МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Л. П. ВОРОНОВСЬКА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 1

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2023

УДК 51(075.8)
В75

Автор

Вороновська Лариса Петрівна, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Рецензенти:

Коваленко Людмила Борисівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова;

Колісник Руслана Степанівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри алгебри та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Рекомендовано до друку Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, протокол № 9 від 25.05.2023

Вороновська Л. П.

В75 Вища математика. Модуль 1 : навч. посіб. / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2023. – 241 с.

Навчальний посібник містить основні питання з семи розділів вищої математики. Наведені основні визначення та теореми. Кожен розділ містить теоретичний матеріал, приклади задач та вказівки до їхнього розв’язання. Навчальний посібник націлений на формування у студентів базового комплексу математичних знань для забезпечення прилеглих дисциплін необхідним математичним апаратом; розвиток аналітичного мислення і вмінь для розв’язування практичних задач зі сфери професійної діяльності, що і є метою вивчення цієї навчальної дисципліни.

Посібник призначений для студентів спеціальності 275 – Транспортні технології (за видами).

УДК 51(075.8)

ЗМІСТ

Передмова

Метою вивчення вищої математики є формування у студентів вміння логічно мислити, аналізувати і складати найпростіші моделі реальних процесів, використовувати математичні методи в інженерних розрахунках та розв'язуючи прикладні задачі.

Навчальний посібник націлений на формування у студентів базового комплексу математичних знань для забезпечення прилеглих дисциплін необхідним математичним апаратом; розвиток аналітичного мислення і вмінь для розв'язування практичних задач зі сфери професійної діяльності, що і є метою вивчення цієї навчальної дисципліни.

Навчальний посібник призначений для студентів інженерних спеціальностей і має на меті допомогти їм опанувати курс вищої математики, передбачений програмою. Викладений матеріал охоплює розділи вищої математики, що входять до модулю 1.

Усі розділи підручника містять теоретичний матеріал, необхідний для засвоєння основних математичних понять та алгоритмів. У кожному параграфі наведено велику кількість розв'язаних прикладів різного рівня складності. Після кожного розділу є список контрольних запитань, що дає можливість структурувати пройдений матеріал та контролювати рівень його засвоєння.

Навчальний посібник зручно використовувати для опрацювання теоретичного матеріалу, для розв'язання задач на практичних заняттях і виконання домашніх робіт, а також для самостійного вивчення вищої математики, зокрема студентами заочної та дистанційної форм навчання.

РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1 Визначники та їхні властивості

1.1.1 Означення визначника. Мінор та алгебраїчне доповнення елемента визначника

Визначником (детермінантом) $\boldsymbol{n}$***-го порядку*** називається число $\Delta_{\boldsymbol{n}}$ $(\boldsymbol{detA})$, яке записується у вигляді квадратної таблиці

$$\Delta_{\boldsymbol{n}}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \dots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \dots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix},$$

що має $\boldsymbol{n}$ рядків та $\boldsymbol{n}$ стовпців.

Числа a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ називаються ***елементами*** визначника. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ називається ***головною діагоналлю***, а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ – ***побічною діагоналлю*** визначника.

Мінором $\boldsymbol{M_{ij}}$ елемента a_{ij} визначника n-го порядку Δ_n називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержують з визначника Δ_n шляхом видалення i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких розміщується елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення $\boldsymbol{A_{ij}}$ елемента a_{ij} визначається за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

1.1.2 Властивості визначників

1. Значення визначника не зміниться після заміни всіх його рядків відповідними стовпцями і навпаки.

2. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак, не змінившись за абсолютною величиною.

3. Визначник, який має два однакових рядки, дорівнює нулю.

4. Спільний множник елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника.

5. Визначник, у якого елементи двох паралельних рядів відповідно пропорційні, дорівнює нулю.

6. Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника становлять суми двох доданків, то визначник можна розкласти на суму двох відповідних визначників.

Приклад.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного ряду додати відповідні елементи паралельного ряду, помноживши їх на будь-яке число. (Елементарні перетворення визначника).

8. Сума добутків елементів будь-якого ряду на їхнє алгебраїчні доповнення не залежить від номера ряду і дорівнює значенню визначника:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} -$$

розклад визначника за $\boldsymbol{i}$-м рядком;

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} -$$

розклад визначника за j -м стовпцем.

1.1.3 Обчислення визначників

Загальне правило обчислення визначника має рекурентний характер (визначник n-го порядку Δ_n виражається через визначники $(n-1)$-го порядку Δ_{n-1}):

1. Визначник першого порядку $\boldsymbol{\Delta_1}$ $(n=1)$ дорівнює безпосередньо елемента a_{11}:

$$\Delta_1 = a_{11}.$$

2. Визначник другого порядку Δ_2 обчислюється за формулою:

$$\boldsymbol{\Delta_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. Визначник третього порядку Δ_3 обчислюється за правилом Саррюса (*визначник третього порядку дорівнює сумі шести доданків, кожне з яких є добутком трьох елементів: три добутки елементів, розміщених на головній діагоналі і у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна головній діагоналі, беруться зі знаком* « $+$ », а *три добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі і у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна побічній діагоналі, беруться зі знаком* « $-$ »):

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Приклад. Знайти значення визначника:

Розв'язання:

а) $\boldsymbol{\Delta_2} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \times (-2) - (-1) \times 3 = -8 + 3 = -5;$

б) за правилом Саррюса:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 6 \times 5 + (-3) \times 1 \times (-2) +$$

$$+1 \times 4 \times 2 - 2 \times 6 \times (-2) — 3 \times 1 \times 5 - 1 \times 4 \times 3 =$$

$$= 30 + 6 + 8 + 24 + 15 - 12 = 71.$$

3. Визначники третього та вищих порядків обчислюються шляхом розкладання за елементами будь-якого рядка (стовпця). Наведемо приклад обчислення визначника Δ_3 за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Приклад. Обчислити визначник третього порядку за елементами першого рядка.

Розв’язання:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= -4 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + (-1)(-1)^{1+2} M_{12} + (-2)\,(-1)^{1+3} M_{13} =$$

$$= -4 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(3 \times 5 - (-1) \times 1) + (2 \times 5 - (-1) \times 4)$$

$$- 2(2 \times 1 - 3 \times 4) =$$

$$= -4 \times 16 + 14 + 20 = -64 + 34 = -30.$$

Приклад. Обчислити визначник четвертого порядку за елементами другого рядка.

Розв'язання:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+(-4) \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 6 \times (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \times (-16 + 3 + 50 - 4 + 10 - 60) +$$

$$+4 \times (36 + 2 - 10 - 3 - 30 + 8) +$$

$$+6 \times (9 + 10 - 4 - 15 - 12 + 2) =$$

$$= -2(-17) + 4 \times 3 + 6(-10) = -14.$$

1.1.4 Обчислення визначника шляхом зведення до трикутного вигляду

Перетворення визначника так, що елементи, які розташовані з одного боку (зверху чи знизу) головної (або побічної) діагоналі, дорівнюють нулю, називається зведенням визначника до трикутного вигляду.

Якщо у визначника нулі знаходяться над будь-якою діагоналлю, то він є нижньотрикутного вигляду, а якщо нулі – під головною або побічною діагоналлю, то такий визначник – верхньотрикутного вигляду.

Якщо детермінант n-го порядку, зведений до трикутного вигляду, має нулі над або під побічною діагоналлю, то він дорівнює добутку елементів, які знаходяться на побічній діагоналі, помноженому на $(-1)^{0,5n(n-1)}$.

Якщо детермінант, зведений до трикутного вигляду, має нулі над чи під головною діагоналлю, то він дорівнює добутку елементів, які знаходяться на головній діагоналі.

Для того щоб обчислити обчислений у першому пункті визначник зведенням до трикутного вигляду, скористаємось такими властивостями детермінантів:

1. Якщо у детермінанта поміняти місцями будь-які два сусідніх стовпчика або рядки, то детермінант змінить свій знак на протилежний.

2. Детермінант не зміниться, якщо до будь-якого рядка або стовпчика додати інший рядок стовпчик помножений на довільну константу.

Приклад. Обчислити визначник четвертого порядку шляхом зведення до трикутного вигляду.

Розв'язання:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \|a_3 \leftrightarrow a_2\| = -\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \|a_2 \leftrightarrow a_1\| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} a_2 - 3a_1 \\ a_3 - 2a_1 \\ a_4 - a_1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -11 & -1 & -14 \\ 0 & -6 & -8 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & 1 & 14 \\ 0 & 6 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \|a_4 \leftrightarrow a_3\| =$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 0 & 11 & 1 & 14\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 6 & 8 & 4\end{vmatrix} = \|a_3 \leftrightarrow a_2\| = -\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 11 & 1 & 14\\ 0 & 6 & 8 & 4\end{vmatrix} =$$

$$= \left\|\begin{matrix}a_3 - 11a_2\\ a_4 - 6a_2\end{matrix}\right\| = -\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -10 & 3\\ 0 & 0 & 2 & -2\end{vmatrix} = \left\|a_4 + \frac{1}{5}a_3\right\| =$$

$$= -\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -10 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{5}\end{vmatrix} = -1 \times 1 \times (-10) \times \left(-\frac{7}{5}\right) = -14.$$

1.2 Матриці та дії над ними. Невироджені матриці. Обернена матриця

1.2.1 Матриці (основні поняття)

Матрицею розміру $\boldsymbol{m \times n}$ називається сукупність елементів a_{ij} розміщених у вигляді прямокутної таблиці чисел, що складається з m рядків та n стовпців. Матриця записується, як

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

або, скорочено, $A_{m\times n} = (a_{ij})$, a_{ij} − елементи матриці, де $i = \overline{1,m}$ – номер рядка, $j = \overline{1,n}$ – номер стовпця.

Матриця називається ***числовою***, якщо її елементи a_{ij} − числа. Матриця називається ***функціональною***, якщо її елементи a_{ij} − функції.

Матриці A і B ***рівні*** між собою, якщо рівні всі відповідні елементи матриць, тобто $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\ )$.

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців $m = n$, називається ***квадратною*** $\boldsymbol{m}$***-го порядку.*** Елементи, у яких $i = j$ $(a_{11}, a_{22}, \ldots)$, утворюють ***головну діагональ*** матриці.

Квадратна матриця, у якій всі елементи, окрім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною.***

Діагональна матриця, у якій кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається ***одиничною*** і позначається E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що розміщуються вище (нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***нижньою трикутною (верхньою трикутною) або східчастою.***

Матриця, усі елемент якої дорівнюють нулю, називається ***нульовою*** і позначається O.

Матриця, яка складається тільки з одного рядка $m = 1$, називається ***вектором-рядком***

$$B = (b_1\ \ b_2\ \ \ldots\ \ b_n).$$

Матриця, яка складається тільки з одного стовпця $n = 1$, називається ***вектором-стовпцем***

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Операції над матрицями

Додавання (різниця)

Додавати (віднімати) можна лише матриці однакового розміру.

Сумою двох матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$ і $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n} = (c_{ij})$, така, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$(i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\ )$.

Приклад.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно виконується віднімання матриць.

Множення на число

Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число k називається матриця $B_{m\times n} = (b_{ij})$, така, що $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\ )$.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad k = 2, \qquad 2A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 6 & 2 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Властивості лінійних дій над матрицями:

1. $A + B = B + A$.
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$.
3. $A+O=A$.
4. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$.
5. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$.
6. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$.

Елементарні перетворення матриць:

– перестановка місцями двох рядків матриці;
– множення всіх елементів ряду матриці на число, відмінне від нуля;
– додавання до всіх елементів ряду матриці відповідних елементів іншого ряду, помноженого на число.

Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними,*** якщо одна з них отримується з іншої за допомогою елементарних перетворень. Записується: $A \sim B$.

Множення матриць

Операцію добутку двох матриць можна виконати тільки тоді, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на матрицю* $B_{n\times p} = (b_{jk})$ називається матриця $C_{m\times p} = (c_{ik})$, така, що $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$, де $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,p}$.

Приклад. Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Якщо матриці A і B квадратні, одного розміру, то існує добуток $A \cdot B$ і $B \cdot A$, до того ж $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Приклад. Довести, що $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 - 12 - 2 & 2 - 8 + 1 & -4 - 12 + 5 \\ 12 - 6 - 10 & 3 - 4 + 5 & -6 - 6 + 25 \\ -4 + 9 - 2 & -1 + 6 + 1 & 2 + 9 + 5 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & -5 & -11 \\ -4 & 4 & 13 \\ 3 & 6 & 16 \end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8+3+2 & -16-2-6 & 4+5-2 \\ 6+6-3 & -12-4+9 & 3+10+3 \\ -4+3-5 & 8-2+15 & -2+5+5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 13 & -22 & 7 \\ 9 & -7 & 16 \\ -6 & 21 & 8 \end{pmatrix};$$

$$A\cdot B \neq B\cdot A.$$

Властивості добутку матриць:

1. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;
2. $A\cdot(B+C)=AB+AC$;
3. $(A+B)\cdot C=AC+BC$;
4. $\alpha(AB)=(\alpha A)B$.

Транспонування матриць. Матриця, утворена з матриці A заміною рядків стовпцями (або навпаки), називається ***транспонованою*** матрицею відносно матриці A і позначається A^T.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \ A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Властивості операції транспонування:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

1.2.3 Обернена матриця

Нехай $A -$ квадратна матриця n-го порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця A називається ***невиродженою,*** якщо визначник $detA$ не дорівнює нулю:

$$detA \neq 0.$$

У іншому разі ($detA = 0$) матриця A називається ***виродженою.***

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до невиродженої квадратної матриці A, якщо виконується умова

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

де $E -$ одинична матриця того самою порядку, що й матриця A. Матриця A^{-1} має ті самі розміри, що й матриця A.

Теорема. *Для будь-якої невиродженої матриці A n-го порядку існує дина обернена матриця A^{-1}.*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11}^T A_{12}^T \dots A_{1n}^T \\ A_{21}^T A_{22}^T \dots A_{2n}^T \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ A_{n1}^T A_{n2}^T \dots A_{nn}^T \end{pmatrix},$$

де A_{ij}^T – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} транспонованої матриці A^T.

Властивості оберненої матриці:

1. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$.
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
4. $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

План знаходження оберненої матриці A^{-1}

1. Обчислюємо визначник матриці $detA$.
2. Знаходимо транспоновану матрицю A^T.
3. Обчислюємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці A^T.
4. Записуємо обернену матрицю A^{-1}.
5. Виконуємо перевірку, обчислюючи

$$A^{-1} \cdot A = E \quad \text{або } A \cdot A^{-1} = E.$$

Приклад. Переконатися, що матриця A невироджена, і знайти обернену матрицю A^{-1}. Перевірити, чи $A^{-1} \cdot A = E$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

1. $detA = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 15 + 4 + 18 = 41 \neq 0 -$ матриця A невироджена, а отже, має обернену.

2. $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Знайдемо алгебраїчні доповнення до матриці A^T.

$A_{11}^T = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $A_{12}^T = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$;

$A_{13}^T = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $A_{21}^T = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$;

$A_{22}^T = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8$; $A_{23}^T = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$;

$A_{31}^T = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19$; $A_{32}^T = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2$;

$A_{33}^T = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11$.

4. Запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 2 & 11 & -1 \\ -6 & 8 & 3 \\ 19 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

5. Перевіримо рівність $A^{-1} \cdot A = E$:

$$A^{-1}A = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 2 & 11 & -1 \\ -6 & 8 & 3 \\ 19 & 2 & 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 4+33+4 & -6+11-5 & 2+0-2 \\ -12+24-12 & 18+8+15 & -6+0+6 \\ 38+6-44 & -57+2+55 & 19+0+22 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 41 & 0 & 0 \\ 0 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, отримана обернена матриця A^{-1} правильна.

1.2.4 Ранг матриці

Розглянемо прямокутну матрицю A розміру $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Виокремимо в ній k рядків і k стовпців ($k \le \min(m, n)$). З виокремлених елементів запишемо визначник k-го порядку. Усі такі визначники називаються ***мінором цієї матриці.***

Найбільший із порядків мінорів цієї матриці, відмінний від нуля, називається ***рангом матриці.*** Позначають його $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{rangA}$.

Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається ***базисним.*** У матриці може бути декілька базисних мінорів.

Властивості рангу матриці:

1. Під час транспонування матриці її ранг не змінюється.

2. Якщо видалити з матриці нульовий ряд, то ранг матриці не зміниться.

3. Ранг матриці не зміниться при елементарних перетвореннях матриці.

Приклад. Знайти ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Визначник четвертого порядку скласти не можливо. Усі мінори 3-го порядку дорівнюють нулю, бо є нульові стовпці, але є мінор другого порядку відмінний від нуля

$$M_Б = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 6 = -15 \neq 0.$$

Отже, $rangA = 2$. Базисний мінор складається з елементів, які розміщуються на перетині 2-го та 3-го рядків із 1-м та 3-м стовпцями.

1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та методи їхнього розв'язання

1.3.1 Основні поняття

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (далі – СЛАР), яка має m рівнянь з n невідомими, називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де числа $a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ називаються ***коефіцієнтами*** системи, числа b_i − ***вільними членами.***

Таку систему зручно записувати в ***матричній формі***

$$A \cdot X = B.$$

Тут A — матриця коефіцієнтів системи, яка називається ***основною матрицею***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ — вектор-стовпець з невідомих x_j,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ — вектор-стовпець з вільних членів b_i.

Система називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю: $b_i = 0 \ (i = \overline{1, m})$, і – ***неоднорідною***, якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля.

Система, у якій число рівнянь дорівнює числу невідомих n, називається ***квадратною n-го порядку***.

Розширеною матрицею системи називається матриця $\bar{A}$ системи, доповнена стовпцем вільних членів:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Розв'язком системи називається n значень невідомих $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, при підстановці яких усі рівняння системи перетворюються на істинні рівності. Будь-який розв'язок системи можна записати у вигляді матриці-стовпця

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв’язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв’язку.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв’язок, і ***невизначеною***, якщо має декілька розв’язків.

1.3.2 Теорема Кронекера – Капеллі

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}.$$

Вичерпну відповідь на питання про сумісність цієї системи дає теорема Кронекера – Капеллі.

Теорема. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці* $\bar{A}$ *системи дорівнює рангу основної матриці* A*:* $rang\bar{A} = rangA = r$.

Якщо ранг сумісної системи дорівнює числу невідомих $r = n$, *то система має лише один єдиний розв’язок (є визначеною).*

Якщо ранг сумісної системи менший за число невідомих $r < n$, то система є невизначеною і має нескінченну множину розв'язків, які залежать від $n - r$ довільних сталих.

1.3.3 Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Основна матриця A такої системи квадратна. Визначник цієї матриці

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається *визначником системи.* Якщо визначник системи відмінний від нуля, то система невироджена.

Правило Крамера. Якщо визначник квадратної системи відмінний від нуля $detA = \Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який обчислюють за формулою:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad (j = \overline{1, n}),$$

де Δ_j – визначник, отриманий із основного визначника Δ системи шляхом заміни j-го стовпця при невідомому x_j стовпцем вільних членів.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з $\Delta_j \neq 0$, то система несумісна, тобто розв'язків не має.

Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = 0$, то система рівнянь або несумісна, або невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = -4 \\ x + 3y - 2z = 13. \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 24 - 1 - 9 - 4 + 4 = 20;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 13 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 13 + 8 - 3 + 8 + 52 = 40;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 13 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 26 + 1 + 24 - 39 + 4 + 4 = 20;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 13 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 156 + 36 + 26 + 4 = -80.$$

$$\text{Тоді} \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{40}{20} = 2,$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20}{20} = 1,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-80}{20} = -4.$$

Перевірка: $2x - 4y + z = -4;$

$$2 \times 2 - 4 \times 1 + (-4) = -4;$$

$$4 - 4 - 4 = -4;$$

$$-4 = -4 \ - \text{тотожність істинна.}$$

$$x = 2; \ \ y = 1; \ \ z = -4.$$

Приклад. Розв’язати сумісну неоднорідну невизначену систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 14 \end{cases}.$$

Розв’язання

Ця система містить чотири невідомі змінні та 2 рівняння. Оскільки кількість невідомих більше за кількість рівнянь, така система є невизначеною. Запишемо розширену матрицю та визначимо їхній ранг:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 14 \end{array}\right) \sim \|a_2 - a_1\| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right) = B.$$

Кількість ненульових рядків матриці B, приведеної до вигляду трапеції, дорівнює двом, отже, $rangB = 2$. Ранги матриці системи і її розширеної матриці дорівнюють рангу матриці B, оскільки остання отримана з них шляхом елементарних перетворень.

Таким чином, ранг матриці $rangA = 2$, ранг розширеної матриці $rang\bar{A} = 2$. Отже, за теоремою Кронекера – Капеллі система рівнянь є сумісною, але оскільки ранг сумісної системи менший за число невідомих $r < n$, то система є невизначеною і має нескінченну множину розв’язків, які залежать від $n - r$ довільних сталих, у цьому випадку $n = 4,$ а $r = 2,$ тому розв’язок буде залежати від двох довільних сталих.

Оберемо один з базисних, не рівних нулю, мінорів матриці A, який містить у собі розв’язні змінні x_2 та x_3:

$$M_Б = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 1 = 20 = \Delta.$$

Далі впишемо рівняння системи, що містять рядки цього мінору, одночасно залишаючи в лівих частинах рівнянь тільки ті змінні, у яких коефіцієнти при змінних є стовбцями мінору Δ , а інші змінні перенесемо до правої частини:

$$\begin{cases} 7x_2 + x_3 = 4 - 5x_1 - 3x_4 \\ x_2 + 3x_3 = 14 - 5x_1 - 5x_4 \end{cases}.$$

Застосуємо формули Крамера:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 - 5x_1 - 3x_4 & 1 \\ 14 - 5x_1 - 5x_4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(4 - 5x_1 - 3x_4) - (14 - 5x_1 - 5x_4) = -2 - 10x_1 - 4x_4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 4 - 5x_1 - 3x_4 \\ 1 & 14 - 5x_1 - 5x_4 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(14 - 5x_1 - 5x_4) - (4 - 5x_1 - 3x_4) = 94 - 30x_1 - 32x_4.$$

Підставимо значення обчислених вище трьох визначників у формули Крамера та знайдемо шукані невідомі змінні. А саме:

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2-10x_1 - 4x_4}{20} = -0{,}1 - 0,5x_1 - 0,2x_4;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{94 - 30x_1 - 32x_4}{20} = 4{,}7 - 1{,}5x_1 - 1{,}6x_4.$$

1.3.4 Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці

Теорема. *Якщо основна матриця А квадратної системи* $A \cdot X = B$ *невироджена (тобто* $detA \neq 0$*), то система має єдиний розв’язок, який обчислюється за формулою:*

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Оскільки матриця A – невироджена, то існує матриця A^{-1}. Тоді

$$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} \cdot B; \quad (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B;$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B; \quad X = A^{-1} \cdot B.$$

Зауваження. Як і у випадку використання формул Крамера, матричний метод не застосовують при розв’язанні систем з великою кількістю невідомих, тому що це вимагає від нас обчислення одного визначника n-го порядку (визначник матриці А) та n визначників $(n-1)$-го порядку (алгебраїчні доповнення).

Приклад. Розв'язати систему рівнянь методом оберненої матриці (матричним методом)

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 2z = 5 \\ 2x + 3y - 5z = -1 \end{cases}.$$

Розв'язання: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$

1. $detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 49 \neq 0$ – матриця A невироджена і обернена до неї існує.

2. $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$

3. Знайдемо алгебраїчні доповнення кожного елемента транспонованої матриці A^T:

$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 14;$ $A_{12}^T = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 7;$

$A_{13}^T = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$ $A_{21}^T = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 9;$

$A_{22}^T = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -13;$ $A_{23}^T = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7;$

$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 11;$ $A_{32}^T = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5;$

$A_{33}^T = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -14.$

1. З отриманих алгебраїчних доповнень складемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 9 & -13 & -7 \\ 11 & -5 & -14 \end{pmatrix}.$$

2. Знайдемо матрицю X:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 9 & -13 & -7 \\ 11 & -5 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x = 1; y = -1; z = 0.$$

3. Перевірка: $3x + 2y - z = 1$;

$$3 \times 1 + 2 \times (-1) - 0 = 1;\ \ 1 = 1.$$

$$x = 1; y = -1; z = 0.$$

1.3.5 Розв’язування систем за методом Гауса

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}.$$

Нехай A – основна матриця системи, а $\bar{A}$ – розширена матриця цієї системи:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Оскільки, кожному елементарному перетворенню системи відповідає елементарне перетворення розширеної матриці системи, то замість системи будемо розглядати розширену матрицю цієї системи.

Елементарним перетворенням рядків розширеної матриці $\bar{A}$ і перестановці стовпців тільки основної матриці A відповідають такі рівносильні перетворення лінійної системи:

1. Перестановка будь-яких двох рівнянь (перенумеровування рівнянь).

2. Множення обох частин будь-якого рівняння на довільне ненульове число.

3. Додавання до обох частин будь-якого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число.

4. Перенумерування невідомих.

Метод Гауса дослідження і розв'язування СЛАР складається з двох важливих етапів.

На першому етапі (*прямий хід* методу Гауса – зверху вниз) здійснюють послідовне виключення невідомих за допомогою зазначених рівносильних перетворень системи.

У результаті система зводиться до східчастої форми.

На другому етапі (*зворотний хід* методу Гауса – знизу вгору) вільні невідомі приймають за довільні сталі (параметри). Відкидають нульові рівняння (тотожності $0 = 0$). Переносяться у праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержують систему верхньотрикутної форми відносно базисних невідомих. Цю систему розв'язують, підіймаючись знизу вгору.

Зауваження. Метод Гауса використовують для розв'язання систем з будь-якою кількістю невідомих, тому що зі збільшенням n кількість обчислень збільшується незначно.

Приклад. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Гауса:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 2t = -7, \\ 3x + y + z - t = 5, \\ 2x - 2y + z - 3t = 14, \\ x - 3y - 4z + t = 6. \end{cases}$$

Розв’язання:

Запишемо розширену матрицю системи та виконаємо елементарні перетворення для подання у східчастій формі:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 14 \\ 1 & -3 & -4 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left\| \begin{array}{c} a_2 - 3a_1 \\ a_3 - 2a_1 \\ a_4 - a_1 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -7 \\ 0 & -8 & 7 & 5 & 26 \\ 0 & -8 & 5 & 1 & 28 \\ 0 & -6 & -2 & 3 & 13 \end{array}\right) \sim$$

$$\left\| \begin{array}{c} a_3 - a_2 \\ 4a_4 - 3a_2 \end{array} \right\| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -7 \\ 0 & -8 & 7 & 5 & 26 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -29 & -3 & -26 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -7 \\ 0 & -8 & 7 & 5 & 26 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -29 & -3 & -26 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \| a_4 - 29a_3 \| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -7 \\ 0 & -8 & 7 & 5 & 26 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 55 & -55 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 2t = -7, \\ -8y + 7z + 5t = 26, \\ -z - 2t = 1, \\ 55t = -55. \end{cases}$$

Отже, з останнього рівняння маємо: $t = -1$. З третього рівняння отримаємо значення z: $-z - 2 \times (-1) = 1$; $z = 1$. Підставивши в другий рядок отримані значення z і t, отримаємо: $-8y+7-5=26$; $y=-3$. І, нарешті, з першого рядка $x+3y-2z-2t=-7$ з урахуванням отриманих значень t, z і y: $x-9-2+2=-7$, маємо: $x=2$.

$$x=2, y=-3, z=1, t=-1.$$

1.3.6 Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо однорідну систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

Однорідна система завжди сумісна, тому що завжди має такий розв’язок:

$$x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0.$$

Цей розв’язок називається *нульовим* (або *тривіальним*). Будь-який інший розв’язок, у якому хоча б один невідомий відмінний від нуля, називається *ненульовим* (або *нетривіальним*).

Теорема. *Для того щоб однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь мала нетривіальний розв’язок, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи був менше, ніж число невідомих* $(rangA<n)$.

Якщо кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих $(m=n)$, умова $(rangA<n)$ відповідає тому, що визначник системи дорівнює нулю ($\Delta=0$).

Приклад. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 0, \\ x - 4y + z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 40 - 3 + 6 - 36 - 5 + 4 = 6 \neq 0.$$

Ранг матриці системи дорівнює 3 $(rangA = 3)$ і співпадає з кількістю невідомих, а отже, система має лише тривіальний розв'язок, тому $x = 0, y = 0, \ z = 0.$

Приклад. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0, \\ 3x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 1 - 18 - 6 + 4 + 9 = 0.$$

Ранг матриці менший 3, тому така система має нетривіальний розв'язок.

Спосіб 1. Знайдемо розв'язок, вилучивши одне з рівнянь системи, наприклад третє:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

Нехай $z = k$, де k – довільне число.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -k, \\ x + 2y = -2k. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7; \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -k & -3 \\ -2k & 2 \end{vmatrix} = -2k - 6k = -8k;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -k \\ 1 & -2k \end{vmatrix} = -4k + k = -3k.$$

Отже, маємо: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{8}{7}k;\ \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{3}{7}k;\ \ \ z = k$,

або $x = -8k;\ \ y = -3k;\ \ \ z = 7k$, де $k\epsilon R$.

Спосіб 2. Розв'яжемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ \quad -7y - 3z = 0, \\ \qquad\quad 0z = 0. \end{cases}$$

Отже, з останнього рівняння маємо: $z = k,\ k\epsilon R$. Підставивши в другий рядок отримане значення z, отримаємо: $-7y - 3k = 0$; $y = -\frac{3}{7}k$. І, нарешті, з першого рядка $x + 2y + 2z = 0$, з урахуванням отриманих значень z і $y : x - \frac{6}{7}k + 2k = 0$, маємо $x = -\frac{8}{7}k$.

Відповідь: $x = -8k$; $y = -3k$; $z = 7k$, де $k \epsilon R$.

1.4 Задачі професійного спрямування

Приклад. Знайти загальний потік схеми мережі, зображеної на рисунку 1.1. Припускаючи, що всі потоки є невід'ємними, знайти найбільше можливе значення для x_3.

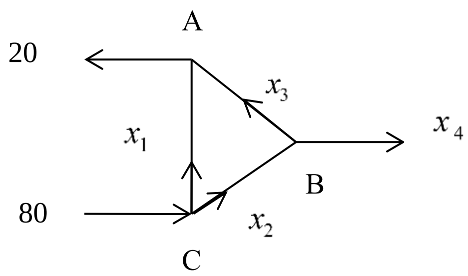

Рисунок 1.1

Розв'язання. Запишемо рівняння, які описують потік, і знайдемо загальний розв'язок системи. Позначимо перехрестя вулиць і невідомі потоки у вітках так, як зображено на рисунку 1.1. На кожному перехресті «потік у» і «потік з» однакові.

Таблиця 1.1

Перехрестя	Потік в	Потік з
A	$x_1 + x_3$	20
B	x_2	$x_3 + x_4$
C	80	$x_1 + x_2$

Загальний потік у сітці 80 дорівнює загальному потоку виходу з сітки $20 + x_4$, який спрощують до $x_4 = 60$. Комбінуючи це рівняння з перетвореними першими трьома рівняннями, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 20 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 80 \\ x_4 = 60 \end{cases}.$$

Рядкова редукція асоційованої розширеної матриці

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 20 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 80 \\ x_4 = 60 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = 80 - x_2 \\ x_2 = 60 + x_3 \\ x_3 = 20 - x_1 \\ x_4 = 60 \end{cases}.$$

Загальний потік моделі для сітки описано так

$$\begin{cases} x_1 = 80 - x_2 \\ x_2 = 60 + x_3 \\ x_3 \epsilon R, \text{ є вільна} \\ x_4 = 60 \end{cases}.$$

Від'ємний потік у вітці сітки відповідає потокові у протилежному напрямку до вказаного потоку, як це показано на моделі. Оскільки вулиці в цій задачі з однобічним рухом, то жодна змінна тут не може набувати від'ємного значення. Цей факт спричиняє відомі обмеження на можливі значення змінних. Наприклад, $x_3 \leq 20$, оскільки x_3 не може бути від'ємним.

Приклад. Знайти загальний рух у схемі на мережі доріг (потік вимірюється в автомобілях за хвилину). Описати загальний рух у схемі, якщо дорога з потоком x_4 закрита. Якщо $x_4 = 0$, то якого мінімального значення може набути x_1?

Розв'язання. Запишемо рівняння, які описують потік, і знайдемо загальний розв'язок системи.

Таблиця 1.2

Перехрестя	Потік в	Потік з
А	x_1	$x_3 + x_4 + 40$
В	200	$x_1 + x_2$
С	$x_3 + x_2$	$x_5 + 100$
Д	$x_4 + x_5$	60

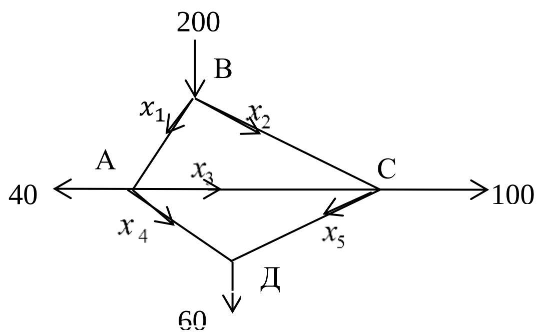

Рисунок 1.2

Загальний потік у сітці дорівнює загальному потоку виходу з сітки, тобто 200 автомобілів за хвилину. Комбінуючи усі рівняння, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 40 \\ x_1 + x_2 = 200 \\ x_3 + x_2 - x_5 = 100 \\ x_4 + x_5 = 60 \end{cases}.$$

Складемо розширену матрицю системи та застосуємо метод Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 40 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 40 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 160 \\ x_4 + x_5 = 60 \end{cases},$$

де x_3і x_5 є вільними.

