МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до проведення практичних занять
та виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
М О Д У Л Ь 3

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти всіх форм навчання
зі спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія та технології)*

**Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2023**

Методичні рекомендації до проведення практичних занять та виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика». Модуль 3 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія та технології) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2023. – 44 с.

Укладачі : канд. фіз.-мат. наук, доц. С. М. Ламтюгова,
канд. пед. наук, доц. Ю. В. Ситникова

Рецензент

А. В. Якунін, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 1 від 30.08.2022

Методичні рекомендації розроблені відповідно до навчального плану та програми дисципліни «Вища математика» для здобувачів спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія та технології і містять навчальний матеріал третього семестру. У методичних рекомендаціях подано теми практичних занять відповідно до робочої програми з посиланням на рекомендовану літературу; приклади розв’язання типових задач; питання та завдання для самостійної роботи.

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета дисципліни – забезпечити належну фундаментальну математичну підготовку студентів та сформувати у них знання та вміння застосовувати її для аналізу різноманітних явищ з орієнтацією на сфери професійної діяльності. Завдання дисципліни – допомогти студентам засвоїти основи математичного апарату, необхідного для розв'язування теоретичних і практичних задач, виробити вміння та навички математичного дослідження прикладних об'єктів, навчити студентів самостійно вивчати наукові джерела з математики та її прикладних застосувань, сприяти розвитку логічного та алгоритмічного мислення.

Навчальний процес з дисципліни «Вища математика» для здобувачів навчально-наукового інституту будівельної та цивільної інженерії, що навчаються за спеціальністю 185 – Нафтогазова інженерія та технології, триває три семестри на першому та другому курсах навчання. На лекціях викладається зміст, проводиться аналіз основних понять і методів вищої математики. На практичних заняттях студенти одержують пояснення теоретичних положень дисципліни, опановують основні методи, підходи та засоби розв'язання математичних задач.

Важливою формою засвоєння математичного апарату є самостійна робота студентів, місце і значення якої постійно зростає. Вона включає самостійне опрацювання теоретичного матеріалу низки тем, виконання домашніх завдань, проведення самоконтролю, творчі пошуки поза межами, передбаченими програмою дисципліни.

Методичні рекомендації спрямовані на надання студентові необхідної інформації щодо змісту, форми та особливостей організації навчального процесу під час проведення практичних занять і виконання самостійної роботи.

1 ЗМІСТ ПРАКТИЧНОЇ ЧАСТИНИ

Змістовий модуль 3.1 Кратні інтеграли

Практичне заняття № 1 – 2 год

Тема «Обчислення подвійного інтеграла в прямокутній системі координат».

Мета: сформувати вміння та навички обчислення подвійних інтегралів у прямокутній системі координат шляхом зведення до повторних.

Література: [1, 2, 4].

Практичне заняття № 2 – 2 год

Тема «Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат».

Мета: сформувати вміння та навички обчислення подвійних інтегралів у полярній системі координат.

Література: [1, 2, 4].

Практичне заняття № 3 – 2 год

Тема «Геометричні застосування подвійних інтегралів».

Мета: сформувати навички обчислення площі фігури в декартових та полярних координатах, об'ємів тіл.

Література: [1, 2, 4].

Практичне заняття № 4 – 2 год

Тема «Фізичні застосування подвійних інтегралів».

Мета: сформувати навички обчислення маси плоскої пластини, моментів інерції пластини відносно осей координат, статичних моментів та координат центра мас пластини.

Література: [1, 2, 4].

Практичне заняття № 5 – 2 год

Тема «Узагальнення вивченого матеріалу за ЗМ 3.1. Письмова КР №3.1».

Мета: узагальнити вивчений матеріал за ЗМ 3.1 і перевірити сформовані навички обчислення подвійних інтегралів.

Література: [1, 2, 4].

Змістовий модуль 3.2 Криволінійні та поверхневі інтеграли

Практичне заняття № 6 – 2 год

Тема «Криволінійні інтеграли першого роду».

Мета: сформувати вміння та навички обчислення криволінійних інтегралів першого роду (за довжиною).

Література: [1, 2, 4].

Практичне заняття № 7 – 2 год

Тема «Застосування криволінійного інтеграла по довжині».

Мета: сформувати вміння та навички обчислення довжини дуги кривої, маси плоскої матеріальної дуги кривої, моментів інерції та статичних моментів дуги кривої відносно осей координат, координат центра мас дуги кривої.

Література: [1, 2, 4].

Практичне заняття № 8 – 2 год

Тема «Криволінійні інтеграли другого роду».

Мета: сформувати вміння та навички обчислення характеристик векторних полів та криволінійних інтегралів другого роду (за координатами).

Література: [1, 2, 4].

Практичне заняття № 9 – 2 год

Тема «Формула Гріна. Розв'язання диференціальних рівнянь у повних диференціалах».

Мета: сформувати вміння та навички обчислення криволінійних інтегралів другого роду по замкненому контуру за допомогою формули Гріна та розв'язання диференціальних рівнянь у повних диференціалах.

Література: [1, 2, 4].

Практичне заняття № 10 – 2 год

Тема «Узагальнення вивченого матеріалу за ЗМ 3.2. Письмова КР №3.2».

Мета: узагальнити вивчений матеріал за ЗМ 3.2 і перевірити сформовані навички обчислення криволінійних інтегралів.

Література: [1, 2, 4].

Змістовий модуль 3.3 Ряди.

Теорія ймовірності та математична статистика

Практичне заняття № 11 – 2 год

Тема «Числові знакододатні ряди».

Мета: засвоїти основні поняття з теорії числових рядів, сформувати вміння та навички знаходити суму ряду та використовувати необхідну ознаку збіжності та достатню ознаку розбіжності.

Література: [3, 4].

Практичне заняття № 12 – 2 год

Тема «Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів».

Мета: сформувати вміння та навички досліджувати числові знакододатні ряди на збіжність.

Література: [3, 4].

Практичне заняття № 13 – 2 год

Тема «Числові знакопочергові ряди та степеневі ряди».

Мета: сформувати вміння та навички досліджувати числові знакопочергові ряди на абсолютну та умовну збіжність, знаходити інтервали та області збіжності степеневих рядів.

Література: [3, 4].

Практичне заняття № 14 – 2 год

Тема «Застосування степеневих рядів до наближених обчислень».

Мета: сформувати вміння та навички наближено обчислювати значення функцій, визначених інтегралів та розв'язувати диференціальні рівняння за допомогою розкладання в степеневі ряди.

Література: [3, 4].

Практичне заняття № 15 – 2 год

Тема «Узагальнення вивченого матеріалу за ЗМ 3.3. Письмова КР №3.3».

Мета: узагальнити вивчений матеріал за ЗМ 3.3 і перевірити сформовані навички дослідження рядів на збіжність та знаходження інтервалів та областей збіжності степеневих рядів.

Література: [3, 4].

2 ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Змістовий модуль 3.1 Кратні інтеграли

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x-2)dxdy$ по області D, обмеженої лініями $x = 0, y = 7 - x,$ $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Розв'язання.

Область D зображена на рисунку 1. Якщо вибрати внутрішнє інтегрування по y, а зовнішнє – по x, то подвійний інтеграл по цій області запишеться одним повторним інтегралом:

$$\iint\limits_D (x-2)dxdy = \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x} (x-2)dy = \int_0^4 (xy - y^2)\Big|_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x} dx =$$

$$= \int_0^4 \left(7x - x^2 - 49 + 14x - x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 1 - x + x\right)dx =$$

$$= \int_0^4 \left(-\frac{9}{4}x^2 + 21x - 48\right)dx == \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 48x\right)\Big|_0^4 = -72 .$$

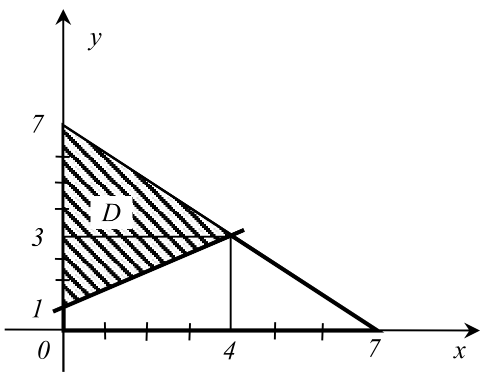

Рисунок 1

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл

$$I=\int_{-R}^{0}dx\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dy,$$

використовуючи полярні координати. Знайти його чисельне значення при $R = 1$.

Розв'язання.

Область інтегрування D представляє собою чверть кола, розташованого в другому квадранті (рис. 2).

