МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

К. О. Метешкін, О. О. Воронков

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2022

УДК 528.85(075.8)
М54

Автори:

Метешкін Костянтин Олександрович, професор кафедри земельного адміністрування та геоінформаційних систем Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова;

Воронков Олексій Олександрович, доцент кафедри земельного адміністрування та геоінформаційних систем Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рецензенти:

Батракова Анжеліка Геннадіївна, доктор технічних наук, професор, проректор із науково-педагогічної роботи Харківського національного автомобільно-дорожнього університету;

Доценко Сергій Ілліч, доктор технічних наук, доцент, доцент кафедри спеціалізованих комп'ютерних систем Українського державного університету залізничного транспорту

Рекомендовано до друку Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, протокол № 4 від 30 листопада 2021 р.

Метешкін К. О.

М54 Математична обробка геодезичних вимірів : навч. посібник / К. О. Метешкін, О. О. Воронков ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 288 с.

ISBN 978-966-695-574-9

У навчальному посібнику стисло викладені елементи теорії імовірностей, теорії похибок та способу найменших квадратів для опрацювання результатів геодезичних вимірів. Теоретичні засади ілюструються практичними прикладами. Кожну тему завершують контрольні запитання та завдання для самостійного виконання. Останній розділ містить індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів, а додатки – деякі довідкові дані.

Навчальний посібник призначений для здобувачів вищої освіти, а також може бути корисний для викладачів та фахівців, яких цікавлять теоретичні засади математичної обробки геодезичних вимірів.

УДК 528.85(075.8)

ISBN 978-966-695-574-9

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисципліна «Математична обробка геодезичних вимірів» є обов'язковим компонентом освітньо-професійної програми «Геодезія, картографія та землеустрій» підготовки бакалавра за спеціальністю 193 – Геодезія та землеустрій. Відповідно до освітньо-професійної програми обсяг дисципліни становить 180 академічних годин, або 6 кредитів ЄКТС. Зміст дисципліни розділений на три змістові модулі: «Елементи теорії імовірностей і математичної статистики. Теорія похибок вимірювань», «Особливості обробки вимірювань у планових і висотних геодезичних мережах» і «Спосіб найменших квадратів», відповідно до яких виконується поточний контроль знань здобувачів шляхом тестування. Підсумковий контроль знань (екзамен) проводиться у письмовій формі. У процесі вивчення дисципліни здобувачі мають виконати та захистити розрахунково-графічну роботу.

Метою вивчення дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» є опанування здобувачами принципів та методів математичної обробки геодезичних даних, формування знань та навичок щодо опрацювання результатів геодезичних вимірів та оцінювання їхньої точності. Перед усім це потребує формування базових знань у сфері застосування імовірнісно-статистичного апарату. Тому перший змістовий модуль «Елементи теорії імовірностей і математичної статистики. Теорія похибок вимірювань» присвячений вивченню апарата математичної статистики, який ґрунтується на аксіоматиці теорії імовірностей та розглядає закони розподілу випадкових величин і системи випадкових величин, методи обчислення числових характеристик та їхні властивості, які зі свого боку є чинниками точності результатів вимірів. Окрім того, матеріал цього змістового модулю вивчає основні поняття та визначення теорії похибок вимірювань, розглядає їхню структуру та критерії точності вимірів, а також формує уявлення про кореляційну та регресійну залежності й сутність методу найменших квадратів, висування та перевірку статистичних гіпотез.

Другий змістовий модуль «Особливості обробки вимірювань у планових і висотних геодезичних мережах» присвячений вивченню методів визначення чинників точності функцій виміряних величин, зокрема з урахуванням корельованості аргументів, а також результатів вимірів, отриманих за різних умов проведення та за різними методами вимірювань, зокрема рівноточних та нерівноточних вимірів, подвійних вимірів однорідних величин, та надає поняття про критерії наявності систематичної похибки, а також про надійність оцінок точності вимірів.

Третій змістовий модуль «Спосіб найменших квадратів» вивчає сутність спільного зрівнювання вимірюваних величин і призначення надлишкових виміряних величин, а також особливості параметричного та корелатного способів зрівнювання, зокрема призначення та побудови параметричних рівнянь зв'язку та параметричних рівнянь поправок, побудови та розв'язання систем нормальних рівнянь, підходи до апостеріорного оцінювання точності результатів зрівнювання, отриманих за параметричним та корелатним методами.

У результаті вивчення дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» здобувач має набути вміння визначати найімовірніші значення результатів рівноточних та нерівноточних вимірів, а також подвійних вимірів, визначати середні квадратичні похибки (СКП) функцій безпосередньо виміряних величин, володіти способами зрівнювання геодезичних побудов за методом найменших квадратів та застосовувати таблиці й вбудовані функції MS Excel для опрацювання результатів геодезичних вимірів та топографічних і кадастрових знімань.

Основою геодезичної науки за правом вважають астрономію та математику, які дозволили людині перейти від якісних спостережень навколишнього простору до кількісного оцінювання, а потім і до математичного опрацювання геодезичних вимірів. Історія розвитку математичної обробки геодезичних вимірів пов'язана з іменами багатьох великих вчених, отже наведемо коротку історичну довідку.

Справедливо можна вважати Галілео Галілея за першого природодослідника, який на основі точних математичних розрахунків зробив багато відкриттів у природознавстві.

Галілео Галілей
(1564–1642 рр.)

Галілей (Galilei) Галілео – це італійський мислитель епохи Відродження, основоположник класичної механіки, астроном, математик, фізик, один із засновників сучасного експериментально-теоретичного природознавства, засновник нової механістичної натурфілософії. Першим здійснив парадигмальне розмежування природознавства та філософії. З 1589 року – професор Пізанського університету, після вимушеного від'їзду з Пізи працював на кафедрі математики Падуанського університету протягом 1592–1610 років. Зокрема, використовуючи експериментальний метод, виявив лібрацію Луни (лібрація – невеликі періодичні погойдування Луни щодо її центру). Чисельні експериментальні дослідження, які проводив Г. Галілей, супроводжувалися вимірюванням різних фізичних величин. Саме Г. Галілею належить фраза: «Той, хто хоче розв'язувати питання природних наук без допомоги математики, ставить завдання, яке не розв'язується. Потрібно вимірювати те, що вимірюється, і робити вимірюваним те, що таким не є». Величезна заслуга Г. Галілея полягає в тому, що він запропонував експериментально-теоретичний метод досліджень, який до цього часу застосовує сучасна наука. Винайдені ним прилади – телескоп, мікроскоп, гідростатичні ваги для визначення питомої ваги твердих тіл, пропорційний циркуль, який застосовують у креслярській справі, та інше – дозволяли проводити дослідження методом вимірювання перебігу різних процесів і явищ. Це дає підставу вважати, що саме Г. Галілей стояв біля витоків створення метрології, теорії вимірів і теорії похибок.

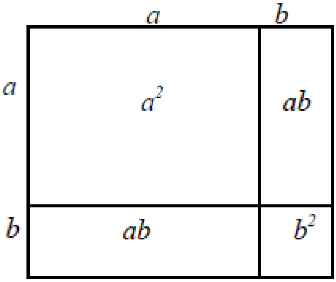
Сучасниками Г. Галілея були видатні математики Рене Декарт і П'єр Ферма (1601–1665 р.). Видатна заслуга Р. Декарта полягає в описанні метода, який передбачає досягнення достовірного знання. Він описаний у роботі «Міркування про метод, щоб вірно спрямовувати свій розум і відшукувати істину в науках».

Рене Декарт
(1596–1650 рр.)

Рене Декарт (фр. Rene Descartes; лат. Renatus Cartesius – Картезій народився 31 березня 1596 року, Лае (провінція Турень), нині Декарт (департамент Ендр і Луара) – французький математик, філософ, фізик і фізіолог, творець аналітичної геометрії та сучасної символіки алгебри, автор методу радикального сумніву у філософії, механіцизму у фізиці, передвісник рефлексології. Відомий його афоризм: «Усі науки настільки пов'язані одна з одною, що легше вивчати всі відразу, чим будь-яку одну окремо від усіх інших». Тут він виділяє чотири положення, які характеризують метод досягнення достовірного знання: починати з безперечного та самоочевидного, тобто з того, протилежне якому не можна уявити; розділяти будь-яку проблему на стільки частин, скільки необхідно для її ефективного розв'язання; починати з простого й поступово просуватися до складного; постійно перевіряти ще раз правильність висновків. Щодо внеску Р. Декарта в науку, і в математику зокрема, варто навести його думку про те, що є математика. Р. Декарт писав: «До галузі математики належать тільки ті науки, які розглядають або порядок, або міру й абсолютно не суттєво, чи будуть це числа, фігури, зірки, звуки або будь-що інше, у чому відшукують цю міру. Отже, має існувати певна загальна наука, яка пояснює, що все стосується порядку та міри, не заглиблюючись у дослідження окремих предметів, і ця наука має називатися не іноземним, а старим, таким, що вже увійшло в обіг ім'ям

Загальної математики». Звідси випливає, що основу методології геодезії як науки становить вища математика.

Для розвитку геодезії Р. Декарт отримав найважливіші результати, зокрема розробив основи аналітичної геометрії, суть якої полягає у використанні алгебраїчних методів у геометрії та навпаки. Прикладом можуть слугувати перетворення показані на наступній схемі (рис. 1), де наведені аналітичний запис (формула) та його геометрична інтерпретація.



$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Рисунок 1 – Геометрична та аналітична інтерпретація співвідношення геометричних побудов

Р. Декарт показав, що усяку криву можна виразити рівнянням двох змінних, і навпаки – усяке рівняння з двома змінними можна виразити кривою. Це відкриття мало величезне значення не лише для математики, але й для інших наук, зокрема геодезії, що оперує точними величинами – числом, мірою та вагою.

Важливим поняттям в геодезії є «система координат». Р. Декарт запропонував двомірну (прямокутну) й тримірну системи координат з позначенням точок у цих системах, що ілюструє наступна схема, наведена на рисунках 2 та 3.

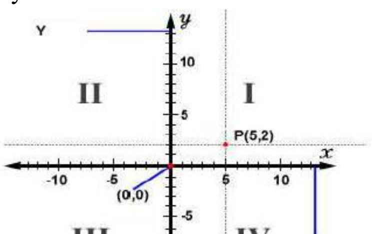


Рисунок 2 –Точка P має координати (5,2)

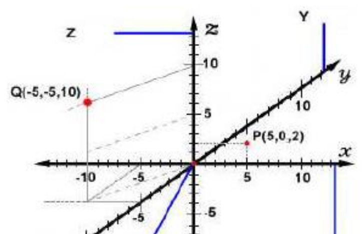


Рисунок 3 –Точка P має координати (5,0,2), а точка Q – координати (–5,–5,10)

Окрім того, розглядаючи результати, які отримані Р. Декартом з погляду лінгвістики, можна стверджувати, що він запропонував математичну мову. Він увів відповідні позначення змінних, констант (коефіцієнтів), відношень, тобто лексику, а також синтаксис – правила запису математичних співвідношень, які застосовує і сучасна математика. Як приклад наведемо формальний запис одного виразу французького математика Франсуа Вієтта (1540–1603 р.) і запис на математичній мові, запропонованій Р. Декартом:

$$\frac{D\ in\ [B\ cubum\ 2 - D\ cubo]}{B\ cubo + D\ cubo} \leftrightarrow \frac{D(2B^3 - D^3)}{B^3 + D^3},$$

видно, що права частина співвідношення має сучасний вигляд. Отже, можна вважати, що внесок Р. Декарта у геодезію полягає у створенні ним математичного інструментарію, який дозволяє описувати геодезичні об'єкти, визначати їхні координати з високим ступенем точності й достовірності.

Дослідження результатів і досягнень вчених епохи Відродження в галузі природничих наук (фізиці, механіці, астрономії та ін.) показують, що вони отримані завдяки розвитку математики, отже є фактом те, що більшість видатних учених епохи Відродження були не лише фізиками, механіками, філософами, астрономами, але й математиками.

Християн Гюйгенс (1629–1695 рр.)

Християн Гюйгенс був не лише чудовим фізиком, механіком і астрономом, але й видатним математиком. Він винайшов маятниковий годинник, удосконалив телескоп Г. Галілея. Його праці з теоретичної механіки мали величезний вплив на молодого Ньютона. У 1657 році Х. Гюйгенс написав трактат «Про розрахунки в азартній грі» до книги його вчителя Ван Схоутена «Математичні етюди». Багато дослідників історії математики вважають, що разом з Пьером Ферма та Блезом Паскалем, Християн Гюйгенс заклав основи теорії імовірності, яку пізніше розвинув Якоб Бернуллі.

Христіан Гюйгенс фон Цюйліхен (гол. Christiaan Huygens) – голландський математик, фізик, астроном і винахідник. Перші роботи Гюйгенса присвячені класичним проблемам: теоремам стосовно квадратури гіперболи, еліпса та круга, величини круга. Використовуючи підхід алгебри, він уточнив значення числа π. Його трактат «Про розрахунки при азартних іграх (De ratiociniis in ludo aleae) є однією з перших робіт з теорії імовірності. Гюйгенс здобув популярність завдяки винаходу маятникового годинника. Про це відкриття він повідомив у творі «Годинник» (Horologium, 1658).

Початок розвитку теорії імовірностей і математичної статистики пов'язаний з європейськими математиками XVII століття. Завдяки роботам швейцарського математика Якоба Бернуллі теорія імовірностей набула найважливіше значення у практичній діяльності людини. Він є одним із засновників теорії імовірностей і математичного аналізу, поклав початок варіаційному численню. Якоб Бернуллі – професор математики Базельського університету, іноземний член Паризької академії наук і Берлінської академії наук. Він побудував математичну модель для опису серії незалежних випробувань, довів теорему, яка є окремим випадком закону великих чисел (теорему Бернуллі), що має основне значення в теорії імовірностей і її застосувань до математичної статистики. Він вивчив теорію імовірностей за книгою Гюйгенса «Про розрахунки в азартній грі», в якої ще не було визначення й поняття імовірності.

Якоб Бернуллі
(1655–1705 рр.)

Якоб Бернуллі увів істотну частину сучасних понять теорії імовірностей та сформулював перший варіант закону великих чисел. Ім'я Якоба носить важливе у комбінаториці розподілення Бернуллі. Отже, Якобу Бернуллі належать значні досягнення в теорії рядів, диференціальному численні, теорії імовірностей і теорії чисел. Якоб Бернуллі видав також роботи з різних питань арифметики, алгебри, геометрії та фізики.

Блез Паскаль
(1623–1662 рр.)

Блез Паскаль – французький математик, фізик, літератор і філософ. Класик французької літератури, один із засновників математичного аналізу, теорії імовірностей і проєктної геометрії, творець перших зразків обчислювальної техніки, автор основного закону гідростатики.

Ісаак Ньютон
(1642–1727 рр.)

Ісаак Ньютон – видатний англійський фізик, математик і астроном. Автор фундаментальної праці «Математичні основи натуральної філософії», у якій він описав закон всесвітнього тяжіння і так звані Закони Ньютона, що заклали основи класичної механіки. Ісаак Ньютон розробив диференціальне та інтегральне числення, теорію кольоровості і багато інших математичних і фізичних теорій.

Не можна не відзначити внесок в науку, включаючи і прикладну, «короля математиків» Карла Фрідріха Гаусса, так його назвали радянські учені А. Н. Колмогоров і А. П. Юшкевіч у роботі «Математика XIX століття». Це один з небагатьох математиків, який безпосередньо займався геодезією. Гаусс Карл Фрідріх – німецький математик, що вклав фундаментальний внесок також в астрономію і геодезію. Навчався у Геттінгенському університеті. У 1799 році отримав доцентуру в Брауншвейзі, у 1807 році очолив кафедру математики і астрономії в Геттінгенському університеті, з якою була також пов'язана посада директора Геттінгенської астрономічної обсерваторії. Відмітними рисами творчості Гаусса є глибокий органічний зв'язок у його дослідженнях між теоретичною та прикладною математикою, надзвичайна широта проблематики. Роботи Гаусса мали великий вплив на розвиток вищої алгебри, теорії чисел, диференціальної геометрії, теорії електрики й магнетизму, геодезії, цілих галузей теоретичної астрономії.

Гаусс Карл Фрідріх
(1777–1855 рр.)

У період з 1820 по 1830 роки К. Гаусс займається геодезичною зйомкою королівства Ганновер і складанням його детальної карти. Він не лише здійснює величезну організаційну роботу та керує вимірюванням довжини дуги меридіана від Геттінгена до Альтони, але і створює основи «вищої геодезії». За результатами практичних геодезичних робіт і теоретичних досліджень у цій галузі К. Гаусс пише роботу «Дослідження предметів вищої геодезії».

Вивчення форми земної поверхні вимагало від нього поглибленого вивчення загального геометричного методу для дослідження поверхонь. Висунуті К. Гауссом у цій галузі ідеї сформульовані в творі «Загальні дослідження кривих поверхонь» (1827). Основна думка цього твору полягає в тому, що при вивченні поверхні як нескінченно тонкої гнучкої плівки основне значення має не рівняння поверхні в декартових координатах, а диференціальна квадратична форма, через яку виражається квадрат елементу довжини, і інваріантами якої є всі власні властивості поверхні, – передусім її кривизна в кожній точці. Інакше кажучи, К. Гаусс запропонував розглядати ті властивості поверхні (так звані внутрішні), які не залежать від згинів поверхні, що не змінюють довжин ліній на ній. Створена в такий спосіб внутрішня геометрія поверхонь послугувала зразком для створення *n*-мірної ріманової геометрії.

Величезне значення не лише для геодезії, але й для усіх наук, в основі яких лежить обробка спостережень, мають розроблені К. Гауссом методи набуття найімовірніших значень вимірюваних величин. Особливо широку популярність здобув створений К. Гауссом в 1821–1823 році метод найменших квадратів. К. Гауссом закладені також і основи теорії похибок.

Отже, розглянувши роль математики у формуванні природничонаукових знань в епоху Відродження, можна стверджувати, що отримані в цей період наукові результати в галузі математики полягають в основі сучасних методів обробки геодезичних вимірів і подання їх у базах даних автоматизованих картографічних і геоінформаційних систем.

Цей навчальний посібник підготовлений з метою полегшення сприйняття основних понять теорії імовірностей та методів імовірнісних і статистичних розрахунків, на яких ґрунтуються методичні підходи до обчислення числових характеристик точності результатів вимірювань та їх трактування. При цьому автори врахували, що студенти вже вивчили курс геодезії протягом одного навчального року, пройшли геодезичну практику та знайомі з найпростішими методами геодезичних вимірів та їх обробки. Також передбачалось, що студенти знайомі з основами лінійної алгебри, диференційного та інтегрального числень, що вивчаються у курсі вищої математики. Але автори не прагнули до повної математичної строгості викладення матеріалу та глибокого теоретичного обґрунтування формул та інших висновків. Для глибшого пророблення бажаючі можуть звернутися до спеціальної літератури, вказаної у списку наприкінці навчального посібника. Усі теми, викладені у навчальному посібнику, проілюстровані достатньою кількістю практичних прикладів та завданнями для самостійного опрацювання навчального матеріалу, що сприяє засвоєнню відповідних теоретичних положень.