Якщо дорога з потоком x_4 закрита, то система виглядає так:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 40 \\ x_1 + x_2 = 200 \\ x_3 + x_2 - x_5 = 100 \\ x_5 = 60 \end{cases}.$$

Тоді загальний потік моделі для сітки описується так

$$\begin{cases} x_1 = 40 + x_3 \\ x_2 = 160 - x_3; \\ x_5 = 60 \end{cases} \quad x_3 \text{ – є вільною.}$$

Приклад. Транспортне підприємство пропонує три типи послуг перевезення, використовуючи чотири види ресурсів. Норми витрат ресурсу i-го вигляду перевезення на забезпечення перевезення j-го вигляду подані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство запропонує кількість кожного типу послуги, заданої матрицею X, а вартість кожного вигляду ресурсів у вигляді матриці P

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 8 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 275 \\ 230 \\ 495 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 160 & 10 & 25 & 45 \end{pmatrix}.$$

Знайти: а) S – матрицю повних витрат ресурсів кожного вигляду на підготовку всіх видів перевезень за певний період;

б) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

Розв'язання: а) матрицю повних затрат ресурсів кожного вигляду на підготовку всіх перевезень за певний період знаходять за формулою $S = A \cdot X$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 8 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 275 \\ 230 \\ 495 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 275 + 7 \times 230 + 9 \times 495 \\ 8 \times 275 + 4 \times 230 + 3 \times 495 \\ 6 \times 275 + 2 \times 230 + 8 \times 495 \\ 5 \times 275 + 4 \times 230 + 9 \times 495 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}1100+1610+4455\\2200+920+1485\\1650+460+3960\\1375+920+4455\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7165\\4605\\6070\\6750\end{pmatrix}.$$

б) повну вартість усіх витрачених ресурсів можна знайти за формулою $C=P\cdot X$ або $C=P\cdot S$

$$C=\begin{pmatrix}160 & 10 & 25 & 45\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7165\\4605\\6070\\6750\end{pmatrix}=1647950.$$

Отже, повна вартість витрачених ресурсів становить 1 647 950 грош. од.

Приклад. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2:

$$S=\begin{pmatrix}1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3\\0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}1\\0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}1\end{pmatrix};\ \Delta Y_1=\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix};\ \Delta X_2=\begin{pmatrix}5\\-10\\15\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використаємо формулу, яка поєднує вектор валового випуску X, матрицю повних витрат S і вектор кінцевого продукту Y:

$$X = S\,Y.$$

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1 обчислимо, як

$$\Delta X_1 = S \cdot \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 + 8 + 9 \\ 3 + 4 + 33 \\ 6 + 10 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 40 \\ 19 \end{pmatrix};$$

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2, обчислимо, як

$$\Delta Y_2 = S^{-1} \cdot \Delta X_2.$$

Знайдемо матрицю, обернену до S:

$$\det S = \begin{vmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0{,}024 + 0{,}264 + 0{,}045 - 0{,}036 - 0{,}66 - 0{,}012 = -0{,}375;$$

$$S^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 1.1 & 0.1 \end{vmatrix} = 0{,}02 - 0{,}55 = -0{,}53;$$

$$A_{12}^T = -\begin{vmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{vmatrix} = -(0{,}04 - 0{,}15) = 0{,}11;$$

$$A_{13}^T = \begin{vmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 1{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}44 - 0{,}06 = 0{,}38;$$

$$A_{21}^T = -\begin{vmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 \\ 1{,}1 & 0{,}1 \end{vmatrix} = -(0{,}03 - 0{,}66) = 0{,}63;$$

$$A_{22}^T = \begin{vmatrix} 1{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}12 - 0{,}18 = -0{,}06;$$

$$A_{23}^T = -\begin{vmatrix} 1,2 & 0,3 \\ 0,3 & 1,1 \end{vmatrix} = -(1,32 - 0,09) = -1,23;$$

$$A_{31}^T = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,15 - 0,12;$$

$$A_{32}^T = -\begin{vmatrix} 1,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 \end{vmatrix} = -(0,6 - 0,24) = -0,36;$$

$$A_{33}^T = \begin{vmatrix} 1,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,24 - 0,12 = 0,12.$$

$$S^{-1} = -\frac{1}{0,375}\begin{pmatrix} -0,53 & 0,11 & 0,38 \\ 0,63 & -0,06 & -1,23 \\ 0,03 & -0,36 & 0,12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,41 & -0,29 & -1,01 \\ -1,68 & 0,16 & 3,28 \\ -0,08 & 0,96 & -0,32 \end{pmatrix}.$$

Приріст кінцевої продукції ΔY_2 знайдемо, як добуток матриць

$$\Delta Y_2 = S^{-1} \cdot \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 1,41 & -0,29 & -1,01 \\ -1,68 & 0,16 & 3,28 \\ -0,08 & 0,96 & -0,32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7,05 + 2,9 - 15,15 \\ -8,4 - 1,6 + 49,2 \\ -0,4 - 9,6 - 4,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,2 \\ 39,2 \\ -5,8 \end{pmatrix}.$$

Контрольні запитання

1. Що таке визначник? Дайте визначення мінору та алгебраїчному доповненню.

2. Які правила обчислення визначників третього порядку ви знаєте? Наведіть приклади.

3. Обчислення визначників розкладанням їх за рядком (стовпцем). Наведіть приклади.

4. Дайте визначення матриці.

5. Які лінійні операції над матрицями ви знаєте?

6. Сформулюйте необхідні умову та правило виконання дії множення матриць. Наведіть приклади.

7. Сформулюйте поняття рангу матриці та опишіть методи його обчислення.

8. Дайте визначення системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Що називається розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?

9. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається сумісною, визначеною?

10. Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі.

11. Метод Крамера розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

12. Як застосовується метод оберненої матриці для розв'язання системи лінійних рівнянь?

13. Опишіть сутність методу Гауса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Для розв'язання яких систем рекомендують його використання?

14. Як знайти розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь?

РОЗДІЛ 2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

2.1 Скалярні та векторні величини. Основні поняття

Розрізняють векторні та скалярні величини. Величина, яка характеризується певним числовим значенням, називається ***скалярною величиною*** (***скаляром***).

Величина, яка характеризується не тільки числовим значенням, а й напрямком, називається ***векторною величиною*** (***вектором***).

Вектор зображується напрямленим прямолінійним відрізком, у якому зазначено його ***початок*** A і ***кінець*** B. Позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$ (рис. 2.1).

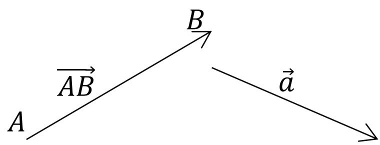

Рисунок 2.1

Модулем (***абсолютною величиною, довжиною***) вектора називається довжина відрізка, який зображає цей вектор. Позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор, початок і кінець якого співпадають, називається ***нульовим вектором*** і позначається $\vec{0}$. Його модуль дорівнює нулю, а напрямок довільний (невизначений).

Вектор одиничної довжини називається ***одиничним вектором*** (***ортом***).

Вектори, які належать паралельним прямим або одній прямій, називаються ***колінеарними*** (***паралельними***). Позначається $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Вектори, що належать паралельним площинам або одній площині, називаються ***компланарними.***

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***рівними***, якщо:

1) модулі векторів рівні $|\vec{a}| = |\vec{b}|$;

2) вектори колінеарні $(\vec{a} \parallel \vec{b})$ і напрямлені в один бік. Позначається $\vec{a} = \vec{b}$.

Множина всіх векторів, які дорівнюють вектору $\vec{a}$, називається множиною ***вільних векторів***.

2.2 Лінійні операції над векторами

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який визначається за правилом трикутника (рис. 2.2) або за правилом паралелограма (рис. 2.3).

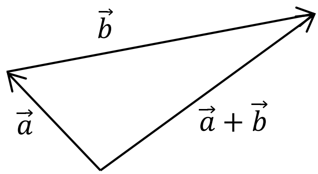

Рисунок 2.2

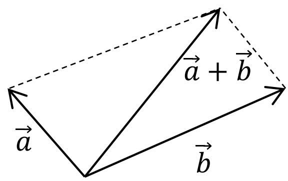

Рисунок 2.3

Властивості операції додавання векторів:

1. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

2. Асоціативність: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

3. Комунікативність: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Вектором, протилежним вектору $\vec{a}$, звуть такий вектор (його позначають $-\vec{a}$), що сума $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$ дорівнює нульовому вектору.

Ненульові протилежні вектори мають рівні довжини $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$ і протилежні напрямки.

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$. Різниця векторів визначається за правилом трикутника (рис. 2.4) або за правилом паралелограма (рис. 2.5).

Різниця $\vec{a}-\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

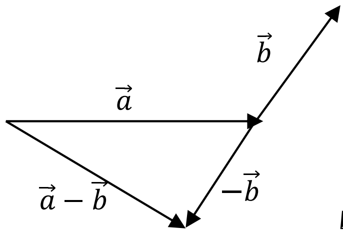

Рисунок 2.4

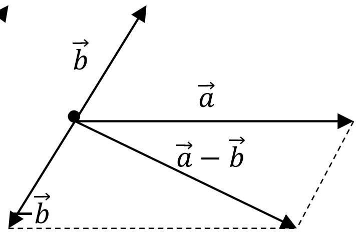

Рисунок 2.5

Добутком вектора $\vec{a}$ та числа λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який задовольняє такі умови: 1) $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$; 2) $\lambda\vec{a}\parallel\vec{a}$; 3) якщо $\lambda>0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в один бік; якщо $\lambda<0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в протилежні боки; якщо $\lambda=0$, то $\vec{a}=\vec{0}$.

Властивості операції множення вектора на число:

1. Комунікативність: $\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$.
2. Асоціативність: $(\lambda\beta)\vec{a}=\lambda(\beta\vec{a})$.
3. Дистрибутивність: $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

$$(\lambda+\beta)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\beta\vec{a}.$$

Два ненульові вектори називають ***колінеарними***, якщо їхні напрямки збігаються або протилежні.

2.3 Проєкція вектора. Координати вектора

Проєкцією вектора $\vec{a}$ на ненульовий вектор $\vec{b}$ $\left(\vec{b} \neq 0\right)$ називається число, яке позначається $np_{\vec{b}}\,\vec{a}$ і обчислюється за формулою:

$$np_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|cos\varphi,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ (рис. 2.6).

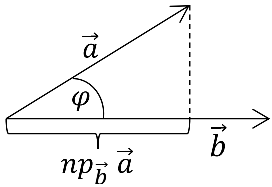

Рисунок 2.6

Прямокутна декартова система координат на площині є упорядкована пара двох взаємно перпендикулярних координатних осей Ox і Oy, причому початком координат кожної з осей є їхня спільна точка O (рис. 2.7). Осі Ox і Oy упорядковано так: якщо вісь Ox повернути навколо точки O на кут $\pi/2$ проти руху годинникової стрілки, то вона співпаде з віссю Oy. Вісь Ox – це вісь абсцис, а вісь Oy – вісь ординат. Вектори $\overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{e_1}$ і $\overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{e_2}$ є базисними векторами (ортами) прямокутної декартової системи координат; їх позначають $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{e_2} = \vec{\jmath}$.

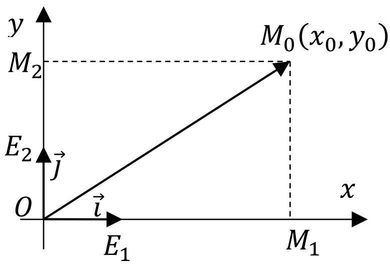

Рисунок 2.7

Площину з побудованою системою координат звуть координатною площиною. Нехай M_0 – деяка точка площини. Опустимо з неї перпендикуляри до осей Ox і Oy, які перетнуть зазначені координатні осі відповідно у точках M_1 і M_2.

Координатами точки M_0 у прямокутній системі координат називають упорядковану пару чисел (x_0, y_0).

Число x_0, називають абсцисою, а число y_0 − ординатою точки M_0 і записують $M_0(x_0, y_0)$.

Вектор $\overrightarrow{OM_0}$ є діагональ прямокутника $OM_1M_0M_2$ і за правилом паралелограма є сумою векторів $\overrightarrow{OM_1}$ і $\overrightarrow{OM_2}$, де $\overrightarrow{OM_1} = x_0\vec{i}$; $\overrightarrow{OM_2} = y_0\vec{j}$:

$$\overrightarrow{OM_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$$

− це розклад вектора у заданому базисі на складові вектора.

Модуль вектора $\overrightarrow{OM_0}$ буде обчислюватись за формулою:

$$\left|\overrightarrow{OM_0}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Відстань між довільними точками $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, обчислюють за формулою:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Нехай у просторі задана декартова прямокутна система координат (рис. 2.8). Упорядкована трійка одиничних векторів (ортів) $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ зі спільним початком O, спрямованих уздовж додатного напрямку осей Ox, Oy і Oz відповідно утворює ***координатний базис*** $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Нехай у координатному просторі $Oxyz$ заданий деякий вектор $\vec{a}$. Проєкції вектора $\vec{a}$ на осі координат

$$a_x = np_{Ox}\,\vec{a};\ \ a_y = np_{Oy}\,\vec{a};\ \ a_z = np_{Oz}\,\vec{a}$$

називаються ***координатами*** (***компонентами***) вектора

$$\vec{a} = \vec{a}\left(a_x; a_y; a_z\right).$$

Координатні орти виглядають так: $\vec{\imath}(1;0;0)$, $\vec{\jmath}(0;1;0)$ і $\vec{k}(0;0;1)$.

Вектор $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$ слугує ***радіусом-вектором*** точки $M(a_x;a_y;a_z)$.

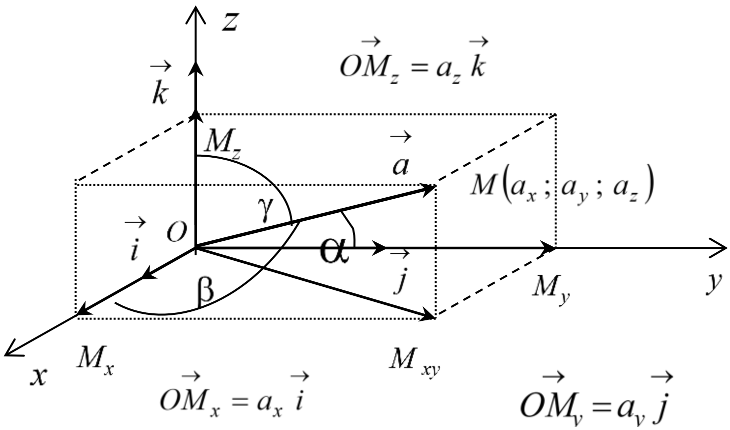

Рисунок 2.8

Радіус-вектор $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з розмірами $|\overrightarrow{OM_x}|=|a_x|$, $|\overrightarrow{OM_y}|=|a_y|$ і $|\overrightarrow{OM_z}|=|a_z|$. Тому

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

Модуль вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат.

Кути α, β і γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями Ox, Oy і Oz, відповідно, називаються ***напрямними***, а

$$cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \ cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|};\ \ cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

називаються ***напрямними косинусами*** вектора.

Зі співвідношень (див. рис. 2.8)

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM}, \qquad \vec{a} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}$$

і $\overrightarrow{OM_x} = a_x\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_y} = a_y\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_z} = a_z\vec{k}$, одержимо

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \text{ –}$$

розклад вектора за координатним базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Якщо відомі координати початку $M_1(x_1; y_1 z_1)$ і кінця $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то зі співвідношення

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

маємо:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Отже, *координати вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *дорівнюють різниці відповідних координат його кінця* $M_2(x_2; y_2; z_2)$ *і початку* $M_1(x_1; y_1 z_1)$.

Відстань між двома точками $M_1(x_1; y_1 z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ обчислюється за формулою:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Приклад. Знайти модуль і напрямні косинуси вектора $\vec{a}(3; -4; 1)$.

Розв'язання: $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$.

$$cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{26}}; \;\; cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{26}}; \;\; cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

2.4 Лінійні операції над векторами у координатній формі. Умова колінеарності

Нехай дано $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$.

Лінійні операції з векторами виконуються покомпонентно:

1) при додаванні (відніманні) векторів їхні відповідні координати додаються (віднімаються):

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{\imath} + \left(a_y \pm b_y\right)\vec{\jmath} + (a_z \pm b_z)\vec{k};$$

2) при множенні вектора на число кожну координату множать на це число:

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{\imath} + \lambda a_y\vec{\jmath} + \lambda a_z\vec{k}.$$

Умова колінеарності *(паралельності) двох векторів:* два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *колінеарні* тоді і тільки тоді, коли їхні відповідні координати пропорційні

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z};\ \vec{a} \neq \vec{0};\ \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Приклад. Визначити, за яких значень α і β ці вектори колінеарні $\vec{a} = (\alpha - 2; 4; -3)$; $\vec{b} = (5; 3\beta; 6)$.

Розв'язання:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}; \quad \frac{\alpha - 2}{5} = \frac{4}{3\beta} = \frac{-3}{6};$$

тому

$$1)\frac{\alpha - 2}{5} = \frac{-1}{2};\ \alpha - 2 = \frac{-5}{2};\ \alpha = \frac{-1}{2};$$

$$2)\ \frac{4}{3\beta} = \frac{-1}{2};\ -3\beta = 8;\ \beta = \frac{-3}{8}.$$

2.5 Скалярний добуток векторів. Умова перпендикулярності векторів

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|cos\varphi,$$

де $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$ – кут між напрямками двох ненульових векторів.

Властивості скалярного добутку:

1. Комутативність: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. Асоціативність відносно множення на число:

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

3. Операції додавання і скалярного множення векторів зв'язані дистрибутивним законом множення відносно додавання: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

4. Скалярний добуток вектора на цей самий вектор дорівнює квадрату числового значення його довжини

$$(\vec{a})^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|cos0 = |\vec{a}|^2.$$

Безпосередньо з означення маємо

$$cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Тоді $\quad np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів: *два ненульові вектори* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю:*

$$\vec{a}\perp\vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{a}\cdot\vec{b} = 0, \quad \vec{a},\ \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Оскільки координатні орти $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ взаємно перпендикулярні і мають одиничну довжину, то

$$(\vec{i})^2 = 1; \quad (\vec{j})^2 = 1; \quad \left(\vec{k}\right)^2 = 1;$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0; \;\; \vec{i} \cdot \vec{k} = 0; \;\; \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Нехай $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Таким чином, ***скалярний добуток двох векторів*** *дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Приклад. Знайти, за якого значення параметра α задані вектори перпендикулярні $\vec{a} = (2\alpha; -2; -3)$; $\vec{b} = (\,\alpha; -\,\alpha; 4)$.

Розв'язання: $\vec{a} \perp \vec{b} \;\; \Rightarrow \;\; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0; \;\; 2\alpha \cdot \, \alpha + (-2)(-\,\alpha) - 12 = 0;$$

$$2\,\alpha^2 + 2\,\alpha - 12 = 0; \quad \alpha^2 + \;\alpha - 6 = 0;$$

за теоремою Вієта маємо: $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 2$.

2.6 Векторний добуток

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 2.9) називається вектор, який позначається $\vec{a} \times \vec{b}$ і задовольняє такі умови:

1) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) модуль вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює добутку модулів співмножників на синус кута φ між ними:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\varphi.$$

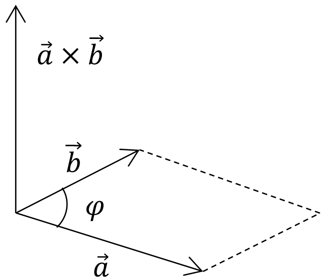

Рисунок 2.9

Іншими словами, модуль векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S_{пар};$$

3) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ напрямлений так, що найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ здійснюється у додатному напрямку (проти руху годинникової стрілки), якщо дивитися з кінця вектора $\vec{a} \times \vec{b}$.

Отже,

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}; \ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b};$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| sin\varphi = S_{пар}.$$

Властивості векторного добутку:

1. Зміна місць множників дає протилежний вектор

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

2. Асоціативність відносно множення на число

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\vec{a} \times \vec{b}.$$

3. Операції додавання і векторного добутку векторів зв’язані дистрибутивним законом множення відносно додавання

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Враховуючи взаємну орієнтацію координатних ортів $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ і $\vec{k}$ (рис. 2.10), отримаємо:

$$\vec{\imath}\times\vec{\imath}=0\ ;\quad \vec{\jmath}\times\vec{\jmath}=0\ ;\quad \vec{k}\times\vec{k}=0\ ;$$

$$\vec{\imath}\times\vec{\jmath}=\vec{k}\ ;\vec{\imath}\times\vec{k}=-\vec{\jmath}\ ;\quad \vec{\jmath}\times\vec{k}=\vec{\imath}.$$

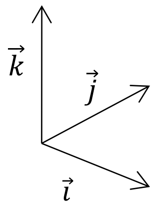

Рисунок 2.10

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{\imath}+a_y\vec{\jmath}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{\imath}+b_y\vec{\jmath}+b_z\vec{k}$. Тоді ***векторний добуток двох векторів*** *дорівнює визначнику третього порядку, у якому перший рядок складається з координатних ортів, другий – з координат першого співмножника, а третій – з координат другого співмножника*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Зауваження. Оскільки діагональ ділить паралелограм на два рівні трикутники, то з геометричного змісту векторного добутку маємо формулу для знаходження площі трикутника

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

Приклад. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(-2;3;5), B(4;\ -1;2)$ і $C(3;7;\ -1)$.

Розв'язання:

$$\overrightarrow{AB}=(4-(-2);\ -1-3;2-5)=(6;\ -4;-3);$$

$$\overrightarrow{AC}=(3-(-2);7-3;\ -1-5)=(5;4;\ -6);$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -4 & -3\\ 5 & 4 & -6\end{vmatrix}=24\vec{i}+24\vec{k}-15\vec{j}+20\vec{k}+12\vec{i}+36\vec{j}=$$

$$=36\vec{i}+21\vec{j}+44\vec{k};$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{36^2+21^2+44^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3673}\ (\text{од}^2).$$

2.7 Мішаний добуток трьох векторів. Розклад вектора за довільним базисом

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Позначається $(\vec{a}\times\vec{b}\,)\cdot\vec{c}$ або $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Геометричний зміст: модуль мішаного добутку $(\vec{a}\times\vec{b}\,)\cdot\vec{c}$ чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 2.11):

$$V_{\text{пар-да}}=\left|(\vec{a}\times\vec{b}\,)\cdot\vec{c}\,\right|.$$

Доведення:

$$V_{\text{пар-да}}=S_{\text{пар-ма}}\cdot H;$$

$$S_{\text{пар-ма}}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\,\right|;$$

$$H=\left|np_{\vec{a}\times\vec{b}}\,\vec{c}\right|=\left|\frac{(\vec{a}\times\vec{b}\,)\cdot\vec{c}}{\vec{a}\times\vec{b}}\right|;$$

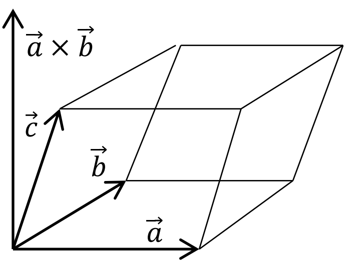

Рисунок 2.11

$$V_{\text{пар-да}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\,\right| \cdot \frac{\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\,\right) \cdot \vec{c}\,\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\,\right|} =$$

$$= \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\,\right) \cdot \vec{c}\,\right|.$$

Зауваження. Об’єм трикутної піраміди $SABC$ обчислюється за формулою:

$$V_{SABC} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\;\overrightarrow{AC}\;\overrightarrow{AS}\right|.$$

Нехай $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$;

$$\vec{c} = c_x\vec{\imath} + c_y\vec{\jmath} + c_z\vec{k}.$$

Тоді ***мішаний добуток трьох векторів*** *дорівнює визначнику третього порядку, у якому кожний рядок складається з координат відповідного співмножника*

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\,\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приклад . Задані координати вершин трикутної піраміди $S(4;\,-1;2), A(5;1;4), B(3;2;\,-1), C(0;0;3)$. Знайти її об’єм.

Розв’язання: $\overrightarrow{SA} = (5-4;1-(-1);4-2) = (1;2;2);$

$$\overrightarrow{SB} = (3-4;2-(-1);\,-1-2) = (-1;3;\,-3);$$

$$\overrightarrow{SC} = (0-4;0-(-1);4-3) = (-4;1;1);$$

$$\left(\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB}\right)\cdot\overrightarrow{SC}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 3 & -3\\ -4 & 1 & 1\end{vmatrix}=3-2+24+24+3+2=54;$$

$$V_{SABC}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB}\right)\cdot\overrightarrow{SC}\right|=\frac{1}{6}\cdot|54|=9\ (\text{од}^3).$$

Зауваження. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, то відповідний паралелепіпед вироджується і його об'єм дорівнює нулю. Звідси маємо ***умову компланарності трьох векторів***: *три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю*:

$$\vec{a},\vec{b}\ ,\vec{c} \text{ – компланарні, тоді } \left(\vec{a}\times\vec{b}\ \right)\cdot\vec{c}=0\ .$$

Приклад. Задані три точки: $A(1;0;\ -1)$, $B(4;\ -1;2)$,

$C(0;1;\ -3)$. Знайти значення параметра α, за якого точка $N(2;\ \ \alpha;\ -1)$ лежить у площині ABC.

Розв'язання. Зазначені чотири точки лежать в одній площині, якщо три вектори $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BN}$ *і* $\overrightarrow{CN}$ компланарні, тобто

$$\left(\overrightarrow{AN}\times\overrightarrow{BN}\right)\cdot\overrightarrow{CN}=0.$$

$$\overrightarrow{AN}=\big(2-1;\ \ \alpha-0;\ -1-(-1)\big)=(1;\ \ \alpha;0);$$
$$\overrightarrow{BN}=(2-4;\ \ \alpha-(-1);\ -1-2)=(-2;\ \ \alpha+1;\ -3);$$
$$\overrightarrow{CN}=\big(2-0;\ \ \alpha-1;\ -1-(-3)\big)=(2;\ \ \alpha-1;2);$$
$$\begin{vmatrix}1 & \alpha & 0\\ -2 & \alpha+1 & -3\\ 2 & \alpha-1 & 2\end{vmatrix}=0;$$
$$2(\ \alpha+1)-6\ \alpha+3(\ \alpha-1)+4\ \alpha=0;$$

$$2\,\alpha+2+3\,\alpha-3-2\alpha=0; \quad \alpha=\frac{1}{3}.$$

Зауваження. Довільна трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворює ***базис*** у тому розумінні, що будь-який вектор $\vec{d}$ єдиним способом може бути поданий у вигляді

$$\vec{d}=d_a\vec{a}+d_b\vec{b}+d_c\vec{c}.$$

Цю рівність називають ***розкладом вектора*** $\vec{d}$ ***за базисом*** $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$. Числа d_a, d_b, d_c слугують ***координатами*** вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

Якщо відомі координати базисних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і вектора $\vec{d}$ у координатному базисі $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, то, записавши розклад вектора $\vec{d}$ за новим базисом $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ у скалярній формі, отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_x d_a + b_x d_b + c_x d_c = d_x \\ a_y d_a + b_y d_b + c_y d_c = d_y \\ a_z d_a + b_z d_b + c_z d_c = d_z \end{cases}$$

для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$.

Приклад. Перевірити, що задані три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють базис. Знайти координати d_a, d_b, d_c заданого вектора $\vec{d}$ у цьому базисі $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$: $\vec{a}=(2;\ -1;4)$; $\vec{b}=(1;\ 0;\ -3)$;

$\vec{c}=(-2;1;\ -1)$; $\vec{d}=(0;\ -1;10)$.

Розв'язання: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$

$$=0+4-6-0+6-1=3\neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні й утворюють базис. Складемо і розв'яжемо систему рівнянь для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$:

$$\begin{cases} 2d_a + d_b - 2d_c = 0 \\ -d_a + \quad +d_c = -1 \\ 4d_a - 3d_b - d_c = 10 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 6 - 1 = 3;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 10 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 10 - 1 = 3, \qquad d_a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 20 - 8 - 20 = -6, d_b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 10 \end{vmatrix} = -4 - 6 + 10 = 0, \qquad d_c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0.$$

Відповідь: $d_a = 1;\ d_b = -2;\ d_c = 0.$

2.8 Лінійний n-вимірний простір

Множина R елементів $x, y, \dots, z$ називається лінійним простором, якщо для будь-яких двох її елементів x і y визначено суму $(x + y)$, яка належить цьому простору R, і для кожного елемента $x \epsilon R$ і дійсних чисел α та β визначено добуток $\alpha \cdot x \epsilon R$.

Множина n-вимірних векторів, над якими встановлено операції додавання і множення на число в такий спосіб, задовольняє наведеним вище аксіомам лінійного простору і називається ***n-вимірним векторним лінійним простором*** R^n.

Лінійна комбінація векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ векторного простору R є сумою добутків цих векторів на довільні дійсні числа $\alpha_i; i = \overline{1, n}$

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n.$$

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ називаються ***лінійно незалежними***, якщо їхня лінійна комбінація дорівнює нулю тільки при всіх $\alpha_i = 0$ $(i = \overline{1, n})$. Вектори ***лінійно залежні***, якщо їхня лінійна комбінація дорівнює нулю хоча б при одному з чисел $\alpha_i \neq 0$. Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ лінійно залежні, то принаймні один із них можна подати у вигляді лінійної комбінації інших. Наприклад, нехай $\alpha_1 \neq 0$, тоді

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{a}_n,$$

тобто вектор $\vec{a}_1$ є лінійною комбінацією інших $(n-1)$ векторів. На площині будь-які три вектори лінійно залежні; у просторі будь-які чотири вектори лінійно залежні. Максимальне число незалежних векторів на площині дорівнює двом, у просторі – трьом. Прикладом лінійно незалежних векторів на площині є два неколінеарних вектори; у просторі – три некомпланарних вектори.

Будемо говорити, що лінійний простір R має розмірність n, якщо в ньому існує n лінійно незалежних векторів, а будь-які $(n+1)$ вектори є лінійно залежні. Іншими словами, розмірність простору визначається максимальним числом лінійно незалежних векторів, які містяться в ньому. Розмірність простору R позначається: $n = dim(R)$.

Розглянемо рівність $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$, де

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots\ , \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

У координатній формі наведену рівність запишемо у вигляді однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_n a_{1n} = 0 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_n a_{2n} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \cdots + \alpha_n a_{nn} = 0 \end{cases}.$$

Якщо ранг матриці $r = n$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, тому вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ лінійно незалежні. Якщо $r < n$, то хоча б один із векторів $\vec{a}_i$ є лінійною комбінацією інших (оскільки система має нескінченну множину розв'язків), тому вектори будуть лінійно залежними.

Приклад. Дано вектори $\vec{a}_1 = (1, 2, 3), \vec{a}_2 = (-2, 1, -1\ )$, $\vec{a}_3 = (3, 2, -1)$. Показати, що вектори лінійно незалежні.

Розв'язання. Складемо лінійну комбінацію з цих векторів та визначимо, коли вона буде тривіальною, тобто дорівнювати нулю $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = 0$, або

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Матриця системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix};$$

$rangA = 3$, тому що

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -30 \neq 0.$$

Отже, $r = n$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Таким чином система векторів лінійно незалежна.

Нехай вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ лінійно незалежні, тобто утворюють базис n-вимірного простору.

Теорема. *Кожний вектор $\vec{X}$ лінійного простору R можна подати, до того ж єдиним способом, у вигляді лінійної комбінації векторів базису:*

$$\vec{X} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n.$$

Таке подання називається ***розкладанням вектора за базисом*** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$, а коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – *координатами вектора* $\vec{X}$ у цьому базисі.

Для визначення коефіцієнтів розкладання рівність $\vec{X} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n$ записуємо в координатній формі. З цією метою координати вектора $\vec{X}$ позначимо $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а векторів $\vec{a}_i$ – відповідно $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$, $\vec{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}), \dots,$ $\vec{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$. Тоді отримаємо еквівалентну систему лінійних неоднорідних рівнянь щодо невідомих $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_n a_{1n} = x_1 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_n a_{2n} = x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \cdots + \alpha_n a_{nn} = x_n \end{cases}.$$

Розв'язуючи її, знайдемо коефіцієнти розкладання вектора $\vec{X}$ за базисом $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$.

Приклад. Показати, що вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ утворюють базис, і знайти розкладання $\vec{b}$ за цим базисом, якщо $\vec{a}_1 =$ $= (1, -1, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, 2, -1)$, $\vec{a}_3 = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (3, 7, -7)$.

Розв'язання. Складемо лінійну комбінацію та прирівняємо її до нуля: $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = 0$. Визначимо ранг матриці здобутої системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$rang\ A = 3$, тому що:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \ \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Вектори лінійно незалежні і, таким чином, утворюють базис. Розкладемо вектор $\vec{b}$ за цим базисом:

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3.$$

Остання рівність еквівалентна наступній неоднорідній системі рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 7 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = -7 \end{cases}.$$

Розв'яжемо систему відносно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & -4 & -13 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Маємо $\alpha_1 = -3,\ \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$. Таким чином,

$$\vec{b} = -3\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3.$$

Контрольні запитання

1. Дайте визначення вектора. Що таке напрямок вектора, довжина вектора?

2. Які вектора називаються вільними?

3. Сформулюйте правила та властивості операцій додавання, віднімання векторів та множення векторів на число.

4. Дайте визначення проєкції вектора.

5. Що таке координати вектора? Як визначаються координати та довжина вектора на числовій осі, координатній площині, координатному просторі?

6. Як розкладається вектор за трьома не компланарними векторами у тривимірному просторі? Наведіть приклад.

7. Добутки векторів. Дайте визначення скалярного, векторного, мішаного добутку векторів та опишіть їхні властивості.

8. Які вектори називаються колінеарними, ортогональними, компланарними? Сформулюйте умови колінеарності, ортогональності та компланарності векторів.

