МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до проведення практичних занять
із навчальної дисципліни

«ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ»

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 122 – Комп'ютерні науки)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2023

Методичні рекомендації до проведення практичних занять із навчальної дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 122 – Комп'ютерні науки) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. О. М. Штельма. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2023. – 34 с.

Укладач О. М. Штельма

Рецензент

О. Б. Костенко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою комп'ютерних наук та інформаційних технологій, протокол № 1 від 01.09.2022.

ЗМІСТ

ВСТУП

Використання математичних методів в інженерно-економічній діяльності дозволяє оптимально вирішувати велику кількість економічних завдань. Прикладами можливих економічних завдань, що яскраво ілюструють корисність запропонованої дисципліни, можуть бути такі тестові завдання:

– одержати максимальний вихід продукції або прибуток при зазначених витратах коштів;

– забезпечити планові показники підприємства при мінімальних витратах коштів;

– досягти максимально короткого терміну будівництва об’єкта в умовах використання зазначених коштів та трудових ресурсів.

У наведених прикладах максимальний вихід продукції, максимальний прибуток, мінімальні витрати, максимально скорочений термін – це оптимуми (максимуми або мінімуми), які потрібно знайти.

Умови, яких необхідно дотримуватися під час розв’язання задачі (задані матеріальні, трудові витрати; планові показники; виробничі ресурси), називають обмеженнями задачі.

1 БЕЗУМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ.
ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Прямими методами вирішують задачу оптимізації шляхом ітераційного наближення до точки мінімуму. Розв’язок отримають наближеним методом, але із забезпеченням наперед заданої точності. На відміну від класичних існує відносно багато прямих методів.

1.1 Метод найшвидшого спуску

При мінімізації функцій багатьох змінних прямими методами основним рекурентним співвідношенням, яке зв’язує нову точку наближення до мінімуму з попередньою, є:

$$\overline{x}^{(k+1)} = \overline{x}^{(k)} + \lambda^{(k)}\Delta\overline{x}^{(k)}, \tag{1}$$

де $\Delta\overline{x}^{(k)}$ – напрямний вектор на k -му кроці ;

$\lambda^{(k)}$ – значення k-го кроку.

Процес мінімізації припиняється під час досягнення заданої точності обчислень:

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^{(k)}\right| \le \varepsilon, \qquad j = 1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

Для методу найшвидшого спуску

$$\Delta\overline{x}^{(k)} = -\left(\frac{\partial y}{\partial \overline{x}}\right)^{(k)}, \tag{3}$$

а величина (значення) кроку $\lambda^{(k)}$ визначається як розв’язання задачі одномірної мінімізації функції:

$$y(\lambda^{(k)}) = y\left(\overline{x}^{(k)}\right) - \lambda\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{(k)}. \tag{4}$$

Приклад 1

Визначити мінімум функції

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 x_2 \to \min_{\overline{x}\in R^n}$$

з заданою точністю обчислень $\varepsilon = 0.15$, прийнявши замість початкового наближення точку $\overline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.7 \\ 2.5 \end{bmatrix}$. Розв’язати задачу методом найшвидшого спуску.

Розв'язання

1-й крок мінімізації

Початкова точка задана : $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2,7 \\ 2,5 \end{bmatrix}$. Визначимо в цій точці значення функції, яке буде потрібним для контролю процесу мінімізації:

$$y(\bar{x}^{(0)}) = -5,192.$$

Визначимо напрямний вектор першого кроку:

$$\Delta\bar{x}^{(0)} = -\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{(0)} = \begin{bmatrix} 3(x_1^{(0)})^2 - 6x_2^{(0)} \\ 3(x_2^{(0)})^2 - 6x_1^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 6,87 \\ 2,55 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо $\lambda^{(0)}$ як розв'язання задачі:

$$y\left(\bar{x}^{(0)} - \lambda^{(0)}\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{(0)}\right) = (2,7 - 6,87\lambda^{(0)})^3 + (2,5 - 2,55\lambda^{(0)})^3 -$$

$$- 6(2,7 - 6,87\lambda^{(0)})(2,5 - 2,55\lambda^{(0)}) \to \min_{\lambda^{(0)} \to R},$$

або (після спрощення)

$$y\left(\lambda^{(0)}\right) = -340,8241(\lambda^{(0)})^3 + 325,9527(\lambda^{(0)})^2 - 53,699\lambda^{(0)} - 5,192 .$$

Розв'яжемо дану задачу методом Ейлера.

З рівняння $\left(\dfrac{\partial y}{\partial \lambda^{(0)}}\right) = -1022,4723(\lambda^{(0)})^2 + 651,9054\lambda^{(0)} - 53,6994 = 0$ визначимо стаціонарні точки:

$$\lambda_{1,2}^{(0)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} \lambda_1^{(0)} = 0,5404; \\ \lambda_2^{(0)} = 0,0972. \end{cases}$$

Досліджуємо стаціонарні точки:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial (\lambda^{(0)})^2}\right) = -2044,9446 \cdot \lambda^{(0)} + 651,9054 = \begin{cases} -453,1826 \text{ при } \lambda_1^{(0)} = 0,5404; \\ 453,1368 \text{ при } \lambda_2^{(0)} = 0,0972. \end{cases}$$

Згідно з критерієм Сільвестра $\lambda_1^{(0)}$ відповідає максимуму функції $y(\lambda^{(0)})$, а $\lambda_2^{(0)}$ – мінімуму. Нова точка наближення відповідно з (17)?:

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} - \lambda_2^{(0)}\Delta\bar{x} = \begin{bmatrix} 2,7 \\ 2,5 \end{bmatrix} - 0,0972\begin{bmatrix} 6,87 \\ 2,55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0322 \\ 2,2521 \end{bmatrix}.$$

Значення $y(\bar{x}^{(1)}) = -7,6452 < y(\bar{x}^{(0)}) = -5,192$, що свідчить про вірний рух до точки мінімуму. Задана точність обчислень після першого кроку не досягнута.

