МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Л. П. Вороновська

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Модуль 1

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 263 – Цивільна безпека)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2023

УДК 517(042.3)

Вороновська Л. П. Вища математика. Модуль 1 : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 263 – Цивільна безпека / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2023. – 114 с.

Автор
канд. пед. наук Л. П. Вороновська

Рецензент
Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

Рекомендовано кафедрою вищої математики і математичного моделювання, протокол № 8 від 22 березня 2023 року

Конспект лекцій складено з метою допомогти здобувачам вишів за напрямом підготовки з цивільної безпеки під час занять та виконання завдань з вищої математики.

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами курсу «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 263 – Цивільна безпека.

До конспекту увійшли лекції за темами «Векторна алгебра», «Аналітична геометрія на площині та у просторі», «Диференціювання функцій однієї змінної» та «Інтегрування функцій однієї змінної».

Доступне коротке подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів для практичного закріплення вивченого.

Конспект лекцій може бути використаний на практичних заняттях для виконання домашніх завдань, а також для самостійного вивчення деяких розділів вищої математики.

ЛЕКЦІЯ 1

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

1.1 Скалярні та векторні величини. Основні поняття

Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою трійкою чисел $(x; y; z)$ – її ***координатами***.

Величина, яка характеризується певним числовим значенням, називається ***скалярною величиною*** (***скаляром***).

Величина, яка характеризується не тільки числовим значенням, а й напрямком, називається ***векторною величиною*** (***вектором***).

Модулем (***абсолютною величиною, довжиною***) вектора називається довжина відрізка, який зображає цей вектор. Позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор одиничної довжини називається ***одиничним вектором*** (***ортом***).

Вектори, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називаються ***колінеарними*** (***паралельними***). Позначається $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Вектори, які лежать у паралельних площинах або в одній площині, називаються ***компланарними***.

Якщо відомі координати початку $M_1(x_1; y_1 z_1)$ і кінця $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то маємо:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тобто, *координати вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *дорівнюють різниці відповідних координат його кінця* $M_2(x_2; y_2; z_2)$ *і початку* $M_1(x_1; y_1 z_1)$.

Відстань між двома точками $M_1(x_1; y_1 z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ обчислюється за формулою

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

1.2 Лінійні операції над векторами у координатній формі. Умова колінеарності векторів

Нехай дано $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Лінійні операції з векторами виконуються покомпонентно:

1) при додаванні (відніманні) векторів їх відповідні координати додаються (віднімаються):

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + \left(a_y \pm b_y\right)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k};$$

2) при множенні вектора на число кожну координату множать на це число:

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}.$$

Умова колінеарності *(паралельності) двох векторів:* два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *колінеарні* тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z};\ \vec{a} \neq \vec{0};\ \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Приклад. Визначити, при яких значеннях α і β дані вектори колінеарні $\vec{a} = (\alpha - 2; 4; -3)$; $\vec{b} = (5; 3\beta; 6)$.

Розв'язання.

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z};\quad \frac{\alpha - 2}{5} = \frac{4}{3\beta} = \frac{-3}{6};$$

тому

$$1)\ \frac{\alpha - 2}{5} = \frac{-1}{2};\ \alpha - 2 = \frac{-5}{2};\ \alpha = \frac{-1}{2};$$

$$2)\ \frac{4}{3\beta} = \frac{-1}{2};\ -3\beta = 8;\ \beta = \frac{-3}{8}.$$

1.3 Скалярний, векторний та змішаний добутки векторів

1.3.1 Скалярний добуток векторів. Умова перпендикулярності двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|cos\varphi.$$

Властивості скалярного добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$;
3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
4) $(\vec{a})^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|cos0 = |\vec{a}|^2$.

Безпосередньо з означення маємо косинус кута між векторами

$$cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів: *два ненульові вектори* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді , коли їх скалярний добуток дорівнює нулю:*

$$\vec{a}\perp\vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{a}\cdot\vec{b} = 0, \quad \vec{a},\ \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Оскільки координатні орти $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ взаємно перпендикулярні і мають одиничну довжину, то

$$(\vec{i})^2 = 1; \quad (\vec{j})^2 = 1; \quad (\vec{k})^2 = 1;$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0; \ \ \vec{i}\cdot\vec{k} = 0; \ \ \vec{j}\cdot\vec{k} = 0.$$

Нехай $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Тоді $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$
$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Таким чином, ***скалярний добуток двох векторів*** *дорівнює сумі добутків їх відповідних координат*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Приклад. Знайти, при якому значенні параметра α задані вектори перпендикулярні $\vec{a} = (2\alpha; -2; -3)$; $\vec{b} = (\alpha; -\alpha; 4)$.

Розв'язання. $\vec{a} \perp \vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$;

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0;\;\; 2\alpha\cdot\alpha + (-2)(-\alpha) - 12 = 0;$$

$$2\,\alpha^2 + 2\,\alpha - 12 = 0;\quad \alpha^2 + \alpha - 6 = 0;$$

за теоремою Вієта маємо: $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 2$.

1.3.2 Векторний добуток векторів. Площа трикутника

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який позначається $\vec{a}\times\vec{b}$ і задовольняє такі умови:

1) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) модуль вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює добутку модулів співмножників на синус кута φ між ними:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi.$$

Іншими словами, модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = S_{пар};$$

3) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ напрямлений так, що найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ здійснюється у додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки), якщо

дивитися з кінця вектора $\vec{a} \times \vec{b}$.

Отже,

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a};\ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b};$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| sin\varphi = S_{nap}.$$

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\vec{a} \times \vec{b}$;

3) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Враховуючи взаємну орієнтацію координатних ортів $\vec{i}, \vec{j}$ і $\vec{k}$, отримаємо:

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0\ ;\ \ \vec{j} \times \vec{j} = 0\ ;\ \ \vec{k} \times \vec{k} = 0\ ;$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}\ ; \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}\ ;\ \ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}.$$

Нехай $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Тоді ***векторний добуток двох векторів*** *дорівнює визначнику третього порядку, у якому перший рядок складається з координатних ортів, другий – з координат першого співмножника, а третій – з координат другого співмножника*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Зауваження. Оскільки діагональ ділить паралелограм на два рівні трикутники, то з геометричного змісту векторного добутку маємо

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|.$$

Приклад. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(-2;3;5), B(4;\ -1;2)$ і $C(3;7;\ -1)$.

Розв’язання:

$$\overrightarrow{AB} = (4-(-2);\ -1-3;2-5) = (6;\ -4;-3);$$

$$\overrightarrow{AC} = (3-(-2);7-3;\ -1-5) = (5;4;\ -6);$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 6 & -4 & -3 \\ 5 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 24\vec{\imath} + 24\vec{k} - 15\vec{\jmath} + 20\vec{k} + 12\vec{\imath} + 36\vec{\jmath}$$
$$= 36\vec{\imath} + 21\vec{\jmath} + 44\vec{k};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{36^2+21^2+44^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3673}\ \ (\text{од}^2).$$

1.3.3 Мішаний добуток трьох векторів. Об’єм піраміди. Умова компланарності трьох векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Позначається $\left(\vec{a}\times\vec{b}\,\right)\cdot\vec{c}$ або $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Геометричний зміст: модуль мішаного добутку $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\,\right)\cdot\vec{c}\right|$ чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$

$$V_{\text{пар-да}} = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\,\right)\cdot\vec{c}\,\right|.$$

Зауваження. Об’єм трикутної піраміди $SABC$ обчислюється за формулою

$$V_{SABC} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AS}\right|.$$

Нехай $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}; \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k};$

$$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}..$$

Тоді ***мішаний добуток трьох векторів*** *дорівнює визначнику третього порядку, у якому кожний рядок складається з координат відповідного співмножника*

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\,\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приклад . Задані координати вершин трикутної піраміди $S(4;\ -1; 2), A(5; 1; 4), B(3; 2;\ -1), C(0; 0; 3)$. Знайти її об'єм.

Розв'язання: $\overrightarrow{SA} = (5 - 4; 1 - (-1); 4 - 2) = (1; 2; 2);$

$$\overrightarrow{SB} = (3 - 4; 2 - (-1);\ -1 - 2) = (-1; 3;\ -3);$$

$$\overrightarrow{SC} = (0 - 4; 0 - (-1); 4 - 3) = (-4; 1; 1);$$

$$\left(\overrightarrow{SA} \times \overrightarrow{SB}\right) \cdot \overrightarrow{SC} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 + 24 + 24 + 3 + 2 = 54;$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{SA} \times \overrightarrow{SB}\right) \cdot \overrightarrow{SC}\right| = \frac{1}{6} \cdot |54| = 9\ (\text{од}^3).$$

Зауваження. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, то відповідний паралелепіпед вироджується і його об'єм дорівнює нулю. Звідси маємо ***умову компланарності трьох векторів***: *три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю*

$\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні, тоді $\left(\vec{a} \times \vec{b}\,\right) \cdot \vec{c} = 0$.

Приклад. Задані три точки: $A(1; 0;\ -1)$, $B(4;\ -1; 2)$, $C(0; 1;\ -3)$. Знайти значення параметра α, при якому точка

$N(2;\ \alpha;\ -1)$ лежить в площині ABC.

Розв'язання. Зазначені чотири точки лежать в одній площині, якщо три вектори $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BN}$ *і* $\overrightarrow{CN}$ компланарні, тобто

$$\left(\overrightarrow{AN} \times \overrightarrow{BN}\right) \cdot \overrightarrow{CN} = 0.$$

$$\overrightarrow{AN} = \left(2-1;\ \alpha - 0;\ -1-(-1)\right) = (1;\ \alpha; 0);$$

$$\overrightarrow{BN} = (2-4;\ \alpha - (-1);\ -1-2) = (-2;\ \alpha+1;\ -3);$$

$$\overrightarrow{CN} = \left(2-0;\ \alpha - 1;\ -1-(-3)\right) = (2;\ \alpha - 1; 2);$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ -2 & \alpha+1 & -3 \\ 2 & \alpha-1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2(\alpha+1) - 6\alpha + 3(\alpha - 1) + 4\alpha = 0;$$

$$2\alpha + 2 + 3\alpha - 3 - 2\alpha = 0; \quad \alpha = \frac{1}{3}.$$

1.4 Відстань між двома точками. Ділення відрізка у заданому відношенні. Площа трикутника

Відстань між довільними ***двома точками*** $M_1(x_1, y_1)$ *і* $M_2(x_2, y_2)$ *на площині визначається формулою*

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Нехай задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і відношення $\lambda = M_1M/MM_2$, у якому точка $M(x, y)$ ділить відрізок M_1M_2 . ***Координати точки $\boldsymbol{M(x, y)}$, яка ділить заданий відрізок у заданому співвідношенні***, обчислюються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$. Тоді ***координати середини відрізка*** визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Площу трикутника з вершинами в точках $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ та $C(x_3, y_3)$ знаходимо за формулою:

$$S = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

1.5 Основні типи рівнянь прямої на площині

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Теорема. Будь-якій прямій відповідає рівняння першого степеня.

$y = kx + b$ – ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.***

Зауваження: 1) якщо $k = 0$, пряма паралельна осі Ox і рівняння прямої виглядає так: $y = b$;

2) якщо k додатне, пряма утворює гострий кут з віссю Ox, якщо k від'ємне – тупий кут;

3) якщо пряма перпендикулярна осі Ox, кутовий коефіцієнт відсутній і рівняння прямої виглядає так: $x = a$.

Загальне рівняння прямої

Теорема. Будь-якому рівнянню першого степеня відповідає деяка пряма.

Доведення. Загальний вигляд рівняння першого степеня

$$Ax + By + C = 0.$$

Нехай $A = 0$, тоді $By + C = 0$, $y = -\frac{C}{B}$ (рівняння виду $y = b$).

Нехай $B = 0$, тоді $Ax + C = 0$, $x = -\frac{C}{A}$ (рівняння виду $x = a$).

Нехай $A \neq 0, B \neq 0$, тоді $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ (рівняння виду $y = kx + b$).

У будь-якому випадку рівняння першого ступеня описує пряму лінію. Отже,

$Ax + By + C = 0$ – ***загальне рівняння прямої.***

Рівняння прямої у відрізках

Нехай дано пряму $Ax + By + C = 0$, що не паралельна ні одній з координатних осей та не проходить через початок координат, тобто $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$.

Перетворимо це рівняння:

$$Ax + By = -C|:(-C);$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1; \quad \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1.$$

Нехай $\frac{-C}{A} = a$, $\frac{-C}{B} = b$. Тоді рівняння виглядає так:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – ***рівняння прямої у відрізках.***

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, які належать прямій. Рівняння прямої $y = kx + b$ (1); якщо точка M_1 належить прямій, то виконується рівність $y_1 = kx_1 + b$ (2).

Від рівняння (1) віднімемо рівняння (2), отримаємо

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

За умовою ця пряма проходить і через точку M_2, а тому координати точки M_2 задовольняють рівняння:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Кутовий коефіцієнт шуканої прямої виглядає так:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Таким чином шукане рівняння виглядає так:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ або } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Приклад. Дано трикутник ABC: $A(-2,-3)$, $B(4,3)$, $C(2,5)$. Знайти рівняння медіани BL.

Розв'язання. За визначенням, медіана поділяє сторону навпіл, тому знайдемо координати точки L, використовуючи формули

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$x_L = \frac{-2 + 2}{2} = 0;\ \ y_L = \frac{-3 + 5}{2} = 1.$$

$L(0,1)$ – середина відрізку AC.

За формулою рівняння прямої, що проходить через дві точки, маємо:

$$\frac{y - 3}{1 - 3} = \frac{x - 4}{0 - 4}; \qquad \frac{y - 3}{-2} = \frac{x - 4}{-4};$$

$$-4(y - 3) = -2(x - 4) |: (-4);$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}x - 2;$$

$y = \frac{1}{2}x + 1 -$ рівняння медіани BL.

Рівняння прямої, що проходить через дану точку з заданим кутовим коефіцієнтом.