9. Сформулюйте правила дій над векторами, заданими координатами. Наведіть приклади.

10. Які геометричні задачі можна розв'язати за допомогою дій над векторами? Наведіть приклади.

11. Що таке n-мірний вектор та векторний простір? Як визначається розмірність простору?

12. Що таке лінійна комбінація векторів? Яка лінійна комбінація векторів називається лінійно незалежною (лінійно залежною)?

13. Яка сукупність векторів утворює базис? Як розкласти вектор за базисом?

РОЗДІЛ 3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

3.1 Метод координат

3.1.1 Декартова система координат на площині

Для визначення положення довільної точки використовується деяка система координат. Її вибір залежить від характеру поставленої задачі. Найпоширеніша декартова прямокутна система координат.

Довільній точці M координатної прямої Ox відповідає певне дійсне число x – її ***координата***. Навпаки, довільному дійсному числу x відповідає певна точка M координатної прямої Ox. Беручи до уваги таку взаємно однозначну відповідність, координатну пряму називають ***числовою прямою*** і ототожнюють з множиною дійсних чисел R: $R\epsilon(-\infty;\ +\infty)$.

Відстань між двома довільними точками прямої $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ визначається формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

Дві взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox і Oy зі спільним *початком* O утворюють *декартову прямокутну систему координат на площині* Ox, що називається *віссю абсцис*, а Oy – *віссю ординат*. Сукупність прямих, перпендикулярних координатним осям, утворює *координатну сітку* на координатній площині Oxy . Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою парою чисел $(x; y)$ – її *координатами* (x – *абсциса*, y – *ордината*).

3.1.2 Відстань між двома точками. Поділ відрізка у заданому відношенні. Площа трикутника

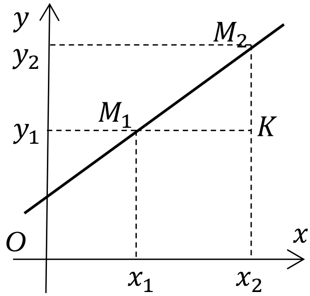

Рисунок 3.1

Нехай дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ (Рис. 3.1).

Опустимо перпендикуляри з цих точок на координатні вісі. Точку перетину позначимо як K, вона має координати (x_2, y_1). З прямокутного $\Delta\, M_1KM_2$, за теоремою Піфагора маємо

$$M_1M_2 = \sqrt{M_1K^2 + KM_2{}^2}.$$

Враховуючи, що $M_1K = x_2 - x_1$, а $KM_2 = y_2 - y_1$, то ***відстань між двома точками*** $M_1(x_1, y_1)$ *і* $M_2(x_2, y_2)$ *визначається формулою*

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Нехай задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і відношення $\lambda = M_1M/MM_2$, у якому точка $M(x, y)$ ділить відрізок M_1M_2 (рис. 3.2). Опустимо перпендикуляри з цих точок на координатні осі. Отримаємо точки перетину перпендикулярів $N(x, y_1)$ та $L(x_2, y)$. Розглянемо прямокутні трикутники ΔM_1NM та ΔMLM_2.

З подібності прямокутних трикутників $\Delta M_1NM \sim \Delta MLM_2$ випливає, що

$$\frac{NM}{LM_2} = \frac{M_1N}{ML} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda; \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

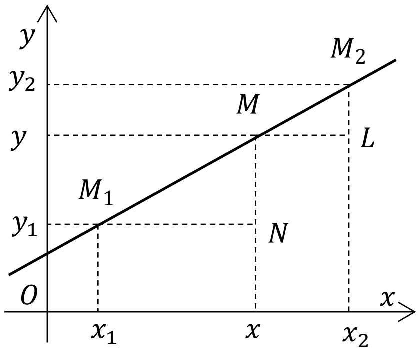

Рисунок 3.2

Звідси ***координати точки $M(x, y)$, яка ділить заданий відрізок у заданому співвідношенні***, обчислюються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 навпіл, то $\lambda = 1$. Тоді ***координати середини відрізка*** визначаються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Площу трикутника з вершинами в точках $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ та $C(x_3, y_3)$ знаходимо за формулою:

$$S = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

Приклад. Дано вершини трикутника ABC: $A(2, -4), B(-3, 5), C(6, 7)$. Знайти периметр та площу трикутника.

Розв'язання:

$$d_{AB} = \sqrt{(-3 - 2)^2 + \left(5 - (-4)\right)^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106};$$

$$d_{BC} = \sqrt{\left(6-(-3)\right)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{81+4} = \sqrt{85};$$

$$d_{AC} = \sqrt{(6-2)^2 + \left(7-(-4)\right)^2} = \sqrt{16+121} = \sqrt{137}.$$

Периметр трикутника

$$P_{ABC} = d_{AB} + d_{BC} + d_{AC} = \sqrt{106}+\sqrt{85}+\sqrt{137}.$$

Площа трикутника

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|2 \times (5-7) + (-3)\left(7-(-4)\right) + 6(-4-5)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}|-4-33-54| = \frac{91}{2} = 45{,}5\ (\text{од. кв.}).$$

Приклад. Дано відрізок AB: $A(3{,}8), B(-2, 1)$. Його поділено на три рівних частини. Знайти координати точок поділу.

Розв'язання. На три частини поділяємо відрізок двома точками C та D. Нехай точка A − початок відрізка, а B − кінець.

$$\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} = \lambda, \text{тому } x_C = \frac{3 + \frac{1}{2} \times (-2)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3};$$

$$y_C = \frac{8 + \frac{1}{2} \times 1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{17/2}{3/2} = \frac{17}{3}; \quad C\left(\frac{4}{3}, \frac{17}{3}\right).$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{2}{1} = 2 = \lambda, \qquad \text{тому } x_D = \frac{3 + 2 \times (-2)}{1+2} = -\frac{1}{3};$$

$$x_D = \frac{8 + 2 \times 1}{1+2} = \frac{10}{3}; \quad D\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

3.2 Пряма на площині

3.2.1 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Теорема. Будь-якій прямій відповідає рівняння першого степеня.

Доведення. Розглянемо загальний випадок розташування прямої на площині (рис. 3.3). Нехай α – кут, який утворює пряма з віссю Ox. Позначимо через $\boldsymbol{k = tg\alpha}$ ***кутовий коефіцієнт прямої***. Позначимо через b відрізок, що відтинає пряма на осі ординат, точка перетину N має координати $(b, 0)$.

Оберемо будь-яку точку $M(x, y)$, що належить прямій. Проведемо перпендикуляри до координатних осей MK і NK. Отримаємо трикутник MNK – прямокутний (за побудовою), де точка $K(x, b)$. З прямокутного трикутника маємо:

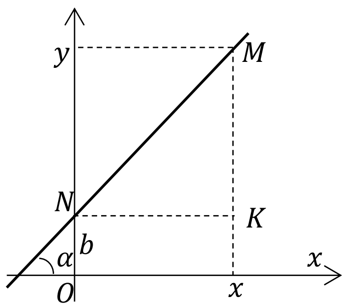

Рисунок 3.3

$$\frac{MK}{NK} = tg\alpha = k, \qquad NK = x,$$

$$MK = y - b, \frac{y - b}{x} = k,$$

$y = kx + b$ – ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.***

Зауваження:

1. Якщо $k = 0$, пряма паралельна осі Ox і її рівняння: $y = b$.

2. Якщо k додатне, пряма утворює гострий кут з віссю Ox, якщо k від'ємне – тупий кут.

3. Якщо пряма перпендикулярна осі Ox, кутовий коефіцієнт відсутній і її рівняння: $x = a$.

3.2.2 Загальне рівняння прямої

Теорема. Будь-якому рівнянню першого степеня відповідає деяка пряма.

Доведення. Загальний вигляд рівняння першого степеня

$$Ax + By + C = 0.$$

Нехай $A = 0$, тоді $By + C = 0$, $y = -\frac{C}{B}$ (рівняння вигляду $y = b$).

Нехай $B = 0$, тоді $Ax + C = 0$, $x = -\frac{C}{A}$ (рівняння вигляду $x = a$).

Нехай $A \neq 0, B \neq 0,$ тоді $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ (рівняння вигляду $y = kx + b$).

У будь-якому випадку рівняння першого ступеня описує пряму лінію. Отже,

$Ax + By + C = 0$ – ***загальне рівняння прямої.***

3.2.3 Рівняння прямої у відрізках

Нехай дано пряму $Ax + By + C = 0$, що не паралельна ні одній з координатних осей та не проходить через початок координат, тобто $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ (рис. 3.4).

Перетворимо це рівняння:

$$Ax + By = -C | : (-C);$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1;$$

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1.$$

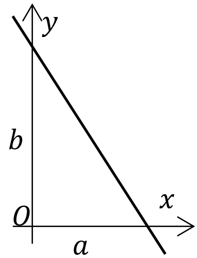

Рисунок 3.4

Нехай $\frac{-C}{A} = a$, $\frac{-C}{B} = b$. Тоді рівняння виглядає так:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 -$ ***рівняння прямої у відрізках.***

Тут $a -$ відрізок, що відтинає пряма на осі абсцис, $b -$ відрізок, що відтинає пряма на осі ординат.

Приклад. Дано рівносторонній трикутник ABC. Сторона AC належить осі Ox і ділиться точкою O навпіл, $d_{AC} = 8$ одиниць довжини. Точка має координати $B(0,7)$. Скласти рівняння сторін трикутника.

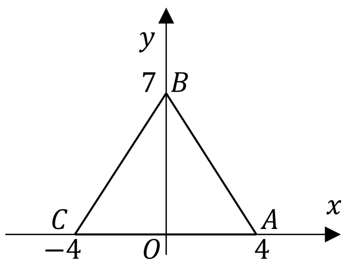

Рисунок 3.5

Розв'язання. Відрізок AC ділиться точкою O навпіл (рис. 3.5), тому відкладемо ліворуч і праворуч від початку координат по 4 одиниці довжини. На осі Oy точкою B відтинається відрізок довжиною 7 одиниць довжини.

Як бачимо, пряма AB:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{7}=1;$$

пряма BC:

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{7}=1.$$

Відповідно, пряма AC належить осі Ox, тому її рівняння

$$y=0.$$

3.2.4 Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, які належать прямій. Рівняння прямої M_1M_2: $y=kx+b$ (1); якщо точка M_1 належить прямій, то виконується рівність $y_1=kx_1+b$ (2).

Від рівняння (1) віднімемо рівняння (2), отримаємо

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

За умовою ця пряма проходить і через точку M_2, а тому координати точки M_2 задовольняють рівняння:

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1).$$

Кутовий коефіцієнт шуканої прямої

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Таким чином, шукане рівняння:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}-$$

рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Приклад. Дано трикутник ABC: $A(-2,-3)$, $B(4,3)$, $C(2,5)$. Знайти рівняння медіани BL.

Розв'язання. За визначенням, медіана поділяє сторону навпіл (рис. 3.6), тому знайдемо координати точки L, використовуючи формули

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \ y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$x_L = \frac{-2+2}{2} = 0; \ \ y_L = \frac{-3+5}{2} = 1.$$

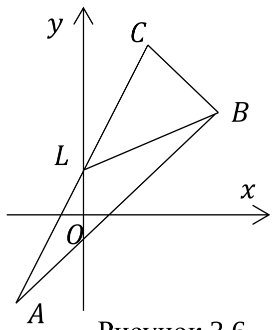

Рисунок 3.6

$L(0,1)$ – середина відрізку AC.

За формулою рівняння прямої, що проходить через дві точки, маємо:

$$\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-4}{0-4}; \qquad \frac{y-3}{-2} = \frac{x-4}{-4};$$

$$-4(y-3) = -2(x-4)|:(-4); \quad y-3 = \frac{1}{2}x - 2;$$

$y = \frac{1}{2}x + 1 -$ рівняння медіани BL.

3.2.5 Рівняння прямої, що проходить через конкретну точку з заданим кутовим коефіцієнтом

Нехай дано точку $A(x_1, y_1)$ і кутовий коефіцієнт k. Знайдемо рівняння $y = kx + b$ (1), невідоме b знайдемо за умови проходження прямої через точку A:

$$b = y_1 - kx_1.$$

Підставимо b у рівняння (1) і отримаємо:

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

або

$y - y_1 = k(x - x_1)$ – ***рівняння прямої, що проходить через конкретну точку із заданим кутовим коефіцієнтом.***

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-3, 5)$ та утворює кут $\alpha = 135°$ з додатним напрямком осі Ox.

Розв'язання. За означенням

$$k = tg135° = tg(90° + 45°) = -ctg45° = -1.$$

Скористаємося формулою $y - y_1 = k(x - x_1)$, отримаємо

$$y - 5 = -1(x + 3); \;\; y = -x - 3 + 5.$$

Шукане рівняння має вигляд: $y = -x + 2$.

3.2.6 Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай дано дві прямі l_1 і l_2: $y = k_1x + b_1, y = k_2x + b_2$. Прямі мають, відповідно, кутові коефіцієнти:

$k_1 = tg\alpha_1$ і $k_2 = tg\alpha_2$.

Розглянемо випадок, коли прямі l_1 і l_2 перетинаються під довільним кутом φ (рис. 3.7). Під кутом φ розуміємо найменший кут, на який потрібно повернути

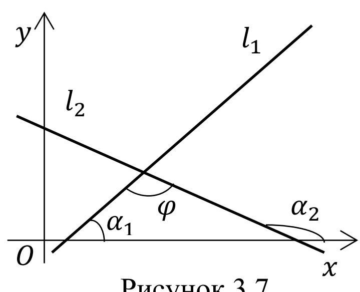

Рисунок 3.7

проти годинникової стрілки пряму l_1 до прямої l_2, щоб вони співпадали. Використаємо теорему про зовнішній кут трикутника:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi; \;\; \varphi = \alpha_2 - \alpha_1;$$

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1);$$

$$tg\varphi = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2};$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2};$$

$\varphi = arctg\left(\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right)$ – ***кут між прямими.***

Розглянемо випадок, коли прямі паралельні, тоді кути, що утворюють прямі з додатним напрямком осі абсцис, рівні: $\alpha_1 = \alpha_2$. Тому $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$ і, відповідно

$k_1 = k_2$ – ***умова паралельності прямих.***

Розглянемо випадок, коли прямі перпендикулярні. З теореми про зовнішній кут трикутника маємо: $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$,

$$tg\alpha_2 = tg\left(\alpha_1 + 90^\circ\right) = -ctg\alpha_2 = -\frac{1}{tg\alpha_2};$$

$k_1 = -\frac{1}{k_2}$ – ***умова перпендикулярності прямих.***

Приклад. Дано трикутник ABC: $A(-2,-4)$, $B(-6,3)$, $C(5,1)$ (див. рис. 3.6). Знайти:

1) кути трикутника;
2) рівняння висоти BM;

3) рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно прямій BC.

Розв'язання. Побудуємо трикутник ABC (рис. 3.8). За формулою кутового коефіцієнта прямої, що проходить через дві точки, отримаємо:

$$k_{AB} = \frac{3+4}{-6+2} = -\frac{7}{4};\ k_{BC} = \frac{1-3}{5+6} = -\frac{2}{11};\ k_{Ac} = \frac{1+4}{5+2} = \frac{5}{7}.$$

1. Знайдемо кути трикутника за формулою:

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\,.$$

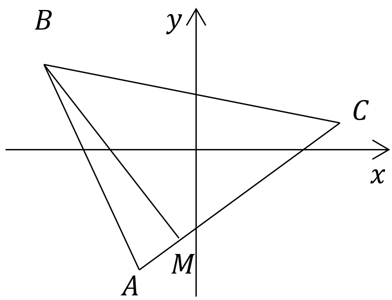

Рисунок 3.8

$$tg\angle BAC = \frac{-\frac{7}{4} - \frac{5}{7}}{1 - \frac{5}{7} \times \frac{7}{4}} = \frac{-\frac{69}{28}}{-\frac{7}{28}} = \frac{69}{7};\ \ \angle BAC = arctg\,\frac{69}{7};$$

$$tg\angle ABC = \frac{-\frac{2}{11} + \frac{7}{4}}{1 + \frac{2}{11} \times \frac{7}{4}} = \frac{\frac{69}{44}}{\frac{58}{44}} = \frac{69}{58}; \ \angle ABC = arctg\frac{69}{58};$$

$$tg\angle ACB = \frac{\frac{5}{7} + \frac{2}{11}}{1 - \frac{5}{7} \times \frac{2}{11}} = \frac{\frac{69}{77}}{\frac{67}{77}} = \frac{69}{67}; \ \angle ACB = arctg\frac{69}{67}.$$

2. Висота BM перпендикулярна до сторони AC. За умовою перпендикулярності прямих маємо:

$$k_{BM} = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{7}{5}.$$

Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через конкретну точку із заданим кутовим коефіцієнтом

$$y - 3 = -\frac{7}{5}(x + 6); \ y = -\frac{7}{5}x - \frac{42}{5} + 3;$$

$$BM: \ y = -\frac{7}{5}x - \frac{27}{5}.$$

3. Оскільки пряма, що проходить через точку A, паралельна прямій BC, то за умовою паралельності

$$k_1 = k_2 = -\frac{2}{11}.$$

За формулою $y - y_1 = k(x - x_1)$ маємо:

$$y + 4 = -\frac{2}{11}(x + 2); \ y = -\frac{2}{11}x - \frac{4}{11} - 4;$$

отже, шукане рівняння прямої

$$y = -\frac{2}{11}x - \frac{48}{11}.$$

3.2.7 Нормальне рівняння прямої

Нехай пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$. Помножимо це рівняння на деякий множник $M \neq 0$:

$$MAx + MBy + MC = 0.$$

Позначимо $MA = cos\alpha$; $MB = sin\alpha$; $MC = -p$. В такому випадку маємо:

$x \cdot cos\alpha + y \cdot sin\alpha - p = 0$ – ***нормальне рівняння прямої.*** Коефіцієнт M називається ***нормуючим множником***. Знайдемо його, якщо скористаємось основною тригонометричною тотожністю:

$$(MA)^2 = (cos\alpha)^2; \quad (MB)^2 = (sin\alpha)^2;$$

$$(MA)^2 + (MB)^2 = cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1; \; M^2(A^2 + B^2) = 1;$$

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак нормуючого множника обирається протилежним до знаку C.

Оскільки $MA = cos\alpha$; $MB = sin\alpha$, то

$$cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Розглянемо співвідношення:

$$\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{B}{A}, \; tg\alpha = \frac{B}{A}, \text{тобто } k = \frac{B}{A}.$$

У рівнянні $Ax + By + C = 0$ кутовий коефіцієнт прямої дорівнює $k = -\frac{A}{B}$. Бачимо, що ці кутові коефіцієнти задовольняють умові перпендикулярності прямих. А тому зрозуміло, що кут α описує пряму, що перпендикулярна до шуканої (рис. 3.9). Довжина відрізка від початку координат до точки перетину цих прямих дорівнює p.

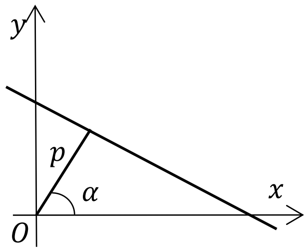

Рисунок 3.9

Приклад. Записати рівняння цієї прямої у вигляді:

$$\frac{5x-2}{3} + \frac{3y+7}{4} - 6 = 0$$

1) загальне рівняння прямої;

2) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;

3) рівняння прямої у відрізках;

4) нормальне рівняння прямої.

Розв'язання:

1) помножимо весь вираз на найменше спільне кратне знаменників *НСК*(3,4) $= 12$:

$$4(5x-2) + 3(3y+7) - 72 = 0;$$

остаточно маємо загальне рівняння прямої:

$$20x + 9y - 59 = 0;$$

2) розв'яжемо отримане рівняння в п. 1) відносно y і отримаємо рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$y = -\frac{20}{9}x + \frac{59}{9};$$

3) перенесемо у загальному рівнянні вільний член праворуч $20x + 9y = 59$. Поділимо отриманий вираз на 59. Отримаємо рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{20x}{59} + \frac{9y}{59} = 1 \text{ або } \frac{x}{59/_{20}} + \frac{y}{59/_{9}} = 1;$$

4) помножимо загальне рівняння на нормуючий множник

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{20^2+9^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{481}}.$$

Обираємо знак протилежний до C, а саме «+»

$$\frac{20}{\sqrt{481}}x + \frac{9}{\sqrt{481}}y - \frac{59}{\sqrt{481}} = 0.$$

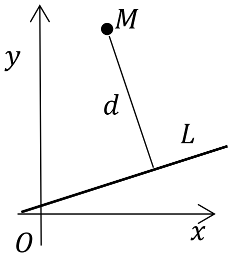

Рисунок 3.10

3.2.8 Відстань від точки до прямої

Знайдемо відстань d від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої l: $Ax + By + C = 0$ (рис. 3.10).

Нехай точка $L(x_1, y_1)$ належить прямій. Перетворимо загальне рівняння прямої на рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \qquad k = -\frac{A}{B}.$$

Прямі l і ML взаємно перпендикулярні. За умовою перпендикулярності прямих

$$k_1 = -\frac{1}{k_2};\ k_{ML} = \frac{B}{A}.$$

Рівняння ML: $y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$. Оскільки L належить прямій ML, то x_1 і y_1 задовольняють рівняння

$$y_1 - y_0 = \frac{B}{A}(x_1 - x_0) | : B;$$

$$\frac{y_1 - y_0}{B} = \frac{x_1 - x_0}{A} = \vartheta,$$

тоді

$$y_1 - y_0 = \vartheta B; \ \ x_1 - x_0 = \vartheta A. \tag{1}$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} =$$

$$= \sqrt{\vartheta^2 A^2 + \vartheta^2 B^2} = |\vartheta|\sqrt{A^2 + B^2} \tag{2}$$

З (1) знайдемо $x_1, \ \ y_1$:

$$y_1 = \vartheta B + y_0; \ \ x_1 = \vartheta A + x_0.$$

Підставимо отримані вирази x_1, y_1 у загальне рівняння прямої l, отримаємо:

$$A(\vartheta A + x_0) + B(\vartheta B + y_0) + C = 0;$$

$$\vartheta A^2 + Ax_0 + \vartheta B^2 + By_0 + C = 0;$$

$$\vartheta(A^2 + B^2) = -Ax_0 - By_0 - C;$$

$$\vartheta = \frac{-(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}. \tag{3}$$

Підставимо у рівняння (2) вираз (3), отримаємо:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Отже, щоб знайти відстань від точки до прямої, необхідно підставити координати цієї точки в загальне рівняння прямої і модуль цього виразу поділити на корінь квадратний з суми квадратів коефіцієнтів, які знаходяться біля змінних x, y.

Приклад. Дано трикутник ABC: $A(4,3)$; $B(-2,5)$; $C(-4,-2)$. Знайти довжину висоти AP.

Розв'язання. За умовою $AP-$ висота, проведена до сторони BC. Тому її довжину знайдемо як відстань від точки A до прямої BC.

Знайдемо рівняння сторони BC як прямої, що проходить через дві точки, і запишемо його у вигляді загального рівняння прямої:

$$\frac{y-5}{-2-5}=\frac{x+2}{-4+2}; \quad -2(y-5)=-7(x+2);$$

$$7x-2y+24=0.$$

Тоді довжина висоти AP:

$$d_{AP}=\frac{|7\times 4-2\times 3+24|}{\sqrt{7^2+(-2)^2}}=\frac{46}{\sqrt{53}} \text{ (од.)}.$$

3.2.9 Взаємне розташування прямих на площині

Нехай дано дві прямі, що задані загальними рівняннями:

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ та } A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Із загальних міркувань зрозуміло, що можливі такі випадки взаємного розташування прямих на площині: прямі можуть перетинатися в одній точці, можуть не перетинатися – бути паралельними або збігатися.

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}.$$

Розв'яжемо систему за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix};\ \Delta_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix};\ \Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}.$$

Можливі такі випадки:

1) визначник системи $\Delta \neq 0$ (ранг матриці дорівнює двом), тобто система сумісна і визначена. За формулами Крамера маємо:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1};\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Цей випадок відповідає ситуації, коли прямі перетинаються, тому за формулами знаходимо координати точки перетину прямих;

2) визначник системи $\Delta = 0$. У цьому випадку можливі ситуації:

а) ранг розширеної матриці дорівнює двом, тобто хоча б один із визначників Δ_x або Δ_y відмінний від нуля. Тоді за теоремою Кронекера – Капеллі система несумісна. Це означає, що прямі паралельні;

б) ранг розширеної матриці дорівнює одиниці, тобто всі визначники дорівнюють нулю: $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ За теоремою Кронекера – Капеллі така система має нескінчену множину розв'язків. Це відповідає ситуації, коли прямі збігаються.

Приклад. Встановити, чи перетинаються прямі, і якщо так, то знайти точку перетину прямих F: $y = \frac{3}{5}x + 2; y = -\frac{7}{4}x - \frac{3}{2}$.

Розв'язання. Представимо прямі їхніми загальними рівняннями:

$$3x - 5y + 2 = 0; 7x + 4y + 6 = 0.$$

Складемо систему рівнянь та розв'яжемо її за формулами Крамера

$$\begin{cases} 3x - 5y + 2 = 0 \\ 7x + 4y + 6 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x - 5y = -2 \\ 7x + 4y = -6 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 35 = 47;$$

$\Delta \neq 0 -$ система сумісна і визначена, а тому прямі перетинаються.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 30 = -38, \qquad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{38}{47};$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -18 + 14 = -4; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{4}{47}.$$

Точка перетину прямих $F\left(-\frac{38}{47}, -\frac{4}{47}\right)$.

3.3 Лінії другого порядку на площині

3.3.1 Загальне рівняння лінії другого порядку

Пряма – це єдина лінія першого порядку. Її загальним рівнянням є алгебраїчне рівняння першого степеня.

Лінії другого порядку відповідає рівняння другого степеня, загальний вигляд якого

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

де $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ – сталі коефіцієнти, до того ж хоча б одне з чисел A, B, C відмінне від нуля, тобто

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Існують чотири типи ліній другого порядку – ***коло, еліпс, гіпербола і парабола.***

3.3.2 Коло

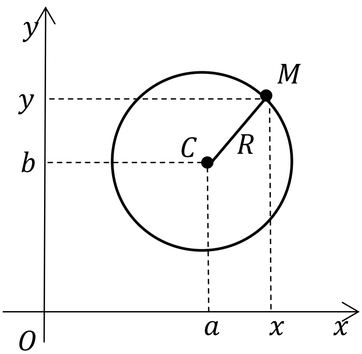

Рисунок 3.11

Колом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки площини C (***центра*** кола) дорівнює заданому сталому числу R (***радіусу кола***).

Розглянемо коло з центром у точці $C(a, b)$ і радіусом R (рис. 3.11). Для довільної точки $M(x, y)$ кола

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R.$$

Одержане співвідношення

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

називається ***рівнянням кола.***

Якщо центр кола міститься в точці $O(0,0) -$ початку координат, то рівняння кола набуває такого вигляду:

$$x^2 + y^2 = R^2 -$$

рівняння кола з центром у початку координат.

Приклад. Скласти рівняння кола, якщо: а) його центр знаходиться в точці $P(-3,1)$, а точка $L(4,-2)$ належить лінії кола; б) його центр знаходиться в точці $F(7;4)$, а пряма $3x-5y+11=0$ є дотичною до кола. Подати загальним рівнянням ліній другого порядку.

Розв'язання: а) координатами центра кола є координати точки $P(-3,1)$, а радіусом кола є відстань між точками P і L, тобто

$$|PL| = \sqrt{(4+3)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{58} = R.$$

За формулою $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, маємо:

$$(x+3)^2+(y-4)^2=58;$$

б) за умовою пряма $3x-5y+11=0$ є дотичною до кола. Радіус проведений до точки дотику є перпендикуляром до дотичної, тому знайдемо радіус кола, як відстань від точки до прямої

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3\times 7-5\times 4+11|}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}=\frac{12}{\sqrt{34}}; R=\frac{12}{\sqrt{34}}.$$

Шукане рівняння кола

$$(x-7)^2+(y-4)^2=\frac{72}{17}.$$

Для подання у вигляді загального рівняння ліній другого порядку помножимо обидві частини на 17 та виконаємо алгебраїчні перетворення лівої частини рівняння

$$17(x^2-14x+49)+17(y^2-8y+16)=72.$$

Шукане рівняння

$$17x^2+17y^2-238x-136y+1\,033=0.$$

3.3.3 Еліпс

Еліпсом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів еліпса***) дорівнює заданому сталому числу 2a, більшому за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x, y)$ еліпса (рис. 3.12) $r_1 + r_2 = 2a$, де $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x, y)$; $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ – фокуси,

$$F_1F_2 = 2c < 2a.$$

Тоді

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Піднесемо його до квадрата і виконаємо відповідні перетворення:

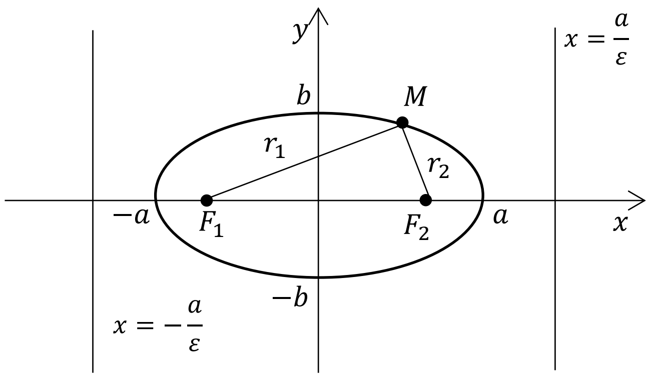

Рисунок 3.12

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 =$$

$$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2;$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \ \ |: 4;$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx;$$

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \, ;$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \ \ |: a^2(a^2 - c^2);$$

Позначимо $b^2 = a^2 - c^2$ і отримаємо ***канонічне рівняння еліпса***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Точки перетину з осями симетрії, які в нашому випадку співпадають з осями координат, називаються вершинами еліпса: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$. Еліпс має форму овалу, симетричного відносно ***великої осі*** $|A_1A_2| = 2a$ і ***малої осі*** $|B_1B_2| = 2b$. Відношення ***фокусної відстані*** $|F_1F_2| = 2c$ до великої осі $|A_1A_2| = 2a$ називається ***ексцентриситетом*** еліпса і позначається ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Зауваження. Ексцентриситет характеризує форму еліпса, при цьому $0 \le \varepsilon \le 1$. Якщо $\varepsilon = 0$, то маємо окремий випадок еліпса – коло, при цьому $a = b = r$.

Дві прямі, що мають рівняння $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, називаються ***директрисами*** еліпса.

Властивість директрис еліпса: *відношенням фокального радіуса* r *довільної точки еліпса до відстані* d *цієї точки до відповідної директриси є стала величина, що дорівнює ексцентриситету еліпса* $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

Приклад. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює $\varepsilon = \frac{2}{5}$.

Розв'язання. За умовою відстань між фокусами дорівнює 8, тому $2c = 8 \Longrightarrow c = 4$. За формулою для ексцентриситету маємо співвідношення

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{5};\ \frac{4}{a} = \frac{2}{5};\ a = \frac{20}{2} = 10.$$

Тому $b^2 = a^2 - c^2 = 100 - 16 = 84$.

Шукане рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{84} = 1.$$

3.3.4 Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів*** гіперболи) дорівнює заданому сталому числу $2a$, меншому за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x, y)$ гіперболи (рис. 3.13), де $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x, y)$;

$F_1(-c,0), F_2(c,0)$ – фокуси, $F_1F_2 = 2c > 2a$. Тоді

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a.$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи, за умови, що

$$b^2 = c^2 - a^2 > 0,$$

одержимо ***канонічне рівняння гіперболи.***

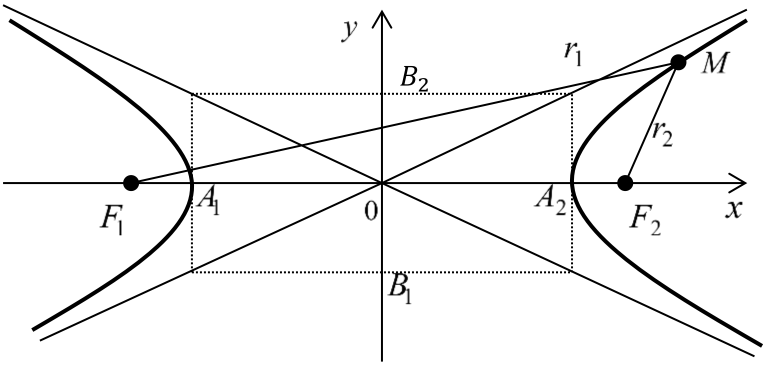

Рисунок 3.13

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гіпербола складається з двох нескінченних гілок, які симетричні відносно ***дійсної осі*** $A_1A_2 = 2a$ і ***уявної осі*** $B_1B_2 = 2b$, а також центрально симетричні відносно точки $O(0;0)$ – ***центра*** гіперболи. Дійсні вершини $A_1(-a;0), A_2(0;a)$ є точками перетину гіперболи з віссю Ox. Через уявні вершини $B_1(0;-b), B_2(0;b)$ гіпербола не проходить. Прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ є ***асимптотами*** гіперболи.

Асимптотою називається пряма, що необмежено зближується з гілкою кривої на нескінченності, відстань від цієї точки до названої прямої прямує до нуля.

Відношення ***між фокусною відстанню*** $F_1F_2 = 2c$ та дійсною віссю $A_1A_2 = 2a$ називається ***ексцентриситетом*** гіперболи і позначається $\varepsilon = \frac{c}{a}$ або $\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

Ексцентриситет характеризує форму гіперболи: чим менше ε, тим більше витягнутий основний прямокутник гіперболи у напрямку осі, яка об'єднує вершини.

Дві прямі, для яких справджується рівняння $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, називаються ***директрисами*** гіперболи.

