом алгебраїчних перетворень і логарифмування зводиться до розкриття невизначеностей двох основних типів: $\left|\frac{0}{0}\right|$ і $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$. Розглянемо кожну з цих ситуацій окремо.

1. ***Функція представлена різницею двох функцій, які одночасно прямують до нескінченності (невизначеність типу*** $|\infty-\infty|$)_.

Для обчислення такої границі за правилом Лопіталя необхідно перетворити її до вигляду дробу, чисельник і знаменник якого одночасно прямують до нуля або до нескінченності.

Приклад 6.34. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{x^5-1}-\frac{7}{x^7-1}\right).$$

Розв'язання. Тут невизначеність $|\infty-\infty|$. Приведемо різницю дробів до загального знаменника. Отримали невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$, для її розкриття застосували правило Лопіталя двічі:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{x^5-1}-\frac{7}{x^7-1}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to 1}\frac{5(x^7-1)-7(x^5-1)}{(x^5-1)(x^7-1)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{5x^7-7x^5+2}{x^{12}-x^7-x^5+1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{35x^6-35x^4}{12x^{11}-7x^6-5x^4}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{210x^5-140x^3}{132x^{10}-42x^5-20x^3}=\frac{70}{70}=1.$$

2. ***Функція представлена добутком нескінченно малої величини на нескінченно велику (невизначеність типу*** $|\mathbf{0}\cdot\infty|$***)***

Для обчислення такої границі за правилом Лопіталя необхідно її перетворити на дріб, заміняючи функцію у множнику на їй обернену. В результаті отримаємо дріб, чисельник і знаменник якого одночасно прямують до нуля або до нескінченності.

Приклад 6.35. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0} ctgx \cdot ln(x+e^x).$$

Розв'язання. Замінимо множення на котангенс, діленням на величину, обернену до котангенса. Згадаємо, що $\frac{1}{ctgx} = tgx$, отриманий дріб має невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$. Скористаємося правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0} ctgx \cdot ln(x+e^x) = |\infty \cdot 0| = \lim_{x\to 0}\frac{ln(x+e^x)}{\frac{1}{ctgx}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{ln(x+e^x)}{tgx} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}}{\frac{1}{cos^2 x}} = \frac{2}{1} = 2.$$

3. *Функція має вигляд степенево-показникової (невизначеності типу: $|\mathbf{1}^\infty|$, $|\infty^\mathbf{0}|$, $|\mathbf{0}^\mathbf{0}|$)*

Для обчислення таких границь за правилом Лопіталя необхідно спочатку функцію, яка стоїть від знаком границі, прологарифмувати, знайти границю логарифма, а потім за знайденою границею логарифма знайти і границю самої функції.

Приклад 6.36. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Розв'язання. Перевіримо, чи є тут розглядувана невизначеність. Позначимо для зручності шукану границю як A:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = |1^\infty| = A.$$

Логарифмуємо дану границю. Скористаємося властивостями логарифмів і перетворимо отриману функцію до вигляду дробу, чисельник і знаменник якого одночасно прямують до нуля при $x \to 1$. Скористаємося правилом Лопіталя:

$$lnA = ln\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} lnx^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}lnx =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{lnx}{1-x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

Знайдемо границю заданої функції, скориставшись основною властивістю логарифма, а саме: $A = e^{lnA} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

6.3 Поведінка функції в інтервалі

6.3.1 Ознаки монотонності функції

Теорема 6.1. Для того щоб диференційована на інтервалі (a, b) функція $y = f(x)$ зростала (спадала) на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб в усіх точках цього інтервалу похідна функції була невід'ємной, тобто $f'(x) \geq 0$ (недодатной $- f'(x) \leq 0$).

Якщо на всьому досліджуваному інтервалі (a, b) похідна додатна: $f'(x) > 0$ (або від'ємна: $f'(x) < 0$), то функція $y = f(x)$ на ньому строго зростає (строго спадає).

Доведення:

Необхідність. Якщо функція $y = f(x)$ зростає на інтервалі (a, b), то для будь-якої точки $x_0 \in (a, b)$ при $\Delta x > 0$ маємо $y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$. Звідси $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$. Якщо перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$, маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0.$$

Аналогічно, якщо функція спадає, то для будь якої точки $x_0 \in (a, b)$ маємо $y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$. Звідси $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x) \leq 0.$$

Достатність. Візьмемо в досліджуваному інтервалі дві будь які точки x_1 і x_2, такі, що $a < x_1 < x_2 < b$. За формулою Лагранжа (6.44) маємо:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0), \qquad x_1 < x_0 < x_2.$$

Тому що $x_1 < x_2$, різниця $x_2 - x_1$ додатна і знак різниці

$f(x_2) - f(x_1)$ повністю визначається знаком похідної $f'(x_0)$. Отже, якщо $f'(x_0) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1,$$

а з цього прямує, що функція $y = f(x)$ зростає.

Якщо похідна $f'(x)$ всюди від'ємна, то $f'(x_0) < 0$, а з цього прямує, що $f(x_2) < f(x_1)$ при $x_2 > x_1$, тобто функція спадає.

6.3.2 Екстремуми функції

Особливу увагу потрібно приділити тим значенням незалежної змінної x, які відокремлюють інтервал зростання від інтервалу спадання або інтервал спадання від інтервалу зростання функції (рис. 6.6).