1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ. ТЕОРІЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ

Тема 1 ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Класичний і статистичний методи визначення імовірності випадкової події. Теорема додавання імовірностей. Теорема множення імовірностей. Формула повної імовірності. Теорема гіпотез. Повторні незалежні випробування. Формула Пуассона

1.1 Класичний і статистичний методи визначення імовірності випадкової події

Теорія імовірностей – математична наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах. Випадкове – це явище, яке за багаторазового повторення досліду перебігає щораз інакше. Наприклад, вимірювання, якщо ми хочемо дістати точний результат, стрілянина у мішень є класичним прикладом випадкового явища, погодні умови, включаючи температуру повітря, силу вітру, атмосферний тиск та ін.

На відміну від випадкових існують детерміновані явища. Це, як правило, закони природи, що вивчають у курсі фізики, наприклад, прискорення вільного падіння дорівнює 9,8 м/с^2, сила, прикладена до матеріальної точки, надає їй прискорення a $F = ma$.

Отже, якщо за відтворенням певних умов незмінно відбувається певна подія (та сама, тобто результат незмінно повторюється), то спостерігається **детерміноване** явище. Прогноз результату такого досліду можна здійснити, не проводячи експерименту. У випадку, коли на результат досліду впливає низка факторів, урахувати які неможливо, або дуже складно, скласти математичну модель, що прогнозує розвиток такого явища в детерміністському поданні неможливо. У такому разі намагаються знайти у випадкових явищах ті або інші закономірності. Такі закономірності виявляють у результаті масового повторення дослідів. Якщо їх вдається знайти, то випадкове явище є статистично однорідним або **стохастичним**. Якщо закономірності у явищі відсутні, тобто виявити їх не вдається, то таке явище є невизначеним і вимагає додаткового дослідження.

Уведемо основні поняття та визначення. Одним з основних у теорії імовірностей є поняття випадкової події. **Випадкова подія** – це усякий факт, який у результаті досліду може відбутися або не відбутися.

Випадкові події позначають великими літерами латинського алфавіту: A = {влучення у мішень}, B = {прибуття трамвая на зупинку}, C = {поломка технічного пристрою}, D = {коротке замикання в мережі}.

Дослідом називають відтворену сукупність умов, у яких може відбутися випадкова подія.

Імовірність випадкової події – це числова міра ступеня об'єктивної можливості появи певної події в результаті досліду. Імовірність події A позначають $P(A)$.

За одиницю виміру імовірності приймають імовірність **достовірної** події E, тобто такої, яка в результаті досліду обов'язково відбудеться:

$$P(E) = 1.$$

Протилежну достовірній подію називають **неможливою** та позначають $\bar{E}$. Імовірність неможливої події:

$$P(\bar{E}) = 0.$$

Очевидно, що значення імовірності будь-якої випадкової події A розташовується між нулем та одиницею:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Імовірність випадкової події можна визначити класичним методом тільки в обмеженій кількості явищ, а саме, якщо наслідки досліду мають такі властивості:

– утворюють повну групу – якщо результатом однократного випробування є обов'язково один з можливих наслідків;

– є рівноможливими – якщо за умови симетрії досліду поява кожного з них є однаково можливою;

– є несумісними – якщо будь-які два з них не можуть відбутися одночасно.

Якщо наслідки досліду мають перелічені властивості (утворюють повну групу, є несумісними та рівноможливими), то говорять, що дослід збігається до **схеми випадків**, або що маємо класичну схему теорії імовірностей. У межах цієї схеми можна точно підрахувати імовірність події, не проводячи випробувань. Якщо дослід збігається до схеми випадків, то імовірність події A визначають як відношення кількості можливих наслідків досліду, які сприяють появі події A, до загальної кількості можливих наслідків досліду:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

де n – загальна кількість можливих наслідків досліду;

m – кількість наслідків досліду, які сприяють появі події A.

Щоб підрахувати кількість усіх випадків n і кількість випадків m, які сприяють появі події A, часто використовують число сполучень із s елементів по k елементів:

$$C_s^k = \frac{s!}{k!(s-k)!},$$

де $s! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot s$, при цьому $0! = 1$.

Якщо події в досліді не збігаються до схеми випадків, то оцінювання імовірності можна зробити тільки статистично. Спостерігаючи випадкові явища або проводячи випробування, визначають **частоту** появи певної події. При проведенні серії з n дослідів, у кожному з яких могла з'явитися або не з'явитися подія A, як частоту її появи розуміють відношення

$$P^*(A) = \frac{m}{n} \tag{1.2}$$

де n – кількість проведених дослідів;

m – кількість появ події A в n дослідах.

Чи можна вважати частоту появи події A її імовірністю? Результат кожного досліду є випадковим, проте якщо спостережуване явище має статистичну однорідність, то за великої кількості дослідів частота події починає стабілізуватися й у границі прагне до імовірності події. Ця властивість усталеності частот, багаторазово перевірена експериментально, є однією з найбільш характерних закономірностей, спостережуваних у випадкових явищах. Вона відома за назвою закону великих чисел. Бернуллі довів, що

$$\lim_{n\to\infty} P^*(A) = P(A). \tag{1.3}$$

Вираз (1.3) читають так: імовірність події A зі збільшенням кількості дослідів n збігається за імовірністю до імовірності події A. Це означає, що зі збільшенням кількості дослідів n імовірність того, що частота події A відрізняється від імовірності цієї події, зменшується.

Приклад 1.1. В урні знаходяться 3 білих і 4 чорних кулі. Навмання з урни виймають одну кулю. Визначити імовірність того, що вийнята куля опиниться білою.

Розв'язання. Загальне число наслідків досліду дорівнює $n = 7$. Число наслідків досліду, які сприяють появі події A = {вийнята куля є білою} дорівнює $m = 3$. Імовірність події A за класичною формулою

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{7}.$$

Приклад 1.2. З тієї самої урни навмання виймають дві кулі. Визначити імовірність того, що обидві вийнятих кулі виявляться білими.

Розв'язання. Загальне число можливих наслідків досліду можна визначити як число сполучень із 7 елементів по 2 елементи:

$$n = C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 21.$$

Число наслідків досліду, які сприяють появі події B = {обидві вийнятих кулі білі}, можна визначити як число сполучень із 3 елементів по 2 елементи:

$$m = C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3.$$

Тоді імовірність події *B* визначиться за класичною формулою в такий спосіб:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}.$$

Приклад 1.3. З тієї самої урни навмання виймають три кулі. Визначити імовірність того, що дві вийнятих кулі чорні, а третя – біла.

Розв'язання: Загальне число можливих наслідків досліду визначимо як число сполучень із 7 елементів по 3 елементи

$$n = C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35.$$

Число наслідків досліду, які сприяють появі події *C* = {дві вийняті кулі чорні і одна біла}, визначимо в такий спосіб. Число наслідків досліду, які сприяють появі двох чорних куль, дорівнює числу сполучень із 4 елементів по 2 елементи, оскільки дві чорних кулі можуть з'явитися тільки з тих чотирьох чорних, що знаходяться в урні:

$$m_ч = C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6.$$

Число наслідків досліду, які сприяють появі однієї білої кулі дорівнює числу сполучень із 3 елементів по 1 елементу, оскільки одна біла куля може з'явитися тільки з тих трьох білих, що знаходяться в урні.

$$m_б = C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3.$$

Тоді імовірність події *C*:

$$P(C) = \frac{m_ч \cdot m_б}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{6 \cdot 3}{35} = \frac{18}{35}.$$

Приклад 1.4. Партія виробів містить *N* виробів, з яких *M* дефектні. Навмання з партії вибирають *k* виробів для контролю. Визначити імовірність того, що серед них буде рівно *l* дефектних.

Розв'язання. Зазначимо подію, для якої необхідно визначити імовірність

A = {у контрольній партії рівно *l* дефектних виробів}.

Загальне число можливих наслідків досліду дорівнює $n = C_N^k$. Число наслідків досліду, які сприяють появі події *A*={у контрольній партії рівно *l* дефектних виробів} визначимо в такий спосіб. Число випадків, які сприяють появі *l* дефектних виробів

$$m_д = C_m^l .$$

Число випадків, які сприяють появі $k - l$ не дефектних виробів

$$m_г = C_{N-M}^{k-l} .$$

Імовірність події *A*

$$P(A) = \frac{m_д \cdot m_г}{n} = \frac{C_m^l \cdot C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}.$$

1.2 Теорема додавання імовірностей

Оскільки в практичних умовах багаторазове відтворення досліду надзвичайно утруднене, для визначення імовірностей одних випадкових подій за відомими імовірностями інших подій, що з ними пов'язані, користуються теоремами теорії імовірностей: теоремою додавання й теоремою множення.

Введемо визначення. Сумою двох подій *A* і *B* називають подію *C*, що полягає у появі події *A* або події *B* або обох подій разом:

$$C = A + B.$$

Сума подій – логічна сума, її називають диз'юнкцією та позначають спеціальним знаком:

$$C = A \cup B.$$

Добутком двох подій *A* і *B* називають подію *C*, що полягає у спільній появі подій *A* і *B*:

$$C = A \cdot B.$$

Добуток подій – логічний добуток, його називають кон'юнкцією і також позначають спеціальним знаком:

$$C = A \cap B.$$

Протилежними називають дві несумісних події *A* і $\overline{\mathrm{A}}$, якщо вони складають повну групу.

Подію *A* називають незалежною від події *B*, якщо імовірність події *A* не зміниться від того, відбулася подія *B*, чи ні. Якщо ж імовірність події *A* залежить від того, відбулася подія *B*, чи ні, то такі події називають залежними.

Імовірність події А, обчислена за умови, що подія *B* відбулася, називають умовною імовірністю події *A* і позначають *P*(*A*/*B*).

Для ілюстрації останнього твердження розглянемо приклад. Нехай в урні три кулі, дві з яких білі, а третя – чорна. Одну за іншою з урни виймають дві кулі. Позначимо події:

A = {перша вийнята куля виявилася білою};

B = {друга вийнята куля виявилася білою}.

Імовірність події *B* залежить від того, відбулася подія *A* чи ні. Якщо подія *A* відбулась, то імовірність події *B*:

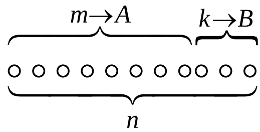
$$P(B/A) = \frac{1}{2}.$$

Якщо ж подія *A* не відбулася, то імовірність події *B* буде іншою: якщо першою виявилася вийнятою чорна куля, то $P(B/\bar{A}) = 1$.

Теорема додавання: імовірність суми двох несумісних подій *A* і *B* дорівнює сумі імовірностей цих подій, тобто

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{1.4}$$

Покажемо це. Нехай дослід має n можливих наслідків, у числі яких m сприяють появі події A і k – появі події B:



Оскільки подія C полягає у появі події A, якій сприяють m наслідків досліду, або події B, якій сприяють k наслідків, то події C сприяють $m + k$ наслідків досліду. Тоді імовірність події C за класичною формулою визначиться в такий спосіб:

$$P(C) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

Наслідки теореми додавання. За методом математичної індукції (узагальнення) теорему додавання імовірностей можна поширити на будь-яке кінцеве число несумісних подій:

$$\mathrm{C} = \Sigma A_i;$$

$$P(\Sigma A_i) = \Sigma P(A_i).$$

Наслідок 1. Якщо події A_1, A_2, …, A_i, …, A_n утворюють повну групу несумісних подій, то сума їхніх імовірностей дорівнює одиниці:

$$P(\Sigma A_i) = \Sigma P(A_i) = 1. \tag{1.5}$$

Наслідок 2. Сума імовірностей двох протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(\mathrm{A}) + P(\bar{A}) = 1,$$

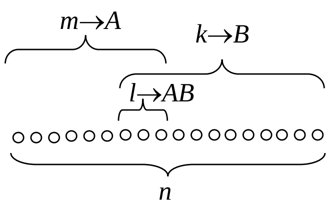
звідки імовірність будь-якої випадкової події

$$P(\mathrm{A}) = 1 - P(\bar{A}).$$

Якщо дві події є сумісними, імовірність їхньої суми дорівнює сумі імовірностей цих подій мінус імовірність їхньої спільної появи:

$$P(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \tag{1.6}$$

Покажемо це. Нехай дослід має n можливих наслідків, у числі яких m сприяють появі події A, k – появі події B і l – появі події AB:



Оскільки подія C полягає у появі події A, якій сприяють m наслідків досліду, або події B, якій сприяють k наслідків, то події C сприяють $m + k - l$

наслідків досліду. Тоді імовірність події C за класичною формулою визначиться в такий спосіб:

$$P(C) = \frac{m+k-l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Можна показати, що для суми трьох сумісних подій справедливою є формула

$$P(\mathrm{A} + \mathrm{B} + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) - P(ABC),$$

а в загальному випадку для n сумісних подій

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P\left(A_i A_j\right) + \sum_{i,j,k} P\left(A_i A_j A_k\right) - \cdots +$$
$$+(-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n),$$

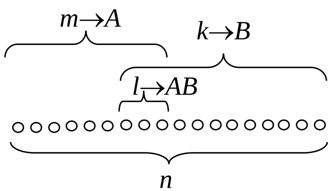
де суми поширюються на всі можливі комбінації індексів i, j, k,..., узятих по одному, по два, по три і т. д.

1.3 Теорема множення імовірностей

Імовірність добутку двох подій A і B дорівнює добутку імовірності одного з них на умовну імовірність іншого, обчислену за умови, що перша відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A). \tag{1.7}$$

Покажемо це. Нехай дослід має n можливих наслідків, у числі яких m сприяють появі події A, k – появі події B і l – появі події AB:



Події AB сприяють l наслідків досліду з n: $P(AB) = \frac{l}{n}$, події A сприяють m наслідків досліду з n: $P(A) = \frac{m}{n}$, а події B, за умови, що одночасно з нею відбулася подія A, сприяють l наслідків досліду з m $P(B/A) = \frac{l}{m}$. Тоді можна записати

$$P(AB) = \frac{l}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{m}.$$

Остаточно імовірність події, що полягає у добутку двох подій, визначиться в такий спосіб:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Для імовірності добутку n подій формула має вигляд:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Якщо події A і B незалежні, то умовна імовірність події B дорівнює безумовній імовірності цієї події:

$$P(B/A) = P(B).$$

Наслідок. Імовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку імовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.8)$$

Якщо маємо кілька незалежних подій:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Приклад 1.5. Визначити імовірність пошкодження пристрою, який складається з трьох вузлів. Імовірності пошкодження вузлів відомі та дорівнюють відповідно: $q_1 = 0{,}02$; $q_2 = 0{,}01$; $q_3 = 0{,}001$.

Розв'язання. Позначимо подію, імовірність якої необхідно визначити: A={пристрій пошкоджений}. Виразимо її через елементарні події:

A_1 = {пошкоджений вузол 1};

A_2 = {пошкоджений вузол 2};

A_3 = {пошкоджений вузол 3}.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_1 \cdot A_2 + A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

1-й спосіб. Визначимо імовірність події A за теоремами додавання і множення:

$$P(A) = 0{,}02 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}02 \cdot 0{,}01 + 0{,}01 \cdot 0{,}001 + 0{,}02 \cdot 0{,}001 +$$
$$+0{,}02 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}001 \;=\; 0{,}031.$$

2-й спосіб. Визначимо імовірність події A через імовірність протилежної події $\bar{A}$ ={пристрій справний}:

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3.$$

Події $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ незалежні, імовірність їхнього добутку дорівнює добутку їхніх імовірностей:

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = (1 - 0{,}02) \cdot (1 - 0{,}01) \cdot (1 - 0{,}001) = 0{,}969.$$

Тоді

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}969 = 0{,}031.$$

Приклад 1.6. Студент прийшов здавати іспит, знаючи 15 із 20 питань програми. Визначити імовірність того, що він відповість на три пропонованих екзаменаційних питання.

Розв'язання. Позначимо подію, імовірність якої необхідно визначити, A = {студент знає відповіді на три питання}. Виразимо її через елементарні події:

A_1 = {знає перше питання};

A_2 = {знає друге питання};

A_3 = {знає третє питання};

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ .$$

Події A_1, A_2, A_3 – залежні події. Обчислимо їхні умовні імовірності.

$$P(A_1) = \frac{15}{20}.$$

Умовна імовірність події A_2, за умови, що відбулася подія A_1:

$$P(A_1/A_2) = \frac{14}{19}.$$

Умовна імовірність події A_3, за умови, що відбулися події A_1 і A_2:

$$P(A_3/A_1 \cdot A_2) = \frac{13}{18}.$$

Тоді імовірність події A за теоремою множення:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} = 0{,}368.$$

Приклад 1.7. У шафі знаходяться 9 однакових приладів. На початку досліду вони всі нові. Для тимчасової експлуатації беруть навмання 3 прилади, потім повертають їх у шафу. Таку операцію виконують три рази. Визначити імовірність того, що в шафі залишиться хоча б один новий прилад.

Розв'язання. Позначимо подію, імовірність якої потрібно визначити A = {залишився хоча б один новий прилад}. Меншу кількість варіантів має протилежна подія $\bar{A}$ = {не залишилося жодного нового приладу}. Така подія може відбутися, тільки якщо вперше і вдруге і втретє для досліду були взяті всі нові прилади. Виразимо її через елементарні події:

B = {у перший раз взяті всі нові прилади};

C = {у другий раз взяті всі нові прилади};

D = {утретє взяті всі нові прилади};

$$A = B \cdot C \cdot D.$$

Імовірність події B = {у перший раз взяті всі нові прилади} дорівнює одиниці:

$$P(B) = 1.$$

Для визначення імовірності події C = {у другий раз взяті всі нові прилади} виразимо її через елементарні події:

C_1 = {перший прилад новий};

C_2 = {другий прилад новий};

C_3 = {третій прилад новий}.

Обчислимо їхні умовні імовірності.

$$P(C_1) = \frac{6}{9}.$$

Умовна імовірність події C_2, за умови, що відбулася подія C_1:

$$P(C_2/C_1) = \frac{5}{8}.$$

Умовна імовірність події C_3, за умови, що відбулися події C_1 і C_2:

$$P(C_3/C_1 \cdot C_2) = \frac{4}{7}.$$

Тоді умовна імовірність події *C* за теоремою множення:

$$P(C/B) = P(C_1) \cdot P(C_2/C_1) \cdot P(C_3/C_1 \cdot C_2) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}.$$

Умовну імовірність події D за умови, що відбулися події B і C за теоремою множення визначимо аналогічно:

$$P(D/C \cdot B) = P(D_1) \cdot P(D_2/D_1) \cdot P(D_3/D_1 \cdot D_2) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}.$$

Тоді імовірність події $\bar{A}$:

$$P(\bar{A}) = P(B) \cdot P(C/B) \cdot P(D/C \cdot B) = 1 - \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = 0{,}003.$$

Імовірність події *A* = {залишився хоча б один новий прилад}:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}003 = 0{,}997.$$

Приклад 1.8. Ви повинні знайти людину, в якої день народження збігається з вашим. Скількох незнайомців вам треба буде опитати, щоб імовірність події *A* = {день народження людини збігається з вашим} була не менше 0,5?

