

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

## **МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**

до практичних занять  
із навчальної дисципліни  
**«СУЧАСНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ  
ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ»**  
Частина третя  
**«Вирішення оптимізаційних задач  
засобами Microsoft Excel»**

*(для здобувачів другого (магістерського)  
рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання  
зі спеціальності 141 – Електроенергетика,  
електротехніка та електромеханіка)*

**Харків  
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова  
2022**

Методичні рекомендації до практичних занять із навчальної дисципліни «Сучасні методи аналізу та оптимізації електротехнічних систем». Частина третя «Вирішення оптимізаційних задач засобами Microsoft Excel» (для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : В. М. Охріменко, О. О. Воронков. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 50 с.

Укладачі: канд. техн. наук, доц. В. М. Охріменко,  
канд. екон. наук, доц. О. О. Воронков

#### **Рецензент**

**В. Ф. Харченко**, доктор технічних наук, професор, професор кафедри систем електропостачання та електроспоживання міст Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

*Рекомендовано кафедрою систем електропостачання та електроспоживання міст, протокол № 1 від 5 вересня 2022 р.*

## ЗМІСТ

Вступ .....	4
Практичне заняття 13 Робота з надбудовою Microsoft Excel «Пошук рішення» .....	5
Практичне заняття 14 Розв’язання одноіндексної задачі лінійного програмування .....	23
Практичне заняття 15 Аналіз чутливості одноіндексних задач лінійного програмування .....	34
Практичне заняття 16 Стандартна транспортна задача. Двоіндексна задача лінійного програмування.....	40
Список рекомендованих джерел .....	49

## ВСТУП

Методичні рекомендації призначені для виконання практичних занять за другим змістовим модулем «Методи оптимізації електротехнічних систем» дисципліни «Сучасні методи аналізу та оптимізації електротехнічних систем» здобувачами вищої освіти спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка усіх форм навчання освітньо-професійних програм «Електротехнічні системи електропостачання» та «Магістральні електричні мережі: управління, експлуатація та розвиток».

Практичні заняття передбачають закріплення навичок з побудови математичних моделей електротехнічних систем для розв'язання задач дослідження (режиму, структури тощо) та оптимізації конкретної системи.

У цих методичних рекомендаціях розглянуті основні типи задач лінійного програмування, надані рекомендації з побудови їх математичних моделей та з пошуку оптимальних розв'язків засобами табличного редактора Microsoft Excel. Кожне практичне заняття включає 12 варіантів навчальних завдань певного типу, а також список контрольних запитань, що охоплюють як теоретичні положення, так і конкретні варіанти завдань.



Для побудови математичної моделі необхідно визначити, що є шуканими величинами, тобто змінними задачі; у чому полягає ціль, для досягнення якої із всіх припустимих значень змінних потрібно обрати ті, що відповідатимуть найкращому, тобто оптимальному, розв'язку; які обмеження накладені на змінні.

У цілому практичному занятті розглядається розв'язання одноіндексної задачі ЛП, що являє собою загальну розподільну задачу.

### **Порядок виконання роботи**

1. Ввести умову задачі, для чого

– створити екранну форму для введення умови задачі: змінних, цільової функції, обмежень, граничних умов;

– ввести вихідні дані в екранну форму: коефіцієнти цільової функції, коефіцієнти при змінних в обмеженнях, праві частини обмежень;

– ввести залежності з математичної моделі в екранну форму: формулу для розрахунку цільової функції, формули для розрахунку значень лівих частин обмежень;

– задати цільову функцію (у вікні «Поиск решения»): вказати цільову комірку, напрямок оптимізації цільової функції;

– ввести обмеження й граничні умови (у вікні «Поиск решения»): комірки зі значеннями змінних, граничні умови для припустимих значень змінних, співвідношення між правими й лівими частинами обмежень.

2. Отримати розв'язок задачі, для чого:

– встановити параметри розв'язання задачі (у вікні «Поиск решения»);

– запустити задачу на розв'язання (у вікні «Поиск решения»);

– обрати формат виводу розв'язку (у вікні «Результаты поиска решения»).

### **Приклад 13.1**

Знайдемо розв'язок для задачі ЛП, що подана у вигляді такої моделі:

$$\begin{cases} L(X) = 130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} -1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\ 4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4 \leq 89, \\ x_j \geq 0; j = \overline{1,4}. \end{cases} \end{cases}$$

Створимо екранну форму для введення умов задачі, у якій кожній змінній й кожному коефіцієнту задачі поставлено у відповідність конкретну комірку Excel (рис. 13.1). Зокрема, змінним  $X_j$  відповідають комірки **B3 - E3**, коефіцієнтам цільової функції відповідають комірки **B7 - E7**, правим частинам обмежень відповідають комірки **H13 - H14**. Введемо в екранну форму коефіцієнти.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<b>Змінні</b>									
2	<b>Ім'я</b>	X1	X2	X3	X4					
3	<b>Значення</b>									
4	<b>Ниж.границя</b>	0	0	0	0					
5										
6	<b>Цільова функція</b>									
7	<b>Коефіцієнти</b>	130,5	20	56	87,8					
8	<b>Значення</b>									
9	<b>Напрямок</b>	max								
10										
11	<b>Обмеження</b>					<b>Лів.ч.</b>	<b>Знак</b>	<b>Прав.ч.</b>		
12	<b>Обмеження 1</b>	-1,8	2	1	-4		=	756		
13	<b>Обмеження 2</b>	-6	2	4	-1		>=	450		
14	<b>Обмеження 3</b>	4	-1,5	10,4	13		<=	89		
15										

Рисунок 13.1 – Екранна форма задачі

Введемо в екранну форму залежності з математичної моделі. В комірку **B8**, у якій відобразатиметься значення цільової функції, введемо формулу, за якою це значення буде розраховане:

$$130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4.$$

Використовуючи позначення відповідних комірок в Excel (див. рис. 13.1), формулу для розрахунку цільової функції можна записати як суму добутків кожної з комірок, відведених для значень змінних задачі (**B3, C3, D3, E3**), на відповідну комірку, відведену для коефіцієнтів цільової функції (**B7, C7, D7, E7**), тобто

$$B7 \cdot B3 + C7 \cdot C3 + D7 \cdot D3 + E7 \cdot E3.$$

Щоб задати зазначену формулу, введемо у комірку **B8** функцію Excel з відповідними аргументами:

$$=СУММПРОИЗВ(B7:E7;B2:E2),$$

у результаті в цільовій комірці з'явиться 0 (нульове значення) (рис. 13.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	<b>Змінні</b>											
2	Ім'я	X1	X2	X3	X4							
3	Значення											
4	Ниж.границя	0	0	0	0							
5												
6	<b>Цільова функція</b>											
7	Коефіцієнти	130,5	20	56	87,8							
8	Значення	0										
9	Напрямок	max										
10												
11	<b>Обмеження</b>					Лів.ч.	Знак	Прав.ч.				
12	Обмеження 1	-1,8	2	1	-4	0	=	756				
13	Обмеження 2	-6	2	4	-1	0	>=	450				
14	Обмеження 3	4	-1,5	10,4	13	0	<=	89				

Рисунок 13.2 – Екранна форма задачі після введення усіх необхідних даних

Введемо залежності для лівих частин обмежень. Ліві частини обмежень задачі являють собою суму добутків кожної з комірок, відведених для значень змінних задачі (**B3, C3, D3, E3**), на відповідну комірку, відведену для коефіцієнтів конкретного обмеження (**B12, C12, D12, E12** – 1-е обмеження; **B13, C13, D13, E13** – 2-е обмеження й **B14, C14, D14, E14** – 3-е обмеження). Формули, що відповідають лівим частинам обмежень, подані у таблиці 13.1.

Як видно з таблиці 13.1, формули, що задають ліві частини обмежень задачі, відрізняються одна від одної та від формули в цільовій комірці **B8** тільки номером рядка в другому масиві. Цей номер визначається тим рядком, у якому обмеження записане в екранній формі. Тому для завдання залежностей для лівих частин обмежень досить скопіювати формулу з цільової комірки у комірки лівих частин обмежень, але необхідно попередньо посилання на комірки, що містять значення  $X_j$ , зробити абсолютними, указавши символ долара натисканням клавіші F4.



Таблиця 13.1 – Формули, що описують обмеження моделі

Ліва частина обмеження	Формула Excel
$-1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ або $B10 \cdot B3 + C10 \cdot C3 + D10 \cdot D3 + E10 \cdot E3$	<b>=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B12:E12)</b>
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ або $B11 \cdot B3 + C11 \cdot C3 + D11 \cdot D3 + E11 \cdot E3$	<b>=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B13:E13)</b>
$4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4$ або $B12 \cdot B3 + C12 \cdot C3 + D12 \cdot D3 + E12 \cdot E3$	<b>=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B14:E14)</b>

Задамо цільову функцію у вікні «Поиск решения», що викликається з меню «Сервис» (рис. 13.3). Для цього поставимо курсор у поле «Установить целевую ячейку» і введемо адресу цільової комірки **\$B\$8** або натиснемо лівою клавішею миші на цільову комірку в екранній формі. Клацнемо один раз лівою клавішею миші селекторну кнопку «максимальному значенню» для вказівки напрямку оптимізації цільової функції.

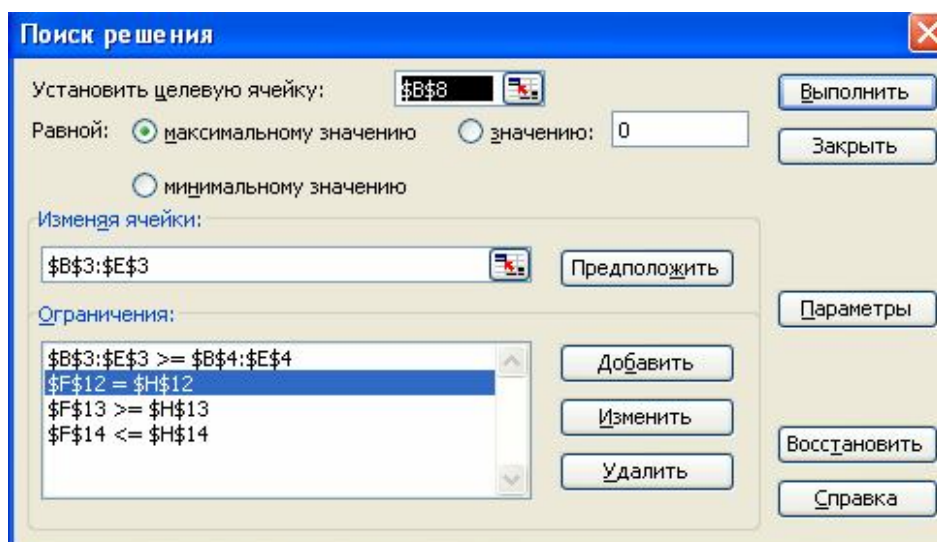


Рисунок 13.3 – Вікно задачі «Поиск решения»

Введемо обмеження та граничні умови. Задамо комірки змінних. Для цього у вікні «Поиск решения» у поле «Изменяя ячейки» впишемо адреси змінних  $X_j$  – комірки **\$B\$3:\$E\$3**. Необхідні адреси можна також внести у поле «Изменяя ячейки» автоматично, шляхом виділення мишею відповідних комірок змінних безпосередньо в екранній формі.

Задамо граничні умови для припустимих значень змінних. У нашому випадку на значення змінних накладається тільки гранична умова невід’ємності, тобто їх нижня границя повинна дорівнювати нулю (див. рис. 13.1). Після натискання кнопки «Добавить» з’явиться вікно «Добавление ограничения» (рис. 13.4). У поле «Ссылка на ячейку» введемо адреси комірок змінних  $B3:E3$ . У полі знака відкриємо список пропонованих знаків та виберемо  $\geq$ . У поле «Ограничение» введемо адреси комірок нижньої границі значень змінних, тобто  $B4:E4$ .

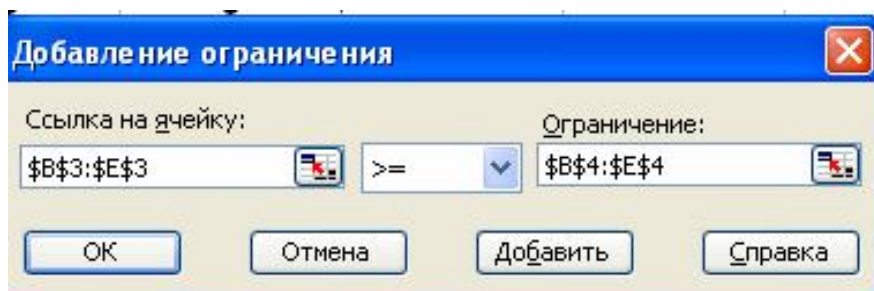


Рисунок 13.4 – Додавання умови невід’ємності змінних задачі

Для введення обмежень, знаходячись у вікні «Добавление ограничения», натиснемо кнопку «Добавить» і в полі «Ссылка на ячейку» введемо адресу комірки лівої частини конкретного обмеження, наприклад  $B12$ . Це можна зробити як з клавіатури, так і шляхом виділення мишею потрібної комірки безпосередньо в екранній формі. Далі відповідно до умови задачі оберемо у полі знака необхідний знак, наприклад  $=$ . У поле «Ограничение» введемо адресу комірки правої частини розглянутого обмеження, наприклад  $H12$ .