Перейдемо до полярних координат

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ \ x^2+y^2=\rho^2,\ \text{де}\ 0\le\rho\le R,\ \ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi.$$

Тоді

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_{0}^{R}\frac{ln(1+\rho)}{\rho}\rho d\rho=\left|u=ln(1+\rho),\right.$$

$$du=\frac{d\rho}{1+\rho},\ \ dv=d\rho,\ \ v=\rho\left|=\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\rho\,ln(1+\rho)\Big|_0^R-\int_0^R\frac{\rho d\rho}{1+\rho}\right)=\right.$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(Rln(1+R)-\rho\Big|_0^R+ln(1+\rho)\Big|_0^R\right)=\frac{\pi}{2}\left(R\,ln(1+R)-R+ln(1+R)\right).$$

Коли $R = 1$ одержуємо: $I=\frac{\pi}{2}(2ln2-1)$.

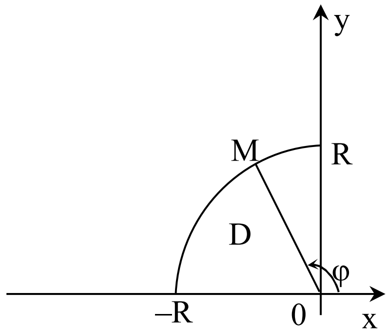

Рисунок 2

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 3x$ і $3x + y - 4 = 0$.

Розв'язання.

Дана плоска фігура обмежена знизу параболою $y = x^2 - 3x$, зверху прямою $y = -3x + 4$. (рис. 3).

Вершина параболи має координати: $x = 1{,}5$; $y = -2{,}25$.

Знайдемо абсциси точок перетинання цих ліній:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x, \\ y = -3x + 4. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x = -3x + 4, \Rightarrow x^2 = 4, \Rightarrow x = \pm 2.$$

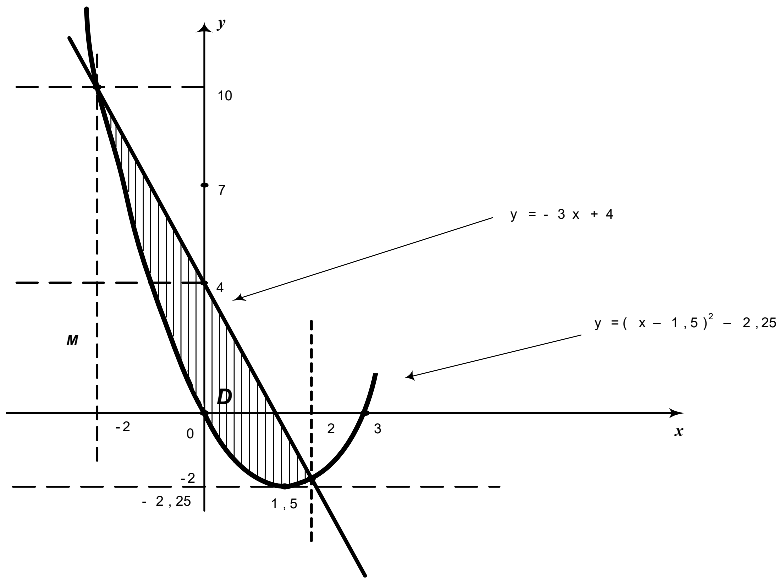

Рисунок 3

Отже,

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2-3x}^{4-3x} dy = \int\limits_{-2}^{2} y \Big|_{x^2-3x}^{4-3x} dx = \int\limits_{-2}^{2} (4 - 3x - x^2 + 3x) dx =$$

$$= \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3} \text{ од}^2.$$

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{1-y}$, $y = x$, $y = -x$, $z = 0$.

Розв'язання.

Дане тіло обмежене зверху параболічним циліндром $z=\sqrt{1-y}$, з боків площинами $y = x$, $y = -x$ і знизу площиною $z = 0$ (рис. 4).

Областю інтегрування D є трикутник, тому:

$$V=\iint_D \sqrt{1-y}\,dxdy=2\int_1^0 dy\int_0^y \sqrt{1-y}\,dx=2\int_1^0 \sqrt{1-y}\;x\Big|_0^y dy=2\int_1^0 y\sqrt{1-y}\,dy=$$

$$=\left|\begin{matrix}\sqrt{1-y}=t,\ y=1-t^2,\ t=1 \ \text{при}\ y=0\\ 1-y=t^2,\ dy=-2tdt,\ t=0\ \text{при}\ y=1\end{matrix}\right|=$$

$$=2\int_1^0 (1-t^2)t(-2tdt)=4\int_0^1 (t^2-t^4)dt=4\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{15},\ \text{од}^3.$$

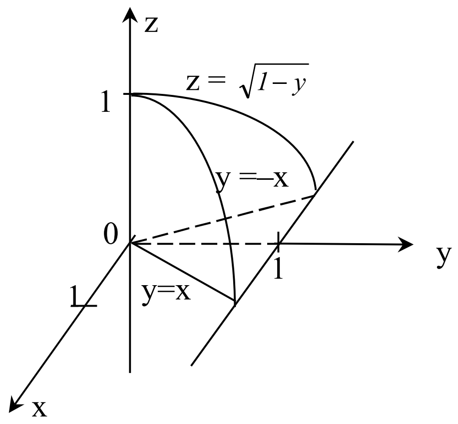

Рисунок 4

Приклад 5. Обчислити масу m неоднорідної пластини D, обмеженої лініями $y=2x-x^2$, $y = x$, якщо поверхнева щільність у кожній її точці $\mu=x^2+2xy$.

Розв'язання.

Границі інтегрування за змінною x знаходимо з системи: $\begin{cases} y=2x-x^2 \\ y=x \end{cases}$

Маємо $x\in[0;1]$. Змінна y розташована між даними лініями. Для обчислення маси m плоскої пластини, яка має поверхневу щільність μ, скористаємося фізичним змістом подвійного інтеграла і формулою

$m=\iint\limits_D(x^2+2xy)dxdy$, де область інтегрування D зображена на рисунку 5.

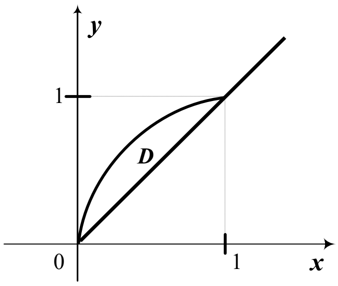

Рисунок 5

Це дозволяє представити подвійний інтеграл у вигляді повторного:

$$m=\int_0^1 dx\int_x^{2x-x^2}(x^2+2xy)dy=\int_0^1(x^2y+xy^2)\Big|_x^{2x-x^2}dx=$$

$$=\int_0^1(2x^3-x^4-x^3+4x^3-4x^4+x^5-x^3)dx=$$

$$=\int_0^1(x^5-5x^4+4x^3)dx=\left(\frac{x^6}{6}-x^5+x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}.$$

Змістовий модуль 3.2 Криволінійні та поверхневі інтеграли

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L(x^2+y^2)^n dl$, де L – коло $x^2+y^2=a^2$.

Розв'язання.

Маємо криволінійний інтеграл першого роду (тобто по дузі). Запишемо рівняння кола $x^2+y^2=a^2$ у параметричному вигляді: $x=\alpha\cos t$, $y=\alpha\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.

Тоді

$$x'_t=-\alpha\sin t,\ y'_t=\alpha\cos t,\ dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt,$$

$$dl=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt=adt.$$

Отже, $$\oint\limits_L(x^2+y^2)^n dl=a^{2n+1}\int_0^{2\pi}dt=2\pi a^{2n+1}.$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{OB}} xdl$, де L_{OB} – відрізок прямої від точки *O(0,0)* до точки *B(l,2)*.

Розв'язання.

Знаходимо рівняння прямої *OB* за двома точками: $y = 2x$.

Далі маємо:

$$dl = \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx\,; \quad dl = \sqrt{5}\,dx\,; \quad \int\limits_{L_{OB}} xdl = \sqrt{5}\int\limits_0^1 xdx = \sqrt{5}\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду: $I = \int\limits_L (\sqrt[3]{x}+y)dx - (\sqrt[3]{y}+x)dy$, де L – верхня дуга астроїди $x = 8\cos^3 t$, $y = 8\sin^3 t$ від точки (*8,0*) до точки (-*8,0*).

Розв'язання.

Знаходимо:

$$dx = 24\cos^2 t(-\sin t)dt\,, \quad dy = 24\sin^2 t\cos t dt\,, \quad 0 \le t \le \pi\,.$$

Тоді

$$I = \int\limits_0^{\pi} (2\cos t + 8\sin^3 t)(-24\sin t\cos^2 t)dt - (2\sin t + 8\cos^3 t)24\sin^2 t\cos t dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} (-48\sin t\cos^3 t - 192\sin^4 t\cos^2 t - 48\sin^3 t\cos t - 192\sin^2 t\cos^4 t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} (-24\sin 2t - 48\sin^2 2t)dt = 12\cos 2t\Big|_0^{\pi} - 24\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 4t)dt =$$

$$= -24\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\bigg|_0^{\pi} = -24\pi\,.$$

Приклад 4. Показати, що вираз

$$\left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 1\right)dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - 10\right)dy$$

є повним диференціалом функції *U(x,y)*. Знайти цю функцію.