Розв'язання. Імовірність того, що перша людина, в якої ви запитали, не народилася в один день з вами,

$$P(\bar{A}) = \frac{365-1}{365}.$$

Якщо Ви опитаєте *n* осіб, то за теоремою множення імовірність, що вони не народилися в один день із вами:

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{365-1}{365}\right)^n.$$

Тоді імовірність події *A* = {день народження людини збігається з вашим}:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) == 1 - \left(\frac{365-1}{365}\right)^n.$$

Оскільки задана імовірність $P(A) = 0{,}5$, маємо:

$$0{,}5 = 1 - \left(\frac{365-1}{365}\right)^n.$$

Звідки $n = 253$ осіб.

Приклад 1.9. У двох урнах знаходяться кулі, що відрізняються тільки кольором. У першій – 5 білих; 11 чорних і 8 червоних, у другій – 10 білих, 8 чорних і 6 червоних. Із кожної урни виймають по одній кулі. Визначити імовірність події *A* = {вийняті кулі однакового кольору}.

Розв'язання. Для визначення імовірності події *A* = {вийняті кулі однакового кольору} виразимо її через елементарні події:

A_1 = {обидві кулі білі};

A_2 = {обидві кулі чорні};

A_3 = {обидві кулі червоні}.

Імовірність події *A* за теоремою множення для незалежних подій:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

Тоді

$$P(A) = \frac{5}{24} \cdot \frac{10}{24} + \frac{11}{24} \cdot \frac{8}{24} + \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24} = 0{,}32.$$

1.4 Формула повної імовірності

Формула повної імовірності є наслідком двох теорем теорії імовірностей. Нехай передбачено проведення досліду, про умови перебігу якого можна зробити N взаємовиключних припущень (гіпотез). Умови перебігу досліду (гіпотези) складають повну групу несумісних подій $H_1, H_2, \ldots, H_N$, імовірності яких $P(H_i)$ відомі. Деяка випадкова подія A може з'явитися за будь-яких умов протікання досліду із різною імовірністю, тому її можна подати як суму несумісних подій:

$$A = H_1A + H_2A + \cdots + H_NA.$$

Для визначення повної безумовної імовірності події A, використовуючи теореми додавання та множення, дістанемо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(H_iA) = \sum_{i=1}^{N} P(H_i)P(A/H_i). \qquad (1.9)$$

Отже, повна безумовна імовірність події A з урахуванням випадковості умов перебігу досліду дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з гіпотез на умовну імовірність події A при кожній з гіпотез.

Приклад 1.10. Є три однакові на вигляд урни. У першій – 2 білі та 3 чорних кулі, у другій – 4 білі й 1 чорна, у третій – 3 білі. Навмання з однієї з урн виймають одну кулю. Визначити імовірність того, що вийнята куля виявиться білою.

Розв'язання. Позначимо подію A = {вийнята куля біла}. Висуваємо три гіпотези:

H_1 = {обрана перша урна};

H_2 = {обрана друга урна};

H_3 = {обрана третя урна}.

Імовірність кожної гіпотези:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Умовні імовірності події A:

$$P(A/H_1) = \frac{2}{5}; \qquad P(A/H_2) = \frac{4}{5}; \qquad P(A/H_3) = 1.$$

Повна безумовна імовірність події A:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{11}{15}.$$

Приклад 1.11. У тирі є п'ять рушниць, імовірності влучення з яких дорівнюють відповідно 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Визначити імовірність влучення при одному пострілі, якщо людина бере одну з рушниць навмання.

Розв'язання. Маємо 5 гіпотез, імовірність кожної дорівнює 0,2. Повна безумовна імовірність події A

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3) +$$
$$+P(H_4)\cdot P(A/H_4) + P(H_5)\cdot P(A/H_5) =$$
$$= 0{,}2\cdot 0{,}5 \;+\; 0{,}2\cdot 0{,}6 \;+\; 0{,}2\cdot 0{,}7 \;+\; 0{,}2\cdot 0{,}8 \;+\; 0{,}2\cdot 0{,}9 \;=\; 0{,}70.$$

Приклад 1.12. Якщо дозволяє погода, пілот саджає літак, користуючись крім приладів, візуальним спостереженням. У цьому разі імовірність нормальної посадки дорівнює 0,99. Якщо над аеродромом низька хмарність, пілот саджає літак, користуючись тільки приладами. У цьому разі імовірність нормальної посадки дорівнює 0,9. Прилади мають надійність 0,8. Якщо над аеродромом низька хмарність і прилади вийшли з ладу, то імовірність нормальної посадки дорівнює 0,5. За статистичним даними в 70 % випадків над аеродромом низька хмарність. Знайти повну імовірність нормальної посадки.

Розв'язання. Позначимо подію A = {нормальна посадка літака}. Гіпотези:

$$H_1 = \{\text{низької хмарності немає}\};$$
$$H_2 = \{\text{низька хмарність}\}.$$

Імовірності гіпотез H_1 і H_2:

$$P(H_1) = 0{,}3; \qquad P(H_2) = 0{,}7.$$

Умовна імовірність події A при гіпотезі H_1:

$$P(A/H_1) = 0{,}99.$$

Якщо здійсниться гіпотеза H_2, то необхідно висунути ще дві гіпотези:

$$H_3 = \{\text{прилади працюють}\};$$
$$H_4 = \{\text{прилади вийшли з ладу}\}.$$

Імовірності цих гіпотез:

$$P(H_3) = 0{,}8; \qquad P(H_4) = 0{,}2.$$

Умовна імовірність події A при гіпотезах H_3 і H_4:

$$P(A/H_3) = 0{,}9; \qquad P(A/H_4) = 0{,}5.$$

Тоді умовну імовірність події A при гіпотезі H_2 можна визначити за формулою повної імовірності:

$$P(A/H_2) = P(H_3)\cdot P(A/H_3) + P(H_4)\cdot P(A/H_4) = 0{,}8\cdot 0{,}9 + 0{,}2\cdot 0{,}5 = 0{,}82.$$

Повна безумовна імовірність події A:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) = 0{,}3\cdot 0{,}99 + 0{,}7\cdot 0{,}82 = 0{,}871.$$

1.5 Теорема гіпотез

Ця теорема дозволяє за відомими до проведення досліду (апріорними) імовірностями гіпотез $P(H_i)$ і за результатом досліду (настання події A) визначити обчислені після досліду (апостеріорні) імовірності гіпотез $P(H_i/A)$.

За теоремою множення імовірність появи події A при і-й гіпотезі:

$$P(H_i \cdot A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i),$$

унаслідок симетрії подій справедливо:

$$P(H_i \cdot A) = P(A) \cdot P(H_i/A),$$

звідки одержуємо:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)},$$

або, якщо підставити $P(A)$ з формули (1.9), маємо:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_i P(H_i) \cdot P(A/H_i)}. \qquad (1.10)$$

Отже, формула Баєса дозволяє переоцінити імовірності гіпотез після того, як стає відомим результат досліду, в результаті якого відбулася подія A.

Приклад 1.13. Два стрільці роблять по одному пострілу у мішень. Для першого з них імовірність влучення дорівнює 0,8, а для другого – 0,4. Мішень пробита один раз (одне влучення). Знайти імовірність того, що мішень уражена першим стрільцем.

Розв'язання. Є факт, тобто подія A = {мішень уражена один раз}, тобто один із стрільців промахнувся. Висуваємо гіпотези: H_1 = {мішень уражена першим стрільцем}; H_2 = {мішень уражена другим стрільцем}. Визначимо імовірності гіпотез. Мішень уражена першим стрільцем, якщо він при пострілі потрапив у мішень, а другий стрілець промахнувся, тоді $P(H_1) = 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}4) = 0{,}48$. Мішень уражена другим стрільцем, якщо він при пострілі потрапив у мішень, а перший стрілець промахнувся, тоді $P(H_2) = (1 - 0{,}8) \cdot 0{,}4 = 0{,}08$. Умовна імовірність події A за умови, що має місце гіпотеза H_1, дорівнює $P(A/H_1) = 1$, і за умови, що має місце гіпотеза H_2, дорівнює $P(A/H_2) = 1$, тому що в цих випадках мішень буде напевно уражена один раз. Скористаємося теоремою гіпотез і визначимо імовірність реалізації гіпотези H_1:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum P(H_i) \cdot P(A/H_i)} = \frac{0{,}48 \cdot 1}{0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} = 0{,}884.$$

Приклад 1.14. Об'єкт може знаходитися в одному зі станів:

H_1 = {працює};

H_2 = {не працює}.

Апріорні імовірності цих станів:

$P(H_1) = 0{,}7$; $\quad P(H_2) = 0{,}3$.

Є два прилади, що контролюють роботу об'єкта. Вони дають суперечливі повідомлення. Перший прилад повідомляє, що об'єкт працює, а другий – що не працює. На підставі аналізу повідомлень двох приладів визначити імовірності гіпотез H_1 і H_2. Відомо, що перший прилад дає правильні повідомлення з імовірністю $p_1 = 0{,}9$, а другий дає правильні повідомлення з імовірністю $p_2 = 0{,}7$.

Розв'язання. Є повідомлення двох приладів, тобто подія A = {Перший прилад повідомляє, що об'єкт працює, а другий – що не працює}. Імовірності гіпотез задані в умові задачі. Визначимо умовні імовірності події A:

$$P(A/H_1) = p_1 \cdot (1 - p_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}27;$$

$$P(A/H_2) = (1 - p_1) \cdot p_2 = 0{,}01 \cdot 0{,}7 = 0{,}007.$$

Скористаємось формулою Баєса. Апостеріорні імовірності гіпотез:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}27}{0{,}7 \cdot 0{,}27 + 0{,}3 \cdot 0{,}07} = 0{,}9,$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}07}{0{,}7 \cdot 0{,}27 + 0{,}3 \cdot 0{,}07} = 0{,}1,$$

або $$P(H_2/A) = 1 - P(H_1/A) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Приклад 1.15. Із вісімнадцятьох стрільців п'ять потрапляють у мішень з імовірністю 0,8, сім – з імовірністю 0,7, чотири – з імовірністю 0,6 і два – з імовірністю 0,5. Навмання обраний стрілець зробив постріл, але в мішень не потрапив. До якої із груп найімовірніше належав цей стрілець?

Розв'язання. Позначимо факт, що відбувся A = {Промах}. Визначимо умовні імовірності цієї події A:

для 1-ї групи стрільців $\quad P(A/H_1) = 0{,}2;$

для 2-ї групи стрільців $\quad P(A/H_2) = 0{,}3;$

для 3-ї групи стрільців $\quad P(A/H_3) = 0{,}4;$

для 4-ї групи стрільців $\quad P(A/H_4) = 0{,}5\,.$

Визначимо імовірності, з якими стрілок, який промахнувся, міг належати до кожної з груп (апріорні імовірності гіпотез):

$$P(H_1) = \frac{5}{18};$$

$$P(H_2) = \frac{7}{18};$$

$$P(H_3) = \frac{4}{18};$$

$$P(H_4) = \frac{2}{18}.$$

Визначимо апостеріорні імовірності гіпотез, використовуючи формулу Баєса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{\sum P(H_i) \cdot P(A/H_i)} = \frac{\frac{5}{18} \cdot 0{,}2}{\frac{5}{18} \cdot 0{,}2 + \frac{7}{18} \cdot 0{,}3 + \frac{4}{18} 0{,}4 + \frac{2}{18} \cdot 0{,}5} = \frac{10}{57};$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{\sum P(H_i) \cdot P(A/H_i)} = \frac{\frac{7}{18} \cdot 0{,}3}{\frac{5}{18} \cdot 0{,}2 + \frac{7}{18} \cdot 0{,}3 + \frac{4}{18} \cdot 0{,}4 + \frac{2}{18} \cdot 0{,}5} = \frac{21}{57};$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{\sum P(H_i) \cdot P(A/H_i)} = \frac{\frac{4}{18} \cdot 0{,}4}{\frac{5}{18} \cdot 0{,}2 + \frac{7}{18} \cdot 0{,}3 + \frac{4}{18} \cdot 0{,}4 + \frac{2}{18} \cdot 0{,}5} = \frac{16}{57};$$

$$P(H_4/A) = \frac{P(H_4) \cdot P(A/H_4)}{\sum P(H_i) \cdot P(A/H_i)} = \frac{\frac{5}{18} \cdot 0{,}5}{\frac{5}{18} \cdot 0{,}2 + \frac{7}{18} \cdot 0{,}3 + \frac{4}{18} \cdot 0{,}4 + \frac{2}{18} \cdot 0{,}5} = \frac{10}{57}.$$

Можна виконати перевірку правильності обчислень: $\Sigma P(H_i/A) = 1$.

Очевидно, що найімовірнішою є приналежність стрілка, який промахнувся, до другої групи.

1.6 Повторні незалежні випробування

На практиці доводиться стикатися з такими завданнями, які можна подати як багаторазово повторювані незалежні випробування. До того ж імовірність появи події A в одному досліді відома та дорівнює p, а потрібно визначити імовірність того, що внаслідок певного числа дослідів подія A з'явиться рівно m разів. Для визначення цієї імовірності можна скористатися формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{1.11}$$

де $P_n(m)$ – імовірність того, що в n випробуваннях подія A з'явиться рівно m разів;

C_n^m – число сполучень із n елементів по m;

p – імовірність появи події A в одному досліді;

$q = 1 - p$ – імовірність не появи події A в одному досліді.

Переконаємося у справедливості формули Бернуллі на простому прикладі. Нехай виконуються п'ять пострілів, імовірність влучення при кожному пострілі в мішень дорівнює p. Визначимо імовірність рівно одного влучення:

$$P_5(1) = pqqqq + qpqqq + qqpqq + qqqpq + qqqqp = 5pq^4;$$

визначимо імовірність рівно двох влучень:

$$P_5(2) = ppqqq + pqpqq + pqqpq + pqqqp + qqqqp +$$
$$+qpqpq + qpqqp + qqppq + qqpqp + qqqpp = 10p^2q^3;$$

визначимо імовірність рівно трьох влучень:

$$P_5(3) = pppqq + ppqpq + pqppq + qpppq + ppqqp +$$
$$+pqpqp + qppqp + pqqpp + qpqpp + qqppp = 10p^3q^2;$$

визначимо імовірність рівно чотирьох влучень:

$$P_5(4) = ppppq + pppqp + ppqpp + pqppp + qpppp = 5p^4q.$$

У кожному з чотирьох виразів містяться однакові доданки. Число доданків в отриманих виразах для імовірностей визначається як число сполучень з п'яти елементів по одному, по два, по три та по чотири відповідно:

$$C_5^1 = \frac{5!}{1!\cdot(5-1)!} = 5\ ; \quad C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = 10;$$
$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = 10\ ; \quad C_5^4 = \frac{5!}{4!\cdot(5-4)!} = 5.$$

Приклад 1.16. У бібліотеці є книги тільки з техніки та математики. Імовірність, що читач візьме книгу з техніки, дорівнює 0,7, а що він візьме книгу з математики – 0,3.

Визначити імовірність того, що п'ять читачів підряд візьмуть книги або тільки з техніки, або тільки з математики, якщо кожний з них бере тільки одну книгу.

Розв'язання. Якщо читач бере книгу з техніки з імовірністю 0,7, то п'ять читачів підряд візьмуть книги з техніки з імовірністю:

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^{5-5} = 0{,}168,$$

а п'ять читачів підряд візьмуть книги з математики з імовірністю:

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,3^5 \cdot 0,7^{5-5} = 0{,}00243.$$

Приклад 1.17. Є п'ять однотипних пристроїв. Імовірність безвідмовної роботи кожного дорівнює 0,8. Визначити імовірність того, що в робочому стані перебувають *m* пристроїв (m = 1, 2, 3, 4, 5).

Розв'язання. Визначимо імовірність, що всі п'ять пристроїв пошкоджені:

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^{5-0} = 0{,}00032;$$

визначимо імовірність, що чотири пристрої пошкоджені:

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^{5-1} = 0{,}00638;$$

визначимо імовірність, що три пристрої пошкоджені:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^{5-2} = 0{,}0512;$$

визначимо імовірність, що два пристрої пошкоджені:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^{5-3} = 0{,}2047;$$

визначимо імовірність, що один пристрій пошкоджений:

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^{5-4} = 0{,}4095;$$

визначимо імовірність, що жодний пристрій не пошкоджений:

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^{5-5} = 0{,}328.$$

$$\Sigma p_i = 0{,}00032 + 0{,}00638 + 0{,}0512 + 0{,}2047 + 0{,}4095 + 0{,}328 = 1.$$

1.7 Формула Пуассона

Якщо імовірність p настання події в окремому випробуванні близька до нуля ($p \leq 0{,}1$), то навіть за великої кількості випробувань n, але при невеликому значенні добутку np (не більше десяти) одержувані значення імовірностей $P_n(m)$ виявляються недостатньо точними, тому виникає потреба в іншій наближеній формулі. Отже, якщо число незалежних випробувань n досить велике, але значення добутку np залишається невеликим, то імовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться m разів, можна визначити за формулою Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{(np)^m}{m!} e^{-np} \tag{1.12}$$

Приклад 1.18. Імовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,004. Знайти імовірність того, що серед 1000 деталей буде 5 нестандартних.

Розв'язання. Формалізуємо задачу:

$$n = 1000, \quad p = 0{,}004, \quad a = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4.$$

Для знаходження імовірності події $P_{1000}(5)$ скористаємось формулою Пуассона:

$$P_{1000}(5) = \frac{(4)^5}{5!} e^{-4} = 0{,}1563.$$

Запитання для самоперевірки

1. Дайте визначення випадкової події.

2. Які події називають: а) достовірними; б) рівноможливими; в) несумісними; г) протилежними? Наведіть приклади.

3. Чи є протилежні події несумісними?

4. Чи є несумісні події протилежними?

5. Дайте визначення імовірності випадкової події.

6. Як підрахувати імовірність події класичним методом?

7. Що розуміють під повною групою подій? Наведіть приклади.

8. Чи завжди можна визначити імовірність випадкової події класичним методом?

9. Як пов'язані одна з одною імовірність і частота появи події?

10. Як визначити імовірність суми сумісних подій?

11. Чи може сума двох подій збігатися з їхнім добутком?

12. Наведіть приклади залежних і незалежних подій.

13. Що розуміють під умовною імовірністю події?

14. Як визначається імовірність добутку двох подій?