Аналогічно введемо обмеження:  $B11 \geq H11$  та  $B12 \leq H12$ . Підтвердимо введення всіх перелічених вище умов натисканням кнопки ОК.

Вікно «Поиск решения» після введення всіх необхідних даних задачі наведене на рисунку 13.3.

Якщо при введенні умови задачі виникає необхідність у зміні або видаленні внесених обмежень або граничних умов, то це роблять натисканням кнопки «Изменить» або «Удалить» (див. рис. 13.3).

Дістанемо оптимальний розв’язок задачі. Попередньо треба встановити параметри розв’язання. Задача запускається на розв’язання у вікні «Поиск решения», але для настанови конкретних параметрів розв’язання задач оптимізації певного класу необхідно натиснути кнопку «Параметры» та заповнити певні поля вікна «Параметры поиска решения» (рис. 13.5).

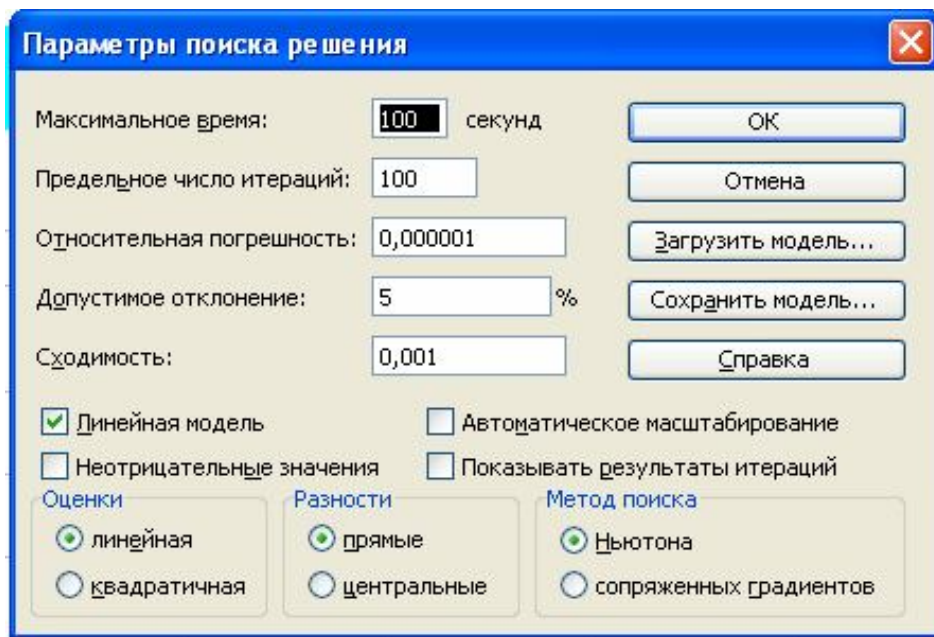


Рисунок 13.5 – Параметри пошуку рішення, що підходять для більшості задач ЛП

Параметр «*Максимальное время*» служить для призначення часу (у секундах), що виділяється на розв’язання задачі. У поле можна ввести час, що не перевищує 32 767 секунд (більше за 9 годин).

Параметр «*Предельное число итераций*» служить для управління часом розв’язання задачі шляхом обмеження числа проміжних обчислень. У поле можна ввести кількість ітерацій, що не перевищує 32 767.

Параметр «*Относительная погрешность*» служить для завдання точності, з якою визначається відповідність комірки цільовому значенню або наближення до зазначених границь. Поле повинне містити число з інтервалу від 0 до 1. Чим *менше* кількість десяткових знаків в уведеному числі, тим *нижче* точність. Висока точність збільшує час, потрібний для того, щоб зійшовся процес оптимізації.

Параметр «*Допустимое отклонение*» служить для завдання допуску на відхилення від оптимального розв’язку у цілочисельних задачах. При вказівці більшого допуску пошук розв’язку закінчується швидше.

Параметр «*Сходимость*» застосовується тільки при розв’язанні нелінійних задач.

Установка прапорця «*Линейная модель*» забезпечує прискорення пошуку розв’язку лінійної задачі шляхом застосування симплекс-методу.

Підтвердимо встановлені параметри натисканням кнопки «ОК».

Запуск задачі на розв'язання провадиться з вікна «Поиск решения» шляхом натискання кнопки «Выполнить».

Після запуску на розв'язання задачі ЛП на екрані з'являється вікно «Результаты поиска решения» з одним з повідомлень, показаних на рисунках 13.6, 13.7 та 13.8.

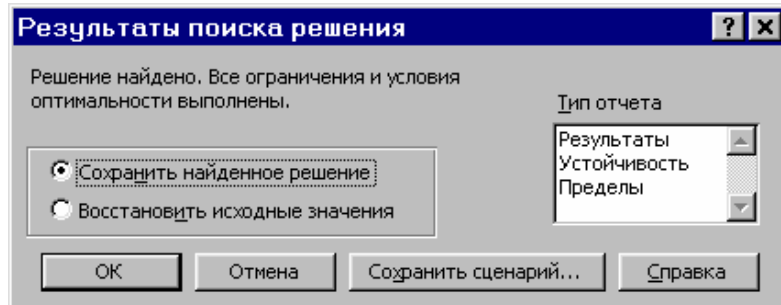


Рисунок 13.6 – Повідомлення про успішне розв'язання задачі

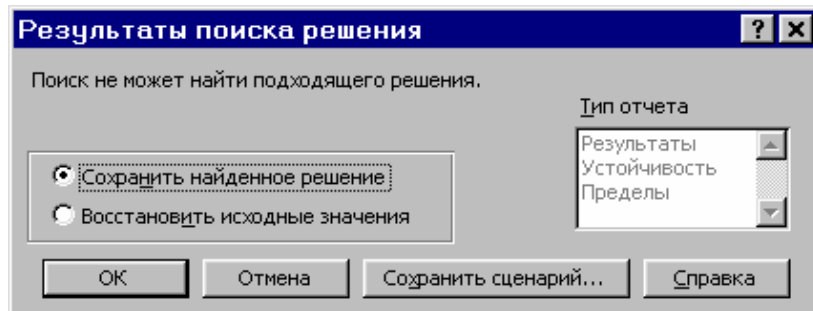


Рисунок 13.7 – Повідомлення при несумісній системі обмежень задачі

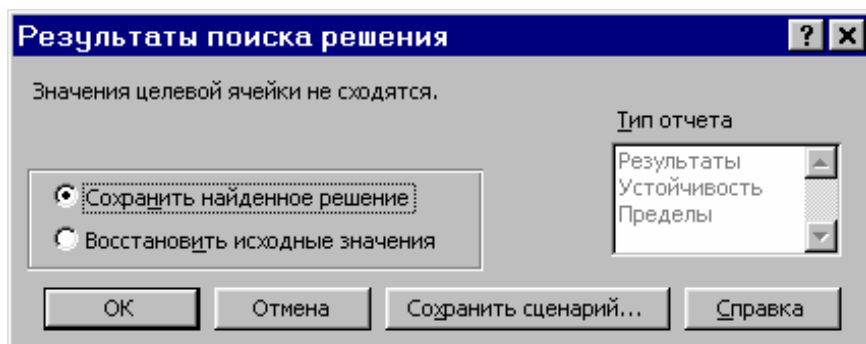


Рисунок 13.8 – Повідомлення при необмеженості цільової функції в необхідному напрямку

Іноді повідомлення, що представлені на рисунках 13.7 та 13.8, свідчать не про характер оптимального розв'язку задачі, а про те, що при введенні умов задачі в Excel були допущені помилки, які не дозволяють Excel знайти оптимальний розв'язок, що дійсно існує.

Якщо при заповненні полів вікна «Поиск решения» були допущені помилки, що не дозволяють Excel застосувати симплекс-метод для розв’язання задачі або довести її розв’язання до кінця, то після запуску задачі на розв’язання на екран буде видане відповідне повідомлення із вказівкою причини, за якою розв’язок не знайдений. Іноді занадто мале значення параметра «Относительная погрешность» не дозволяє знайти оптимальний розв’язок. Для виправлення цієї ситуації треба збільшити погрішність, наприклад від 0,000 001 до 0,000 01 і т. д.

У вікні «Результаты поиска решения» представлені назви трьох типів звітів: «Результаты», «Устойчивость», «Пределы». Вони необхідні при аналізі отриманого розв’язку на чутливість. Для одержання значень змінних, цільової функції й лівої частини обмежень безпосередньо в екранній формі натиснемо кнопку «ОК». У результаті в екранній формі з’являється оптимальний розв’язок задачі (рис. 13.9).

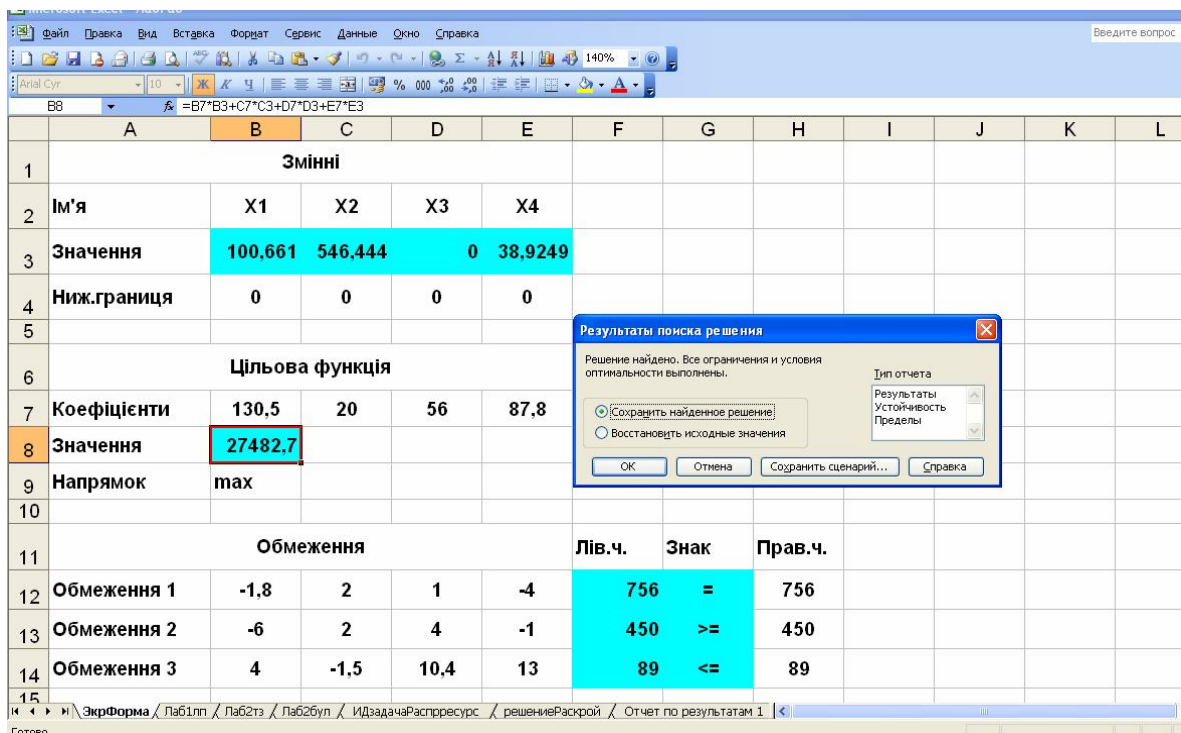


Рисунок 13.9 – Екранна форма задачі з отриманим розв’язком

### **Задача цілочисельного програмування**

Додамо до умови задачі вимогу цілочисельності значень всіх змінних. Для цього у процес введення умови задачі додамо наступні кроки:

– для наочності сприйняття умови задачі в екранній формі вкажемо, на які змінні накладається вимога цілочисельності (рис. 13.10).

– у вікні «Поиск решения» (меню «Сервис» → «Поиск решения») додамо обмеження, введемо їх у такий спосіб. У поле «Ссылка на ячейку» введемо адреси комірок змінних задачі, тобто  $\$B\$3:\$E\$3$  (рис. 13.11); у поле введення знака обмеження встановимо «целое» та підтвердимо введення натисканням кнопки «ОК».