Нехай дано точку $A(x_1, y_1)$ і кутовий коефіцієнт k. Знайдемо рівняння $y = kx + b$ (1), невідоме b знайдемо за умови проходження прямої через точку A:

$$b = y_1 - kx_1.$$

Підставимо b у рівняння (1) і отримаємо:

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

або

$y - y_1 = k(x - x_1)$ – ***рівняння прямої, що проходить через дану точку із заданим кутовим коефіцієнтом.***

1.6 Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай дано дві прямі l_1 і l_2: $y = k_1x + b_1, y = k_2x + b_2$. Прямі мають, відповідно, кутові коефіцієнти:

$$k_1 = tg\alpha_1 \text{ і } k_2 = tg\alpha_2.$$

$$tg\varphi = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2};$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2};$$

$\varphi = arctg\left(\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right)$ – ***кут між прямими.***

$k_1 = k_2$ – ***умова паралельності прямих.***

$k_1 = -\frac{1}{k_2}$ – ***умова перпендикулярності прямих.***

1.7 Відстань від точки до прямої

Знайдемо відстань d від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої

$l: Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Отже, щоб знайти відстань від точки до прямої необхідно підставити координати цієї точки в загальне рівняння прямої і модуль цього виразу поділити на корінь квадратний з суми квадратів коефіцієнтів, які знаходяться біля змінних x, y.

1.8 Типові задачі на пряму лінію

Приклад. Для трикутника з вершинами $A(-2,-4)$, $B(-6{,}3)$, $C(5{,}1)$ розв'язати такі задачі:

а) обчислити площу трикутника.

Розв'язання. Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

Тому маємо:

$$S = \frac{1}{2}|(-2-5)(3-1) - (-6-5)(-4-1)| = \frac{1}{2}|-14-55|.$$

$$S = 34{,}5 \text{ (од. кв.).}$$

б) записати рівняння сторін трикутника.

Розв'язання. Рівняння сторони AB: $A(-2,-4)$, $B(-6{,}3)$. За формулою рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-(-2)}{-6-(-2)} = \frac{y-(-4)}{3-(-4)}$$

Після тотожних перетворень отримаємо:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}.$$

Рівняння сторін *BC* і *AC* знаходимо аналогічно:

BC: $B(-6{,}3)$, $C(5{,}1)$

$$\frac{x-(-6)}{5-(-6)} = \frac{y-3}{1-3}.$$

Звідси: $y = -\frac{2}{11}x + \frac{21}{11}$.

AC: $A(-2,-4)$, $C(5{,}1)$

$$\frac{x-(-2)}{5-(-2)} = \frac{y-(-4)}{1-(-4)}.$$

Звідси $y = \frac{5}{7}x - \frac{18}{7}$.

в) знайти внутрішній кут α трикутника.

Розв'язання. Для виконання цього завдання застосуємо формулу

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Кут α утворено внаслідок перетину прямих AB і AC. Отже, з урахуванням додатного обходу проти годинникової стрілки маємо:

$$k_1 = k_{AC} = \frac{5}{7}, \qquad k_2 = k_{AB} = -\frac{7}{4};$$

$$tg\alpha = \frac{-\frac{7}{4}-\frac{5}{7}}{1-\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{4}} = \frac{-\frac{69}{28}}{-\frac{7}{28}} = \frac{69}{7}; \alpha = arctg\frac{69}{7};$$

в) знайти рівняння медіани BK.

Розв'язання. Медіана – це відрізок, який сполучає вершину трикутника з серединою його протилежної сторони. Координати точки K знайдемо за формулами:

$$x_K = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}, \qquad y_K = \frac{-4+1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Рівняння BK запишемо за формулою, знаючи, що $B(-6{,}3), K\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Отже $\dfrac{x+6}{\frac{3}{2}+6} = \dfrac{y-3}{-\frac{3}{2}-3}$.

Після тотожних перетворень отримаємо рівняння медіани *BK:*

$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5};$$

г) знайти рівняння висоти AN.

Розв'язання. Висота $AN -$ це перпендикуляр проведений з вершини A до сторони трикутника BC. Отже, для прямих BC і AN виконується умова перпендикулярності:

$$k_{AN} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\left(-\frac{2}{11}\right)} = \frac{11}{2}.$$

Рівняння висоти *AN* знаходимо за формулою:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \text{ де } k = k_{AN}, A(x_0, y_0).$$

Тобто: $k = \frac{11}{2}, \qquad A(-2, -4)$.

Маємо $\quad y+4=\dfrac{11}{2}(x+2);\ \ y=\dfrac{11}{2}x+11-4\,.$

Рівняння висоти AN: $y=\frac{11}{2}x+7.$

д) обчислити довжину висоти CM.

Розв'язання. Довжину висоти CM знайдемо як відстань від точки $C(x_0,y_0)$ до прямої AB за формулою:

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Для цього перепишемо рівняння прямої AB в загальному вигляді:

$$y=-\frac{7}{4}x-\frac{15}{2}\ ;\quad 4y=-7x-30;\quad 7x+4y+30=0;$$

$$A=7,B=4,C=30.$$

Точка $C(x_0,y_0)$ має координати $x_0=5,y_0$=1.

Отже: $\quad d=\left|\dfrac{7\cdot5+4\cdot1+30}{\sqrt{7^2+4^2}}\right|=\dfrac{69}{\sqrt{65}}.$

ж) записати рівняння прямої, яка проходить через вершину трикутника B паралельно до його сторони AC.

Розв'язання. Позначимо рівняння шуканої прямої як BF. За умовою пряма BF паралельна до прямої AC, а тому,

$$k_{BF}=k_{AC}=\frac{5}{7}.$$

Для прямої BF відомі кутовий коефіцієнт та точка яка належить прямій, а отже, використаємо рівняння:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Маємо:

$$y-3=\frac{5}{7}(x+6)\,;\quad y=\frac{5}{7}x+\frac{30}{7}+3.$$

$$BF:\ y = \frac{5}{7}x + \frac{51}{7}.$$

ЛЕКЦІЯ 2
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ
2.1 Основні типи рівнянь площини у просторі
2.1.1 Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай на площині α задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і відомий ***вектор нормалі*** $\vec{n} = (A; B; C)$.

Оберемо довільну точку $M(x; y; z)$ на цій площині та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Точка $M(x; y; z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до нормалі $\vec{n}$. Використавши умову перпендикулярності векторів, маємо

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0,$$

або в координатній формі

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \text{ –}$$

рівняння площини, що проходить через задану точку $\boldsymbol{M_0}$ ***перпендикулярно до заданого вектора*** $\boldsymbol{\vec{n}}$.

2.1.2 Загальне рівняння площини

Розкриємо дужки в рівнянні

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

і отримаємо $Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$. Згрупуємо сталі величини та позначимо $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Одержимо

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ –}$$

загальне рівняння площини, що є лінійним відносно координат x, y, z, до того ж хоча б один з коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Теорема. *Будь-яка площина визначається лінійним рівнянням відносно координат x, y, z. Кожному лінійному рівнянню зі змінними x, y, z відповідає деяка площина.*

2.1.3 Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай на площині α задано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ які не лежать на одній прямій

Оберемо довільну точку $M(x, y, z)$ на цій площині та побудуємо три вектори:

$$\overrightarrow{M_1M}(x - x_1; y - y_1; z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1),$$

що виходять з однієї точки M_1. Точка $M(x, y, z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні. Використавши умову компланарності трьох векторів, отримаємо:

$$\left(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}\right) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0,$$

або в координатній формі –

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ –}$$

рівняння площини, що проходить через три задані точки.

2.1.4 Рівняння площини у відрізках

Нехай площина α перетинає всі три координатні вісі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$ і $M_3(0;0;c)$.

Використавши рівняння площини, що проходить через три точки, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$bcx - abc + abz + acy = 0;$$

$$bcx + abz + acy = abc | \div abc;$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 - \text{рівняння площини у відрізках.}$$

2.2 Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай дві площини α_1 і α_2 задано загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Кут φ між площинами α_1 і α_2 дорівнює куту між їх векторами нормалей: $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$.

Отже,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}}.$$

Використавши умови перпендикулярності та паралельності векторів, отримаємо відповідні умови для площин.

Умова перпендикулярності двох площин

$$\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}.$$

Умова паралельності двох площин

$$\boldsymbol{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}.$$

Дві площини збігаються, якщо

$$\boldsymbol{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_1}}.$$

Приклад. Знайти кут між заданими площинами

$$5x - 4y + 2z - 8 = 0 \text{ і } 3x + 7y - z + 1 = 0.$$

Розв'язання. $\overrightarrow{n_1} = (5;\ -4; 2)$ і $\overrightarrow{n_2} = (3; 7;\ -1)$, тому маємо:

$$\cos\varphi = \frac{5 \cdot 3 + (-4) \cdot 7 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 7^2 + (-1)^2}} = \frac{15 - 28 - 2}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{59}}$$

$$\cos\varphi = \frac{-15}{\sqrt{2\,655}};\ \varphi = \pi - arccos\frac{15}{\sqrt{2\,655}}.$$

2.3 Відстань від точки до площини

Нехай у просторі задані площина α загальним рівнянням

$Ax + By + Cz + D = 0$ і деяка точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Оберемо на цій площині довільну точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$: $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$.

Відстань d від точки M_0 до площини α дорівнює модулю проєкції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормалі $\vec{n} = (A; B; C)$

$$d = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Оскільки $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$, то ***відстань від точки до прямої*** обчислюємо за формулою:

$$\boldsymbol{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}.$$

Приклад. Знайти відстань d від точки $M_0(4; -3; 5)$ до площини α: $3x + 6y - 2z - 2 = 0$.

Розв'язання. $A = 3,\ B = 6,\ C = -2,\ D = -2, x_0 = 4,$

$y_0 = -3, z_0 = 5.$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) + (-2) \cdot 5 - 2|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}};$$

$$d = \frac{|-18|}{\sqrt{50}} = \frac{18}{5\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{5}\ (\text{од.}).$$

2.4 Рівняння прямих у просторі

2.4.1Рівняння прямої, що проходить через задану точку, паралельно до заданого вектора (канонічні рівняння прямої)

Нехай на прямій l задана деяка точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і відомий ***напрямний вектор*** $\vec{S} = (m; n; p)$ цієї прямої – довільний ненульовий вектор, паралельний до неї.

Оберемо довільну точку $M(x; y; z)$ на цій прямій та побудуємо вектор:

$$\overrightarrow{M_0M} = \left(x - x_0; y - y_0; z - z_0\right).$$

Точка M належить прямій тоді й тільки тоді, коли вектор

$\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний до вектора $\vec{S}$. Використавши умову паралельності векторів, отримаємо:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$ – ***канонічні рівняння прямої***.

2.4.2 Параметричні рівняння прямої

Якщо у канонічні рівняння прямої ввести коефіцієнт пропорційності t:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t$$

і розв'язати їх відносно x, y та z, то отримаємо:

$$\frac{x-x_0}{m} = t, \qquad \frac{y-y_0}{n} = t, \qquad \frac{z-z_0}{p} = t.$$

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases} –$$

параметричні рівняння прямої, де змінна t слугує параметром.

Приклад. Пряма задана канонічним рівнянням

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+1}{5}.$$

Записати параметричне рівняння цієї прямої.

Розв'язання.

$$\frac{x-1}{4} = t, \quad \frac{y+2}{-3} = t, \qquad \frac{z+1}{5} = t.$$

$$\begin{cases} x - 1 = 4t \\ y + 2 = -3t; \\ z + 1 = 5t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = -3t - 2\,. \\ z = 5t - 1 \end{cases}$$

2.4.3 Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай на прямій l задано дві точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. За напрямний вектор можна обрати

$$\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тоді (за канонічними рівняннями) маємо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{ –}$$

рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-4; 2; -5)$ і $M_2(2; -6; 1)$.

Розв'язання.

$$\frac{x - (-4)}{2 - (-4)} = \frac{y - 2}{-6 - 2} = \frac{z - (-5)}{1 - (-5)}; \quad \frac{x + 4}{6} = \frac{y - 2}{-8} = \frac{z + 5}{6};$$

$$\frac{x + 4}{3} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z + 5}{3}.$$

2.4.4 Пряма, як перетин двох площин

Просторова лінія може задаватися, як перетин двох поверхонь. Зокрема, пряма l слугує лінією перетину деяких двох площин α_1 і α_2. Якщо ці площини задані загальними рівняннями

$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $\alpha_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

називається ***загальним рівнянням прямої***.

Приклад. Пряма l задана загальним рівнянням

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Знайти її канонічне рівняння.

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор прямої за допомогою векторного добутку векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$.

$$\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x = 0$, тоді

$$\begin{cases} -3y + 2z = 5 \\ y - z = -1 \end{cases}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad y = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3; \quad z = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -2.$$

$$M_0(0;\ -3;\ -2)$$

Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x}{1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+2}{7}.$$

2.5 Кут між двома прямими

Нехай дві прямі задано канонічними рівняннями
$l_1: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ і $l_2: \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$.

Кут φ між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їхніми напрямними векторами $\overrightarrow{S_1} = (m_1; n_1; p_1)$ і $\overrightarrow{S_2} = (m_2; n_2; p_2)$. Отже,

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{{m_1}^2 + {n_1}^2 + {p_1}^2}\sqrt{{m_2}^2 + {n_2}^2 + {p_2}^2}}.$$

Використавши умови перпендикулярності та паралельності векторів, отримаємо відповідні умови для прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Умова паралельності двох прямих

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

2.6 Умова перетину двох непаралельних прямих. Відстань між мимобіжними прямими

Дві прямі у просторі можуть перетинатися або бути паралельними чи мимобіжними.

Нехай задано дві непаралельні прямі

$$l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ і } l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Прямі l_1 і l_2 перетинаються, якщо вектори $\overrightarrow{S_1} = (m_1; n_1; p_1)$, $\overrightarrow{S_2} = (m_2; n_2; p_2)$ і $\overrightarrow{M_1 M_2} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right)$ – компланарні (лежать в одній площині). Використавши умову компланарності трьох векторів $\left(\overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{S_1}\right) \cdot \overrightarrow{S_2} = 0$, одержимо ***умову перетину двох непаралельних прямих***:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Зауваження. Для довільних прямих l_1 і l_2 ця рівність слугує умовою їхньої належності одній площині. Якщо ця умова не виконується, то прямі l_1 і l_2 мимобіжні.

Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими l_1 і l_2, розглянемо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2}$, перпендикулярний до обох прямих. Тоді відстань d між прямими l_1 і l_2 дорівнює модулю проєкції вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right)$ на вектор $\vec{a}$:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}\right|}{|\vec{a}|}.$$

Зауваження. Ця формула справедлива також для прямих l_1 і l_2, що перетинаються. Зрозуміло, що при цьому $d = 0$.