Розв'язання.

Перевіримо, чи виконується умова повного диференціала $\left(\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ для функції $U(x,y)$. Маємо:

$$P(x,y)=\frac{y}{1+x^2y^2}-1;\quad Q(x,y)=\frac{x}{1+x^2y^2}-10,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)=\frac{1+x^2y^2-y2x^2y}{\left(1+x^2y^2\right)^2}=\frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-10\right)=\frac{1+x^2y^2-x2xy^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}=\frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}.$$

Отже, даний вираз є повним диференціалом функції $U(x,y)$. Застосуємо криволінійний інтеграл другого роду. Поклавши $x_0=0,\ y_0=0$, за формулою

$$U(x;y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C$$

знайдемо $U(x,y)$:

$$U(x,y)=\int_0^x(-1)dx+\int_0^y\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)dy+C=$$

$$=-x\Big|_0^x+(arctgxy-10y)\Big|_0^y+C=-x+arctgxy-10y+C.$$

Результат обчислення правильний, якщо

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=P(x,y),\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=Q(x,y).$$

Зробимо перевірку:

$$\frac{\partial}{\partial x}(-x+arctgxy-10y+C)=-1+\frac{y}{1+x^2y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(-x+arctgxy-10y+C)=\frac{x}{1+x^2y^2}-10.$$

Отже, $U(x,y)=arctgxy-x-10y+C$.

Приклад 5. Обчислити моменти інерції щодо осей координат однорідного відрізка прямої $4x + 2y = 3$, що лежить між точками $(0,\frac{3}{2})$ і $(2,-\frac{5}{2})$.

Розв'язання.

Використовуючи загальні формули для обчислення моментів інерції, за допомогою криволінійного інтегралу першого роду послідовно знаходимо:

$$I_x = \int_L y^2 dl \text{, де } L\text{: } 4x + 2y = 3, \quad y = -2x + \frac{3}{2}, \quad dl = \sqrt{5}dx,$$

$$I_x = \sqrt{5}\int_0^2 \left(-2x + \frac{3}{2}\right)^2 dx = -\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{3}\left(-2x + \frac{3}{2}\right)^3 \Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{6}\left(\frac{-125}{8} + \frac{27}{8}\right) = \frac{49\sqrt{5}}{24},$$

$$I_y = \int_L x^2 dl, \quad I_y = \sqrt{5}\int_0^2 x^2 dx = \sqrt{5}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}\sqrt{5}.$$

Приклад 6. Обчислити: $I = \oint_L y(1-x^2)dx + (1+y^2)xdy$, де контур L – коло $x^2 + y^2 = 4$, вздовж якого рухаємося у додатному напрямі.

Розв'язання.

Скористаємося формулою Гріна:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

де D область, яку обмежено контуром L.

Маємо $I = \iint_D (1 + y^2 - 1 + x^2)dxdy = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$, тут D – коло, визначене нерівністю $x^2 + y^2 \le 4$. Виконаємо заміну змінних:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad dxdy = \rho d\rho d\varphi, \text{ де } 0 \le \varphi \le 2\pi, \; 0 \le \rho \le 2.$$

Отже,

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \iint_{D^*} \rho^3 d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2 = 8\pi.$$

Приклад 7. Дано функцію $u(M)=\frac{\sqrt{x}}{z}-\frac{\sqrt{y}}{x}+2xyz$ і точки $M_1(1;1;-1)$, $M_2(-2;-1;1)$.

Обчислити: а) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямом вектора $\overline{M_1M_2}$; б) $\overline{grad}\,U(M_1)$.

Розв'язання.

а) скористаємося формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1}\cos\gamma;\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\left.\frac{1}{2z\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{x^2}+2yz\right|_{M_1}=-\frac{3}{2};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\left.\frac{1}{2x\sqrt{y}}+2xz\right|_{M_1}=-\frac{5}{2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\left.\frac{\sqrt{y}}{x^2}+2yz\right|_{M_1}=1.$$

Будуємо вектор $\overline{M_1M_2}=(-2-1;-1-1;1+1)=(-3;-2;2)$.

Обчислюємо напрямні косинуси:

$$\cos\alpha=\frac{-3}{\sqrt{9+4+4}}=-\frac{3}{\sqrt{17}};\quad \cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{9+4+4}}=-\frac{2}{\sqrt{17}};\quad \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{9+4+4}}=\frac{2}{\sqrt{17}}.$$

Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)-\frac{5}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right)+1\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)=\frac{23}{2\sqrt{17}};$$

б) відповідно до визначення, маємо:

$$\overline{grad}\,U(M_1)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}\cdot\bar{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\cdot\bar{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1}\cdot\bar{k}=-\frac{3}{2}\bar{i}-\frac{5}{2}\bar{j}+\bar{k}.$$

Змістовий модуль 3.3 Ряди. Теорія ймовірності та математична статистика

Приклад 1. Дослідити на збіжність зазначені ряди з додатними членами:

$$\text{а) }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\quad \text{б) }\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n};\quad \text{в) }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^{n^2}};$$

$$\text{г) }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{4\sqrt{n}};\quad \text{д) }\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{1}{n}\right).$$

Розв'язання.

а) скористаємося ознакою Д'аламбера. Маємо:

$$a_n = \frac{n!}{n^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

тобто даний ряд збігається;

б) відповідно до радикальної ознаки Коші, маємо:

$$a_n = \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n},\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n\cdot 3} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1,$$

тобто даний ряд збігається;

в) скористаємося інтегральною ознакою Коші. Для цього досліджуємо невласний інтеграл:

$$\int_1^\infty \frac{xdx}{2^{x^2}} = \lim_{A\to\infty}\int_1^A x2^{-x^2}dx = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_1^A 2^{-x^2}d(-x^2)\right) =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{2^{-x^2}}{\ln 2}\right)\Bigg|_1^A = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2\ln 2\cdot 2^{A^2}} + \frac{1}{4\ln 2}\right) = \frac{1}{4\ln 2}.$$

Оскільки даний інтеграл збігається, то збігається і досліджуваний ряд;

г) досліджуємо даний ряд за допомогою ознаки порівняння, що полягає в наступному. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k,\ k\in R,\ k\neq 0$, то ряди з такими загальними членами поводяться однаково у сенсі збіжності: чи обоє збігаються, чи обоє розбігаються. Маємо $a_n = tg^2\frac{\pi}{4\sqrt{\pi}}$. Даний ряд будемо порівнювати з гармонійним розбіжним рядом із загальним членом $b_n = \frac{1}{n}$.

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{tg^2\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{tg^2\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\left(\frac{\pi}{4\sqrt{n}}\right)^2\cdot\frac{16}{\pi^2}}=\frac{\pi^2}{16}\neq 0$.

Тут $tg\alpha \sim \alpha$, коли $\alpha\to 0$. Отже, досліджуваний ряд розбігається;

д) для цього ряду необхідна ознака збіжності рядів $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ не виконується. Дійсно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)=1\neq 0,$$

тобто даний ряд розбігається.

Приклад 2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n7^n};\ \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}.$$

Розв'язання.

а) скористаємося ознакою Лейбниця. Маємо:

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n7^n},\ \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n7^n}=0,$$

тобто даний ряд збігається.

Досліджуємо ряд, складений з абсолютних величин членів даного ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n7^n}$.

Застосуємо ознаку Д'аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n7^n}{(n+1)7^{n+1}}=\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{7}<1,$$

тобто утворений ряд збігається.

Отже, початковий ряд абсолютно збігається;

б) представимо даний ряд у вигляді суми двох рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ виконується ознака Лейбниця.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонійний (розбіжний). Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ збігається умовно.

Сума збіжного і розбіжного рядів являє собою розбіжний ряд. Отже, досліджуваний ряд розбігається.

Приклад 3. Знайти області збіжності степеневих рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{x^n}{n^2+1}}\,; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(3-x^2\right)^n.$$

Розв'язання.

а) Скористаємося ознакою Д'аламбера:

$$u_n=\sqrt{\frac{x^n}{n^2+1}}\,, \quad u_{n+1}=\sqrt{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2+1}}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{x^{n+1}}\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}\sqrt{x^n}}\right|=\sqrt{x}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}}=\sqrt{x}\,.$$

Інтервал збіжності визначається нерівністю $\sqrt{x}<1$, звідки $0 < x < 1$.

Досліджуємо граничні точки цього інтервалу.