На рисунку 13.10 представлений розв’язок задачі, до обмежень якої додано умову цілочисельності значень її змінних.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	<b>Змінні</b>										
2	Ім'я	X1	X2	X3	X4						
3	Значення	100	546	0	39						
4	Ниж.границя	0	0	0	0						
5	Цілочисленні	ціле	ціле	ціле	ціле						
6	<b>Цільова функція</b>										
7	Коефіцієнти	130,5	20	56	87,8						
8	Значення	27394,2									
9	Напрямок	max									
10											
11	<b>Обмеження</b>					Лів.ч.	Знак	Прав.ч.			
12	Обмеження 1	-1,8	2	1	-4	756	=	756			
13	Обмеження 2	-6	2	4	-1	453	>=	450			
14	Обмеження 3	4	-1,5	10,4	13	88	<=	89			
15											

Рисунок 13.10 – Розв’язок задачі за умови цілочисельності змінних

Рисунок 13.11 – Введення умови цілочисельності змінних

### Транспортна задача

Двохіндексні задачі ЛП вводяться й вирішуються у Excel так само, як і одноіндексні. Специфіка введення умови двохіндексної задачі ЛП полягає лише в зручності матричного завдання змінних та коефіцієнтів цільової функції.

#### Приклад 13.2

Знайдемо розв'язок для транспортної задачі, суть якої полягає в оптимальній організації транспортних перевезень штучного товару зі складів до магазинів (табл. 13.2).

Таблиця 13.2 – Вихідні дані транспортної задачі

Тарифи, грн /шт.	1-й магазин	2-й магазин	3-й магазин	Запаси, шт.
1-й склад	2	9	7	25
2-й склад	1	0	5	50
3-й склад	5	4	100	35
4-й склад	2	3	6	75
Потреби, шт.	45	90	50	

Цільова функція та обмеження цієї задачі мають вигляд

$$L(X) = 2x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + x_{21} + 5x_{23} + 5x_{31} + \\ + 4x_{32} + 100x_{33} + 2x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 35, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 75, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 45, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 90, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 50, \\ x_{ij} \geq 0, x_{ij} - \text{цілочисельні} \quad (i = \overline{1,4}; j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

Екранні форми, завдання змінних, цільової функції, обмежень та граничних умов транспортної задачі та її розв'язання подані на рисунках 13.12, 13.13, 13.14 та у таблиці 13.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Змінні				Обмеження				
2		цілі	X1	X2	X3	Ліва частина	Знак	Права частина		
3		X1j				0	=	25		
4		X2j				0	=	50		
5		X3j				0	=	35		
6		X4j				0	=	75		
7	Обмеження	Ліва частина	0	0	0					
8		Знак	=	=	=			185		
9		Права частина	45	90	50		185	Баланс		
10										
11		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3					
12		X1j	2	9	7					
13		X2j	1	0	5	Цільова функція				
14		X3j	5	4	100	Значення	Напрямок			
15		X4j	2	3	6	0,0	min			
16										
17										

Рисунок 13.12 – Екранна форма транспортної задачі (курсор у цільовій комірці F15)

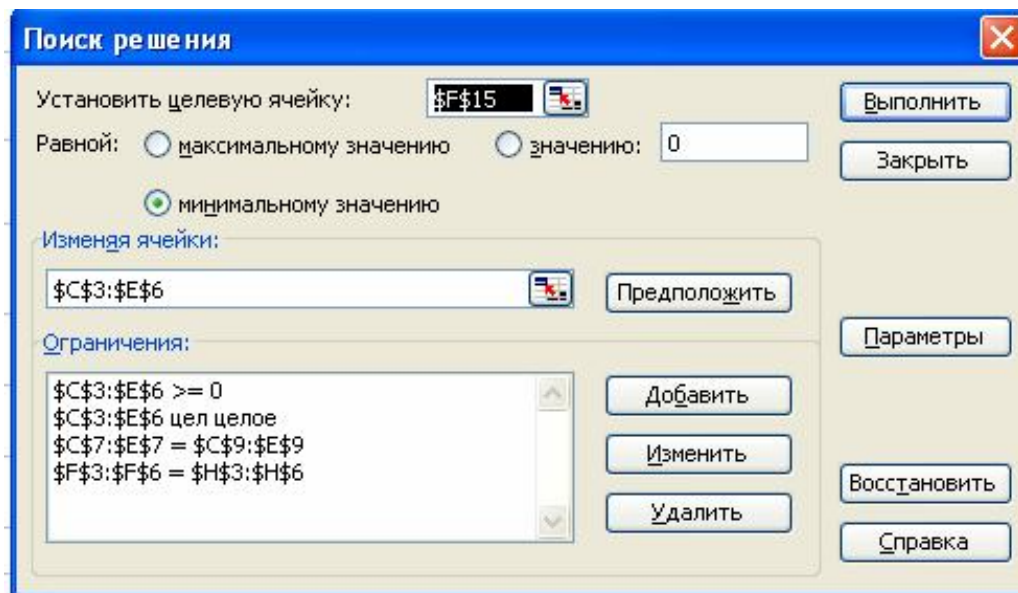


Рисунок 13.13 – Обмеження та граничні умови транспортної задачі



	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Змінні				Обмеження				
2	цілі	X1	X2	X3	Ліва частина	Знак	Права частина		
3	X1j	25	0	0	25	=	25		
4	X2j	0	50	0	50	=	50		
5	X3j	0	35	0	35	=	35		
6	X4j	20	5	50	75	=	75		
7	Ліва частина	45	90	50					
8	Знак	=	=	=			185		
9	Права частина	45	90	50		185	Баланс		
10									
11	Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3					
12	X1j	2	9	7					
13	X2j	1	0	5	Цільова функція				
14	X3j	5	4	100	Значення	Напрямок			
15	X4j	2	3	6	545,0	min			
16									
17									

Рисунок 13.14 – Екранна форма після одержання розв’язку транспортної задачі (курсор у цільовій комірці F15)

Таблиця 13.3 – Формули екранної форми транспортної задачі

Об’єкт математичної моделі	Вираз у Excel
Змінні задачі	C3:E6
Формула в цільовій комірці F15	=СУММПРОИЗВ(C3:E6;C12:E15)
Обмеження за рядками у комірках F3, F4, F5, F6	=СУМ(C3:E3) =СУМ(C4:E4) =СУМ(C5:E5) =СУМ(C6:E6)
Обмеження за стовпцями у комірках D7, D7, E7	=СУМ(C3:C6) =СУМ(D3:D6) =СУМ(E3:E6)
Сумарні запаси та потреби у комірках H8, G9	=СУМ(H3:H6) =СУМ(C9:E9)

### Задача з булевими змінними

Особливим випадком задач з цілочисельними змінними є задачі, у результаті розв’язання яких шукані змінні  $x_j$  можуть приймати тільки одне з двох значень – 0 або 1. Такі змінні називають булевими.

Окрім завдання вимоги цілочисельності при введенні умови задачі з булевими змінними для наочності сприйняття введемо в екранну форму слово «булеві» як характеристику змінних (див. рис. 13.15); у вікні «Поиск решения» додамо граничні умови, що мають зміст обмежень значень змінних за їх одиничною верхньою границею (рис. 13.16).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Змінні				Обмеження			
2		Цілі булеві	X1	X2	X3	Ліва частина	Знак	Права частина	
3		X1j	1	0	0	1	=	1	
4		X2j	0	0	1	1	=	1	
5		X3j	0	1	0	1	=	1	
6	Обмеження	Ліва частина	1	1	1				
7		Знак	=	=	=			3	
8		Права частина	1	1	1		3	Баланс	
9									
10		Тарифи	X11	X12	X13				
11		X1j	2	9	7	Цільова функція			
12		X2j	1	0	5	Значення	Напрямок		
13		X3j	5	4	100	11,0	min		
14									

Рисунок 13.15 – Розв’язання двоіндексної задачі з булевими змінними

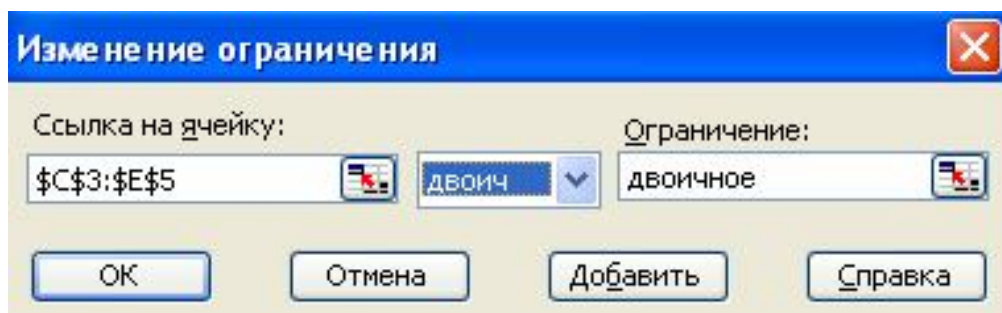


Рисунок 13.16 – Додавання умови одиничної верхньої границі значень змінних двоіндексної задачі з булевими змінними

Вигляд вікна «Поиск решения» для задачі з булевими змінними, показаної на рисунку 13.15, наведений на рисунку 13.17.

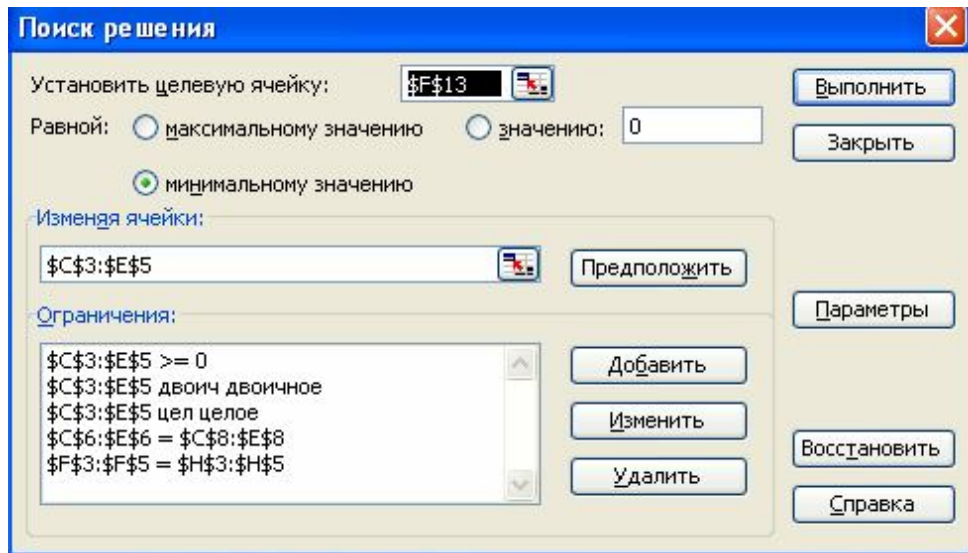


Рисунок 13.17 – Вікно «Поиск решения» для задачі з булевими змінними

Якщо при розв’язанні задачі видається повідомлення про неможливість знаходження розв’язку, то ймовірна причина полягає у помилках введення умови задачі в Excel. Тому, перш ніж робити висновок про принципову неможливість знаходження оптимального розв’язку задачі, перевірте:

- чи правильно введені числові значення та знаки (+, –) коефіцієнтів цільової функції та обмежень, правих частин обмежень;
- чи збалансована двохіндексна задача;
- чи правильні формули в цільовій комірці та у комірках лівих частин обмежень;
- чи правильно вказано адресу цільової комірки та напрямок оптимізації цільової функції;
- чи правильно зазначені адреси комірок змінних;
- чи правильно введені знаки обмежень (<=, >=, =);
- чи правильно зазначені адреси комірок лівих та правих частин обмежень;
- чи задано вимогу невід’ємності змінних;
- чи задано вимогу за одиничним значенням верхньої границі змінних (для задач з булевими змінними);
- чи задано умову цілочисельності змінних (відповідно до умови задачі);
- перевірте правильність встановлення параметрів.

### Варіанти індивідуальних завдань

Використовуючи MS Excel, знайти розв'язок для моделі ЛП, що відповідає заданому варіанту (табл. 13.4).