Властивість директрис гіперболи аналогічна до відповідної властивості для еліпса: $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

Гіпербола, у якої дійсна і уявна піввісь мають однакову довжину $a = b$, називається ***рівносторонньою.***

Гіпербола $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ називається ***спряженою*** до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Її дійсна вісь розташована вздовж осі Oy. Спряжені гіперболи мають ті ж самі асимптоти.

Приклад. Фокуси гіперболи лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат. Записати рівняння гіперболи, якщо рівняння директрис $x = \pm 3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами – прямий.

Розв'язання. За умовою асимптоти гіперболи утворюють кут $90°$, а тому мають з додатним напрямком осі Ox відповідно кути $45°$ та $135°$. Оскільки кутовий коефіцієнт прямої, то відповідні кутові коефіцієнти асимптот $k_1 = tg45° = 1, \quad k_2 = tg135° = -1$

Рівняння асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$, тому маємо $\frac{b}{a} = 1$, звідси $a = b$. Тоді $b^2 = c^2 - a^2$; $c^2 = b^2 + a^2 = 2a^2; c = a\sqrt{2}$. Оскільки $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$, а з рівняння директрис маємо $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm 3\sqrt{2}$, тому $a = b = 3\sqrt{2}\,\varepsilon = 6$.

Рівняння шуканої гіперболи

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Приклад. Записати рівняння кривої в канонічному вигляді

$$4x^2 - 9y^2 - 40x + 36y + 28 = 0.$$

Розв'язання. Згрупуємо елементи рівняння за змінними та доповнимо до повного квадрата:

$$(4x^2 - 40x) - (9y^2 - 36y) + 28 = 0;$$

$$4(x^2 - 10x) - 9(y^2 - 4y) + 28 = 0;$$

$$4(x^2 - 10x + 25 - 25) - 9(y^2 - 4y + 4 - 4) + 28 = 0;$$

$$4(x-5)^2 - 100 - 9(y-2)^2 + 36 + 28 = 0;$$

$$4(x-5)^2 - 9(y-2)^2 = 36.$$

Поділимо обидві частини на 36 і отримаємо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

3.3.5 Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань від заданої точки площини F (***фокуса параболи***) дорівнює відстані до заданої прямої l_d (***директриси параболи***), що не проходить через фокус.

Для довільної точки $M(x;y)$ параболи (рис. 3.14) $r = d,$ де $r = MF$ – ***фокальний радіус*** точки $M(x;y)$; d – відстань точки $M(x;y)$ до директриси $l_d\colon x = -\frac{p}{2}$; $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус; p – ***параметр*** параболи (відстань від фокуса до директриси), $p > 0$. Тоді

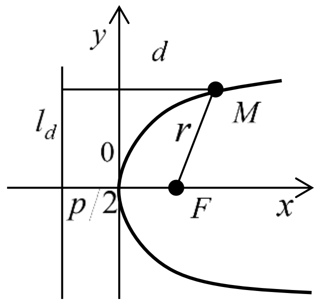

Рисунок 3.14

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} = x - \left(-\frac{p}{2}\right).$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння параболи***

$$y^2 = 2px.$$

Парабола має форму нескінченної вітки, яка симетрична відносно ***осі*** параболи OF. Точка $O(0;0)$ на осі симетрії (початок координат) називається ***вершиною*** параболи.

Зауваження. Згідно з означенням параболи і властивостями директрис еліпса і гіперболи, прийнято, що ***ексцентриситет параболи*** дорівнює одиниці $\varepsilon = 1$.

Приклад. Знайти умову, за якої пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи $y^2 = 2px$.

Розв'язання. Парабола і пряма будуть дотикатися одна до одної, якщо система рівнянь матиме єдиний розв'язок

$$\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 2px \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \dfrac{y}{k} - \dfrac{b}{k} \\ y^2 = 2p\left(\dfrac{y}{k} - \dfrac{b}{k}\right) \end{cases}.$$

Друге рівняння системи є квадратним відносно y

$$y^2 - \frac{2p}{k}y + \frac{2pb}{k} = 0.$$

Система має єдиний розв'язок, якщо квадратне рівняння має $D = 0$, за цієї умови маємо

$$D = \frac{4p^2}{k^2} - \frac{8pb}{k} = 0; \; \frac{4p^2 - 8pbk}{k^2} = 0; 4p(p - 2bk) = 0.$$

Оскільки $p \neq 0$, то $p - 2bk = 0$, $p = 2bk -$ умова дотику прямої і параболи.

3.4 Полярна система координат

Щоб визначити положення точки на площині, крім розглянутої вище декартової прямокутної системи координат, ще потрібна полярна система координат. Визначимо її. Для цього візьмемо на площині довільну точку O, яку звуть полюсом, і направлений промінь OP, який звуть ***полярною віссю***. На ній відкладемо відрізок OE, який звуть одиничним або ***маситабним відрізком*** (рис. 3.15).

Упорядкована пара чисел (ρ_0, φ_0) що ставиться у відповідність точці M_0, яка належить площині і відмінна від точки O, називається полярними координатами точки M_0.

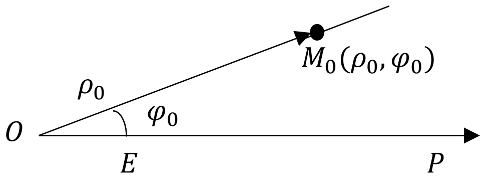

Рисунок 3.15

Число $\rho_0 -$ довжина відрізка $OM_0 -$ називається полярним радіусом точки M_0. Число φ_0, яке звуть полярним кутом, є радіанною величиною кута EOM_0.

Між множиною всіх точок площини (крім точки O) і множиною упорядкованих пар чисел (ρ, φ), де $\rho \geq 0$ і $\varphi \in [0, 2\pi]$ існує взаємно однозначна відповідність. Для точки O величина полярного кута не визначена.

Якщо за полюс узяти початок прямокутної декартової системи координат, а за полярну вісь – додатний напрямок осі Ox (рис. 3.16), то полярні координати точки M, яка не збігається з полюсом, і її прямокутні координати позв'язані рівностями:

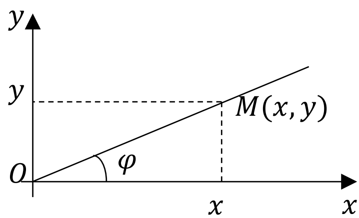

Рисунок 3.16

$$x = \rho\ cos\varphi;\ y = \rho\ sin\varphi.$$

Перехід від прямокутних до полярних координат точки M виконується за формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};\ \ \varphi = arctg\,\frac{y}{x}.$$

Контрольні запитання

1. Що таке декартова система координат на площині? Як визначаються координати точки, довжина відрізка?

2. Виведіть формулу для визначення координати точки, що поділяє відрізок у заданому відношенні.

3. Виведіть формулу для визначення координати середини відрізку.

4. Як обчислити площу трикутника, якщо відомі координати його вершин? Як можна скористатися цією формулою для обчислення площі будь-якого многокутника?

5. Які види рівняння прямої вам відомі?

6. Наведіть приклад запису будь-якого рівняння першого степеня у вигляді загального рівняння прямої, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, рівняння прямої у відрізках, нормального рівняння прямої.

7. Як записати рівняння прямої, якщо відомі координати двох будь-яких точок, що належать цій прямій?

8. Виведіть формулу для визначення відстані від точки до прямої.

9. Дайте визначення кута між прямими. За допомогою якої формули необхідно обчислювати цей кут? Як формулюються умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, якщо відомі їхні кутові коефіцієнти?

10. Запишіть загальне рівняння кривої другого порядку. Проаналізуйте його. Сформулюйте умови, за якими це рівняння описує коло, еліпс, гіперболу або параболу.

11. Дайте визначення кола. Виведіть канонічне рівняння кола.

12. Дайте визначення еліпса. Виведіть канонічне рівняння еліпса.

13. Дайте визначення гіперболи. Виведіть канонічне рівняння еліпса.

14. Дайте визначення параболи. Виведіть канонічне рівняння параболи.

15. Що таке ексцентриситет? Яким співвідношенням відповідає ексцентриситет еліпса, гіперболи, параболи?

16. Що таке директриса? Опишіть властивості директрис еліпса, гіперболи, параболи.

17. Дайте визначення асимптотам гіперболи.

18. Дайте визначення полярній системі координат. Як визначається зв'язок між полярною та прямокутною системою координат?

19. Запишіть формули переходу від полярної до прямокутної та від прямокутної до полярної систем координат.

20. Який вигляд має рівняння будь-якої кривої другого порядку в полярній системі координат? Яка величина в цьому рівнянні визначає, чи буде це рівняння описувати еліпс, гіперболу, параболу?

РОЗДІЛ 4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

4.1 Площина у просторі

4.1.1 Нормальне рівняння площини

Положення площини у просторі буде повністю визначено, якщо задати її відстань p від початку координат O, тобто довжину перпендикуляра OT, який опущено з точки O на площину, та одиничний вектор $\vec{e}$, перпендикулярний до площини і направлений від початку O до площини (рис. 4.1).

Нехай точка $M(x, y, z)-$ довільна точка площини, її радіус-вектор $\vec{r}$ змінюється так, що весь час $np_{\vec{e}}\overrightarrow{OM} = OT = p$. Ця умова наявна лише для точок площини; воно не виконується, якщо точка M не лежить на площині. Отже, маємо властивість точок площини, яку запишемо у векторній формі:

$$np_{\vec{e}}\overrightarrow{OM} = \vec{r} \cdot \vec{e}.$$

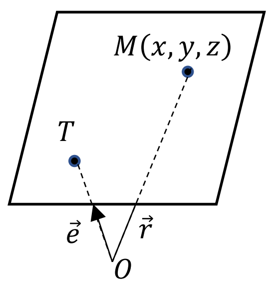

Рисунок 4.1

Величина зліва дорівнює p. Маємо: $\vec{r} \cdot \vec{e} - p = 0$, за цією умовою точка M лежить на цій площині, і має назву нормального рівняння площини. Воно записано у векторній формі. Вектор $\vec{r}$ має координати x, y, z. Вектор $\vec{e}$ своїми проєкціями має косинуси кутів α, β, γ, які він утворює з координатними осями $Ox,\ Oy$ та Oz. Отже, маємо:

$$\vec{r} = (x, y, z) \text{ і } \vec{e} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma).$$

Скалярний добуток векторів $\vec{r}$ і $\vec{e}$ дає ***нормальне рівняння площини в координатній формі*****:**

$$x \cdot cos\alpha + y \cdot cos\beta + z \cdot cos\gamma - p = 0.$$

Одержане рівняння першого порядку відносно x, y, z, тобто всяка площина може бути подана рівнянням першого порядку відносно поточних координат.

4.1.2 Загальне рівняння площини

Вище було доведено, що будь-яка площина може бути подана рівнянням першого порядку. Доведемо зворотне: будь-яке рівняння першого порядку (степеня) між трьома змінними визначає площину.

Візьмемо рівняння першого степеня загального вигляду:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Розглянемо A, B і C як проєкції на вісі координат Ox, Oy і Oz деякого вектора $\vec{N}$, а x, y, z як проєкції радіус-вектора $\vec{r}$ точки M. Тоді рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$, може бути переписано у вигляді

$$\vec{r} \cdot \vec{N} + D = 0,$$

Яке зводиться до вигляду $\vec{r} \cdot \vec{e} - p = 0$, якщо останнє поділити на довжину вектора $\vec{N}$. Отже, матимемо: $\vec{e} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ і $p = -\frac{D}{|\vec{N}|}$.

Отже, рівняння $\vec{r} \cdot \vec{N} + D = 0$ завжди може бути зведено до нормального вигляду $xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma - p = 0$, але оскільки нормальне рівняння завжди визначає площину, то і рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$, визначає площину, що й потрібно було довести.

Рівняння вигляду $Ax + By + Cz + D = 0$ – ***загальне рівняння площини.***

4.1.3 Зведення загального рівняння площини до нормального вигляду

З п. 4.1.2 маємо спосіб перетворення загального рівняння площини до рівняння площини у нормальній формі. Щоб привести загальне рівняння першого степеня до нормального вигляду необхідно помножити його на множник

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm \frac{1}{|\vec{N}|},$$

де знак множника належить брати протилежним знаку вільного члена D. Цей множник має назву нормуючого множника. Після множення на M загальне рівняння площини матиме вигляд:

$$M \cdot Ax + M \cdot By + M \cdot Cz + M \cdot D = 0$$

і співпадає з рівнянням $xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma - p = 0$, якщо:

$$M \cdot A = cos\alpha; \quad M \cdot B = cos\beta; \quad M \cdot C = cos\gamma; \quad M \cdot D = -p.$$

Звідси маємо формули для обчислення напрямних косинусів і числа p:

$$cos\alpha = \pm\frac{A}{\left|\vec{N}\right|};\ \ cos\beta = \pm\frac{B}{\left|\vec{N}\right|};\ \ cos\gamma = \pm\frac{C}{\left|\vec{N}\right|};\ \ p = \mp\frac{D}{\left|\vec{N}\right|},$$

де $\left|\vec{N}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, звідси маємо рівність

$$\boldsymbol{cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1}.$$

Приклад. Рівняння площини $2x + 3y - z + 4 = 0$ перетворити до нормального вигляду.

Розв'язання. Обчислимо нормуючий множник

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Помножимо рівняння на нормуючий множник, оскільки $D = 4$, тому знак множника належить брати протилежним знаку вільного члена $M = -\frac{1}{\sqrt{14}}$

$$-\frac{2}{\sqrt{14}}x - \frac{3}{\sqrt{14}}y + \frac{1}{\sqrt{14}}z + \frac{4}{\sqrt{14}} = 0;$$

$$cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{14}},\qquad cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{14}},\qquad cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}};\ \ p = -\frac{4}{\sqrt{14}}.$$

4.1.4 Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай на площині α задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і відомий ***вектор нормалі*** $\vec{n} = (A; B; C) \neq \vec{0}$ (рис. 4.2).

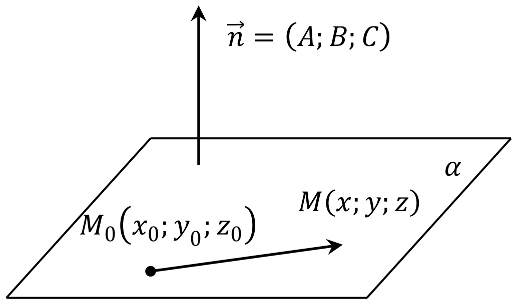

Рисунок 4.2

Візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ на цій площині та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Точка $M(x; y; z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до нормалі $\vec{n}$. Використавши умову перпендикулярності векторів, маємо

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0,$$

або в координатній формі

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \text{ –}$$

рівняння площини, що проходить через задану точку $\boldsymbol{M_0}$ ***перпендикулярно до заданого вектора*** $\boldsymbol{\vec{n}}$.

4.1.5 Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай на площині α задано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій (рис. 4.3).

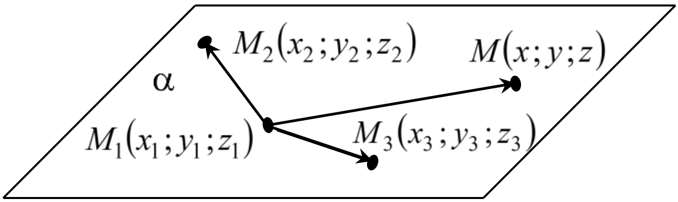

Рисунок 4.3

Оберемо довільну точку $M(x, y, z)$ на цій площині та побудуємо три вектори:

$$\overrightarrow{M_1M}(x - x_1; y - y_1; z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)\ ,$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1),$$

що виходять з однієї точки M_1. Точка $M(x, y, z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні. За умовою компланарності трьох векторів, їхній мішаний добуток дорівнює нулю, тому отримаємо:

$$\left(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}\right) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0,$$

або в координатній формі –

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ –}$$

рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через три точки $A\ (1,-4,2),\ \ B(-7,2,-6), C(-2,7,8)$.

Розв'язання. Запишемо визначник та розкладемо його за елементами першого рядка

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-2 \\ -7-1 & 2+4 & -6-2 \\ -2-1 & 7+4 & 8-2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-2 \\ -8 & 6 & -8 \\ -3 & 11 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 11 & 6 \end{vmatrix} - (y+4)\begin{vmatrix} -8 & -8 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} -8 & 6 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1)(36-88) - (y+4)(-48-24) + (z-2)(-88+18) = 0$$

$$124(x-1) + 72(y+4) - 70(z-2) = 0;$$

$$62(x-1) + 36(y+4) - 35(z-2) = 0$$

$$62x - 62 + 36y + 144 - 35z + 70 = 0$$

Рівняння площини ABC та його вектор нормалі

$$62x + 36y - 35z + 152 = 0;\ \vec{n} = (62, 36, -35\ ).$$

4.1.6 Рівняння площини у відрізках

Нехай площина α перетинає всі три координатні вісі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$ і $M_3(0;0;c)$ (рис. 4.4).

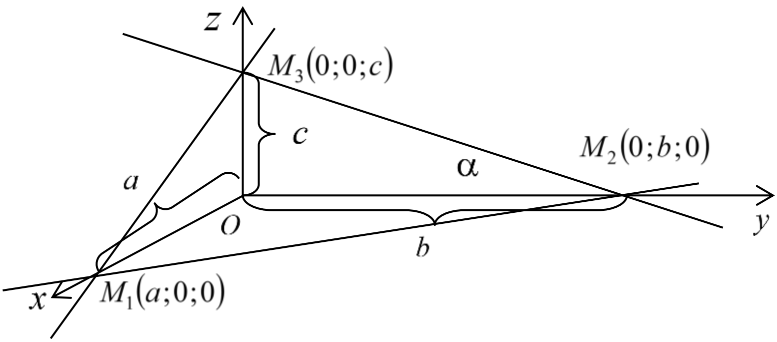

Рисунок 4.4

Використавши рівняння площини, що проходить через три точки, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$bcx - abc + abz + acy = 0;$$

$$bcx + abz + acy = abc | \div abc;$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 - \text{рівняння площини у відрізках.}$$

4.1.7 Взаємне розташування площин

Нехай дві площини α_1 і α_2 задано загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Кут φ між площинами α_1 і α_2 дорівнює куту між їхніми векторами нормалей: $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ (рис. 4.5).

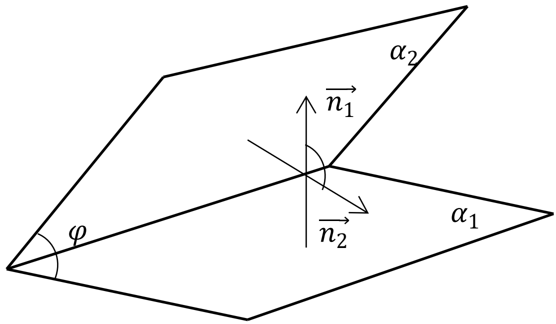

Рисунок 4.5

Отже,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}}.$$

Використавши умови перпендикулярності та паралельності векторів, отримаємо відповідні умови для площин.

Умова перпендикулярності двох площин

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Умова паралельності двох площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Дві площини збігаються, якщо

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_1}.$$

Приклад. Знайти кут між цими площинами $5x - 4y + 2z - 8 = 0$ і $3x + 7y - z + 1 = 0$.

Розв'язання: $\overrightarrow{n_1} = (5;\ -4; 2)$ і $\overrightarrow{n_2} = (3; 7;\ -1)$, тому маємо:

$$\cos\varphi = \frac{5 \times 3 + (-4) \times 7 + 2 \times (-1)}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 7^2 + (-1)^2}} = \frac{15 - 28 - 2}{\sqrt{45} \times \sqrt{59}};$$

$$\cos\varphi = -\frac{15}{\sqrt{2\,655}};\ \varphi = \pi - arccos\frac{15}{\sqrt{2\,655}}.$$

4.1.8 Відстань від точки до площини

Нехай у просторі задані площина α загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і деяка точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис. 4.6).

Оберемо на цій площині довільну точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$: $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$.

Відстань d від точки M_0 до площини α дорівнює модулю проєкції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормалі $\vec{n} = (A; B; C)$

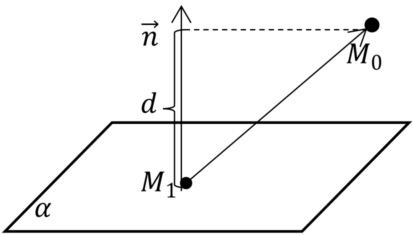

Рисунок 4.6

$$d = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Оскільки $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$, то ***відстань від точки до прямої*** обчислюємо за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Приклад. Знайти відстань d від точки $M_0(4; -3; 5)$ до площини α: $3x + 6y - 2z - 2 = 0.$

Розв'язання: $A = 3,\ B = 6,\ C = -2,\ D = -2, x_0 = 4,$ $y_0 = -3, z_0 = 5.$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \times 4 + 6 \times (-3) + (-2) \times 5 - 2|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}};$$

$$d = \frac{|-18|}{\sqrt{50}} = \frac{18}{5\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{5}\ \text{(од.)}.$$

4.2 Пряма лінія у просторі

4.2.1 Рівняння прямої, що проходить через задану точку, паралельно до заданого вектора (канонічні рівняння прямої)

Нехай на прямій l задана деяка точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і відомий ***напрямний вектор*** $\vec{S} = (m; n; p)$ цієї прямої – довільний ненульовий вектор, паралельний до неї (рис. 4.7).

Оберемо довільну точку $M(x; y; z)$ на цій прямій та побудуємо вектор: $\overrightarrow{M_0M} = \left(x - x_0; y - y_0; z - z_0\right)$.

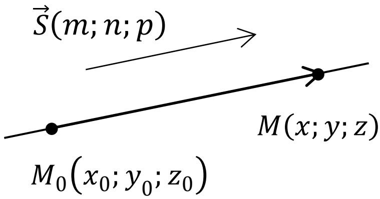

Рисунок 4.7

Точка M належить прямій тоді й тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний до вектора $\vec{S}$. Використавши умову паралельності векторів, отримаємо:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

– ***канонічні рівняння прямої***.

4.2.2 Параметричні рівняння прямої

Якщо у канонічні рівняння прямої ввести коефіцієнт пропорційності t:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

і розв'язати їх відносно x, y та z, то отримаємо:

$$\frac{x-x_0}{m}=t, \qquad \frac{y-y_0}{n}=t, \qquad \frac{z-z_0}{p}=t.$$

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases} -$$

параметричні рівняння прямої, де змінна t слугує параметром.

Приклад. Пряма задана канонічним рівнянням

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{5}.$$

Записати параметричне рівняння цієї прямої.

Розв'язання:

$$\frac{x-1}{4}=t, \quad \frac{y+2}{-3}=t, \qquad \frac{z+1}{5}=t.$$

$$\begin{cases} x-1=4t \\ y+2=-3t; \\ z+1=5t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=4t+1 \\ y=-3t-2\,. \\ z=5t-1 \end{cases}$$

4.2.3 Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай на прямій l задано дві точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. За напрямний вектор можна обрати

$$\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1).$$

Тоді (за канонічними рівняннями) маємо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} -$$

рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-4;2;-5)$ і $M_2(2;-6;1)$.

Розв'язання:

$$\frac{x-(-4)}{2-(-4)}=\frac{y-2}{-6-2}=\frac{z-(-5)}{1-(-5)};\quad \frac{x+4}{6}=\frac{y-2}{-8}=\frac{z+5}{6};$$

$$\frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+5}{3}.$$

4.2.4 Пряма як перетин двох площин

Просторова лінія може задаватися, як перетин двох поверхонь. Зокрема, пряма l слугує лінією перетину деяких двох площин α_1 і α_2. Якщо ці площини задані загальними рівняннями

$\alpha_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $\alpha_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

то система

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

називається ***загальним рівнянням прямої.***

Приклад. Пряма l задана загальним рівнянням

$$\begin{cases} x-3y+2z-5=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases}.$$

Знайти її канонічне рівняння.

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор прямої за допомогою векторного добутку векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$.

$$\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 7\vec{k}.$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x = 0$, тоді

$$\begin{cases} -3y + 2z = 5 \\ y - z = -1 \end{cases}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad y = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3; \quad z = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -2.$$

$$M_0(0;\ -3;\ -2)$$

Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x}{1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+2}{7}.$$

4.2.5 Взаємне розташування прямих

Нехай дві прямі задано канонічними рівняннями $l_1: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ і $l_2: \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$.

Кут φ між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їхніми напрямними векторами $\overrightarrow{S_1} = (m_1; n_1; p_1)$ і $\overrightarrow{S_2} = (m_2; n_2; p_2)$. Отже,

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{{m_1}^2 + {n_1}^2 + {p_1}^2}\sqrt{{m_2}^2 + {n_2}^2 + {p_2}^2}}.$$

Використавши умови перпендикулярності та паралельності векторів, отримаємо відповідні умови для прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Умова паралельності двох прямих

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

4.2.6 Умова перетину двох непаралельних прямих. Відстань між мимобіжними прямими

Дві прямі у просторі можуть перетинатися або бути паралельними чи мимобіжними.

Нехай задано дві непаралельні прямі

$$l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ і } l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Прямі l_1 і l_2 перетинаються, якщо вектори $\overrightarrow{S_1} = (m_1; n_1; p_1)$, $\overrightarrow{S_2} = (m_2; n_2; p_2)$ і $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ – компланарні (лежать в одній площині). Використавши умову компланарності трьох векторів $\left(\overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{S_1}\right) \cdot \overrightarrow{S_2} = 0$, одержимо ***умову перетину двох непаралельних прямих***:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Зауваження. Для довільних прямих l_1 і l_2 ця рівність слугує умовою їхньої належності одній площині. Якщо ця умова не виконується, то прямі l_1 і l_2 мимобіжні.

Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими l_1 і l_2, розглянемо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2}$, перпендикулярний до обох прямих. Тоді відстань d між прямими l_1 і l_2 дорівнює модулю проєкції вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ на вектор $\vec{a}$:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}\right|}{|\vec{a}|}.$$

Зауваження. Ця формула справедлива також для прямих l_1 і l_2, що перетинаються. Зрозуміло, що при цьому $d = 0$.

Приклад. Знайти відстань d між заданими прямими:

$$l_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{2} \text{ і } l_2: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-3}.$$

Розв'язання:

$$\vec{a} = \overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Оскільки $\vec{a} \neq \vec{0}$, то прямі l_1 і l_2 – непаралельні. Далі знаходимо: $\overrightarrow{M_1M_2} = (-2-1; 0+2;\ 2-5) = (-3; 2;\ -3)$;

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + 5^2} = \sqrt{110};$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}\right| = |-3 \times 6 + 2 \times 7 - 3 \times 5| = |-19|\,;$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}\right|}{|\vec{a}|} = \frac{19}{\sqrt{110}} \text{ (од.)}.$$

4.2.7 Кут між прямою та площиною

Нехай задано пряму l канонічними рівняннями і площину α загальним рівнянням:

$$l:\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ ;\quad \alpha: Ax+By+Cz+D=0.$$

Кут φ між ними доповнює кут між напрямним вектором прямої $\vec{S}=(m,n,p)$ і вектором нормалі площини $\vec{n}=(A,B,C)$ до 90° (рис. 4.8).

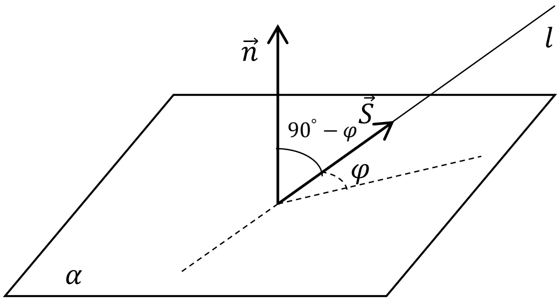

Рисунок 4.8

Тоді

$$\cos\left(90^\circ-\varphi\right)=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\ .$$

Застосовуючи тригонометричну формулу зведення і враховуючи, що кут φ між прямою і площиною – гострий, маємо

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Використавши умови перпендикулярності та паралельності векторів, отримаємо відповідні умови для взаємного розміщення прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої та площини:

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}.$$

Умова паралельності прямої та площини:

$$Am+By+Cp=0.$$

4.2.8 Перетин прямої і площини

Нехай задано пряму l параметричними рівняннями і площину α загальним рівнянням:

$$l:\begin{cases}x=mt+x_0\\ y=nt+y_0\\ z=pt+z_0\end{cases};\quad \alpha: Ax+By+Cz+D=0.$$

Для знаходження точки перетину прямої та площини необхідно скласти і розв'язати систему їхніх рівнянь. Цю систему зручно розв'язувати методом вилучення невідомих (методом Гауса), підставляючи вирази для x, y, z із параметричних рівнянь прямої у рівняння площини. Отримаємо рівняння для t:

$$(Am+Bn+Cp)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D).$$

Якщо $Am+Bn+Cp\neq 0$, тобто пряма не паралельна до площини, то пряма і площина перетинаються в одній точці, що відповідає значенню параметра

$$t=\frac{-(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{Am+Bn+Cp}.$$

Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна до площини, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тобто точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямої l не лежить на площині α, то рівняння для t розв'язків немає. Пряма паралельна до площини і не лежить на ній.

Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тобто точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямої l лежить на площині α, то рівняння для t виконується за всіх значень параметра. Пряма лежить на площині.

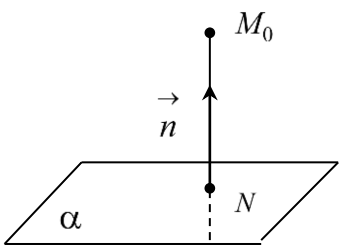

Рисунок 4.9

Приклад. Знайти проєкцію N точки $M_0(2; -5; 4)$ на площину α: $3x + 2y - z - 6 = 0$.

Розв'язання. Точка N слугує основою перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину α (рис. 4.9). Напрямний вектор $\vec{S}$ прямої M_0N колінеарний вектору нормалі $\vec{n}$ площини. Можна вважати, що $\vec{S} = \vec{n} = (3; 2; -1)$.

Тоді параметричне рівняння прямої M_0N: $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 5 \\ z = -t + 4 \end{cases}$.

Підставивши ці вирази у рівняння площини, одержимо значення параметра t, що відповідає точці перетину N прямої та площини:

$$3(3t + 2) + 2(2t - 5) - (-t + 4) - 6 = 0; \quad t = -1.$$

Звідси $x = -1$; $y = -7$; $z = 5$.

Отже, проєкцією слугує точка $N(-1; -7; 5)$.

4.2.9 Відстань від точки до прямої

Нехай потрібно знайти відстань d від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої l, яка подана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}.$$

Розглянемо два способи визначення цієї відстані.

1. Оберемо на прямій відому точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та побудуємо паралелограм на векторах $\vec{S} = (m, n, p)$ і $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$ (рис. 4.10). Площа S цього паралелограма – $S = |\vec{S}|d$ або $S = \left|\vec{S} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|$. Звідси

$$d = \frac{\left|\vec{S} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{S}|}.$$

2. Проведемо через точку M_1 площину α, перпендикулярну до прямої l (рис. 4.11). Вектор нормалі $\vec{n} = (A, B, C)$ площини α колінеарний до напрямного вектора $\vec{S}$ прямої l. Можна припустити, що $\vec{n} = \vec{S} = (m, n, p)$.

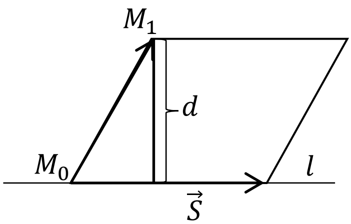

Рисунок 4.10

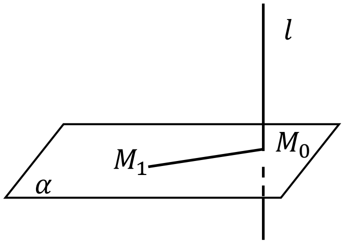

Рисунок 4.11

Тоді

$$\alpha: m(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0) + p(z_1 - z_0) = 0.$$

Далі знайдемо точку M_0 перетину прямої та площини. Ця точка слугує основою перпендикуляра, проведеного з точки M_1 до прямої l. Отже, $d = M_0M_1$.

4.2.10 Розв’язання задач на пряму і площину у просторі

Приклад. Записати канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} x - y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Розв’язання. Нормальні вектори прямих $\vec{n}_1(1,-1,3)$, $\vec{n}_2(2,1,1)$. Напрямний вектор прямої

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Для знаходження точки, що належить прямій, покладемо, що $z = 0$ і розв'яжемо систему $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$;

$3x - 3 = 0; \quad x = 1; \quad y = 0.$ Шукана точка $M_0(1, 0, 0)$.

Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}.$$

Приклад. Перевірити, чи перетинаються прямі

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 3t - 2 \\ z = -4t + 6 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x = t + 5 \\ y = -4t - 1. \\ z = t - 4 \end{cases}$$

Розв'язання. Напрямні вектори прямих $\vec{S}_1(2, 3, -4)$, $\vec{S}_2(1, -4, 1)$, а точки які належать прямим $M_1(-3, -2, 6)$, $M_2(5, -1, -4)$, вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(8, 1, -10)$. Якщо прямі перетинаються, то три вектори $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ лежать в одній площині. За умовою компланарності трьох векторів $\left(\vec{S}_1, \vec{S}_2, \overrightarrow{M_1M_2}\right) = 0$. Перевіримо:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & -10 \end{vmatrix} = 80 - 4 + 24 - 128 - 2 + 30 = 0.$$

Отже, прямі перетинаються.

Приклад. Дано координати вершин піраміди $A_1(2, -1, 1)$, $A_2(5, 5, 4)$, $A_3(3, 2, -1)$, $A_4(4, 1, 3)$. Знайти: 1) площу грані $A_1A_2A_3$, 2) об'єм піраміди, 3) рівняння площини $A_1A_2A_3$, 4) рівняння висоти проведеної з вершини A_4 до грані $A_1A_2A_3$, 5) кут між ребром $A_1\,A_4$ та гранню $A_1A_2A_3$.