15. У яких випадках для визначення імовірності застосовують формулу Бернуллі?

16. У яких випадках замість формули Бернуллі застосовують формулу Пуассона?

Задачі для самостійного розв'язання

1.1. На складі 20 деталей, з яких 17 придатних. Визначити імовірність того, що з трьох навмання взятих деталей усі виявляться придатними.

1.2. На складі 50 придатних і 5 дефектних деталей. Визначити імовірність того, що серед п'яти навмання взятих деталей одна виявиться дефектною.

1.3. Учасники жеребкування тягнуть із ящика жетони з номерами від 1 до 100. Знайти імовірність того, що номер першого жетона, який навмання витягнутий з ящика, не містить цифру 5.

1.4. У партії з 20 готових виробів є 4 бракованих. Партію ділять на дві рівні частини. Визначити імовірність того, що браковані вироби розділяться нарівно.

1.5. Набираючи номер телефону, абонент забув останні дві цифри і, пам’ятаючи, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти імовірність того, що були набрані потрібні дві цифри.

1.6. У розіграші першості з баскетболу беруть участь 18 команд, з яких випадковим способом формуються дві групи по 9 команд у кожній. Серед учасників змагань є 5 команд екстракласу. Знайти імовірність того, що а) всі команди екстракласу потраплять в одну групу; б) дві команди потраплять в одну з груп, а три – в іншу.

1.7. Є дві урни, в першій з них a білих і b чорних кулі, у другій – c білих і d чорних. Із кожної урни виймають по одній кулі. Знайти імовірність того, що обидві вийнятих кулі виявляться білими.

1.8. У ліфт будинку, в якому сім поверхів, на першому поверсі ввійшли три пасажири. Кожний з них з однаковою імовірністю виходить на кожному з поверхів. Знайти імовірність того, що всі пасажири вийдуть одночасно (на тому самому поверсі).

1.9. Під час вимірювання 20 ліній теодолітного ходу в трьох з них було допущено грубі промахи. Навмання вибрані 5 ліній. Яка імовірність того, що дві з них містять грубі промахи?

1.10. Є $2n$ нев’язок у трикутниках мережі тріангуляції. Усі нев’язки довільно розбивають на дві групи, однакові за обсягом. Знайти імовірність того, що дві найбільші за абсолютною величиною нев’язки виявляться: а) в одній групі; б) в різних групах. Як проконтролювати правильність обчислення шуканих імовірностей?

Тема 2 ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Поняття закону розподілу випадкової величини. Ряд розподілу імовірностей. Універсальні закони розподілу імовірностей. Моменти випадкової величини. Математичне сподівання. Дисперсія. Середнє квадратичне відхилення

2.1 Поняття закону розподілу випадкової величини. Ряд розподілу імовірностей

Випадковою величиною називають таку фізичну величину, яка в результаті досліду може прийняти те або інше значення, невідомо заздалегідь, яке саме (наприклад, число очок, що випали при киданні гральної кістки, число пасажирів у трамваї, температура повітря, час наробітку на відмову технічного пристрою). Випадкову величину позначають прописною літерою латинського алфавіту *X*, *Y* або *Z*, а будь-яке її значення відповідною малою літерою *x*, *y* або *z*.

Розрізняють дискретні й безперервні випадкові величини.

Дискретною називають таку випадкову величину, число значень якої скінченне або нескінченне, але рахункове (може приймати тільки окремі значення). Прикладом дискретної випадкової величини є сума очок, що випали в результаті кидання двох гральних кісток, число пасажирів, які проходять через турнікет метро, та ін.

Безперервною називають таку випадкову величину, число значень якої нескінченне навіть на невеликому інтервалі. Прикладом безперервної випадкової величини може бути температура повітря. Вона може прийняти кожне з безперервного діапазону значень.

Для повної характеристики випадкової величини потрібно знати всі можливі її значення, а також імовірності появи цих значень у результаті досліду.

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке правило, що дозволяє певному значенню випадкової величини поставити у відповідність його імовірність. Найпростішим законом розподілу є закон розподілу дискретної випадкової величини *X*, називаний **рядом розподілу**. Він становить таблицю, у верхньому рядку якої перелічені всі значення випадкової величини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в порядку їхнього зростання, а в нижньому – імовірності появи цих значень $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

де $p_i = P\{X = x_i\}$.

Оскільки події $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$,…, $\{X = x_n\}$ несумісні та утворюють повну групу, сума їхніх імовірностей дорівнює одиниці $\Sigma p_i = 1$ (ця одиниця розподілена між значеннями X).

Окрім ряду розподілу, для імовірнісної характеристики будь-якої випадкової величини застосовують два універсальних закони. Один з них називають **функцією розподілу**, а інший – **щільністю розподілу** імовірностей.

Сутність кожного закону розподілу полягає в тому, що він показує, як одиниця імовірності розподілена між значеннями певної випадкової величини, тобто які з її значень найбільш імовірні, а які майже не імовірні. Але, оскільки за фізичною природою розрізняють дискретні та безперервні випадкові величини, то для їхньої імовірнісної характеристики застосовують різні закони розподілення. Зокрема, для дискретних величин зручно застосовувати ряд розподілу. Але для безперервної величини ряд розподілу використовувати майже неможливо, оскільки кількість її значень нескінченна, а отже недоцільно будувати нескінченний рід розподілу.

Тому потрібні такі універсальні закони, які узагальнюють правила імовірнісної характеристики випадкових величин. Саме цими законами розподілу і є функція розподілу та щільність розподілу імовірностей. Вони пов’язані один з одним та їх можна визначити з ряду розподілу.

Зауважимо, що на практиці отримати значення випадкової величини можна тільки у результаті її вимірів, а результати вимірів завжди відрізняються один від одного, оскільки містять випадкові похибки. Тому, досліджуючи певну випадкову величину, наприклад, довжину ділянки місцевості, завжди отримують низку результатів вимірів, а потім їх опрацьовують.

Така вичерпна характеристика, як закон розподілу, не завжди потрібна, тому для імовірнісної характеристики застосовують певні числа, які називають числовими характеристиками випадкової величини. Зазвичай це арифметичне середнє та середнє квадратичне відхилення від арифметичного середнього. Теоретично числові характеристики визначають з ряду розподілу імовірностей випадкової величини. Але на практиці їх визначають з результатів вимірів, а отже вони є так само величинами випадковими та потребують дослідження з метою оцінювання їхньої точності.

Найбільш загальною формою закону розподілу для всіх випадкових величин (дискретних і безперервних) є функція розподілу.

2.2 Універсальні закони розподілу імовірностей

Функція розподілу. Для характеристики як безперервних так і дискретних випадкових величин зручніше користуватися не імовірністю події $X = x_i$ (тому що значень x_i може бути багато), а імовірністю того, що випадкова величина X прийняла значення менше свого певного призначеного x, тобто імовірністю події $X < x$.

Функція розподілу випадкової величини X – це імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше за x:

$$F(x) = P\{X < x\}. \tag{2.1}$$

Геометрично функція розподілу – це імовірність того, що значення випадкової величини потрапить у інтервал, розташований ліворуч від точки x (рис. 2.1).

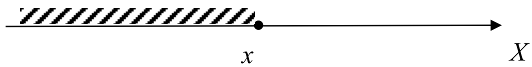


Рисунок 2.1 – Розташування поточного значення x на числовій осі

Функція розподілу дискретної випадкової величини являє собою розривну, східчасту функцію, що має розриви в точках, які відповідають можливим значенням x_1, x_2, …, x_n випадкової величини X, які дорівнюють імовірностям

p_1, p_2, …, p_n цих значень. Сума всіх стрибків функції розподілу дорівнює одиниці.

У разі безперервної випадкової величини функція розподілу зазвичай має вигляд плавної кривої. Розглянемо сутність функції розподілу на прикладі.

Приклад 2.1. Тричі кидають монету. Випадкова величина X – число появ герба. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X. Визначити функцію розподілу випадкової величини X та побудувати її графік.

Розв'язання. Побудуємо ряд розподілу X. Очевидно, що число появ герба у результаті триразового кидання монети може приймати чотири значення: 0, 1, 2, 3. Для визначення імовірностей цих значень скористаємося формулою Бернуллі (1.11). Число дослідів $n = 3$, імовірність появи герба в одному досліді $p = 0{,}5$, імовірність непояви герба в одному досліді $q = 1 – p = 1 – 0{,}5 = 0{,}5$. Отже, ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Виконаємо перевірку: $\sum p_i = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$

За визначенням функція розподілу випадкової величини X – це імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше за x:

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Обчислимо значення функції розподілу у точках розриву:

$$F(0) = P\{X < 0\} = 0;$$

$$F(1) = P\{X < 1\} = \frac{1}{8};$$

$$F(2) = P\{X < 2\} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8};$$

$$F(3) = P\{X < 3\} = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8};$$

при $X \geq 3$ $F(x) = 1$.

Побудуємо графік $F(x)$ (рис. 2.2)

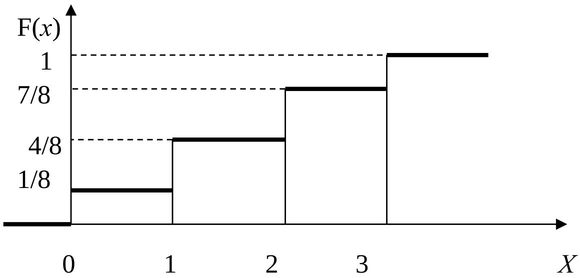


Рисунок 2.2 – Графік функції розподілу

Функція розподілу має такі властивості:

1. Значення функції розподілу належать відрізку [0; 1]:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

Це очевидно, оскільки вона є імовірністю.

2. Функція розподілу – неубутна функція, тобто

$$F(x_2) \geq F(x_1), \quad \text{якщо} \quad x_2 > x_1.$$

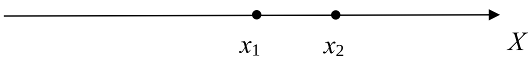


Рисунок 2.3 – Розташування значень X на числовій осі

Дійсно, нехай $x_2 > x_1$, тоді функція розподілу $F(x_2)$ дорівнюватиме функції розподілу $F(x_1)$ плюс імовірність влучення X на інтервал значень (x_1, x_2):

$$F(x_2) = F(x_1) + P\{x_1 \leq X \leq x_2\}, \tag{2.2}$$

де $F(x_1) \geq 0$ і $P\{x_1 \leq X \leq x_2\} \geq 0$, тому що являються імовірностями, отже

$$F(x_2) \geq F(x_1).$$

3. Імовірність того, що випадкова величина X прийме значення з інтервалу (x_1, x_2), дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі. З виразу (2.2) маємо:

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

4. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалу ($-\infty$, $+\infty$), то при мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю, а при плюс нескінченності – одиниці, тобто $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

Щільність розподілу. Нехай є безперервна випадкова величина X із функцією розподілу $F(x)$.

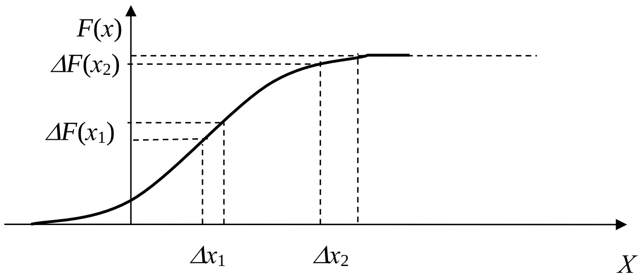


Рисунок 2.4 – Функція розподілу безперервної випадкової величини

Говорити про розподіл імовірностей між значеннями безперервної випадкової величини немає рації, оскільки число її значень нескінченне навіть на невеликому інтервалі, а отже імовірність того, що безперервна випадкова величина прийме одне-єдине своє значення x_i, дорівнює нулю. Тому, характеризуючи безперервну випадкову величину, завжди говорять про влучення її значень у той або інший інтервал. З рисунка 2.4 видно, що імовірність влучення X на інтервал Δx_1 більша ніж на інтервал Δx_2, оскільки приріст функції розподілу $\Delta F(x_1) > \Delta F(x_2)$. Проте порівнювати прирости функції розподілу, користуючись її графіком, незручно. Водночас із математики відомо, що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx},$$

тобто границя відношення прирощення функції F до прирощення її аргументу X при прагненні Δx до нуля є похідною функції F.

Отже, закон розподілу імовірностей безперервних випадкових величин зручніше визначати завданням не функції розподілу $F(x)$, а щільності розподілу імовірностей $f(x)$, яка є похідною від F(x) за x:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{2.3}$$

Передбачається, що $F(x)$ безперервна та диференційована.

Щільністю розподілу випадкової величини X у точці x називають похідну функції розподілу X у цій точці.

На графіку щільності розподілу імовірність зображується площею прямокутника, що спирається на приріст значення випадкової величини X (рис. 2.5).

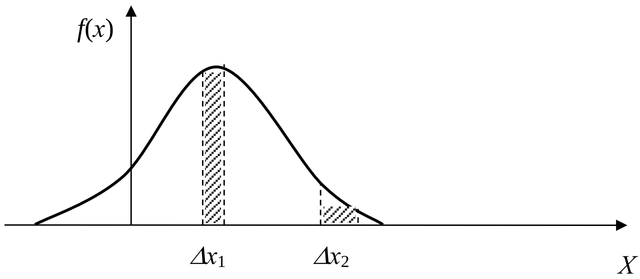


Рисунок 2.5 – Графік щільності розподілу

Властивості щільності розподілу імовірностей:

1. Щільність розподілу невід'ємна, тобто $f(x) \geq 0$ як похідна неубутної функції.

2. Функцію розподілу визначають співвідношенням

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

3. Інтеграл від щільності розподілу в нескінченних межах дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1,$$

де $f(x)dx$ – елемент імовірності, тобто імовірність влучення випадкової величини X на елементарну ділянку dx.

4. Імовірність влучення безперервної випадкової величини на інтервал (x_1, x_2) дорівнює інтегралу щільності розподілу в межах від x_1 до x_2:

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Функцію розподілу $F(x)$ іноді називають інтегральним законом розподілу, а щільність розподілу $f(x)$ – диференціальним законом розподілу.

Приклад 2.2. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2/4, & 0 < x \leq 2. \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу імовірностей, побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

Розв'язання. Знайдемо щільність імовірностей, взявши похідну від функції розподілу на кожному інтервалі:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x/2, & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

побудуємо графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ (рис. 2.6).

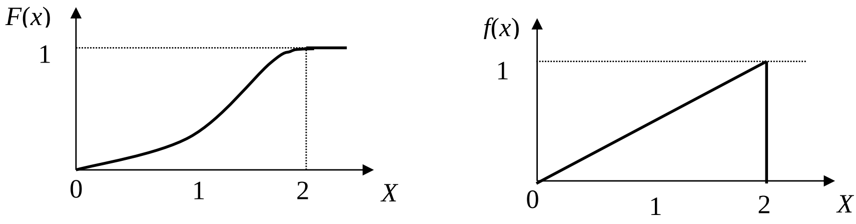


Рисунок 2.6 – Графіки функції розподілу та щільності розподілу

2.3 Моменти випадкової величини. Математичне сподівання. Дисперсія. Середнє квадратичне відхилення

Закон розподілу випадкової величини являє собою певну функцію, що цілком описує випадкову величину з імовірнісної точки зору, тобто є її вичерпною характеристикою та дозволяє визначати імовірності будь-яких подій, пов'язаних із випадковою величиною. Проте у багатьох практичних задачах потрібно отримати компактніше подання інформації про випадкову величину. Для теорії імовірностей та її застосувань велику роль відіграють певні постійні числа, одержувані за певними правилами із законів розподілу випадкових величин і називані **числовими характеристиками** випадкової величини. Найважливішою числовою характеристикою випадкової величини є **математичне сподівання.**

Математичним сподіванням випадкової величини X називають суму добутків всіх можливих її значень на імовірності цих значень:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{2.4}$$

Математичне сподівання тісно пов'язане із середнім значенням випадкової величини, отриманим з великої кількості дослідів.

Нехай зроблено n незалежних дослідів, у кожному з яких X прийняла певні значення x_i, $i = \overline{1,k}$. Припустимо, що x_1 з'явилося n_1 разів, x_2 – n_2 разів, і так далі, і $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Знайдемо середнє арифметичне отриманих значень, позначивши його m^*:

$$m^* = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n}.$$

Очевидно, що $\frac{n_i}{n}$ – частота (статистична імовірність) події $\{X = x_i\}$ p^*, тоді:

$$m^* = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i^*,$$

тобто середнє арифметичне дорівнює сумі добутків значень випадкової величини та їхніх частот.

При збільшенні числа дослідів n частота події p_i^* збігається за імовірністю до імовірності події p_i. Виходить, і середнє арифметичне m^* буде збігатися за імовірністю до математичного сподівання $M[X]$.

Отже, математичне сподівання характеризує середнє значення випадкової величини. Воно є характеристикою її розташування на числовій осі, навколо якого групуються всі можливі значення. Іншими характеристиками положення є мода і медіана.

Модою M_o дискретної випадкової величини називають найімовірніше її значення. Для безперервної випадкової величини модою M_o є значення, якому відповідає найбільше значення її щільності розподілу, інакше кажучи, мода – точка глобального максимуму кривої розподілу безперервної випадкової величини (рис. 2.7).

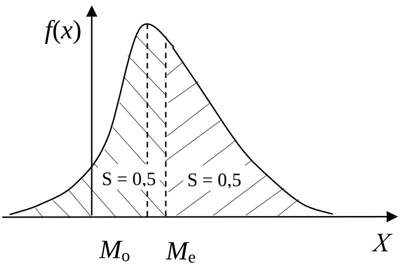


Рисунок 2.7 – Мода M_o та медіана M_e

Медіаною M_e випадкової величини називають таке її значення, що поділяє навпіл площу, обмежену кривою розподілу, тобто

$$P\{X < M_e\} = P\{X > M_e\} = 0{,}5.$$

Узагальненням числових характеристик випадкової величини є так звані **моменти** або математичні сподівання випадкової величини. Розрізняють початкові α і центральні μ моменти.

Початковим моментом s-го порядку дискретної випадкової величини називають математичне сподівання s-го степеня цієї величини:

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i. \qquad (2.5)$$

Для безперервної випадкової величини початковий момент s-го порядку відповідно визначають за формулою:

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\, dx. \quad (2.6)$$

Вирази (2.5) і (2.6) можна об'єднати в один, користуючись знаком математичного сподівання *M:*

$$\alpha_s = M[X^s], \quad (2.7)$$

тобто початковим моментом s-го порядку випадкової величини є математичне сподівання s-го степеня цієї випадкової величини.