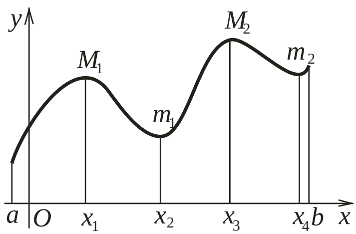


Рисунок 6.6 – Екстремуми функції

Визначення 6.9. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***максимуму*** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найбільше значення функції $y = f(x)$ в деякому околі точки x_0 (рис. 6.7, а).

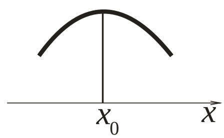


Рисунок 6.7, а – Максимум

Визначення 6.10. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***мінімуму*** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найменше значення функції в деякому околі точки x_0 (рис. 6.7, б).

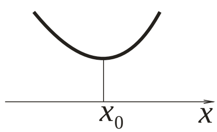


Рисунок 6.7, б – Мінімум

Точки максимуму та мінімуму називаються точками ***екстремуму*** функції.

Теорема 6.2. (необхідна ознака екстремуму). Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції, то похідна функції в цій точці або дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$, або не існує.

Доведення: Дійсно, якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції, то значення функції в ній є найбільшим (або найменшим) в деякому околі точки x_0. Звідси прямує, що якщо в точці x_0 існує похідна, то, за теоремою Ферма, вона дорівнює нулю.

Теорема 6.3. (достатня ознака існування екстремуму функції). Точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, якщо при переході x через x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак на протилежний; при зміні знаку $+$ на $-$ точка x_0 є точкою максимуму, при зміні $-$ на $+$ точка x_0 є точкою мінімуму.

Доведення: Нехай при переході x зліва направо через x_0 похідна змінює знак з $+$ на $-$; з цього прямує, що ліворуч точки x_0 розташований інтервал зростання функції, а праворуч – інтервал спадання функції. Тобто, точка x_0 є точкою максимуму функції.

Аналогічно можна переконатися, що при зміні знаку похідної з $-$ на $+$ і при переході x через x_0 зліва направо точка x_0 є точкою мінімуму функції.

6.3.3 Схема дослідження функції на монотонність та екстремум

Вкажемо послідовність дій для визначення інтервалів монотонності та екстремумів функції як в скінченому, так і в нескінченному інтервалі.

1. З’ясуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо критичні точки, похідна в яких дорівнює нулю $f'(x) = 0$ або не існує.
3. Нанесемо на числову вісь (або в таблицю) точки, похідна в яких дорівнює нулю або не існує, та точки, в яких функція не існує. Таким чином ми розіб’ємо числову вісь на часткові інтервали, в кожному з яких похідна не змінює знак. Ці інтервали є інтервалами монотонності функції.

4. З'ясуємо знак похідної в кожному з часткових інтервалів, для цього достатньо встановити знак у будь-якій точці обраного інтервалу. За знаком похідної визначаємо характер поведінки функції в кожному з інтервалів монотонності: якщо $f'(x) > 0$, то функція зростає, якщо $f'(x) < 0$ – спадає.

5. Прослідкуємо за зміною знаку похідної при переході зліва направо через межі інтервалів монотонності функції і з'ясуємо, які з критичних точок є мінімумами, а які – максимумами. Може так статися, що деяка точка не є точкою екстремуму функції. Це відбувається у випадках, коли в двох суміжних інтервалах, які поділяються вказаною критичною точкою, похідна має однаковий знак.

6. Підставимо у функцію $y = f(x)$ значення незалежної змінної, в яких ми встановили існування екстремуму і обчислимо екстремальні значення функції.

Приклад 6.37. Дослідити функцію $y = \frac{x^3}{x+1}$ на монотонність та екстремуми.

Розв'язання. Встановимо область визначення функції (ОВФ): $x + 1 \neq 0;\ \ x \neq -1$, тобто $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Знайдемо похідну функції: $y' = \frac{3x^2(x+1)-x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$.

Знайдемо критичні точки $y' = 0;\ \ \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2} = 0;$

$$x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{2}.$$

З'ясуємо знак першої похідної в отриманих часткових інтервалах, встановимо характер поведінки функції. Результати досліджень зведемо у таблицю:

x	$\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$	$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	не існує	$-$	0	$+$
y	зростає	$y_{max} = \frac{27}{4}$	спадає		спадає	$y_{min} = 0$	зростає

або на числову пряму (рис. 6.8):

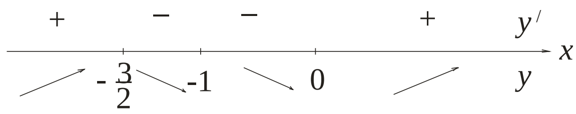


Рисунок 6.8 – Дослідження функції на монотонність та екстремуми

Отже, функція зростає на інтервалах $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (0; +\infty)$, спадає на інтервалах $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 0)$. В точці $x = -\frac{3}{2}$ функція має максимум: $y_{max} = \frac{27}{4}$, а в точці $x = 0$ – мінімум: $y_{min} = 0$.

6.3.4 Найбільше і найменше значення функції в інтервалі

Розв'язання задачі на найбільше та найменше значення функції в інтервалі пов'язано з дослідженням функції на монотонність та екстремум. Зрозуміло, що функція $y = f(x)$ може приймати найбільше M або найменше m значення або в точках екстремуму, або на кінцях інтервалу $[a; b]$ (рис. 6.9). Отже, для знаходження найбільшого та найменшого значення функції необхідно:

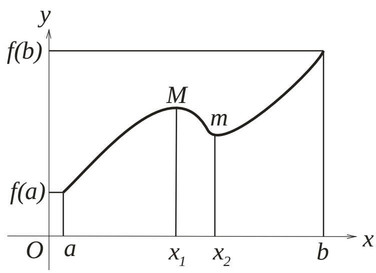


Рисунок 6.9 – Найбільше та найменше значення функції в інтервалі

1. Розв'язати задачу на екстремум функції.
2. Обчислити значення функції в точках екстремуму (лише тих, що належать обраному інтервалу) і на кінцях інтервалу.
3. Порівняти отримані значення і обрати з них найбільше та найменше.