Розв’язання:

Вектори $\overrightarrow{A_1A_2} = (3, 6, 3)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (1, 3, -2)$, $\overrightarrow{A_1A_4} = (2, 2, 2)$.

1. Площа грані $A_1A_2A_3$: знайдемо векторний добуток

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -21\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k};$$

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-21)^2 + 9^2 + 3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{531}\ (\text{кв. од.});$$

2. Об’єм піраміди:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}|18 + 6 - 24 - 18 - 12 + 12| = \frac{1}{6}|-18| = 3\ (\text{куб. од.});$$

3. Рівняння площини $A_1A_2A_3$ знайдемо за формулою площини, що проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-21(x-1) + 9(y+1) + 3(z-1) = 0;$$

$$-21x + 9y + 3z + 48 = 0;\ -7x = 3y + z + 16 = 0;$$

4. Рівняння висоти, проведеної з вершини A_4 до грані $A_1A_2A_3$. Нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$ – $\vec{n}=(-7,3,1)$. Вектори $\vec{n}$ і $\vec{S}$ паралельні і $\vec{n}=\vec{S},$ тоді рівняння шуканої висоти мають вигляд

$$\frac{x-4}{-7}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1};$$

5. Кут між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$ знайдемо за формулою кута між прямою та площиною, $\vec{S}=\overrightarrow{A_1A_4}=(2,2,2),$ $\vec{n}=(-7,3,1)$, тоді

$$sin\varphi=\frac{|2\times(-7+2\times3+2\times1)|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{(-7)^2+3^2+1^2}}=\frac{6}{2\sqrt{177}}=\frac{3}{\sqrt{177}};$$

$$\varphi=arcsin\frac{3}{\sqrt{177}}=arcsin\sqrt{\frac{3}{59}}.$$

Контрольні запитання

1. Як визначається розташування площини у просторі?
2. Запишіть нормальне рівняння площини у векторній та координатній формі.
3. Проведіть аналіз загального рівняння площини.
4. Запишіть рівняння площини у відрізках. Проілюструйте зручність його використання для побудови площини.
5. Як отримати рівняння площини, якщо відомі координати трьох точок, що належать заданій площині?

6. Розгляньте всі можливі варіанти взаємного розташування площин у просторі. Як визначити кут між площинами? Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох площин.

7. Як визначити точку перетину трьох площин? Результатами якого з попередніх розділів ви скористаєтесь для розв'язання цієї задачі?

8. Як визначити відстань між точкою та площиною?

9. Як визначається розташування прямої у просторі?

10. Запишіть канонічне рівняння прямої у векторній та координатній формі.

11. Опишіть загальне рівняння прямої як результат перетину двох площин.

12. Як записати рівняння прямої, якщо відомі координати двох точок, що їй належать?

13. Розгляньте всі можливі варіанти взаємного розташування прямих у просторі. Як визначити кут між прямими? Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.

14. Як визначити кут між прямою та площиною? Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини у просторі.

15. Як знайти точку перетину прямої та площини? Сформулюйте алгоритм розв'язання.

16. Як саме елементи векторної алгебри допомагають вам у розв'язанні задач на пряму та площину у просторі? Наведіть приклади.

РОЗДІЛ 5 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5.1 Загальне рівняння поверхні другого порядку

Поверхні будемо розглядати в декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$.

Форму і властивості поверхні встановлюють за допомогою *методу паралельних перерізів*: побудови і дослідження просторових ліній перетину поверхні координатними площинами (*головні перерізи*) і площинами, що паралельні до них.

Поверхнею другого порядку називається множина всіх точок простору, координати яких задовольняють її ***загальне рівняння:***

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

де $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J$ – *сталі коефіцієнти*, до того ж хоча б один із коефіцієнтів $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ відмінний від нуля, тобто $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0$.

Існує дев’ять типів дійсних невироджених поверхонь другого порядку: три циліндри – еліптичний, гіперболічний і параболічний; конус другого порядку; еліпсоїд (зокрема, сфера); однопорожнинний гіперболоїд; двопорожнинний гіперболоїд; еліптичний параболоїд; гіперболічний параболоїд.

5.2 Сфера як поверхня другого порядку

Сферичною поверхнею (сферою) називається множина всіх точок $M(x, y, z)$ простору, кожна з яких віддалена від заданої

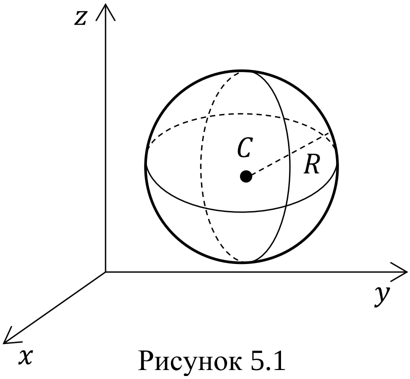

Рисунок 5.1

точки $C(x_0, y_0, z_0)$ (центра сфери) на задану відстань R (радіус сфери) (рис. 5.1).

Зауваження. Сфера є обмеженою замкненою поверхнею, симетричною відносно центра. Довільна пряма, що проходить через її центр, слугує віссю симетрії сфери. Довільна площина, що проходить через центр сфери, слугує її площиною симетрії.

Для довільної точки $M(x, y, z)$ сфери виконується рівність $CM = R$.

Але $CM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Тому $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Піднісши до квадрата, отримаємо

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 -$$

рівняння сфери зі зміщеним центром.

Якщо центр сфери співпадає з початком координат $O(0,0,0)$, то маємо ***канонічне рівняння сфери***

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

5.3 Циліндричні поверхні другого порядку

Розглянемо *циліндричні поверхні другого порядку*.

1. ***Еліптичний циліндр*** (рис. 5.2) характеризується ***канонічним рівнянням***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

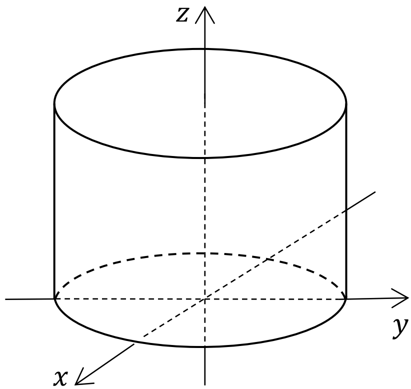

Рисунок 5.2

Зокрема, якщо $a^2=b^2=R^2$, то рівняння

$$x^2+y^2=R^2$$

визначає ***круговий циліндр.***

Координатні площини слугує площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії еліптичного циліндра.

Вісь Oz називається *прямою центрів* еліптичного циліндра, оскільки кожна точка цієї осі є його центром симетрії.

2. ***Гіперболічний циліндр*** (рис. 5.3) характеризується

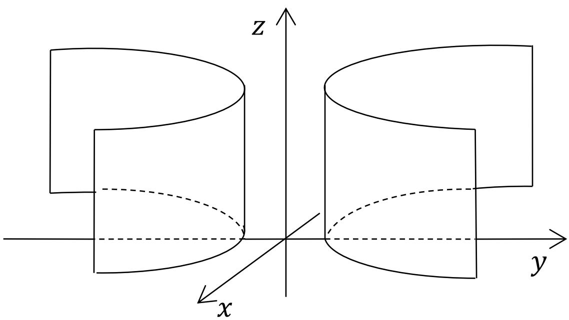

Рисунок 5.3

канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Координатні площини $Oxz,\ Oyz, Oxy$ слугують площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії гіперболічного циліндра. Вісь Oz називається *прямою центрів* гіперболічного циліндра, оскільки кожна точка цієї осі є його центром симетрії.

3. ***Параболічний циліндр*** (рис. 5.4) характеризується ***канонічним рівнянням***

$$y^2 = 2px.$$

Дві координатні площини Oxy і Oxz слугують площинами симетрії, а координатна вісь Ox – віссю симетрії параболічного циліндра.

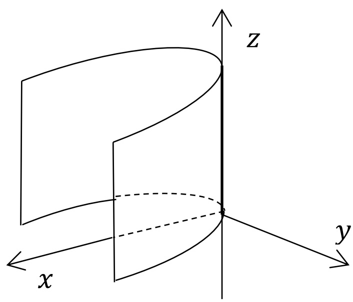

Рисунок 5.4

5.4 Конус другого порядку

Канонічне рівняння конуса другого порядку (*еліптичного конуса*) (рис. 5.5) –

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Вершина $O(0,0,0)$ є центром симетрії, вісь Oz – віссю симетрії, а координатні площини – площинами симетрії цього конуса.

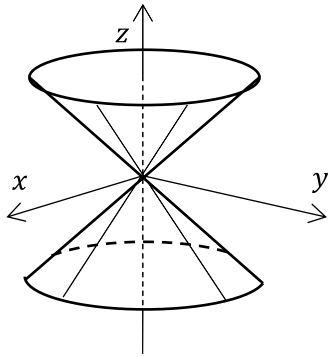

Рисунок 5.5

Зокрема, якщо $a=b$, то рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

визначає ***круговий конус***.

Зауваження. Коло, еліпс, гіперболу і параболу можна одержати як лінії перетину кругового конуса площиною.

5.5 Еліпсоїд обертання. Еліпсоїд загального вигляду

Якщо еліпс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо осі Oz, то отримаємо ***еліпсоїд обертання*** навколо осі Oz (***сфероїд***) (рис. 5.6)

$$\frac{(x^2+y^2)}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 -$$

канонічне рівняння еліпсоїда обертання.

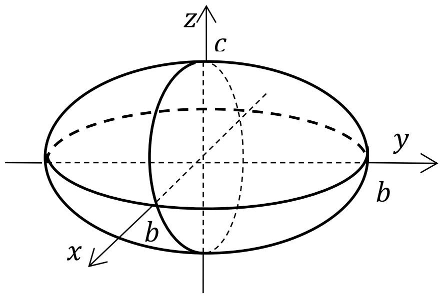

Рисунок 5.6

Рівномірно деформуючи еліпсоїд обертання (розтяг чи стиск) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = {}^{b}\!/_{a}$, отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 -$$

канонічне рівняння еліпсоїда *загального вигляду* (*еліпсоїда*).

Еліпсоїд має форму обмеженої замкненої овальної поверхні. Координатні площини слугують площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається *центром* еліпсоїда.

Величини a, b і c називаються *півосями* еліпсоїда. Якщо будь-які дві півосі рівні між собою, то це еліпсоїд обертання, а якщо всі три півосі рівні між собою, то – сфера.

5.6 Однопорожнинний гіперболоїд обертання

Якщо гіперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо уявної осі Oz, то отримаємо

однопорожнинний гіперболоїд обертання навколо осі Oz.

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 -$$

канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда обертання.

Рівномірно деформуючи однопорожнинний гіперболоїд обертання (розтяг чи стиск) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k={}^{b}/_{a}$, одержимо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 -$$

канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда *загального вигляду* (рис. 5.7).

Величини $a,\ b$ і c називаються *півосями* однопорожнинного гіперболоїда.

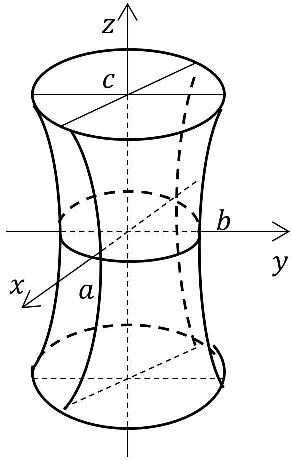

Рисунок 5.7

Однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної трубки, що розширюється в обидва боки від площини симетрії $z=0$ уздовж осі симетрії Oz. Поперечним перерізом є еліпс. Переріз при $z=0$ називається *горловим*. Координатні площини є площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається ***центром*** однопорожнинного гіперболоїда.

5.7 Двопорожнинний гіперболоїд обертання

Якщо гіперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо дійсної осі Oz, то отримаємо ***двопорожнинний гіперболоїд обертання*** навколо осі Oz.

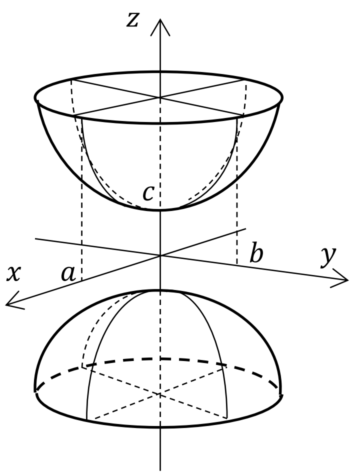

Рисунок 5.8

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 -$$

канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда обертання.

Рівномірно деформуючи двопорожнинний гіперболоїд обертання (розтяг чи стиск) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = {}^{b}/_{a}$, одержимо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 -$$

канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда *загального вигляду* (рис. 5.8).

Величини a, b і c називаються ***півосями*** двопорожнинного гіперболоїда. Двопорожнинний гіперболоїд складається з двох симетричних порожнин, кожна з яких має форму нескінченної опуклої чаші. Координатні площини слугують площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається ***центром*** двопорожнинного гіперболоїда.

5.8 Параболоїд обертання

Якщо параболу $y^2 = 2pz,\ p > 0$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо її осі Oz, то отримаємо ***параболоїд обертання*** навколо осі Oz.

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z -$$

канонічне рівняння параболоїда обертання.

Рівномірно деформуючи параболоїд обертання (розтяг чи стиск) вздовж осі Oy з коефіцієнтом деформації $k = \sqrt{p/q}$, одержимо

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z -$$

канонічне рівняння параболоїда *загального вигляду* (*еліптичного параболоїда*) (рис. 5.9).

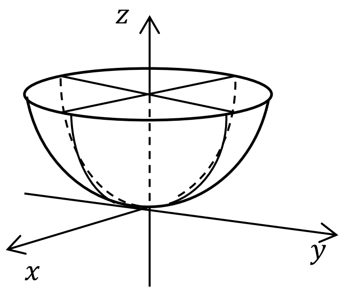

Рисунок 5.9

Величини p і q називаються *параметрами* еліптичного параболоїда, $p > 0, q > 0$.

Еліптичний параболоїд має форму нескінченної опуклої чаші. Дві координатні площини Oxz і Oyz слугують площинами симетрії, а координатна вісь Oz – віссю симетрії. Початок координат називається *вершиною* еліптичного параболоїда.

Контрольні запитання

1. Яка поверхня називається сферою?
2. Наведіть канонічне рівняння сфери та рівняння сфери зі зміщеним центром.
3. Запишіть загальне рівняння поверхні другого порядку.
4. Яка поверхня називається циліндричною?
5. Запишіть канонічні рівняння еліптичного, гіперболічного, параболічного циліндрів.
6. Яка поверхня називається конічною?
7. Наведіть канонічне рівняння конуса другого порядку.
8. Як утворюється поверхня обертання?
9. Як знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї ж площини?
10. Запишіть канонічні рівняння еліпсоїда, однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів, еліптичного та гіперболічного параболоїдів. Які з цих поверхонь є лінійчатими?

РОЗДІЛ 6 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

6.1 Змінні величини і функції

6.1.1 Змінні та сталі величини

Змінною величиною називається величина, яка може набувати різних значень за умови задачі. Позначають змінні величини як $\boldsymbol{x, y, z, u, v, w, t}, \ldots$.

Сталою величиною або ***константою*** (від латинського слова «constans» – «сталий») називається величина, яка не змінює свого значення за умови задачі. Позначають сталі величини як $\boldsymbol{a, b, c, d}, \ldots$ Величини, значення яких не змінюється за будь-яких обставин, називаються ***абсолютними сталими***. Наприклад, відношення довжини кола до діаметра є абсолютно сталою величиною: $\boldsymbol{\pi} =3{,}14159\ldots$

Сукупність всіх числових значень змінної величини утворює її ***область значень***.

Змінна x є ***упорядкованою величиною***, якщо кожне з двох будь-яких її значень можна охарактеризувати, яке попереднє і наступне.

Змінна величина x називається ***обмеженою***, якщо всі її значення за модулем не перевищують деякого додатного числа M протягом всього процесу змінювання: $|x| \leq M$.

В іншому разі змінна величина називається ***необмеженою.*** Зокрема, змінна величина x називається ***необмеженою,*** якщо для довільного додатного числа M знайдеться хоча б одне значення x, яке за модулем перевищує це число M: $|x| > M$.

Змінна величина x називається ***зростальною,*** якщо в процесі змінювання її значення не зменшуються, тобто кожне наступне значення не менше за попереднє.

Змінна величина x називається ***спадною***, якщо в процесі змінювання її значення не збільшуються, тобто кожне наступне значення не більше за попереднє.

Зростальні та спадні змінні величини називаються ***монотонними.***

6.1.2 Функції. Основні визначення

Будь-який процес у природі може бути охарактеризований взаємною зміною декількох змінних величин. Визначення зв'язку між величинами, що беруть участь у процесі, який досліджується, є головною задачею природничих наук. Залежність значень змінних величин між собою описується функційною залежністю.

Нехай задано непорожні множини X і Y. Якщо зазначено правило (*закон відповідності*) f, за яким кожному значенню x із множини X ставиться у відповідність одне певне значення y із множини Y, то кажуть, що задано ***функцію,*** визначену на множині X, зі значеннями у множині Y. Функцію позначають так: $y = f(x)$.

До того ж x називається ***незалежною змінною*** (*аргументом*), а y – ***залежною змінною*** (*функцією*).

Множина $D(f) = X$ називається ***областю визначення функції.*** Множина $E(f) = Y$ всіх значень $y \in Y$, кожне з яких відповідає принаймні одному $x \in D(f)$, називається ***областю значень функції.***

Якщо змінні x і y розглядати як декартові координати точок на площині, то ***графіком функції*** $y = f(x)$ є множина всіх точок координатної площини Oxy з координатами $\big(x, f(x)\big)$.

Складна функція. Нехай $y = f(x) -$ деяка функція з областю визначення $D(f)$ і областю значень $E(f)$, а $z = g(y) -$ деяка функція, що задана на множині $E(f)$ або на деякій її підмножині з областю значень $E(g)$.

Відповідність, яка надає кожному значенню x з множини $D(f)$ єдине число y з множини $E(f)$, а числу $y -$ єдине число z з множини $E(g)$, називається ***складною функцією***: $z = g(f(x))$. Більшість функцій, які ми будемо досліджувати – складні.

Обернена функція. Нехай $y = f(x) -$ деяка функція з областю визначення $D(f)$ і областю значень $E(f)$. Для будь-якого y_0 з множини $E(f)$ обов'язково знайдеться хоча б одне значення $x = x_0$ з множини $D(f)$ таке, що $f(x_0) = y_0$. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна, то для кожного x_0 з множини $D(f)$ знайдеться єдине значення y_0 з множини $E(f)$ таке, що $f(x_0) = y_0$.

Відповідність, яка надає кожному числу y_0 з множини $E(f)$ єдине число x_0 з множини $D(f)$, називається ***оберненою функцією*** f^{-1}до функції f: $x = f^{-1}(y)$.

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ визначена і строго зростальна (чітко спадна) на відрізку $[a, b]$. Тоді обернена функція $y = f^{-1}(x)$ визначена і чітко зростальна (чітко спадна) на відрізку$[f(a), f(b)]$, $([f(b), f(a)])$.

6.1.3 Основні способи завдання функції

Задати функцію означає з'ясувати її область визначення та правило, за яким кожному значенню незалежної змінної ставиться у відповідність певне значення функції. Розглянемо такі способи задання функції: табличний, графічний, аналітичний.

1. ***Табличний спосіб завдання функції.*** За цього способу пишуть у визначеному порядку значення аргументу x_1, $x_2, \dots, x_i, \dots$ і відповідні значення функції $y_1,\ y_2, \dots, y_i, \dots$: За такого способу завдання виписуються послідовно значення незалежної змінної та відповідні їм значення функції.

Таблиця 6.1

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$

2. ***Графічний спосіб завдання функції.*** Якщо у прямокутній системі координат на площині маємо деяку сукупність точок (x, y) і при цьому ніякі дві точки не лежать на одній прямій, що паралельна осі Oy, то ця сукупність точок визначає деяку однозначну функцію $y = f(x)$. Значеннями аргументу є абсциси точок, значеннями функції – відповідні ординати. Множина точок, абсциси яких є значеннями незалежних аргументів, а ординати – відповідними значеннями функції, утворюють графік функції.

3. ***Аналітичний спосіб завдання функції***. Функція задається формулою, за допомогою якої для будь-якого значення аргументу можна обчислити відповідне значення функції. Аналітичний спосіб є основним способом завдання функції в математичному аналізі.

Аналітичний спосіб завдання можемо поділити на три типи:

– ***явна форма завдання функції.*** Функцію задають у вигляді формул, що визначають операції (і послідовність їхнього виконання), які потрібно здійснити щодо значень незалежної змінної x, щоб визначити значення залежної змінної y. Наприклад, $y=\left(\sqrt{x}-1\right)^3$, де $x\geq 0$;

– ***неявна форма завдання функції.*** Неявним розуміють завдання функції у вигляді рівняння $F(x,y)=0$, не розв'язаного відносно y, яке визначає функцію тільки тоді, коли всі впорядковані пари (x,y), що є розв'язками цього рівняння, утворюють множину, у якій для будь-якого числа x_0 існує не більше ніж одна пара (x_0,y_0) з першим елементом x_0. Наприклад, $xy+sin\,y-1=0$;

– ***параметрична форма завдання функції.*** Якщо функцію задано параметрично, то значення змінних x і y, що відповідають одне одному, визначають через третю величину t (*параметр*): $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$.

Наприклад, $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$.

6.1.4 Основні характеристики поводження функції

Значення незалежного аргументу x, за якого функція обертається в нуль, $f(x)=0$, називається ***нулем функції***.

Між нулями функції розташовані інтервали знакопостійності функції, тобто інтервали, де функція додатна – $f(x)>0$ (графік функції розташований над віссю Oy), та інтервали, де функція від'ємна – $f(x) < 0$ (графік – під віссю Oy).

Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо при заміні знака у будь-якого аргументу функції, значення самої функції залишається незмінним: $f(-x) = f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається ***непарною***, якщо при заміні знака у будь-якого аргументу функції, значення самої функції теж змінює знак на протилежний, не змінюючи при цьому свого абсолютного значення: $f(-x) = -f(x)$.

Зауважимо, що графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною***, якщо існує таке додатне число T, що для будь-якого x справедлива рівність $f(x+T) = f(x)$. Найменше додатне число T, для якого виконується ця умова, називається періодом функції.

Функція $y = f(x)$ називається ***зростальною*** на інтервалі (a, b), якщо більшим значенням аргументу відповідають більші значення функції. Отже, із умови $x_1 < x_2$ прямує $f(x_1) < f(x_2)$ для будь-яких x з інтервалу (a, b). Функція $y = f(x)$ називається ***спадною*** на інтервалі (a, b), якщо більшим значенням аргументу відповідають менші значення функції. Отже, із умови $x_1 < x_2$прямує $f(x_1) > f(x_2)$ для будь-яких x з інтервалу (a, b).

Інтервал незалежної змінної, у якому функція зростає, називається ***інтервалом зростання*** функції; інтервал незалежної змінної, у якому функція спадає, називається ***інтервалом спадання*** функції. Інтервали зростання і спадання функції називаються ***інтервалами монотонності***.

6.2 Теорія границь

6.2.1 Границя змінної величини

Стале число a називається ***границею*** деякої числової послідовності дійсних чисел x_n, якщо, яким би не був окіл точки a, він включає всі члени вказаної послідовності, починаючи з деякого номера, тобто $|x_n - a| < \varepsilon$. Границю змінної величини будемо позначати, як $x_n \to a$ або $lim\ x_n = a$.

Приклад. Змінна величина послідовно набуває такого значення:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}, x_2 = 1 + \frac{1}{4}, x_3 = 1 + \frac{1}{8}, \dots, x_n = 1 + \frac{1}{2^n}.$$

Доведемо, що змінна величина має границю, яка дорівнює одиниці.

Розв'язання. Обчислимо $|x_n - 1| = \left|\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) - 1\right| = \frac{1}{2^n}$. Зрозуміло, що для будь-якого наперед заданого малого додатного числа ε всі наступні значення змінної, починаючи з x_n, де $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, буде виконуватися нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, що й необхідно було довести.

Основні властивості змінних величин:

1. Границя константи дорівнює самій константі. Дійсно, якщо за будь-яких n $x_n = c$, то за будь-якому $\varepsilon > 0$ справедливо наступне.
2. Змінна величина не може прямувати до двох границь.
3. ***Теорема про стиснуту змінну.*** Якщо $x_n \le y_n \le z_n$, $n = 1,2, \dots$ і $lim\, x_n = lim\ z_n = a,$ то і $lim\, y_n = a$. Отже, якщо дві змінні величини прямують до однієї й тієї саме границі, а третя

змінна замкнена між ними, то вона теж прямує до тієї саме границі.

6.2.2 Границя функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай незалежна змінна x нескінченно наближається до числа x_0, а відповідне значення функції $y = f(x)$ нескінченно наближається до деякого числа A. Тоді кажуть, що число $A -$ границя функції $y = f(x)$ за $x \to x_0$.

Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$ за $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від числа x_0, відповідні значення функції $y = f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A. Границю функції позначають так:

$$lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Число A є границею функції $y = f(x)$ за $x \to x_0$, якщо для будь-якого заздалегідь обраного малого додатного числа ε можна підібрати таке саме мале число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < 0$, буде справедливою також нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

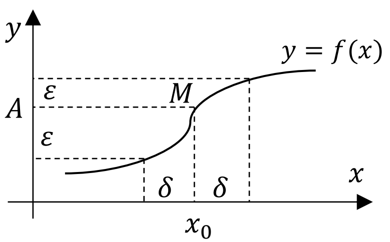

Рисунок 6.1

Існування границі функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, яка дорівнює A, проілюстровано на рисунку 6.1. Проведемо перпендикуляри до координатних осей в точці x_0 до осі Ox, в точці A до осі $Oy -$ до їхнього перетину в точці M.

Довільно оберемо додатне число ε, тоді знайдеться такий δ-окіл точки $x = x_0,$ що частина графіка функції $y = f(x)$, що відповідає цьому околу, буде знаходиться в смузі, яка обмежена прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$.

Односторонні границі

Число A називається ***лівою границею функції*** $y = f(x)$ за $x \to x_0$, якщо для будь-якого малого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, де $\delta(\varepsilon)$ таке, що для всіх $x \epsilon (a, x_0)$, що задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Ліва границя позначається, як

$$lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$$

Аналогічно визначається ***права границя функції***:

$$lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Ліва та права границі функції називаються односторонніми границями функції.

Якщо функція визначена на деякому інтервалі (a, b), крім, можливо, точки $x = x_0$, то для існування границі функції необхідно і достатньо, щоб ліва і права границі функції існували і дорівнювали одна одній:

$$lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

У загальному випадку ліва і права границя можуть існувати, але не дорівнювати одна одній.

6.2.3 Нескінченно малі і нескінченно великі величини

Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно великою*** величиною за $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від x_0, відповідні значення функції за абсолютною величиною перебільшують будь-яке наперед задане яке завгодно велике додатне число:

$$lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Отже, якщо для будь-якого наперед заданого як завгодно великого додатного числа M можна підібрати таке додатне число δ, що для всіх x, які задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, буде справедлива і нерівність $|f(x)| > M$, то $y = f(x)$ буде нескінченно великою величиною за $x \to x_0$.

Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно малою*** величиною за $x \to x_0$, якщо її границя за $x \to x_0$ прямує до нуля:

$$lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x^2}$ за $x \to 0$ є нескінченно великою, а функція $y = 2^{-x}$ за $x \to \infty$ є нескінченно малою величиною.

Теорема. Якщо $f(x)$ – нескінченно велика величина, то $\frac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала величина, і навпаки: якщо $\varphi(x)$ – нескінченно мала величина, то $\frac{1}{\varphi(x)}$ – нескінченно велика величина.

Доведення. Нехай $f(x) \to \infty$ за $x \to x_0$; необхідно переконатися в тому, що $\frac{1}{f(x)} \to 0$. Задамо довільне мале число $\varepsilon > 0$ і оберемо число $M = \frac{1}{\varepsilon}$. За умовою теореми $f(x)$ – нескінченно велика величина, а тому для всіх x, близьких до x_0, справджується умова:

$$|f(x)\,| > M = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Але в такому випадку справедливим буде і таке:

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M} = \varepsilon.$$

З цього випливає, що $lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0,$ тобто величина $\frac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою, що потрібно було довести.

Аналогічно доводиться і друга частина теореми.

Пряма теорема. Якщо функція має границю, то її можна подати у вигляді суми сталої, яка дорівнює її границі, і нескінченно малої величини.

Доведення. Нехай $lim_{x \to x_0} f(x) = A$. Якщо $\varepsilon -$ будь-яке додатне мале число, то $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всіх x, які мало відрізняються від x_0. З цього випливає, що різниця $f(x) - A$ є нескінченно малою величиною:

$$f(x) - A = \alpha(x) \text{ або } f(x) = A + \alpha(x).$$

Обернена теорема. Якщо функцію можна подати у вигляді суми сталої і нескінченно малої величини, то сталий доданок і є границею функції.

Доведення. З рівності $f(x) = A + \alpha(x)$, де $A-$ стала, а $\alpha(x)$ за $x \to x_0 -$ нескінченно мала, прямує, що якщо $\varepsilon -$ будь-яке мале додатне число, то $|f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon$ для всіх x, які мало відрізняються від x_0. Проте це означає, що функція $f(x)$ має своєю границею сталу величину A, тобто $lim_{x \to x_0} f(x) = A$.

6.2.4 Основні теореми про границі функції

Теорема 1. Границя алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі границь функцій доданків:

$$\lim_{x \to x_0}(u + v + \cdots + w) = \lim_{x \to x_0} u + \lim_{x \to x_0} v + \cdots + \lim_{x \to x_0} w.$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} u = a_1,\ \lim\limits_{x \to x_0} v = a_2,\ \dots,\ \lim\limits_{x \to x_0} w = a_n$ тоді $u = a_1 + \alpha_1, v = a_2 + \alpha_2,\ \dots,\ w = a_n + \alpha_n,$ де $\alpha_1, \alpha_2,$ $\dots, \alpha_n -$ нескінченно малі (за прямою теоремою п. 6.2.3), а отже, можна суму функцій подати у вигляді

$$u + v + \cdots + w = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n).$$

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) -$ стала величина, $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) -$ нескінченно мала величина, тому

$$\lim_{x \to x_0}(u + v + \cdots + w) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n =$$

$$= \lim_{x \to x_0} u + \lim_{x \to x_0} v + \cdots + \lim_{x \to x_0} w.$$

Теорема 2. Границя добутку кінцевого числа функцій дорівнює добутку границь функцій:

$$\lim_{x \to x_0}(u \cdot v \cdot \ldots \cdot w) = \lim_{x \to x_0} u \cdot \lim_{x \to x_0} v \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to x_0} w.$$

Доведення аналогічно теоремі 1.

Наслідок 1. Сталий множник можна винести за знак границі:

$$\lim_{x \to x_0} C \cdot u = C \cdot \lim_{x \to x_0} u.$$

Наслідок 2. Добуток кінцевого числа нескінченно малих величин є нескінченно мала величина.

Наслідок 3. Добуток обмеженої функції і нескінченно малої є нескінченно мала величина.

Теорема 3. Границя частки функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границя знаменника відрізняється від нуля:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u}{v} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} u}{\lim\limits_{x \to x_0} v}\text{ ,якщо } \lim_{x \to x_0} v \neq 0.$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} u = a_1,\ \lim\limits_{x \to x_0} v = a_2 \neq 0.$

Тоді $u = a_1 + \alpha_1, v = a_2 + \alpha_2,$ де α_1 і $\alpha_2 -$ нескінченно малі величини. Запишемо і виконаємо перетворення:

$$\frac{u}{v} = \frac{a_1 + \alpha_1}{a_2 + \alpha_2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 + \alpha_1}{a_2 + \alpha_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_2} + \left(\frac{a_1 + \alpha_1}{a_2 + \alpha_2} - \frac{a_1}{a_2}\right) =$$

$$= \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 a_2 + a_2 \alpha_1 - a_1 a_2 - a_1 \alpha_2}{a_2(a_2 + \alpha_2)} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2}{a_2(a_2 + \alpha_2)}.$$

Обчислимо границю:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u}{v} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2}{a_2(a_2 + \alpha_2)} \right).$$

Тут перший дріб – стала величина, а другий – нескінченно мала (з наслідку 3 до теореми 2). Тобто

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u}{v} = \lim_{x \to x_0} \frac{a_1}{a_2} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} u}{\lim\limits_{x \to x_0} v}.$$

Приклад. Обчислити границю функції:

$$\lim_{x \to 2} \frac{7x^2 - 3x + 4}{5x - 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(7x^2 - 3x + 4)}{\lim\limits_{x \to 2}(5x - 1)} =$$

$$= \frac{7\left(\lim\limits_{x \to 2} x\right)^2 - 3\lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 4}{5\lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 1} = \frac{7 \times 2^2 - 3 \times 2 + 4}{5 \times 2 - 1} = \frac{26}{9}.$$

6.2.5 Невизначеності та основні прийоми їхнього розкриття

Дріб, у якому і чисельник, і знаменник є нескінченно малими величинами, називається ***невизначеністю*** типу $\left|\frac{0}{0}\right|$. Знаходження границі такого дробу називається ***розкриттям невизначеності***.

Крім невизначеності $\left|\frac{0}{0}\right|$, існують такі невизначеності: $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, $|\infty - \infty|$, $|0 \cdot \infty|$, $|1^{\infty}|$, $|\infty^{\infty}|$, $|\infty^{0}|$, $|0^{0}|$.