При $x = 0$ одержимо числовий ряд, члени якого нулі. Цей ряд збігається, точка $x = 0$ входить у його область збіжності.

При $x = 1$ одержимо числовий знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Використаємо ознаку порівняння рядів з додатними членами.

Порівняємо цей ряд з гармонійним розбіжним рядом:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1\neq 0\,.$$

Отже, числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ розбігається і точка $x = 1$ не входить у область збіжності.

Таким чином, область збіжності досліджуваного ряду: $0 \le x < 1$;

б) скористаємося радикальною ознакою Коші:

$$u_n=(3-x^2)^n\,, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|3-x^2|^n}=|3-x^2|<1\,, \quad -1<3-x^2<1\,.$$

Розв'язуємо отримані нерівності:

$$3-x^2>-1,\quad x^2-4<0,\ x\in(-2;2);$$

$$3-x^2<1,\quad x^2-2>0,\ x\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty).$$

Перетинання знайдених множин дає множини збіжності даного ряду $x\in(-2;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};2)$.

Досліджуємо збіжність ряду на кінцях цих інтервалів. При $x=\pm 2$ одержимо числовий ряд· $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Цей знакозмінний числовий ряд розбігається, тому що не виконується необхідна ознака збіжності числового ряду ($\lim_{n\to\infty}u_n=0$).

При $x=\pm\sqrt{2}$ одержуємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1^n$, що розбігається, оскільки необхідна ознака збіжності також не виконується. Отже, область збіжності досліджуваного ряду: $(-2;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};2)$.

Приклад 4. Обчислити $e^{-\frac{1}{2}}$ з точністю α *=0,0001*, скориставшись розкладанням функції $y=e^x$ в степеневий ряд.

Розв'язання.

Скористаємося рядом

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\left(-\infty<x<\infty\right).$$

Тому що $x=-\frac{1}{2}$, то

$$e^{-\frac{1}{2}}=1\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot 2!}-\frac{1}{8\cdot 3!}+\frac{1}{16\cdot 4!}-\frac{1}{32\cdot 5!}+\ldots\ .$$

Одержали знакозмінний числовий ряд. Для того щоб обчислити значення функції з точністю α = *0,0001*, необхідно, щоб перший член, що відкидається, був менше *0,0001* (по наслідку з ознаки Лейбниця). Маємо

$$\alpha_7=\frac{1}{64\cdot 6!}=\frac{1}{64\cdot 720}=\frac{1}{46080}<0{,}0001.$$

З заданим ступенем точності:

$$e^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{48}+\frac{1}{384}-\frac{1}{3840}, \quad e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}6065 .$$

Приклад 5. Використовуючи розкладання підінтегральної функції у степеневий ряд, обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$ з точністю до $0{,}001$.

Розв'язання.

Скористаємося біноміальним рядом

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \ldots,$$

який збігається, коли ($-1 < x < 1$).

Тоді $\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}} = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{-x}{2}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Одержали біном $(1+z)^m$, де $m=-\frac{1}{3}$, а $z=\left(-\frac{x}{2}\right)^3$. Маємо:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\frac{28}{27}\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^9+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^3}{24}+\frac{x^6}{288}+\frac{x^9}{18176}+\ldots\right),$$

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}} \approx \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}\left(1+\frac{x^3}{24}+\frac{x^6}{288}+\frac{x^9}{18176}+\ldots\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^4}{4\cdot 24}+\frac{x^7}{7\cdot 288}+\frac{7x^{10}}{181760}+\ldots\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{96}+\frac{1}{2016}-\frac{7}{181760}+\ldots\right)$$

Тому що $\frac{1}{2016}<0{,}001$, то $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}} \approx \frac{1}{2}-\frac{1}{192} \approx 0{,}495$.

Приклад 6. Знайти розкладання в степеневий ряд по степенях $x-1$ розв'язку диференціального рівняння $y'=2x+y^3$, $y(1) = 1$ (записати три перших, відмінних від нуля, члена цього розкладання).

Розв'язання.

Точка $x = 1$ не є особливою для даного рівняння, тому його рішення можна шукати у вигляді ряду:

$$y = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots$$

Маємо:

$$f(1) = 1; \; f'(1) = 2 + 1^3 = 3;$$

$$f''(1) = 2 + 3y^2y'; \; f''(1) = 2 + 3 \cdot 1^2 \cdot 3 = 11.$$

Підставимо знайдені значення похідних у шуканий ряд і одержимо рішення даного рівняння:

$$y = 1 + \frac{3}{1!}(x-1) + \frac{11}{2!}(x-1)^2 + \ldots \quad .$$

3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Змістовий модуль 3.1 Кратні інтеграли

І. Обчислити подвійний інтеграл по області інтегрування D, обмеженої вказаними лініями:

1. $\iint (x^2 + y)dxdy, \qquad D: x^2 = y; \; y^2 = x$
2. $\iint xy^2 dxdy, \qquad D: y = x^2; \; y = 2x$
3. $\iint (x + y)dxdy, \qquad D: y^2 = x; \; y = x$
4. $\iint x^2 ydxdy, \qquad D: y = 2 - x; \; y = x; \; x \geq 0$
5. $\iint (x^3 - 2y)dxdy, \qquad D: y = x^2 - 1; \; x \geq 0; \; y \leq 0$
6. $\iint (y - x)dxdy, \qquad D: y = x; \; y = x^2$
7. $\iint (1 + y)dxdy, \qquad D: y^2 = x; \; 5y = x$

8. $\iint (x+y)dxdy,$ $D: y = x^2 - 1;\ y = -x^2 + 1$

9. $\iint x(y-1)dxdy,$ $D: y = 5x;\ y = x;\ x = 3$

10. $\iint (x-2)ydxdy,$ $D: y = x;\ y = 0{,}5x;\ x = 2$

11. $\iint (x-y^2)dxdy,$ $D: y = x^2;\ y = 1$

12. $\iint x^2 ydxdy,$ $D: y = 2x^2;\ y = 0;\ x = 1$

13. $\iint (x^2+y^2)dxdy,$ $D: x = y^2;\ x = 1$

14. $\iint xydxdy,$ $D: y = x^3;\ y = 0;\ x \le 2$

15. $\iint (x+y)dxdy,$ $D: y = x^3;\ y = 8;\ y = 0;\ x = 3$

16. $\iint x(2x+y)dxdy,$ $D: y = 1 - x^2;\ y \ge 0$

17. $\iint y(1-x)dxdy,$ $D: y^3 = x;\ y = x$

18. $\iint xy^3dxdy,$ $D: y^2 = 1 - x;\ x \ge 0$

19. $\iint x(y+5)dxdy,$ $D: y = x + 5;\ x + y + 5 = 0;\ x \le 0$

20. $\iint (x-y)dxdy,$ $D: y = x^2 - 1;\ y = 3$

21. $\iint (x+1)y^2dxdy,$ $D: y = 3x^2;\ y = 3$

22. $\iint xy^2dxdy,$ $D: y = x;\ y = 0;\ x = 1$

23. $\iint (x^3+y)dxdy,$ $D: x + y = 1;\ x + y = 2;\ x \le 1;\ x \ge 0$

24. $\iint xy^3dxdy,$ $D: y = x^3;\ y \ge 0;\ y = 4x$

25. $\iint (x^3+3y)dxdy,$ $D: x + y = 1;\ y = x^2 - 1;\ x \ge 0$

26. $\iint xydxdy,$ $D: y = \sqrt{x};\ y = 0;\ x + y = 2;\ x = 0$

27. $\iint y^2x^{-2}dxdy$ $D: y = x;\ xy = 1;\ y = 2$

28. $\iint y(1+x^2)dxdy, \quad D: \ y = x^3; \quad y = 3x$

29. $\iint y^2(1+2x)dxdy, \quad D: \ x = 2 - y^2; \quad x = 0$

30. $\iint e^y dxdy, \quad D: \ y = \ln x; \quad y = 0; \quad x = 2$

II. Обчислити подвійний інтеграл, використовуючи полярні координати:

1. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dy$

2. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}dy$

3. $\int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

4. $\int_{-R}^{0} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}dy$

5. $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

6. $\int_{-R}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} tg(x^2+y^2)dy$

7. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$

8. $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2+y^2)dy$

9. $\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}dy$

10. $\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}dy$

11. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt[3]{1+x^2+y^2}dy$

12. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

13. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2)dy$

14. $\int_{-R}^{0} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\, ctg\sqrt{x^2+y^2}}$

15. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}$

16. $\int_{-3}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}dy$

17. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

18. $\int_{-R}^{0} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos(x^2+y^2)dy$

19. $\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

20. $\int_{-R}^{0} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)dy$

21. $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}$

22. $\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}dy$

23. $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{-\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\, \sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$

24. $\int_{-2}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)e^{x^2+y^2}dy$

25. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$

26. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dy$

27. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

28. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\ dy$

29. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)dy$

30. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

III. Обчислити площу плоскої фігури D, обмеженої зазначеними лініями:

1. $D:\ y^2=4x,\ x+y=3,\ y\ge 0$
2. $D:\ x=\sqrt{4-y^2},\ y=\sqrt{3x},\ x\ge 0$
3. $D:\ y=6x^2,\ x+y=2,\ x\ge 0$
4. $D:\ y=x^2+2,\ x\ge 0,\ x=2,\ y=x$
5. $D:\ y^2=x+2,\ x=2$
6. $D:\ y=4x^2,\ 9y=x^2,\ y\le 2$
7. $D:\ x=-2y^2,\ x=1-3y^2$ $x\le 0,\ y\ge 0$
8. $D:\ y=x^2,\ ,\ y=-x$
9. $D:\ y=8:(x^2+4),\ x^2=4y$
10. $D:\ x=y^2,\ x=\frac{3}{4}y^2+1$
11. $D:\ y=x^2+1,\ x+y=3$
12. $D:\ y=\sqrt{2-x^2},\ y=x^2$
13. $D:\ y^2=4x,\ x^2=4y$
14. $D:\ y=x^2+4x,\ y=x+4$
15. $D:\ y=\cos x,\ y\le x+1,$ $y\ge 0$
16. $D:\ 2y=\sqrt{x},\ x+y=5,\ x\ge 0$
17. $D:\ y=2^x,\ y=2x-x^2,$ $x=2,\ x=0$
18. $D:\ x=4-y^2,\ x-y+2=0$
19. $D:\ y=-2x^2+2,\ y\ge -6$
20. $D:\ x=y^2,\ x=\sqrt{2-y^2}$
21. $D:\ y^2=4x\ ,x=\frac{8}{(y^2+4)}$
22. $D:\ x^2+y^2=4,\ y\le\frac{1}{2}x,\ y\ge 0$
23. $D:\ y=4-x^2,\ y=x^2-2x$
24. $D:\ y^2=4-x\ ,\ y=x+2,\ y=\pm 2$
25. $D:\ x=y^2+1,\ x+y=3$
26. $D:\ y=x^2,\ y=\frac{3}{4}x^2+1$
27. $D:\ x^2=3y,\ y^2=3x$
28. $D:\ x=y^2,\ y^2=4-x$
29. $D: y=-x^2+1,\ x\le y+1,\ x\ge 0$
30. $D:\ xy=1,\ x^2=y,\ y=2,\ x=0$

IV. Обчислити об’єм тіла, обмеженого зазначеними поверхнями:

1. $z = x^2 + y^2,\ \ x + y = 1,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0$

2. $z = 2 - (x^2 + y^2),\ x + 2y = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

3. $z = x^2,\ x - 2y + 2 = 0,\ x + y - 7 = 0,\ z \ge 0$

4. $z = 2x^2 + 3y^2, y = x^2,\ y = x,\ z \ge 0$

5. $z = 2x^2 + y^2, y \le x,\ x = 2,\ y = 3x,\ z \ge 0$

6. $z = x,\ y = 4,\ x = \sqrt{25 - y^2},\ y \ge 0,\ z \ge 0$

7. $z + x + y = 2,\ z \ge 0,\ y = \sqrt{x},\ y = x$

8. $y = 1 - x^2,\ x + y + z = 3,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

9. $z = 2x^2 + y^2,\ x + y = 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

10. $z = 4 - 4x^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

11. $2x + 3y - 12 = 0,\ 2z = y^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

12. $z = 10 + x^2 + 2y^2,\ y = x,\ x = 1,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

13. $z = x^2 + 1,\ x + y = 6,\ x \ge 0,\ y = 2x,\ z \ge 0$

14. $z = 3x^2 + 2y^2 + 1,\ y = x^2 - 1,\ \ y = 3,\ \ z \ge 0$

15. $3y = \sqrt{x}, y \le x,\ x + y + z = 10,\ y = 1,\ z = 0$

16. $y^2 = 1 - x,\ x + y + z = 1,\ x = 0,\ z = 0$

17. $y = x^2,\ x = y^2,\ z = 3x + 2y + 6,\ \ z = 0$

18. $x^2 = 1 - y,\ x + y + z = 3,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

19. $x = y^2,\ \ x = 1,\ \ x + y + z = 6,\ \ z \ge 0$

20. $z = 2x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

21. $y = x^2, y = 4,\ z = 2x + 5y + 10,\ z \ge 0$

22. $y = 2x,\ x + y + z = 2,\ x \ge 0,\ z \ge 0$

23. $y = 1 - z^2, y = x, y = -x,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

24. $x^2 + y^2 = 4y,\ z^2 = 4 - y,\ z \ge 0$

25. $x^2 + y^2 = 1,\ z = 2 - x^2 - y^2,\ z \ge 0$

26. $y = x^2,\ \ z \ge 0,\ \ y + z = 2$

27. $z^2 = 4 - x,\ x^2 + y^2 = 4x,\ z \ge 0$

28. $z = x^2 + 2y^2,\ y = x,\ x \ge 0,\ y = 1,\ z \ge 0$

29. $z = y^2,\ x + y = 1,\ x \ge 0,\ z \ge 0$

30. $y^2 = x,\ x = 3,\ z = x,\ \ z \ge 0$

V. Обчислити масу неоднорідної матеріальної пластини D, обмеженої зазначеними лініями, якщо поверхнева щільність в кожній її точці $\mu = \mu(x, y)$:

Номер	D	μ
1	2	3
1	$y^2 = x,\ \ x = 3$	x
2	$x = 0,\ \ y = 0,\ \ x + y = 1$	x^2
3	$x = 0,\ y = 0,\ \ 2x + 3y = 6,$	$0{,}5y^2$
4	$x^2 + y^2 = 4x$	$4 - x$
5	$x = 0,\ \ y = 1,\ \ y = x,$	$x^2 + 2y^2$

1	2	3
6	$x^2+y^2=1$	$2-x-y$
7	$x^2+y^2=4y$	$\sqrt{4-y}$
8	$y=x$, $y=-x$, $y=1$	$\sqrt{1-y}$
9	$x=0$, $y=2x$, $x+y=2$,	$2-x-y$
10	$x=1$, $x=y^2$	$4-x-y$
11	$y=0$, $x^2=1-y$,	$3-x-y$
12	$y=x^2$, $x=y^2$,	$3x+2y+6$
13	$y=x^2$, $y=4$	$2x+5y+10$
14	$x=0$, $y=0$, $x+y=1$	$2x^2+y^2$
15	$x=0$, $y^2=1-x$	$2-x-y$
16	$y=\sqrt{x}$, $y=x$	$2-x-y$
17	$y=x^2-1$, $y=1$	$3x^2+2y^2+1$
18	$x=1$, $y=x$, $y=0$,	x^2+2y^2+10
19	$y=0$, $y=2x$, $x+y=6$,	x^2
20	$x\geq 0$, $y\geq 0$, $x^2+y^2=4$	$4-x^2$
21	$y=x^2$, $y=2$	$2-y$
22	$x=0$, $y=0$, $x+y=1$	x^2+y^2
23	$y=x^2+1$, $x-y=3$	$4x+5y+2$
24	$y=x^2-1$, $x+y=1$	$2x+5y+8$
25	$x=0$, $y=0$, $y=4$, $x=\sqrt{25-y^2}$	x
26	$x=2$, $y=x$, $y=3x$	$2x^2+y^2$
27	$y=x$, $y=x^2$	$2x+3y$

1	2	3
28	$x=0$, $x+2y+2=0$, $x+y=1$	x^2
29	$x=0$, $y=0$, $x+2y=1$	$2-(x^2+y^2)$
30	$x=0$, $y=0$, $x+y=2$	x^2+y^2

Змістовий модуль 3.2 Криволінійні та поверхневі інтеграли

I. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду:

1. $\int\limits_L \sqrt{2-z^2}\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, де L – дуга кривої: $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

2. $\oint\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 4$.

3. $\int\limits_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, де L_{OB} – відрізок прямої; $O(0,0)$; $B(2,2)$.

4. $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$, де L_{AB} – відрізок прямої; $A(-1,0,)$, $B(0,1)$.

5. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, де L_{AB} – відрізок прямої; $A(0,4)$, $B(4,0)$.

6. $\int\limits_L \frac{ydl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де L – дуга кардіоїди $\rho = 2\,(1 + \cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le \pi/2$.

7. $\int\limits_{L_{AB}} ydl$, де L_{AB} – дуга астроїди $x = \cos^3 t;\ y = \sin^3 t;\ A(1,0);\ B(0,1)$.

8. $\int\limits_{L_{OB}} ydl$, де L_{OB} – дуга параболи $y^2=\frac{2}{3}x$; $O(0,0)$; $B\left(\frac{35}{6},\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$.