При $s = 1$ дістаємо перший початковий момент, або математичне сподівання випадкової величини:

$$\alpha_1 = M[X] = m_x. \quad (2.8)$$

На практиці іноді застосовують другий початковий момент α_2:

$$\alpha_2 = M[X^2]. \quad (2.9)$$

Центральним моментом s-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання s-го степеня центрованої величини X. Як центровану розуміють відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$\dot{X} = X - m_x.$$

Центрування випадкової величини рівнозначне переносу початку відліку її значень від нуля осі X у точку математичного сподівання.

Моменти центрованої випадкової величини називають центральними.

Центральний момент s-го порядку випадкової величини X виражають формулою:

$$\mu_s = M\left[\dot{X}^s\right]. \quad (2.10)$$

Для дискретної випадкової величини X центральний момент s-го порядку:

$$\mu_s = M[\dot{X}^s] = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^s\, p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^s p_i. \quad (2.11)$$

Для безперервної випадкової величини X:

$$\mu_s = M[\dot{X}^s] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}^s f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s f(x) dx. \quad (2.12)$$

Центральний момент першого порядку дорівнює нулю:

$$M[\dot{X}] = M[X - m_x] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x) p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^{n} p_i = 0.$$

Дуже важливою числовою характеристикою випадкової величини є центральний момент другого порядку. Для дискретної випадкової величини X його визначають формулою:

$$\mu_2 = M[\dot{X}^2] = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2\, p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i = D_x. \quad (2.13)$$

Для безперервної випадкової величини:

$$\mu_2 = M[\dot{X}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}^2 f(x) \mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) \mathrm{dx} = D_x. \quad (2.14)$$

Другий центральний момент називають **дисперсією**. Дисперсія випадкової величини є характеристикою розсіювання цієї величини навколо математичного сподівання. Якщо це розсіювання відсутнє, величина D_x дорівнює нулю. Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, що не завжди зручно. Тому як характеристику розсіювання часто використовують середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \tag{2.15}$$

Центральні моменти більш високого порядку можуть характеризувати ступінь асиметрії розподілу випадкової величини, крутість кривої розподілу та ін.

Приклад 2.3. Визначимо числові характеристики дискретної випадкової величини для умов прикладу 3.1. Маємо ряд розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Розв'язання. Визначимо математичне сподівання випадкової величини *X*:

$$m_x = \Sigma x_i \cdot p_i = 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 3/8 + 2 \cdot 3/8 + 3 \cdot 1/8 = 1{,}5.$$

Дисперсію визначимо двома способами:

– за формулою другого центрального моменту:

$$Dx = \Sigma(x_i - m_x)^2 \cdot p_i = (0-1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1-1{,}5)^2 \cdot \frac{3}{8} +$$
$$+(2-1{,}5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (3-1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{8} = 0{,}75.$$

– за формулою, що містить другий початковий момент α_2:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2;$$
$$\alpha_2 = \Sigma x_i^2 \cdot p_i = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = 3.$$
$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = 3 - 1{,}5^2 = 0{,}75.$$

Визначимо середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}855.$$

Приклад 2.4. Нехай задано ряд розподілу:

x_i	1,4	1,8	2,3	3,2
p_i	0,3	0,4	0,2	0,1

Визначити числові характеристики випадкової величини *X*.

Розв'язання. Математичне сподівання випадкової величини *X*:

$$M[X] = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 =$$
$$= 1{,}4 \cdot 0{,}3 + 1{,}8 \cdot 0{,}4 + 2{,}3 \cdot 0{,}2 + 3{,}2 \cdot 0{,}1 = 1{,}92.$$

Дисперсія:

$$D[X] = (x_1 - M[X])^2 \cdot p_1 + (x_2 - M[X])^2 \cdot p_2 + (x_3 - M[X])^2 \cdot p_3 +$$

$$+(x_4 - M[X])^2 \cdot p_4 = (1{,}4 - 1{,}92)^2 \cdot 0{,}3 + (1{,}8 - 1{,}92)^2 \cdot 0{,}4 +$$
$$+ (2{,}3 - 1{,}92)^2 \cdot 0{,}2 + (3{,}2 - 1{,}92)^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}28,$$

або $$M[X^2] = 1{,}4^2 \cdot 0{,}3 + 1{,}8^2 \cdot 0{,}4 + 2{,}3^2 \cdot 0{,}2 + 3{,}2^2 \cdot 0{,}1 = 3{,}966;$$
$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = 3{,}966 - 1{,}922 = 0{,}28.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*:
$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}28} = 0{,}53.$$

Приклад 2.5. Нехай випадкова величина *X* задана функцією розподілу:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x^2}{4{,}0} < x \le 2. \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Визначимо числові характеристики безперервної випадкової величини.

Розв'язання. Знайдемо щільність імовірностей:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{2} < x \le 2. \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Визначимо математичне сподівання *X*:
$$M[X] = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Знайдемо дисперсію *X*:
$$D[X] = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx - (\frac{4}{3})^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx - (\frac{4}{3})^2 = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2 - (\frac{4}{3})^2 = \frac{2}{9}.$$

Властивості числових характеристик.

1. Математичне сподівання невипадкової величини *c* дорівнює їй самій:
$$M[c] = \sum_{i=1}^n c p_i = c \sum_{i=1}^n p_i = c. \tag{2.16}$$

2. Математичне сподівання добутку невипадкової величини *c* на випадкову величину *X* дорівнює добутку цієї невипадкової величини на математичне сподівання випадкової величини *X*:
$$M[cX] = \sum_{i=1}^n c x_i p_i = c \sum_{i=1}^n x_i p_i = cM[X], \tag{2.17}$$
тобто невипадкову величину *c* можна виносити за знак математичного сподівання.

3. Дисперсія невипадкової величини *c* дорівнює нулю:
$$D[c] = M[\dot{c}^2] = M[(c - m_c)^2] = M[0] = 0. \tag{2.18}$$

4. Дисперсія добутку невипадкової величини *c* на випадкову величину *X* дорівнює добутку квадрата цієї невипадкової величини на дисперсію випадкової величини *X*:
$$D[cX] = M[c^2\dot{X}^2] = c^2 M[\dot{X}^2] = c^2 D[X] \tag{2.19}$$

тобто невипадкову величину можна виносити з-під знака дисперсії, зведши її у квадрат.

На практиці дисперсію часто обчислюють як різницю другого початкового моменту α_2 і квадрата математичного сподівання:

$$D[X] = M[\dot{X}^2] = M[(X - M[X])^2] = M[X^2 - 2XM[X] + (M[X])^2],$$

оскільки математичне сподівання суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань, а постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання, маємо:

$$D[X] = M[X^2] - 2M[X]M[X] + (M[X])^2 = M[X^2] - (M[X])^2 . \qquad (2.20)$$

Запитання для самоперевірки

1. Дайте визначення випадкової величини.

2. Яку випадкову величину називають дискретною? Наведіть приклади.

3. Яку випадкову величину називають безперервною? Наведіть приклади.

4. Поясніть, з якою метою в теорії імовірностей розрізняють дискретні та безперервні випадкові величини?

5. Що має на увазі термін «закон розподілу»? У яких формах може бути поданий закон розподілу випадкової величини?

6. Чи може функція розподілу: а) перевищувати одиницю; б) бути від’ємною? Поясніть, чому.

7. Що розуміють як щільність розподілу випадкової величини?

8. Чому не має сенсу поняття щільності розподілу для дискретної випадкової величини?

9. Яка розмірність щільності розподілу?

10. Перелічіть властивості щільності розподілу.

11. Як за рядом розподілу знайти значення функції розподілу?

12. Як виражають імовірність влучення випадкової величини на інтервал значень, якщо відома функція розподілу? Щільність розподілу?

13. Назвіть основні числові характеристики випадкових величин.

14. Як пов’язані одне з одним математичне сподівання та середнє арифметичне значень випадкової величини?

15. Чи є математичне сподівання випадковою величиною?

16. Чи є дисперсія випадковою величиною?

17. Як математичне сподівання та дисперсія характеризують випадкову величину?

18. Чим зручне застосування замість дисперсії середнього квадратичного відхилення?

19. У яких одиницях вимірюють математичне сподівання?

20. У яких одиницях вимірюють дисперсію?

21. Чому дорівнює математичне сподівання невипадкової величини *C*?

22. Які особливості графіка функції розподілу?

23. Як обчислити імовірність влучення випадкової величини у заданий інтервал, якщо відома функція розподілення?

24. Як обчислити імовірність влучення випадкової величині у заданий інтервал, якщо відома щільність розподілу?

25. Надати визначення й формули обчислення таких числових характеристик дискретних і безперервних випадкових величин: математичного сподівання, моментів, дисперсії, середньоквадратичного відхилення.

26. Поняття центрованої випадкової величини. Числові характеристики центрованої випадкової величини.

Задачі для самостійного розв'язання

2.1. Розглядаючи невипадкову величину *C* як окремий вид випадкової, побудувати для неї функцію розподілу, знайти математичне сподівання і дисперсію.

2.2. У партії з 30 виробів є 7 дефектних. З цієї партії випадково обрані три вироби для перевірки їхньої якості. Побудувати ряд розподілу числа відібраних для перевірки виробів (випадкової величини *X*).

2.3. Для умов попередньої задачі побудувати функцію розподілу числа відібраних для перевірки виробів (випадкової величини *X*).

2.4. Випадкова величина *X* задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ (x-2)^2, & 2 \le x \le 3. \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$ і визначити імовірність влучення випадкової величини *X* в інтервал (1,5; 2).

2.5. Для умов задачі 2.2 визначити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

2.6. Для умов прикладу 2.4 визначити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

2.7. До випадкової величини *X* додали невипадкову величину a. Як від цього зміняться її числові характеристики: математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення?

2.8. Випадкову величину X помножили на невипадкову величину a. Як від цього зміняться її числові характеристики: математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення?

2.9. Виконують два незалежних постріли у мішень. Імовірність влучення при кожному пострілі дорівнює p. Розглядають дві випадкові величини: X – різниця між числом влучень і числом промахів і Y – сума числа влучень і числа промахів. Побудувати для випадкових величин X і Y ряд розподілу (для кожної окремо) та знайти їхні числові характеристики.

2.10. Випадкова дискретна величина X задана законом розподілення:

а)

x_i	0	2	4	6
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

б)

x_i	10	15	20
p_i	0,1	0,8	0,1

в)

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Побудувати її функцію розподілу.

Тема 3 НАЙВАЖЛИВІШІ ДЛЯ ПРАКТИКИ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Закони розподілу дискретних випадкових величин (біноміальний розподіл, розподіл Пуассона). Закони розподілу безперервних випадкових величин (експонентний закон розподілу, закон рівномірної щільності). Нормальний закон розподілу випадкових величин.

3.1 Закони розподілу дискретних випадкових величин

Біноміальний закон розподілу. Дискретна випадкова величина X має біноміальний закон розподілу (розподіл Бернуллі), якщо її можливі значення: 0, 1, ..., n, а відповідні імовірності визначають зі співвідношення:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{3.1}$$

де p − імовірність появи події A в одному досліді, $0 < p < 1$;

q − імовірність не появи події A в одному досліді, $q = 1 - p$.

Числові характеристики випадкової величини, розподіленої за біноміальним, законом мають вигляд:

$$m_x = np;\ D_x = npq;\ \sigma_x = \sqrt{npq}. \tag{3.2}$$

Приклад 3.1. У бібліотеці є книги тільки з техніки та математики. Імовірність, що читач візьме книгу з техніки, дорівнює 0,7, а що він візьме книгу з математики – 0,3. Визначити імовірність того, що п’ять читачів поспіль візьмуть книги або тільки з техніки, або тільки з математики, якщо кожний з них бере тільки одну книгу.

Розв’язання. Якщо читач бере книгу з техніки з імовірністю 0,7, то п’ять читачів поспіль візьмуть книги з техніки з імовірністю

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^{5-5} = 0{,}168,$$

а п’ять читачів поспіль візьмуть книги з математики з імовірністю:

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,3^5 \cdot 0,7^{5-5} = 0{,}00243.$$

Закон розподілу Пуассона. Закон Пуассона є граничним для біноміального розподілу. Тобто він відбувається, коли n нескінченно велике, а p дуже мала (його називають законом рідких явищ).

Імовірність того, що за певний час τ відбудеться рівно k подій за законом Пуассона визначається формулою:

$$P(k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{\text{k!}} e^{-\lambda\tau}, \tag{3.3}$$

де λ – число подій в одиницю часу;

τ – інтервал часу.

Отже, коли імовірність p появи події A в кожному окремому досліді мала, а число дослідів n велике, біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини може бути приблизно замінений законом Пуассона.

Математичне сподівання випадкової величини, що має розподіл Пуассона, є середнім числом подій, що потрапляють на ділянку часу довжиною τ:

$$m_x = \lambda\tau. \tag{3.4}$$

Отже, закон розподілу Пуассона визначається одним параметром $a = \lambda\tau$, що є одночасно математичним сподіванням і дисперсією випадкової величини X:

$$D_x = \lambda\tau. \tag{3.5}$$

Розподіл Пуассона з параметром $a = np$ можна приблизно застосовувати замість біноміального, коли число дослідів n дуже велике, а імовірність p дуже мала, тобто в кожному окремому досліді подія A з’являється вкрай рідко. Розподіл Пуассона часто використовують, коли мають справу з числом подій, які з’являються на проміжку часу. Наприклад, число дефектів на новій ділянці шосе довжиною 10 км, число місць витоку води на 100 км водопроводу, число поломок надійного технічного пристрою за певний період часу, наприклад за рік.

Приклад 3.2. На АТС надходять виклики з інтенсивністю $\lambda = 0{,}8$ 1/хв. Визначити імовірність того, що протягом 2 хвилин: а) не надійде жодного виклику; б) надійде рівно один виклик; в) надійде хоча б один виклик.

Розв'язання. Визначимо математичне сподівання числа викликів, що надходять на АТС, яке відповідає інтервалу часу t = 2 хвилини:

$$a = \lambda \cdot t = 0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6.$$

За формулою Пуассона імовірність подій визначиться в такий спосіб:

а) імовірність того, що протягом 2 хвилин не надійде жодного виклику

$$P(A) = P(0) = \frac{1{,}6^0}{0!} e^{-1{,}6} = 0{,}202;$$

б) імовірність того, що протягом 2 хвилин надійде рівно один виклик

$$P(B) = P(1) = \frac{1{,}6^1}{1!} e^{-1{,}6} = 1{,}6 \cdot 0{,}202 = 0{,}323;$$

в) імовірність того, що протягом 2 хвилин надійде хоча б один виклик простіше визначити, використовуючи імовірність протилежної події:

$$P(C) = 1\text{-}P(0) = 1 - 0{,}202 = 0{,}798.$$

Приклад 3.3. Потік вантажних потягів, які прибувають на сортувальну станцію, має інтенсивність λ = 4 потяги на годину. Визначити імовірність того, що протягом 30 хвилин на сортувальну станцію прибуде: а) рівно один потяг; б) хоча б один потяг; в) не менше трьох потягів.

Розв'язання. Визначимо середнє число потягів, які прибувають на сортувальну станцію протягом 30 хвилин:

$$a = \lambda \cdot t = 4 \cdot 0{,}5 = 2.$$

Тоді за формулою Пуассона імовірність подій визначиться в такий спосіб:

а) імовірність того, що за 30 хвилин на сортувальну станцію прибуде рівно один потяг

$$P(A) = \mathrm{P}(1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 0{,}27;$$

б) імовірність того, що за 30 хвилин на сортувальну станцію прибуде хоча б один потяг, простіше визначити, використовуючи імовірність протилежної події, яка полягає в тому, що не прибуде жодного потяга:

$$\mathrm{P}(0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = 0{,}135,$$

тоді $$P(B) = 1 - \mathrm{P}(0) = 1 - 0{,}135 = 0{,}865;$$

в) для визначення імовірності того, що за 30 хвилин на сортувальну станцію прибуде не менше трьох потягів, знову скористаємося імовірністю протилежної події «менше трьох потягів», що означає 0, або 1, або 2 потяги. Імовірності того, що не прибуде жодного потяга та що прибуде рівно один потяг, нами вже визначені. Визначимо імовірність, що за 30 хвилин прибудуть рівно два потяги:

$$\mathrm{P}(2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 0{,}27.$$

Тоді імовірність події *C* визначиться в такий спосіб:

$$P(C) = 1 - \mathrm{P}(0) - (1) - \mathrm{P}(2) = 1 - 0{,}135 - 0{,}27 - 0{,}27 = 0{,}325.$$

Приклад 3.4. Космічні частки, які потрапляють у супутник, утворюють поле з щільністю λ = 1 частка/м^2. Агрегат супутника, який знаходиться в полі часток, займає площу s = 10 см^2. Для виходу з ладу агрегату свідомо досить влучення в нього двох часток. При влученні однієї частки він виходить із ладу з імовірністю *p* = 0,5. Визначити імовірність виходу з ладу агрегату.

Розв'язання. Позначимо подію, що цікавить нас, *A* = {вихід агрегату з ладу}. Цій події відповідають дві гіпотези:

H_1 = {в агрегат потрапила одна частка},

H_2 = {в агрегат потрапили дві частки}.

Умовні імовірності події *A*: $P(A/H_1) = 0{,}5,\ P(A/H_2) = 1$.

Імовірності гіпотез визначимо за законом розподілу Пуассона, параметр якого $a = 1 \cdot 0{,}001 = 0{,}001$:

$$\mathrm{P}(H_1) = P(1) = \frac{0{,}001^1}{1!} e^{-0{,}001} = 0{,}000999,$$

$$\mathrm{P}(H_2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - \frac{0{,}001^0}{0!} e^{-0{,}001} - P(1) =$$

$$= 1 - 0{,}999 - 0{,}000999 = 10^{-6}.$$

За формулою повної імовірності дістанемо імовірність події *A*:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) =$$

$$= 0{,}000999 \cdot 0{,}5 + 10^{-6} \cdot 1 = 5{,}005 \cdot 10^{-4}.$$

3.2 Закони розподілу безперервних випадкових величин

Експонентний закон розподілу. Функцію розподілу *T* обчислюють за формулою:

$$F(t) = P\{T < t\} = 1 - e^{\lambda t}. \quad (3.6)$$

Щільність розподілу *T*, як похідна функції розподілу *F*(*t*), має вигляд:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (3.7)$$

Математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за експонентним законом, зворотне параметру розподілу λ: $m_x = \frac{1}{\lambda}$.

Дисперсія: $D_t = \frac{1}{\lambda^2}$, середнє квадратичне відхилення: $\sigma_x = \frac{1}{\lambda}$.

Імовірність влучення випадкової величини, що має експонентний розподіл, на інтервал значень (α, β): $P\{\alpha \le t \le \beta\} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$.

Приклад 3.5. Є випадкова величина *X* з експонентним законом розподілу. Параметр розподілу λ = 0,4. Визначити числові характеристики та функцію розподілу випадкової величини *X*, а також імовірність того, що вона прийме значення в інтервалі (6, 10).