Окремо розглянемо задачі, в яких дві величини пов'язані функціональною залежністю, і потрібно знайти значення однієї з них (це значення може бути або обмеженим певним інтервалом, або необмеженим), при якому інша приймає найбільше або найменше значення. Для розв'язання таких задач необхідно скласти рівняння, яке описує функціональну залежність цих величин, а потім знайти найбільше або найменше значення функції за описаною схемою.

Приклад 6.38. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x\ln x$ в інтервалі $[e^{-3};\ \ 1]$.

Розв'язання.

Проведемо дослідження функції на екстремум:

ОВФ: $x > 0$ або $x \in (0, \infty)$.

$$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1;$$

$$y' = 0; \quad \ln x + 1 = 0; \quad \ln x = -1; \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Критична точка належить досліджуваному інтервалу. Обчислимо значення функції в критичній точці і на кінцях інтервалу:

$$y(e^{-3}) = e^{-3}\ln e^{-3} = \frac{1}{e^3}\ln e^{-3} = -\frac{3}{e^3}\ln e = -\frac{3}{e^3};$$

$$y\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln e^{-1} = -\frac{1}{e}\ln e = -\frac{1}{e};$$

$$y(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0;$$

Отже, найбільше значення функція набуває в точці $x = 1$: $M = y(1) = 0$, а найменше значення – в точці $x = \frac{1}{e}$: $m = y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

Приклад 6.39. Визначити, при яких розмірах відкритого басейну з квадратним дном, на облицювання стін і дна буде затрачено найменшу кількість матеріалу. Об'єм басейну V фіксований.

Розв'язання. Басейн має форму прямокутного паралелепіпеду. Його об'єм визначається за формулою $V = S_{\text{осн}} \cdot h$. Позначимо сторону основи квадратного дна басейну за x. Звідси площа основи: $S_{\text{осн}} = x^2$.

Висоту басейну визначимо як $h = \frac{V}{S_{\text{осн}}} = \frac{V}{x^2}$. Маємо бічну площу поверхні $S_{\text{біч}} = 4h \cdot x = 4\frac{V}{x^2} \cdot x = \frac{4V}{x}$. Отже, загальна площа, яку необхідно облицювати, дорівнює $S = x^2 + \frac{4V}{x}$. Дослідимо цю функцію на екстремум:

$$S' = 2x - \frac{4V}{x^2} = \frac{2x^3 - 4V}{x^2};$$

$$S' = 0; \quad 2x^3 - 4V = 0; \quad x = \sqrt[3]{2V}.$$

Після з'ясування знаків S' в кожному з часткових інтервалів, встановили, що в точці $x = \sqrt[3]{2V}$ функція набуває мінімуму. Отже, при стороні дна $x = \sqrt[3]{2V}$ і висоті $h = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ басейн фіксованого об'єму потребує найменшу кількість облицювального матеріалу.

6.3.5 Опуклість та угнутість функцій. Точки перегину

Визначення 6.11. Дуга називається ***опуклою***, якщо вона перетинається з будь-якою своєю січною не більш, ніж в двох точках.

Якщо дуга опукла, вона цілком розташована по одну сторону від дотичної, проведеної в будь-якій точці. Опукла дуга може обертатися як опуклістю вгору (рис. 6.10, а), або донизу (рис. 6.10, б).

Лінії, обернені опуклістю вгору, називаються ***опуклими*** (опукла дуга розташована під дотичною); лінії, обернені опуклістю донизу, називаються ***угнутими*** (опукла дуга розташована над дотичною).

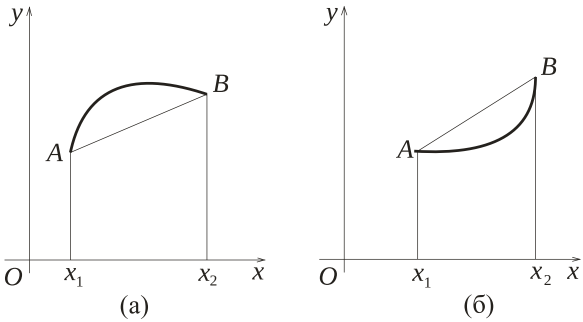


Рисунок 6.10 – Опукла (а) та угнута (б) функції

Особливу роль грають точки, які відділяють інтервали опуклості і угнутості функції.

Визначення 6.12. ***Точкою перегину*** функції називається точка лінії, яка відділяє опуклу дугу від угнутої.

В точці перегину функції дотична перетинає лінію; в околі цієї точки лінія розташована по обидві сторони від дотичної.

З'ясуємо ознаки опуклості та угнутості функції та умови існування точок перегину.

Теорема 6.4. Для того щоб двічі диференційована на інтервалі (a, b) функція $y = f(x)$ була опукла (угнута) на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб в усіх точках цього інтервалу друга похідна функції була від'ємною, тобто $f''(x) < 0$ (додатною $f''(x) > 0$).