9. $\oint\limits_L xydl$, де L – контур прямокутника з вершинами: $O(0,0)$; $A(4,0)$; $B(4,2)$; $C(0,2)$.

10. $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, де L – дуга кривої: $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z=\sqrt{3}\,t;\ 0 \le t \le 2\pi$.

11. $\int\limits_L arctg\frac{y}{x}dl$, де L – дуга кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le \pi/2$.

12. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, де L – перша арка циклоїди: $x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t);\ 0 \le t \le 2\pi$.

13. $\int\limits_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, де L_{OA} – відрізок прямої; $O(0,0);\ A(1,2)$.

14. $\int\limits_L \frac{(y^2 - x^2)xy}{(x^2 + y^2)^2}dl$, де L – дуга кривої $\rho = 9\sin 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4$.

15. $\oint\limits_{L_{ABO}} (x + y)dl$, де L_{ABO} – контур трикутника з вершинами: $A(1,0);\ B(0,1);$ $O(0,0)$.

16. $\int\limits_L \frac{z^2}{x^2 + y^2}dl$, де L – перший виток гвинтової лінії: $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 2t;$ $0 \le t \le 2\pi$.

17. $\oint\limits_{L_{OAB}} (x + y)dl$, де L_{OAB} – контур трикутника з вершинами: $O(0,0);\ A(-1,0);$ $B(0,1)$.

18. $\int\limits_L (x + y)dl$, де L – контур лемніскати Бернулі $\rho^2 = \cos 2\varphi,\ -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$.

19. $\oint\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 2y$.

20. $\oint\limits_{L_{OABC}} xydl$, де L_{OABC} – контур прямокутника з вершинами: $O(0,0);\ A(5,0);$ $B(5,3);\ C(0,3)$.

21. $\oint\limits_L (x^2 + y^2)dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 4x$.

22. $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}\right)dl$, де L_{AB} – дуга астроїди: $x = \cos^3 t;\ y = \sin^3 t;\ A(1,0);\ B(0,1)$.

23. $\oint\limits_L xydl$, де L_{OABC} – контур квадрата, рівняння сторін якого: $x = \pm 1,\ y = \pm 1$.

24. $\int\limits_L y^2 dl$, де L – перша арка циклоїди: $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

25. $\oint\limits_{L_{ABCD}} xydl$, де L_{ABCD} – контур прямокутника з вершинами: $A(2,0)$; $B(4,0)$; $C(4,3)$; $D(2,3)$.

26. $\oint\limits_{L} ydl$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$, яка відсічена параболою $x^2 = 2y$.

27. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$, де L_{AB} – відрізок прямої; $A(4,0)$; $B(6,1)$.

28. $\oint\limits_{L} (x-y)dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 2x$.

29. $\int\limits_{L} \left(x^2 + y^2\right)dl$, де L – перша чверть кола $\rho = 2$.

30. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, де L_{AB} – відрізок прямої $A(1,1,1)$; $B(2,2,2)$.

II. Обчислити криволінійний інтеграл по координатах:

1. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y = x^2$; $A(-1,1)$; $B(1,1)$.

2. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, де L_{AB} – дуга астроїди: $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$; $A(2,0)$; $B(0,2)$.

3. $\int\limits_{L_{OA}} \left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy$, де L_{OA} – дуга кубічної параболи $y = x^3$; $O(0,0)$; $A(1,1)$.

4. $\oint\limits_{L} (x + 2y)dx + (x - y)dy$, де L – коло: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ (додатний напрямок обходу контура).

5. $\oint\limits_{L} \left(x^2 y - x\right)dx + \left(y^2 x - 2y\right)dy$, де L – дуга еліпса: $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ (додатний напрямок обходу контура).

6. $\int\limits_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2 ydy$, де L_{AB} – дуга еліпса: $x = \cos t$, $y = \alpha \sin t$; $A(1,0)$; $B(0,2)$.

7. $\int\limits_{L_{OBA}} 2xydx - x^2 dy$, де L_{OBA} – ламана: $O(0,0)$; $B(2,0)$; $A(2,1)$.

8. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 - y^2\right)dx + xydy$, де L_{AB} – відрізок прямої; $A(1,1)$; $B(3,4)$.

9. $\int\limits_{L_{AB}} \cos y dx - \sin x dy$, де L_{AB} – відрізок прямої; $A(2\pi,-2\pi)$; $B(-2\pi,2\pi)$.

10. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, де L_{AB} – відрізок прямої; $A(1,2)$; $B(3,6)$.

11. $\int\limits_{L_{AB}} xydx + (y - x)dy$, де L_{AB} – дуга кубічної параболи $y = x^3$; $A(0,0)$; $B(1,1)$.

12. $\int\limits_{L_{ABC}} (x^2 + y^2)dx + (x + y^2)dy$, де L_{ABC} – ламана; $A(1,2)$; $B(3,2)$; $C(3,5)$.

13. $\int\limits_{L_{OB}} xy^2dx + yz^2dy - x^2zdz$, де L_{OB} – відрізок прямої; $O(0,0,0)$; $B(-2,4,5)$.

14. $\int\limits_{L_{OA}} ydx + xdy$, де L_{OA} – дуга кола: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$; $O(R,0)$; $A(0,R)$.

15. $\int\limits_{L_{OA}} xydx + (y - x)dy$, де L_{OA} – дуга параболи $y^2 = x$; $O(0,0)$; $A(1,1)$.

16. $\int\limits_{L_{AB}} xdx + ydy + (x - y + 1)dz$, де L_{AB} – відрізок прямої; $A(1,1,1)$; $B(2,3,4)$.

17. $\int\limits_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2ydy$, де L_{AB} – дуга параболи $y^2 = 4 - 4x$; $A(1,0)$; $B(0,2)$.

18. $\int\limits_{L_{OB}} xydx + (y - x)dy$, де L_{OB} – дуга параболи $y = x^2$; $O(0,0)$; $B(1,1)$.

19. $\int\limits_{L_{OB}} (xy - y^2)dx + xdy$, де L_{OB} – дуга параболи $y=x^2$; $O(0,0)$; $B(1,1)$.

20. $\int\limits_{L_{AB}} xdy - ydx$, де L_{AB} – дуга астроїди: $x = 2\cos^3 t$; $y = 2\sin^3 t$; $A(2,0)$; $B(0,2)$.

21. $\int\limits_{L_{AB}} (xy - x)dx + \frac{1}{2}x^2dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y^2 = 4x$; $A(0,0)$; $B(1,2)$.

22. $\int\limits_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2ydy$, де L_{AB} – відрізок прямої; $A(1,0)$; $B(0,2)$.

23. $\int\limits_{L_{AB}} 2xydx + y^2dy + z^2dz$, де L_{AB} – дуга одного витка гвинтової лінії: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$; $A(1,0,0)$; $B(1,0,4\pi)$.

24. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}dx + xdy$, де L_{AB} – дуга лінії $y = \ln x$; $A(1,0)$; $B(e,1)$.

25. $\oint\limits_{L} ydx + xdy$, де L – дуга еліпса: $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t$ (додатний напрямок обходу контура).

26. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx + x^2dy$, де L_{OA} – дуга параболи $y = \frac{x^2}{4}$; $O(0,0)$; $A(2,1)$.

27. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$, де L_{AB} – ламана лінія $y=|x|$; $A(-1,1)$; $C(0,0)$; $B(2,2)$.

28. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy + zdz$, де L_{OA} – відрізок прямої; $O(0,0,0)$; $A(2,1,-1)$.

29. $\oint\limits_{L} xdy - ydx$, де L – контур трикутника з вершинами: $A(-1,0)$; $B(1,0)$; $C(0,1)$ (додатний напрямок обходу контура).

30. $\int\limits_{L_{ABC}} \left(x^2 + y\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$, де L_{ABC} – ламана; $A(2,0)$; $B(5,3)$; $C(5,0)$.

III. Показати, що даний вираз є повним диференціалом функції і знайти її:

1. $\left(2x - 3y^2 + 1\right)dx + \left(2 - 6xy\right)dy$.

2. $\left(2xy^2\left(1 + x^2y^2\right)^{-1} - 3\right)dx + \left(2x^2y\left(1 + x^2y^2\right)^{-1} - 5\right)dy$.

3. $-\left(0{,}5\cos 2y + y\sin 2x\right)dx + \left(x\sin 2y + \cos^2 x + 1\right)dy$.

4. $\left(y^2e^{xy^2} + 3\right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 1\right)dy$.

5. $\left(\left(x + y\right)^{-1} + \cos x\cos y - 3x^2\right)dx + \left(\left(x + y\right)^{-1} - \sin x\sin y + 4y\right)dy$.