Таблиця 13.4 – Варіанти завдань до самостійної роботи

Номер варіанту	Математична модель
1	2
1	$L(X) = 5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 0,7x_1 + 0,9x_2 + 1,5x_3 + 2,3x_4 + 1,8x_5 \leq 50000, \\ 0,4x_1 + 1,1x_2 - 0,5x_3 + 1,3x_4 - 2,8x_5 \geq 32000, \\ 0,5x_1 + 1,8x_3 + 0,7x_4 + 2x_5 \leq 40000, \\ 2,2x_1 - 1,4x_2 - 0,8x_3 + 0,9x_4 = 15000, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
2	$L(X) = x_1 + 4x_3 + 8x_4 - 12x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 250, \\ 0,4x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 8x_5 \leq 460, \\ 0,5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leq 190, \\ 11x_2 - 8,5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 210, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
3	$L(X) = -45x_1 + 65x_2 + 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 15x_1 + 18x_2 + 34x_4 - 22x_5 = 56, \\ 2x_1 + 7x_3 - 4x_4 + 3x_5 \geq 91, \\ 0,2x_1 + 0,8x_2 + 1,5x_3 + 0,9x_4 + 4x_5 \leq 26, \\ 1,8x_1 - 42x_2 + 6,4x_3 + 3x_5 = 15, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
4	$L(X) = 14x_1 - 9x_2 - x_4 + 6,4x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 0,9x_1 + 10x_2 - 28x_4 + 5x_5 \leq 245, \\ 0,8x_1 + 1,7x_2 - 0,2x_3 - 0,5x_4 = 9, \\ 6x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6,3x_5 \leq 54, \\ 8x_1 + 6,2x_2 - 4,8x_4 + 2,9x_5 \geq 17, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$

Продовження таблиці 13.4

1	2
5	$L(X) = 46x_1 + 2,3x_2 + 9,4x_3 - 4x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 7,8x_3 + 12x_4 + 9x_5 \geq 49, \\ 2,3x_2 + 5x_3 + 5,6x_4 - x_5 \leq 86, \\ 16x_1 - 40x_4 + 29x_5 = 50, \\ 190x_1 - 98x_2 - 4x_4 + 150x_5 \geq 300, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
6	$L(X) = 0,5x_1 + 1,8x_3 - 9,2x_4 + 14x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 9,6x_2 + 15,7x_3 + 24x_4 - 8x_5 \leq 74, \\ 0,8x_1 + 11,1x_2 - 4,5x_3 + 1,5x_4 - 6,3x_5 = 22, \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \leq 46, \\ 220x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 95x_5 \geq 150, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
7	$L(X) = 12x_2 + 89x_3 - 5x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 9,6x_2 + 15,7x_3 + 22x_4 - 8x_5 \leq 73, \\ 0,9x_1 + 11,1x_2 - 4,3x_3 + 1,5x_4 + 6,4x_5 = 19, \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \leq 49, \\ 220x_1 - 150x_2 + 3x_3 + 95x_5 = 133, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
8	$L(X) = 4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 49x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 21x_1 + 9x_2 - 2x_4 - 12x_5 \geq 58, \\ 110x_2 - 60x_3 + 80x_4 - 45x_5 = 290, \\ 5x_2 + 27x_3 - 14x_4 + x_5 \leq 72, \\ 87x_1 - 6,4x_2 + 130x_4 = 140, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
9	$L(X) = -38x_1 + 60x_2 + x_3 + 4x_4 + 8x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 18x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 12x_5 \leq 86, \\ 2x_2 + 19x_3 - 7x_4 + 10x_5 = 130, \\ 0,4x_1 + 3x_2 - 4,2x_3 + 2x_4 - 5x_5 \leq 34, \\ 2,1x_1 + 13x_2 - 20x_3 + 6x_4 = 18, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$

### Закінчення таблиці 13.4

10	$L(X) = 10x_1 + 40x_3 + 13x_4 + 56x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 7x_1 + 16x_3 + 5x_4 + 25x_5 \leq 600, \\ 8x_1 + 1,7x_2 - 0,5x_4 + 4,7x_5 = 890, \\ 6x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6,3x_5 \leq 270, \\ 84x_1 + 62x_2 + 80x_3 + 14x_5 \geq 2300, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
11	$L(X) = 84x_1 + 5,7x_2 + 10x_4 - 3x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 4x_1 + 8,5x_2 + 16x_3 + 10x_5 \geq 50, \\ 10,4x_1 + 6x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 120, \\ 19x_1 + 18x_2 - 20x_4 + 30x_5 = 600, \\ 200x_1 + 45x_2 - 8x_3 + 3,4x_4 \geq 210, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$
12	$L(X) = 0,84x_2 - 4x_3 + 3,8x_4 + 12x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 15x_1 + 9,6x_2 + 34x_4 - 8x_5 \leq 180, \\ 0,6x_1 + 11,1x_2 - 2,6x_3 + 1,5x_4 - 6,3x_5 = 68, \\ 14x_1 + 64x_3 - 38x_4 + 12x_5 \leq 81, \\ 190x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 84x_5 \geq 230, \\ x_j \geq 0 (j = \overline{1,5}). \end{cases}$

### **Контрольні запитання**

1. Які основні етапи розв'язання задач ЛП в MS Excel?
2. Поясніть способи завдання формул для цільової комірки та комірок лівих частин обмежень.
3. У чому полягає смисл використання символу \$ у формулах MS Excel?
4. У чому різниця використання у формулах MS Excel символів «>>» та «<<»?
5. Чому після введення формул у комірки цільової функції та лівих частин обмежень у них відображаються нульові значення?
6. Як в MS Excel задають напрямок оптимізації цільової функції?
7. Які комірки екранної форми виконують ілюстративну функцію, а які необхідні для розв'язання задачі?

8. Як наочно відобразити в екранній формі комірки, використовувані в конкретній формулі, з метою перевірки її правильності?
9. Поясніть загальний порядок роботи з вікном *«Поиск решения»*.
10. Як можна змінювати, додавати, видаляти обмеження у вікні *«Поиск решения»*?
11. Які повідомлення видаються в MS Excel у випадках: успішного розв'язання задачі ЛП; несумісності системи обмежень задачі; необмеженості цільової функції?
12. Поясніть зміст параметрів, що задають у вікні *«Параметры поиска решения»*.
13. Поясніть особливості розв'язання в MS Excel цілочисельних задач ЛП.
14. Поясніть особливості розв'язання в MS Excel двохіндексних задач ЛП.
15. Поясніть особливості розв'язання в MS Excel задач ЛП з булевими змінними?

#### **Практичне заняття 14**

### **РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОІНДЕКСНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ**

*Мета* – придбання навичок з побудови математичних моделей одноіндексних задач ЛП та розв'язання їх засобами Microsoft Excel.

*Практичне завдання* – розв'язання задачі виробничого планування відповідно до варіанта, указанного викладачем.

#### ***Порядок виконання практичного завдання***

1. Відповідно до номера свого варіанта оберіть умову задачі та побудуйте її модель.
2. Знайдіть оптимальний розв'язок задачі в Excel та продемонструйте його викладачеві.

*Примітка.* Розрахунок числових даних, які безпосередньо не задані в умові задачі, робіть безпосередньо в комірках екранної форми. Це дозволяє чітко представляти шлях одержання числових даних в комірках екранної форми, уникати помилок при розрахунку параметрів задачі, а також забезпечує високу точність розрахунків.

### *Приклад 14.1*

Розглянемо задачу (значення відповідають варіанту 0 у таблиці 14.1. Меблевий комбінат випускає книжкові полиці трьох типів: А – з натуральної деревини зі склом, В<sub>1</sub> – з полірованої ДСП без скла, В<sub>2</sub> – з полірованої ДСП зі склом. Габарити полиць: довжина 1 100 (d) мм, ширина 250 (w) мм, висота 300 (h) мм. Розмір листа ДСП 2×3 м.

При виготовленні полиць А виконують наступні роботи: столярні, покриття лаком, сушіння, різання скла, пакування. Всі операції в ході столярних робіт та пакування виконують вручну. Полиці В<sub>1</sub> та В<sub>2</sub> поставляють у торгову мережу в розібраному вигляді. За винятком операції пакування, всі інші операції (виробництво компонент для полиць, різання скла) при виготовленні полиць В<sub>1</sub> та В<sub>2</sub>, виконують на спеціалізованих автоматах.

Трудомісткість столярних робіт з випуску однієї полиці А становить 4 (**Тр1**) год. Продуктивність автомата, що покриває полиці А лаком – 10 (**Пр1**) полиць на годину, автомату, що ріже скло – 100 (**Пр2**) стекол на годину. Змінний фонд часу автомата для покриття лаком – 7 (**ФВ1**) год, автомата для різання скла – 7,5 (**ФВ2**) год. Сушіння полиць після покриття лаком відбувається протягом доби у спеціальних сушарках, що уміщують 50 (**В1**) полиць. На пакування полиці А потрібно 4 (**Тр2**) хвилини. У виробництві полиць зайняти 40 (**Р1**) столярів та 14 (**Р2**) пакувальників.

Продуктивність автомата, що виробляє комплектуючі для полиць В<sub>1</sub> та В<sub>2</sub>, дорівнює 3 (**Пр3**) полиці на годину, а його змінний фонд часу дорівнює 7,4 (**ФВ3**) год, трудомісткість пакувальних робіт становить 8 (**Тр3**) хв для полиці В<sub>1</sub> та 10 (**Тр4**) хв для полиці В<sub>2</sub>.

Від постачальників комбінат отримує на місяць 400 (**З1**) листів полірованої ДСП, 230 (**З2**) листів ДВП (деревинно-волокнистої плити), а також 260 (**З3**) листів скла. З кожного листа ДВП можна викроїти 14 (**К1**) задніх стінок полиць В<sub>1</sub> та В<sub>2</sub>, а з кожного листа скла – 10 (**К2**) стекол для полиць А та В<sub>2</sub>.

Склад готової продукції може розмістити не більше за 350 (**В2**) полиць та комплектів полиць, причому щодня у торгову мережу вивозять у середньому 40 (**Н**) полиць та комплектів. На початок поточного місяця на складі залишилося 100 (**Ост**) полиць, що вироблені раніше. Собівартість полиці А дорівнює 205 (**С1**) грн, полиці В без скла – 142 (**С2**) грн, зі склом – 160 (**С3**) грн.

Маркетингові дослідження показали, що частка продажів полиць обох видів зі склом становить не менш за 60% (**Д**) у загальному обсязі продажів, а



місткість ринку полиць певного типу становить близько 5 300 (V3) штук на місяць. Меблевий комбінат уклав договір на постачання замовникові 50 (З) полиць типу В2 у поточному місяці.

Необхідно скласти план виробництва полиць на поточний місяць. Відомі ціни реалізації полиць: полиця А – 295 (Ц1) грн, полиця В1 без скла – 182 (Ц2) грн, полиця В2 зі склом – 220 (Ц3) грн.

### ***Побудова моделі***

*Перший етап побудови моделі* полягає в ідентифікації змінних. У даній задачі шуканими невідомими величинами є кількість полиць кожного виду, які будуть вироблені у поточному місяці. Отже, змінні  $x_A$  – кількість полиць А (шт./міс.);  $x_{B_1}$  – кількість полиць В1 (шт./міс.);  $x_{B_2}$  – кількість полиць В2 (шт./міс.).

*Другий етап побудови моделі* полягає в визначенні цільової функції. У цьому випадку ціллю є максимізація прибутку, одержуваного від продажу полиць всіх видів протягом місяця. Оскільки в цій задачі прибуток можна визначити як різницю між ціною (Ц1, Ц2, Ц3) та собівартістю (С1, С2, С3), цільова функція має вигляд

$$L(X) = (295 - 205)x_A + (182 - 142)x_{B_1} + (220 - 160)x_{B_2} \rightarrow \max, \text{ грн/міс.}$$

*Третій етап побудови моделі* полягає у завданні обмежень, що моделюють умови задачі. Всі обмеження розглянутої задачі можна поділити на кілька типів.

#### *Обмеження за фондом часу (з урахуванням трудомісткості робіт)*

Ліва частина обмежень за фондом часу є часом, що витрачається на виробництво полиць протягом місяця у кількості  $x_A$ ,  $x_{B_1}$ ,  $x_{B_2}$  штук. Права частина обмеження – це фонд робочого часу виконавця роботи (робітника або автомату) за зміну. Обмеження за фондом часу на виконання столярних робіт має вигляд

$$4x_A \leq 40 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 22, \text{ год/міс,}$$

де коефіцієнт 4 год/шт. (Тр1) – час, витрачаний на столярні роботи при виробництві однієї полиці типу А (трудомісткість); 40 чол. (Р1) – кількість

столярів, що беруть участь у виробництві;  $8 \text{ год}/(\text{люд.} \cdot \text{зм.})$  – кількість годин роботи однієї людини протягом зміни;  $1 \text{ зм.}/\text{дн.}$  – кількість змін в одному робочому дні;  $22 \text{ дн.}/\text{міс.}$  – кількість робочих днів у місяці (табл. 2.1).