Доведення: Проведемо пряму через точки $A\big(x_1,\ f(x_1)\big)$ і $B\big(x_2,\ f(x_2)\big)$, які належать графіку функції $y = f(x)$. Її рівнянням є

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Позначимо праву частину рівняння через $l(x)$. Тому рівняння січної має вигляд $y = l(x)$.

Нехай $a < x_1 < x < x_2 < b$. Знайдемо різницю

$$l(x) - f(x) = \frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1} - f(x)\frac{(x-x_1)+(x_2-x)}{x_2-x_1} =$$
$$= \frac{[f(x_2)-f(x)](x-x_1)-[f(x)-f(x_1)](x_2-x)}{x_2-x_1}.$$

За теоремою Лагранжа маємо

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2-x)(x-x_1)-f'(\xi)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1} =$$
$$= \frac{[f'(\eta)-f'(\xi)](x_2-x)(x-x_1)}{x_2-x_1},$$

де $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$.

Знов скористаємося теоремою Лагранжа:

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(x_2-x)(x-x_1)(\eta-\xi)}{x_2-x_1}.$$

Звідси бачимо, що якщо $f'' < 0$ на інтервалі $(a; b)$, то $l(x) < f(x)$, тобто функція опукла; а якщо $f'' > 0$ на інтервалі $(a; b)$, то $l(x) > f(x)$, тобто функція угнута.

Теорема 4.6. (необхідна умова існування точок перегину). Якщо в точці x_0 перегину функції $y = f(x)$ існує друга похідна, то вона дорівнює нулю: $f''(x_0) = 0$.

Теорема 4.7. (достатня умова існування точок перегину). Точка (x_0, y_0) (якщо в цій точці виконується необхідна умова) є точкою перегину лінії $y = f(x)$, якщо друга похідна функції $f''(x)$ змінює знак при переході x через x_0.

Пропонуємо читачеві провести доведення цих теорем самостійно.

6.3.6 Схема дослідження функції на опуклість, угнутість і точки перегину

Вкажемо послідовність дій для з'ясування інтервалів опуклості, угнутості і точок перегину.

1. З'ясуємо область визначення функції (ОВФ).

2. Знайдемо критичні точки, тобто точки, друга похідна в яких дорівнює нулю $f''(x) = 0$ або не існує.

3. Нанесемо на числову вісь (або в таблицю) критичні точки та точки, в яких функція не існує. Таким чином ми

розіб’ємо числову вісь на часткові інтервали, в кожному з яких друга похідна не змінює знак. Ці інтервали є інтервалами опуклості або угнутості функції.

4. З’ясуємо знак другої похідної в кожному з часткових інтервалів, для чого достатньо встановити знак у будь-якій точці обраного інтервалу. За знаком другої похідної визначаємо характер поведінки функції в кожному з інтервалі: якщо $f''(x) > 0$, то функція угнута, якщо $f''(x) < 0$ – опукла.

5. Простежимо за зміною знаку другої похідної при переході через границі інтервалів опуклості і угнутості функції і з’ясуємо, які з критичних точок є точками перегину функції. Може так статися, що деяка критична точка не є точкою перегину функції. Це можливо, якщо в двох суміжних інтервалах, які поділяються вказаною критичною точкою, друга похідна має однаковий знак.

6. Підставимо у функцію $y = f(x)$ значення незалежної змінної, в яких ми встановили існування точок перегину і обчислимо їх ординати.

Приклад 6.40. Дослідити функцію на опуклість, угнутість і знайти точки перегину функції $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

Розв’язання. ОВФ: $x \in R$.

Знайдемо першу і другу похідні функції:

$$y' = 4x^3 - 36x^2 + 96x; \qquad y'' = 12x^2 - 72x + 96.$$

Знайдемо критичні точки:

$$y'' = 0; \qquad 12x^2 - 72x + 96 = 0| : 12.$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0; \qquad \left[\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}\right..$$

Винесемо результати досліджень або в таблицю

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	угнута	$y_{\text{т.п.}} = 62$	опукла	$y_{\text{т.п.}} = 206$	угнута

або на числову вісь (рис. 6.11):

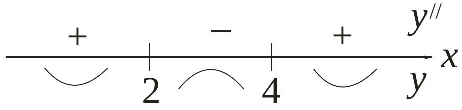


Рисунок 6.11 – Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину

Отже, функція опукла на інтервалах $x \in (2; 4)$, угнута на інтервалі $x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$. В точках $x = 2$ і $x = 4$ функція має перегин.

6.3.7 Асимптоти функції

Визначення 6.13. Пряма лінія A називається ***асимптотою*** лінії L, якщо відстань від точки лінії L до прямої A прямує до нуля при нескінченному віддаленні цієї точки від початку координат.

Можливі випадки існування ***вертикальної*** та ***похилої*** асимптот. Розглянемо кожен з них.

Нехай лінія $y = f(x)$ має ***вертикальну асимптоту***. Її рівняння буде $x = x_0$, звідси, згідно з визначенням асимптоти обов'язково виконується умова $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Отже, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \tag{6.47}$$

то лінія $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту

$$x = x_0. \tag{6.48}$$

Взаємне розташування нескінченної вітки функції та її вертикальної асимптоти можна з'ясувати дослідженням знаку нескінченності, до якої прямує $f(x)$, коли x прямує до x_0 ліворуч або праворуч. Можливі варіанти розташування вертикальної асимптоти і графіку функції зображені на рисунку 6.12.