Приклад. Знайти відстань d між заданими прямими:

$$l_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{2} \text{ і } l_2: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-3}.$$

Розв'язання.

$$\vec{a} = \overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Оскільки $\vec{a} \neq \vec{0}$, то прямі l_1 і l_2 – непаралельні. Далі знаходимо: $\overrightarrow{M_1M_2} = (-2-1; 0+2;\ 2-5) = (-3; 2;\ -3)$;

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + 5^2} = \sqrt{110};$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}\right| = |-3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5| = |-19|\,;$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}\right|}{|\vec{a}|} = \frac{19}{\sqrt{110}} \text{ (од.)}.$$

2.7 Кут між прямою та площиною

Нехай задано пряму l канонічними рівняннями і площину α загальним рівнянням:

$$l:\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ ;\quad \alpha: Ax+By+Cz+D=0.$$

Кут φ між ними доповнює кут між напрямним вектором прямої $\vec{S}=(m,n,p)$ і вектором нормалі площини $\vec{n}=(A,B,C)$ до 90° .

Тоді

$$\cos\left(90^{\circ}-\varphi\right)=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\ .$$

Застосовуючи тригонометричну формулу зведення і враховуючи, що кут φ між прямою і площиною – гострий, маємо

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\,.$$

Використавши умови перпендикулярності та паралельності векторів, отримаємо відповідні умови для взаємного розміщення прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої та площини:

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}\,.$$

Умова паралельності прямої та площини:

$$Am+By+Cp=0\,.$$

2.8 Перетин прямої з площиною

Нехай задано пряму l параметричними рівняннями і площину α загальним рівнянням:

$$l:\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}; \quad \alpha: Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

Для знаходження точки перетину прямої та площини необхідно скласти і розв'язати систему їхніх рівнянь. Цю систему зручно розв'язувати методом вилучення невідомих (методом Гауса), підставляючи вирази для x, y, z із параметричних рівнянь прямої у рівняння площини. Отримаємо рівняння для t:

$$(Am + Bn + Cp)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D).$$

Якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, тобто пряма не паралельна до площини, то пряма і площина перетинаються в одній точці, що відповідає значенню параметра

$$t = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{Am + Bn + Cp}\,.$$

Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна до площини, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тобто точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямої l не лежить на площині α, то рівняння для t розв'язків немає. Пряма паралельна до площини і не лежить на ній.

Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тобто точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямої l лежить на площині α, то рівняння для t виконується при всіх значеннях параметра. Пряма лежить на площині.

Приклад. Знайти проєкцію N точки $M_0(2; -5; 4)$ на площину α: $3x + 2y - z - 6 = 0$.

Розв'язання. Точка N слугує основою перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину α (рис. 1). Напрямний вектор $\vec{S}$ прямої M_0N колінеарний вектору нормалі $\vec{n}$ площини. Можна вважати, що

$$\vec{S} = \vec{n} = (3; 2; \ -1).$$

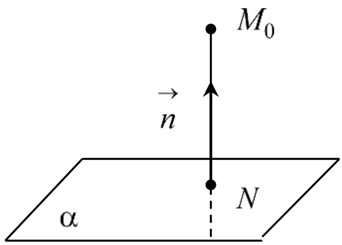

Рисунок 1

Тоді параметричне рівняння прямої M_0N: $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 5 \\ z = -t + 4 \end{cases}.$

Підставивши ці вирази у рівняння площини, одержимо значення параметра t, що відповідає точці перетину N прямої та площини:

$$3(3t + 2) + 2(2t - 5) - (-t + 4) - 6 = 0; \quad t = -1.$$

Звідси $x = -1; \ y = -7; \ z = 5.$

Отже, проєкцією слугує точка $N(-1; \ -7; 5).$

2.9 Відстань від точки до прямої

Нехай потрібно знайти відстань d від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої l, яка задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}.$$

Розглянемо два способи визначення цієї відстані.

1. Оберемо на прямій відому точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та побудуємо паралелограм на векторах $\vec{S} = (m, n, p)$ і $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$ (рис. 2). Площа S цього паралелограма – $S = |\vec{S}|d$ або $S = \left|\vec{S} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|$. Звідси

$$d = \frac{\left|\vec{S} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{S}|}.$$

2. Проведемо через точку M_1 площину α, перпендикулярну до прямої l (рис. 3). Вектор нормалі $\vec{n} = (A, B, C)$ площини α колінеарний до напрямного вектора $\vec{S}$ прямої l. Можна припустити, що $\vec{n} = \vec{S} = (m, n, p)$.

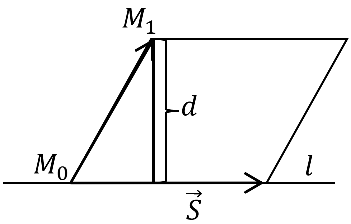

Рисунок 2

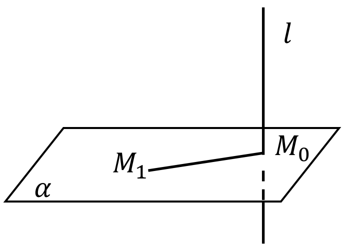

Рисунок 3

Тоді

$$\alpha: m(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0) + p(z_1 - z_0) = 0.$$

Далі знайдемо точку M_0 перетину прямої та площини. Ця точка слугує основою перпендикуляра, проведеного з точки M_1 до прямої l. Отже, $d = M_0M_1$.

ЛЕКЦІЯ 3

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1 Поняття похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$ і $x \epsilon (a; b)$. Надамо аргументу приріст Δx так, щоб нова точка $x + \Delta x \epsilon (a; b)$. Оскільки точка x фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x\ ) - f(x)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, яке також буде функцєю від Δx.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називається швидкість змінювання функції y в цій точці відносно змінювання аргументу x. *Похідна дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x\ ) - f(x)}{\Delta x}.$$

Еквівалентні позначення похідної $y',\ y'_x,\ \frac{dy}{dx},\ f'(x)$.

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням функції.*** Функція, що має похідну в точці x, називається *диференційованою* у цій точці.

Теорема. *Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в деякій точці x, то вона неперервна в цій точці.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0.$$

Зауваження. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в деякій точці x, то вона може бути як диференційованою, так і недиференційованою в цій точці.

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^2$.

Розв'язання. Для будь-якого x маємо $y = x^2$. Якщо аргумент дорівнює $x + \Delta x$, то $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. Звідси

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

3.2 Фізичний та геометричний зміст похідної

Фізичний зміст похідної. Нехай матеріальна точка рухається під дією деяких сил. Оберемо який-небудь момент часу t_0 і розглянемо проміжок часу Δt від моменту t_0 до моменту $t = t_0 + \Delta t$. За цей проміжок часу точка пройде певний шлях, який позначимо $\Delta S(t_0)$. Цей шлях є функцією від Δt. За відомим із фізики означенням, відношення $\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$ є середньою швидкістю руху точки за час Δt. Розглядатимемо дедалі коротші проміжки Δt , що прямують до нуля. Границя

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0) = V(t_0)$$

є миттєвою швидкістю точки у момент часу t_0.

Геометричний зміст похідної. Нехай дано деяку лінію *L* і на ній точку *M* (рис. 4). Оберемо на лінії *L* деяку точку *N,* яка не збігається з точкою *M*. Пряма *MN* є січною для лінії *L*. Нехай тепер точка *N* наближається до точки *M,* залишаючись на лінії *L*. Тоді кожному положенню точки *N* відповідатиме своя січна й усі ці січні проходитимуть через точку *M.*

Дотичною до лінії *L* у точці *M* називається граничне положення *MK* січної *MN*, якщо точка *N* прямує до точки *M.* Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, графіком якої є лінія *L*, диференційована у точці x_0. У декартовій прямокутній системі координат точка *M,* яка лежить на графіку функції $y = f(x)$ має координати $\left(x_0; f(x_0)\right)$. Нехай точка *N* належить графіку функції (рис. 4) і має координати $\left(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)\right)$. Проведемо через точку *M* пряму, паралельну до Ox, і позначимо точку її перетину з прямою $x = x_0 + \Delta x$ через *P*. Розглянемо прямокутний трикутник *MNP*.

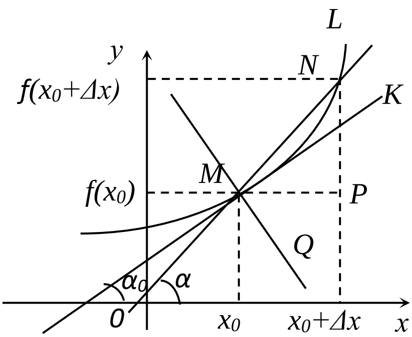

Рисунок 4

Відношення

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = tg\alpha$$

дорівнює тангенсу кута нахилу січної *MN* до додатного напряму осі Ox.

Якщо приріст $\Delta x \to 0$, то геометрично це означає, що точка $N(x_0 + \Delta x; y + \Delta y)$ рухатиметься по лінії *L,* наближаючись до точки *M,* а кут α прямуватиме до кута α_0 – кута нахилу дотичної до додатного напряму осі Ox. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha.$$

Оскільки границя лівої частини рівності дорівнює $\boldsymbol{f'(x_0)}$, а границя правої частини дорівнює $\boldsymbol{tg\alpha_0}$, тому $\boldsymbol{tg\alpha_0 = f'(x_0)}$. Тобто *значення похідної функції* $\boldsymbol{f'(x)}$ *у точці* $\boldsymbol{x_0}$ *дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної.*

Тоді ***рівняння дотичної*** до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить через точку *M* $(x_0; y_0)$, можна записати у вигляді

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Пряма *MQ*, яка проходить через точку дотику $M(x_0; y_0)$ і перпендикулярна до дотичної *MK*, називається ***нормальною прямою*** **(*нормаллю*)**. Її рівняння

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

3.3 Основні правила диференціювання

Нехай маємо деякі функції $u = u(x)$, $v = v(x)$, які диференційовані у проміжку $(a; b)$.

Теорема 1. *Похідна алгебраїчної суми (різниці) кінцевого числа функцій дорівнює сумі (різниці) їх похідних*:

$$(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \pm \boldsymbol{v}'.$$

Теорема 2. *Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію:*

$$y = uv, \text{ то } y' = (uv)' = u'v + uv'.$$
$$(\boldsymbol{uv})' = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} + \boldsymbol{uv}'.$$

Теорема 3. *Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, у якому знаменник є квадратом знаменника, а чисельник є різницею між добутками похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник*:

$$\left(\boldsymbol{\frac{u}{v}}\right)' = \boldsymbol{\frac{u'v - uv'}{v^2}}.$$

Дії з константами. *Сталий множник можна виносити з-під знака похідної*:

$$y = cu, \quad \text{то} \quad y' = (cu)' = cu';$$

$$y = \frac{u}{c}, \quad \text{то} \quad y' = \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c};$$

$$y = \frac{c}{u}, \quad \text{то} \quad y' = \left(\frac{c}{u}\right)' = \frac{-c}{u^2}u'.$$

3.4 Похідна складної функції

Теорема. *Похідна складної функції дорівнює похідній цієї функції за проміжним аргументом, помноженої на похідну цього аргументу за незалежною змінною.*

Доведення. Нехай $y = f(u),\ u = \varphi(x)$. Доведемо, що

$$y' = f'(u) \cdot u' = f'(u) \cdot \varphi'(x) = f'_u \cdot \varphi'_x.$$

Надамо аргументу x приріст Δx; унаслідок цього маємо приріст проміжного аргументу Δu, яке зумовить зміну функції y на Δy. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Обчислимо границю

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'_u$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'_x$, то

$$y' = f'_u \cdot \varphi'_x.$$

3.5 Похідна оберненої функції

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій. Відомо, що похідна $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ і не дорівнює нулю. Оскільки $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$, то з тотожності
$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ отримаємо:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)},$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Похідні від взаємно обернених функцій обернені за величиною:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

3.6 Основні формули диференціювання

Запишемо таблицю похідних для складних функцій:

1. $x' = 1$;
2. $c' = 0$;
3. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$;
4. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
5. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u'$;
6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
7. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;
8. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
9. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;
10. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
11. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
12. $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

13. $(ctg\,u)' = \frac{-1}{sin^2 u} \cdot u'$;

14. $(arcsin\,u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

15. $(arccos\,u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

16. $(arctg\,u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

17. $(arcctg\,u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$.

Приклад. Знайти похідні функцій.

а) $y = x^5 \cdot cos3x$;

$$y' = (x^5)' \cdot cos3x + x^5 \cdot (cos3x)' = 5x^4 cos3x + x^5(-sin3x)3 =$$

$$= 5x^4 cos3x - 3x^5 sin3x.$$

б) $y = \frac{arctg^4(2x+5)}{3^{sinx}}$;

$$y' = \frac{\left(arctg^4(2x+5)\right)' \cdot 3^{sinx} - arctg^4(2x+5) \cdot \left(3^{sinx}\right)'}{(3^{sinx})^2} =$$

$$= \frac{4arctg^3(2x+5)\left(arctg(2x+5)\right)' 3^{sinx} - arctg^4(2x+5)3^{sinx} ln3 (sinx)'}{3^{2sinx}}$$

$$\frac{3^{sinx} arctg^3(2x+5)\left(\frac{4}{1+(2x+5)^2}(2x+5)' - arctg(2x+5) ln3\, cosx\right)}{3^{2sinx}}$$

$$= \frac{arctg^3(2x+5)\left(\frac{8}{1+(2x+5)^2} - arctg(2x+5) ln3\, cosx\right)}{3^{sinx}} =$$

$$= \frac{arctg^3(2x+5)\left(8 - arctg(2x+5)\, ln3\, cosx(1+(2x+5)^2)\right)}{(1+(2x+5)^2)3^{sinx}}.$$

в) $y = lnctg\left(1 - \sqrt{2+e^x}\right)$;

$$y' = \left(ln\left(ctg\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{ctg\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)} \left(ctg\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{ctg\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)} \cdot \frac{(-1)}{sin^2\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)} \cdot \left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{ctg\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)} \cdot \frac{(-1)}{sin^2\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)} \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{2 + e^x}} (2 + e^x)' =$$

$$= \frac{1}{ctg\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)} \cdot \frac{1}{sin^2\left(1 - \sqrt{2 + e^x}\right)} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{2 + e^x}}.$$

3.7 Диференціювання функції, заданої параметрично

Нехай задано функцію

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases};$$

де t – параметр, а $x(t)$ і $y(t)$ неперервні і диференційовані функції аргументу t у деякому інтервалі $t\epsilon(a, b)$.