Аналогічно маємо обмеження за фондом часу на пакувальні роботи:

$$\frac{4}{60}x_A + \frac{8}{60}x_{B_1} + \frac{10}{60}x_{B_2} \leq 14 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 22, \text{ год}/\text{міс.},$$

де 14 чол. (P2) – кількість пакувальників

*Обмеження за фондом часу (з урахуванням продуктивності)*

Особливість обмежень, що враховують дані про продуктивність, полягає в тому, що продуктивність необхідно перетворити на трудомісткість. Трудомісткість є величиною, що зворотна до продуктивності. Обмеження за фондом часу на покриття лаком полиць типу А має вигляд

$$\frac{1}{10}x_A \leq 7 \cdot 1 \cdot 22, \text{ год}/\text{міс.},$$

де коефіцієнт  $\frac{1}{10}$  ( $\frac{1}{Pr_1}$ ) при  $x_A$  – кількість годин, що доводяться на покриття лаком однієї полиці типу А. При записі правої частини обмеження враховуємо, що автомат, який виконує покриття лаком, працює не повну зміну (8 год), а протягом змінного фонду часу 7 год (ФВ1). Це пов'язане з необхідністю підготовки автомата до роботи та обслуговуванням його після закінчення роботи.

Обмеження за фондом часу на різання скла для полиць типу А та В2:

$$\frac{2}{100}x_A + \frac{2}{100}x_{B_2} \leq 7,5 \cdot 1 \cdot 22, \text{ год}/\text{міс.}$$

Обмеження за фондом часу на виробництво компонентів для полиць типу В1 та В2:

$$\frac{1}{3}x_{B_1} + \frac{1}{3}x_{B_2} \leq 7,4 \cdot 1 \cdot 22, \text{ год}/\text{міс.}$$

*Обмеження за запасами матеріалів, що витрачаються у виробництві*

Побудуємо обмеження за запасом листів ДСП, які поставляються щомісяця на комбінат. При цьому врахуємо, що з листа ДСП треба викроювати

комплекти деталей (верхню та нижню сторони полиць, 2 бічні сторони). Тому при завданні обмеження будемо орієнтуватися не на кількість листів ДСП, а на кількість комплектів для полиць  $Y_{\text{компл}}$ , яку можна одержати з наявного запасу ДСП. Оскільки листи ДСП можна розкроювати за різними способами та одержувати при цьому різну кількість деталей та комплектів, значення  $Y_{\text{компл}}$  необхідно розрахувати. Отже, обмеження за запасом листів ДСП має вигляд:

$$1x_{B_1} + 1x_{B_2} \leq Y_{\text{компл}}, \text{ компл/міс.}$$

Аналогічно одержимо обмеження за запасом задніх стінок з ДВП для полиць  $B_1$  та  $B_2$ :

$$1x_{B_1} + 1x_{B_2} \leq 230 \cdot 14, \text{ задн. стін/міс.,}$$

де 230 (Z2) – щомісячний запас листів ДВП; 14 (K1) – кількість задніх стінок полиць, одержуваних з одного листа. Причому, на кожну полицю  $B_1$  та  $B_2$  припадає по одній задній стінці.

Обмеження за запасом скла для полиць  $A$  та  $B_2$ :

$$2x_A + 2x_{B_2} \leq 260 \cdot 10, \text{ скло/міс.,}$$

де 260 (Z3) – щомісячний запас листів скла; 10 (K2) – кількість стекол. Причому, на кожну полицю  $A$  та  $B_2$  припадає по 2 скла.

*Обмеження за ємністю допоміжних приміщень та ринку*

Складемо обмеження за кількістю полиць  $A$ , яку може вмістити сушарка:

$$x_A \leq 50 \cdot 22, \text{ шт/міс.,}$$

де 50 (V1) – кількість полиць, що може бути просушеною в один день;

22 – кількість робочих днів у місяці.

Обмеження за кількістю полиць всіх видів, які може умістити склад готової продукції:

$$x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \leq 350 - 100 + 40 \cdot 22, \text{ шт/міс.,}$$

де коефіцієнт 100 (Oст) враховує, що загальна ємність складу зменшена на кількість полиць, які залишилися невивезеними з минулого місяця; коефіцієнт 40 (N) враховує кількість місць для полиць, що протягом місяця щодня звільнятимуться.

Обмеження, що враховує місткість ринку, яка дорівнює 5 300 (V3) за полицями всіх видів:

$$x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \leq 5300, \text{ шт/міс.}$$

*Обмеження за гарантованим замовленням*

Запишемо обмеження на мінімальну кількість замовлених полиць 50 (З):

$$x_{B_2} \geq 50, \text{ шт/міс.}$$

*Обмеження за співвідношенням обсягів продажів різних товарів*

Частку полиць А та В2 у загальному обсязі полиць, що вироблені для вільного продажу, яка становить не менш за 60% (Д) виразимо обмеженням

$$x_A + (x_{B_2} - 50) \geq 0,6[x_A + x_{B_1} + (x_{B_2} - 50)],$$

де  $(x_{B_2} - 50)$  – кількість полиць В2, що надходять у вільний продаж.

Або 
$$0,4x_A - 0,6x_{B_1} + 0,4x_{B_2} \geq 20 \text{ шт/міс.}$$

Визначимо максимальну кількість комплектів для полиць В<sub>1</sub> та В<sub>2</sub>.

Залежно від розмірів листів ДСП (2 000 × 3 000 мм) деталі полиць В<sub>1</sub> та В<sub>2</sub> можна викроїти за трьома різними способами. За першим варіантом розкрою з одного листа ДСП можна викроїти 19 деталей верхньої або нижньої стінок та 9 деталей бічних стінок. За другим варіантом одержимо 12 деталей верхньої або нижньої стінок та 36 деталей бічних стінок. За третім варіантом розкрою одержимо 16 деталей верхньої або нижньої стінок та 18 деталей бічних стінок. Позначимо кількість листів ДСП, що розкроєні протягом місяця за 1-м варіантом,  $y_1$  (лист./міс.), за 2-м варіантом –  $y_2$  (лист./міс.), за 3-м варіантом –  $y_3$  (лист./міс.). Листи ДСП треба розкроїти так, щоб з отриманих деталей дістати максимальну кількість комплектів  $Y_{\text{компл}}$  для полиць. Отже, цільова функція має вигляд

$$L(Y) = Y_{\text{компл}} \rightarrow \max, \text{ компл/міс.}$$

Кількість всіх листів ДСП, що розкроєні, не повинна перевищувати 400 (Z1), тобто щомісячний запас їх на складі, тоді

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 400, \text{ лист/міс.}$$

Врахуємо, що до кожного комплекту входить одна верхня та одна нижня стінки. Тоді кількість нижніх та верхніх стінок, одержуваних при розкрої всіх листів ДСП, не повинна бути меншою за  $2Y_{\text{КОМПЛ}}$ :

$$19y_1 + 12y_2 + 16y_3 \geq 2Y_{\text{КОМПЛ}}, \text{ дет./міс.}$$

Аналогічно кількість бічних стінок також не повинна бути меншою за  $2Y_{\text{КОМПЛ}}$ :

$$9y_1 + 36y_2 + 18y_3 \geq 2Y_{\text{КОМПЛ}}, \text{ дет./міс.}$$

Врахуємо, що  $2Y_{\text{КОМПЛ}}$  є змінною та перенесемо її у ліву частину обмеження, тоді модель визначення максимальної кількості комплектів матиме вигляд:

$$L(Y) = Y_{\text{КОМПЛ}} \rightarrow \max ;$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \leq 400, \\ 19y_1 + 12y_2 + 16y_3 - 2Y_{\text{КОМПЛ}} \geq 0, \\ 9y_1 + 36y_2 + 18y_3 - 2Y_{\text{КОМПЛ}} \geq 0, \\ y_1, y_2, y_3, Y_{\text{КОМПЛ}} \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї задачі наведено на рисунку 14.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<b>Змінні</b>									
2	Ім'я	Y1	Y2	Y3						
3	Значення	282	118	0						
4	Ниж.границя	0	0	0						
5	Цілочисельне	ціле	ціле	ціле						
6	<b>Цільова функція</b>									
7		ціле								
8	Значення	3387								
9	Напрямок	max								
10										
11	<b>Обмеження</b>				Лів.ч.	Знак	Прав.ч.			
12	Обмеження 1	19	12	16	-1E-06	>=	0			
13	Обмеження 2	9	36	18	12	>=	0			
14	Обмеження 3	1	1	1	400	<=	400			

Рисунок 14.1 – Визначення максимальної кількості комплектів для полиць  $B_1$  та  $B_2$

Отже, 282 листи треба розкroїти за першим варіантом (одержимо 5 358 верхніх та нижніх стінок і 2 538 бічних стінок) та 118 листів – за другим варіантом (одержимо 1 416 верхніх та нижніх стінок і 4 248 бічних стінок). Максимальна кількість комплектів  $Y_{\text{компл}} = 3\,387$ .

Розв'яжемо вихідну задачу, модель якої має наступний вигляд:

$$L(X) = 90x_A + 40x_{B_1} + 60x_{B_2} \rightarrow \max;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x_A \leq 7040; \\ 0,067x_A + 0,133x_{B_1} + 0,167x_{B_2} \leq 2464; \\ 0,1x_A \leq 154; \\ 0,02x_A + 0,02x_{B_2} \leq 165; \\ 0,333x_{B_1} + 0,333x_{B_2} \leq 162,8; \\ x_{B_1} + x_{B_2} \leq 3387; \\ x_{B_1} + x_{B_2} \leq 3220; \\ 2x_A + 2x_{B_2} \leq 2600; \\ x_A \leq 1100; \\ x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \leq 1220; \\ x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \leq 5300; \\ x_{B_2} \geq 50; \\ 0,4x_A - 0,6x_{B_1} + 0,4x_{B_2} \geq 20; \\ x_A, x_{B_1}, x_{B_2} \geq 0. \end{array} \right.$$

Відповідно до результату розв'язання, що представлений на рисунку 14.2, у поточному місяці необхідно виробити 1 100 полиць А та 120 полиць В2. Виробництво полиць В1 є недоцільним. У результаті комбінат дістане прибуток у розмірі 106 200 грн.

### ***Контрольні запитання***

1. Що таке розподільна задача, загальна розподільна задача?
2. Що таке математичне та лінійне програмування?
3. Яка загальна форма запису моделі ЛП?
4. Що таке припустимий та оптимальний розв'язки?
5. Поясніть основні етапи побудови математичної моделі ЛП.

Змінні						
Ім'я	XA	XB1	XB2			
Значення	1100	0	120			
Ниж.граніця	0	0	0			
Цілочисельне	ціле	ціле	ціле			
Цільова функція						
Коефіцієнти	90	40	60			
Значення	106200					
Напрямок	max					
Обмеження				Лів.ч.	Знак	Прав.ч.
Обмеження за фондом часу на виконання столярних робіт	4	0	0	4400	<=	7040
Обмеження за фондом часу на пакувальні роботи	0,067	0,133	0,167	93,74	<=	2464
Обмеження за фондом часу на покриття лаком полиць типу А	0,1	0	0	110	<=	154
Обмеження за фондом часу на різку скла для полиць типу А та В2	0,02	0	0,02	24,4	<=	165
Обмеження за фондом часу на виробництво комплектуючих для полиць типу В1 та В2	0	0,333	0,333	39,96	<=	162,8
Обмеження за запасом листів ДСП	0	1	1	120	<=	3387
Обмеження за запасом задніх стінок з ДВП для полиць В1 та В2	0	1	1	120	<=	3320
Обмеження за запасом стекол для полиць А та В2	2	0	2	2440	<=	2600
Обмеження за кількістю полиць А, що може умістити сушарка	1	0	0	1100	<=	1100
Обмеження за кількістю полиць усіх видів, що може умістити склад готової продукції	1	1	1	1220	<=	1220
Обмеження, що враховує ємність ринку	1	1	1	1220	<=	5300
Обмеження за гарантованим заказом	0	0	1	120	>=	50
Обмеження за співвідношенням обсягів продажу	0,4	-0,6	0,4	488	>=	20

Рисунок 14.2 – Розв’язок задачі про виробництво полиць

6. Поясніть економічний зміст та математичний вигляд цільової функції задачі про виробництво полиць.

7. Як можна класифікувати обмеження задачі про полиці за їх економічним змістом?

8. Чим відрізняється побудова обмежень, що використовують дані про трудомісткість та продуктивність робіт?

9. Поясніть спосіб побудови кожного конкретного обмеження задачі про полиці.

10. Поясніть, як вирішується задача оптимального розкрою листів ДСП.

11. Поясніть, як одиниці виміру параметрів задачі використовують для виявлення помилок побудови обмежень?