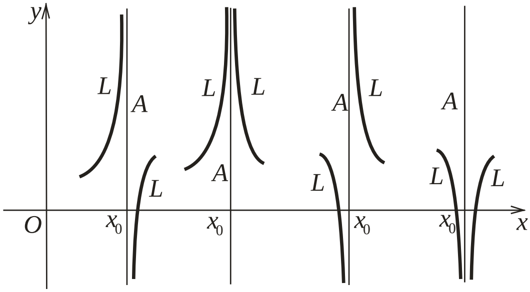


Рисунок 6.12 – Асимптоти функції

Нехай лінія $y = f(x)$ має ***похилу асимптоту***. Рівнянням такої асимптоти буде $y = kx + b$. За визначенням асимптоти відстань MN_1 точки M на лінії L від асимптоти A (см. рис. 6.13) прямує до нуля при $x \to \infty$. Розглянемо замість відстані MN_1 відстань MN, тобто різницю між ординатами точок M і N, які мають ту ж саму абсцису. Зрозуміло, що ці відстані одночасно прямують до нуля при $x \to \infty$.

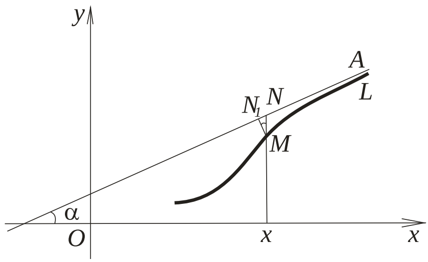


Рисунок 6.13 – Горизонтальна асимптота

Ордината точки M дорівнює значенню функції $f(x)$, а ордината точки N – значенню лінійної функції $y = kx + b$. Звідси

$$MN = [f(x) - (kx + b)].$$

З цього прямую, що якщо

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

то лінія $y = f(x)$ має асимптоту $y = kx + b$. Тобто знаходження похилої асимптоти зводиться до знаходження таких чисел k і b, що

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - kx - b] = 0. \tag{6.49}$$

звідси справедливо, що

$$f(x) = kx + b + \alpha(x).$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \to \infty$. Поділимо обидві частини рівності на x і перейдемо до границі при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right).$$

З $\frac{b}{x} \to 0$ і $\frac{\alpha(x)}{x} \to 0$ прямує, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k. \tag{6.50}$$

Отже, якщо існує така кінцева границя (6.50), то існує і похила асимптота.

Знайдемо b з (6.49):

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b. \tag{6.51}$$

Якщо існують скінченні границі (6.50), (6.51), то лінія $y = f(x)$ має похилу асимптоту

$$y = kx + b. \tag{6.52}$$

Зауваження. Якщо $k = 0$, то похила асимптота перетворюється в горизонтальну:

$$y = b, \quad \text{де} \quad b=\lim_{x\to\infty}f(x). \tag{6.53}$$

Приклад 6.41. Знайти асимптоти функції $y=\frac{e^{x-5}}{2x+3}$.

Розв'язання. ОВФ: $2x + 3 \neq 0$; $x \neq -\frac{3}{2}$;

$$x\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};+\infty\right).$$

Знайдемо вертикальну асимптоту. Візьмемо точку розриву функції $x=-\frac{3}{2}$ і перевіримо виконання умови (6.47):

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}y(x)=\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{e^{x-5}}{2x+3}=\infty.$$

Отже, пряма $x=-\frac{3}{2}$ є вертикальною асимптотою функції.

Знайдемо похилу асимптоту. Для цього обчислимо границі (6.50), (6.51) при $x \to \pm\infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^{x-5}}{2x+3}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x-5}}{2x^2+3x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x-5}}{4x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x-5}}{4} = \infty;$$
$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^{x-5}}{2x+3}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x-5}}{2x^2+3x} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(2x^2+3x)e^{-(x-5)}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Зауважимо, що обчислюючи границю при $x \to \infty$ ми двічі скористалися правилом Лопіталя, щоб уникнути невизначеності. При цьому скінченної границі не отримали, тому при $x \to \infty$ похилої асимптоти не існує. При $x \to -\infty$ невизначеності не виникло; замість обчислення $e^{-\infty}$, ми перемістили експоненту в знаменник і отримали скінченну границю $k = 0$. А цей випадок відповідає горизонтальній асимптоті. Обчислимо b при $x \to -\infty$:

$$b = \lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x-5}}{2x+3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(2x+3)e^{-(x-5)}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отже, при $x \to -\infty$ існує горизонтальна асимптота $y = 0$.

6.3.8 Загальна схема дослідження функції

Спробуємо об’єднати попередньо отримані знання для дослідження функції та побудови її графіка. Пропонуємо наступну схему:

1. ***Область визначення функції*** (ОВФ).
2. ***Точки перетину з осями координат***. Нагадаємо, що з віссю Ox лінія перетинається, якщо $y = 0$; а з віссю Oy, якщо $x = 0$.
3. ***Інтервали знакосталості***. На числовій осі відкладемо точки перетину з віссю Ox і точки, в яких функція не існує (ОВФ). Обчислимо знак функції в кожному з отриманих інтервалів. Там, де $y > 0$ графік функції розташовано в верхній полуплощині, де $y < 0$ – в нижній.

4. ***Парність (непарність) функції***. Нагадаємо, що функція парна, якщо виконується умова $y(-x) = y(x)$; непарна – якщо $y(-x) = -y(x)$. Якщо не виконується ні одна з цих умов, функція загального положення. Ця інформація дуже корисна при побудові графіка функції: графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції – відносно початку координат.