Розв'язання. Визначимо числові характеристики випадкової величини *X*:

$$m_x = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5; \qquad D_x = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(0{,}4)^2} = 6{,}25; \qquad \sigma_x = m_x = 2{,}5.$$

Щільність розподілу :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0 \\ 0{,}4e^{-0{,}4x} & \text{при} \quad x \ge 0 \end{cases}.$$

Функція розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-0{,}4x} & \text{при} \quad x \ge 0 \end{cases}.$$

Визначимо імовірність того, що випадкова величина *X* прийме значення в інтервалі (6, 10):

$$P\{6 \le X \le 10\} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta} = e^{-0{,}4*6} - e^{-0{,}4*10} =$$
$$= 0{,}0907 - 0{,}0183 = 0{,}0724.$$

Закон рівномірної щільності. Цей закон розподілення мають похибки грубих вимірів. Безперервна випадкова величина *X* має рівномірний розподіл на інтервалі від α до β, якщо її щільність розподілу на цьому інтервалі постійна:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при} \quad x \in (a, b) \\ 0 & \text{при} \quad x \notin (a, b) \end{cases}. \tag{3.8}$$

Математичне сподівання: $m_x = \frac{b+a}{2}$; дисперсія: $D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$; середнє квадратичне відхилення: $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Імовірність влучення значень випадкової величини на інтервал (α, β):

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Функція рівномірного розподілу:

$$F(x) = \frac{x-\alpha}{b-a}. \tag{3.9}$$

Приклад 3.6. Довжину кімнати вимірюють рулеткою з грубими поділками (10 см). Заокруглення проводять до найближчого цілого. *X* – помилка виміру. Знайти її щільність розподілу, функцію розподілу та числові характеристики.

Розв'язання. Довжина кімнати *L* з урахуванням помилки визначиться як $L \pm 5$ см, тобто випадкова величина *X* змінюється в межах $-5 < X < +5$.

Оскільки крива щільності розподілу обмежує площу, що дорівнює одиниці, значення $f(x)$ дістанемо в такий спосіб:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{5-(-5)} = 0{,}1.$$

Математичне сподівання визначимо за формулою

$$m_x = \frac{a+b}{2} = \frac{-5+5}{2} = 0.$$

Дисперсію визначимо за формулою

$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5+5)^2}{12} = 8{,}33; \qquad \sigma_x = \sqrt{8{,}33} = 2{,}89.$$

3.3 Нормальний закон розподілу випадкових величин

Нормальний закон розподілу імовірностей ще називають законом Гаусса, оскільки він запропонований Гауссом під час дослідження помилок точних вимірів (зазначимо, що помилки грубих вимірів мають інший розподіл імовірностей). Закон Гаусса ґрунтується на двох посиланнях:

– помилки різного знака, однакові за розміром, рівноімовірні;

– малі помилки імовірніші за великі (промахи).

Цим двом посиланням відповідає пагорбоподібна крива, яка симетрична щодо середнього значення похибки виміру (рис. 3.1). Це відбиває перше посилання – додатні та від'ємні помилки, що є однакові за розміром, рівноімовірні. Крива нормального закону має найбільше значення на осі симетрії, її значення повільно зменшуються, асимптотично наближуючись до осі X, що відбиває друге посилання – малі похибки імовірніші за великі. Крива нормального закону − це крива щільності розподілу $f(x)$ нормально розподіленої випадкової величини X. Криву нормального розподілу апроксимують виразом:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{3.10}$$

З виразу (3.10) випливає, що нормальний закон розподілу визначається двома параметрами m_x та σ_x, тобто математичним сподіванням і середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X.

На практиці закон нормального розподілу зустрічається дуже часто, оскільки існує велика кількість нормально розподілених випадкових величин. Якщо відомі параметри m_x і σ_x, то із сімейства всіх кривих нормального розподілу виділяють одну з певною щільністю. При $x = m_x$ щільність розподілу максимальна та дорівнює

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}.$$

Оскільки інтеграл від щільності розподілу у нескінченних межах дорівнює одиниці, то крива на рисунку 3.1 обмежує площу, яка дорівнює одиниці, отже чим менше параметр σ_x, тим крутіше спадає крива і тим менше розкидані значення X на числовій осі.

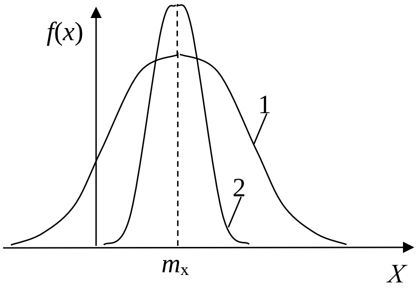


Рисунок 3.1 – Крива нормального розподілу

Визначимо імовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини на інтервал значень (α, β) як інтеграл від щільності розподілу (3.10) у межах від α до β:

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \int_\alpha^\beta f(x)dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} = \begin{vmatrix} t = \dfrac{x-m_x}{\sigma_x} \\ dx = \sigma_x dt \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad (3.11)$$

де $t_1 = \frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}$; $t_2 = \frac{\beta - m_x}{\sigma_x}$.

Оскільки інтеграл (3.11) не можна узяти в елементарних функціях, для визначення імовірностей, пов’язаних із нормально розподіленою випадковою величиною, застосовують функцію Лапласа (інтеграл імовірностей):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (3.12)$$

Значення інтегралу $\Phi(x)$ наведені у довідкових таблицях та у групі статистичних функцій програмного пакету Excel, зокрема, функція ГАУСС(x).

Інтеграл імовірностей має такі властивості:

при $x = 0$ $\qquad \Phi(x) = 0$;

при $x = \infty$ $\qquad \Phi(x) = 0{,}5$;

при $x = -\infty$ $\qquad \Phi(x) = -0{,}5$;

$$\Phi(-x) = -\Phi(x),$$

тобто функція $\Phi(x)$ є непарною функцією.

Отже, усі можливі значення інтеграла імовірностей $\Phi(x)$ належать інтервалу (–0,5; +0,5), до того ж при $|x| > 4$ можна вважати, що $\Phi(x) \approx \pm 0{,}5$.

Якщо певна випадкова величина є наслідком сумування багатьох випадкових слабко взаємно залежних величин, кожна з яких мало впливає на спільну суму, то закон її розподілення зі зростанням числа спостережень прагне до нормального. Це доведено у теорії імовірностей як центральна гранична теорема.

Нормальне розподілення відіграє істотну роль у багатьох галузях науки, зокрема, в теорії похибок, а отже, у математичному опрацюванні геодезичних вимірів.

Імовірність влучення випадкової величини X на інтервал значень (α, β) через інтеграл імовірностей виражають за формулою:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right). \quad (3.13)$$

Скористаємось формулою (3.13) та визначимо функцію розподілу для випадкової величини, розподіленої нормально:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - m_x}{\sigma_x}\right) = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) + 0{,}5. \quad (3.14)$$

Оскільки нормальний розподіл є симетричним, у багатьох завданнях, що пов'язані із вимірами, інтерес становить імовірність потрапляння нормально розподіленої випадкової величини у область значень, яка симетрична щодо її математичного сподівання (рис. 3.2):

$$P\{|x - m| < l\}.$$

Для її визначення також скористаємось формулою (3.13), отримаємо:

$$P\{|x - m_x| < l\} = P\{m_x - l < X < m_x + l\} =$$
$$= \Phi\left(\frac{m_x + l - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{m_x - l - m_x}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma_x}\right). \quad (3.15)$$

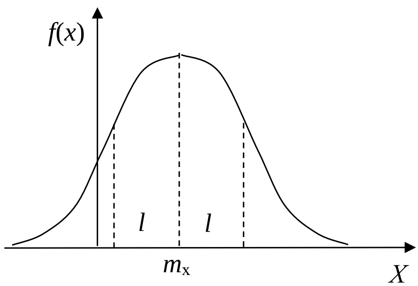


Рисунок 3.2 – Значення, симетричні щодо математичного сподівання

Скористаємось формулою (3.15) та знайдемо імовірності подій:

$$P\{|x - m| < \sigma_x\};$$
$$P\{|x - m| < 2\sigma_x\};$$
$$P\{|x - m| < 3\sigma_x\}.$$

Покладемо у формулі (3.15) $l = \sigma_x$, тоді:

$$P\{|x - m_x| < \sigma\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 \cdot \Phi(1) = 0{,}68.$$

Отже, 68 % значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини лежать у інтервалі ($m_x \pm \sigma_x$).

Нехай $l = 2\sigma_x$, тоді:

$$P\{|x - m_x| < 2\sigma\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{2\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 \cdot \Phi(2) = 0{,}95.$$

Тобто 95 % значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини лежать у інтервалі ($m_x \pm 2\sigma_x$).

Якщо $l = 3\sigma_x$, то:

$$P\{|x - m_x| < 3\sigma\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{3\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 \cdot \Phi(3) = 0{,}997.$$

Тобто 99,7 % значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини лежат у інтервалі ($m_x \pm 3\sigma_x$).

Цю властивість випадкових величин, що розподілені нормально, називають «правилом трьох сигм», його часто використовують під час оцінювання похибок вимірів і, зокрема, геодезичних.

Приклад 3.7. Відомі імовірнісні характеристики нормально розподіленої випадкової величини X: $m = 17$; $\sigma = 0{,}6$. Знайти імовірність події $P(\alpha < X < \beta)$; імовірність того, що $P(|x - m| < \delta)$, якщо $\alpha = 16{,}8$; $\beta = 17{,}2$; $\delta = 0{,}3$.

Розв'язання. Обчислимо імовірність, що X належить інтервалу (16,8; 17,2):

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{17{,}2 - 17}{0{,}6}\right) - \Phi\left(\frac{16{,}8 - 17}{0{,}6}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = 0{,}26.$$

Визначимо імовірність того, що X відхилиться від свого середнього значення m менше ніж на δ:

$$P(|x - 17| < 0{,}3) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0{,}3}{0{,}6}\right) = 0{,}38.$$

Приклад 3.8. Деталь, виготовлена автоматом, вважається придатною, якщо відхилення X контрольованого розміру від номіналу не перевищує 10 мм. Точність виготовлення деталей характеризується $\sigma = 0{,}5$. Вважаючи, що X розподілена нормально, визначити, скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат.

Розв'язання. Інакше кажучи, потрібно визначити імовірність того, що помилка X потрапить у симетричний відносно m_x інтервал, який дорівнює 10 мм:

$$P\{|\dot{X}| < 10\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{10}{5}\right) = 0{,}95.$$

Автомат випускає 95 % придатних деталей.

Приклад 3.9. У нормально розподіленій сукупності 15 % значень X менше 12 і 40 % значень X більше 16,2. Знайти середнє значення та середнє квадратичне відхилення цього розподілу.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що

$$P\{X < 12\} = 0{,}15 \ \text{ і } \ P\{X < 16{,}2\} = 0{,}6.$$

Скористуємось формулою (5.17) та запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{12-m_x}{\sigma_x}\right) + 0{,}5 = 0{,}15 \\ \Phi\left(\frac{16{,}2-m_x}{\sigma_x}\right) + 0{,}5 = 0{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi\left(\frac{12-m_x}{\sigma_x}\right) = -0{,}35 \\ \Phi\left(\frac{16{,}2-m_x}{\sigma_x}\right) = 0{,}1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{12-m_x}{\sigma_x} = -1{,}04 \\ \frac{16{,}2-m_x}{\sigma_x} = 0{,}25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_x = 15{,}386 \\ \sigma_x = 3{,}256 \end{cases}.$$

Параметри розподілу: $m_x = 15{,}386$, $\sigma_x = 3{,}256$.

Приклад 3.10. Коробки з шоколадом упаковує автомат. Їхня середня маса 1,06 кг. Відомо, що 5 % коробок мають масу меншу 1 кг. Визначити відсоток коробок, маса яких перевищує 940 г.

Розв'язання. Визначимо відсоток коробок, маса яких менша за 940 г, тоді виявиться, що інші коробки мають масу, що перевищує 940 г. Скористаємося формулою (3.14):

$$P\{X < 0{,}940\} = F(0{,}940) = \Phi\left(\frac{0{,}94-m_x}{\sigma_x}\right) + 0{,}5.$$

Математичне сподівання відомо з умови задачі $m_x = 1{,}06$, а для визначення невідомого середнього квадратичного відхилення скористаємося тим, що за умовою 5 % коробок мають масу меншу за 1 кг:

$$P\{X < 1{,}0\} = F(1{,}0) = \Phi\left(\frac{1{,}0-1{,}06}{\sigma_x}\right) + 0{,}5 = 0{,}05,$$

звідки отримаємо:

$$\Phi\left(\frac{1{,}0-1{,}06}{\sigma_x}\right) = -0{,}45, \qquad \frac{1{,}0-1{,}06}{\sigma_x} = -1{,}655, \qquad \sigma_x = 0{,}03625.$$

Тоді

$$P\{X < 0{,}940\} = \Phi\left(\frac{0{,}94-1{,}06}{0{,}03625}\right) + 0{,}5 = \Phi(-3{,}31) + 0{,}5 = -0{,}499 + 0{,}5 = 0{,}001.$$

Відсоток коробок, маса яких перевищує 940 г, становить 99,9 %.

Запитання для самоперевірки

1. Яким вимогам мають задовольняти повторні незалежні випробування?

2. Як визначають числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом Бернуллі?

3. Який зв'язок існує між біноміальним і пуассонівським розподілами?

4. Яким умовам має задовольняти випадкова величина, підпорядкована закону Пуассона?

5. Навести формули функції та щільності випадкової величини, розподіленої рівномірно.

6. Навести формули функції розподілу та щільності розподілу випадкової величини, розподіленої за нормальним законом.

7. Навести формули обчислення основних числових характеристик випадкової величини, розподіленої рівномірно.

8. Поняття інтеграла імовірностей. Обчислення імовірності влучення нормально розподіленної випадкової величини у заданий інтервал з використанням інтеграла імовірностей.

9. Як визначають числові характеристики закону розподілу Пуассона?

10. Якими параметрами визначається експонентний закон розподілу випадкової величини?

11. Чому дорівнює щільність імовірності випадкової величини з нормальним законом розподілу?

12. Якими параметрами визначається нормальний закон розподілу випадкової величини?

13. Як змінюється графік нормального закону зі зміною середнього квадратичного відхилення випадкової величини?

14. Як визначити імовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини на задану ділянку?

15. Поясніть імовірнісний смисл параметрів нормального розподілу.

16. Поясніть смисл центральної граничної теореми.

Задачі для самостійного розв’язання

3.1. Випадкова величина X підлегла закону розподілу Пуассона з математичним сподіванням $a = 3$. Побудувати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти імовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше за її математичне сподівання.

3.2. Випадкова величина X підпорядкована експонентному закону розподілу з параметром μ:

$$f(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}.$$

Побудувати криву розподілу, визначити функцію розподілу та знайти імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше за її математичне сподівання.

3.3. Вимірювальний прилад має систематичну помилку 5 м і середню квадратичну помилку 75 см. Яка імовірність того, що помилка виміру не перевершить за абсолютною величиною 5 м?

3.4. Випадкова величина X підпорядкована нормальному закону з математичним сподіванням, що дорівнює нулю. Імовірність влучення цієї випадкової величини на ділянку від $-\alpha$ до $+\alpha$ дорівнює 0,5. Знайти середнє квадратичне відхилення та написати вираз нормального закону.

3.5. У світлофорі на перехресті 1 хвилину горить зелене світло і 0,5 хвилини червоне. Автомобіль під'їжджає до перехрестя у випадковий момент, не пов'язаний з роботою світлофора. Знайти імовірність того, що він проїде перехрестя, не зупиняючись.

3.6. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової дискретної величини, що приймає такі значення з імовірностями:

а)

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

б)

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

3.7. Знайти математичне сподівання відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

3.8. Випадкова величина X визначена на всій числовій осі функцією розподілення виду $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\, x$. Знайти імовірність влучення випадкової величини на інтервал (–1; +1).

3.9. Функція розподілу випадкової безперервної величини X має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sin 2x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}. \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$. Побудувати графіки щільності та функції розподілу.

3.10. Задана щільність розподілу випадкової величини X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sin x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу випадкової величини. Побудувати графік щільності й функції розподілу.

3.11. Випадкова безперервна величина розподілена рівномірно на інтервалі:

а) (–0,5; +0,5);
б) (0; +6);
в) (–10; 0);
г) (+3; +6);
д) (–4; +2).

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середньоквадратичне відхилення цієї випадкової величини.

3.12. Ціна ділення мірної стрічки дорівнює 10 см. Під час деяких вимірів відлік за стрічкою заокруглюють до цілого дециметра. Знайти імовірність того, що при відліку за стрічкою буде зроблено похибку, що перевищує 2 см.

3.13. Ціна ділення шкали вимірювального приладу дорівнює 0,1. Показання приладу заокруглюють до цілого ділення. Найти імовірність того, що похибка заокруглення становитиме: а) менше 0,03; б) більше 0,06.

3.14. Випадкова величина X розподілена нормально з параметрами $a = 0$ і $\sigma^2 = 1$. Знайти імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менші за: а) 0; б) 2,34; в) –1,17.

3.15. Випадкова величина X розподілена нормально з параметрами $a = 3$ і $\sigma^2 = 16$. Знайти імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менші за: а) 5,21; б) 3,0; в) 0; г) –1,12.

3.16. Випадкова величина X розподілена нормально з параметрами $a = 0$ і $\sigma^2 = 1$. Знайти імовірність таких подій:

а) $P\{|x| < 0{,}5\}$;
б) $P\{|x| < 1{,}0\}$;
в) $P\{|x| < 2{,}5\}$;
г) $P\{|x| < 3{,}0\}$.

3.17. Випадкова величина X розподілена нормально з параметрами $a = 0$ і $\sigma^2 = 1$. Знайти імовірність таких подій:

а) $P\{-1{,}25 < x < +0{,}15\}$;
б) $P\{-2{,}13 < x < +1{,}72\}$;
в) $P\{+2{,}10 < x < +3{,}05\}$.

3.18. Випадкова величина X розподілена нормально з параметрами $a = 1{,}7$ і $\sigma^2 = 6{,}3$. Знайти імовірність таких подій:

а) $P\{-1{,}25 < x < +0{,}15\}$;
б) $P\{-2{,}13 < x < +1{,}72\}$;
в) $P\{+2{,}10 < x < +3{,}05\}$.

Тема 4 СИСТЕМА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ

Багатомірна випадкова величина. Кореляційна таблиця. Функція розподілу та щільність розподілу системи випадкових величин. Числові характеристики системи. Кореляційний момент та коефіцієнт кореляції. Багатомірний випадковий вектор. Числові характеристики функцій випадкових величин.