Нехай в деякій точці $t_0\epsilon(a, b)$ існує похідна, яка не дорівнює нулю $x'(t) = x'_t(t_0) \neq 0$. Нехай ця похідна в точці додатна. Тоді вона буде додатна і в деякому окіллі точки t_0. З цього випливає, що функція $x(t)$ монотонно зростаюча, а тому має обернену $t = t(x)$. Похідна оберненої функції дорівнює

$$x'_t = \frac{1}{t'_x}.$$

Підставимо $t = t(x)$ у вираз для $y(t)$, отримаємо:

$$y = y\big(t(x)\big) = y(x).$$

Знаходимо її похідну, як похідну складної функції:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x.$$

Остаточно маємо:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Знайти похідну функції: $\begin{cases} x = ln(1+t^2) \\ y = t - arctg\, t \end{cases}$.

Розв'язання. Обчислимо похідні x'_t, y'_t:

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t; \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Підставимо отримані похідні у формулу і спростимо результат:

$$y'_x = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}.$$

3.8 Логарифмічне диференціювання

Розглянемо функцію $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$. Така функція називається ***степенево-показниковою функцією.*** Диференціювати її за формулами за таблицею похідних не можна, тому застосуємо такий алгоритм:

1. Логарифмуємо цю функцію за основою *e*:

$$ln\, y = ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)};$$

2. Виконаємо перетворення використовуючи властивості логарифмів:

$$ln\, y = \varphi(x) \cdot ln\left(f(x)\right);$$

3. Диференціюємо обидві частини отриманого рівняння:

$$(ln\, y)' = \left(\varphi(x) \cdot ln\left(f(x)\right)\right)',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \big(\varphi(x)\big)'\cdot ln\big(f(x)\big) + \varphi(x)\cdot\Big(ln\big(f(x)\big)\Big)',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \big(\varphi(x)\big)'\cdot ln\big(f(x)\big) + \varphi(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot\big(f(x)\big)';$$

4. Виразимо шукану похідну:

$$y' = \left(\big(\varphi(x)\big)'\cdot ln\big(f(x)\big) + \varphi(x)\cdot\frac{\big(f(x)\big)'}{f(x)}\right)\big(f(x)\big)^{\varphi(x)}.$$

Приклад. Знайти y', якщо $y = (arctg\sqrt{x})^{ln\,(2x+1)}$.

Розв'язання. $lny = ln(arctg\sqrt{x})^{ln\,(2x+1)}$,

$$lny = ln\,(2x+1)\cdot ln(arctg\sqrt{x}),$$

$$\frac{y'}{y} = (\ln(2x+1))'\cdot\ln\big(arctg\sqrt{x}\big) +$$

$$+ln\,(2x+1)\cdot\Big(ln\big(arctg\sqrt{x}\big)\Big)'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(2x+1)'}{2x+1}\cdot ln\,(arctg\sqrt{x}) + ln(2x+1)\cdot\frac{\big(arctg\sqrt{x}\big)'}{arctg\sqrt{x}},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{2x+1}\cdot ln\,(arctg\sqrt{x}) + ln(2x+1)\cdot\frac{\big(\sqrt{x}\big)'}{(1+x)\cdot arctg\sqrt{x}},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2ln\,(arctg\sqrt{x})}{2x+1} + \frac{ln\,(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x)\cdot arctg\sqrt{x}},$$

$$y' = y\cdot\left(\frac{2ln\,(arctg\sqrt{x})}{2x+1} + \frac{ln\,(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x)\cdot arctg\sqrt{x}}\right),$$

$$y' = (arctg\sqrt{x})^{ln\,(2x+1)}\left(\frac{2ln\,(arctg\sqrt{x})}{2x+1} + \frac{ln\,(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x)arctg\sqrt{x}}\right).$$

Логарифмічне диференціювання використовують не лише для степенево-показникової функції, а й під час знаходження похідної від добутку (частки) більш ніж двох функцій. Послідовність дій не змінюється. Розглянемо на прикладі.

Приклад. Знайти y', якщо $y = \frac{tg^2x \cdot \sqrt[3]{x^2-7}}{(3x+8)^5}$.

Розв'язання. $ln\, y = ln \frac{tg^2x \cdot \sqrt[3]{x^2-7}}{(3x+8)^5}$.

Використаємо такі властивості логарифмів:

$$ln(a \cdot b) = ln\, a + ln\, b; \;\; ln\frac{a}{b} = ln\, a - ln\, b; \;\; ln\, a^c = c \cdot ln\, a.$$

Виконаємо перетворення:

$$ln\, y = ln\, tg^2x + ln \sqrt[3]{x^2-7} - ln(3x+8)^5;$$

$$ln\, y = 2\, ln(tgx) + \frac{1}{3} ln(x^2-7) - 5\, ln(3x+8).$$

Продиференціюємо отриманий вираз:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{tgx} \cdot (tgx)' + \frac{1}{3(x^2-7)} \cdot (x^2-7)' - \frac{5}{3x+8} \cdot (3x+8)';$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{tgx} \cdot \frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{3(x^2-7)} \cdot 2x - \frac{5}{3x+8} \cdot 3;$$

$$y' = \left(\frac{2}{sinx \cdot cosx} + \frac{2x}{3(x^2-7)} - \frac{15}{3x+8}\right) \cdot \frac{tg^2x \cdot \sqrt[3]{x^2-7}}{(3x+8)^5}.$$

3.9 Похідні неявних функцій

Диференціювання функції, заданої деяким рівнянням $F(x, y) = 0$, де незалежна змінна x пов'язана з функцією y, що не розв'язується відносно y, зводиться до такого:

1) диференціюємо ліву і праву частини рівняння, що задає функцію, вважаючи y функцією від x, тобто застосовуючи правило диференціювання складної функції;

2) розв'язуємо отримане рівняння відносно шуканої похідної y'.

Зауваження. Похідна неявної функції $F(x, y) = 0$, в загальному випадку, виражається не тільки через значення аргументу x, а й через значення функції y при даному значенні x.

Приклад. Знайти похідну функції

$$sin(3x - 6y) + 5x^2y = 2y^3.$$

Розв'язання. $(sin(3x - 6y) + 5x^2y)' = (2y^3)'$,

$$cos(3x - 6y)(3x - 6y)' + 5((x^2)'y + x^2(y)') = 6y^2y',$$

$$cos(3x - 6y)(3 - 6y') + 10xy + 5x^2y' = 6y^2y',$$

$$3cos(3x - 6y) - 6y'cos(3x - 6y) + 10xy + 5x^2y' = 6y^2y',$$

$$y' \cdot (-6cos(3x - 6y) + 5x^2 - 6y^2) = -3cos(3x - 6y) - 10xy,$$

$$y' = \frac{-3cos(3x - 6y) - 10xy}{-6cos(3x - 6y) + 5x^2 - 6y^2},$$

$$y' = \frac{3cos(3x - 6y) + 10xy}{6cos(3x - 6y) - 5x^2 + 6y^2}.$$

3.10 Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і диференційована при певних значеннях незалежного аргументу:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

З цього випливає, що відношення приросту функції до приросту аргументу можна подати у вигляді

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$ де ε − нескінченно мала при $\Delta x \to 0$.

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x.$$

Нескінченно малий приріст функції Δy дорівнює сумі величини, яка пропорційна нескінченно малому приросту незалежної змінної Δx, та нескінченно малої величини більш високого порядку малості порівнянно з Δx.

Визначення. Головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту незалежної змінної, називається ***диференціалом функції:***

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Приріст Δx незалежної змінної називається її ***диференціалом*** dx*:*

$$\Delta x = dx.$$

Диференціал функції дорівнює добутку похідної функції на диференціал незалежної змінної:

$$dy = f'(x)dx.$$

Властивості диференціала

За визначенням диференціала знайдемо диференціали деяких функцій:

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx; \qquad d(cosx) = -sinx\, dx;$$

$$d(lnx) = \frac{dx}{x}; \qquad d(arctg\, x) = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Правила обчислення диференціалів:

1. Диференціал алгебраїчної суми двох функцій:
$$d(U \pm V) = dU \pm dV.$$
2. Диференціал добутку двох функцій:
$$d(U \cdot V) = V \cdot dU + U \cdot dV.$$
3. Диференціал частки двох функцій:
$$d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \cdot dU - U \cdot dV}{V^2}.$$

Диференціал складної функції. Інваріантність диференціала.

Нехай дано $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – неперервні і диференційовані функції своїх аргументів.

Похідну складної функції знаходять за формулою

$$y' = f'_u \cdot \varphi'_x\,.$$

Помножимо обидві частини рівності на dx, отримаємо

$$dy = f'_u \cdot u'_x dx.$$

За означенням диференціала $u'_x dx = du,$ тому

$$dy = f'_u \cdot du.$$

Ця властивість називається ***інваріантністю форми диференціала від аргументу функції.***

Приклад. Знайти диференціал функції

$$y = 2^{tgx} + ln^3x \cdot arcsin3x.$$

Розв'язання. $dy = d(2^{tgx} + ln^3x \cdot arcsin3x) =$

$$= d(2^{tgx}) + arcsin3xd(ln^3x) + ln^3xd(arcsin3x) =$$

$$= \frac{2^{tgx}d(tgx)}{ln2} + arcsin3x \cdot 3ln^2xd(lnx) + ln^3x\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} =$$

$$= \frac{2^{tgx}}{ln2 \cdot cos^2x}dx + 3arcsin3x \cdot \frac{ln^2x}{x}dx + \frac{3ln^3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx;$$

$$dy = \left(\frac{2^{tgx}}{ln2 \cdot cos^2x} + 3arcsin3x \cdot \frac{ln^2x}{x} + \frac{3ln^3x}{\sqrt{1-9x^2}}\right)dx.$$

ЛЕКЦІЯ 4

ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕННОСТЕЙ. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

4.1 Теорема Лопіталя

Теорема Лопіталя. *Нехай функція $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x \to x_0$ одночасно прямують до нуля або до нескінченності. Якщо відношення їх похідних має границю, то відношення самих функцій також має границю, яка дорівнює границі відношення похідних, тобто*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доводити цю теорему загалом не будемо, обмежимося лише розглядом найпростіших випадків.

Доведемо насамперед, що, якщо $x \to x_0$, функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ прямують до нуля і їхні похідні в точці x_0 існують, якщо $\varphi'(x_0) \neq 0$.

За умовою теореми $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Розглянемо відношення

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}}.$$

Перейдемо до границі при $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Зауваження 1. Теорема справджується і в тому разі, коли функції $f(x)$ $і$ $\varphi(x)$ не визначені при $x = x_0$, але

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \ і \ \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0.$$

Зауваження 2. Якщо $f'(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$ і $f'(x)$ та $\varphi'(x)$ відповідають тим самим умовам, що й $f(x)$ і $\varphi(x)$, то, застосовуючи правило Лопіталя що до відношення $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ отримаємо формулу

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ і тощо.}$$

Зауваження 3. Якщо $\varphi'(x_0) = 0,$ а $f'(x_0) \neq 0,$ то теорема справджується що до оберненого відношення

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \to 0, \qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)} \to \infty.$$

4.2 Розкриття невизначеностей за допомогою правила Лопіталя

1. Функція представлена відношенням двох функцій, які одночасно прямують до нуля або до нескінченності (невизначеності типу $\left|\frac{0}{0}\right|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$).

Приклад. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln\,(5+3x)}{2x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(ln\,(5+3x))'}{(2x)'} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{3}{5+3x}}{2} = \dfrac{3}{10}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{7x-3}}{x^2} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(e^{7x-3})'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7e^{7x-3}}{2x} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right| =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(7e^{7x-3})'}{(2x)'} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{49e^{7x-3}}{2} = \dfrac{\infty}{2} = \infty.$

2. Функція представлена різницею двох функцій, які прямують до нескінченності (невизначеність типу $|\infty - \infty|$*).*

Приклад. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = |\infty - \infty| =$$

(приведемо різницю дробів до спільного знаменника)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{\big(x(e^x-1)\big)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}.$$

3. Функція представлена добутком двох функцій, одна з яких є нескінченно мала, а інша − нескінченно велика величина (невизначеність типу $|0\cdot\infty|$*)*

Границя виглядає так:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x) = |0\cdot\infty| = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}} = \left|\dfrac{0}{0}\right|$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x) = |0\cdot\infty| = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$.

Приклад. Знайти границі функцій

а) $$\lim_{x\to 0} x^2\cdot lnx = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to 0}\frac{lnx}{1/_{x^2}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{1/_x}{-2/_{x^3}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0\,;$$

б) $$\lim_{x\to 1} lnx\cdot ln(x-1) = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to 1}\frac{ln(x-1)}{1/_{lnx}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{ln^2x}\cdot\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(lnx)^2}{x-1} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{(lnx)^2+\frac{2xlnx}{x}}{1} = -\lim_{x\to 1}((lnx)^2+2lnx) = 0\,;$$

в) $$\lim_{x\to a}(a^2-x^2)\cdot tg\frac{\pi x}{2a} = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to a}\frac{a^2-x^2}{\frac{1}{tg\frac{\pi x}{2a}}} = \lim_{x\to a}\frac{a^2-x^2}{ctg\frac{\pi x}{2a}}$$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to a}\frac{-2x}{\frac{-1}{sin^2\frac{\pi x}{2a}}\cdot\frac{\pi}{2a}} = \frac{4a^2}{\pi}.$$

4. Функція степенево-показникова(невизначеності типу $|1^\infty|, |\infty^0|, |0^0|$*).*

Для обчислення таких границь за правилом Лопіталя необхідно спочатку прирівняти границю до деякого числа A, що є границею функції , прологарифмувати отримане рівняння та знайти границю логарифма, а потім знайти значення A.

Приклад. Знайти границі функцій

а) $\lim\limits_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}}$.

Розв'язання: а) функція є степенево-показниковою, тому позначимо границю функції через A та прологарифмуємо її:

$$\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = |0^0| = A\ ,$$

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = \lim_{x\to 0}ln(arcsinx)^{tgx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}tgx \cdot ln(arcsinx) = \lim_{x\to 0}\frac{ln(arcsinx)}{ctgx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-sin^2x}{\sqrt{1-x^2}\cdot arcsinx} =$$

(використавши першу важливу границю та її наслідки маємо)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0\ ,$$

тоді $A = e^0 = 1$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = |\infty^0| = A,$

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0}ln(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{lnx}\cdot lnctgx =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{lnctgx}{lnx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{sin^2x\cdot ctgx}}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{sin^2x\cdot ctgx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{sin^2x\cdot\frac{cosx}{sinx}} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{sinx\cdot cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-1}{cosx} = -1.$$

Отримаємо: $lnA = -1$, тоді $A = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

4.3 Ознаки монотонності функції

Теорема *(необхідна ознака монотонності).*

1. Якщо функція $f(x)$ *в інтервалі* (a, b) *зростає, то її похідна* $f'(x)$ *невід'ємна:* $f'(x) \geq 0$.