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(1)}\right| = |-1,123| > \varepsilon \qquad \left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(1)}\right| = |3,0227| > \varepsilon.$$

Потрібен подальший крок мінімізації. Процедура чергового кроку аналогічна процедурі попереднього кроку. Основні проміжні результати кожного кроку відбиті в таблиці 1.

Таблиця 1 – Основні проміжні результати кожного кроку

Номер кроку	$\overline{x}^{(k)} =$	$y^{(k)}$	$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{(k)}$	$\lambda^{(k)}$	$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2}\right)^{(k)}$
0	2,7 2,5	-5.192	6.87 2.55	0.097 2	453.136 8
1	2.032 2 2.232 1	-6.386 2	-1.123 3.022 7	0.059 5	170.218 1
2	2.099 2.072 4	-7.992 5	0.783 0.290 5	0.119	5.680 8
3	2.005 8 2.037 8	-7.992 5	-0.157 1 0.423 2	0.062 3	3.258
4	2.015 6 2.011 4	-7.998 8	0.119 5 0.043 6		

Оскільки обидві складові $\left(\frac{\partial y}{\partial \overline{x}}\right)^{(4)}$ за абсолютним значенням перевершують $\varepsilon = 0.15$,то $\overline{x}^* = \overline{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 2.0156 \\ 2.0114 \end{bmatrix};$ $\quad y^* = y\left(\overline{x}^{(4)}\right) = -7.9988.$

1.2 Метод Ньютона

Приклад 2

Знайти мінімум функції цілі

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 x_2$$

методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0.05$, взяти за початкову точку наближення точку $\overline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.3 \end{bmatrix}.$

Розв'язання

Для методу Ньютона напрямним є вектор

$$\Delta\overline{x}^{(k)} = -\left(H^{(k)}\right)^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial \overline{x}}\right)^{(k)}, \qquad (5)$$

а величина кроку – $\lambda^{(k)} = 1.$

1-й крок мінімізації

Визначимо перші й другі часткові похідні функції $y(\overline{x})$ у точці $\overline{x}^{(0)}$:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \overline{x}}\right)^{(0)} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 6x_2 \\ 3x_2^2 - 6x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.48 \\ 1.47 \end{bmatrix}; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(0)} = 6 \cdot x_1^{(0)} = 14.4; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(0)} = 6 \cdot x_2^{(0)} = 13.8;$$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^{(0)} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}\right)^{(0)} = -6.$$

Звідси $$H^{(0)} = \begin{bmatrix} 14.4 & -6 \\ -6 & 13.8 \end{bmatrix}.$$

Обернену матрицю визначимо за допомогою жорданових виключень:

$$H^{(0)} = \begin{bmatrix} 14.4 & -6 \\ -6 & 13.8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.0694 & 0.4169 \\ -0.4167 & 11.3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.0848 & 0.0369 \\ 0.0369 & 0.0885 \end{bmatrix} = \left(H^{(0)}\right)^{-1}.$$

Відповідно до (5):

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0848 & 0.0369 \\ 0.0369 & 0.0885 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3.48 \\ 1.47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0506 \\ 2.0415 \end{bmatrix}.$$

Для контролю процесу мінімізації треба порівняти значення функції в точках $\bar{x}^{(0)}$ та $\bar{x}^{(1)}$:

$$y^{(1)} = -7.9867 < y^{(0)} = -7.129.$$

Функція зменшується. Отже, має місце наближення до точки мінімуму. Але задана точність обчислень не досягнута, тому що складові вектору $\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.3671 \\ 0.1996 \end{bmatrix}$. за модулем перевершують величину ε. Потрібен подальший крок мінімізації.

2-й крок мінімізації

Зробивши обчислювальні операції аналогічні операціям першого кроку, одержимо:

$$\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.0011 \\ 2.0010 \end{bmatrix}; \qquad \left(\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \bar{\mathrm{x}}}\right)^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0072 \\ 0.0054 \end{bmatrix}.$$

З останнього рівняння виходить, що необхідна точність обчислень досягнена. А це означає, що $\bar{x}^{*} = \bar{x}^{(2)}; \quad \mathrm{y}^{*} = y\left(\bar{x}^{(2)}\right) = -7.9999.$

1.3 Метод покоординатного спуску

У методі покоординатного спуску, який ще зветься методом Гаусса – Зейделя, на кожному кроці змінюється тільки одна змінна. Тому рекурентне співвідношення між попередньою точкою наближення до мінімуму і подальшою має такий вигляд:

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \lambda_r^{(k)} \Delta x_r^{(k)},$$

де

$$\Delta x_r^{(k)} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}, \quad \text{а} \quad \lambda_r^{(k)} = \frac{1}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}\right|}, \tag{6}$$

тобто

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} - \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}\right|}. \tag{7}$$

Зауважимо, що друга похідна обов'язково повинна братися за модулем, інакше при її від'ємному значенні процес мінімізації піде у зворотному напрямку.