5. ***Періодичність***. Якщо функція періодична, то $y(x+T) = y(x)$, де $T \neq 0$ – період функції.

6. ***Дослідження функції на монотонність та екстремуми*** (дослідження за допомогою першої похідної). Схема цього дослідження приведена в п. 6.3.3.

7. ***Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину*** (дослідження за допомогою другої похідної). Схема цього дослідження приведена в п. 6.3.6.

8. ***Асимптоти функції***. См. п. 6.3.7.

9. ***Графік функції***. Графік функції будується за результатами попередніх досліджень. При побудові нас цікавить поведінка функції на інтервалах і у критичних точках. Тому графік, який ми отримуємо носить якісний характер.

Приклад 6.42. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. Проведемо дослідження за запропонованою схемою.

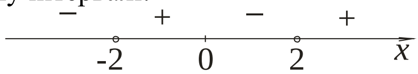
1. ОВФ: $x^2 - 4 \neq 0$; $x \neq \pm 2$; $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Знайдемо точки перетину з осями координат:

Ox: $y = 0$; $\frac{x^3}{x^2-4} = 0$; $x = 0$. Отже функція перетинає вісь Ox у початку координат $O(0,0)$.

Oy: $x = 0$; $y = \frac{0}{0-4} = 0$. Функція перетинає вісь Oy теж у початку координат $O(0,0)$.

3. Нанесемо на числову вісь точки перетину графіка з віссю Ox та точки, в яких функція не існує; обчислимо знак функції на кожному інтервалі:



Отже, функція додатна на інтервалах $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$ і від'ємна на інтервалах $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

4. Перевіримо функцію на парність:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -y(x).$$

З цього прямує, що функція непарна.

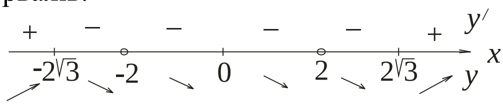
5. Функція неперіодична.

6. Дослідимо функцію на монотонність на екстремуми. Знайдемо першу похідну та критичні точки:

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2};$$

$$y' = 0: \qquad x_{1,2,3} = \left[\begin{array}{c} 0; \\ -2\sqrt{3}\ ; \\ 2\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Нанесемо критичні точки та точки в яких функція не існує на числову вісь, обчислимо знак першої похідної в кожному з отриманих інтервалів:



Обчислимо значення функції в екстремальних точках:

$$y_{min} = y\left(2\sqrt{3}\right) = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^3}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4} = 3\sqrt{3};$$

$$y_{max} = y\left(-2\sqrt{3}\right) = \frac{\left(-2\sqrt{3}\right)^3}{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4} = -3\sqrt{3}.$$

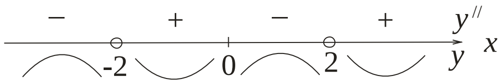
Функція зростає на інтервалах $x \in \left(-\infty; -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}; +\infty\right)$, спадає на інтервалах $x \in \left(-2\sqrt{3}; -2\right) \cup (-2; 2) \cup \left(2; 2\sqrt{3}\right)$. В точці $M_1\left(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3}\right)$ функція набуває максимуму, а в точці $M_2\left(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\right)$ – мінімуму.

7. Дослідимо функцію на опуклість, угнутість та знайдемо точки перегину. Знайдемо другу похідну, критичні точки та винесемо ці точки разом з точками розриву функції на числову вісь:

$$y'' = \frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2-(x^4-12x^2)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{4x(x^2-4)\left[(x^2-6x)(x^2-4)-(x^4-12x^2)\right]}{(x^2-4)^4} = \frac{4x(2x^2+24)}{(x^2-4)^3};$$

$$y'' = 0; \quad \frac{4x(2x^2+24)}{(x^2-4)^3} = 0; \quad x = 0.$$



Знайдемо ординату точки перегину функції:

$$y_{\text{т.п.}} = y(0) = \frac{0}{0-4} = 0.$$

Функція опукла на інтервалах $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$ і угнута на інтервалах $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$; $P(0; 0)$ - точка перегину функції.

8. Знайдемо асимптоти функції.

У функції є дві точки розриву $x = -2$ і $x = 2$. Перевіримо, чи будуть лінії $x = -2$ і $x = 2$ вертикальними асимптотами функції:

$$\lim_{x \to -2} y(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^3}{x^2-4} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 2} y(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3}{x^2-4} = \infty.$$

Так, лінії $x = -2$ і $x = 2$ є вертикальними асимптотами функції.

Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3-4x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{3x^2-4} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x}{6x} = 1;$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - 1 \cdot x\right) =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2-4} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{2x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Отже, похила асимптота задається рівнянням $y = x$.