*Варіанти індивідуальних завдань*

Таблиця 14.1 – Вихідні дані варіантів завдань до практичного завдання 14

<b>Номер вар.</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b>D</b>	1 100	1 070	1 140	1 030	1 180	990	1 220	950	1 260	910	1 300	870	1 340
<b>w</b>	250	240	260	230	270	240	260	230	270	240	260	230	270
<b>h</b>	300	290	280	270	260	250	240	310	320	330	340	350	360
<b>Тр1</b>	4	4,4	3,6	4,8	3,2	5,2	2,8	5,6	2,4	6	2	6,4	1,6
<b>Тр2</b>	4	10	5	9	6	8	7	5	8	6	9	7	10
<b>Тр3</b>	8	15	10	13	9	13	10	8	11	10	15	14	16
<b>Тр4</b>	10	16	12	14	10	14	11	9	14	13	18	16	20
<b>P1</b>	40	22	19	6	27	16	9	25	11	8	30	14	7
<b>P2</b>	14	16	12	11	7	5	13	3	6	8	10	2	9
<b>Пр1</b>	10	4	9	5	2	6	4	7	4	3	5	8	6
<b>Пр2</b>	100	150	170	250	180	130	190	120	200	110	210	140	220
<b>Пр3</b>	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<b>ФВ1</b>	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,1	7,2	7	7,3	7,4
<b>ФВ2</b>	7,5	7,6	7,7	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,1	7,2
<b>ФВ3</b>	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,4	7,5	7,6
<b>Z1</b>	400	390	365	380	415	370	405	350	395	410	385	420	375
<b>Z2</b>	230	240	235	220	215	200	195	180	205	160	175	140	155
<b>Z3</b>	260	200	250	190	240	180	230	290	220	230	210	270	200



Продовження таблиці 14.1

Номер вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>К1</b>	14	15	5	16	6	17	7	12	8	13	18	11	9
<b>К2</b>	10	11	12	5	13	6	14	7	15	8	16	9	17
<b>V1</b>	50	20	65	40	55	75	45	60	35	70	25	30	80
<b>V2</b>	350	400	360	300	370	310	380	320	390	330	410	340	420
<b>V3</b>	5 300	2 000	3 700	3 000	1 100	4 000	2 500	1 500	1 400	2 700	4 300	3 100	1 900
<b>N</b>	40	45	67	50	72	55	44	60	38	65	30	70	35
<b>Ост</b>	100	110	90	170	80	160	70	150	60	140	50	120	40
<b>Д</b>	60(A, B2)	15A	10B1	15(B1, B2)	43(A, B1)	72A	12B2	16(B1, B2)	23(A, B2)	46A	59B1	13(B1, B2)	9(A, B1)
<b>З</b>	50 B2	30A	15B1	10A, 18B1	5A, 12B2	40B1, 3B2	60B2	24A	80B1	14A, 21B1	38A, 62B2	23B1, 20B2	84B2
<b>С1</b>	205	210	145	200	150	215	170	220	165	225	180	230	195
<b>С2</b>	142	150	125	164	120	187	125	176	129	195	143	207	126
<b>С3</b>	160	170	133	178	134	205	148	197	142	210	162	214	146
<b>Ц1</b>	295	256	213	284	192	243	198	274	203	281	224	276	249
<b>Ц2</b>	182	202	149	190	154	230	175	246	194	263	214	287	186
<b>Ц3</b>	220	224	158	206	147	243	180	242	167	267	202	246	187
Примітка. Три варіанти розкрою листів ДСП; 8 годин у зміні; робота в 1 зміні; 22 робочі дні у місяці.													

## Практичне заняття 15

### АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ ОДНОІНДЕКСНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

**Мета** – придбання навичок з аналізу чутливості задач ЛП на основі різних типів звітів, видаваних Microsoft Excel, про результати пошуку розв'язку.

**Вихідні дані** – результати розв'язання задачі про полиці відповідно до варіанту, зазначеного викладачем.

#### **Порядок виконання роботи**

1. Для задачі, що розв'язана у практичній роботі 14, отримайте в Excel всі типи звітів за результатами пошуку розв'язку, необхідні для аналізу чутливості.

2. Проаналізуйте задачу на чутливість до змін параметрів вихідної моделі.

#### **Основні відомості**

Задача аналізу оптимального розв'язку на чутливість пов'язана з тим, що на практиці багато економічних параметрів з часом змінюють значення, тому оптимальний розв'язок задачі може опинитися непридатним або неоптимальним. Аналіз чутливості оптимального розв'язку дозволяє визначити, як впливають на нього можливі зміни параметрів.

Обмеження лінійної моделі називають *сполучними*, якщо відповідна пряма проходить через оптимальну точку. Ресурс, що відповідає сполучному обмеженню, є *дефіцитним*. Якщо пряма, що відповідає обмеженню не проходить через оптимальну точку, його називають *несполучним*, а відповідний *i*-й ресурс є *недефіцитним*. Обмеження називають *надлишковим*, якщо його виключення не впливає на область припустимих розв'язків *i*, отже, на оптимальний розв'язок. Прийнято виділяти дві задачі аналізу на чутливість:

1. Аналіз скорочення або збільшення кількості ресурсів дозволяє визначити, на скільки одиниць можна збільшити або зменшити запас *дефіцитного* ресурсу для поліпшення оптимального значення цільової функції; на скільки одиниць можна зменшити або збільшити запас *недефіцитного*

ресурсу при збереженні отриманого оптимального значення цільової функції; збільшення (зменшення) запасу якого з ресурсів є найвигіднішим.

2. Аналіз зміни цільових коефіцієнтів дозволяє визначити, у якому діапазоні зміни коефіцієнтів цільової функції не змінюється оптимальний план.

### Приклад 15.1

Зробимо аналіз чутливості оптимального розв'язку задачі з попередньої практичної роботи 14. Після запуску в Excel задачі на розв'язання у вікні «Результаты поиска решения» виділимо за допомогою миші два типи звітів: «Результаты» і «Устойчивость» (рис. 15.1).

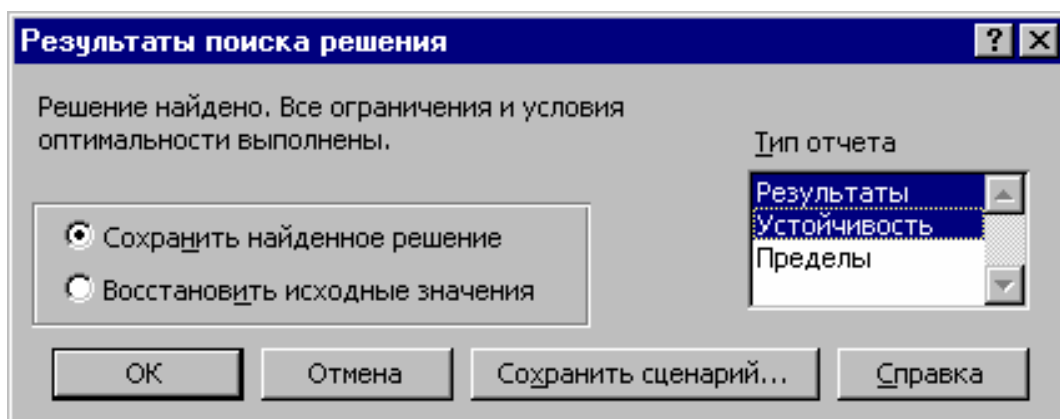


Рисунок 15.1 – Виділення типів звітів, необхідних для аналізу чутливості

### *Аналіз звіту за результатами*

Звіт за результатами складається з трьох таблиць (рис. 15.2):

- перша таблиця «Целевая ячейка» містить інформацію про цільову функцію;
- друга таблиця «Изменяемые ячейки» містить інформацію про значення змінних, отриманих у результаті розв'язання задачі;
- третя таблиця «Ограничения» показує результати оптимального розв'язання для обмежень та для граничних умов.

	A	B	C	D	E	F	G	H
6	Целевая ячейка (Максимум)							
7	Ячейка		Имя	Исходное значение	Результат			
8	\$B\$8	Значення ціле		106200	106200			
9								
10								
11	Изменяемые ячейки							
12	Ячейка		Имя	Исходное значение	Результат			
13	\$B\$3	Значення ХА		1100	1100			
14	\$C\$3	Значення ХВ1		0	0			
15	\$D\$3	Значення ХВ2		120	120			
16								
17								
18	Ограничения							
19	Ячейка		Имя	Значение	Формула	Статус	Разница	
20	\$E\$12	Обмеження за фондом часу на виконання столярних робот Лів.ч.		4400	\$E\$12<=\$G\$12	не связан.	2640	
21	\$E\$13	Обмеження за фондом часу на пакувальні роботи Лів.ч.		93,74	\$E\$13<=\$G\$13	не связан.	2370,26	
22	\$E\$14	Обмеження за фондом часу на покриття лаком полиць типу А Лів.ч.		110	\$E\$14<=\$G\$14	не связан.	44	
23	\$E\$15	Обмеження за фондом часу на різку скла для полиць типу А та В2 Лів.ч.		24,4	\$E\$15<=\$G\$15	не связан.	140,6	
24	\$E\$16	Обмеження за фондом часу на виробництво комплектуючих для полиць типу В1 та В2 Лів.ч.		39,96	\$E\$16<=\$G\$16	не связан.	122,84	
25	\$E\$17	Обмеження за запасом листів ДСП Лів.ч.		120	\$E\$17<=\$G\$17	не связан.	3267	
26	\$E\$18	Обмеження за запасом задних стінок з ДВП для полиць В1 та В2 Лів.ч.		120	\$E\$18<=\$G\$18	не связан.	3200	
27	\$E\$19	Обмеження за запасом стекол для полиць А та В2 Лів.ч.		2440	\$E\$19<=\$G\$19	не связан.	160	
28	\$E\$20	Обмеження за кількістю полиць А, що може умістити сушарка Лів.ч.		1100	\$E\$20<=\$G\$20	связанное	0	
29	\$E\$21	Обмеження за кількістю полиць усіх видів, що може умістити склад готової продукції Лів.ч.		1220	\$E\$21<=\$G\$21	связанное	0	
30	\$E\$22	Обмеження, що враховує ємність ринку Лів.ч.		1220	\$E\$22<=\$G\$22	не связан.	4080	
31	\$E\$23	Обмеження за гарантованим заказом Лів.ч.		120	\$E\$23>=\$G\$23	не связан.	70	
32	\$E\$24	Обмеження за співвідношенням обсягів продажу Лів.ч.		488	\$E\$24>=\$G\$24	не связан.	468	
33	\$B\$3	Значення ХА		1100	\$B\$3>=\$B\$4	не связан.	1100	
34	\$C\$3	Значення ХВ1		0	\$C\$3>=\$C\$4	связанное	0	
35	\$D\$3	Значення ХВ2		120	\$D\$3>=\$D\$4	не связан.	120	

Рисунок 15.2 – Лист звіту за результатами

Якщо ресурс використовується повністю, тобто є дефіцитним, то у графі «Статус» цієї таблиці відповідне обмеження вказується як «сполучне»; при неповному використанні ресурсу, тобто якщо ресурс недефіцитний, у цій графі вказується «несполучне». У графі «Значение» наведена кількість ресурсу, використана на виробництво продукції. У графі «Разница» показано різницю між значенням змінної у знайденому оптимальному розв'язку та заданій для неї граничній умові, тобто невикористаний залишок ресурсу.

Третя таблиця звіту за результатами подає інформацію для аналізу можливої зміни запасів *недефіцитних* ресурсів при збереженні отриманого оптимального значення цільової функції. Так, якщо на ресурс накладене обмеження типу  $\geq$ , то в графі «Разница» показується кількість ресурсу, на яку була перевищена мінімально необхідна норма. Наприклад, аналіз рядка 31 звіту за результатами задачі показує, що полиць випущено на 70 шт. більше, ніж було замовлено. Тобто з 120 полиць 70 шт. підуть у вільний продаж. Отже, можна дати наступну відповідь на запитання про зміну запасу недефіцитного ресурсу «Значение ХВ2»: *обов'язкове замовлення на виробництво полиць В2 можна збільшити на 70 шт., тобто замовляти до 120 шт., при цьому оптимальний розв'язок задачі не зміниться.*

Якщо на ресурс накладене обмеження типу  $\leq$ , то в графі «Разниця» дається кількість ресурсу, що не використовується при реалізації оптимального розв'язку. Так, аналіз рядка 20 звіту за результатами показує, що час столярних робіт склав 4 440 год. Невитраченими залишаються 2 640 годин із загального фонду часу, відведеного на столярні роботи. З цього випливає, що *запас недефіцитного ресурсу «Фонд часу за столярними роботами» можна зменшити на 2 640 годин, і це ніяк не вплине на оптимальний розв'язок.* Звідси випливає, що кількість столярів можна зменшити на 15 осіб:

$$\frac{2640 \text{ год./міс.}}{8 \text{ год./люд.} \cdot 1 \text{зм./дн.} \cdot 22 \text{ дн./міс.}} = 15 \text{ осіб}$$

або перевести їх на виробництво іншої продукції.