Варіювання змінних здійснюють послідовно: спочатку – перша, потім – друга і так далі. Цикл, що складається з n послідовних кроків, створює одну ітерацію. Пошук мінімуму закінчують, як тільки на черговому кроці абсолютне значення усіх складових вектора перших часткових похідних функції цілі будуть менш, ніж задана точність обчислень:

$$\left| \left(\frac{\partial\, y}{\partial\, x_i} \right)^{(k)} \right| < \varepsilon, \;\; i = \overline{1, n}. \tag{8}$$

Приклад 3

Методом покоординатного спуску знайти мінімум функції цілі $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.12$, взяти за початкову точку наближення точку $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.3 \end{bmatrix}$.

Розв'язання

Нульова ітерація:

1-й крок

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(0)} = 3.48 > \varepsilon; \qquad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \right)^{(0)} = 14.4$$

Нове значення змінної $x_1^{(1)}$ визначається відповідно до (7):

$$x_1^{(1)} = 2.4 - \frac{3.48}{14.4} = 2.1589.$$

Тепер формується нова проміжна точка $\bar{x}^{(1,0)} = \begin{bmatrix} 2.158 \\ 2.3 \end{bmatrix}$.

2-й крок

Нове значення змінної x_2 визначається також відповідно виразу (7). Треба пам'ятати, що до відповідних похідних підставляється нова проміжна точка $\bar{x}^{(1.0)}$.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(1,0)} = 2.92 > \varepsilon; \; \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right)^{(1,0)} = 13.8; \; x_2^{(1)} = 2.3 - \frac{2.92}{13.8} = 2.088.$$

У результаті нульової ітерації отримали точку $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.158 \\ 2.088 \end{bmatrix}$.

Необхідно пересвідчитися у наближенні до точки мінімуму в результаті нульової ітерації: $y^{(1)} = -7.882 < -7.129 = y^{(0)}$.

Перевіримо виконання співвідношення (8):

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(1)} = 1.442 > \varepsilon; \; \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(1)} = 0.131 > \varepsilon;$$

Співвідношення (8) не виконується. Тому переходимо до першої ітерації.

Перша ітерація:

1-й крок

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(1)} = 1.442 > \varepsilon; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(1)} = 12.948; \quad x_1^{(2)} = 2.158 - \frac{1.442}{12.948} = 2.047; \quad \overline{x}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 2.047 \\ 2.088 \end{bmatrix}.$$

2-й крок

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(2,1)} = 0.7972 > \varepsilon; \ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(2,1)} = 12.528; \ x_2^{(2)} = 2.088 - \frac{0.7972}{12.528} = 2.0243.$$

У результаті першої ітерації отримаємо $\overline{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.047 \\ 2.0243 \end{bmatrix}$.

Треба пересвідчитися у наближенні до точки мінімуму в результаті першої ітерації: $y^{(2)} = -7.99004 < -7.882 = y^{(1)}$.

Перевіримо виконання співвідношення (8):

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(2)} = 0.4248 > \varepsilon; \ \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(2)} = \left|-0.008\right| < \varepsilon;$$

Співвідношення (8) не виконується по змінній x_1, переходимо до другої ітерації .

Друга ітерація:

1-й крок

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(2)} = 0.4248 > \varepsilon; \ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(2)} = 12.282; \ x_1^{(3)} = 2.047 - \frac{0.4243}{12.282} = = 2.0124; \ \overline{x}^{(3,2)} = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0243 \end{bmatrix}.$$

2-й крок

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(3,2)} = 0.219 > \varepsilon; \ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(3,2)} = 12.1458; \ x_2^{(3)} = 2.0243 - \frac{0.219}{12.1458} = 2.0061; \quad \overline{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0061 \end{bmatrix};$$

$$y^{(3)} = -7.9993 < -7.9904 = y^{(2)}.$$

Перевіримо виконання співвідношення (8):

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(3)} = 0.113 < \varepsilon; \qquad \left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(3)}\right| = \left|-0.001\right| < \varepsilon;$$

Співвідношення (8) виконується.

$$\overline{x}^{*} = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0061 \end{bmatrix}; \quad y^{*} = -7.9993$$

2 УМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ. БАГАТОВИМІРНІ ЗАДАЧІ З ОБМЕЖЕННЯМИ У ВИГЛЯДІ РІВНОСТЕЙ

Математична модель багатовимірної оптимізаційної задачі з обмеженнями у вигляді рівностей така:

$$y(\overline{x}) \to \underset{\overline{x} \in \Omega}{opt} \quad \Omega: \ f_i(\overline{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}, n$$

Розгляд цієї теми ґрунтується на концепції залежних й незалежних змінних, що полягає у розбитті усіх змінних задачі на два підвектори: $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{s} \\ \bar{t} \end{bmatrix}$,

де $\bar{s}$ – підвектор залежних змінних;

$\bar{t}$ – підвектор незалежних змінних.

Необхідні умови локального умовного оптимуму такі :

$$\boxed{\left(\frac{\delta y}{\delta \bar{t}}\right)^{*} = 0}, \text{ де } \left(\frac{\delta y}{\delta \bar{t}}\right) = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{t}}\right)^{\mathrm{T}} - \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}}\right)^{\mathrm{T}} (\mathbf{W})^{-1}\mathbf{C};$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_m} \\ .. & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial s_1} & \frac{\partial f_m}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial t_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_{21}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial t_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial t_1} & \frac{\partial f_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial t_p} \end{bmatrix}.$$

Достатні умови точки локального мінімуму полягають у додатній визначеності в точці локального мінімуму матриці других умовних похідних функції цілі: $\mathbf{S} = \left[\frac{\delta^2 y}{\delta t_i \delta t_j}\right]$.