9. Всі отриманні відомості про поведінку функції поєднаємо у графіку (рис. 6.14):

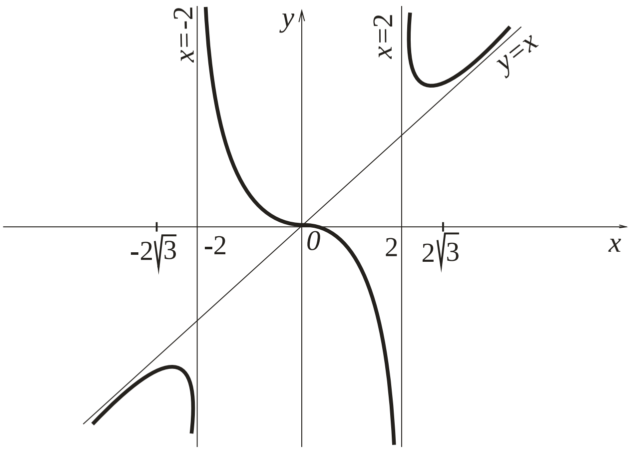


Рисунок 6.14 – Графік функції

6.3.9 Побудова графіків функцій за допомогою табличного процесора MS EXCEL

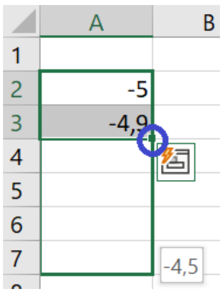
Наочну функціональну залежність змінних величин зручно ілюструвати за допомогою графіків, побудованих за допомогою табличного процесора MS EXCEL. Алгоритм побудови графіків передбачає наступні кроки:

1. Виділяємо два стовпчики для аргументів та значень функції. Стовпчик аргументів заповнюється з визначеним кроком у заданих межах з урахуванням області визначення функції.
2. Для обчислення значень функції вводимо відповідну формулу.
3. Виокремивши стовпці із аргументами та значеннями функції, обраємо в директорії меню «Вставка/діаграма», тип «Точкова».

Приклад 6.49. Побудувати графік функції $y = x^2 + e^{\frac{1}{x}}$ за допомогою MS EXCEL на проміжку $x \in [-5; 5]$

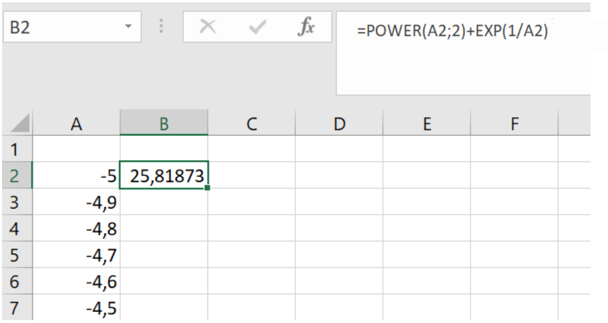
Розв'язання. Область визначення функції $x \neq 0$.

Значення аргументу в таблиці представимо з кроком 0,1. Для пришвидшення заповнення таблиці значень аргументів, заповнимо перші два рядки, та виділивши їх, натискаємо на квадратик у лівому нижньому куточку і «розтягуємо» до необхідних значень аргументу (при «розтягуванні» відповідні значення аргументу вказуються праворуч):



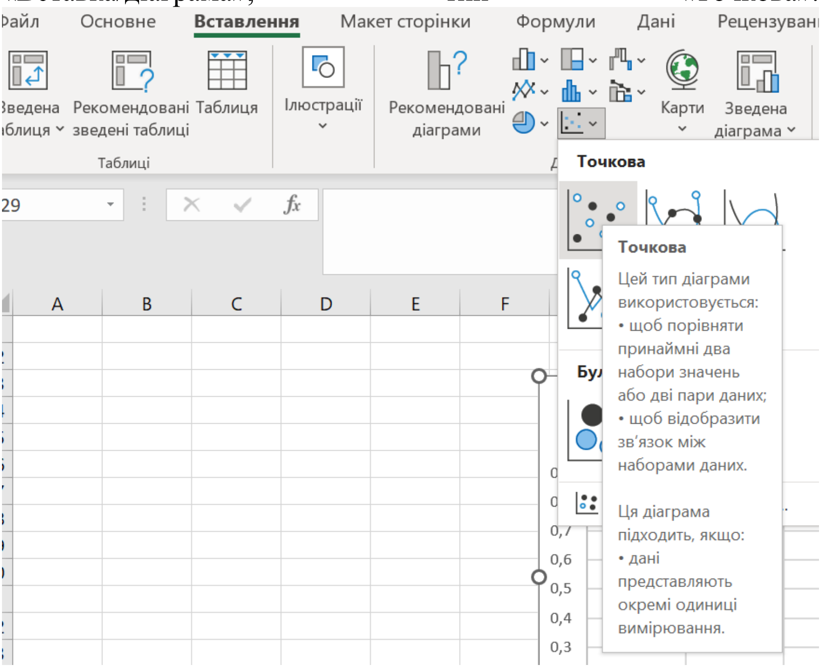
Видалимо комірку, що відповідає значенню аргументу $x = 0$.

Введемо формулу в комірку, що відповідає першому значенню аргументу:

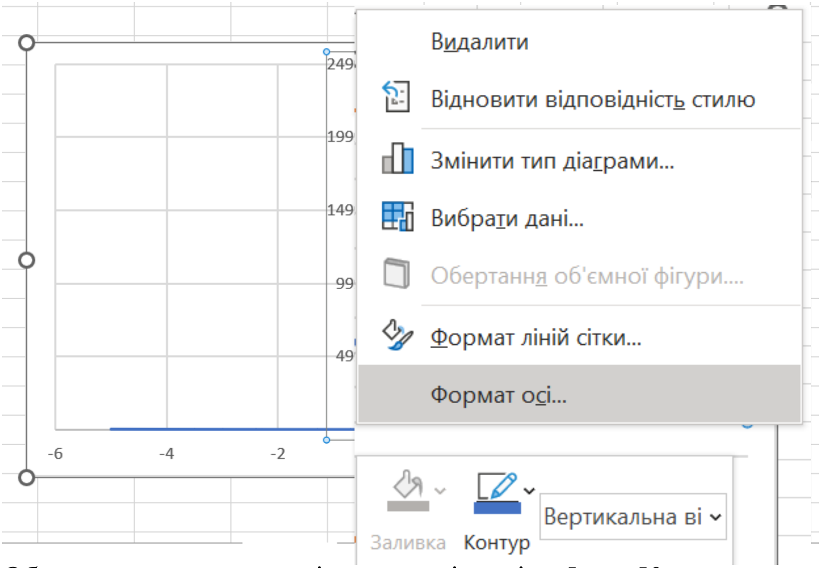


Копіюємо та вставляємо формулу у всі комірки, що відповідають введеним значенням аргументу.