Аналіз рядка 30 показує, що загальна кількість полиць, що випускаються, становить 1 220 шт., що менше передбачуваної місткості ринку на 4 080 шт. *Тобто запас недефіцитного ресурсу «Місткість ринку» можна зменшити до 1 220 полиць, і це ніяк не вплине на оптимальний розв'язок.* Інакше кажучи, зменшення попиту до 1 220 полиць на місяць ніяк не позначиться на оптимальних обсягах випуску полиць.

На підставі проведеного аналізу можна зробити висновок про те, що існують причини (обмеження), які не дозволяють меблевому комбінату випускати більшу кількість полиць і діставати більший прибуток. Проаналізувати ці причини дозволяє звіт зі стійкості.

### ***Аналіз звіту зі стійкості***

Звіт зі стійкості складається з двох таблиць (рис. 15.3). Перша таблиця містить інформацію, що стосується змінних. Графа «*Результирующее значение*» містить оптимальний план. Графа «*Нормированная стоимость*» показує, на скільки грошових одиниць зміниться значення цільової функції у випадку примусового включення одиниці цієї продукції в оптимальний план. Наприклад, у звіті зі стійкості для розглянутої задачі нормована вартість для полиць В1 дорівнює – 20 грн/шт. Це означає, що якщо, попри оптимальний розв'язок, включити в план випуску 1 полицю В1, новий план випуску ( $x_A = 1\ 100$ ;  $x_{B1} = 1$ ;  $x_{B2} = 119$ ) принесе прибуток 106 180 грн/міс., який на 20 грн менший за попередній оптимальний розв'язок. Графа «*Целевой коэффициент*»

містить коефіцієнти цільової функції при відповідних змінних. У графах «Допустимое увеличение» та «Допустимое уменьшение» містяться граничні значення збільшень цільових коефіцієнтів  $\Delta c_j$ , при яких зберігається первісний оптимальний розв’язок. Наприклад, *припустиме збільшення ціни на полиці В1 дорівнює 20 грн/шт., а припустиме зменшення – практично не обмежене* (рядок 10). Це означає, що якщо ціна на полиці В1 зросте більше чим на 20 грн/шт., наприклад дорівнюватиме 61 грн/шт., оптимальний розв’язок зміниться, і стане доцільним випуск В1. А якщо їх ціна буде знижуватися аж до нуля, то оптимальний розв’язок залишиться тим самим.

**Примітка.** При виході за зазначені у звіті зі стійкості межі зміни цін оптимальний розв’язок може змінюватися як за номенклатурою продукції, так і за обсягами випуску (без зміни номенклатури).

Друга таблиця Звіту із стійкості містить інформацію щодо обмежень. У графі «Результирующее значение» містяться кількості використаних ресурсів. У колонці «Теневая цена» показано розв’язок двоїстої задачі, що визначає цінність додаткової одиниці і-го ресурсу. Тіньові ціни розраховуються тільки для дефіцитних ресурсів. У колонці «Ограничение. Правая часть» показано наявну у розпорядженні кількість ресурсів.

	A	B	C	D	E	F	G	H
5								
6	Изменяемые ячейки							
7				Результ.	Нормир.	Целевой	Допустимое	Допустимое
8	<b>Ячейка</b>	<b>Имя</b>		<b>значение</b>	<b>стоимость</b>	<b>Кoeffициент</b>	<b>Увеличение</b>	<b>Уменьшение</b>
9	\$B\$3	Значення ХА		1100	0	90	1E+30	30
10	\$C\$3	Значення ХВ1		0	-20,00000001	39,99999999	20,00000001	1E+30
11	\$D\$3	Значення ХВ2		120	0	60	30	20,00000001
12								
13	Ограничения							
14				Результ.	Теневая	Ограничение	Допустимое	Допустимое
15	<b>Ячейка</b>	<b>Имя</b>		<b>значение</b>	<b>Цена</b>	<b>Правая часть</b>	<b>Увеличение</b>	<b>Уменьшение</b>
16	\$E\$12	Обмеження за фондом часу на виконання столярних работ Лів.ч.		4400	0	7040	1E+30	2640
17	\$E\$13	Обмеження за фондом часу на пакувальні роботи Лів.ч.		93,74	0	2464	1E+30	2370,26
18	\$E\$14	Обмеження за фондом часу на покриття лаком полиць типу А Лів.ч.		110	0	154	1E+30	44
19	\$E\$15	Лів.ч. Обмеження за фондом часу на різку скла для полиць типу А та В2		24,4	0	165	1E+30	140,6
20	\$E\$16	Обмеження за фондом часу на виробництво комплектуючих для полиць типу В1 та В2 Лів.ч.		39,96	0	162,8	1E+30	122,84
21	\$E\$17	Обмеження за запасом листів ДСП Лів.ч.		120	0	3387	1E+30	3267
22	\$E\$18	Обмеження за запасом задних стінок з ДВП для полиць В1 та В2 Лів.ч.		120	0	3320	1E+30	3200
23	\$E\$19	Обмеження за запасом стекол для полиць А та В2 Лів.ч.		2440	0	2600	1E+30	160
24	\$E\$20	Обмеження за кількістю полиць А, що може умістити сушарка Лів.ч. Обмеження за кількістю полиць усіх видів, що може умістити склад		1100	30	1100	70	368,8888889
25	\$E\$21	готової продукції Лів.ч.		1220	60	1220	80	70
26	\$E\$22	Обмеження, що враховує ємність ринку Лів.ч.		1220	0	5300	1E+30	4080
27	\$E\$23	Обмеження за гарантованим заказом Лів.ч.		120	0	50	70	1E+30
28	\$E\$24	Обмеження за співвідношенням обсягів продажу Лів.ч.		488	0	20	468	1E+30
29								
30								
31								
32								
33								

Рисунок 3.3 – Звіт зі стійкості для задачі про виробництво полиць

У графах «Допустимое увеличение» та «Допустимое уменьшение» містяться граничні значення збільшення ресурсів  $\Delta b_i$ . У графі «Допустимое уменьшение» показано, на скільки можна зменшити або збільшити кількість ресурсу, зберігши при цьому оптимальний розв'язок. Зробимо аналіз дефіцитних ресурсів. Аналізуючи звіт за результатами, ми встановили, що існують причини (обмеження), які не дозволяють меблевому комбінату випускати більшу кількість полиць, чим в оптимальному розв'язку, і одержувати вищий прибуток. У розглянутій задачі (варіант 0) такими обмеженнями є дефіцитні ресурси «Ємність сушарки» та «Ємність складу готової продукції». Оскільки знак обмежень цих запасів має вигляд  $\leq$ , виникає питання, на скільки максимально повинна зрости ємність цих приміщень, щоб забезпечити збільшення випуску продукції. Відповідь на це запитання показано у графі «Допустимое увеличение». Ємність сушарки можна збільшити якнайбільше на 70 полиць, а ємність складу готової продукції – на 80 полиць. Це призведе до нових оптимальних розв'язків, що збільшують прибуток. Подальше збільшення ємностей сушарки та складу понад зазначені межі не буде поліпшувати розв'язок, тому що інші ресурси стануть сполучними.

Після того як ми встановили, що збільшення ємностей сушарки та складу призведе до нових планів випуску, що забезпечить вищий прибуток, виникає питання, що вигідніше розширювати у першу чергу – сушарку або склад. Відповідь на це запитання дають тіньові ціни. Для ємності сушарки тіньова ціна дорівнює 30 грн/шт., а для складу – 60 грн/шт. Отже, кожна полиця, що додатково буде поміщеною у сушарку, збільшить прибуток на 30 грн, а кожна полиця, що додатково буде поміщеною на склад, збільшить прибуток на 60 грн. Звідси висновок: у першу чергу вигідно збільшувати ємність складу готової продукції.

### **Зміст звіту:**

- модель задачі відповідно до варіанта;
- копії екрана відповідно до порядку виконання роботи з коментарями;

- результати аналізу оптимального розв’язку задачі;
- висновок.

### ***Контрольні запитання***

1. Що таке сполучні, несполучні, надлишкові обмеження; дефіцитні та недефіцитні ресурси?
2. Поясніть передумови та основні завдання аналізу оптимального розв’язку на чутливість.
3. Поясніть, як за графічним методом проводять аналіз зміни запасу дефіцитних ресурсів.
4. Поясніть, як, спираючись на результати графічного аналізу, можна чисельно розрахувати новий (поліпшений) запас дефіцитного ресурсу.
5. Поясніть, як за графічним методом проводять аналіз зміни запасу недефіцитних ресурсів.
6. Як, спираючись на результати графічного аналізу, можна чисельно розрахувати новий запас недефіцитного ресурсу?
7. Що таке цінність додаткової одиниці  $i$ -го ресурсу?
8. Як проводять графічний аналіз зміни коефіцієнтів цільової функції?
9. Як чисельно визначити діапазон зміни коефіцієнтів цільової функції, що не змінює оптимального розв’язку?
10. Яку інформацію про чутливість оптимального розв’язку задачі ЛП можна одержати зі звіту за результатами та звіту зі стійкості?
11. Проаналізуйте на чутливість задачу про виробництво полиць (відповідно до свого варіанту).

### **Практичне заняття 16**

#### **СТАНДАРТНА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА**

#### **(ДВОХІНДЕКСНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ)**

**Мета** – придбання навичок з побудови математичних моделей стандартних транспортних задач ЛП та їх розв’язання у Microsoft Excel.

**Вихідні дані** – транспортна задача (ТЗ) відповідно до варіанта, що зазначений викладачем.

#### ***Порядок виконання роботи***

1. Відповідно до номера свого варіанту оберіть умову задачі.



2. Побудуйте модель задачі та її транспортну таблицю.
3. Знайдіть оптимальний розв'язок задачі в Excel та продемонструйте його викладачеві.

### **Основні відомості**

Стандартну модель транспортної задачі (ТЗ) визначають як задачу з розробки найбільш економічного плану перевезення продукції одного виду з кількох пунктів відправлення до декількох пунктів призначення. При цьому величина транспортних витрат прямо пропорційна обсягу перевезеної продукції та задається за допомогою тарифів на перевезення одиниці продукції.

Вихідні параметри моделі ТЗ:

$n$  – кількість пунктів відправлення,  $m$  – кількість пунктів призначення;

$a_i$  – запас продукції у пункті відправлення  $A_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) [од. тов.];

$b_j$  – попит на продукцію у пункті призначення  $B_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) [од. тов.];

$c_{ij}$  – тариф (вартість) перевезення одиниці продукції з пункту відправлення  $A_i$  до пункту призначення  $B_j$  [грн/од. тов.].

Шукані параметри моделі ТЗ:

$x_{ij}$  – кількість продукції, перевезеної з пункту відправлення  $A_i$  до пункту призначення  $B_j$  [од. тов.].

$L(X)$  – транспортні витрати на перевезення всієї продукції [грн].

Етапи побудови моделі:

- ідентифікація змінних;
- перевірка збалансованості задачі;
- побудова збалансованої транспортної матриці;
- завдання цільової функції;
- завдання обмежень.