Під час роботи з нескінченно малими та нескінченно великими величинами будемо використовувати такі властивості:

Таблиця 6.2

$$a \cdot 0 = 0; \qquad a \cdot \infty = \infty;$$

$$\frac{0}{a} = 0; \qquad \frac{\infty}{a} = \infty;$$

$$\frac{a}{0} = \infty; \qquad \frac{a}{\infty} = 0.$$

1. ***Невизначеність типу*** $\left|\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right|$***, що задана відношенням двох многочленів***

Правило. Щоб розкрити невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$, що задана у вигляді

$$\lim_{x \to x_0} \frac{Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + K}{Lx^m + Mx^{m-1} + \cdots + P},$$

необхідно і чисельник, і знаменник розкласти на множники або розділити на критичний множник $(x - x_0)$ і скоротити дріб на нього.

Приклад. Обчислити границю

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

Розкладемо чисельник та знаменник на множники, використовуючи формули $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ та $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$.

$$8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1);$$

$$6x^2-5x+1=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=(2x-1)(3x-1).$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}=\frac{3}{{}^1/_2}=6.$$

2. *Невизначеність типу* $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ ***, що задана відношенням двох многочленів***

Правило. Нехай за $x\to\infty$ і чисельник, і знаменник дробу нескінченно великі. Отже, отримаємо відношення двох нескінченно великих функцій. У такому разі необхідно чисельник і знаменник дробу розділити на найвищий степінь x, що зустрічається у цій функції.

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+6x}{7x^3-4x+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

(зрозуміло, що найвищим степенем незалежної змінної є x^3, тому розділимо кожен елемент дробу на x^3)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{5x^2}{x^3} + \frac{6x}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3} - \frac{4x}{x^3} + \frac{3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{7 - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = \frac{2}{7}$$

$$\textit{бо} \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x} = 0, \lim_{x\to\infty} \frac{6}{x^2} = 0, \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0, \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^3} = 0.$$

(за властивостями нескінченно великих величин).

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^5 + 3x^2 - 2x + 1}{6x^3 - 9x^2 - 7x + 2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^5}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{\frac{6x^3}{x^5} - \frac{9x^2}{x^5} - \frac{7x}{x^5} + \frac{2}{x^5}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5 + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}}{\frac{6}{x^2} - \frac{9}{x^3} - \frac{7}{x^4} + \frac{2}{x^5}} = \frac{5}{0} = \infty.$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3 + 3x^2 - 9}{4x^6 - 7x^5 + 2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{8x^3}{x^6} + \frac{3x^2}{x^6} - \frac{9}{x^6}}{\frac{4x^6}{x^6} - \frac{7x^5}{x^6} + \frac{2x}{x^6}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{8}{x^3} + \frac{3}{x^4} - \frac{9}{x^6}}{4 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^5}} = \frac{0}{4} = 0.$$

На основі розглянутих прикладів можемо зробити висновок, що результат визначається співвідношенням максимальних степенів многочленів чисельника і знаменника:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\dots+K}{Lx^m+Mx^{m-1}+\dots+P}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ 0, & n<m,\\ \dfrac{A}{L}, & n=m.\end{cases}$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^4+3x^2+5}+\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[4]{x^3+7x}+\sqrt[9]{x^6+5x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim\frac{\sqrt[5]{x^4\left(1+\dfrac{3x^2}{x^4}+\dfrac{5}{x^4}\right)}+\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[4]{x^3\left(1+\dfrac{7x}{x^3}\right)}+\sqrt[9]{x^6\left(1+\dfrac{5x}{x^6}\right)}}=$$

$$=\left|n=\frac{4}{3};\ m=\frac{3}{4};\ n>m\right|=\infty.$$

3. Невизначеності типу $\left|\frac{0}{0}\right|$ ***або*** $|\infty-\infty|$***, задані ірраціональними виразами***

Правило. Щоб знайти границю функції, яка містить ірраціональний вираз і невизначеності типу $\left|\frac{0}{0}\right|$, необхідно помножити чисельник і знаменник на спряжене до ірраціонального виразу.

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9}=\frac{\sqrt{3+6}-3}{9-9}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

(спряженим до виразу $\sqrt{x+6}-3$ є $\sqrt{x+6}+3$, тому помножимо чисельник і знаменник на цей вираз)

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-9}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\frac{1}{12}.$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

(ірраціональний вираз і в чисельнику, і в знаменнику, тому необхідно помножити чисельник і знаменник на спряжене обох виразів)

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\left(\left(\sqrt{x^2+7}\right)^2-\left(\sqrt{7-3x}\right)^2\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to-3} \frac{(x^2+7-7+3x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{(x+3-x^2+9)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-3} \frac{(x^2+3x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{-(x^2-x-12)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-3} \frac{x(x+3)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{-(x-4)(x+3)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} = \frac{-3(0+0)}{7(4+4)} = 0.$$

6.2.6 Перша важлива границя

Теорема. Функція $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ за $\alpha \to 0$ має границю, що дорівнює 1:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Доведення. Використаємо геометричне визначення синуса (рис. 6.2). Беремо коло одиничного радіуса і кут α в радіанах $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. З рисунка 5.4 зрозуміло, що

$$S_{OAC} < S_{\text{сектора } AOC} < S_{OBC}.$$

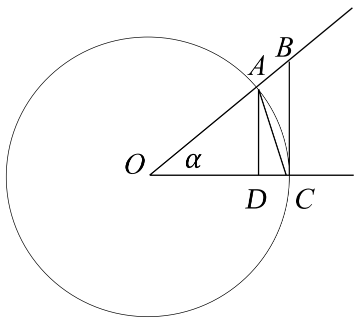

Рисунок 6.2

Площі фігур такі:

$$S_{OAC} = \frac{1}{2} OC \cdot AD = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot sin\alpha = \frac{1}{2} R^2\, sin\alpha;$$

$$S_{\text{сектора } AOC} = \frac{OC^2 \cdot \alpha}{2} = \frac{1}{2} R^2\, \alpha;$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} OC \cdot BC = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot tg\alpha = \frac{1}{2} R^2\, tg\alpha.$$

Тоді маємо:

$$\frac{1}{2} R^2\, sin\alpha < \frac{1}{2} R^2\, \alpha < \frac{1}{2} R^2\, tg\alpha;$$

$$sin\,\alpha < \alpha < tg\alpha.$$

Поділимо нерівність на $sin\,\alpha > 0$ і отримаємо

$$1 < \frac{\alpha}{sin\,\alpha} < \frac{1}{cos\,\alpha};$$

$$1 > \frac{sin\,\alpha}{\alpha} > cos\alpha.$$

$$\lim_{\alpha \to 0} cos\,\alpha = 1 \;\Rightarrow\; 1 < \lim_{\alpha \to 0} \frac{sin\,\alpha}{\alpha} < 1.$$

За теоремою про стиснуту змінну маємо:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{sin\,\alpha}{\alpha} = 1.$$

Наслідки першої важливої границі:

1) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{tg\,\alpha}{\alpha} = 1;$

2) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{arcsin\,\alpha}{\alpha} = 1;$

3) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{arctg\,\alpha}{\alpha} = 1.$

Зауваження. Для розкриття невизначеності вигляду $\left|\frac{0}{0}\right|$ з тригонометричними виразами необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити дріб або застосувати першу важливу границю чи її наслідки.

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-sinx}{x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sinx}{cosx}-sinx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx-sinx\cdot cosx}{x^3cosx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sinx(1-cosx)}{x\cdot x^2cosx}=\begin{bmatrix}1-cos2\alpha=2sin^2\alpha\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2cosx}=2\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{x\cdot x\cdot cosx}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\cdot cosx}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\right]=\frac{1}{2}.$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin5x}{sin3x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{arcsin5x\cdot 15x}{sin3x\cdot 15x}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin5x}{5x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{sin3x}=1\end{bmatrix}=\frac{5}{3}.$$

Приклад. Обчислити границю функції.

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos^2x-cos^23x}{4x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(cosx-cos3x)(cosx+cos3x)}{4x^2}=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2 sin2x \ sin(-x) \cdot 2 \ cos2x \ \ cos(-x)}{4x^2} = \begin{bmatrix} sin(-\alpha) = -sin\alpha \\ cos(-\alpha) = cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot sin2x \ \ sinx \ \ cos2x \ cosx}{2 \cdot x \cdot x} = \lim_{x \to 0} 2cos2x \ cosx = 2.$$

Приклад. Обчислити границю функції.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \ tg2x = |0 \cdot \infty| =$$

Застосовувати першу важливу границю можна лише за умови, що аргумент функції прямує до нуля. Оберемо нову змінну, яка буде прямувати до нуля, зробимо відповідні перетворення

$$= \begin{vmatrix} t = \frac{\pi}{4} - x; \\ t \to 0; \\ x = \frac{\pi}{4} - t \end{vmatrix} = \lim_{t \to 0} t \cdot \ tg2 \left(\frac{\pi}{4} - t \right) = \lim_{t \to 0} t \cdot \ tg \left(\frac{\pi}{2} - 2t \right) =$$

$$= \lim_{t \to 0} t \cdot \ ctg2t = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot cos2t}{sin2t} = \lim_{t \to 0} \frac{2t \cdot cos2t}{2 \cdot sin2t} = \frac{1}{2}.$$

6.2.7 Друга важлива границя

Теорема. Функція $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ має границю за $n \to \infty$.

Доведення. За формулою бінома Ньютона маємо:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1) \dots (n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Виконаємо перетворення:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Зрозуміло, що функція $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ зростаюча. Доведемо, що вона обмежена. Для цього замінимо в усіх членах праворуч вирази у дужках одиницями, отримаємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}.$$

Ще більше збільшимо праву частину, якщо

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{2\times 3} \text{ на } \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{4!}=\frac{1}{2\times 3\times 4} \text{ на } \frac{1}{2^3};\dots;\ \frac{1}{n!}=\frac{1}{2\times 3\times \dots\cdot n} \text{ на } \frac{1}{2^{n-1}},$$

звідси маємо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Дописавши в праву частину члени прогресії $\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots$, отримаємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right).$$

У дужках отримали суму нескінченної спадної геометричної прогресії, яка дорівнює 2. Звідси маємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Якщо $n = 1$, ліва частина нашої формули дорівнює 2. Отже, остаточно маємо

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Числом e називається границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Воно приблизно дорівнює $e \approx 2{,}718 \ldots$

Функція має границю не тільки тоді, коли її аргумент набуває цілочислових значень, але й при неперервній його змінній та прямуванні до нескінченності.

Теорема. Функція $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ за $x \to \infty$ має границю, яка дорівнює числу e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Функція $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ за $x \to 0$ має границю, яка дорівнює числу e:

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

(приймемо без доведення).

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3 - 7x}\right)^{2x+1} = |1^{\infty}| =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3-7x}\right)^{\frac{3-7x}{1}}\right)^{\frac{1}{3-7x}\cdot(2x+1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3-7x}} = e^{-\frac{2}{7}} = \frac{1}{e^{\frac{2}{7}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{e^2}}.$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{4+3x}\right)^{5x-2} = \begin{bmatrix}\frac{3x-1}{4+3x} \to 1, \text{за } \ x \to \infty \\ 5x-2 \to \infty, \text{за } x \to \infty\end{bmatrix} = |1^{\infty}| =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1}{4+3x}-1\right)^{5x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1-4-3x}{4+3x}\right)^{5x-2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{5x-2} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{\frac{4+3x}{-5}}\right)^{\frac{(-5)}{4+3x}\cdot(5x-2)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5(5x-2)}{4+3x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10-25x}{4+3x}} = e^{-\frac{25}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^{25}}}.$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-cosx} = |1^{\infty}| = \lim_{x\to 0}(1+1-cosx)^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left((1+1-cosx)^{\frac{1}{1-cosx}}\right)^{(1-cosx)\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

Розглянемо випадок, коли коефіцієнти, які містяться в основі функції біля більшого ступеня змінної, різні:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{kx} = \left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}.$$

У такій ситуації є два рішення: 1) якщо $a > c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty} = \infty$;

2) якщо $a < c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty} = 0$.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x-4}{9x+3}\right)^{x+2} = \left(\frac{7}{9}\right)^{\infty} = 0.$$

Три важливої границі.

Теорема 1. Справедлива формула

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Доведення. З другої важливої границі маємо, що $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ за $x \to 0$ прямує до числа e, отже маємо

$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$ при $x \to 0$ $\ln e = 1$.

Теорема 2. Справедлива формула

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Доведення. Якщо $x \to 0$, то $a^x - 1 \to 0$, тобто в чисельнику маємо нескінченно малу величину. Нехай

$a^x - 1 = t$, з теореми 1 маємо, що $t \sim ln\,(1+t)$ тому маємо

$a^x - 1 \sim ln\big(1 + (a^x - 1)\big) = ln a^x = x\, ln a$, з цього випливає

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x\, ln a}{x} = ln a.$$

Теорема 3. Справедлива формула

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Доведення. Величина $(1+x)^\alpha - 1$ за $x \to 0$ прямує до нуля, тобто є нескінченно малою величиною. Як і при доведенні теореми 2 нехай $(1+x)^\alpha - 1 = t$, з цього випливає, що $t \sim ln(1+t)$, тобто

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim ln(1 + (1+x)^\alpha - 1) = ln(1+x)^\alpha = \alpha\, ln(1+x).$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha\, ln(1+x)}{x} = \alpha \lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

6.2.8 Порівняння нескінченно малих величин

Розглянемо нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ за $x \to x_0$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$. Визначимо, як нескінченно малі величини можна порівнювати.

1. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, де $A \neq 0$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі величини ***одного порядку***.

Зокрема, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають ***еквівалентними***, і позначають $\alpha\sim\beta$.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то величина $\alpha(x)$ є нескінченно малою ***вищого порядку***, ніж $\beta(x)$. Позначають це $\alpha = o(\beta)$.

3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то величина $\alpha(x)$ є нескінченно малою ***нижчого порядку***, ніж $\beta(x)$. Оскільки в цьому випадку $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\left|\frac{1}{\infty}\right|=0,$ то $\beta = o(\alpha)$.

4. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ ***не можна порівняти***.

Величина $\alpha(x)$ є нескінченно малою порядку p відносно нескінченно малої $\beta(x)$, за $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^p}=C, C\neq 0$.

Еквівалентність нескінченно малих величин

Серед нескінченно малих ***одного порядку*** особливу роль відіграють ***еквівалентні нескінченно малі величини*** $\alpha\sim\beta$, для яких

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Зокрема, з першої важливої границі випливає, що функції $\alpha(x)=sinx$ і $\beta(x)=x$ – еквівалентні за $x\to 0$, тобто $sinx\sim x$.

Теорема. Границя відношення двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо кожну (або одну) з них замінити еквівалентною їй нескінченно малою.

Для розкриття невизначеності вигляду $\left|\frac{0}{0}\right|$ застосовують відомі еквівалентні нескінченно малі величини, які є наслідками першої і другої важливих границь. Запишемо основні з них, які найчастіше використовуються для обчислення границь у випадку $x \to 0$, а саме:

$$sinx \sim x, \quad tgx \sim x, \quad arcsinx \sim x, \quad arctgx \sim x, \quad 1 - cosx \sim \frac{x^2}{2},$$

$$ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim xlna, \quad log_a(1+x) \sim \frac{x}{lna},$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x, \quad \alpha > 0, \quad \text{зокрема } \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^x}{ln(1+4x)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{e^x(e^{2x} - 1)}{ln(1+4x)} = \left|\begin{matrix} e^{2x} - 1 \sim 2x; \\ ln(1+4x) \sim 4x \end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \cdot 2x}{4x} = \frac{1}{2}.$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+sinx)}{tg5x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\begin{matrix} ln(1+sinx) \sim sinx; \\ tg5x^2 \sim 5x^2 \end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} \cdot \frac{1}{5x} = \left|\frac{1}{0}\right| = \infty.$$

Приклад. Порівняти порядок функцій $\alpha(x) = sinx$ і $\beta(x) = x^2$ за $x \to 0$.

Розв'язання. Обидві функції є нескінченно малими за $x \to 0$. Скориставшись першою важливою границею, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\frac{1}{x} = 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty,$$

тобто $\alpha(x) = sinx$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\beta(x) = x^2$.

Приклад. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = 1 - cosx$ відносно $\beta(x) = e^{2x} - e^x$ за $x \to 0$.

Розв'язання. Розглянемо границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^p\,\beta(x)}$ і визначимо порядок малості p з умови $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^p\,\beta(x)} = C,\ C \neq 0.$ Враховуючи еквівалентність нескінченно малих величин, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^p\,\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - cosx}{x^p\,(e^{2x} - e^x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^p\cdot e^x\cdot\,(e^x - 1)} =$$

$$= \left|\begin{matrix} sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}; \\ e^x - 1\sim x \end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x^2}{4}}{x^p\cdot e^x\cdot\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x^p} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^{p-1}} = \frac{1}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p - 1 = 0;\ \ p = 1.$$

Отже, нескінченно мала $\alpha(x) = 1 - cosx$ – має порядок малості $p = 1$ відносно нескінченно малої $\beta(x) = e^{2x} - e^x$ – при $x \to 0$.

6.2.9 Неперервність функції. Властивості неперервних функції

Приростом функції $y = f(x)$ у цій точці x_0 називається різниця $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, де Δx − ***приріст аргументу.***

Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною у точці*** x_0, якщо ця функція визначена у деякому околі точки x_0, і якщо виконується умова:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Приклад. Перевірити, чи є функція $y = 3^x$ неперервною у будь-якій точці x_0.

Розв'язання. Знайдемо приріст функції Δy:

$$\Delta y = 3^{x_0 + \Delta x} - 3^{x_0} = 3^{x_0} \times 3^{\Delta x} - 3^{x_0} = 3^{x_0}\left(3^{\Delta x} - 1\right)$$

Отже, за $\Delta x \to 0$, $3^{\Delta x} \to 1$, $\Delta y \to 0$, тобто функція неперервна.

За означенням неперервності функції в точці маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, за умови, що $\Delta x \to 0$, маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right) = 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0).$$

Якщо ввести позначення $x_0 + \Delta x = x$, то $x \to x_0$ (за $\Delta x \to 0$) і остаточно маємо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $\boldsymbol{x_0}$**,** якщо вона визначена в будь-якому околі цієї точки, і якщо границя функції існує і дорівнює значенню функції за $x = x_0$.

Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в інтервалі***, якщо вона неперервна у будь-якій точці інтервалу.

Однобічна неперервність

Для неперервності функції в точці x_0 необхідно й достатньо, щоб $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$, де $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ $-$ ліва границя функції, $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) -$ права границя функції, $f(x_0) -$ значення функції $f(x)$ в точці x_0.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна у кожній точці інтервалу(a, b), то її називають неперервною в інтервалі (a, b).

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна у кожній точці інтервалу (a, b) і в точці $x = a$, вона неперервна праворуч $\left(\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)\right)$, а якщо в точці $x = b$, вона неперервна ліворуч $\left(\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)\right)$, отже її називають неперервною на відрізку $[a, b]$.

Варто пам'ятати, що всі елементарні функції неперервні в області їхнього визначення.

Точки, у яких порушується умова неперервності, називають ***точками розриву функції.*** Точки розриву можуть належати області визначення або розміщуватися на границі цієї області.

Усі точки розриву функції діляться на точки розриву першого та другого роду.

Якщо функція $y = f(x)$ не визначена в точці x_0 або має стрибок кінцевої величини, то кажуть, що в точці x_0 функція $y = f(x)$ має ***розрив першого роду***. Отже, точкою розриву функції $y = f(x)$ першого роду називається така точка x_0, у якій функція має ліву та праву границю, не рівні між собою.

Точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду,*** якщо в цій точці існують кінцеві границі функції справа та зліва, тобто $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A_1$ і $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A_2$. До того ж якщо $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 називається точкою кінцевого розриву. Величину $|A_1 - A_2|$ називають стрибком функції в точці розриву (рис. 6.3).

Точка x_0 називається ***точкою розриву другого роду***, якщо в цій точці хоча б одна з границь $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ не існує чи дорівнює нескінченності (рис. 6.4).

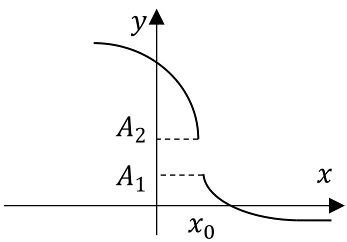

Рисунок 6.3

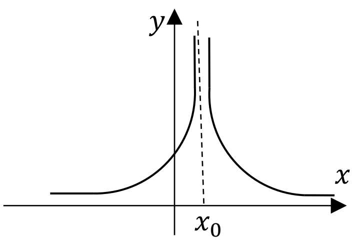

Рисунок 6.4

Під час визначення знаходженні точок розриву функції необхідно керуватися такими твердженнями:

1) елементарна функція може мати розрив тільки в тій точці, де вона не визначена;

2) якщо функція задана кількома різними аналітичними виразами (формулами) для різних інтервалів зміни аргументу, вона може мати розриви лише в тих точках, де міняється її аналітичний вираз.

Приклад. З'ясувати, чи функція $y = 2^{\frac{1}{x}}$ неперервна або розривна для $x = 3$ та $x = 0$.

Розв'язання. За означенням функція неперервна в точці x_0, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Перевіримо виконання цієї умови в цих точках.

За $x = 3$ маємо: $y(3) = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$;

$$\lim_{x \to 3+0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{3+0}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2};$$

$$\lim_{x \to 3-0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{3-0}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

Умова неперервності за $x = 3$ виконується, отже, у цій точці функція неперервна.

Аналогічно будемо міркувати, якщо $x \to 0$.

$y(0) = 2^{\frac{1}{0}}$ не існує, бо ділення на нуль не має значення.

$$\lim_{x \to +0} y = \lim_{x \to +0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to -0} y = \lim_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Умова неперервності за $x = 0$ не виконується, отже, у цій точці $x = 0,$ функція розривна (має нескінченний розрив).

Приклад. Дослідити на неперервність і побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < -1 \\ x^2 - 2, & \text{якщо } -1 \le x \le 1 \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Задана функція не є елементарною, тому що задана кількома формулами. Кожна з функцій $y = -1,$ $y = x^2 - 2,$ $y = 1$ є елементарною і визначеною, а отже, і неперервна на всій числовій осі. Тому задана функція може бути розривною лише в тих точках, де міняється її аналітичний вираз, тобто в точках $x = -1,$ $x = 1.$ Дослідимо функцію на неперервність у цих точках. Використовуючи означення, одержимо:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to -1-0} y = \lim\limits_{x \to -1-0} -1 = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1+0} y = \lim\limits_{x \to -1+0} (x^2 - 2) = -1 \end{array}\right\}$$ задана функція неперервна в точці $x = -1.$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 1-0} y = \lim\limits_{x \to 1-0} (x^2 - 2) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 1+0} y = \lim\limits_{x \to 1+0} 1 = 1 \end{array}\right\}$$ задана функція розривна в точці $x = 1.$

Таким чином, у точці $x = 1$ функція має розрив першого роду: $A_1 = -1,$ $A_2 = 1$ $(A_1 \neq A_2).$ Побудуємо графік функції (рис. 6.5).

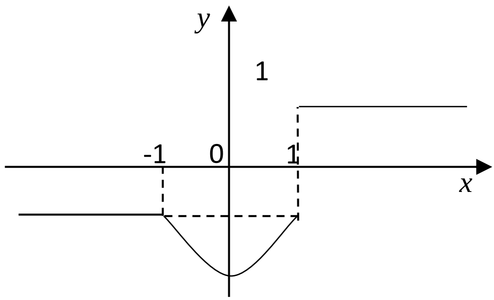

Рисунок 6.5

Деякі властивості неперервних функцій

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $x \epsilon [a; b]$, то на цьому відрізку знайдеться хоча б одна точка $x = x_1$ така, що значення функції у цій точці буде задовольняти нерівності $f(x_1) \geq f(x)$, і знайдеться хоча б одна точка $x = x_2$ така, що значення функції у цій точці буде задовольняти нерівності $f(x_2) \leq f(x)$.

Тут $f(x_1) = M -$ найбільше, а $f(x_2) = m -$ найменше значення функції $y = f(x)$ на інтервалі $[a; b]$ (рис. 6.6).

Зауваження. Твердження теореми може бути неправильним, якщо розглядати функцію $y = f(x)$ на незамкненому інтервалі $(a; b)$.

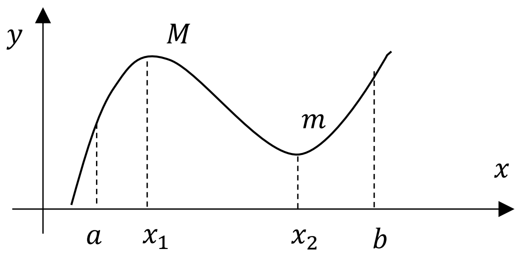

Рисунок 6.6

Теорема 2. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на інтервалі $x \in [a;b]$ і на кінцях інтервалу має значення різних знаків, тоді між точками a і b знайдеться хоча б одна точка $x = c$, у якій функція дорівнює нулю: $f(c) = 0,\ a < c < b$ (рис. 6.7).

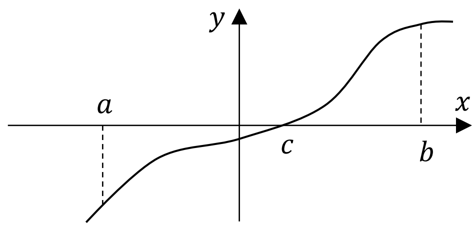

Рисунок 6.7

Теорема 3. Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $x \in [a;b]$. Якщо на кінцях цього відрізку значення функції відрізняються $f(a) = A$ і $f(b) = B$, то яке б не було число γ, яке розташоване між числами A і B, знайдеться така точка $x = d$, яка розташована між a і b, що $f(d) = \gamma$.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення сталих та змінних величин.

2. Область зміни змінної величини. Які типи області зміни змінної величини ви знаєте?

3. Визначення функції. Що таке область визначення та область значень функції?

4. Дайте визначення складної функції. Наведіть приклади.

5. Визначення оберненої функції та приклади.

6. Дайте визначення границі змінної величини. Назвіть та доведіть основні властивості змінної величини.

7. Визначення границі функції. Назвіть та доведіть основні властивості функції.

8. Що таке односторонні границі?

9. Поняття нескінченно малих та нескінченно великих величин. Які властивості нескінченно малих та нескінченно великих величин ви знаєте.

10. Доведіть основні теореми про границю функції.

11. Що таке невизначеність? Які типи невизначеностей ви знаєте?

12. Опишіть простіші прийоми розкриття невизначеностей.

13. Назвіть «важливі» границі. Проілюструйте прикладами застосування важливих границь.

14. Як порівнювати нескінченно малі та нескінченно великі величини?

15. Сформулюйте принцип заміни нескінченно малих.

16. Як застосовують еквівалентність нескінченно малих для обчислення границь?

17. Дайте означення неперервності функції. Як визначаються точки розриву?

18. Сформулюйте властивості неперервних функцій.

РОЗДІЛ 7 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

7.1 Похідна та диференціал

7.1.1 Поняття похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$ і $x \epsilon (a; b)$. Надамо аргументу приріст Δx так, щоб нова точка $x + \Delta x \epsilon (a; b)$. Оскільки точка x фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x\ ) - f(x)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, яке також буде функцією від Δx.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називається швидкість змінювання функції y в цій точці відносно змінювання аргументу x. ***Похідна функції дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля***

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x\ ) - f(x)}{\Delta x}.$$

Еквівалентні позначення похідної $y',\ y'_x,\ \frac{dy}{dx},\ f'(x)$.

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням функції.*** Функція, що має похідну в точці x, називається *диференційованою* у цій точці.

Теорема. *Якщо функція* $y = f(x)$ *диференційована в деякій точці* x*, то вона неперервна в цій точці.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0.$$

Зауваження. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в деякій точці x, то вона може бути як диференційованою, так і недиференційованою в цій точці.

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^2$.

Розв'язання. Для будь-якого x маємо $y = x^2$. Якщо аргумент дорівнює $x + \Delta x$, то $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. Звідси

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

7.1.2 Фізичний та геометричний зміст похідної

Фізичний зміст похідної. Нехай матеріальна точка рухається під дією деяких сил. Оберемо який-небудь момент часу t_0 і розглянемо проміжок часу Δt від моменту t_0 до моменту $t = t_0 + \Delta t$. За цей проміжок часу точка пройде певний шлях, який позначимо $\Delta S(t_0)$. Цей шлях є функцією від Δt. За відомим із фізики означенням, відношення $\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$ є середньою швидкістю руху точки за час Δt. Розглядатимемо дедалі коротші проміжки Δt, що прямують до нуля. Границя

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0) = V(t_0)$$

є миттєвою швидкістю точки у момент часу t_0.

Геометричний зміст похідної. Нехай дано деяку лінію *L* і на ній точку *M* (рис. 7.1). Оберемо на лінії *L* деяку точку *N*, яка не збігається з точкою *M*. Пряма *MN* є січною для лінії *L*. Нехай тепер точка *N* наближається до точки *M,* залишаючись на лінії *L*. Тоді кожному положенню точки *N* відповідатиме своя січна й усі ці січні проходитимуть через точку *M*.

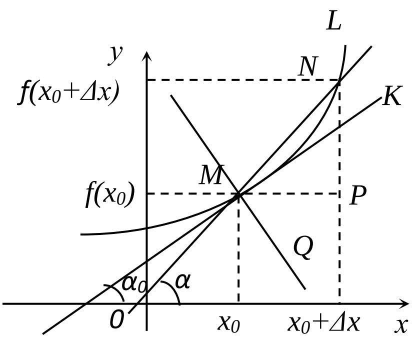

Рисунок 7.1

Дотичною до лінії *L* у точці *M* називається граничне положення *MK* січної *MN*, якщо точка *N* прямує до точки *M*. Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, графіком якої є лінія *L*, диференційована у точці x_0. У декартовій прямокутній системі координат точка *M,* яка лежить на графіка функції $y = f(x)$ має координати $(x_0; f(x_0))$. Нехай точка *N* належить графіку функції (рис. 7.1) і має координати $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Проведемо через точку *M* пряму, паралельну до $Ox,$ і позначимо точку її перетину з прямою $x = x_0 + \Delta x$ через *P*. Розглянемо прямокутний трикутник *MNP*.

Відношення

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = tg\alpha$$

дорівнює тангенсу кута нахилу січної *MN* до додатного напрямку осі Ox.

Якщо приріст $\Delta x \to 0$, то геометрично це означає, що точка $N(x_0 + \Delta x; y + \Delta y)$ рухатиметься по лінії *L*, наближаючись до точки *M,* а кут α прямуватиме до кута α_0 – кута нахилу дотичної до додатного напрямку осі Ox. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha.$$

Оскільки границя лівої частини рівності дорівнює $\boldsymbol{f'(x_0)}$, а границя правої частини дорівнює $\boldsymbol{tg\alpha_0}$, тому $\boldsymbol{tg\alpha_0 = f'(x_0)}$. Отже, *значення похідної функції* $\boldsymbol{f'(x)}$ *у точці* $\boldsymbol{x_0}$ *дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної*.

Тоді ***рівняння дотичної*** до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить через точку *M* $(x_0; y_0)$, можна записати у вигляді

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Пряма *MQ*, яка проходить через точку дотику *M*$(x_0; y_0)$ і перпендикулярна до дотичної *MK*, називається ***нормальною прямою*** (***нормаллю***). Її рівняння

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

7.1.3 Основні правила диференціювання

Нехай маємо деякі функції $u = u(x)$, $v = v(x)$, які диференційовані у проміжку $(a; b)$.

Теорема 1. *Похідна алгебраїчної суми (різниці) кінцевого числа функцій дорівнює сумі (різниці) їхніх похідних*:

$$y = u \pm v, \text{ то } y' = (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Доведення. Розглянемо суму двох функцій.

Якщо $y = u + v$, то $y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$; тоді $\Delta y = (y + \Delta y) - y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (u + v)$;

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v.$$

Звідси

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Тому маємо:

$$(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \pm \boldsymbol{v}'.$$

Теорема 2. *Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію:*

$$y = uv, \text{ то } y' = (uv)' = u'v + uv'.$$

Доведення. Розглянемо добуток двох функцій.

Якщо $y = uv$, то $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$;

$\Delta y = (y + \Delta y) - y = uv + \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv;$

$$\Delta y = \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v = u'v + uv' + u' \cdot 0,$$

(при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ і $\Delta v \to 0$). Тому маємо

$$(\boldsymbol{uv})' = \boldsymbol{u'v} + \boldsymbol{uv'}.$$

Теорема 3. *Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, у якому знаменник є квадратом знаменника, а чисельник є різницею між добутками похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник*:

$$y = \frac{u}{v}, \qquad \text{де } v \neq 0, \qquad \text{то} \quad y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доведення. Розглянемо частку двох функцій.

Якщо $y = \frac{u}{v}$, то $y + \Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$; тоді

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + \Delta uv - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{\Delta uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta uv - u\Delta v}{\Delta x\, v(v + \Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta uv}{\Delta x} - \frac{u\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)};$$

(за $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ і $\Delta v \to 0$). Тому маємо:

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u'v} - \boldsymbol{uv'}}{\boldsymbol{v^2}}.$$

Дії з константами. *Сталий множник можна виносити з-під знаку похідної*:

$$y = cu, \qquad \text{то} \quad y' = (cu)' = cu';$$
$$y = \frac{u}{c}, \qquad \text{то} \quad y' = \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c};$$
$$y = \frac{c}{u}, \qquad \text{то} \quad y' = \left(\frac{c}{u}\right)' = \frac{-c}{u^2}u'.$$

7.1.4 Похідна складної функції

Теорема. *Похідна складної функції дорівнює похідній цієї функції за проміжним аргументом, помноженої на похідну цього аргументу за незалежною змінною.*

Доведення. Нехай $y = f(u),\ u = \varphi(x)$. Доведемо, що

$$y' = f'(u) \cdot u' = f'(u) \cdot \varphi'(x) = f'_u \cdot \varphi'_x.$$

Надамо аргументу x приріст Δx; унаслідок цього маємо приріст проміжного аргументу Δu, яке зумовить зміну функції y на Δy. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Обчислимо границю

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'_u$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'_x$, то

$$y' = f'_u \cdot \varphi'_x .$$

7.1.5 Похідна оберненої функції

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій. Відомо, що похідна $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ і не дорівнює нулю. Оскільки $\Delta x \to 0$ за $\Delta y \to 0$, то з тотожності $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ отримаємо:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)},$$

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

Похідні від взаємно обернених функцій обернені за величиною:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}\,,\quad x'_y=\frac{1}{y'_x}\,.$$

7.1.6 Основні формули диференціювання

Знайдемо похідні для деяких функцій.