Матриця має розмір *(p ×p)* і визначається за формулою:

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}_{tt} - \mathbf{P}_{ts}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C} - \left(\mathbf{P}_{ts}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\right)^{\mathrm{T}} + \left(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{ss}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C},$$

де $\mathbf{W}^{-1}$, $\mathbf{C}$ – вже знайомі – обернена матриця Якобі і матриця управління;

$\mathbf{P}_{tt}$, $\mathbf{P}_{ts}$, $\mathbf{P}_{ss}$ – підматриці матриці.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ss} & \mathbf{P}_{st} \\ \mathbf{P}_{ts} & \mathbf{P}_{tt} \end{bmatrix} = \mathbf{H} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{H}_i \cdot$$

Тут $\mathbf{H}$ – вже знайома матриця других похідних функції цілі; $\mathbf{H}_i$ – матриця других похідних *i*-го обмеження задачі, визначається так:

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}, \ i = \overline{1, m};$$

λ_i – *коефіцієнти чутливості*, складові вектора $\bar{\lambda}^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{-1}$.

2.1 Метод підстановки

Приклад 4

Методом підстановки розв'язати задачу мінімізації функції

$$y(\bar{x}) = 2x_1^2 - \frac{x_3}{x_2} \to \min_{\bar{x} \in \Omega};$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1^2 \cdot x_2 - 1 = 0; \\ x_1 \cdot x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Цю задачу можна розв'язувати методом підстановки, оскільки обмеження на змінні задачі дозволяють легко виразити m *залежних змінних* (m = 2) через залишені p *незалежних* змінних (p = 1):

$$x_2 = \frac{1}{x_1^2}; \qquad x_3 = \frac{2}{x_1}; \ .$$

Необхідно підставити у функцію $y(\bar{x})$ замість залежних змінних x_2, x_3 їх вираз через незалежну змінну x_1. Ми зведемо задачу мінімізації з обмеженнями до задачі безумовної мінімізації функції:

$$y(x_1) = 2x_1^2 - 2x_1 \to \min_{x_1 \in R^1}.$$

Розв'язуючи цю задачу методом Ейлера, отримаємо:

$$\bar{x}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 4 \end{bmatrix}; \quad y^* = -\frac{1}{2}.$$

2.2 Метод Лагранжа

Цей метод полягає у заміні функції цілі функцією Лагранжа і подальшому визначенні її стаціонарних точок, що співпадають з стаціонарними точками початкової функції цілі.

Спочатку побудуємо функцію Лагранжа:

$$L(\bar{x}, \ \bar{\lambda}) = y(\bar{x}) - \bar{\lambda} \cdot \bar{f}(\bar{x}), \tag{9}$$

де $\bar{\lambda}$ – вектор коефіцієнтів чутливості або невизначених множників Лагранжа.

Далі розв'язання задачі полягає у визначенні стаціонарних точок функції Лагранжа: $\bar{\lambda}$ розглядається, як вектор додаткових змінних, а сама функція Лагранжа, як функція без обмежень. Стаціонарні точки функції Лагранжа визначаються як рішення системи рівнянь:

$$\begin{cases} \partial L(\bar{x}, \ \bar{\lambda}) = 0; \\ \dfrac{\partial L(\bar{x}, \ \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}} = -\bar{f}(\bar{x}) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Приклад 5

Методом Лагранжа знайти екстремум функції

$$y(\bar{x}) = 2x_1^2 - \frac{x_3}{x_2} \to \min_{\bar{x}\in\Omega};$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1^2 \cdot x_2 - 1 = 0; \\ x_1 \cdot x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Спочатку побудуємо функцію Лагранжа.

Для нашого прикладу функція Лагранжа така:

$$\partial L(\bar{x}, \quad \bar{\lambda}) = 2x_1^2 - \frac{x_3}{x_2} - \lambda_1\left(x_1^2 x_2 - 1\right) - \lambda_2\left(x_1 x_3 - 2\right),$$

а сама система рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - \lambda_1 \cdot 2x_1 x_2 - \lambda_2 x_3 = 0; \\ \dfrac{x_3}{x_2^2} - \lambda_1 x_1^2 = 0; \\ -\dfrac{1}{x_2} - \lambda_2 x_1 = 0; \\ x_1^2 x_2 - 1 = 0; \\ x_1 x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Звідки знаходимо стаціонарну точку: $\bar{x}^{(0)'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

Приклад 6

Знайти стаціонарні точки функції у задачі

$$y(\bar{x}) = 2x_1^2 - \frac{x_3}{x_2} \to \min_{\bar{x}\in\Omega};$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1^2 x_2 - 1 = 0; \\ f_2 = x_1 x_3 - 2 = 0, \end{cases}$$

використовуючи метод Якобі.

Розв'язання

Стаціонарні точки функції $y(\bar{x})$ від n змінних, з накладеними на змінні обмеженнями

$$f_i(\bar{x}) = 0, \quad \mathrm{i} = 1,2,\cdots,\mathrm{m}., \tag{11}$$

визначаються методом Якобі, як сумісне рішення системи рівнянь

$$\left(\frac{\delta y}{\delta \bar{t}}\right)' = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{t}}\right)' - \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}}\right)' \cdot W^{-1} \cdot C \tag{12}$$

з системою (11). У системі рівнянь (12) $\bar{t}$ – вектор незалежних змінних, $\bar{s}$ – вектор залежних змінних.