2. Якщо функція $f(x)$ *в інтервалі* (a, b) *спадає, то її похідна* $f'(x)$ *недодатна:* $f'(x) \leq 0$.

3. Якщо функція $f(x)$ *не змінюється в інтервалі* (a, b)*, то її похідна* $f'(x)$ *дорівнює нулю.*

***Геометричний зміст цієї теореми*:**

1. якщо функція зростає, то дотична до графіка функції утворює гострий кут з віссю Ox;
2. якщо функція спадає, то дотична до графіка функції утворює тупий кут з віссю Ox.

Теорема *(достатня ознака монотонності).*

1. Якщо похідна $f'(x)$ *від функції* $f(x)$ *у всьому інтервалі додатна, то функція* $f(x)$ *в цьому інтервалі зростає.*

2. Якщо похідна $f'(x)$ *від функції* $f(x)$ *у всьому інтервалі від'ємна, то функція* $f(x)$ *в цьому інтервалі спадає.*

3. Якщо похідна $f'(x)$ *від функції* $f(x)$ *у всьому інтервалі дорівнює нулю, то функція* $f(x)$ *в цьому інтервалі не змінюється (є константою).*

Приклад. Дослідити функцію на монотонність:

$$y = x^3 - 3x.$$

Розв'язання. Зауважимо, що будь-яке дослідження функції необхідно розпочинати зі знаходження області визначення функції: $D(y) = R$.

Похідна цієї функції $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$.

Отже, функція $y = x^3 - 3x$ зростає на проміжках $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-1; 1)$.

4.4 Екстремум функції

Особливе значення дослідження функції мають значення x, які відділяють інтервали зростання від інтервалів спадання функції. При переході через ці точки функція $y = f(x)$ зі зростаючої стає спадною, і навпаки: зі спадної – зростаючою.

Визначення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому окіллі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***максимуму*** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найбільшим значенням функції $y = f(x)$ в деякому околі точки x_0.

Визначення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***мінімуму*** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найменше значення функції $y = f(x)$ в деякому окіллі точки x_0.

Точки максимуму і мінімуму називаються точками екстремуму функції.

Теорема *(необхідна ознака екстремуму). Якщо в точці* x_0 *функція* $y = f(x)$ *досягає екстремуму, то її похідна в цій точці або дорівнює нулю* $(f'(x_0) = 0)$*, або не існує.*

Доведення. Дійсно, якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції, то значення функції в ній є найбільшим (або найменшим) в деякому окіллі точки x_0. Звідси випливає, що якщо в точці x_0 існує похідна, то, за теоремою Ферма, вона дорівнює нулю.

Точки x_0, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними* точками функції.

Теорема *(достатня ознака екстремуму). Точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, якщо при переході x через x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак на протилежний; при зміні знака «+» на «–» точка x_0 є точкою максимуму, при зміні знака з «–» на «+» точка x_0 є точкою мінімуму.*

Доведення. Нехай при переході x зліва направо через x_0 похідна змінює знак з «+» на «–» ; із цього випливає, що ліворуч точки x_0 розташований інтервал зростання функції, а праворуч – інтервал спадання функції. Отже, точка x_0 є точкою максимуму функції.

Аналогічними є міркування в разі зміни знака з «–» на «+» ; при переході x через x_0 зліва направо, точка x_0 є точкою мінімуму функції.

Загальний план дослідження функції на екстремум та монотонність

1. З'ясуємо область визначення функції (ОВФ).

2. Знайдемо похідну функції.

3. Знайдемо критичні точки ($f'(x) = 0$). Нанесемо їх на координатну пряму.

4. В кожному з отриманих інтервалів з'ясуємо знак похідної. За знаком похідної визначаємо характер поведінки функції. З'ясовуємо, при переході через які *критичні* точки похідна змінює знак, саме ці точки є точками екстремуму функції. Інколи два суміжні інтервали мають однаковий знак, тому точка, яка їх розділяє, не є точкою екстремуму.

5. Знайдемо значення функції в точках екстремуму.

Приклад. Дослідити функцію на монотонність та екстремум

$$y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}.$$

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $x \neq \pm 1$; тобто
$$D(y) = (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, \infty).$$
2. Знайдемо $y'(x)$:
$$y' = \frac{2x(1 - x^2) - (1 + x^2)(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{4x}{(1 - x^2)^2}.$$
3. $y' = 0$ при $x = 0$ і y' не існує при $x = \pm 1$, тобто критичною точкою є тільки точка $x = 0$, оскільки при $x = \pm 1$ функція не існує.
4. На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(-1,0)$ функція спадає, оскільки $y' < 0$.

На інтервалах $(0,1)$ та $(1, \infty)$ функція зростає, оскільки $y' > 0$

При переході через $x = 0$ похідна змінює знак з – на +, тому при $x = 0$ маємо мінімум функції.

5. $y_{min} = y(0) = 1$, тобто точка $B(0,1)$ – точка екстремуму функції.

Відповідь: функція спадає при $x \epsilon (-\infty, -1)$ та $(-1,0)$; функція зростає при $x \epsilon (0,1)$ та $(1, \infty)$; точка $B(0,1)$ – точка екстремуму функції (min).

ЛЕКЦІЯ 5
ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ. ПЕРВІСНА ФУНКЦІЇ І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

5.1 Найменше та найбільше значення функції в інтервалі

Розв'язання задачі на найменше та найбільше значення функції в інтервалі пов'язане з дослідженням функції на екстремум та монотонність. Функція $y = f(x)$ може набувати найменшого (найбільшого) значення або в точках екстремуму, або на кінцях інтервалу $[a, b]$.

Загальний план дослідження на найменше та найбільше значення функції в інтервалі

1. З'ясовуємо область визначення функції (далі ОВФ).

2. Знайдемо похідну функції.

3. Знайдемо критичні точки ($f'(x) = 0$).

4. Знайдемо значення функції в критичних точках, у яких похідна існує і які належать інтервалу $[a, b]$ та значення функції у крайніх точках інтервалу.

5. Порівняємо отримані значення і оберемо серед них найменше та найбільше.

Приклад. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = x^2 \ln x$ на інтервалі $[e^{-3}, 1]$.

Розв'язання.

1. ОВФ: $x\epsilon(0, \infty)$.

2. $y' = 2x \cdot lnx + x^2 \frac{1}{x} = 2x \cdot lnx + x$.

3. $2x \cdot lnx + x = 0$; $x(2lnx + 1) = 0$; $x_1 = 0$,

$$2lnx + 1 = 0, \qquad x_2 = e^{-\frac{1}{2}}.$$

x_1 не належить ОВФ, $x_2\epsilon[e^{-3}, 1]$.

4. $y(e^{-3}) = e^{-6}lne^{-3} = -3e^{-6} = \frac{-3}{e^6}$;

$$y\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1} ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}e^{-1} = -\frac{1}{2e};$$

$$y(1) = ln1 = 0.$$

5. Отже, найменше значення функція набуває при $x = e^{-\frac{1}{2}}$, а найбільше – при $x = 1$.

5.2 Умови опуклості та угнутості графіка функції. Точки перегину

Визначення. Дуга називається *опуклою*, якщо вона перетинається з будь-якою січною не більше ніж у двох точках.

Якщо дуга опукла, то вона розміщується з одного боку від дотичної, проведеної в будь-якій точці. Опукла дуга може бути опуклою вгору (опуклою) або опуклою вниз (угнутою). Опукла дуга розміщується нижче дотичної, а угнута – вище.

Особливу роль відіграють точки переходу від інтервалів опуклості до інтервалів угнутості, ці точки називаються *точками перегину.*

Визначення. *Точкою перегину* називається така точка, лінії якої відділяють опуклу дугу від угнутої.

Теорема. Якщо друга похідна $f''(x)$ в інтервалі (a, b) від'ємна ($f''(x) \leq 0$), то дуга лінії $y = f(x)$, опукла в цьому інтервалі; якщо $f''(x)$ в інтервалі (a, b) додатна ($f''(x) \geq 0$), то лінія $y = f(x)$ у цьому інтервалі угнута.

Теорема. (*необхідна умова існування точок перегину*) *Якщо в точці* x_0 *лінії* $y = f(x)$ *має точку перегину, то або* $f''(x_0) = 0$ *або не існує.*

Теорема. (*достатня умова існування точок перегину*) *Точка* (x_0, y_0) *(якщо в цій точці виконується необхідна умова) є точкою перегину лінії* $y = f(x)$, *якщо друга похідна функції* $f''(x)$ *змінює знак при переході* x *через* x_0.

Приймемо ці теореми без доведення.

Схема дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину

1. Визначемо область визначення функції (ОВФ).

2. Знайдемо першу та другу похідні.

3. Визначимо критичні точки другого порядку, тобто точки, в яких $f''(x) = 0$ або не існує.

4. Нанесемо на координатну пряму критичні точки та точки, в яких функція не існує. З'ясуємо знак другої похідної $f''(x)$ у кожному частковому інтервалі. Якщо $f''(x) < 0$, то функція опукла, якщо $f''(x) > 0$ – угнута. Якщо при переході через критичні точки другого порядку похідна $f''(x)$ змінює знак, то ці точки є точками перегину.

5. Знайдемо значення функції в точках перегину.

Приклад. Знайти точки перегину та інтервали опуклості й угнутості функції $y = x^2 e^x$.

Розв'язання. 1. ОВФ: $x \epsilon R$.

2. $y' = 2xe^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2)$;

$$y'' = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) = e^x(x^2 + 4x + 2).$$

3. $e^x(x^2 + 4x + 2) = 0$; $e^x \neq 0$; $x^2 + 4x + 2 = 0$,

$$x_1 = -2 - \sqrt{2};\ \ x_2 = -2 + \sqrt{2}.$$

4.

Функція угнута при $x \epsilon \left(-\infty, -2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{2}, \infty\right)$ та опукла при $x\, \epsilon \left(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}\right)$. Точки з абсцисами $x_1 = -2 - \sqrt{2}$; $x_2 = -2 + \sqrt{2}$ є точками перегину.

5. $y(-2-\sqrt{2}) = (-2-\sqrt{2})^2 e^{-2-\sqrt{2}} = \dfrac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$;

$y(-2+\sqrt{2}) = (-2+\sqrt{2})^2 e^{-2+\sqrt{2}} = \frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}$.

5.3 Асимптоти графіка функції

Визначення. Пряма лінія S називається *асимптотою* лінії L, якщо відстань від точки лінії L до прямої S прямує до нуля при необмеженому віддалені цієї точки від початку координат.

Вертикальні та похилі асимптоти

Нехай лінія $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту. Рівняння вертикальної асимптоти $x = x_0$, а відповідно визначенню асимптоти $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$; і навпаки якщо точка x_0 є точкою нескінченного розриву функції $f(x)$, то пряма $x = x_0$ є асимптотою лінії $y = f(x)$. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то лінія $y = f(x)$ має своєю асимптотою пряму $x = x_0$.

Взаємне розташування нескінченної гілки лінії та її вертикальної асимптоти $x = x_0$ розглядають за допомогою лівої та правої границь.

Приклад. Знайти вертикальні асимптоти функції

$$y = \frac{x^2 - x}{x + 3}.$$

Розв'язання: 1. ОВФ: $x \neq -3$.

$$2.\ \lim_{x \to -3-0} \frac{x^2 - x}{x + 3} = \frac{(-3-0)^2 - (-3-0)}{-3-0+3} = \frac{12}{-0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to -3+0} \frac{x^2 - x}{x + 3} = \frac{(-3+0)^2 - (-3+0)}{-3+0+3} = \frac{12}{0} = \infty.$$

3. При $x \to -3$ кожна з двох односторонніх границь прямує до нескінченності, тому $x = -3$ – вертикальна асимптота. При $x \to -3-0$ гілка функції прямує до $-\infty$; при $x \to -3+0$ гілка функції прямує до ∞.

Нехай лінія $y = f(x)$ має похилу асимптоту. Рівняння такої асимптоти: $y = kx + b$. Відповідно до визначення відстань від асимптоти до графіка функції d прямує до нуля при $x \to \infty$.

$$d = kx + b - f(x);$$

$$\lim_{x\to\infty} \big(kx + b - f(x)\big) = 0;$$

$$f(x) = kx + b + \varepsilon(x),$$

де $\varepsilon(x)$ нескінченно мала при $x \to \infty$. Поділимо обидві частини на x і перейдемо до границі при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{kx}{x} + \frac{b}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}\right);$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Знайдемо b: $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$.

Зауваження 1. Під час знаходження k для показникової функції необхідно розглядати випадки при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$ окремо (тобто маємо k_1 і k_2). Якщо $k_i = \pm\infty$, то похилої асимптоти немає і знаходити b_i не потрібно.

Зауваження 2. Якщо $k = 0$, то похила асимптота перетворюється на горизонтальну:

$$y = b, \qquad b = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Приклад. Знайти похилу асимптоту функції

$$y = \frac{x^2 - x}{x + 3}.$$

Розв'язання:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2 - x}{x + 3}}{x} \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x}{(x+3)x} = 1\,.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - x}{x + 3} - x\right) = |\infty - \infty| =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - x^2 - 3x}{x + 3} = -4.$$

$y = x - 4$ похила асимптота функції.

5.4 Первісна функція і невизначений інтеграл

Займаючись диференціюванням функції, ми ставили перед собою завдання знайти похідну даної функції. Обернене завдання: знайти функцію, знаючи її похідну.

Визначення. *Первісною функції* $f(x)$ *називається функція F(x), похідна якої дорівнює даній функції*

$$F'(x) = f(x).$$

Нехай $y = x^2$. Похідна від якої функції дорівнює x^2?

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

Тому первісною від x^2 є функція $\frac{x^3}{3}$, але не тільки вона, похідною від функції $\frac{x^3}{3} - 5$ і $\frac{x^3}{3} + 14$, також є x^2, тобто $\frac{x^3}{3} + C$, де C – довільна постійна. Будь-яка функція $\frac{x^3}{3} + C$ є первісною функції x^2.