4.1 Багатомірна випадкова величина. Кореляційна таблиця

Під час вивчення випадкових явищ іноді доводиться враховувати взаємодію двох, трьох та більше випадкових величин. Спільне розглядання двох або кількох випадкових величин призводить до поняття системи випадкових величин. Систему кількох випадкових величин X, Y, ..., W позначають (X, Y, ..., W) і називають **багатомірною випадковою величиною**. Під час вивчення багатомірної випадкової величини недостатньо окремого вивчення її складників, тобто окремих випадкових величин, що складають систему, а необхідно враховувати також зв'язки між цими випадковими величинами.

Найбільше практичне значення має система двох випадкових величин. Для характеристики системи двох випадкових величин застосовують закони розподілу системи та числові характеристики системи випадкових величин. Найпростішим є закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин, що являє собою кореляційну таблицю (кореляція від англійського correlation – співвідношення, відповідність), у якої перший рядок містить усі значення випадкової величини X, а перший стовпець – усі значення випадкової величини Y (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Кореляційна таблиця системи двох випадкових величин (X, Y)

y_j \ x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_1	$p\{x_1, y_1\}$	$p\{x_2, y_1\}$	…	$p\{x_n, y_1\}$
y_2	$p\{x_1, y_2\}$	$p\{x_2, y_2\}$	…	$p\{x_n, y_2\}$
…	…	…	…	…
y_m	$p\{x_1, y_m\}$	$p\{x_2, y_m\}$	…	$p\{x_n, y_m\}$

В ij-й клітині таблиці записують імовірність події $\{X = x_i, Y = y_j\}$, тобто імовірність того, що X прийняла значення x_i та одночасно Y прийняла значення y_j.

Сума всіх імовірностей у кореляційній таблиці дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p\{x_i, y_j\} = 1.$$

4.2 Функція розподілу та щільність розподілу системи випадкових величин

Функція розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) дорівнює імовірності того, що випадкова величина X прийме значення, менше за x і випадкова величина Y прийме значення, менше за y:

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}. \tag{4.1}$$

Геометричною інтерпретацією функції розподілу системи двох випадкових величин є імовірність влучення X та Y у нескінченний квадрат з координатами вершини (x, y) (рис. 4.1).

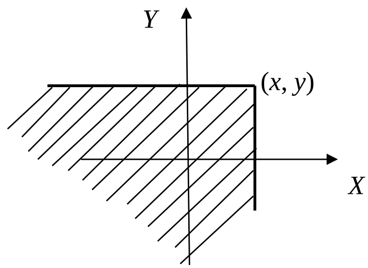


Рисунок 4.1 – Геометрична інтерпретація функції розподілу

Властивості функції розподілу системи:

1. Функція розподілу – неубутна функція, тобто

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \quad \text{якщо } x_2 > x_1;$$

та $$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \quad \text{якщо } y_2 > y_1.$$

2. Функція розподілу дорівнює нулю, якщо хоча б один з аргументів обертається на мінус нескінченність:

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

3. Функція розподілу, якщо хоча б один з аргументів обертається на плюс нескінченність, дорівнює функції розподілу компонента системи, що залишився

$$F(x, +\infty) = F(x);$$
$$F(+\infty, y) = F(y);$$

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

Щільність розподілу імовірностей системи двох випадкових величин (X, Y) $f(x, y)$ становить другу змішану похідну від $F(x, y)$:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}. \qquad (4.2)$$

Тут передбачається, що $F(x, y)$ безперервна та двічі диференційована. Властивості щільності розподілу імовірностей системи двох випадкових величин:

1. Щільність розподілу невід'ємна, тобто $f(x, y) \geq 0$.

2. Функція розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) дорівнює подвійному інтегралу від щільності розподілу системи:

$$F(x, y) = \iint_{-\infty}^{xy} f(x,y)\, dxdy,$$

де $f(x,y)\, dxdy$ – елемент імовірності, що є імовірністю влучення системи в елементарний прямокутник $dxdy$ та дорівнює об'єму паралелепіпеда $f(x)dxdy$.

3. Подвійний інтеграл від щільності розподілу у нескінченних межах дорівнює одиниці:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dxdy = 1.$$

4.3 Числові характеристики системи. Кореляційний момент та коефіцієнт кореляції

За аналогією з числовими характеристиками однієї випадкової величини числовими характеристиками системи двох випадкових величин є початкові та центральні моменти α_{ks} і μ_{ks}, до того ж порядок моменту визначається сумою індексів $k + s$.

Початковим моментом порядку $k + s$ системи двох випадкових величин (X, Y) називають математичне сподівання добутку випадкової величини X у степені k та випадкової величини Y у степені s:

$$\alpha_{k,s} = M[X^k Y^s]. \qquad (4.3)$$

Центральним моментом порядку $k + s$ системи випадкових величин (X, Y) називають математичне сподівання добутку центрованої величини X у степені k та центрованої випадкової величини Y у степені s:

$$\mu_{k,s} = M[\dot{X}^k \dot{Y}^s]. \qquad (4.4)$$

Зокрема, початковими моментами першого порядку є математичні сподівання випадкових компонентів системи X та Y:

$$\alpha_{1,0} = M[X^1 Y^0] = M[X];$$

$$\alpha_{0,1} = M[X^0 Y^1] = M[Y].$$

Центральними моментами другого порядку є дисперсії випадкових компонентів системи *X* та *Y*:

$$\mu_{2,0} = M[\dot{X}^2\dot{Y}^0] = M[\dot{X}^2] = D_x;$$

$$\mu_{0,2} = M[\dot{X}^0\dot{Y}^2] = M[\dot{Y}^2] = D_y.$$

Для опису системи двох випадкових величин окрім математичних сподівань і дисперсій *X* та *Y* застосовують **кореляційний момент** і **коефіцієнт кореляції**. Кореляційним моментом є другий змішаний центральний момент:

$$\mu_{x,y} = M[\dot{X}\dot{Y}] = K_{xy}. \quad (4.5)$$

Для дискретних випадкових величин K_{xy} визначають за формулою:

$$K_{x,y} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\dot{x}_i\,\dot{y}_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)(y_j - m_y)p_{ij}, \quad (4.6)$$

де $p_{ij} = P\{X = x_i\ /\ Y = y_j\}$ – умовна імовірність, тобто імовірність того, що *X* прийме значення x_i за умови, що *Y* прийме значення y_j.

Для безперервних випадкових величин:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_x)(y - m_y)\,f(x,y)dxdy. \quad (4.7)$$

Якщо події $P\{X = x_i\}$ і $P\{Y = y_j\}$ незалежні, то імовірність їхньої спільної появи за теоремою множення дорівнює:

$$p_{ij} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = p_i \cdot p_j.$$

Тоді для кореляційного моменту справедливим є вираз:

$$K_{x,y} = \sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i\,p_i\sum_{j=1}^{m}\dot{y}_j p_j = 0,$$

оскільки співмножники є центральними моментами першого порядку випадкових величин *X* та *Y*, а тому дорівнюють нулю. Отже, кореляційний момент є характеристикою зв'язку між величинами *X* та *Y* й у випадку незалежних *X* та *Y* він дорівнює нулю.

Кореляційний момент K_{xy} у літературі часто називають **коваріацією**.

Як другий змішаний центральний момент кореляційний момент містить також розсіювання випадкових величин *X* та *Y* відносно одна одної. Тому він не може характеризувати тісноту зв'язку між *X* та *Y*. Для визначення тісноти зв'язку між *X* та *Y* використовують коефіцієнт кореляції r_{xy}, який визначають, виключивши з кореляційного моменту розсіювання *X* та *Y*, за формулою:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}. \quad (4.8)$$

Переконаємося в тому, що r_{xy} характеризує ступінь тісноти лінійного зв'язку між двома випадковими величинами. Нехай випадкова величина *Y* функціонально (жорстко) залежить від випадкової величини *X*, до того ж залежність ця є лінійною:

$$Y = ax + b.$$

Визначимо математичне сподівання

$$M[Y] = M[ax + b] = \Sigma(ax_i + b)p_i = a\Sigma x_i p_i + \Sigma bp_i = a[X] + b.$$

Знайдемо дисперсію:

$$D[Y] = M[\dot{Y}^2] = M[(Y - m_y)^2] = M[Y^2 - 2m_y + m_y^2] =$$
$$= M[(ax + b)^2 - 2(am_x + b)(ax + b) + (am_x + b)^2] =$$
$$= M[a^2(X - m_x)^2] = a^2 D_x,$$

і середнє квадратичне відхилення Y $\sigma_y = |a|\sigma_x$.

Визначимо коефіцієнт кореляції для жорстко зв'язаних *X* та *Y*, для чого виразимо $\dot{Y}$ через $\dot{X}$:

$$\dot{Y} = Y - m_y = aX + b - am_x - b = a(X - m_x) = a\dot{X},$$

тоді кореляційний момент дорівнюватиме

$$K_{xy} = M[\dot{Y}\dot{X}] = [a\dot{X}\dot{X}] = aD_x,$$

а коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{aD_x}{\sigma_x |a| \sigma_x} = \frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x |a| \sigma_x} = \frac{a}{|a|}.$$

Отже, якщо зв'язок між *X* та *Y* функціональний, то коефіцієнт кореляції дорівнює 1, до того ж

$$r_{xy} = \begin{cases} -1 \ \text{при} \ \ a < 0 \\ +1 \ \text{при} \ \ a > 0 \end{cases}. \tag{4.9}$$

У загальному випадку коефіцієнт кореляції лежить у межах $-1 \le r_{xy} \le +1$ і дорівнює нулю, якщо *X* та *Y* незалежні.

Дві випадкові величини *X* та *Y* називають корельованими, якщо їхній кореляційний момент відрізняється від нуля. Дві корельовані випадкові величини обов'язково залежні. Якщо кореляційний момент випадкових величин *X* та *Y* дорівнює нулю, то ці випадкові величини некорельовані, але вони можуть опинитись залежними. Отже, поняття **корельованості** та **залежності** двох випадкових величин – різні.

Приклад 4.1. Матриця розподілу випадкового вектора (*X*, *Y*) має вигляд

x_i \ y_i	0	2	5
1	0,1	0	0,2
2	0	0,3	0
4	0,1	0,3	0

Знайти числові характеристики.

Розв'язання. Для визначення числових характеристик випадкової величини *X* побудуємо її ряд розподілу:

x_i	1	2	4
p_i	0,3	0,3	0,4

де $P\{X = 1\} = 0{,}1 + 0 + 0{,}2 = 0{,}3$; $P\{X = 2\} = 0 + 0{,}3 + 0 = 0{,}3$; $P\{X = 4\} = 0{,}1 + 0{,}3 + 0 = 0{,}4$.

Тоді $m_x = \Sigma x_i p_i = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}4 = 2{,}5$;

$$D_x = \Sigma(x_i - m_x)^2 p_i = (1 - 2{,}5)^2 \cdot 0{,}3 + (2 - 2{,}5)^2 \cdot 0{,}3 +$$
$$+ (4 - 2{,}5)^2 \cdot 0{,}4 = 1{,}65;$$
$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{1{,}65} = 1{,}285.$$

Аналогічно побудуємо ряд розподілу випадкової величини *Y*:

y_i	0	2	5
p_i	0,2	0,6	0,2

та визначимо її числові характеристики:

$$m_y = \Sigma y_i p_i = 0 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}2;$$
$$D_y = \Sigma(y_i - m_y)2p_i = (0 - 2{,}2)\, 2 \cdot 0{,}3 + (2 - 2{,}2)\, 2 \cdot 0{,}6 +$$
$$+ (5 - 2{,}2)\, 2 \cdot 0{,}2 = 2{,}54;$$
$$\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{2{,}54} = 1{,}6.$$

Визначимо кореляційний момент системи випадкових величин (*X*, *Y*):

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x_i - m_x)(y_j - m_y)p_{ij} =$$
$$= (1 - 2{,}5) \cdot [(0 - 2{,}2) \cdot 0{,}1 + (2 - 2{,}2) \cdot 0 + (5 - 2{,}2) \cdot 0{,}2] +$$
$$+(2 - 2{,}5) \cdot [(0 - 2{,}2) \cdot 0 + (2 - 2{,}2) \cdot 0{,}3 + (5 - 2{,}2) \cdot 0] +$$
$$+(4 - 2{,}5) \cdot [(0 - 2{,}2) \cdot 0{,}1 + (2 - 2{,}2) \cdot 0{,}3 + (5 - 2{,}2) \cdot 0] = -0{,}9.$$

Обчислимо коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-0{,}9}{1{,}285 * 1{,}6} = -0{,}438.$$

Приклад 4.2. Двічі кидають гральну кістку. Випадкові величини *X* – число появ шістки, *Y* – число появ парної цифри. Описати закони розподілу випадкових величин *X* та *Y*; описати закон розподілу випадкового вектора (*X*, *Y*); установити, залежні *X* та *Y*, або незалежні.

Розв'язання. Знайдемо закон розподілу випадкового вектора (*X*, *Y*), склавши матрицю розподілу, оскільки *X* та *Y* є дискретними.

y_i / x_i	0	1	2	$P\{X = x_i\}$
0	1/4	1/3	1/9	25/36
1	0	1/6	1/9	10/36
2	0	0	1/36	1/36
$P\{Y = y_i\}$	1/4	1/2	1/4	1

Для визначення умовних імовірностей $P_{ij} = P\{X = x_i \,/\, Y = y_j\}$ скористаємось теоремами додавання та множення імовірностей.

Дістанемо ряд розподілу випадкової величини X, для чого підсумовуємо умовні імовірності в кореляційній таблиці за рядками, та Y, для чого підсумовуємо умовні імовірності за стовпцями.

Встановимо, залежні чи незалежні X та Y. Відомо, що у випадку незалежних подій умовна імовірність події дорівнює її безумовній імовірності, але рівність $P\{y_j \,/\, x_i\} = \mathrm{P}\{y_j\}$ не дотримується. Наприклад:

$$P_{22}\{y_j = 1, x_i = 1\} = P\{x_i = 1\} \cdot P\{y_j = 1 \,/\, x_i = 1\} = \frac{1}{6}.$$

Отже, X та Y є залежними.

Приклад 4.3. Для умов попереднього прикладу знайти числові характеристики випадкового вектора (X, Y).

Розв'язання. Визначимо математичні сподівання X та Y:

$$m_x = \Sigma x_i p_i = 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3};$$

$$m_y = \Sigma y_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Визначимо дисперсії X та Y:

$$D_x = \Sigma (x_i - m_x)^2 p_i = \frac{5}{18};$$

$$D_y = \Sigma (y_i - m_y)^2 p_i = \frac{1}{2}.$$

Визначимо кореляційний момент системи випадкових величин (X, Y):

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij} =$$

$$= (0 - \frac{1}{3}) \cdot \left[(0-1) \cdot \frac{1}{4} + (1-1) \cdot \frac{1}{3} + (2-1) \cdot \frac{1}{9}\right] +$$

$$+(1 - \frac{1}{3}) \cdot \left[0 + (1-1) \cdot \frac{1}{6} + (2-1) \cdot \frac{1}{9}\right] +$$

$$+(2 - \frac{1}{3}) \cdot \left[(0-1) \cdot 0 + (1-1) \cdot 0 + (2-1) \cdot \frac{1}{36}\right] = \frac{1}{6}.$$

Визначимо коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{18} * \frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

4.4 Багатомірний випадковий вектор

Якщо кількість випадкових величин у системі становить n, то вводять поняття **багатомірного випадкового вектора**. Як n-мірний випадковий вектор (матрицю-стовпець) розуміють вектор, складниками якого є n випадкових величин, тобто

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T. \qquad (4.10)$$

Найпростішими числовими характеристиками випадкового вектора є математичне сподівання, що дорівнює вектору математичних сподівань складників випадкового вектора:

$$M(X) = (M(X_1), M(X_2), \ldots, M(X_n))^T,$$

та кореляційна матриця

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \ldots & K_{2n} \\ & \ldots \ldots \ldots & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (4.11)$$

Елементами кореляційної матриці є відповідні кореляційні моменти, що характеризують зв'язок між елементами випадкового вектора. Ця матриця є симетричною, тобто квадратною матрицею, в якої усі елементи, що розташовані симетрично до головної діагоналі, дорівнюють один одному ($K_{ij} = K_{ji}$). На головній діагоналі матриці K стоять дисперсії складників випадкового вектора:

$$K_{ii} = D(X_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Елементи матриці K, що не стоять на головній діагоналі, є кореляційними моментами відповідно між і-м та j-м елементами випадкового вектора. Отже ці елементи характеризують зв'язок між і-м та j-м елементами випадкового вектора.

Функцією розподілу випадкового вектора є імовірність одночасного виконання нерівностей $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$, тобто:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}.$$

Щільність розподілу випадкового вектора, складники якого є випадковими безперервними величинами, зв'язана с його функцією розподілу співвідношеннями:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} \geq 0, \qquad (4.12)$$

а функція розподілу виражається через щільність розподілу формулою:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \qquad (4.13)$$

Імовірність влучення випадкової точки (X_1, X_2, ..., X_n) – кінця випадкового вектора – у довільну n-мірну область D виражається n-кратним інтегралом:

$$P\{X \in D\} = \int \overset{\ldots}{\underset{D}{}} \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

що поширений на всю область D.

4.5 Числові характеристики функцій випадкових величин

Функції однієї або кількох випадкових величин доводиться розглядати, коли аргументом певної функції Y є система випадкових величин (X_1, X_2,…, X_n), закон розподілу яких відомий. Функція Y є випадковою величиною, закон розподілу якої необхідно визначити. У більшості задач для визначення числових характеристик функції кількох випадкових величин досить знати тільки числові характеристики аргументів.

1. Математичне сподівання суми двох залежних або незалежних випадкових величин X і Y дорівнює сумі їхніх математичних сподівань:

$$M[X + Y] = \Sigma(x_i + y_i)\cdot p_i = \Sigma x_i p_i + \Sigma y_i p_i = M[X] + M[Y]. \quad (4.14)$$

За методом математичної індукції (узагальнення) для n доданків дістанемо:

$$M[\Sigma X_i] = \Sigma M[X_i],$$

тобто математичне сподівання суми n випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань.

Математичне сподівання лінійної функції кількох випадкових величин

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$$

дорівнює тій самій лінійній функції від їхніх математичних сподівань:

$$M[Y] = M[\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b] = \sum_{i=1}^{n} a_i M[X_i] + b,$$

де a_i і b_i – невипадкові коефіцієнти.