6. $\left(yx^{-1} + \ln y + 2x\right)dx + \left(\ln x + xy^{-1} + 1\right)dy$.

7. $\left(e^{x+y} - \cos x\right)dx + \left(e^{x+y} + \sin y\right)dy$.

8. $\left(y : \sqrt{1 - x^2y^2} + 2x\right)dx + \left(x : \sqrt{1 - x^2y^2} + 6y\right)dy$.

9. $\left(e^{xy} + xye^{xy} + 2\right)dx + \left(x^2e^{xy} + 1\right)dy$.

10. $\left(ye^{xy} + y^2\right)dx + \left(xe^{xy} + 2xy\right)dy$.

11. $\left(y\cos xy + 2x - 3y\right)dx + \left(x\cos xy - 3x + 4y\right)dy$.

12. $(y\sin(x+y)+xy\cos(x+y-9x^2))dx+(x\sin(x+y)+$
$+xy\cos(x+y)+2y)dy$

13. $(5y+\cos x+6xy^2)dx+(5x+6x^2y)dy$.

14. $(y^2e^{xy}-3)dx+e^{xy}(1+xy)dy$.

15. $(1+\cos xy)ydx+(1+\cos xy)xdy$.

16. $(y-\sin x)dx+(x-2y\cos y^2)dy$.

17. $(\sin 2x-x^{-2}y^{-1})dx-x^{-1}y^{-2}dy$.

18. $(x+y)x^{-1}y^{-1}dx+(y-x)y^{-2}dy$.

19. $(20x^3-21x^3y+2y)dx+(3+2x-7x^3)dy$.

20. $(ye^{xy}-2\sin x)dx+(xe^{xy}+\cos y)dy$.

21. $y(e^{xy}+5)dx+x(e^{xy}+5)dy$.

22. $\left(x-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)dx+\left(\dfrac{x}{x^2-y^2}-y\right)dy$.

23. $e^{x-y}(1+x+y)dx+e^{x-y}(1-x-y)dy$.

24. $(x\ln y+y)x^{-1}dx+(y\ln x+x)y^{-1}dy$.

25. $(3x^2-2xy+y)dx+(x-x^2-3y^2-4y)dy$.

26. $\left(2xe^{x^2-y^2}-\sin x\right)dx+\left(\sin y-2ye^{x^2-y^2}\right)dy$.

27. $\left(y:\sqrt{1-x^2y^2}+x^2\right)dx+\left(x:\sqrt{1-x^2y^2}+y\right)dy$.

28. $(1-y)x^{-2}y^{-1}dx+(1-2x)x^{-1}y^{-2}dy$.

29. $((y-1)^{-1}-y(x-1)^{-2}-2)dx+((x-1)^{-1}-x(y-1)^{-2}+2y)dy$.

30. $(3x^2-2xy+y^2)dx+(2xy-x^2-3y^2)dy$.

IV. Ознайомитись з властивостями та обчисленням поверхневих інтегралів першого роду і обчислити

$$\iint_S \left(x^2+3xy+y^2-z^2\right)ds\ ,$$

де S − частина площини $x+y+z=3$, розміщена у першому октанті.

Змістовий модуль 3.3 Ряди. Теорія ймовірності та математична статистика

І. Дослідити на збіжність числовий ряд:

а)

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\cdot tg\frac{\pi}{3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-1}{5^n(n+1)!}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n\left(\frac{1}{n}\right)^7$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 5\cdot 6...(n+1)}{5\cdot 7\cdot 9...(2n+3)}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^n}}{3^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 7\cdot 13...(6n-5)}{2\cdot 3\cdot 4...(n+1)}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n(n+1)}{5^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n+1)^n}}{n!}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot sin\frac{2\pi}{3^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n\cdot(n+3)!}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11...(5n-4)}{1\cdot 3\cdot 7...(4n-1)}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+3)!}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3 tg\frac{2\pi}{5^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8...(3n-1)}{3\cdot 7\cdot 11...(4n-1)}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)}{(n+1)!}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)\cdot sin\frac{\pi}{4^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+3)!}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9...(4n-3)}{1\cdot 4\cdot 7...(3n-2)}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 7^n}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4\cdot n!}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{2\cdot 7\cdot 12...(5n-3)}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)!}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n(2n-1)}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{(2n)!}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$

б)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arctg \frac{1}{2n+1}\right)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ln(n+2))^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arcsin \frac{1}{2^n}\right)^{3n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arctg \frac{1}{5^n}\right)^n$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}{2^{-n}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ln(n+1))^{2n}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(tg \frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ln(n+3))^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-4n-1}\right)^{n^2}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(sin \frac{\pi}{n^2}\right)^{2n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arcsin \frac{1}{3^n}\right)^n$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ln(n+1))^{3^n}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^n$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arcsin \frac{1}{3n}\right)^{2n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} 5^n$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{2n+1}\right)^n$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(sin\frac{\pi}{5n+1}\right)^n$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{2n+1}\right)^{2n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(ln(n+5))^{2n}}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^n$

в)

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+3n}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+2)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+3}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+2}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{3^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+3)}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n^2+5}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-n+1}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+4)}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}sin\frac{2\pi}{3^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+1)}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{2n}}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}sin\frac{\pi}{2n-1}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}sin\frac{\pi}{4n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+4}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^2+3}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)(n+1)}$

II. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність числовий ряд:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)3^n}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(2n+1)}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+5}{3^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3n-1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n-1)3^n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{3n^2+1}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n5^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3}{\ln(n+1)}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{5n(n+1)}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+5}{3^n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(3n-2)!}$

III. Знайти область збіжності степеневого ряду:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{2n-1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(n(n+1))\cdot x^n$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\left(\frac{x}{2^n}\right)x^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n!}{n^n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0.1)^n x^{2n}}{n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(\lg x)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{3n+1}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{2n+1}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{6^n \sqrt[3]{n}}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n tg\frac{1}{n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\frac{x^n}{5^n}$

IV. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, отримати визначений інтеграл з точністю до 0,001:

1. $\int_0^{0.25} ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

2. $\int_0^{1} arctg\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$

3. $\int_0^{0.2} \sqrt{x}\cdot e^{-x}dx$

4. $\int_0^{0.5} \frac{arctgx}{x}dx$

5. $\int_0^{0.2} \sqrt{x}\cdot cos\, xdx$

6. $\int_0^{0.5} ln\left(1+x^3\right)dx$

7. $\int_0^{1} x^2\cdot sin\, xdx$

8. $\int_0^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot xdx$

9. $\int_0^{0.5} \sqrt{x^2+1}\cdot xdx$

10. $\int_0^{0.5} \frac{1}{x^5+1}dx$

11. $\int_0^{1} \sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}}dx$

12. $\int_0^{0.5} \frac{sin\, x^2}{x}dx$

13. $\int_0^{0.1} \frac{e^x-1}{x}dx$

14. $\int_0^{0.5} x^2\cdot cos\, 3xdx$

15. $\int_0^{0.5} ln\left(1+x^2\right)dx$

16. $\int_0^{0.4} \sqrt{x}\cdot e^{-\frac{x}{4}}dx$

17. $\int_{0,3}^{0.5} \frac{1+cos\, x}{x^2}dx$

18. $\int_0^{0.5} \frac{arctgx^2}{x^2}dx$

19. $\int_0^{0.8} \frac{1-cos\, x}{x}dx$

20. $\int_0^{1} sin\, x^2dx$

21. $\int_0^{0.1} \frac{ln(1+x)}{x}dx$

22. $\int_0^1 \cos\sqrt[3]{x}\,dx$

23. $\int_0^1 \sqrt{x}\cdot \sin x\,dx$

24. $\int_0^{25} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}dx$

25. $\int_0^1 \cos\frac{x^2}{4}dx$

26. $\int_0^1 arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx$

27. $\int_0^{0.5} \frac{x-arctgx}{x^2}dx$

28. $\int_0^{0.4} \sqrt{1-x^3}\,dx$

29. $\int_0^{0.5} e^{-x^2}dx$

30. $\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^3}\,dx$

V. За виборкою вивести вираз для емпіричної функції розподілу випадкової величини *X*, побудувати її графік; знайти оцінки для математичного сподівання і виправленої дисперсії; моду і медіану, знайти довірчий інтервал (c_1, c_2) для математичного сподівання з довірчою ймовірністю γ = 0,95. Знайти ймовірність попадання випадкової величини *X* в інтервал (1; 5,5):

1) -4, 4, 2,12, 3, 3, 3, -1, 5, -4, 9, -4, 12,-2, 1, -1, 9, -1, 3, 5,12, 9, -2, 6, 1, 5, -4, 9, 4, -2, 5, -1, 9, 4, 6;