Транспортна модель має такий вигляд:

$$L(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, j = \overline{1, m}, \\ x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Цільова функція являє собою транспортні витрати на здійснення всіх перевезень у цілому. Перша група обмежень вказує, що запас продукції в будь-якому пункті відправлення повинен дорівнювати сумарному обсягу перевезень продукції з цього пункту. Друга група обмежень вказує, що сумарні перевезення продукції до деякого пункту споживання повинні повністю задовольнити попит на продукцію в цьому пункті. Наочною формою подання моделі ТЗ є транспортна матриця (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Загальний вигляд транспортної матриці

Пункти відправлення, $A_i$	Пункти споживання, $B_j$				Запаси, [од. прод.]
	$B_1$	$B_2$	...	$B_m$	
$A_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1m}$	$a_1$
$A_2$	$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2m}$	$a_2$
...	...	...	...	...	...
$A_n$	$c_{n1}$	$c_{n2}$	...	$c_{nm}$	$a_n$
<b>Потреба [од. прод.]</b>	$b_1$	$b_2$	...	$b_m$	$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$

ТЗ називають *збалансованою*, якщо виконується умова

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j,$$

у протилежному випадку задачу називають *незбалансованою*. Метод потенціалів призначений для розв'язання збалансованої ТЗ. У випадку, коли сумарні запаси перевищують сумарні потреби, необхідно ввести додатковий

фіктивний пункт споживання, що буде формально споживати наявий надлишок запасів, тобто

$$b_{\phi} = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j.$$

Якщо сумарні потреби перевищують сумарні запаси, то необхідно ввести додатковий фіктивний пункт відправлення, що формально заповнює наявну нестачу продукції в пунктах відправлення:

$$a_{\phi} = \sum_{j=1}^m b_j - \sum_{i=1}^n a_i.$$

Введення фіктивного споживача або відправника викликає необхідність формального завдання фіктивних тарифів  $c_{ij}^{\phi}$  для фіктивних перевезень, які задають не вигідними, тобто дорогими. Зазвичай величину фіктивних тарифів обирають такою, щоб вона перевищувала максимальний з реальних тарифів, використовуваних у моделі, тобто

$$c_{ij}^{\phi} > \max c_{ij} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}).$$

На практиці можливі ситуації, коли у певних напрямках перевезення продукції неможливі, наприклад, через ремонт транспортних магістралей. Такі ситуації моделюють шляхом введення так званих *заборонних* тарифів  $c_{ij}^3$ . Заборонні тарифи повинні зробити неможливими перевезення у відповідних напрямках. Для цього їх величина повинна перевищувати максимальний з реальних тарифів, використовуваних у моделі:

$$c_{ij}^3 > \max c_{ij} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}).$$

### Приклад 16.1

Нехай необхідно організувати оптимальні за транспортними витратами перевезення борошна з двох складів до трьох хлібо заводів. Щомісячні запаси борошна на складах дорівнюють 79,515 та 101,925 т, а щомісячні потреби хлібо заводів становлять 68,5, 29,5 та 117,4 т відповідно. Борошно на складах

зберігають та транспортують у мішках по 45 кг. Транспортні витрати (грн/т) з доставляння борошна подані у таблиці 4.2. Між першим складом та другим хлібозаводом укладений договір про гарантоване постачання 4,5 т борошна щомісяця. У зв'язку з ремонтними роботами тимчасово неможливе перевезення з другого складу до третього хлібозаводу.

Таблиця 4.2 – Транспортні витрати з доставки борошна (грн/т)

Склади	Хлібозаводи		
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>
C <sub>1</sub>	350	190	420
C <sub>2</sub>	400	100	530

ТЗ являє собою задачу ЛП, яку можна розв'язати за симплекс-методом, що й відбувається при розв'язанні таких задач у Excel. Необхідно побудувати модель, придатну для розв'язання задачі за методом потенціалів.

Позначимо через  $x_{ij}$  [міш.] кількість мішків з борошном, які будуть перевезені з  $i$ -го складу до  $j$ -го хлібозаводу. Перевіримо збалансованість задачі. Попередньо виключимо обсяг гарантованого постачання з подальшого розгляду. Для цього віднімемо 4,5 т з наступних величин:

– з запасу першого складу  $a_1 = 79,515 - 4,5 = 75,015$  т/міс.;

– з потреби у борошні другого хлібозаводу

$$b_2 = 29,5 - 4,500 = 25,000 \text{ т/міс.}$$

Відповідно до умови задачі борошно зберігають та перевозять у мішках по 45 кг, тобто одиницями виміру змінних  $x_{ij}$  є мішки борошна. Але запаси борошна на складах та потреби у ньому хлібозаводів задані у тоннах. Тому для перевірки балансу та подальшого розв'язання задачі приведемо ці величини до однієї одиниці виміру – до мішків. Наприклад, запас борошна на першому складі дорівнює 75,015 т/міс., або  $\frac{75,015 \text{ т/міс.}}{0,045 \text{ т/міш.}} = 1667 \text{ міш./міс.}$ , а потреба

першого хлібозаводу становить 68 т/міс., або  $\frac{68,000 \text{ т/міс.}}{0,045 \text{ т/міш.}} = 1511,1 \approx 1512 \text{ міш./міс.}$  Округлення при розрахунку потреб

необхідно виконувати в більшу сторону, інакше потреба у борошні не буде задоволеною повністю.

Отже, баланс має вигляд

$$\underbrace{1667 + 2265}_{3932 \text{ міш. /міс.}} < \underbrace{1512 + 556 + 2609}_{4677 \text{ міш. /міс.}},$$

тобто щомісячний сумарний запас борошна на складах менший за сумарну потребу хлібо заводів на  $4\,677 - 3\,932 = 745$  мішків борошна, звідки випливає, що ТЗ є не збалансованою.

Побудуємо збалансовану транспортну матрицю, подану у таблиці 4.3. Вартість перевезення борошна треба віднести до одиниці продукції, тобто до 1 мішка борошна. Так, наприклад, тариф перевезення з першого складу до третього хлібо заводу дорівнює  $420 \text{ грн/т} \cdot 0,045 \text{ т/міш.} = 18,90 \text{ грн/міш.}$

Для встановлення балансу необхідно ввести додатковий фіктивний склад, тобто додатковий рядок у транспортній таблиці задачі. Фіктивні тарифи на перевезення задамо так, щоб вони були дорожче за реальні тарифи, наприклад,  $c_{3j}^{\phi} = 50,0 \text{ грн /міш.}$

Неможливість постачання вантажів з другого складу до третього хлібо заводу задамо у моделі за допомогою заборонного тарифу, який перевищує величину фіктивного тарифу, наприклад,  $c_{23}^3 = 100,00 \text{ грн /міш.}$

Таблиця 4.3 – Транспортна матриця задачі

Склади	Хлібо заводи			Запас, мішки
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	
C <sub>1</sub>	15,75	8,55	18,90	1 667
C <sub>2</sub>	18,00	4,50	100,00	2 265
C <sub>φ</sub>	50,00	50,00	50,00	745
<b>Потреба, мішки</b>	1 512	556	2 609	<b>∑ = 4 677</b>

Визначимо цільову функцію. Формально цільова функція являє собою сумарні витрати на всі можливі перевезення борошна:

$$L(X) = 15,75x_{11} + 8,55x_{12} + 18,90x_{13} + \\ + 18,00x_{21} + 4,50x_{22} + 100,00x_{23} + \\ + 50,00x_{31} + 50,00x_{32} + 50,00x_{33} \rightarrow \min (\text{грн/міс}).$$

При цьому треба враховувати, що внаслідок використання фіктивних тарифів реальна цільова функція, тобто кошти, які насправді прийдеться заплатити за транспортування борошна, буде меншою за формальну на вартість знайдених у процесі розв'язання фіктивних перевезень.

Задамо обмеження:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1667, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 2265, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 745, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1512, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 556, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2609, \\ x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,3}). \end{cases} \quad (\text{міш./міс.})$$

### ***Зміст звіту***

- умова задачі з вихідними даними відповідно до варіанта;
- побудована модель задачі з вказівкою всіх одиниць виміру;
- транспортна таблиця та модель задачі;
- копії екрана відповідно до порядку виконання роботи з коментарями;
- результати розв'язання задачі з вказівкою одиниць виміру.
- висновок.

### ***Контрольні запитання***

1. Що таке задача про розміщення?
2. Поясніть постановку стандартної ТЗ.
3. Запишіть математичну модель ТЗ.
4. Перелічіть вихідні та шукані параметри моделі ТЗ.
5. Поясніть суть кожного з етапів побудови моделі ТЗ.
6. Розкрийте поняття збалансованості ТЗ.
7. Що таке фіктивні та заборонні тарифи?

8. У якому співвідношенні повинні перебувати величини фіктивних та заборонних тарифів при необхідності їх одночасного використання у транспортній моделі?

### **Варіанти індивідуальних завдань**

На складах зберігається борошно, яке необхідно завезти до хлібозаводів. Номера складів та номери хлібозаводів треба обирати відповідно до варіантів таблиці 16.4. Поточні тарифи на перевезення борошна [грн/т], щомісячні запаси борошна [т/міс.] на складах та потреби хлібозаводів у борошні [т/міс.] зазначені у таблиці 16.5.

При цьому необхідно враховувати, що через ремонтні роботи тимчасово немає можливості перевозити борошно з деяких складів до деяких хлібозаводів. У таблиці 16.4 це показано у графі «Заборона перевезення» у форматі Номер складу x Номер хлібозаводу. Наприклад, «2 × 3» позначає, що не можна перевозити борошно з складу №2 до хлібозаводу №3.

Крім того, необхідно врахувати, що деякі хлібозаводи мають договори на гарантоване постачання борошна з певних складів. У таблиці 16.4 це показано у графі «Гарантоване постачання» у форматі Номер складу x Номер хлібозаводу = обсяг поставки. Наприклад, «1 × 4 = 40» означає, що між складом №1 та хлібозаводом №4 укладений договір на обов'язкову поставку 40 т борошна.

Необхідно організувати постачання щонайкраще, з огляду на те, що борошно зберігають та транспортують у мішках вагою по 50 кг.

Таблиця 16.4 – Номери складів, хлібозаводів, заборонене та гарантоване постачання

<b>Номер варіанта</b>	<b>Номер складів</b>	<b>Номер хлібозаводів</b>	<b>Заборона перевезення</b>	<b>Гарантоване постачання, т/міс.</b>
1	2	3	4	5
<b>1</b>	1, 2, 3	1, 2, 3, 4	2x2, 3x4	3x3=50
<b>2</b>	2, 3, 4, 5	1, 2, 5	2x2, 3x5	3x2=40
<b>3</b>	1, 2, 4	1, 2, 3, 5	1x5, 2x3	4x3=45
<b>4</b>	1, 2, 3, 4	3, 4, 5	3x3, 4x5	3x5=40

Продовження таблиці 16.4

1	2	3	4	5
<b>5</b>	1, 2, 5	2, 3, 4, 5	1x4, 5x3	1x5=60
<b>6</b>	1, 2, 3, 5	2, 3, 5	5x5, 2x2	3x5=30
<b>7</b>	2, 3, 4	2, 3, 4, 5	3x3, 2x5	4x3=45
<b>8</b>	1, 2, 3, 5	1, 2, 4	1x2, 5x4	3x2=20
<b>9</b>	2, 3, 5	1, 2, 3, 5	5x1, 3x5	5x2=30
<b>10</b>	2, 3, 4, 5	2, 3, 4	5x4, 3x2	4x3=35
<b>11</b>	3, 4, 5	1, 2, 3, 4	3x4, 5x1	4x1=40
<b>12</b>	1, 2, 3, 4	1, 2, 3	3x2, 4x1	2x2=50

Таблиця 4.5 – Запаси, потреби і тарифи на перевезення

Склади	Хлібозаводи					Запас, т/міс.
	1	2	3	4	5	
<b>1</b>	400	600	800	200	200	80
<b>2</b>	300	100	500	600	500	70
<b>3</b>	500	200	100	600	300	60
<b>4</b>	300	700	200	400	900	55
<b>5</b>	200	500	800	200	400	65
<b>Попит, т/міс.</b>	77,86	56,78	58,88	62,44	73,92	



## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Математичне моделювання в електроенергетиці : підручник / О. В. Кириленко, М. С. Сегеда, О. Ф. Буткевич, Т. А. Мазур. – Львів : Вид-во Нац. унів. «Львівська політехніка», 2010. – 608 с. (Бібліотека ХНУМГ ім. О. М. Бекетова).
2. Перхач В. С. Математичні задачі електроенергетики : навч. посіб. / В. С. Перхач, за ред. Г. І. Денисенка. – Львів : Вища школа, 1982. – 380 с. (Бібліотека ХНУМГ ім. О. М. Бекетова).
3. Маліновський А. А. Математичні задачі систем енергозабезпечення та їх алгоритмізація : навч. посіб. / А. А. Маліновський, А. З. Музичак; Нац. ун-т «Львівська політехніка». – Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2018. – 264 с. (Бібліотека ХНУМГ ім. О. М. Бекетова).
4. Штельма О. М. Оптимізаційні методи та моделі : конспект лекцій / О. М. Штельма; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 43 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу : [https://eprints.kname.edu.ua/56334/1/2020\\_печ\\_145Л\\_Лекции\\_ОММнове.pdf](https://eprints.kname.edu.ua/56334/1/2020_печ_145Л_Лекции_ОММнове.pdf), вільний).

*Виробничо-практичне видання*

Методичні рекомендації  
до практичних занять  
із навчальної дисципліни  
**«СУЧАСНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ  
ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ»**

Частина третя

**«Вирішення оптимізаційних задач засобами Microsoft Excel»**  
(для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти  
денної та заочної форм навчання зі спеціальності  
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)

Укладачі: **ОХРІМЕНКО** Вячеслав Миколайович,  
**ВОРОНКОВ** Олексій Олександрович

Відповідальний за випуск *В. Є. Плюгін*  
*За авторською редакцією*  
Комп'ютерне верстання *В. М. Охріменко*

План 2022, поз. 451М

---

Підп. до друку 18.11.2022. Формат 60 × 84/16.  
Електронне видання. Ум. друк. арк. 2,9

Видавець і виготовлювач:  
Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Маршала Бажанова 17, Харків, 61002.  
Електронна адреса: office@kname.edu.ua  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
№ ДК 5328 від 11.04.2017.