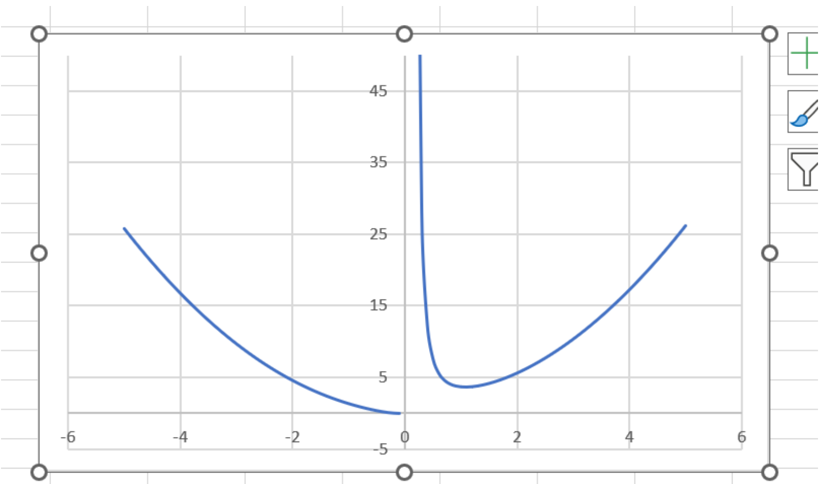
Виділяємо стовпці, що відповідають аргументам та значенням функції, в директорії меню обираємо «Вставка/діаграма», тип «Точкова».



Зменшимо діапазон зміни значень функції, натиснувши на вертикальну вісь:



Обираємо, наприклад, діапазон зміни від -5 до 50, отримаємо графік функції:



Контрольні запитання

1. Дайте визначення похідної функції.
2. Назвіть та доведіть основні правила диференціювання.
3. Як знаходиться похідна складної функції?
4. Як знаходяться похідні обернених функцій?
5. Запишіть таблицю похідних. Спробуйте вивести кожну з формул.
6. Опишіть метод логарифмічного диференціювання. У яких випадках необхідно його використовувати?
7. Як диференціюють неявно завдані функції?
8. Сформулюйте правило диференціювання функцій, завданих параметрично.
9. Дайте визначення похідних вищих порядків.
10. Що таке диференціал функції. Опишіть основні властивості диференціалу.
11. Як застосовується диференціал у наближених обчисленнях?
12. У чому полягає геометричний сенс похідної та диференціалу?
13. У чому полягає фізичний сенс похідної та диференціалу?
14. Сформулюйте та доведіть основні теореми диференціального числення. Дайте геометричну інтерпретацію кожної з них.
15. Сформулюйте правило Лопіталя для обчислення границь функції. Опишіть загальні випадки його використання.
16. Опишіть схему дослідження функції на монотонність та екстремуми за допомогою першої похідної. Наведіть приклади.
17. Опишіть схему дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину за допомогою другої похідної. Наведіть приклади.
18. Дайте визначення асимптот функції.
19. Наведіть загальну схему дослідження функції методами диференціального числення. Проілюструйте прикладом.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика. (Модуль 1) : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 256 с.

2. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 250 с.

3. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 2 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 221 с.

4. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 192 с.

5. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.

6. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв'язання (Модуль 1) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 88 с.

7. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв'язання (Модуль 2) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 125 с.

8. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв'язання (Модуль 3) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 110 с.

9. Валєєв К. Г. Вища математика : у 2 ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – Київ : КНЕУ. Ч. 1. – 2001. – 546 с. Ч.2. – 2002. – 451 с.

10. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі : у 2 кн. / За ред. Г. Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. Кн. 1. Основні розділи. – 400 с. Кн. 2. Спеціальні розділи. – 368 с.

11. Розрахунково-графічне завдання з вищої математики (для студентів-бакалаврів денної форми навчання спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) [Електрон. ресурс] / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : Л. Б. Коваленко, А. А. Кузнецова, О. П. Довгаль. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 57 с. – Режим доступа: https://eprints.kname.edu.ua/55798/, вільний (дата звернення: 10.07.2023). – Назва з екрана.

12. Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика». Частина 1 (для студентів 1 курсу денної форми навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) [Електрон. ресурс] / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. Б. Коваленко. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 44 с. – Режим доступа: https://eprints.kname.edu.ua/58511/, вільний (дата звернення: 10.07.2023). – Назва з екрана.

13. Коваленко Л. Б. Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика». Частина 2 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології) [Електрон. ресурс] / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 55 с. – Режим доступа: https://eprints.kname.edu.ua/61774/, вільний (дата звернення: 10.07.2023). – Назва з екрана.

Електронне навчальне видання

КОВАЛЕНКО Людмила Борисівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 1

Підручник

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *О. А. Норик*
Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*

Підп. до друку 11.07.2023. Формат 60×84/16
Ум. друк. арк. 17,0

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.