2) 8, 8, 1, -3, 0, 0, -2, 3, 3, 5, -2, 2, 6, 1, 5, 6, 3, 5, -3, 2, 5, -3, 3, -2, 3, 3, 0, 6, 2, 5, 5, 3, 5;

3) 9, 1, -1, 4, 5, 2, 1, -1, 6, 9, 3, 3, 6, 1, -1, 6, 4, 4, 1, 4, -1, 6, 1, -1, 6, 4, 1, 6, -1, -3, 5, -3, 4;

4) 6, 1, 0, 1,10, 6, -1, 0, 5, 6, 6, -1, -1, 6, 1, 3,10, 7, 3, 7, 0, 5, -3, -3, 3, 7, 0, 5, -1, 5, 7, 5, 5, 7;

5) -2, 2, 5, 9, 6, 7, 1, 4, 4, 0, -2, 3, 5, 0, 4, 1, 2, 7, 0, 7, 4, 3, 4, -2, 4, 9, 1, 4, 0, 7, 6, 3, 7, 6;

6) 5, -2, 4, 3, 4, 6, 6, 2, 2, 3, 4, 10, -2, 4, 7, -2, 7, 5, -2, 0, 0, -2, 2, -2, 10, 6, 1, 10, 0, 10, 3, 6, 7;

7) 0, -2, 4, 3, 4, 6, 6, 2, 2, 3, 4, 10, -2, 4, 7, -2, 7, 5, -2, 0, 0, -2, 2, -2, 10, 6, 1, 10, 0, 10, 3, 6, 7;

8) 2, 1, -2, 2, 3, 5, -1, 6, 1, 1, 3, 0, 5, 2, 1, -5, -5, 3, 4, -1, -5, 6, 0, 9, -1, 9,3, 2, 4, 5, 6, -2, -2;

9) 0, 4, 1, 3, 1, 10, 5, 10, 0, 10, 0, -3, 1, 0, 7, -3, 5, -1, 5, 1, -1, 0, 6, -3, -1, 7, 7, 5, 3, 10, 10, -1, 5;

10) 2, 0, 6, 0, 1, -2, 4, 5, 4, 0, 4, 5, -2, 7, 5, 3, 3, 3, 10, 3, 4, 4, 6, 10, -2, 10, 0, 0, 7, 1, 1, 0, 4, 2;

11) 9, 4, 5, 4, 4, 5, 3, 8, 9, 9, 2, 2, 9, 4, 5, 10, 6, 10, 3, 8, 0, 0, 6, 10, 3, 8, 2, 8, 10, 8, 8, 10, 0;

12) 8, 7, 4, 6, 6, 6, 2, 8, 0, 10, 0, 1, 4, 2, 10, 2, 6, 8, 10, 1, 1, 4, 8, 0, 10, 7, 1, 8, 2, 10, 7, 4, 2;

13) 2, 4, 0, 3, 3, 1, 10, 6, 8, 1, 5, 1, 4, 7, 1, 6, 8, 0, 5, 8, 0, 6, 1, 6, 6, 3, 1, 5, 7, 8, 10, 8, 10, 4, 2;

14) 11, 8, 5, 4, 2, 9, 11, 6, 6, 9, 4, 2, 9, 11, 7, 4, 7, 2, 9, 3, 2, 9, 7, 3, 9, 2, 0, 8, 0, 7, 3, 5, 8, 0, 9;

15) 10, 4, 7, 7, 3, 1, 6, 8, 3, 7, 4, 5, 10, 3, 10, 7, 6, 7, 1, 7, 4, 4, 7, 3, 10, 12, 6, 10, 12, 8, 1, 7, 6;

16) 7, 9, 9, 5, 5, 6, 7, 9, 1, 7, 10, 1, 12, 8, 1, 3, 3, 1, 5, 1, 9, 9, 4, 0, 3, 0, 6, 9, 12, 5, 4, 1, 5, 6;

17) 8, 2, 9, 4, 4, 6, 3, 8, 11, 4, 0, 0, 6, 7, 2, 0, 9, 3, 11, 2, 6, 11, 7, 8, 9, 1, 1, 3, 7, 6, 4, 1, 8, 1, 3;

18) 0, 4, 1, 3, 1, 10, 5, 10, 0, 10, 0, -3, 1, 0, 7, -3, 5, -1, 5, 1, -1, 0, 6, -3, -1, 7, 7, 5, 3, 10, 10, -1, 5;

19) 2, 1, -2, 2, 3, 5, -1, 6, 1, 1, 3, 0, 5, 2, 1, -5, -5, 3, 4, -1, -5, 6, 0, 9, -1, 9,3, 2, 4, 5, 6, -2, -2;

20) 5, -2, 4, 3, 4, 6, 6, 2, 2, 3, 4, 10, -2, 4, 7, -2, 7, 5, -2, 0, 0, -2, 2, -2, 10, 6, 1, 10, 0, 10, 3, 6, 7;

21) -2, 2, 5, 9, 6, 7, 1, 4, 4, 0, -2, 3, 5, 0, 4, 1, 2, 7, 0, 7, 4, 3, 4, -2, 4, 9, 1, 4, 0, 7, 6, 3, 7, 6;

22) 8, 8, 1, -3, 0, 0, -2, 3, 3, 5, -2, 2, 6, 1, 5, 6, 3, 5, -3, 2, 5, -3, 3, -2, 3, 3, 0, 6, 2, 5, 5, 3, 5;

23) 8, 8, 1, -3, 0, 0, -2, 3, 3, 5, -2, 2, 6, 1, 5, 6, 3, 5, -3, 2, 5, -3, 3, -2, 3, 3, 0, 6, 2, 5, 5, 3, 5;

24) -4, 4, 2,12, 3, 3, 3, -1, 5, -4, 9, -4, 12,-2, 1, -1, 9, -1, 3, 5,12, 9, -2, 6, 1, 5, -4, 9, 4, -2, 5, -1, 9, 4, 6;

25) 7, 1, -1, 4, 5, 2, 1, -1, 6, 7, 3, 3, 6, 1, -1, 6, 4, 4, 1, 4, -1, 6, 0, -1, 6, 4, 0, 6, -1, -3, 5, -3, 4;

26) 5, 8, 0, 4, 2, 9, 11, 6, 6, 11, 4, 2, 9, 11, 7, 4, 7, 2, 9, 3, 2, 9, 7, 3, 9, 2, 0, 8, 0, 7, 3, 5, 8, 0, 9;

27) 12, 4, 1, 7, 3, 1, 6, 8, 3, 7, 4, 5, 10, 3, 10, 7, 6, 7, 1, 7, 4, 4, 7, 3, 10, 12, 6, 10, 12, 8, 1, 7, 6;

28) 9, 1, -2, 2, 3, 5, -1, 6, 1, 1, 3, 0, 5, 2, 1, -5, -5, 3, 4, -1, -5, 6, 0, 9, -1, 9,3, 2, 4, 5, 6, -2, -2, 3, -1;

29) 1, 8, 1, -3, 0, 0, -2, 3, 3, 5, -2, 2, 6, 1, 5, 6, 3, 5, -3, 2, 5, -3, 3, -2, 3, 3, 0, 6, 2, 3, 5, 3, 1;

30) 1, 8, 1, -3, 0, 0, -2, 3, 3, 5, -2, 2, 6, 1, 5, -3, 3, 5, -3, 2, 5, 2, 3, -2, 3, 3, 0, 6, 2, -3, 0, 3, 1.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике : в 4 ч. / И. А. Каплан. – Харьков : ХГУ, 1973. – Ч.1. – 204 с.; 1973. – Ч.2. – 368 с.; 1974. – Ч.3. – 375 с.; 1971. – Ч.4. – 498 с.

2. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях : в 3 ч. [Електронний ресурс] : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електронні текстові дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – Ч. 3. – 141 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/48450, вільний (дата звернення: 23.11.2022). – Назва з екрана.

3. Ламтюгова С. М. Ряди та їх застосування у схемах і таблицях [Електронний ресурс] : навч. довід. для самост. вивч. вищої математики / С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова, Г. А. Кузнецова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електронні текстові дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 103 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/55134, вільний (дата звернення: 23.11.2022). – Назва з екрана.

4. Вороновська Л. П. Вища математика. Модуль 3 [Електронний ресурс] : конспект лекцій для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електронні текстові дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 192 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/53731, вільний (дата звернення: 23.11.2022). – Назва з екрана.

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації
до проведення практичних занять
та виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
М О Д У Л Ь 3

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти всіх форм навчання
зі спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія та технології)*

Укладачі : **ЛАМТЮГОВА** Світлана Миколаївна,
СИТНИКОВА Юлія Валеріївна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *С. М. Ламтюгова*

План 2022, поз. 65М

Підп. до друку 10.01.2023. Формат 60 × 84/16.
Електронне видання. Ум. друк. арк. 2,5

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.