Теорема. *Будь-яка неперервна функція має нескінченну множину первісних, причому будь-які дві з них відрізняються одна від одної лише постійним доданком.*

$$(F(x)+C)' = f(x);$$
$$F'(x) = f(x).$$

Визначення. *Знаходження первісної називається невизначеним інтегруванням, а множина всіх первісних від функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається, як*

$$\int f(x)dx,$$

де $f(x)$ − підінтегральна функція; $f(x)dx$ − підінтегральний вираз; x − змінна інтегрування.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ − первісна функції $f(x)$, C − довільна постійна.

5.5 Основні властивості невизначеного інтеграла

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. ***Теорема 1.*** *Сталий множник підінтегральної функції можна виносити за символ інтеграла:*

$$\int C\, f(x)\, dx = C \int f(x)dx,$$

де $C -$ константа.

5. ***Теорема 2.*** *Інтеграл від алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі інтегралів від кожної з функцій:*

$$\int \left(f(x) + \varphi(x) + \cdots + \psi(x)\right) dx =$$

$$= \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx + \cdots + \int \psi(x)dx,$$

де $f(x),\ \varphi(x), \dots, \psi(x) -$ функції незалежної змінної x.

6. ***Теорема 3.*** *Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд при підстановці замість незалежної змінної будь-якої диференційованої функції від неї, тобто якщо*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \textit{то i} \int f(U)du = F(U) + C,$$

де $U = \varphi(x) -$ *диференційована функція від* x.

7. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

5.6 Таблиця основних інтегралів

1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1,\ \alpha \epsilon R.$
2. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$
3. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$
4. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C.$
5. $\int a^{u} = \frac{a^{u}}{lna} + C, a > 0, a \neq 1.$
6. $\int e^{u} du = e^{u} + C.$

7. $\int sinu\, du = -cosu + C.$

8. $\int cosu\, du = sinu + C.$

9. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C.$

10. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C.$

11. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C, a\epsilon R, a \neq 0.$

12. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, a\epsilon R, a \neq 0.$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C, |a| > |u|, a \neq 0.$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C.$

Зауважимо, що α, A і a – сталі, u – незалежна змінна або будь-яка диференційована функція від незалежної змінної.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл.
Розв'язання.

а) $$\int sin5x\, dx = \left| \begin{matrix} u = 5x \\ du = (5x)' = 5dx \end{matrix} \right| = \frac{5}{5}\int sin5x\, dx =$$
$$= \frac{1}{5}\int sin5x\, 5dx = \frac{1}{5}\int sinu\, du =$$
$$= -\frac{1}{5}cos\, u + C = -\frac{1}{5}cos\, 5x + C.$$

Для безпосереднього інтегрування будемо використовувати таку формулу:

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{1+9x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{1+9x} = \frac{1}{9} ln|1+9x| + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{3x^2+12}$.
Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{3x^2+12} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} arctg\frac{x}{2} + C = \frac{1}{6} arctg\frac{x}{2} + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

5.7 Метод інтегрування заміною змінної

Метод заміни змінної (***підстановки***), що ґрунтується на властивості інваріантності, є основним при інтегруванні. Зокрема, підведення під знак диференціала можна розглядати як неявне застосування цього методу.

Нехай необхідно обчислити інтеграл $\int f(x)dx,$ але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона існує.

Запишемо інтеграл $\int f(x)dx$ у вигляді $\int q\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\, dx,$ тобто виділимо диференціал деякої функції $\varphi(x)$ і, застосовуючи підстановку $u = \varphi(x)$, перейдемо в інтегралі $\int q\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx$ до нової змінної:

$$\int q\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \int q(u)\,du.$$

Після цього знайдемо розв'язок інтегралу. Повернемося до попередньої змінної x, припустивши, що $u = \varphi(x)$:

$$\int q\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \left|\begin{matrix} q\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = q(u)du \\ u = \varphi(x) \end{matrix}\right| =$$

$$= \int q(u)du = Q(u) + C = Q\big(\varphi(x)\big) + C.$$

<u>*Зауваження*</u>. За нову змінну вибирають функцію, похідна (диференціал) якої у вигляді множника, по суті, вже міститься у підінтегральному виразі.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}} = \left|\begin{matrix} u = 8 - 3x^2 \\ du = -6xdx \\ xdx = -\frac{1}{6}du \end{matrix}\right| = -\frac{1}{6}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{u} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{8-3x^2} + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{e^{arctg 2x}}{1+4x^2}dx$.

Розв'язання. Заданий інтеграл можна подати у вигляді:

$$\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx = \int e^{arctg2x} \cdot \frac{1}{1+4x^2}dx = \left| \begin{matrix} u = arctg2x \\ du = \dfrac{2}{1+4x^2}dx \\ \dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{1+4x^2}dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^u \cdot du = \frac{1}{2}e^{arctg2x} + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int sin^4xcosxdx,$ б) $\int ctgxdx.$

Розв'язання. а) $\int sin^4xcosxdx = \int (sinx)^4cosxdx =$

$$= \left| \begin{matrix} u = sinx \\ du = cosxdx \end{matrix} \right| = \int u^4du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{(sinx)^5}{5} + C;$$

б) $$\int ctgx\,dx = \int \frac{cosx\,dx}{sinx} = \left| \begin{matrix} u = sinx \\ du = cosxdx \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{u} =$$

$$= ln|u| + C = ln|sinx| + C.$$

ЛЕКЦІЯ 6

ПЕРВІСНА ФУНКЦІЇ І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ (ПРОДОВЖЕННЯ)

6.1 Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен

6.1.1 Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{dx}{Ax^2+Bx+C}$ або $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$

Щоб проінтегрувати ці інтеграли, необхідно виділити повний квадрат у знаменнику підінтегральної функції. Використуємо формулу «квадрат суми (різниці)» $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ і виконаємо наступні дії:

$$Ax^2 + Bx + C = \left| \begin{array}{c} a^2 = Ax^2; a = x\sqrt{A}; \\ 2ab = Bx; 2x\sqrt{A}b = Bx; \\ b = \dfrac{B}{2\sqrt{A}};\ \ b^2 = \dfrac{B^2}{4A} \end{array} \right| =$$

$$= Ax^2 + Bx + \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{4A} + C = \left(Ax^2 + Bx + \frac{B^2}{4A}\right) + \left(C - \frac{B^2}{4A}\right) =$$

$$= \left(x\sqrt{A} + \tfrac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2 \pm k^2,$$

де $k^2 = C - \frac{B^2}{4A}$. Знак плюс або мінус обирається залежно від того, яким є другий доданок: додатним чи від’ємним.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2-8x+13}$.

Розв’язання. Виділимо повний квадрат у виразі, розміщеному в знаменнику підінтегральної функції. Отже:

$$x^2 - 8x + 13 = \begin{vmatrix} a^2 = x^2 & a = x \\ 2ab = 8x & 2xb = 8x \\ b = 4 & b^2 = 16 \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2 - 8x + 16) - 16 + 13 = (x-4)^2 - 3.$$

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 13} = \int \frac{dx}{(x-4)^2 - 3} = \begin{vmatrix} u = x - 4 \\ du = dx \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{du}{u^2 - 3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} ln \left| \frac{u - \sqrt{3}}{u + \sqrt{3}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} ln \left| \frac{x - 4 - \sqrt{3}}{x - 4 + \sqrt{3}} \right| + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{5+6x-x^2}}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у виразі, під коренем в знаменнику підінтегральної функції:

$$5 + 6x - x^2 = -(x^2 - 6x - 5) = \begin{vmatrix} a^2 = x^2 & a = x \\ 2ab = 6x & 2xb = 6x \\ b = 3 & b^2 = 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x^2 - 6x + 9 - 9 - 5) = -((x-3)^2 - 14) = 14 - (x-3)^2.$$

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 + 6x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{14 - (x-3)^2}} = \begin{vmatrix} u = x - 3 \\ du = dx \end{vmatrix} =$$

$$= arcsin \frac{u}{\sqrt{14}} + C = arcsin \frac{x-3}{\sqrt{14}} + C.$$

6.1.2 Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{(Mx+N)dx}{Ax^2+Bx+C}$ або $\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$

Розглянемо більш загальні інтеграли. Зауважимо, що в чисельнику розташовано многочлен першого порядку, а в знаменнику (або в підкореневому виразі знаменника) – многочлен другого порядку. За методом інтегрування заміною змінної знаменник (або підкореневий вираз знаменника) позначимо як u і доповнюємо чисельник до вигляду отриманого du шляхом тотожних перетворень.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x+3}{x^2+4x-2}dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{x+3}{x^2+4x-2}dx = \begin{vmatrix} u = x^2+4x-2 \\ du = (2x+4)dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+3)}{x^2+4x-2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6+4-4}{x^2+4x-2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)+2}{x^2+4x-2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x-2}dx + \int \frac{dx}{x^2+4x-2} = I_1 + I_2.$$

Знайдемо отримані інтеграли:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x-2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}ln|u| + C =$$
$$= \frac{1}{2}ln|x^2+4x-2| + C;$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2+4x-2} = \begin{vmatrix} a^2 = x^2;\ \ a = x \\ 2ab = 4x; 2xb = 4x \\ b = 2;\ \ b^2 = 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 - 4 - 2} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 - 6} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} ln \left| \frac{x + 2 - \sqrt{6}}{x + 2 + \sqrt{6}} \right| + C.$$

Остаточно маємо:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 2} = \frac{1}{2} ln|x^2 + 4x - 2| + \frac{1}{2\sqrt{6}} ln \left| \frac{x + 2 - \sqrt{6}}{x + 2 + \sqrt{6}} \right| + C$$

6.2 Інтегрування раціональних дробів

Розглянемо методику інтегрування одного з найважливіших класів елементарних функцій – ***раціональних функцій***. Будь-яка елементарна функція $R(x)$ може бути представлена у вигляді дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}.$$

Нагадаємо, що якщо максимальний степінь чисельника менший за максимальний степінь знаменника $(m < n)$, дріб називається ***правильним***, якщо максимальний степінь чисельника більший або дорівнює максимальному степеню знаменника $(m \geq n)$, дріб називається ***неправильним***. Якщо $m \geq n$, то виконавши операцію ділення многочленів, будь-який неправильний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлену (ціла частина) і правильного дробу (отриманий многочлен – результат ділення; чисельник отриманого правильного дробу – залишок від ділення):

$$R(x) = N(x) + \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}.$$

Інтегрувати можна лише правильні раціональні дроби. Інтегрування многочлену $N(x)$ не складає труднощів, проблема полягає в інтегруванні правильного раціонального дробу.

6.2.1 Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та різні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має дійсні різні корені:

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n).$$

Тоді раціональний дріб можна розкласти на найпростіші дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - a_1} + \frac{B}{x - a_2} + \cdots + \frac{N}{x - a_n}.$$

Інтеграл від такого дробу зводиться до

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \int \frac{dx}{x - a_1} + B \int \frac{dx}{x - a_2} + \cdots + N \int \frac{dx}{x - a_n} =$$

$$= A\, ln|x - a_1| + B\, ln|x - a_2| + \cdots + N\, ln|x - a_n|.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$.

Розв'язання. Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більший, ніж степінь знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши чисельник на многочлен знаменник:

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 8 \\ \underline{x^5 + 0x^4 - 4x^3} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^3 + 0x^2 - 4x} \\ x^2 + x + 4 \end{array} \\
\qquad -\begin{array}{l} x^4 + 4x^3 + 0x^2 + 0x - 8 \\ \underline{x^4 + 0x^3 - 4x^2} \end{array} & \\
\qquad\qquad -\begin{array}{l} 4x^3 + 4x^2 + 0x - 8 \\ \underline{4x^3 + 0x^2 - 16x} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad 4x^2 + 16x - 8 \quad \text{(залишок).} &
\end{array}
$$

Подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного раціонального дробу:

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}, \qquad \text{тоді}$$

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дробу

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$$

має три прості корені: $x = 0, x = 2$ і $x = -2$, то його можна подати у вигляді суми трьох дробів:

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}.$$

Зведемо дроби до спільного знаменника, прирівнюємо чисельники:

$$x^2 + 4x - 2 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2).$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів використовують методом невизначених коефіцієнтів, за якого порівнюються коефіцієнти ліворуч та праворуч при однакових функціях, у цьому випадку степенів x. У випадку дійсних і різних коренів знаменника набагато швидше знаходять коефіцієнти, послідовно підставляючи відомі корені знаменника:

$$\begin{array}{r|l} x = 0 & -2 = -4A, \\ x = 2 & 10 = 8B, \\ x = -2 & -6 = 8C. \end{array}$$

Звідси $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{5}{4}$, $C = -\frac{3}{4}$.