1. *Похідна косинуса:* $y=\cos x,\ \ y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$. Знайдемо приріст функції

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}\,.$$

Складемо відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Використаємо першу важливу границю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1.$$

Остаточно маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right) = -\sin x\,;$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

2. *Похідна синуса:* $y = \sin x$, $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$. Знайдемо приріст функції

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\,.$$

Складемо відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Використаємо першу важливу границю:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

Остаточно маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right) = \cos x\,;$$

$$(\sin x\,)' = \cos x.$$

3. Похідна тангенса: $y = tg\,x$. Для знаходження похідної представимо функцію тангенс: $y = tg\,x = \frac{sinx}{cosx}$, та скористаємось похідною від частки

$$y' = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{(sinx)'cosx - sinx\,(cosx)'}{cos^2x} =$$
$$= \frac{cosx\,\cdot\,cosx - sinx\,\cdot\,(-sinx)}{cos^2x} =$$
$$= \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}.$$

Отже, маємо

$$(tg\,x\,)' = \frac{1}{cos^2x}.$$

4. *Похідна показникової функції:* $y = a^x$, $y + \Delta y = a^{x+\Delta x}$.

Приріст функції:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right).$$

Знайдемо границю за $\Delta x \to 0$. Беручи до уваги «важливу границю» $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^u-1}{u} = \ln u$, отримаємо:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Якщо $a = e,\ lne = 1$, то

$$(e^x)' = e^x.$$

5. *Похідна арксинуса:* $y = arcsin\,x$.

Функція обернена до арксинуса $x = siny$, її похідна $x'_y = cosy$. За формулою, $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{cosy}$. Відомо, що

$$cosy = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Запишемо таблицю похідних для складних функцій:

1. $x' = 1$;
2. $c' = 0$;
3. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$;
4. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
5. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u'$;
6. $(ln\, u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
7. $(log_a u)' = \frac{1}{u \cdot ln\, a} \cdot u'$;
8. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
9. $(a^u)' = a^u \cdot ln\, a \cdot u'$;
10. $(sin\, u)' = cos\, u \cdot u'$;
11. $(cos\, u)' = -sin\, u \cdot u'$;
12. $(tg\, u)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$;
13. $(ctg\, u)' = \frac{-1}{sin^2 u} \cdot u'$;
14. $(arcsin\, u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
15. $(arccos\, u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
16. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
17. $(arcctg\, u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^5 \cdot cos3x$.

Розв'язання. Функція подана у вигляді добутку. Скористаємося формулою похідної від добутку двох функцій

$$y' = (x^5)' \cdot cos3x + x^5 \cdot (cos3x)' = 5x^4 cos3x + x^5(-sin3x)3 =$$

$$= 5x^4 cos3x - 3x^5 sin3x.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = \frac{arctg^4(2x+5)}{3^{sinx}}$.

Розв'язання. Функція подана у вигляді частки. Скористаємося формулою похідної від частки двох функцій

$$y' = \frac{\left(arctg^4(2x+5)\right)' \cdot 3^{sinx} - arctg^4(2x+5) \cdot (3^{sinx})'}{(3^{sinx})^2} =$$

$$= \frac{4arctg^3(2x+5)\left(arctg(2x+5)\right)' 3^{sinx} - arctg^4(2x+5)3^{sinx} ln3(sinx)'}{3^{2sinx}}$$

$$= \frac{3^{sinx}(4arctg^3(2x+5)\frac{1}{1+(2x+5)^2}(2x+5)' - arctg^4(2x+5) ln3\, cosx)}{3^{2sinx}}$$

$$= \frac{3^{sinx}\left(\frac{8arctg^3(2x+5)}{1+(2x+5)^2} - arctg^4(2x+5)\, ln3\, cosx\right)}{3^{2sinx}} =$$

$$= \frac{arctg^3(2x+5)\left(8 - arctg(2x+5)\, ln3\, cosx(1+(2x+5)^2)\right)}{3^{sinx}(1+(2x+5)^2)}$$

$$= \frac{arctg^3(2x+5)\left(8 - arctg(2x+5)\, ln3\, cosx(1+(2x+5)^2)\right)}{3^{sinx}(1+(2x+5)^2)}.$$

Приклад. Знайти похідну функції

$$y = ln\, ctg\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right).$$

Розв'язання. Функція, похідну якої нам запропонували знайти, складна. Тут є і степенева, і показникова, і логарифмічна, і тригонометрична функції. З якої функції почати диференціювання? Ланцюжок складної функції, який ми можемо скласти, дуже великий. Тому радимо розпочати з зовнішньої функції. Скористаємося формулою $(ln\, u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$. Де за u приймемо: $u = ctg\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)$

$$y' = \left(ln\left(ctg\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{ctg\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)}\left(ctg\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)\right)'.$$

Тепер будемо диференціювати котангенс, а за u приймемо $u = 1 - \sqrt{2 + e^x}$

$$y' = \frac{1}{ctg\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)} \cdot \frac{(-1)}{sin^2\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)} \cdot \left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)'.$$

Продовжуємо диференціювання. Похідна від сталої дорівнює нулю, а корінь квадратний продиференціюємо за формулою $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, де $u = 2 + e^x$

$$y' = \frac{1}{ctg\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)} \cdot \frac{(-1)}{sin^2\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)} \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{2 + e^x}}(2 + e^x)'.$$

Остаточно маємо:

$$y' = \frac{1}{ctg\left(1-\sqrt{2+e^x}\right)} \cdot \frac{1}{sin^2\left(1-\sqrt{2+e^x}\right)} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{2+e^x}}.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sqrt[6]{sin^5 3x + 8x^4}$.

Розв'язання. Функція, похідну якої нам запропонували знайти, складна. Спочатку представимо корінь як дробовий степінь

$$y = \sqrt[6]{sin^5 3x + 8x^4} = (sin^5 3x + 8x^4)^{\frac{1}{6}}.$$

Скористаємось формулою $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, де $u = sin^5 3x + 8x^4$

$$y' = \frac{1}{6}(sin^5 3x + 8x^4)^{-\frac{5}{6}} \cdot (sin^5 3x + 8x^4)'.$$

Знову використаємо ту ж формулу двічі

$$y' = \frac{1}{6(sin^5 3x + 8x^4)^{\frac{5}{6}}} \cdot (5sin^4 3x(sin3x)' + 32x^3) =$$

$$\frac{1}{6(sin^5 3x + 8x^4)^{\frac{5}{6}}} \cdot (5sin^4 3x\ \ cos3x \cdot 3 + 32x^3) =$$

$$= \frac{15sin^4 3x\ \ cos3x + 32x^3}{6\sqrt[6]{(sin^5 3x + 8x^4)^5}}$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = 5^{ln^3 ctgx} \cdot cos\sqrt{x}$;

Розв'язання. Функція подана у вигляді добутку. Скористаємося формулою похідної від добутку двох функцій

$$y' = \left(5^{ln^3 ctgx}\right)' cos\sqrt{x} + 5^{ln^3 ctgx}\left(cos\sqrt{x}\right)'.$$

Скористаємось формулою $(a^u)' = a^u \, lna \, u'$, де $a = 5 \; u = ln^3 ctgx$.

$$y' = 5^{ln^3 ctgx} \, ln5 \; (ln^3 ctgx)' cos\sqrt{x} + 5^{ln^3 ctgx}\left(-sin\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}\right)'.$$

Використаємо формулу $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, де $u = ln(ctgx)$ та формулу $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, де $u = x$

$$y' = 5^{ln^3 ctgx} \left(ln5 \; 3ln^2 ctgx \; (ln(ctgx))' cos\sqrt{x} - sin\sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$$

$$= 5^{ln^3 ctgx}\left(ln5 \; 3ln^2 ctgx \; \frac{1}{ctgx} (ctgx)' cos\sqrt{x} - sin\sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$$

$$= 5^{ln^3 ctgx}\left(\frac{3ln^2 ctgx \; ln5}{ctgx} \frac{(-1)}{sin^2 x} cos\sqrt{x} - \frac{sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right).$$

7.1.7 Диференціювання функції, заданої параметрично

Нехай задано функцію

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases};$$

де t – параметр, а $x(t)$ і $y(t)$ – неперервні і диференційовані функції аргументу t у деякому інтервалі $t \epsilon (a, b)$.

Нехай в деякій точці $t_0 \epsilon (a, b)$ існує похідна, яка не дорівнює нулю $x'(t) = x'_t(t_0) \neq 0$. Нехай ця похідна в точці додатна. Тоді вона буде додатна і в деякому околі точки t_0. З цього маємо, що функція $x(t)$ монотонно зростаюча, а тому має обернену $t = t(x)$. Похідна оберненої функції дорівнює

$$x'_t = \frac{1}{t'_x}.$$

Підставимо $t = t(x)$ у вираз для $y(t)$, отримаємо:

$$y = y\big(t(x)\big) = y(x).$$

Знаходимо її похідну, як похідну складної функції:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}.$$

Остаточно маємо:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Знайти похідну функції $\begin{cases} x = ln(1 + t^2) \\ y = t - arctg\ t \end{cases}$.

Розв'язання. Обчислимо похідні x'_t, y'_t:

$$x'_t = \frac{1}{1 + t^2} \cdot 2t; \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{1 + t^2 - 1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Підставимо отримані похідні у формулу і спростимо результат:

$$y'_x = \frac{\frac{t^2}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \frac{t}{2}.$$

Приклад. Знайти похідну функції $\begin{cases} x = arcsin\sqrt{t} \\ y = t\ ln(1 - t) \end{cases}$.

Розв'язання. Обчислимо похідні x'_t, y'_t:

$$x'_t = \left(arcsin\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{t}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{t}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}$$

$$y'_t = \left(t \cdot\ ln(1-t)\right)' = ln(1-t) + t \cdot \frac{1}{1-t}(-1) =$$

$$= ln(1-t) - \frac{t}{1-t}.$$

Підставимо отримані похідні у формулу і спростимо результат:

$$y'_x = \frac{ln(1-t) - \frac{t}{1-t}}{\frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}} = \left(ln(1-t) - \frac{t}{1-t}\right) 2\sqrt{t}\sqrt{1-t}.$$

7.1.8 Логарифмічне диференціювання

Розглянемо функцію $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$. Така функція називається ***степенево-показниковою функцією.*** Диференціювати її за формулами за таблицею похідних не можна, тому застосуємо такий алгоритм:

1. Логарифмуємо цю функцію за основою *e*:

$$ln\, y = ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}.$$

2. Виконаємо перетворення, використовуючи властивості логарифмів:

$$ln\, y = \varphi(x) \cdot ln\left(f(x)\right).$$

3. Диференціюємо обидві частини отриманого рівняння:

$$(ln\, y)' = \left(\varphi(x) \cdot ln\big(f(x)\big)\right)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \big(\varphi(x)\big)' \cdot ln\big(f(x)\big) + \varphi(x) \cdot \left(ln\big(f(x)\big)\right)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \big(\varphi(x)\big)' \cdot ln\big(f(x)\big) + \varphi(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot \big(f(x)\big)'.$$

4. Виразимо шукану похідну:

$$y' = \left(\big(\varphi(x)\big)' \cdot ln\big(f(x)\big) + \varphi(x) \cdot \frac{\big(f(x)\big)'}{f(x)}\right)\big(f(x)\big)^{\varphi(x)}.$$

Подане має назву ***логарифмічного диференціювання***, а отримана похідна називається ***логарифмічною похідною***.

Зауваження 1. Немає необхідності запам'ятовувати цю формулу. Значно простіше під час диференціювання степенево-показникових функцій на кожному прикладі використовувати запропонований алгоритм.

Приклад. Знайти похідну функції

$$y = (arctg6x)^{\log_5 x}.$$

Розв'язання. Скористаємося методом логарифмічного диференціювання:

$lny = ln(arctg6x)^{\log_5 x}$; за формулою $lna^c = c \cdot lna$,

виконаємо перетворення і отримаємо

$$lny = log_5 x \cdot ln(arctg6x).$$

Продиференціюємо обидві частини рівняння, застосовуючи формулу $(uv)' = u'v + uv'$

$$(lny)' = (\log_5 x \cdot ln(arctg6x))';$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (log_5 x)'\cdot ln(arctg6x) + log_5 x\cdot(ln(arctg6x))'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x\, ln5}\cdot ln(arctg6x) + \log_5 x\cdot\frac{1}{arctg6x}(arctg6x)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x\, ln5}\cdot \ln(arctg6x) + \log_5 x\cdot\frac{1}{arctg6x}\cdot\frac{1}{1+36x^2}\cdot 6 \quad |\cdot y$$

$$y' = \left(\frac{\ln(arctg6x)}{x\, ln5} + \frac{6\log_5 x}{(1+36x^2)arctg6x}\right)(arctg6x)^{\log_5 x}.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = (ln\cos x)^{arcsinx^3}$.

Розв'язання: $lny = ln(ln\cos x)^{arcsinx^3}$,

$$lny = arcsinx^3\cdot ln(ln\cos x)\,,$$

$$\frac{y'}{y} = (arcsinx^3)'\cdot ln(ln\cos x) + arcsinx^3\cdot\big(ln(ln\cos x)\big)',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(x^3)'}{\sqrt{1-x^6}}\cdot ln(ln\, cos\, x) + arcsinx^3\cdot\frac{(ln\, cos\, x)'}{ln\, cos\, x},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\cdot ln(ln\, cos\, x) + arcsinx^3\cdot\frac{(cos\, x)'}{cos\, x\cdot ln\, cos\, x},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3x^2\cdot ln(ln\, cos\, x)}{\sqrt{1-x^6}} - arcsinx^3\cdot\frac{sin\, x}{cos\, x\cdot ln\, cos\, x},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3x^2\cdot ln(ln\, cos\, x)}{\sqrt{1-x^6}} - \frac{tgx\cdot arcsinx^3}{ln\, cos\, x},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3x^2\cdot ln(ln\, cos\, x)}{\sqrt{1-x^6}} - \frac{tgx\cdot arcsinx^3}{ln\, cos\, x},$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{3x^2 \cdot ln(ln\, cos\, x)}{\sqrt{1-x^6}} + \frac{tgx \cdot arcsinx^3}{ln\, cos\, x} \right),$$

$$y' = (ln\, cos\, x)^{arcsinx^3} \left(\frac{3x^2 \cdot ln(ln\, cos\, x)}{\sqrt{1-x^6}} + \frac{tgx \cdot arcsinx^3}{ln\, cos\, x} \right).$$

Зауваження 2. Логарифмічне диференціювання використовують не лише для степенево-показникової функції, а й під час знаходження похідної від добутку (частки) більш ніж двох функцій. Послідовність дій не змінюється. Розглянемо на прикладі.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \frac{tg^2x \cdot \sqrt[3]{x^2-7}}{(3x+8)^5}$.

Розв'язання. Скористаємося методом логарифмічного диференціювання:

$$ln\, y = ln \frac{tg^2x \cdot \sqrt[3]{x^2-7}}{(3x+8)^5}.$$

Використаємо такі властивості логарифмів:

$$ln(a \cdot b) = ln\, a + ln\, b;\;\; ln\frac{a}{b} = ln\, a - ln\, b;\;\; ln\, a^c = c \cdot ln\, a.$$

Виконаємо перетворення:

$$ln\, y = ln\, tg^2x + ln\, \sqrt[3]{x^2-7} - ln(3x+8)^5;$$

$$ln\, y = 2\, ln(tgx) + \frac{1}{3} ln(x^2-7) - 5\, ln(3x+8).$$

Продиференціюємо отриманий вираз:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{2}{tgx}\cdot (tgx)' + \frac{1}{3(x^2-7)}\cdot (x^2-7)' - \frac{5}{3x+8}\cdot (3x+8)';$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{2}{tgx}\cdot \frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{3(x^2-7)}\cdot 2x - \frac{5}{3x+8}\cdot 3;$$

$$y' = \left(\frac{2}{sinx\cdot cosx} + \frac{2x}{3(x^2-7)} - \frac{15}{3x+8}\right)\cdot \frac{tg^2x\cdot \sqrt[3]{x^2-7}}{(3x+8)^5}.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y = \frac{(5x-6)^7\cdot cos4x}{(2x-5)^4\cdot \sqrt[6]{(x+7)^5}}$.

Розв'язання. Скористаємося методом логарифмічного диференціювання:

$$lny = ln\frac{(5x-6)^7\cdot cos4x}{(2x-5)^4\cdot \sqrt[6]{(x+7)^5}};$$

$$lny = ln(5x-6)^7 + ln\, cos4x - ln(2x-5)^4 - ln\sqrt[6]{(x+7)^5}$$

$$lny = 7ln(5x-6) + ln\, cos4x - 4ln(2x-5) - \frac{5}{6}ln(x+7).$$

Продиференціюємо отриманий вираз:

$$(lny)' = \left(7ln(5x-6) + ln\, cos4x - 4ln(2x-5) - \frac{5}{6}ln(x+7)\right)'$$

$$\frac{1}{y}y' = 7\frac{1}{5x-6}\cdot 5 - \frac{sin4x}{cos4x}\cdot 4 - 4\frac{1}{2x-5}\cdot 2 - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{x+7}\quad \Big|\cdot y$$

$$y' = \left(\frac{35}{5x-6} - 4tg4x - \frac{8}{2x-5} - \frac{5}{6(x+7)}\right) \cdot$$
$$\cdot \frac{(5x-6)^7 \cdot cos4x}{(2x-5)^4 \cdot \sqrt[6]{(x+7)^5}}$$

7.1.9 Похідні неявних функцій

Диференціювання функції, заданої деяким рівнянням $F(x, y) = 0,$ де незалежна змінна x пов'язана з функцією y, що не розв'язується відносно y, зводиться до такого:

1) диференціюємо ліву і праву частини рівняння, що задає функцію, вважаючи y функцією від x, тобто застосовуючи правило диференціювання складної функції;

2) розв'язуємо отримане рівняння відносно шуканої похідної y'.

Зауваження. Похідна неявної функції $F(x, y) = 0$ у загальному випадку виражається не тільки через значення аргументу x, а й через значення функції y при цьому значенні x.

Приклад. Знайти похідну функції
$$sin(3x - 6y) + 5x^2y = 2y^3.$$

Розв'язання. Диференціюємо за x і пам'ятаємо, що y є функцією x:

$$(sin(3x - 6y) + 5x^2y)' = (2y^3)',$$

$$cos(3x - 6y)(3x - 6y)' + 5((x^2)'y + x^2(y)') = 6y^2y'.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно y'. Для цього згрупуємо доданки з похідною в один бік рівняння, без похідної – в інший і винесемо y' за дужки і знайдемо шукану похідну:

$$cos(3x-6y)(3-6y')+10xy+5x^2y'=6y^2y',$$

$$3cos(3x-6y)-6y'cos(3x-6y)+10xy+5x^2y'=6y^2y',$$

$$y'\cdot(-6cos(3x-6y)+5x^2-6y^2)=-3cos(3x-6y)-10xy,$$

$$y'=\frac{-3cos(3x-6y)-10xy}{-6cos(3x-6y)+5x^2-6y^2},$$

$$y'=\frac{3cos(3x-6y)+10xy}{6cos(3x-6y)-5x^2+6y^2}.$$

Будь-яку неявну функцію можна диференціювати за приведеними правилами. Похідна такої функції виражається через незалежну змінну і саму функцію.

Приклад. Знайти похідну функції $ctg(x^3-3y)=2ye^x$.

Розв'язання:

$$\left(ctg(x^3-3y)\right)'=(2y\cdot e^x)'$$

$$\frac{-1}{sin^2(x^3-3y)}(x^3-3y)'=(2y)'e^x+2y(e^x)'$$

$$\frac{-1}{sin^2(x^3-3y)}(3x^2-3y')=2y'e^x+2ye^x$$

$$\frac{-3x^2}{sin^2(x^3-3y)}+\frac{3y'}{sin^2(x^3-3y)}=2y'e^x+2ye^x$$

$$\frac{3y'}{sin^2(x^3-3y)} - 2y'e^x = 2ye^x + \frac{3x^2}{sin^2(x^3-3y)}$$

$$y' \cdot \frac{3-2e^x sin^2(x^3-3y)}{sin^2(x^3-3y)} = \frac{2ye^x sin^2(x^3-3y)+3x^2}{sin^2(x^3-3y)}$$

$$y' = \frac{2ye^x sin^2(x^3-3y)+3x^2}{3-2e^x sin^2(x^3-3y)}$$

7.1.10 Похідні вищих порядків

Функція задана явно $\boldsymbol{y = f(x)}$

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в деякому інтервалі $(a; b)$. Похідна функції $f'(x)$ є функцією аргументу x. Якщо функція $f'(x)$ диференційована, то її похідна називається ***похідною другого порядку*** і позначається $f''(x)$ або y'', $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Таким чином, $y'' = (y')'$.

Похідна від похідної другого порядку, якщо вона існує, називається ***похідною третього порядку*** і позначається $f'''(x)$ або $y''', \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$. Таким чином, $y''' = (y'')'$.

Похідною n-го порядку (або *n*-ю похідною) називається похідна від похідної (*n* – 1) порядку (якщо вона існує). Таким чином,

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Похідні порядку, вищого за перший, називають ***похідними вищих порядків.***

Приклад. Знайти третю похідну функції $y = 2x \cdot cosx$ і обчислити її значення при $x = 0$.

Розв'язання: $y' = 2cosx + 2x(-sinx)$,

$$y'' = -2sinx - 2sinx - 2xcosx = -4sinx - 2x \cdot cosx,$$

$$y''' = -4cosx - 2cosx + 2x \cdot sinx = 2x \cdot sinx - 6cosx.$$

Знайдемо значення третьої похідної за $x = 0$

$$y'''(0) = -6.$$

Функція задана неявно $F(x, y) = 0$.

Під час знаходження похідних вищих порядків неявно заданої функції використовуємо ті самі правила, що й для знаходження похідної першого порядку неявно заданої функції. Згідно з визначенням похідних вищих порядків для знаходження 4-ї похідної цю процедуру потрібно буде виконати 4 рази. Водночас під час знаходження наступної похідної в отриманий вираз можна підставити знайдене значення попередньої похідної. Проілюструємо цей алгоритм на прикладі.

Приклад. Знайти похідну другого порядку функції

$$4x^2y^3 + x^2 = sin6y.$$

Розв'язання: $8xy^3 + 12x^2y^2 \cdot y' + 2x = 6cos6y \cdot y'$,

$$y' \cdot (6cos6y - 12x^2y^2) = 8xy^3 + 2x,$$

$$y' = \frac{8xy^3 + 2x}{6cos6y - 12x^2y^2},$$

$$y' = \frac{4xy^3 + x}{3cos6y - 6x^2y^2}.$$

$$y'' = \left(\frac{4xy^3 + x}{3cos6y - 6x^2y^2}\right)' =$$

$$= \frac{(4xy^3 + x)'(3cos6y - 6x^2y^2) - (4xy^3 + x)(3cos6y - 6x^2y^2)'}{(3cos6y - 6x^2y^2)^2} =$$

$$= \frac{(4y^3 + 12xy^2y' + 1)(3cos6y - 6x^2y^2) - (4xy^3 + x)(-18sin6yy' - 12(xy^2 + x^2yy'))}{(3cos6y - 6x^2y^2)^2}$$

$$= \frac{(4y^3 + 12xy^2y' + 1)(3cos6y - 6x^2y^2) + (4xy^3 + x)(18sin6yy' + 12(xy^2 + x^2yy'))}{(3cos6y - 6x^2y^2)^2},$$

де

$$y' = \frac{4xy^3 + x}{3cos6y - 6x^2y^2}.$$

Функція задана параметрично $\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t)} \\ \boldsymbol{y = y(t)} \end{cases}$

Для знаходження другої похідної від функції, що задана параметрично, диференціюємо вираз для першої похідної, як складну функцію незалежної змінної.

Знаходимо похідну, як похідну складної функції:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_t \cdot t'_x, \qquad t'_x = \frac{1}{x'_t}.$$

Остаточно маємо:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Похідна *n*-го порядку параметрично заданої функції:

$$y_x^{(n)} = \frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Знайти похідну другого порядку функції

$$\begin{cases} x = arctgt \\ y = ln(1+t^2) \end{cases}.$$

Розв'язання: $x'_t = \frac{1}{1+t^2}$, $y'_t = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t$,

$$y'_x = \frac{\frac{1}{1+t^2} \cdot 2t}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t,$$

$$(y'_x)'_t = (2t)' = 2, \qquad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{2}{\frac{1}{1+t^2}} = 2(1+t^2),$$

$$y''_{xx} = 2(1+t^2).$$

7.1.11 Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і диференційована за певних значень незалежного аргументу:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

З цього випливає, що відношення приросту функції до приросту аргументу можна подати у вигляді

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$, де ε – нескінченно мала за $\Delta x \to 0$.

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x.$$

Нескінченно малий приріст функції Δy дорівнює сумі величини, яка пропорційна нескінченно малому приросту незалежної змінної Δx, та нескінченно малої величини більш високого порядку малості порівняно з Δx.

Головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту незалежної змінної, називається ***диференціалом функції:***

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Приріст Δx незалежної змінної називається її ***диференціалом*** dx*:*

$$\Delta x = dx.$$

Диференціал функції дорівнює добутку похідної функції на диференціал незалежної змінної:

$$dy = f'(x)dx.$$

Властивості диференціала

За визначенням диференціала знайдемо диференціали деяких функцій:

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx; \qquad d(cosx) = -sinx\, dx;$$

$$d(lnx) = \frac{dx}{x}; \qquad d(arctg\, x) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Правила обчислення диференціалів

За відомими правилами обчислення похідних знайдемо правила знаходження диференціалів:

1. Диференціал алгебраїчної суми двох функцій:

$$d(U \pm V) = dU \pm dV.$$

2. Диференціал добутку двох функцій:

$$d(U \cdot V) = V \cdot dU + U \cdot dV.$$

3. Диференціал частки двох функцій:

$$d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \cdot dU - U \cdot dV}{V^2}.$$

Диференціал складної функції. Інваріантність диференціала

Нехай дано $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – неперервні і диференційовані функції своїх аргументів.

Похідну складної функції знаходять за формулою:

$$y' = f'_u \cdot \varphi'_x .$$

Помножимо обидві частини рівності на dx, отримаємо

$$dy = f'_u \cdot u'_x dx.$$

За означенням диференціала $u'_x dx = du,$ тому

$$dy = f'_u \cdot du.$$

Фактично бачимо, що диференціал функції $y = f(u)$ має такий самий вигляд, якщо б u була незалежною змінною функції y.

Ця властивість називається ***інваріантністю форми диференціала від аргументу функції.***

Диференціал функції $y = f(u)$ має незмінний вигляд незалежно від того, чи є її аргумент u незалежною змінною або функцією незалежної змінної.

Приклад. Знайти диференціал функції

$$y = 2^{tgx} + ln^3 x \cdot arcsin 3x.$$

Розв'язання: $dy = d(2^{tgx} + ln^3 x \cdot arcsin 3x) =$

$$= d(2^{tgx}) + arcsin3x\ d(ln^3 x) + ln^3 x\ d(arcsin3x) =$$

$$= \frac{2^{tgx}\, d(tgx)}{ln2} + arcsin3x \cdot 3ln^2x\, d(lnx) + ln^3x \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} =$$

$$= \frac{2^{tgx}}{ln2 \cdot cos^2x} dx + 3arcsin3x \cdot \frac{ln^2x}{x} dx + \frac{3ln^3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx;$$

$$dy = \left(\frac{2^{tgx}}{ln2 \cdot cos^2x} + 3arcsin3x \cdot \frac{ln^2x}{x} + \frac{3ln^3x}{\sqrt{1-9x^2}} \right) dx.$$

7.2 Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. *Нехай задано функцію* $y = f(x)$, *неперервну на інтервалі* $[a, b]$. Нехай *функція* $y = f(x)$ *набуває свого найбільшого (найменшого) значення у деякій точці* x_0, *що належить інтервалу* $[a, b]$. *Якщо в точці* x_0 *похідна існує, то вона дорівнює нулю:*

$$f'(x_0) = 0.$$

Доведення. Нехай для визначеності в точці x_0 функція $y = f(x)$ набуває свого найбільшого значення. З цього випливає, що для будь-якої точки, що належить інтервалу $[a, b]$, повинна виконуватися умова:

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Отже, якщо $x < x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

а якщо $x > x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Якщо існує похідна, то існує ліва та права границі:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Одночасно ці нерівності справджуються лише за $f'(x_0) = 0$.

Аналогічно доводимо теорему, якщо в точці x_0 функція набуває найменшого значення.

Теорема Ролля. *Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на інтервалі $[a, b]$, диференційована в усіх внутрішніх точках цього відрізка і на його кінцях приймає рівні значення $f(a) = f(b)$, то існує хоча б одна точка x_0, у якій похідна дорівнює нулю*

$$f'(x_0) = 0.$$

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона досягає на ньому свого найбільшого M і найменшого m значень.

Якщо $M = m$, то функція стала. Похідна від сталої величини дорівнює нулю і теорема доведена.

Нехай $f(c) = M$, де $c \epsilon (a, b)$. Через те що $f(c) = M$ найбільше значення функції, то $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$, як при $\Delta x > 0$, так і при $\Delta x < 0$. Отже: $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$, коли $\Delta x > 0$, і

$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$, коли $\Delta x < 0$.

За умовою теореми похідна $f'(c)$ існує, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$, а $f^{'}(c) \leq 0$ при $\Delta x > 0$ і $f^{'}(c) \geq 0$ при $\Delta x < 0$. Ці нерівності сумісні лише тоді, коли $f^{'}(c) = 0$. Отже, між a і b є точка c, де похідна дорівнює нулю.

Геометричний зміст. За умов, зазначених у теоремі Ролля, на дузі AB існує хоча б одна дотична, паралельна до осі Ox (рис. 7.2).

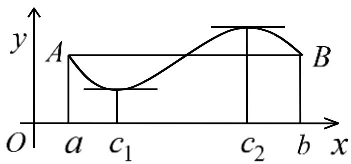

Рисунок 7.2

Теорема Лагранжа. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a, b]$ *і диференційована в усіх його внутрішніх точках, то на інтервалі* (a, b) *знайдеться хоча б одна точка* c, *у якій виконується рівність*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Доведення. Визначимо число λ рівністю $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lambda$. Складемо допоміжну функцію $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \cdot \lambda$. Очевидно, що $F(a) = F(b) = 0$.

Функція $F(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована в кожній внутрішній точці. Отже, вона відповідає теоремі Ролля, за якою всередині відрізка є точка c

така, що $F'(c) = 0$. Але $F^{'}(x) = f^{'}(x) - \lambda$, тому

$$F^{'}(c) = f^{'}(c) - \lambda = 0.$$

Звідси $f^{'}(c)$ =λ, тобто

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Теорема Коші. *Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ – дві функції, неперервні на відрізку $[a, b]$ і диференційовані в усіх його внутрішніх точках, до того ж похідна $\varphi'(x)$ ніде не обертається у нуль, то на інтервалі (a, b) знайдеться принаймні одна така точка c, коли виконується рівність*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f^{'}(c)}{\varphi^{'}(c)}.$$

Доведення. Визначимо число λ за рівністю

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \lambda,$$

де $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$.

Складемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \left(\varphi(x) - \varphi(a)\right) \cdot \lambda.$$

Зрозуміло, що $F(a) = F(b) = 0$. Отже, функція $F(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля, тому між a і b є така точка c, що $F'(c) = 0$. Але $F^{'}(x) = f^{'}(x) - \lambda\varphi^{'}(x)$. Отже, $F^{'}(c) = f^{'}(c) - \lambda\varphi^{'}(c) = 0$.

Звідси $\lambda = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ або

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорема Коші є узагальненням теореми Лагранжа.

Теорема Лопіталя. *Нехай функція* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ за $x \to x_0$ *одночасно прямують до нуля або до нескінченності. Якщо відношення їхніх похідних має границю, то відношення самих функцій також має границю, яка дорівнює границі відношення похідних, тобто*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доводити цю теорему загалом не будемо, обмежимося лише розглядом найпростіших випадків.

Доведемо насамперед, що, якщо $x \to x_0$, функції $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ прямують до нуля і їхні похідні в точці x_0 існують, якщо $\varphi'(x_0) \neq 0$.