Виберемо в умовах прикладу залежні змінні – x_2 і x_3, незалежна змінна – x_1. Знайдемо вектор умовних похідних за незалежними змінними відповідно до (12):

$$\left(\frac{\delta y}{\delta \bar{t}}\right)' = \frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} - \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_3} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} =$$

$$= 4x_1 - \begin{bmatrix} \frac{x_3}{x_2^2} & \frac{-1}{x_2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1^2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= 4x_1 - \begin{bmatrix} \frac{x_3}{x_2^2} & \frac{-1}{x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4x_1 - \frac{x_3}{x_1 x_2}.$$

Складемо для даного прикладу систему рівнянь типу (9)–(10):

$$\begin{cases} 4x_1 - \frac{x_3}{x_1 x_2} = 0; \\ x_1^2 x_2 - 1 = 0; \\ x_1 x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Її розв'язок $\bar{x}^{(0)'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 4 \end{bmatrix}$ є шуканою стаціонарною точкою.

Приклад 7

Довести, що стаціонарна точка $\bar{x}^{(0)'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 4 \end{bmatrix}$, у прикладах 5, 6, є точкою локального мінімуму $\bar{x}^{(0)'} = \bar{x}^*$.

Розв'язання

Стаціонарна точка функції $y(\bar{x})$ з обмеженнями на зміні $\bar{f}(\bar{x}) = 0$ є точкою локального мінімуму, якщо матриця додатно визначена.

$$S = P_{tt} - P_{ts} \cdot W^{-1} \cdot C - \left(P_{ts} \cdot W^{-1} \cdot C\right)' + \left(W^{-1} \cdot C\right)' P_{ss} \cdot W^{-1} \cdot C \qquad (13)$$

У виразі (13) P_{tt}, P_{ts}, P_{ss} підматриці матриці

$$P = \begin{bmatrix} P_{ss} & P_{st} \\ P_{ts} & P_{tt} \end{bmatrix} = H_0 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j H_j,$$

де $\bar{s}$ – вектор залежних змінних;

$\bar{t}$ – вектор незалежних змінних;

H_0 – матриця Гесса; λ_j – складова вектору $\bar{\lambda}' = \left(-\frac{\partial y}{\partial \bar{s}}\right)' \cdot W^{-1}$;

H_j – матриця других похідних функції $f_j(\bar{x})$.

Для розглянутого прикладу отримуємо:

$$\bar{x}^{(0)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 4 & 4\end{bmatrix};\quad \bar{t}=[x_1];\quad \bar{s}=\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix};\quad W^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{x_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix};\quad \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}}\right)=\begin{bmatrix}\frac{x_3}{x_2^2}\\ -\frac{1}{x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{bmatrix};$$

$$\bar{\lambda}=[\lambda_1 \quad \lambda_2]=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}=4;\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}=-\frac{2x_3}{x_2^3};\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2}=0;\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_3}=0;\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_3\partial x_2}=\frac{1}{x_2^2};$$

$$H_0=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{2x_3}{x_2^3} & \frac{1}{x_2^2}\\ 0 & \frac{1}{x_2^2} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16}\\ 0 & \frac{1}{16} & 0\end{bmatrix};$$

оскільки

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(0)}=4;\quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(0)}=-\frac{1}{8};\quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2}\right)^{(0)}=0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}\right)^{(0)}=\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_3}\right)^{(0)}=0;\quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_3}\right)^{(0)}=\frac{1}{16}.$$

Знайдемо матриці H_1 та H_2. Для цього візьмемо другі похідні функцій обмежень.

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}=2x_2;\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2}=0;\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_2}=2x_1;$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_3}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2\partial x_3}=0;\quad H_1=\begin{bmatrix}2x_2 & 2x_1 & 0\\ 2x_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2}=0;\quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2\partial x_3}=0;\quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\partial x_3}=1;$$

$$H_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}2x_1x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix};$$

$$S=-4-\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix}\right)^{-1}++\left(\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & \frac{1}{16}\\ \frac{1}{16} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix}=4>0.$$

Отже, $\bar{x}^{(0)'}=\bar{x}^{*}$.

3 УМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ. БАГАТОВИМІРНІ ЗАДАЧІ ПРИ ДВОБІЧНИХ ОБМЕЖЕННЯХ ЗМІННИХ

3.1 Диференціальний алгоритм

Приклад 8

За допомогою диференціального алгоритму розв’язати задачу мінімізації функції

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{bmatrix} -12 \\ -20 \end{bmatrix} \le \bar{x} \le \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix};$$

з точністю обчислень $\varepsilon = 0.5$ і початковою точкою наближення $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Розв’язання

Для розв’язання даної задачі треба скористатися диференціальним алгоритмом – методом покоординатного спуску, узагальненим на випадок двобічної обмеженості змінних .

Метод являє собою ітераційний процес. На кожному кроці k-й ітерації перевіряється порушення необхідних умов. Можливі два випадки порушення необхідних умов:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(k)} > 0 \quad \text{при} \quad x_r^{(k)} > x_r^{+} \qquad (14)$$

або

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(k)} < 0 \quad \text{при} \quad x_r^{(k)} < x_r^{++} \qquad (15)$$

У разі порушення (14) $\Delta x_r < 0,$ і величина приросту змінної x_r визначається таким виразом:

$$\Delta x_r = \max_{\Delta x_r < 0} \left[x_r^{+} - x_r^{(k)}; \quad -\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}} \right]; \qquad (16)$$

у разі порушення (15) – таким:

$$\Delta x_r = \min_{\Delta x_r > 0} \left[x_r^{++} - x_r^{(k)}; \quad -\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}} \right]; \quad . \qquad (17)$$

Розв’язання прикладу 8 є послідовністю ітерацій.