Отже:

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2},$$

а шуканий інтеграл

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x +$$

$$+4 \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \int \frac{dx}{x} + 5 \int \frac{dx}{x-2} - 3 \int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2ln|x| + 5ln|x-2| - 3ln|x+2| + C.$$

6.2.2 Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та серед яких є кратні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має дійсні корені, серед яких є кратні:

$$Q(x) = (x-a_1)^n(x-a_2)^m \dots (x-a_n)^k.$$

В такому випадку раціональний дріб може бути розкладений на найпростіші дроби в такий спосіб:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a_1)^n} + \frac{B}{(x-a_1)^{n-1}} + \frac{C}{(x-a_1)^{n-2}} + \cdots \frac{L}{x-a_1} +$$

$$+ \cdots + \frac{N}{x-a_n}.$$

Отже, зрозуміло, що кореню a_1 кратності n відповідає n доданків; кожен наступний дріб має степінь на одиницю меншу від попереднього і так до першої. Інтегрування отриманих дробів виконується за формулами таблиці інтегралів. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx$$

Розв'язання. Переконаємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що многочлен

$$(x-1)(x^3-4x^2+3x)=x(x-1)(x^2-4x+3)=$$

$$=x(x-1)(x-1)(x-3)=x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких $x=0$ і $x=3$ є простими, а $x=1$ – двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Приведемо праву частину отриманого виразу до загального знаменника. Унаслідок рівності дробів та їх знаменників отримаємо рівність чисельників, отже, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D:

$$x^2-2x+3=A(x-3)(x-1)^2+Bx(x-1)^2+$$

$$+Cx(x-3)+Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом (підстановкою коренів знаменника в отриману тотожність та порівняння коефіцієнтів, які розташовані біля однакового степеня змінної):

$$\begin{array}{r|l} x=0 & 3=-3A, \\ x=3 & 6=12B, \\ x=1 & 2=-2C, \\ x^3 & 0=A+B+D. \end{array}$$

Звідси: $A=-1,\ B=\frac{1}{2},\ C=-1,\ D=\frac{1}{2},$ отже,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},$$

$$\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= ln|x| + \frac{1}{2}ln|x-3| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}ln|x-1| + C\ .$$

6.2.3 Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника є комплексні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має комплексні різні корені:

$$Q(x) = (x^2 + p_1x + q_1)\dots(x^2 + p_sx + q_s).$$

У такому випадку раціональний дріб набуває вигляду:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{Nx+M}{x^2+p_sx+q_s}.$$

Обчислення інтегралів такого вигляду ми розглядали раніше (див. лекцію 2 п. 2.2), тому відразу звернемося до прикладів.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx.$$

Розв'язання. Переконуємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що $x^2 - 2x + 10 = 0$, $D = 4 - 40 = -36 < 0$, маємо

$$\frac{4x - 10}{(x+2)(x^2 - 2x + 10)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 10}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C:

$$4x - 10 = A(x^2 - 2x + 10) + (Bx + C)(x + 2).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{c|c} x = -2 & -18 = 18A, \\ x^2 & 0 = A + B, \\ x^0 & -10 = 10A + 2C, \end{array}$$

звідси: $A = -1, B = 1, C = 0,$ отже,

$$\frac{4x - 10}{(x+2)(x^2 - 2x + 10)} = -\frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2 - 2x + 10}.$$

Отримаємо:

$$\int \frac{4x - 10}{(x+2)(x^2 - 2x + 10)} dx = \int \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2 - 2x + 10}\right) dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x^2 - 2x + 10 \\ du = (2x - 2)dx \end{matrix} \right| = -\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 - 2x + 10} dx =$$

$$= -ln|x + 2| + \frac{1}{2}\int \frac{2x - 2 + 2}{x^2 - 2x + 10} dx =$$

$$= -ln|x+2| + \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}dx + \int \frac{dx}{x^2-2x+10} =$$

$$= \left| \begin{matrix} a^2 = x^2; a = x \\ 2ab = 2x; 2xb = 2x \\ b = 1;\ b^2 = 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= -ln|x+2| + \frac{1}{2}ln|x^2-2x+10| + \int \frac{dx}{(x-1)^2+9} =$$

$$= -ln|x+2| + \frac{1}{2}ln|x^2-2x+10| + \frac{1}{3}arctg\frac{x-1}{3} + C.$$

6.3 Метод інтегрування частинами

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ − неперервні диференційовані функції незалежної змінної. Диференціал їх добутку має вигляд

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Звідси $$udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруємо обидві частини отриманої рівності, отримаємо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

або $$\int udv = uv - \int vdu.$$

Методом інтегрування частинами обчислюються інтеграли, що мають підінтегральну функцію виду:

1. Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на тригонометричну:

$$\int P_n(x)\cdot\begin{matrix} sin(ax+b) \\ cos(ax+b) \\ tg(ax+b) \\ ctg(ax+b)\end{matrix}\cdot dx,\quad \big(u=P_n(x)\big);$$

Зрозуміло, що береться одна з тригонометричних функцій.

2. Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на показникову:

$$\int P_n(x)a^x dx,\qquad \big(u=P_n(x)\big)$$

3. Логарифмічна функція:

$$\int \log_a(ax+b)\,dx,\quad (u=\log_a(ax+b));$$

4. Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на логарифмічну:

$$\int P_n(x)\log_a(ax+b)dx;\quad (u=\log_a(ax+b));$$

5. Обернена тригонометрична функція:

$$\int\begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b)\end{matrix}\cdot dx;\quad \left(u=\begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b)\end{matrix}\right);$$

6. Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на обернену тригонометричну:

$$\int P_n(x)\cdot\begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b)\end{matrix}\cdot dx;\left(u=\begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b)\end{matrix}\right);$$

і багато-багато інших…

Зауваження. Перший та другий тип інтегралів з даного переліку інтегрується частинами n разів; тобто кількість інтегрування частинами дорівнює степіню многочлена $P_n(x)$.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int (x-3)e^{2x}dx$.

Розв'язання.

$$\int (x-3)e^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x-3, & du = dx \\ dv = e^{2x}dx, & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= (x-3)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{x-3}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^2 sin3xdx.$$

Розв'язання.

$$\int x^2 sin3xdx = \left| \begin{matrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = sin3xdx, & v = \int sin3xdx = -\frac{1}{3}cos3x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x - \int \left(-\frac{1}{3}cos3x\right) 2xdx =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{3}\int xcos3xdx.$$

До останнього інтеграла застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int xcos3xdx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = cos3xdx, & v = \int cos3xdx = \frac{1}{3}sin3x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}xsin3x - \frac{1}{3}\int sin3xdx = \frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x.$$

Отже, остаточно маємо:

$$\int x^2 sin3xdx = -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{9}xsin3x + \frac{2}{27}cos3x + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^3 lnxdx.$$

Розв'язання.

$$\int x^3 lnxdx = \left| \begin{matrix} u = lnx, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^3dx, & v = \int x^3dx = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^4}{4}lnx - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^4}{4}lnx - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{x^4}{4}lnx - \frac{1}{16} \cdot x^4 + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int x \cdot arctgxdx$.

Розв'язання.

$$\int x \cdot arctgx\, dx = \begin{vmatrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx\right) =$$

Отриманий інтеграл – це інтеграл від неправильного раціонального дробу, який має степінь чисельника рівну степені знаменника, тому необхідно виділити цілу частину, шляхом доповнення чисельника до виду знаменника.

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 \cdot acrtgx - x + arctgx) + C.$$

6.4 Інтегрування тригонометричних функцій

1. Якщо m і n – цілі числа і принаймні одне з цих чисел є непарним додатним числом, наприклад $m = 2k + 1$, то

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2k+1} x \cdot cos^n x dx =$$

$$= \int sin^{2k} x \cdot sinx \cdot cos^n x dx =$$

$$= \int (sin^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinxdx = \int (1 - cos^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinxdx$$
$$=$$

$$= \left| \begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinxdx \end{matrix} \right| = -\int (1 - t^2)^k \cdot t^n \cdot dt.$$

Якщо ж непарним буде число $n = 2p + 1 > 0$, то необхідно застосувати підстановку $t = sinx$.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int cos^4 x \cdot sin^5 x dx.$$

Розв'язання. Тут $m = 5, n = 4$. Враховуючи, що m непарне, виконаємо перетворення:

$$\int cos^4 x \cdot sin^5 x dx = \int cos^4 x \cdot sin^4 x \cdot sinxdx =$$

$$= \int cos^4 x \cdot (sin^2 x)^2 \cdot sinxdx =$$

$$= \int cos^4 x \cdot (1 - cos^2 x)^2 \cdot sinxdx = \left| \begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinxdx \\ sinxdx = -dt \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int t^4 (1 - t^2)^2 \, dt = -\int t^4 (1 - 2t^2 + t^4) dt =$$

$$= \int (2t^6 - t^4 - t^8)dt = \frac{2t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{2cos^7x}{7} - \frac{cos^5x}{5} - \frac{cos^9x}{9} + C.$$

2. Якщо обидва показники m і n – парні невід'ємні числа (зокрема один з них може бути рівним нулю), то доцільно застосувати формули зниження степеню:

$$sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x), \quad cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x).$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int sin^4x \cdot cos^2xdx.$$

Розв'язання. В прикладі $m = 4,\ n = 2$ обидва додатні і парні, тобто маємо:

$$\int sin^4x \cdot cos^2xdx = \int sin^2x \cdot sin^2x \cdot cos^2xdx =$$

$$= \int sin^2x \cdot (sinx \cdot cosx)^2dx = \int \frac{1}{2}(1 - cos2x) \cdot \frac{1}{4}sin^2 2xdx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int sin^2 2xdx - \int cos2x \cdot sin^2 2xdx\right).$$

Розглянемо отримані інтеграли окремо:

$$I_1 = \int sin^2 2xdx = \int \frac{1}{2}(1 - cos4x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dx - \int cos4x\, dx\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}sin4x + C_1;$$

$$I_2 = \int cos2x \cdot sin^2 2xdx = \left| \begin{matrix} u = sin2x \\ du = 2cos2xdx \\ cos2xdx = \dfrac{du}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int u^2 du = \frac{1}{2}\frac{u^3}{3} + C = \frac{u^3}{6} + C_2 = \frac{sin^3 2x}{6} + C_2.$$

Підставляючи отриманні вирази та вважаючи, що $C_1 + C_2 = C,$ отримаємо розв’язок:

$$\int sin^4 x \cdot cos^2 xdx = \frac{x}{16} - \frac{sin4x}{64} - \frac{sin^3 2x}{48} + C.$$

3. Якщо обидва показники парні, причому принаймні один із них від’ємний, то необхідно виконати заміну $tgx = t$ або $ctgx = t.$

Тоді:

$$x = arctgt \ \ (x = arcctgt),$$

$$dx = \frac{dt}{t^2+1} \ \left(dx = -\frac{dt}{t^2+1}\right).$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{sin^2 x}{cos^4 x}dx.$

Розв’язання. Тут $m = 2, n = -4 < 0$ і m і n парні, тому

$$\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx = \left| \begin{matrix} t = tgx, x = arctgt, dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ sin^2x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, cos^2x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3x}{3} + C.$$

6.5 Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграли виду $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{\frac{m_1}{n_1}}, \boldsymbol{x}^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \boldsymbol{x}^{\frac{m_p}{n_p}}\right)\boldsymbol{dx}$, де $R-$ раціональна функція, m_i і n_i – натуральні числа $(i = 1, 2, \dots, p)$. Даний інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $x = t^k$, де $k-$найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$.

Розв'язання. Тут $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, тому $k = 12$ (найменше спільне кратне чисел 2, 3 і 4). Тобто

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^{12} \\ dx = 12 \cdot t^{11}dt \\ t = \sqrt[12]{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^6}{t^8 - t^3} 12 \cdot t^{11}dt$$

$$= 12 \int \frac{t^{17}}{t^3(t^5-1)}dt = 12 \int \frac{t^{14}dt}{t^5 - 1} = I$$

Отримали інтеграл від неправильного раціонального дробу. Вилучаємо цілу частину діленням многочлена на многочлен:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} t^{14} \\ \underline{t^{14} - t^{9}} \end{array} & \dfrac{t^5 - 1}{t^9 + t^4} \\
-\begin{array}{l} t^{9} \\ \underline{t^{9} - t^{4}} \end{array} & \\
t^4 &
\end{array}
$$

$$I = 12\int\left(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5 - 1}\right)dt =$$

$$= 12\left(\int t^9 dt + \int t^4 dt + \int \frac{t^4\,dt}{t^5 - 1}\right) = \left|\begin{array}{c} z = t^5 - 1 \\ dz = 5t^4 dt \\ t^4 dt = \dfrac{dt}{5} \end{array}\right| =$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\int \frac{d(t^5 - 1)}{t^5 - 1}\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\left(t^{10} + 2t^5 + 2ln\left|t^5 - 1\right|\right) + C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно будемо мати:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2ln\left|\sqrt[12]{x^5} - 1\right|\right) + C.$$

ЛЕКЦІЯ 7

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕННОГО ІНТЕГРАЛА

7.1 Визначений інтеграл

Визначений інтеграл відіграє значну роль як у суто теоретичних дослідженнях, так і в практичних застосуваннях. До його обчислення зводяться задачі знаходження площі фігури, об'єму тіла, центру ваги плоскої кривої, моменту інерції та інші.

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому розбитті відрізка $[a; b]$:

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$$

де a і b – відповідно *нижня* і *верхня межі інтегрування*; $[a; b]$ – *відрізок інтегрування*.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a; b]$. Тоді *визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)dx$, *чисельно дорівнює площі* S *відповідної криволінійної трапеції*: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Розглядаючи визначені інтеграли, надалі будемо припускати підінтегральну функцію неперервною на проміжку інтегрування.

7.2 Властивості визначеного інтеграла

1. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з функцій:

$$\int_a^b \big(f(x) + \varphi(x) + \cdots + \psi(x)\big)dx =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx + \ldots + \int_a^b \psi(x)dx.$$

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a, b]$ і $a < c < b$, то ця функція інтегрована і на відрізках $[a, c]$ і $[\mathrm{c}, b]$, причому:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b \mathrm{C}\cdot f(x)dx = \mathrm{C}\int_a^b f(x)dx.$$

6. Якщо $f(x) -$ інтегрована функція на відрізку $[a,b]$ і $f(x) \geq 0$ для $x\epsilon[a,b]$, то:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

7. Якщо на відрізку $[a;b]$, де $a < b$, функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють нерівності $f(x) \leq \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Інакше кажучи, нерівність між неперервними функціями можна інтегрувати почленно при умові, що верхня межа інтегрування більша нижньої.

7.3 Формула Ньютона-Лейбниця

***Теорема* (*Ньютона-Лейбниця*).** *Нехай функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і* $F(x)$ *– яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції* $y = f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *дорівнює приросту первісної* $F(x)$ *на цьому відрізку:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin2xdx.$$

Розв'язання. Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона-Лейбниця, одержимо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin2xdx = \frac{-1}{2}cos2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left(cos\frac{\pi}{2} - cos0\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

Зауваження. Формула Ньютона-Лейбниця залишається справедливою для будь-якої інтегрованої на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$, що має неперервну первісну $F(x)$, яка задовольняє умові $F'(x) = f(x)$ на всьому відрізку $[a;b]$ за винятком хіба що скінченного числа точок.

Приклад. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+3x)^2}.$$

Розв'язання. Скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца, одержимо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+3x)^2} = \int_0^1 (1+3x)^{-2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(1+3x)^{-1}}{-1}\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+3x}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right) = -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Приклад. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$$

Розв'язання. Доповнимо підкореневий вираз до повного квадрату:

$$5+4x-x^2 = -(x^2-4x-5) = -(x^2-2\cdot 2\cdot x+4-4-5) =$$

$$= -((x-2)^2-9) = 9-(x-2)^2$$

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = arcsin\frac{x-2}{3}\Bigg|_2^5 =$$

$$= arcsin\frac{5-3}{3} - arcsin\frac{2-2}{3} = arcsin1 - arcsin0 = \frac{\pi}{2}.$$

7.4 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема. *Нехай функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *а функція* $x = \varphi(t)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $x' = \varphi'(t)$ *і монотонна на відрізку* $[\alpha;\beta]$, *причому* $\varphi(\alpha) = a$ *і* $\varphi(\beta) = b$. *Тоді справедлива* ***формула заміни змінної у визначеному інтегралі***

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t);\ \ t = \varphi^{-1}(x); \\ dx = \varphi'(t)dt;\ \alpha = \varphi^{-1}(a);\ \beta = \varphi^{-1}(b) \end{matrix} \right|$$

$$= \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)dt,$$

де $t = \varphi^{-1}(x)$ *– обернена функція.*

Зауваження 1. При заміні змінної значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі відрізка $[a; b]$, коли аргумент t змінюється на проміжку $[\alpha; \beta]$, причому $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$.