За умовою теореми $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Розглянемо відношення

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}}.$$

Перейдемо до границі за $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Зауваження 1. Теорема справджується і в тому разі, коли функції $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ не визначені за $x=x_0$, але

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \ i \ \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0.$$

Зауваження 2. Якщо $f'(x_0)=\varphi'(x_0)=0$ і $f'(x)$ та $\varphi'(x)$ відповідають тим самим умовам, що й $f(x)$ і $\varphi(x)$, то, застосовуючи правило Лопіталя щодо відношення $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, отримаємо формулу

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ і тощо.}$$

Зауваження 3. Якщо $\varphi'(x_0)=0,$ а $f'(x_0)\neq 0,$ то теорема справджується щодо оберненого відношення

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}\to 0, \qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)}\to\infty.$$

7.2.1 Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя

1. Функція подана відношенням двох функцій, які одночасно прямують до нуля або до нескінченності (невизначеності типу $\left|\frac{0}{0}\right|$ *або* $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ *).*

Приклад. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\,(5+3x)}{2x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(ln\,(5+3x))'}{(2x)'}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3}{5+3x}}{2}=\dfrac{3}{10}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{7x-3}}{x^2}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(e^{7x-3})'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7e^{7x-3}}{2x}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(7e^{7x-3})'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{49e^{7x-3}}{2}=\dfrac{\infty}{2}=\infty.$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-x}{x^2}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{3x}-e^{2x}-x)'}{(x^2)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3e^{3x}-2e^{2x}-1)'}{(2x)'}=\dfrac{3-2-1}{0}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3e^{3x}-2e^{2x}-1)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9e^{3x}-4e^{2x}}{2}=\dfrac{5}{2}=2\dfrac{1}{2}.$

2. Функція подана різницею двох функцій, які прямують до нескінченності (невизначеність типу $|\infty-\infty|$*).*

Приклад. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=|\infty-\infty|=$$

(приведемо різницю дробів до спільного знаменника)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{\left(x(e^x-1)\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} =$$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}.$$

Приклад. Знайти границю функції $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{ln2x}\right]$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{2x-1} - \frac{2}{ln2x}\right] = \frac{2}{0} - \frac{1}{0} = |\infty - \infty| =$$

(приведемо різницю дробів до спільного знаменника)

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2ln2x-2x+1}{(2x-1)ln2x} = \frac{2ln\left(2\times\frac{1}{2}\right) - 2\times\frac{1}{2}+1}{\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)ln\left(2\times\frac{1}{2}\right)} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2ln2x-2x+1)'}{\left(ln2x\cdot(2x-1)\right)'} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2\times\frac{1}{2x}\times 2-2}{\frac{1}{2x}\times 2\times(2x-1)+2ln2x} =$$

$$= \frac{4-2}{0} = \infty$$

3. Функція подана добутком двох функцій, одна з яких є нескінченно мала, а інша − нескінченно велика величина (невизначеність типу $|0\cdot\infty|$*)*

Границя виглядає так:

$$1)\ \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x) = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \left|\frac{0}{0}\right|;$$

$$2)\ \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x) = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Приклад. Знайти границі функцій

$$а)\ \lim_{x\to 0} x^2\cdot lnx = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to 0}\frac{lnx}{1/_{x^2}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{1/_{x}}{-2/_{x^3}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0\ ;$$

$$б)\ \lim_{x\to 1} lnx\cdot ln(x-1) = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to 1}\frac{ln(x-1)}{1/_{lnx}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{ln^2x}\cdot\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(lnx)^2}{x-1} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{(lnx)^2+\frac{2xlnx}{x}}{1} = -\lim_{x\to 1}((lnx)^2+2lnx) = 0\ ;$$

$$в)\ \lim_{x\to a}(a^2-x^2)\cdot tg\frac{\pi x}{2a} = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to a}\frac{a^2-x^2}{\frac{1}{tg\frac{\pi x}{2a}}} = \lim_{x\to a}\frac{a^2-x^2}{ctg\frac{\pi x}{2a}} =$$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to a} \frac{-2x}{\frac{-1}{\sin^2 \frac{\pi x}{2a}} \cdot \frac{\pi}{2a}} = \frac{4a^2}{\pi}.$$

4. Функція степенево-показникова (невизначеності типу $|1^\infty|, |\infty^0|, |0^0|$*).*

Для обчислення таких границь за правилом Лопіталя необхідно спочатку прирівняти границю до деякого числа A, що є границею функції, прологарифмувати отримане рівняння та знайти границю логарифма, а потім знайти значення A.

Приклад. Знайти границі функцій

а) $\lim\limits_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}}$.

Розв'язання: а) функція є степенево-показниковою, тому позначимо границю функції через A та прологарифмуємо її:

$$\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = |0^0| = A ,$$

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = \lim_{x\to 0} ln(arcsinx)^{tgx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} tgx \cdot ln(arcsinx) = \lim_{x\to 0} \frac{ln(arcsinx)}{ctgx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-sin^2x}{\sqrt{1-x^2} \cdot arcsinx} =$$

(використавши першу важливу границю та її наслідки, маємо)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2} \cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 ,$$

тоді $A = e^0 = 1$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = |\infty^0| = A,$

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0} ln(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{lnx}\cdot lnctgx =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{lnctgx}{lnx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{sin^2x\cdot ctgx}}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{sin^2x\cdot ctgx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{sin^2x\cdot\frac{cosx}{sinx}} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{sinx\cdot cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-1}{cosx} = -1.$$

Отримаємо: $lnA = -1$, тоді $A = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

7.3 Поводження функції в інтервалі

7.3.1 Ознаки монотонності функції

Теорема *(необхідна ознака монотонності).*

1. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі (a,b) зростає, то її похідна $f'(x)$ невід'ємна: $f'(x)\geq 0$.

2. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі (a,b) спадає, то її похідна $f'(x)$ недодатна: $f'(x)\leq 0$.

3. Якщо функція $f(x)$ не змінюється в інтервалі (a,b), то її похідна $f'(x)$ дорівнює нулю.

Доведення. 1. Нехай функція $f(x)$ в інтервалі (a,b) зростає, тобто $f(x+\Delta x) > f(x)$, якщо $\Delta x > 0$, і $f(x+\Delta x) >$ $> f(x)$, якщо $\Delta x > 0$, для будь-якого x в цьому інтервалі. Але тоді відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

є величиною додатною незалежно від знака Δx, а отже, границя цього виразу, тобто похідна, не може бути від'ємним числом:

$$f^{'}(x) \geq 0.$$

2. Якщо функція $f(x)$ спадає, то відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – величина від'ємна і її границя, тобто похідна, може бути або від'ємним числом, або дорівнювати нулю:

$$f^{'}(x) \leq 0.$$

3. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі (a, b) не змінюється, тобто $f(x) = const$, то її похідна дорівнює нулю:

$$f^{'}(x) = 0.$$

***Геометричний зміст цієї теореми*:**

1) якщо функція зростає, то дотична до графіка функції утворює гострий кут з віссю Ox;

2) якщо функція спадає, то дотична до графіка функції утворює тупий кут з віссю Ox.

Теорема *(достатня ознака монотонності).*

1. Якщо похідна $f'(x)$ від функції $f(x)$ у всьому інтервалі додатна, то функція $f(x)$ в цьому інтервалі зростає.

2. Якщо похідна $f'(x)$ від функції $f(x)$ у всьому інтервалі від'ємна, то функція $f(x)$ в цьому інтервалі спадає.

3. Якщо похідна $f'(x)$ від функції $f(x)$ у всьому інтервалі дорівнює нулю, то функція $f(x)$ в цьому інтервалі не змінюється (є константою).

Доведення. Оберемо дві довільні точки x_1 і x_2, що належать інтервалу, до того ж $x_1 < x_2$. За формулою Лагранжа маємо:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \qquad x_1 < \xi < x_2.$$

Оскільки $x_1 < x_2$, то різниця $x_2 - x_1$ додатна і знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$ визначається знаком похідної $f'(\xi)$. Якщо похідна $f'(x)$ завжди додатна, то і $f'(\xi) > 0$. Отже, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ за } x_2 > x_1,$$

це й означає, що функція $f(x)$ зростає.

Якщо похідна завжди від'ємна, то й $f'(\xi) < 0$, а отже,

$$f(x_2) < f(x_1) \text{ за } x_2 > x_1,$$

тобто функція спадає.

Якщо похідна завжди дорівнює нулю, то $f'(\xi) = 0$, а отже, $f(x_2) = f(x_1)$ за $x_2 > x_1$, тобто функція постійна.

Приклад. Дослідити функцію на монотонність:

$$y = x^3 - 3x.$$

Розв'язання. Зауважимо, що будь-яке дослідження функції необхідно розпочинати зі знаходження області визначення функції: $D(y) = R$.

Похідна цієї функції $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; $f'(x) > 0$ за $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ за $x \in (-1; 1)$.

Отже, функція $y = x^3 - 3x$ зростає на проміжках $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-1; 1)$.

7.3.2 Екстремум функції

Особливе значення дослідження функції мають значення x, які відділяють інтервали зростання від інтервалів спадання функції. Під час переходу через ці точки функція $y = f(x)$ зі зростальної стає спадною, і навпаки: зі спадної – зростальною.

Визначення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***максимуму*** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найбільшим значенням функції $y = f(x)$ в деякому околі точки x_0 (рис. 7.3).

Визначення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***мінімуму*** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найменше значення функції $y = f(x)$ в деякому окіллі точки x_0 (рис. 7.4).

Точки максимуму і мінімуму називаються точками екстремуму функції.

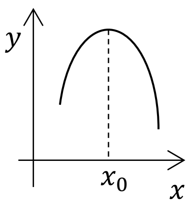

Рисунок 7.3

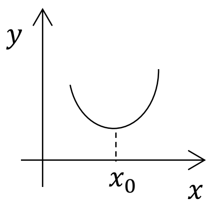

Рисунок 7.4

Теорема *(необхідна ознака екстремуму). Якщо в точці* x_0 *функція* $y = f(x)$ *досягає екстремуму, то її похідна в цій точці або дорівнює нулю* $(f'(x_0) = 0)$, *або не існує.*

Доведення. Дійсно, якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції, то значення функції в ній є найбільшим (або найменшим) у деякому околі точки x_0. Звідси випливає, що якщо в точці x_0 існує похідна, то, за теоремою Ферма, вона дорівнює нулю.

Точки x_0, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними* точками функції.

Теорема *(достатня ознака екстремуму). Точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, якщо під час переходу x через x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак на протилежний; під час зміни знака «+» на «–» точка x_0 є точкою максимуму, під час зміни знака з «–» на «+» точка x_0 є точкою мінімуму.*

Доведення. Нехай під час переходу x зліва направо через x_0 похідна змінює знак з «+» на «–» ; із цього випливає, що ліворуч точки x_0 розташований інтервал зростання функції, а праворуч – інтервал спадання функції. Отже, точка x_0 є точкою максимуму функції.

Аналогічними є міркування в разі зміни знака з «–» на «+» ; під час переходу x через x_0 зліва направо, точка x_0 є точкою мінімуму функції.

Загальний план дослідження функції на екстремум та монотонність

1. З'ясуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо похідну функції.
3. Знайдемо критичні точки ($f'(x) = 0$). Нанесемо їх на координатну пряму.
4. У кожному з отриманих інтервалів з'ясуємо знак похідної. За знаком похідної визначаємо характер поводження функції. З'ясовуємо, під час переходу через які *критичні* точки похідна змінює знак, саме ці точки є точками екстремуму

функції. Інколи два суміжні інтервали мають однаковий знак, тому точка, яка їх розділяє, не є точкою екстремуму.

5. Знайдемо значення функції в точках екстремуму.

Приклад. Дослідити функцію на монотонність та екстремум

$$y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}.$$

Розв'язання:

1. Область визначення функції: $x \neq \pm 1$; тобто

$$D(y) = (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, \infty).$$

2. Знайдемо $y'(x)$:

$$y' = \frac{2x(1 - x^2) - (1 + x^2)(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{4x}{(1 - x^2)^2}.$$

3. $y' = 0$ за $x = 0$ і y' не існує за $x = \pm 1$, тобто критичною точкою є тільки точка $x = 0$, оскільки за $x = \pm 1$ функція не існує.

На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(-1,0)$ функція спадає, оскільки $y' < 0$.

На інтервалах $(0,1)$ та $(1, \infty)$ функція зростає, оскільки $y' > 0$ (рис. 7.5).

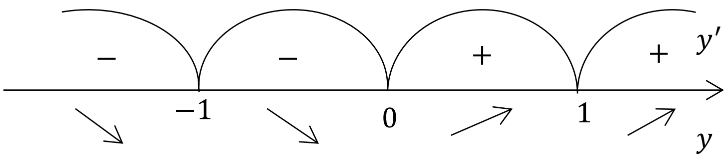

Рисунок 7.5

Під час переходу через $x = 0$ похідна змінює знак з – на +, тому за $x = 0$ маємо мінімум функції.

$y_{min} = y(0) = 1$, тобто точка $B(0,1)$ – точка екстремуму функції.

Відповідь: функція спадає за $x \epsilon (-\infty, -1)$ та $(-1,0)$; функція зростає за $x \epsilon (0,1)$ та $(1, \infty)$; точка $B(0,1)$ – точка екстремуму функції (min).

7.3.3 Найменше та найбільше значення функції в інтервалі

Розв'язання задачі на найменше та найбільше значення функції в інтервалі пов'язане з дослідженням функції на екстремум та монотонність. Функція $y = f(x)$ може набувати найменшого (найбільшого) значення або в точках екстремуму, або на кінцях інтервалу $[a, b]$.

Загальний план дослідження на найменше та найбільше значення функції в інтервалі

1. З'ясовуємо область визначення функції (далі – ОВФ).
2. Знайдемо похідну функції.
3. Знайдемо критичні точки ($f'(x) = 0$).
4. Знайдемо значення функції в критичних точках, у яких похідна існує і які належать інтервалу $[a, b]$, та значення функції у крайніх точках інтервалу. Порівняємо отримані значення і оберемо серед них найменше та найбільше.

Приклад. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = x^2 \ln x$ на інтервалі $[e^{-3}, 1]$.

Розв'язання:

1. ОВФ: $x\epsilon(0,\infty)$.

2. Знайдемо $y'(x)$:

$$y' = 2x\cdot lnx + x^2\frac{1}{x} = 2x\cdot lnx + x.$$

3. $y' = 0;\ 2x\cdot lnx + x = 0;\ x(2lnx+1) = 0;\ x_1 = 0,$

$$2lnx + 1 = 0, \qquad x_2 = e^{-\frac{1}{2}}.$$

x_1 не належить ОВФ, $x_2\epsilon[e^{-3},1]$.

$$y(e^{-3}) = e^{-6}lne^{-3} = -3e^{-6} = \frac{-3}{e^6};$$

$$y\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1}lne^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}e^{-1} = -\frac{1}{2e};$$

$$y(1) = ln1 = 0.$$

Отже, найменше значення функція набуває за $x = e^{-\frac{1}{2}}$, а найбільше – за $x = 1$.

7.3.4 Умови опуклості та угнутості графіка функції. Точки перегину

Визначення. Дуга називається *опуклою*, якщо вона перетинається з будь-якою січною не більше ніж у двох точках.

Якщо дуга опукла, то вона розміщується з одного боку від дотичної, проведеної в будь-якій точці. Опукла дуга може бути опуклою вгору (опуклою) (рис. 7.6) або опуклою вниз (угнутою) (рис. 7.7). Опукла дуга розміщується нижче дотичної, а угнута – вище.

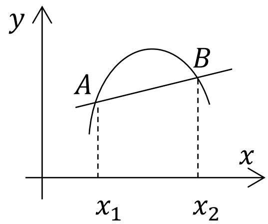

Рисунок 7.6

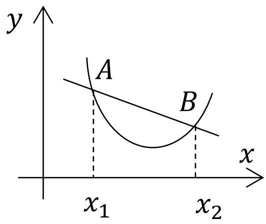

Рисунок 7.7

Особливу роль відіграють точки переходу від інтервалів опуклості до інтервалів угнутості, ці точки називаються *точками перегину.*

Визначення. *Точкою перегину* називається така точка, лінії якої відділяють опуклу дугу від угнутої.

Теорема. Якщо друга похідна $f''(x)$ в інтервалі (a, b) від'ємна ($f''(x) \leq 0$), то дуга лінії $y = f(x)$, опукла в цьому інтервалі; якщо $f''(x)$ в інтервалі (a, b) додатна ($f''(x) \geq 0$), то лінія $y = f(x)$ у цьому інтервалі угнута.

Теорема. (*необхідна умова існування точок перегину*) *Якщо в точці* x_0 *лінії* $y = f(x)$ *має точку перегину, то або* $f''(x_0) = 0$, *або не існує.*

Теорема. (*достатня умова існування точок перегину*) *Точка* (x_0, y_0) *(якщо в цій точці виконується необхідна умова) є точкою перегину лінії* $y = f(x)$, *якщо друга похідна функції* $f''(x)$ *змінює знак під час переходу* x *через* x_0.

Приймемо ці теореми без доведення.

Схема дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину

1. Визначимо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо першу та другу похідні.
3. Визначимо критичні точки другого порядку, тобто точки, у яких $f''(x) = 0$ або не існує.
4. Нанесемо на координатну пряму критичні точки та точки, у яких функція не існує. З'ясуємо знак другої похідної $f''(x)$ у кожному частковому інтервалі. Якщо $f''(x) < 0$, то функція опукла, якщо $f''(x) > 0$ – угнута. Якщо під час переходу через критичні точки другого порядку похідна $f''(x)$ змінює знак, то ці точки є точками перегину.
5. Знайдемо значення функції в точках перегину.

Приклад. Знайти точки перегину та інтервали опуклості й угнутості функції $y = x^2 e^x$.

Розв'язання: 1. ОВФ: $x \epsilon R$.

2. $$y' = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2);$$

$$y'' = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) = e^x(x^2 + 4x + 2).$$

3. $$e^x(x^2 + 4x + 2) = 0;\ e^x \neq 0;\ \ x^2 + 4x + 2 = 0,$$

$$x_1 = -2 - \sqrt{2};\ \ x_2 = -2 + \sqrt{2}.$$

4.

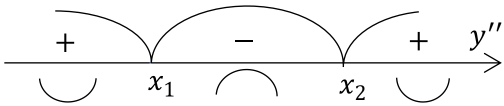

Рисунок 7.8

Функція угнута за $x \epsilon \left(-\infty, -2-\sqrt{2}\,\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, \infty\right)$ та опукла за $x\,\epsilon\,\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right)$. Точки з абсцисами $x_1 = -2-\sqrt{2}$; $x_2 = -2+\sqrt{2}$ є точками перегину (рис. 7.8).

5. $y\left(-2-\sqrt{2}\right) = \left(-2-\sqrt{2}\right)^2 e^{-2-\sqrt{2}} = \dfrac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$;

$$y\left(-2+\sqrt{2}\right) = \left(-2+\sqrt{2}\right)^2 e^{-2+\sqrt{2}} = \frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}.$$

7.3.5 Асимптоти функції

Визначення. Пряма лінія S називається *асимптотою* лінії L, якщо відстань від точки лінії L до прямої S прямує до нуля при необмеженому віддалені цієї точки від початку координат.

Вертикальні та похилі асимптоти

Нехай лінія $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту. Рівняння вертикальної асимптоти $x = x_0$, а відповідно визначенню асимптоти $f(x) \to \infty$ за $x \to x_0$; і навпаки якщо точка x_0 є точкою нескінченного розриву функції $f(x)$, то пряма $x = x_0$ є асимптотою лінії $y = f(x)$. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то лінія $y = f(x)$ має своєю асимптотою пряму $x = x_0$.

Взаємне розташування нескінченної вітки лінії та її вертикальної асимптоти $x = x_0$ розглядають за допомогою лівої та правої границь.

Приклад. Знайти вертикальні асимптоти функції

$$y = \frac{x^2 - x}{x + 3}.$$

*Розв'язання:*1. ОВФ: $x \neq -3$.

$$2.\ \lim_{x \to -3-0} \frac{x^2 - x}{x + 3} = \frac{(-3-0)^2 - (-3-0)}{-3-0+3} = \frac{12}{-0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to -3+0} \frac{x^2 - x}{x + 3} = \frac{(-3+0)^2 - (-3+0)}{-3+0+3} = \frac{12}{0} = \infty.$$

3. За $x \to -3$ кожна з двох односторонніх границь прямує до нескінченності, тому $x = -3$ – вертикальна асимптота. При $x \to -3-0$ вітка функції прямує до $-\infty$; за $x \to -3+0$ вітка функції прямує до ∞.

Нехай лінія $y = f(x)$ має похилу асимптоту. Рівняння такої асимптоти: $y = kx + b$. Відповідно до визначення відстань від MN_1 прямує до нуля за $x \to \infty$ (рис. 7.9). Зручніше розглядати відстань MN, що також прямує до нуля за $x \to \infty$:

$$MN = kx + b - f(x);$$
$$\lim_{x \to \infty} \big(kx + b - f(x)\big) = 0;$$
$$f(x) = kx + b + \varepsilon(x),$$

де $\varepsilon(x)$ нескінченно мала за $x \to \infty$. Поділимо обидві частини на x і перейдемо до границі за $x \to \infty$:

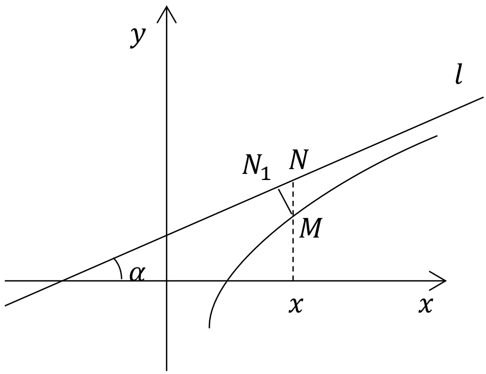

Рисунок 7.9

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{kx}{x} + \frac{b}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x} \right);$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Знайдемо b: $b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$.

Зауваження 1. Під час знаходження k для показникової функції необхідно розглядати випадки за $x \to +\infty$ і за $x \to -\infty$ окремо (тобто маємо k_1 і k_2). Якщо $k_i = \pm\infty$, то похилої асимптоти немає і знаходити b_i не потрібно.

Зауваження 2. Якщо $k = 0$, то похила асимптота перетворюється на горизонтальну:

$$y = b, \qquad b = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Приклад. Знайти похилу асимптоту функції

$$y = \frac{x^2 - x}{x + 3}.$$

Розв'язання:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2 - x}{x + 3}}{x} \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x}{(x + 3)x} = 1\,.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - x}{x + 3} - x\right) = |\infty - \infty| =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - x^2 - 3x}{x + 3} = -4.$$

$y = x - 4$ похила асимптота функції.

7.3.6 Загальна схема дослідження функції

1. Область визначення функції.
2. Точки перетину з осями координат. Точки перетину з віссю Oy знаходимо з умови, що $x = 0$, а з віссю Ox з умови, що $y = 0$.
3. Парність (непарність) функції. Функція парна, якщо виконується умова $y(-x) = y(x)$, і непарна, якщо $y(-x) = -y(x)$.
4. Періодичність. Якщо функція періодична, то $y(x + \mathrm{T}) = y(x)$, де Т – період функції.
5. Дослідження функції на монотонність та екстремум.
6. Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину.
7. Асимптоти функції.
8. Побудова графіка функції.

Приклад. Дослідити функцію та побудувати графік

$$y = \frac{x^2}{x+4}.$$

Розв'язання:

1. ОВФ: $x + 4 \neq 0$; $x \neq -4$.

2. За $x = 0, y = 0$. т. M_1 (0,0) – точка перетину з осями координат.

3. $y(-x) = \frac{x^2}{-x+4}$, $y(-x) \neq \pm y(x) -$ функція загального вигляду.

4. Неперіодична.

5. $y' = \frac{2x(x+4)-x^2}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x}{(x+4)^2}$,

$y' = 0$, за $x^2 + 8x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -8$.

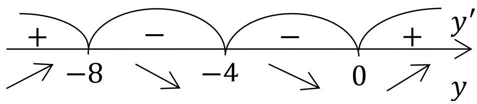

Рисунок 7.10

За $x\epsilon(-\infty,-8) \cup (0,\infty)$ функція зростає, за $x\epsilon(-8,-4) \cup (-4,0)$ функція спадає (рис. 7.10).

$y(-8) = \frac{(-8)^2}{-8+4} = \frac{64}{-4} = -16$, $M_2(-8,-16) -$ точка екстремуму (max). $y(0) = 0$, $M_3(0,0)$ – точка екстремуму (min).

6.

$$y'' = \frac{(2x+8)(x+4)^2 - 2(x^2+8x)(x+4)}{(x+4)^4} = \frac{24}{(x+4)^3},$$

$y'' \neq 0$ – точок перегину немає.

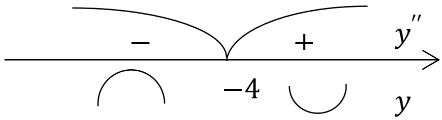

Рисунок 7.11

За $x\epsilon(-\infty,-4)$ функція опукла, за $x\epsilon(-4,\infty)$ функція угнута (рис. 7.11).

7. Вертикальні асимптоти: ОВФ $x \neq -4$, тому

$$\lim_{x\to-4-0}\frac{x^2}{x+4}=\frac{(-4-0)^2}{-4-0+4}=\frac{16}{-0}=-\infty;$$
$$\lim_{x\to-4+0}\frac{x^2}{x+4}=\frac{(-4+0)^2}{-4+0+4}=\frac{16}{0}=\infty.$$

За $x\to-4$ кожна з двох односторонніх границь прямує до нескінченності, тому $x=-4$ – вертикальна асимптота. За $x\to-4-0$ вітка функції прямує до $-\infty$; за $x\to-4+0$ вітка функції прямує до ∞.

Похила асимптота:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x+4}}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+4x}=1,$$
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+4}=-4,$$

$y=x-4$ похила асимптота.

Побудуємо графік функції (рис. 7.12)

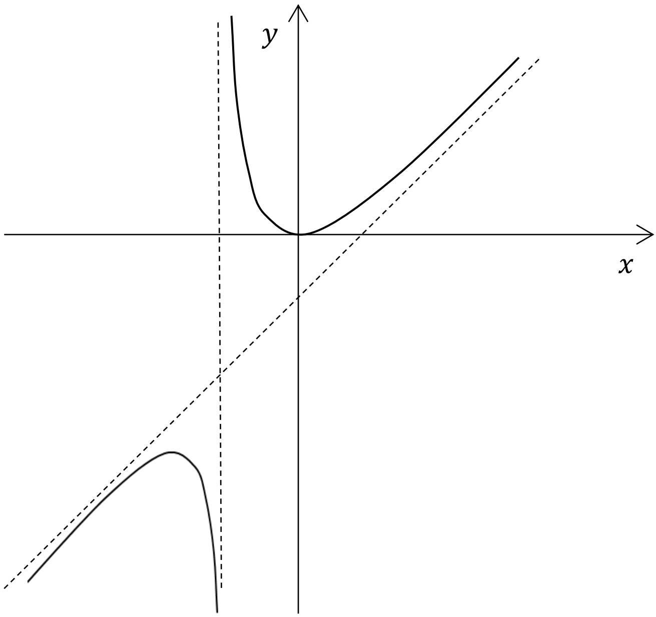

Рисунок 7.12

Функцію досліджено.

7.4 Задачі професійного спрямування

Приклад. На ринку досконалої конкуренції діють логістичні фірми, які мають однакові загальні витрати, що знаходять за формулою $TC = AQ^3 - BQ^2 + xQ$. Попит на перевезення заданий рівнянням $Q_D = C - EP$. Відомо, що в галузі перевезень залишається F фірм. Визначити параметр x.

Розв'язання. У довгостроковому періоді перспектива ціни, загальні витрати установлюються на рівні мінімуму довгострокових середніх загальних витрат ATC:

$$ATC = \frac{TC}{Q} = \frac{0{,}1Q^3 - 4Q^2 + xQ}{Q} = 0{,}1Q^2 - 4Q + x,$$

ATC мінімальні, коли $ATC' = 0$. Знайдемо похідну:

$$ATC' = (0{,}1Q^2 - 4Q + x)' = 0{,}2Q - 4;$$

$$0{,}2Q - 4 = 0; \quad 0{,}2Q = 4; \quad Q = 20.$$

Кожна фірма виконує 20 перевезень, а деяка логістична фірма 24

$$Q_D = 680 - 5P, \;\; Q = 20 \times 24 = 480,$$

$$680 - 5P = 480; \quad P = 40.$$

При максимізації прибутку

$$P = MC = TC' + (0{,}1Q^3 - 4Q^2 + xQ)' = 0{,}3Q^2 - 8Q + x$$

Якщо $Q = 20, 0{,}3Q^2 - 8Q + x = 40,$ тобто

$$0{,}3Q^2 - 8Q + x = 40, 120 - 160 + x = 40,$$

$$x = 80.$$

Отже, параметр $x = 80$.

Приклад. Пасажир економкласу і бізнес-класу, які летять рейсом «Київ – Дортмунд» авіакомпанією «МАУ», з'ясували, що перший заплатив за квиток майже вдвічі менше, ніж другий.

Визначте:

1) обсяги пасажирських перевезень авіакомпанії (тис. осіб), якщо попит на економклас описується рівнянням $Q_1^D = 10 - 2P_1$, а попит на бізнес-клас $Q_2^D = 30 - 2P_2$, сукупні витрати авіакомпанії $TC = 20 + 2Q$;

2) величину сукупного прибутку авіакомпанії;

3) обсяги перевезень, якщо авіакомпанія встановила одну ціну за квитки.

Розв'язання: Обсяг перевезень на економкласу $Q_1^D = 10 - 2P_1$, тоді ціна квитка на економкласу: $P_1 = 5 - Q_1^D$. Загальний дохід

$$TR_1 = P_1 \cdot Q_1^D = 5Q_1^D - \frac{(Q_1^D)^2}{2},$$

а граничний дохід MR ми знайдемо, як похідну від загального доходу TR

$$MR_1 = (TR_1)' = 5 - Q_1^D,$$

з іншого боку, при максимізації прибутку $MC = TC'$, тобто

$$MC = (20 + 2Q)' = 2,$$

$$MR_1 = MC = 5 - Q_1^D = 2,$$

Звідси $Q_1^D = 3$, а $P_1 = 5 - \frac{3}{2} = 3{,}5$.

Це ціна економкласу $P_1 = 350$ грн. Тоді обсяги пасажирських перевезень авіакомпанії економкласом становлять $Q_1^D = 3$ тис. осіб.

Виконаємо аналогічні розрахунки тепер для бізнес-класу:

$$Q_2^D = 30 - 2P_2, \; P_2 = 15 - \frac{Q_2^D}{2},$$

$$TR_2 = P_2 \cdot Q_2^D = 15\, Q_2^D - \frac{(Q_2^D)^2}{2},$$

$$MR_2 = (TR_2)' = 15 - \frac{2}{2} Q_2^D = 15 - Q_2^D,$$

оскільки $MR_2 = MC$, то $15 - Q_2^D = 2$. Звідси $Q_2^D = 13$, $P_2 = 15 - \frac{13}{2} = 15 - 6{,}5 = 8{,}5$. Обсяг перевезень – 13 тис. осіб на місяць, ціна квитка – 850 гривень.

Сукупний обсяг перевезень $Q = Q_1^D + Q_2^D = 16$ тис. осіб.

Загальні витрати $- TC = 20 + 2 \times 15\,000 = 30\,020$ грн.

Економічний прибуток

$$P_r E = P_1 \cdot Q_1^D + P_2 \cdot Q_2^D - TC,$$

$$P_r E = 350 \times 3\,000 + 850 \times 13\,000 - 30\,020 = 12\,069\,980,$$

тобто економічний прибуток становить 12 070 тис. грн на місяць.

За відсутності цінової дискримінації

$Q = Q_1^D + Q_2^D = 16$ тис.; $P_1 = P_2 = P = 850$ грн.

$Q = 10 - 2P + 30 - 2P = 40 - 4P$. Звідси $P = 10 - \frac{Q}{4}$,

$$TR = \left(10 - \frac{Q}{4}\right) \cdot Q = 10Q - \frac{Q^2}{4},$$

$$MR = (TR)' = \left(10Q - \frac{Q^2}{4}\right)' = 10 - \frac{1}{2}Q,$$

$$MR = MC, \quad 10 - \frac{1}{2}Q = 2, \qquad \frac{1}{2}Q = 8, \qquad Q = 16$$

$$P = 10 - \frac{Q}{4} = 10 - \frac{16}{4} = 6$$

$$P = 600 \text{ грн};$$

$$P_r E = 16\,000 \times 600 - 30\,020 = 9\,569\,980 = 9\,570 \text{ тис. грн}$$

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення похідної функції.
2. Поясніть фізичний зміст похідної.
3. Поясніть геометричний зміст похідної. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.
4. Запишіть правила обчислення похідної суми, різниці, добутку та частки двох функцій.
5. Наведіть формули похідних основних елементарних функцій.
6. Диференціювання функцій, що задані неявно та параметрично.
7. У якому випадку застосовується логарифмічне диференціювання?

8. Дайте означення диференціала функції та опишіть його застосування.

9. Зв'язок похідної і диференціала функції.

10. Сформулюйте основні теореми диференціального числення (теореми Ролля, Лагранжа, Коші)

11. Сформулюйте правило Лопіталя та опишіть його застосування під час обчислення границь.

12. Правило дослідження функції на монотонність і екстремум.

13. Правило дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину.

14. Які види асимптот ви знаєте? Запишіть формули для знаходження рівнянь асимптот.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНУМГ, 2015. – 255 с.

2. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.

3. Вороновська Л. П. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» Модуль 1 для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 275 – Транспортні технології, освітньої програми – Транспортні технології (міський транспорт) / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова, 2020. – 114 с.

4. Дудкін М. Є. Вища математика : підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями / М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова, І. В. Степахно ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 449 с.

5. Курпа Л. В. Вища математика в прикладах і задачах : у 2-х т. : навч. посіб. / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г. Б. Лінник; за ред. проф. Л. В. Курпи. – Харків : НТУ «ХПІ», 2008. – Т. 1 : Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. – 528 с.

6. Зайцев Є. П. Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Є. П. Зайцев. – Київ : Алерта, 2017. – 574 с.

7. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі : у 2 кн. / За ред. Г. Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003.

Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с.

Кн. 2 : Спеціальні розділи. – 368 с.

8. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2003. – 648 с.

9. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.

Електронне навчальне видання

ВОРОНОВСЬКА Лариса Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Модуль 1

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

Редактор *О. В. Михаленко*

Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

Підп. до друку 12.06.2023. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк арк. 14,0

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.