Нульова ітерація:

1-й крок

У початковій точці $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $y^{(0)} = 13$ (задана точність за змінною x_1 ще не досягнена): $\left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(0)} \right| = 2x_1 + 2x_2 = 6 > \varepsilon.$ Оскільки $x_1^{(0)} > x_1^{+}$ і $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(0)} > 0$, приріст змінної обчислюється за допомогою виразу (16): $\Delta x_1^{(0)} = \max\limits_{\Delta x_1 < 0} \left[-12 - 1; \ -\frac{6}{2} \right] = -3.$

Нове значення змінної $x_1^{(1)}$ буде рівним: $x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)} = 1 - 3 = -2.$

Проміжна точка $\bar{x}^{(1,0)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$; .

2-й крок

$$\left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(1,0)} \right| = 4x_2 + 2x_1 = 4 > \varepsilon;$$

$$\Delta x_2^{(0)} = \max_{\Delta x_2 < 0} \left[-20 - 2; \ -\frac{4}{4} \right] = -1; \quad x_2^{(1)} = 2 - 1 = 1.$$

Нове значення функції у точці $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ свідчить, що напрям руху до точки мінімуму обрано правильно : $y^{(1)} = 2 < \mathrm{y}^{(0)} = 13.$

Перша ітерація:

$$\left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(1)} \right| = |-2| > \varepsilon; \qquad \Delta x_1^{(1)} = \min_{\Delta x_1 > 0} \left[15 - (-2); \ -\frac{-2}{2} \right] = 1; \ x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + \Delta x_1^{(1)} = -2 + 1 = -1;$$

$$\bar{x}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(2,1)} \right| = 2 > \varepsilon; \qquad \Delta x_2^{(1)} = \max_{\Delta x_2 < 0} \left[-20 - 1; \ -\frac{2}{4} \right] = -0{,}5;$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + \Delta x_2^{(1)} = 1 - 0{,}5 = 0{,}5; \quad \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \quad y^{(2)} = 0{,}5 < \mathrm{y}^{(1)} = 2.$$

Друга ітерація:

$$\left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(2)} \right| = |-1| > \varepsilon; \qquad \Delta x_1^{(2)} = \min_{\Delta x_1 > 0} \left[15 - (-1); \ -\frac{-1}{2} \right] = 0{,}5; \ x_1^{(3)} = x_1^{(2)} + \Delta x_1^{(2)} = -1 + 0{,}5 = -0{,}5;$$

$$\bar{x}^{(3,2)} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \quad \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(3,2)} \right| = 1 > \varepsilon; \qquad \Delta x_2^{(2)} = \max_{\Delta x_2 < 0} \left[-20 - 0{,}5; \ -\frac{1}{4} \right] = -0{,}25;$$

$$x_2^{(3)} = x_2^{(2)} + \Delta x_2^{(2)} = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25; \quad \bar{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} \quad y^{(3)} = 0{,}125 \quad < \mathrm{y}^{(2)} = 0{,}5.$$

Третя ітерація:

$$\left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^{(3)} \right| = |-0{,}5| = \varepsilon; \qquad \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^{(3)} \right| = 0.$$

Необхідні умови додержуються заданої точності. Отже, треба перевірити достатні: якщо матриця других похідних для обох змінних додатно визначена, тоді $\overline{x}^{(3)}$ є точкою мінімуму.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = 2 > 0; \quad \Delta_2 = 8 - 4 = 4 > 0.$$

Отже мінімум знайдено: $\overline{x}^* = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}; \quad y^* = y^{(3)} = 0{,}125.$

4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

4.1 Індивідуальні завдання з теми «Безумовна оптимізація. Ітераційні методи безумовної оптимізації»

Варіант № 1

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $\varepsilon = 0.01$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [0{,}3 \quad 0{,}3]$.

Варіант № 2

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $\varepsilon = 0.01$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [0{,}2 \quad 0{,}1]$.

Варіант № 3

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $\varepsilon = 0.02$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [0{,}3 \quad 0{,}2]$.

Варіант № 4

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $\varepsilon = 0.01$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [0{,}1 \quad 0{,}3]$.

Варіант № 5

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $\varepsilon = 0.002$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [0{,}2 \quad 0{,}2]$.

Варіант № 6

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}9 \quad 0{,}8]$.

Варіант № 7

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [1{,}1 \quad 1{,}2]$.

Варіант № 8

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [1{,}3 \quad 1{,}1]$.

Варіант № 9

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}7 \quad 0{,}8]$.

Варіант № 10

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}8 \quad 0{,}8]$.

Варіант № 11

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.02$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}9 \quad 0{,}1]$.

Варіант № 12

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.05$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [1{,}1 \quad 0{,}2]$.

Варіант № 13

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [0{,}8 \quad 0{,}2]$.

Варіант № 14

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.01$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [1{,}2 \quad -0{,}1]$.

Варіант № 15

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [1{,}2 \quad 0{,}3]$.

Варіант № 16

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [1{,}8 \quad 1{,}8]$.

Варіант № 17

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [1{,}9 \quad 1{,}8]$.

Варіант № 18

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.05$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [1{,}7 \quad 1{,}9]$.

Варіант № 19

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.05$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [2{,}1 \quad 1{,}9]$.

Варіант № 20

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [2{,}1 \quad 2{,}2]$.

Варіант № 21

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1 x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [2{,}8 \quad 2{,}9]$.

Варіант № 22

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1 x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [2{,}8 \quad 3{,}1]$.

Варіант № 23

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1 x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [3{,}2 \quad 2{,}8]$.

Варіант № 24

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1 x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [3{,}1 \quad 3{,}1]$.