Зауваження 2. Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}}$.

Розв'язання.

$$\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}} = \left| \begin{matrix} u = x^2 + 5; du = 2xdx; \\ u_{н} = 6;\ u_{в} = 9 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int_6^9 \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{u}\,\Big|_6^9 = 3 - \sqrt{6}.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/2} cos^4 x sin^3 x dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\pi/2} cos^4 x\, sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} cos^4 x\, sin^2 x\, sin x dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \cos^4 x(1-\cos^2 x)\sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \cos x\,; du = -\sin x dx; \\ u_{н} = \cos 0 = 1;\ u_{в} = \cos \pi/2 = 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{1}^{0} u^4(1-u^2)(-du) = \int_{0}^{1}(u^4-u^6)du = \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}.$$

7.5 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Нехай $U = U(x)$ і $V = V(x)$ – диференційовані функції від x на відрізку $[a; b]$. Тоді $(UV)' = U'V + UV'$. Інтегруємо обидві частини рівності у межах від a до b, маємо

$$\int_{a}^{b}(UV)'dx = \int_{a}^{b} U'Vdx + \int_{a}^{b} UV'dx\,.$$

Оскільки $\int (UV)'dx = UV + C$, тому $\int_a^b (UV)'dx = UV\Big|_a^b$ а

$$U'Vdx = VdU, \qquad UV'dx = UdV$$

Отже, $UV\Big|_a^b = \int_a^b VdU + \int_a^b UdV$. ***Звідси отримаємо***

формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU,$$

що відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування.

Приклад. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^3 x\, lnx\, dx.$$

Розв'язання.

$$\int_1^3 x\, lnx = \begin{vmatrix} U = lnx; \ dV = xdx; \\ dU = \dfrac{dx}{x}; V = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2} lnx\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{9}{2}ln3 - \frac{1}{2}ln1 - \frac{1}{2}\ \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{9}{2}ln3 - \frac{1}{4}(9-1) = \frac{9}{2}ln3 - 2.$$

Приклад. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 arcsinx\, dx.$$

Розв'язання.

$$\int_0^1 arcsinx\, dx = \begin{vmatrix} U = arcsinx; dV = dx; \\ dU = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \ \ V = x \end{vmatrix} = x\ arcsinx\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} t = 1 - x^2; dt = -2xdx; \\ t_н = 1;\ \ t_в = 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= arcsin1 - 0 + \frac{1}{2}\int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{t}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

7.6 Площа плоскої фігури

7.6.1. Лінії, що обмежують фігуру, задані рівняннями в явному вигляді у прямокутних координатах

Якщо на відрізку $[a; b]$ функція $f(x) \geq 0$, то за геометричним тлумаченням визначеного інтеграла площа S криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Якщо необхідно обчислити площу області, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$ і $x = b$, при умові $f_2(x) \geq f_1(x)$.

Знайдемо площу, як різницю площин двох криволінійних трапецій:

$$S = S_{ACDF} - S_{ABEF};$$

$$S_{ACDF} = \int_a^b f_2(x)dx,$$

$$S_{ABEF} = \int_a^b f_1(x)dx; \quad S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx,$$

$$\boldsymbol{S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx}.$$

Приклад. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої кривими $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання.

1. Знайдемо межі інтегрування, для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}; \quad x^2 = \sqrt{x}; \quad x^4 = x;$$

$$x^4 - x = 0; \;\; x(x^3 - 1) = 0;$$

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1.$$

2. Знайдемо площу фігури:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,\text{од. кв.}$$

7.6.2 Лінії, що обмежують фігуру, задані параметрично

Нехай рівняння $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ визначає деяку функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, тому $\alpha \le t \le \beta$.

Отже:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx,$$

виконаємо заміну $y = y(t)$, $dx = x'(t)dt$, остаточно отримаємо

$$S = \left| \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \right|$$

Приклад. Обчислити площу області, обмеженої еліпсом

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}.$$

Розв'язання. 1. Обчислимо площу частини еліпса, що знаходиться у першому квадранті. Знайдемо межі інтегрування з урахуванням додатного напряму руху (проти годинникової стрілки) .

При $A(a, 0)$:

$$x = acost, \qquad acost = a,$$
$$cost = 1, \qquad t = 0.$$

При $B(0, b)$:

$$x = acost, \quad acost = 0,$$
$$cost = 0, \qquad t = \frac{\pi}{2}.$$

2. Обчислимо площу S_1. З урахуванням, що $dx = -a\,sint\,dt$, маємо:

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b\,sint(-a\,sint)dt = -ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2t\,dt =$$

$$= -\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos2t)\,dt = -\frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}sin2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}sin\pi - 0 + \frac{1}{2}sin0\right) = -\frac{ab\pi}{4};$$

$$S = 4|S_1| = ab\pi \text{ од. кв.}$$

7.6.3 Лінії, що обмежують фігуру, задані в полярній системі координат.

Нехай у полярній системі координат маємо криву, яка визначена рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ – неперервна функція, коли $\alpha \le \varphi \le \beta$. Знайдемо площу S криволінійного сектора OAB, обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і координатними променями $\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$.

Розіб'ємо сектор OAB на n частин довільними координатними променями $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$, …, $\varphi = \varphi_n$, де $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_i < \cdots < \varphi_n = \beta$. Позначимо через $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ кут між сусідніми променями, $i = \overline{1,n}$.

Розглянемо елементарний криволінійний сектор, що відповідає приросту $\Delta\varphi_i$ полярного кута. Його площа ΔS_i наближено дорівнює площі сектора круга з радіусом ρ_i і центральним кутом $\Delta\varphi_i$: $\Delta S_i \approx \frac{1}{2}{\rho_i}^2\Delta\varphi_i$.

Сума

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{\rho_i}^2\Delta\varphi_i$$

дає площу сектора зі «ступінчатою» межею, що наближено визначає шукану площу S криволінійного сектора OAB.

Ця сума є інтегральною. Здійснюючи граничний перехід при $max\Delta\varphi_i \to 0$, отримуємо точне значення площі сектора OAB у вигляді визначеного інтеграла:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої трипелюстковою трояндою $\rho = sin3\varphi$.

Розв'язання. Фігура, площу якої необхідно знайти, зображена на рисунку 5.

Як бачимо, фігура D складається з трьох однакових «пелюсток». Щоб знайти її площу S, достатньо знайти площу S_1 однієї з її «пелюсток», наприклад, D_1, що на рис. 5 позначена подвійною штриховою. Тоді $S = 3S_1$.

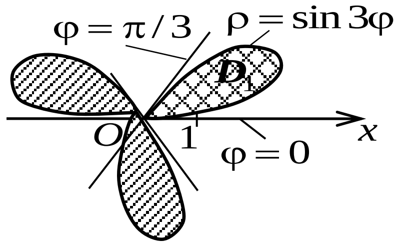

Рисунок 5

$$S_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3} sin^2 3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3} \frac{1}{2}(1 - cos6\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\,\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{24} sin6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{24}(sin2\pi - sin0) = \frac{\pi}{12}.$$

$$S = \frac{\pi}{4}\ (\text{од. кв.})$$

7.7 Довжина дуги кривої

7.7.1 Лінії, що задані у декартовій системі координат

Нехай на координатній площині Oxy задана деяка лінія рівнянням у явній формі $y = y(x)$. Потрібно обчислити довжину L її дуги L_{AB}.

Довжина ламаної L_n дорівнює сумі довжин її ланок:

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Довжиною L дуги L_{AB} називають границю довжини L_n вписаної ламаної при необмеженому здрібненні розбиття, тобто коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля (при цьому число n цих ланок прямує до нескінченності):

$$L = \lim_{\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Теорема. *Якщо функція* $y = y(x)$, *визначена на відрізку* $[a; b]$, *неперервна разом зі своєю похідною на цьому відрізку, то довжина L дуги* L_{AB}, *що служить її графіком на відрізку* $[a; b]$, *обчислюється за формулою*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx.$$

Приклад. Знайти довжину вказаної дуги

$$y = lnx,\ x\epsilon\left[\sqrt{3}; \sqrt{8}\right].$$

Розв'язання. Похідна $y' = \frac{1}{x}$. Тоді:

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x^2 + 1 = t^2; x = \sqrt{t^2 - 1}; \\ dx = \dfrac{tdt}{\sqrt{t^2 - 1}};\ \ t = \sqrt{x^2 + 1}; \\ t_н = 2;\ \ t_в = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \cdot \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - 1}} =$$

$$\int_2^3 \frac{(t^2 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt = \int_2^3 dt + \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = \ t \Big|_2^3 + \frac{1}{2} ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| \Bigg|_2^3 =$$

$$= 3 - 2 + \frac{1}{2}\left(ln\frac{1}{2} - ln\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} ln\frac{3}{2}\ (\text{од.}).$$

7.7.2 Лінії що, задані параметрично

Розглянемо дугу L_{AB} гладкої плоскої лінії, що задана параметрично $x = x(t),\quad y = y(t),\quad t \epsilon [\alpha; \beta]$, де функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ – неперервні разом зі своїми похідними, причому функція $x = x(t)$ – монотонно зростаюча, $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. За наведеною вище формулою довжина цієї дуги

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx.$$

З урахуванням рівнянь лінії та властивостей похідної параметрично заданої функції маємо:

$$dx = x'(t)dt;\;\; y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Зробимо заміну змінної в інтегралі для довжини дуги:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\, x'(t)dt = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Таким чином, *довжина дуги плоскої кривої, що задана параметрично*, визначається за формулою

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$

Приклад. Знайти довжину астроїди:

$$\begin{cases} x = acos^3 t \\ y = asin^3 t \end{cases}.$$

Розв'язання. Обчислимо довжину астроїди – замкненої кривої, що задана параметричними рівняннями.hbc/ Для цього спочатку знайдемо x'_t і y'_t:

$$x'_t = 3acos^2t(-sint);$$

$$y'_t = 3asin^2t \cdot cost.$$

Чверть L_{AB} астроїди розміщена в першому квадранті від точки $A(a;0)$ до точки $B(0;a)$. Знайдемо значення параметра t, що відповідають кінцям цієї дуги:

$$x = acos^3t, acos^3t = a, cos^3t = 1,$$
$$cost = 1, t_{\text{н}} = 0;$$
$$acos^3t = 0, cost = 0, t_{\text{в}} = \frac{\pi}{2}.$$

Тоді довжина всієї астроїди:

$$L_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2cos^4t\,sin^2t + 9a^2sin^4t\,cos^2t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2cos^2t\,sin^2t(cos^2t + sin^2t)}\,dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} cost\,sint\,dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = sint; du = cost\,dt; \\ u_{\text{н}} = 0;\ u_{\text{в}} = 1 \end{matrix} \right| = 3a\int_0^1 u\,du = 3a\frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3a}{2}.$$

$L = 4L_1 = 6a$ (од. довжини).

7.7.3 Лінія, задана у полярних координатах

Теорема. *Нехай дуга* L_{AB} *задана в полярних координатах рівнянням* $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, *де функція* $\rho(\varphi)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $\rho'(\varphi)$ *на відрізку* $[\alpha;\ \beta]$, *причому* *точкам A і B відповідають значення α і β. Тоді довжина дуги L_{AB} обчислюється за формулою:*

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2} d\varphi \,.$$

Приклад. Знайти довжину кардіоїди

$$\rho = 6(1 + sin\varphi).$$

Розв'язання. Кардіоїда – замкнена лінія, що зображена на рисунку 6. Вона симетрична відносно осі Oy. Тому її довжину L можна знайти, подвоївши довжину L_1 її правої частини L_{OA}, що розташована в четвертій та першій чвертях і при цьому $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Проведемо обчислення: $\rho' = -6cos\varphi$;

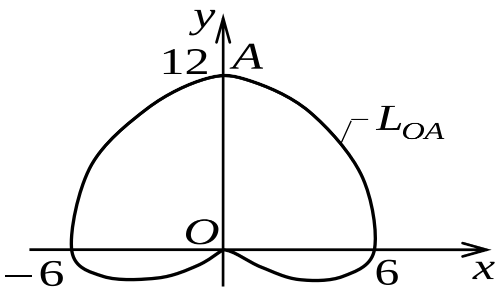

Рисунок 6

$$\rho^2 + (\rho')^2 = \left(6(1 + sin\varphi)\right)^2 + (6cos\varphi)^2 =$$

$$= 36(1 + 2sin\varphi + sin^2\varphi + cos^2\varphi) = 36(2 + 2sin\varphi) =$$
$$= 72(1 + sin\varphi)$$

$$L_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{72(1+sin\varphi)}\,d\varphi = 6\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+sin\varphi}\cdot\frac{\sqrt{1-sin\varphi}}{\sqrt{1-sin\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= 6\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-sin^2\varphi}}{\sqrt{1-sin\varphi}}\,d\varphi = 6\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{cos^2\varphi}}{\sqrt{1-sin\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= 6\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\varphi}{\sqrt{1-sin\varphi}}\,d\varphi = \left|\begin{matrix} u = 1-sin\varphi; \\ du = -cos\varphi d\varphi; \\ u_{\text{н}} = 2;\ u_{\text{в}} = 0 \end{matrix}\right| = -6\sqrt{2}\int_{2}^{0} \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= 6\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{u}\Big|_0^2 = 24\,;\ \ L = 2L_1 = 48\ (\text{од.}).$$

СПИОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1 Зайцев Є. П. Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Є. П. Зайцев. – Київ : Алерта, 2017. – 574 с.

2. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.

3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г. Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с. – Кн. 2 – Спеціальні розділи. – 368 с.

4. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНУМГ, 2015. – 255 с.

5. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2003. – 648 с.

6. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.

Електронне навчальне видання

ВОРОНОВСЬКА Лариса Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Модуль 1

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 263 – Цивільна безпека)

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп’ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2023, поз. 46Л

Підп. до друку 20.03.2023 Формат 60 × 84/16.
Ум. друк арк. 6,7

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.