Варіант № 25

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1 x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.4$, приймаючи як початкову точку $\overline{x}^{(0)\prime} = [2{,}9 \quad 3{,}2]$.

Варіант № 26

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [4{,}1 \quad 3{,}8]$.

Варіант № 27

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [4{,}1 \quad 3{,}7]$.

Варіант № 28

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [3{,}9 \quad 4{,}1]$.

Варіант № 29

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [3{,}7 \quad 4{,}2]$.

Варіант № 30

Методами Ньютона, найшвидшого та покоординатного спуску знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $\varepsilon = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [3{,}8 \quad 3{,}8]$.

4.2 Індивідуальні завдання з теми «Багатовимірні оптимізаційні задачі з обмеженнями у вигляді рівності»

Варіант № 1

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0.$$

Варіант № 2

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_2^2 + 2x_1x_3 - x_1 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \qquad \Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 8 = 0 \\ f_2 = x_2 - x_3 - 4 = 0 \end{cases}.$$

Варіант № 3

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = \frac{3}{x_1^2} + \frac{3}{x_2^2} + 6x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0.$$

Варіант № 4

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 + 9x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_1x_2x_3 - 1 = 0.$$

Варіант № 5

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \quad \Omega: f_1 = 2x_1 + 3x_2 - 5 = 0.$$

Варіант № 6

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \qquad \Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ f_2 = x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Варіант № 7

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1x_2x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0.$$

Варіант № 8

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + 2x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0.$$

Варіант № 9

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1^3+x_2^3-3x_3 \to \min_{x\in\Omega}, \quad \Omega: f_1=x_3-x_1x_2=0.$$

Варіант № 10

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x})=x_1^2+x_3^2-x_1-2x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega},.$$
$$\Omega: f_1=x_1+2x_2+x_3-6=0$$

Варіант № 11

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1^3+x_2^3-6x_3 \to \min_{x\in\Omega}, \quad \Omega: f_1=x_3-x_1x_2=0.$$

Варіант № 12

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1^3+x_2^3-9x_3 \to \min_{x\in\Omega}, \quad \Omega: f_1=x_3-x_1x_2=0.$$

Варіант № 13

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=\frac{36}{x_1}+\frac{9}{x_2}+x_3 \to \min_{x\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1=x_3-\sqrt{x_1x_2}=0.$$

Варіант № 14

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=\frac{2}{x_1^4}+\frac{2}{x_2^4}+x_3 \to \min_{x\in\Omega}, \quad \Omega: f_1=x_3-x_1x_2=0.$$

Варіант № 15

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1^3+x_2^3-15x_3 \to \min_{x\in\Omega}, \quad \Omega: f_1=x_3-x_1x_2=0.$$

Варіант № 16

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1^3+x_2^3-21x_3 \to \min_{x\in\Omega}, \quad \Omega: f_1=x_3-x_1x_2+5=0.$$

Варіант № 17

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0.$$

Варіант № 18

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1x_2 - 4x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \quad \Omega: \begin{cases} f_1 = 3x_1 - x_2 + 2 = 0 \\ f_2 = x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}.$$

Варіант № 19

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1x_2 - 4 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \quad \Omega: \{ f_1 = 3x_1 - x_2 + 2 = 0.$$

Варіант № 20

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 24x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0.$$

Варіант № 21

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 7x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \quad \Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 22

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \quad \Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 - x_2 = 0 \\ f_2 = x_3 - x_1x_2 = 0 \end{cases}.$$

Варіант № 23

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \quad \Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ f_2 = x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Варіант № 24

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = 2x_1x_3 + 7x_2^2 - x_1 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}, \quad \Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ f_2 = x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

Варіант № 25

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1^3+x_2^3-12x_3\to\min_{\bar{x}\in\Omega},\quad \Omega:\ f_1=x_3-x_1x_2=0.$$

Варіант № 27

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1x_2-4\to\min_{\bar{x}\in\Omega},\ \Omega:\ f_1=3x_1-x_2+2=0.$$

Варіант № 28

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1^3+x_2^3-6x_3\to\min_{\bar{x}\in\Omega},\quad \Omega:\ f_1=x_3-x_1x_2=0.$$

Варіант № 29

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=e^{x_1x_2}\to\min_{\bar{x}\in\Omega},\quad \Omega:\{\ f_1=x_1+x_2-a=0.$$

Варіант № 30

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1^3+x_2^3-27x_3\to\min_{\bar{x}\in\Omega},\quad \Omega:\ f_1=x_3-x_1x_2=0.$$

4.3 Індивідуальні завдання з теми «Багатовимірні задачі при двобічних обмеженнях змінних»

Варіант № 1

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x})=2x_1^3+x_1x_2^2+5x_1^2+x_2^2,\quad \Omega:\begin{bmatrix}-5\\-2\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon=0,5$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)}=\left[0,7\quad 0\right]$.

Варіант № 2

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x})=2x_1^3+x_1x_2^2+5x_1^2+x_2^2,\quad \Omega:\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon=0,5$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)}=\left[0,7\quad -0,3\right]$.

Варіант № 3

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = 2x_1^3+x_1x_2^2+5x_1^2+x_2^2 \;, \qquad \Omega: \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}1$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}2 \end{bmatrix}$.

Варіант № 4

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3x_1-6x_2 \;, \qquad \Omega: \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}5$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Варіант № 5

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3x_1-6x_2 \;, \qquad \Omega: \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}5$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 2 \end{bmatrix}$.

Варіант № 6

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3x_1-6x_2 \;, \qquad \Omega: \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}1$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 & 3{,}5 \end{bmatrix}$.

Варіант № 7

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3x_1-6x_2 \;, \qquad \Omega: \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}1$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1{,}6 \end{bmatrix}$.

Варіант № 8

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3x_1-6x_2 \ , \qquad \Omega: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [2 \quad 1]$.

Варіант № 9

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3x_1-6x_2 \ , \qquad \Omega: \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,5 \quad 1,6]$.

Варіант № 10

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3x_1-6x_2 \ , \qquad \Omega: \begin{bmatrix} -15 \\ 3,5 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} -0,5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [-1 \quad 4]$.

Варіант № 11

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$y(\bar{x}) = x_1^3+x_2^2-2x_1x_2-3x_1+2x_2$, $\quad \Omega: \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$ з точністю обчислення $\varepsilon = 0,03$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,7 \quad -0,1]$.

Варіант № 12

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3+x_2^2-2x_1x_2-3x_1+2x_2 \ , \qquad \Omega: \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,4$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [1,2 \quad 0,8]$.

Варіант № 13

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3+x_2^2-2x_1x_2-3x_1+2x_2 \quad , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,2$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [1,2 \quad 0,8]$.

Варіант № 14

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3+x_2^2-2x_1x_2-3x_1+2x_2 \quad , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} 2 \\ 0,1 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [3 \quad 0,5]$.

Варіант № 15

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3+x_2^2-2x_1x_2-3x_1+2x_2 \; , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [0,1 \quad 1]$.

Варіант № 16

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3+x_2^3-15x_1x_2 \quad , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} -2 \\ 4,8 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 5,3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,5$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [5,3 \quad 4,8]$.

Варіант № 17

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\bar{x})$

$$y(\bar{x}) = x_1^3+x_2^3-15x_1x_2 \quad , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} -2 \\ 3,2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4,9 \\ 5,5 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,1$, прийнявши за точку початкового наближення $\bar{x}^{(0)} = [4,5 \quad 5,5]$.

Варіант № 18

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1x_2 \quad , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 3{,}2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}5$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [0{,}2 \quad 6{,}5]$.

Варіант № 19

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2 \quad , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}3$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [3{,}8 \quad 4{,}1]$.

Варіант № 20

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2 \quad , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} -2 \\ 4{,}2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [3 \quad 4{,}3]$.

Варіант № 21

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2 \quad , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 3{,}9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [3{,}8 \quad 3{,}9]$.

Варіант № 22

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2 \quad , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 3{,}9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [3{,}8 \quad 3{,}9]$.

Варіант № 23

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 \ , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,2$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [2{,}8 \quad 3{,}1]$.

Варіант № 24

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 \ , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 2{,}8 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,02$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [3{,}3 \quad 2{,}6]$.

Варіант № 25

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 \ , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} 0 \\ 3{,}2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 2{,}8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,01$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [2 \quad 4]$.

Варіант № 26

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2 \ , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} -2 \\ 1{,}8 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,2$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [2{,}01 \quad 1{,}9]$.

Варіант № 27

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2 \ , \qquad \Omega : \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1{,}8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0,2$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [1{,}5 \quad 1{,}6]$.

Варіант № 28

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2 \quad , \qquad \Omega: \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 3 \\ 1{,}7 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [2{,}5 \quad 1]$.

Варіант № 29

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \quad , \qquad \Omega: \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}4$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [0{,}7 \quad 1.3]$.

Варіант № 30

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \quad , \qquad \Omega: \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 0{,}9 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [0{,}7 \quad 0.5]$.

Варіант № 31

За допомогою диференціального алгоритму знайти мінімум функції $y(\overline{x})$

$$y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \quad , \qquad \Omega: \begin{bmatrix} 1{,}3 \\ -2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$$

з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за точку початкового наближення $\overline{x}^{(0)} = [1{,}5 \quad 0.7]$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Григорків В. С. Оптимізаційні методи та моделі : підручник / В. С. Григорків, М. В. Григорків. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2016. – 400 с.

2. Бурименко Ю. И. Оптимизационные методы и модели с решением задач на компьютере : учеб. пособ. / Ю. И. Бурименко, И. Ю. Лебедева, А. Ю. Щуровская. – Одесса, 2016. – 152 с.

3. Волков В. Е. Лінійне програмування : навч. посіб. / уклад. : В. Е. Волков, О. Б. Максимова, Н. О. Макоєд. – Одеса : ОНАХТ, 2018. – 115 с.

4. Піддубний О. М. Дослідження операцій : навч. посіб. / О. М. Піддубний, Ю. І. Харкевич. – Луцьк : Східноєвроп. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2017. – 268 с.

5. Вітлінський В. В. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація [Електрон. ресурс] : навч. посіб. / В. В. Вітлінський, Т. О. Терещенко, С. С. Савіна. – Електрон. текст. дані. – Режим доступу: file:///C:/Users/134E~1/AppData/Local/Temp/%D0%95%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D1%96%D0%BA%D0%BE-%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D1%96%20%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%20%D1%96%20%D0%BC%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%96%20%D0%BE%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D1%96%D0%B7%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%8F.pdf, вільний (дата звернення: 15.11.2022). – Назва з екрана.

Електронне навчальне видання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до проведення практичних занять
із навчальної дисципліни

«ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ»

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти усіх форм навчання зі спеціальності 122 – Комп'ютерні науки)

Укладач **ШТЕЛЬМА** Ольга Миколаївна

Відповідальний за випуск *М. В. Булаєнко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *О. М. Штельма*

План 2022, поз. 246М

Підп. до друку 15.03.2023. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 1,9.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.