2. Математичне сподівання добутку двох випадкових величин X та Y дорівнює добутку їхніх математичних сподівань плюс кореляційний момент. Запишемо вираз для кореляційного моменту:

$$K_{xy} = M[\dot{Y}\dot{X}] = M[(X - m_x)(Y - m_y)] =$$
$$= M[XY] - M[Xm_y] - M[Ym_x] + M[m_x m_y] =$$
$$= M[XY] - m_x m_y - m_y m_x + m_x m_y = M[XY] - m_x m_y,$$

звідки маємо

$$M[XY] = M[X]\cdot M[Y] + K_{xy}. \quad (4.15)$$

Звідси кореляційний момент можна виразити формулою:

$$K_{xy} = M[XY] - M[X]\cdot M[Y]. \quad (4.16)$$

Якщо випадкові величини X та Y некорельовані, математичне сподівання добутку дорівнює добутку їхніх математичних сподівань:

$$M[XY] = M[X]\cdot M[Y],$$

або для n незалежних співмножників:

$$M[\textstyle\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} M[X_i].$$

3. Визначимо дисперсію суми двох випадкових величин X та Y:

$$D[X + Y] = M[((X + Y) - M(X + Y))^2] =$$

$$= M[X^2 + 2XY + Y^2 - 2(X+Y)\,M(X+Y) + M^2\,(X+Y)] =$$
$$= M[X^2 + 2XY + Y^2] - 2M(X+Y)M(X+Y) + M^2\,(X+Y) =$$
$$= M[X^2 + 2XY + Y^2] - (M[X] + M[Y])^2 =$$
$$= M[X^2] + M[Y^2] - M^2\,[X] - 2M[X]\cdot M[Y] - M^2[Y] =$$
$$= D[X] + D[Y] + 2M[XY] - 2\,M[X]\,M[Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}.$$

Отже, дисперсія суми двох випадкових величин *X* та *Y* дорівнює сумі їхніх дисперсій плюс подвоєний кореляційний момент:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}. \qquad (4.17)$$

Дисперсію суми кількох випадкових величин виражають формулою

$$D[\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + 2\sum_{i<j} K_{x_i x_j},$$

де $K_{x_i x_j}$ – кореляційний момент випадкових величин X_i та X_j.

Якщо X_i – некорельовані випадкові величини, то дисперсія їхньої суми дорівнює сумі їхніх дисперсій, тоді для суми *n* незалежних випадкових величин дисперсія визначиться в такий спосіб:

$$D[\Sigma X_i] = \Sigma D[X_i],$$

звідки середнє квадратичне відхилення суми $\sigma_\Sigma = \sqrt{\Sigma\sigma_i^2}$.

Дисперсія лінійної функції кількох випадкових величин

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$$

виражається формулою

$$D[Y] = D[\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i] + 2\sum_{i<j} a_i a_j K_{x_i x_j}. \qquad (4.18)$$

Якщо X_i – некорельовані випадкові величини, то

$$D[Y] = D[\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i].$$

4. Дисперсію добутку двох незалежних випадкових величин *X* та *Y* знайдемо за формулою

$$D[XY] = D[X]\cdot D[Y] + M^2[X]\cdot D[Y] + M^2[Y]\cdot D[X]. \qquad (4.19)$$

Приклад 4.4. На вимірювальний прилад надходить випадковий вектор (*X*, *Y*) з наступними характеристиками: $m_x = -1$; $m_y = 1$; $\sigma_x = 2$; $\sigma_y = 3$; $r_{xy} = 0{,}5$. На виході приладу вимірюється величина $Z = (X - Y)^2$. Визначити математичне сподівання випадкової величини *Z*.

Розв'язання. Оскільки коефіцієнт кореляції не дорівнює нулю, випадкові величини *X* та *Y* корельовані. Перетворимо вираз для *Z*:

$$M[Z] = M[(X-Y)^2] = M[X^2 - 2XY + Y^2] =$$

математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань:

$$= M[X^2] - M[2XY] + M[Y^2] =$$

другий початковий момент запишемо як суму дисперсії та квадрата математичного сподівання та врахуємо, що математичне сподівання добутку корельованих випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань плюс кореляційний момент:

$$= D_x + M^2[X] - 2(M[X] \cdot M[Y] + K_{xy}) + D_y + M^2[Y] =$$
$$= 2^2 + (-1)^2 - 2 \cdot (-1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 0{,}5) + 3^2 + 1^2 = 11.$$

Приклад 4.5. Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини *Z*, якщо Z = 3 + 4 · (X – Y). Числові характеристики: $m_x = -2$; $m_y = 4$; $D_x = 4$; $D_y = 9$; $r_{xy} = -0{,}5$.

Розв'язання. Оскільки коефіцієнт кореляції не дорівнює нулю, випадкові величини *X* та *Y* корельовані. Визначимо математичне сподівання *Z*:

$$M[Z] = M[3 + 4 \cdot (X - Y)] = M[3] + 4 \cdot M[X + Y] =$$
$$= 3 + 4m_x + 4m_y = 3 + 4 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 = 11.$$

Знайдемо дисперсію *Z*:

$$D[Z] = D[3 + 4(X - Y)] = D[3] + 16 \cdot D[X + Y] =$$
$$= 0 + 16 \cdot (D[X] + D[Y] + 2K_{xy}) =$$
$$= 16 \cdot [4 + 9 + 2 \cdot (-0{,}5) \cdot 4 \cdot 9] = 112,$$

де $Kxy = r_{xy} \cdot \sqrt{D_x D_y}$.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma_z = \sqrt{D_z} = \sqrt{112} = 10{,}6.$

Приклад 4.6. Випадкові величини *X* і *Y* незалежні й мають наступні характеристики: $m_x = 1$; $m_y = 2$; $\sigma_x = 1$; $\sigma_y = 2$. Обчислити математичне сподівання випадкових величин:

а) $U = X^2 + 2Y^2 - XY - 4X + Y + 4$;

б) $V = (X + Y - 1)^2$.

Розв'язання. 1. Визначимо математичне сподівання випадкової величини *U*:

$$M[U] = M[X^2] + 2M[Y^2] - M[XY] - 4M[X] + M[Y] + M[4] =$$
$$= D[X] + M^2[X] + 2(D[Y] + M^2[Y]) - M[X] \cdot M[Y] - 4M[X] + M[Y] + 4 =$$
$$= 1 + 1 + 2 \cdot (4 + 4) - 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 2 + 4 = 18;$$

2. Визначимо математичне сподівання випадкової величини *V*:

$$M[V] = M[(X + Y - 1)^2] = M[X^2 + 2Y - 2 + Y^2 - 2Y + 1] =$$
$$= M[X^2] + 2M[Y] - M[2] + M[Y^2] - 2M[Y] + M[1] =$$
$$= D[X] + M^2[X] + 2M[Y] - 2 + D[Y] + M^2[Y] - 2M[Y] + 1 =$$
$$= 1 + 1 + 4 - 2 + 4 + 4 - 4 + 1 = 9.$$

Приклад 4.7. Є випадкова величина *X* із математичним сподіванням m_x і дисперсією D_x. Знайти математичне сподівання та дисперсію наступних випадкових величин:

а) $Y = -X$;

б) $Z = X + 2Y - 1$;

в) $U = 3X - Y + 2Z - 3$.

Розв'язання. 1. Визначимо математичне сподівання випадкової величини *Y*:

$$M[Y] = M[-X] = -m_x;$$

знайдемо дисперсію випадкової величини *Y*:

$$D[Y] = D[-X] = (-1)^2 D_x = D_x.$$

2. Визначимо математичне сподівання випадкової величини *Z*:

$$M[Z] = M[X + 2Y - 1] = m_x - 2m_x - 1 = -m_x - 1.$$

Знайдемо дисперсію випадкової величини *Z* з урахуванням того, що математичне сподівання добутку корельованих випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань плюс кореляційний момент:

$$D[Z] = D[X + 2Y - 1] = D_x + 4D_y + 2K_{xy}$$

кореляційний момент запишемо як різницю другого початкового моменту та добутку математичних сподівань і дістанемо:

$$K_{xy} = M[X2Y] - M[X] \cdot M[2Y] = M[X(-2X)] - M[X] \cdot M[2Y] =$$
$$= -2M[X^2] + 2M^2[X] = -2(M[X^2] - M^2[X]) = -2D_x,$$

тоді дисперсія *Z:*

$$D[Z] = D_x + 4D_x - 4D[X] = D[X].$$

3. Визначимо математичне сподівання випадкової величини *Z*:

$$M[U] = M[3X - Y + 2Z - 3] = 3m_x - m_y + 2m_z - 3 =$$
$$= 3m_x + m_x + 2(-m_x - 1) - 3 = 2m_x - 5;$$

знайдемо дисперсію випадкової величини *U* з урахуванням формули (4.18)

$$D[U] = D[3X - Y + 2Z - 3] = D[3X] + D[-Y] + D[2Z] + 2(K_{xy} + K_{yz} + K_{xz});$$

визначимо кореляційні моменти:

$$K_{xy} = M[3X(-Y)] - M[3X] \cdot M[-Y] =$$
$$= 3M[X^2] - 3M[X] \cdot M[X] = 3M[X^2] - 3M^2[X] = 3D_x;$$
$$K_{xz} = M[3X2Z] - M[3X] \cdot M[2Z] =$$
$$= M[3X2(X + 2Y - 1)] - M[3X] \cdot M[2X + 4Y - 2] =$$
$$= M[6X^2 - 12X^2 - 6X)] - 3M[X] \cdot (2M[X] + 4M[-X] - 2) =$$
$$= M[6X^2] - 12M[X^2] - 6M[X] - 6M^2[X] + 12M^2[X] + 6M[X] =$$
$$= -6M[X^2] + 6M^2[X] = -6(M[X^2] - M^2[X]) = -6D_x.$$
$$K_{yz} = M[-Y2Z] - M[-Y] \cdot M[2Z] =$$
$$= M[2X(X + 2Y - 1)] - M[X] \cdot M[2(X + 2Y - 1)] =$$
$$= M[2X^2 - 4X^2 - 2X] - M[X] \cdot (2M[X] - 4M[X] - 2) =$$
$$= 2M[X^2] - 4M[X \;\; 2] - 2M[X] - 2M^2[X] + 4M^2[X] + 2M[X] =$$
$$= -2M[X^2] + 2M^2[X] = -2(M[X^2] - M^2[X]) = -2D_x.$$

Обчислимо тепер дисперсію випадкової величини *U*:

$$D[U] = D[3X - Y + 2Z - 3] =$$

$$= 9D[X] + D[X] + 4D[X] + 2(3D_x - 6D_x - 2D_x) =$$
$$= 9D_x + D_x + 4D_x + 6D_x - 12D_x - 4D_x = 4\,D_x.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що являє собою багатомірна випадкова величина?

2. Що являє собою функція розподілу системи двох випадкових величин? Перелічіть її властивості.

3. Перелічіть числові характеристики системи двох випадкових величин.

4. Що характеризує кореляційний момент системи двох випадкових величин?

5. Для чого використовують коефіцієнт кореляції?

6. Перелічіть теореми про числові характеристики.

7. Чому дорівнює середнє квадратичне відхилення добутку невипадкової величини С на випадкову величину X?

8. Сформулюйте теорему додавання математичних сподівань для випадкових величин: а) залежних і незалежних; б) корельованих і некорельованих.

9. Чому дорівнює математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин?

10. Що називають початковими та центральними моментами двомірної випадкової величини?

11. Что називають кореляційним моментом (коваріацією) двомірної випадкової величини? Наведіть формулу для розрахунку коваріації.

12. Як обчислити коефіцієнт кореляції?

13. Які межі змінення коефіцієнта кореляції?

14. Напишіть формулу щільності двомірного нормального розподілу та поясніть сутність параметрів, що входять до формули.

15. Чому дорівнює математичне сподівання суми випадкових величин? За яких умов це правило діє?

16. Чому дорівнює математичне сподівання постійної величини?

17. За яких умов математичне сподівання добутку дорівнює добутку математичних сподівань?

18. Чому дорівнює дисперсія постійної величини?

19. Чи можна виносити постійну величину за знак дисперсії? Якщо так, то як?

20. За яких умов дисперсія суми випадкових величин дорівнює сумі дисперсій?

21. Як обчислити дисперсію добутку двох незалежних центрованих випадкових величин?

Задачі для самостійного розв'язання

4.1. Два стрільці незалежно один від одного проводять по одному пострілу, кожний по своїй мішені. Випадкова величина X – число влучень першого стрільця, Y – число влучень другого стрільця. Імовірність влучення в мішень для першого стрільця дорівнює $p_1 = 0{,}9$, а для другого $p_2 = 0{,}8$. Побудувати функцію розподілу системи випадкових величин X і Y.

4.2. Для умов попереднього прикладу визначити числові характеристики випадкового вектора (X, Y).

4.3. Незалежні випадкові величини X і Y розподілені за нормальними законами з параметрами $m_x = 2$; $m_y = -3$; $\sigma_x = 1$; $\sigma_y = 2$. Визначити імовірність події $A = \{X < m_x$ і $Y < m_y\}$.

4.4. Відомі математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X: $m_x = 2$; $D_x = 3$. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y = 3X - 2$.

4.5. Випадкові величини X і Y мають математичні сподівання $m_x = -1$, $m_y = 1$ і дисперсії $D_x = 4$ і $D_y = 9$. Знайти математичне сподівання випадкової величини $Z = 3XY + 5$.

4.6. Випадкові величини X_1 та X_2 незалежні, мають однакові математичні сподівання a, і дисперсії σ^2. Отримані нові випадкові величини $Y_1 = X_1 + X_2$ та $Y_2 = X_1 + 2X_2$. Знайти коефіцієнт кореляції.

4.7. Випадкові величини X та Y пов'язані співвідношенням $\alpha X + \beta Y = \gamma$, де α, β і γ – постійні величини. Знайти коефіцієнт кореляції r_{XY}.

4.8. Випадкові величини X_1, X_2, ..., X_n незалежні, мають однакові математичні сподівання $M(X_i) = a$ і однакові дисперсії $D(X_i) = \sigma^2$. Отримана нова випадкова величина $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Знайти коефіцієнт кореляції $r_{X_1 X_2}$.

4.9. Випадкові величини X_1, X_2, ..., X_n незалежні, мають однакові математичні сподівання $M(X_i) = a$ і однакові дисперсії $D(X_i) = \sigma^2$. Знайти коефіцієнт кореляції між середньоарифметичним цих випадкових величин та X_1.

4.10. Визначити коефіцієнт кореляції між кутом нахилу та місцем нуля, якщо значення відліків при крузі право та крузі ліво незалежні й отримані з однаковими дисперсіями. Визначити коефіцієнт кореляції між місцем нуля та відліком при крузі право.

4.11. Випадкові величини X_1 і X_2 незалежні, однаково розподілені з математичним сподіванням a і дисперсією σ^2. Знайти коефіцієнт кореляції між сумою та різністю цих величин.

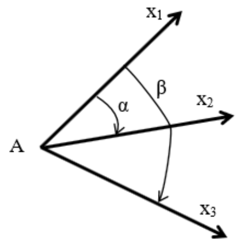


Рисунок 4.2 – До задачі 4.12

4.12. На пункті тріангуляції A (рис. 4.2) рівноточно та незалежно один від одного виміряні три напрями X_1, X_2 та X_3. Обчислені кути α і β. Знайти коефіцієнт кореляції $r_{\alpha\beta}$, якщо дисперсія виміру кожного напряму дорівнює σ^2, а математичні сподівання значень цих напрямів відповідно дорівнюють a_1, a_2 і a_3.

4.13. Випадкові величини X_1 і X_2 незалежні, однаково розподілені з математичним сподіванням a і дисперсіями σ_1^2 і σ_2^2. Знайти коефіцієнт кореляції між сумою та різністю цих величин.

4.14. Випадкові величини X_1 та X_2 лінійно залежні, при цьому коефіцієнт кореляції дорівнює $r_{x_1 x_2}$. Дисперсії цих величин відповідно дорівнюють $D(X_1) = \sigma_1^2$; $D(X_2) = \sigma_2^2$. Знайти дисперсію суми та різниці цих величин.

Тема 5 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ. ОЦІНКИ ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК. ПОХИБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРІВ

Основні поняття та визначення. Класифікація вимірів. Оцінки числових характеристик та їхні властивості. Спроможність, незміщеність та ефективність оцінок. Структура похибок вимірів. Перевірка статистичних гіпотез. Оцінювання точності результатів вимірів за дійсними похибками. Критерії точності вимірів. Інтервальне оцінювання числових характеристик.

5.1 Основні поняття та визначення

Коли мова йде про геодезичні виміри, завжди мають на увазі вимірювання фізичних величини, що є параметрами просторового розташування об'єктів. Зокрема, це горизонтальні напрями й кути, відстані, перевищення, площі об'єктів, координати точок на поверхні Землі та ін.

Введемо низку понять та визначень.

Як **фізичну величину** розуміють одну з властивостей фізичного об'єкта, яка притаманна в якісному аспекті багатьом фізичним об'єктам, але в кількісному аспекті є індивідуальною для кожного з них. Прикладами фізичної величини є довжина, ширина, висота, маса, термін служби, швидкість руху будь-якого об'єкта та ін.

Розмір фізичної величини – кількісна визначеність фізичної величини, що притаманна конкретному об’єкту, системі, явищу або процесу.

Значення фізичної величини – подання розміру фізичної величини у вигляді певного числа прийнятих для нього одиниць виміру.

Числове значення фізичної величини – певне число, що входить у значення величини. Наприклад, значення перевищення між точками A і B дорівнює 12,63 м.

Істинне значення фізичної величини – значення фізичної величини, яке ідеально характеризує у якісному та кількісному аспектах фізичну величину. Зауважимо, що істинне значення фізичної величини можна отримати тільки як результат нескінченого числа вимірів із нескінченим вдосконаленням методів та засобів вимірів.

Дійсне значення фізичної величини – значення фізичної величини, що отримане експериментальним шляхом та є настільки близьким до істинного значення, що у поставленій вимірювальній задачі його можна застосувати замість істинного.

Вимірювання – сукупність операцій із застосування технічного засобу, який зберігає одиницю фізичної величини та забезпечує визначення співвідношення (у явному або неявному вигляді) вимірюваної величини з її одиницею та отримання значення цієї величини.

Принцип вимірювання – теоретичне положення, що лежить в основі отримання результату виміру.

Метод вимірювання – прийом або сукупність прийомів, що дозволяють отримати результат виміру відповідно до принципу виміру, що реалізується.

Об’єкт вимірювання – тіло (фізична система, процес, явище та ін.), що характеризується однією або кількома вимірюваними фізичними величинами.

Засіб виміру – технічний пристрій, що призначений для вимірів та має нормовані метрологічні характеристики, які відтворюють та зберігають одиницю фізичної величини, розмір якої приймають незмінним (у межах встановленої похибки) у межах відомого інтервалу часу, отримання у процесі виміру оцінки властивостей об’єкта.

Результат виміру – значення величини, яке отримане шляхом її вимірювання.

Будь-який процес виміру відбувається за наявності п’яти складників (факторів) вимірювання:

– об’єкт виміру – що вимірюють;

– суб’єкт виміру – хто вимірює;

– засіб виміру – чим вимірюють;

– метод виміру – як вимірюють;

– зовнішнє середовище – де вимірюють.

У процесі вимірювання конкретний зміст і стан факторів вимірювання визначають **умови вимірів**.

Два комплекси умов вважатимемо однаковими, якщо у обох випадках:

– об'єкти вимірів були одного й того самого роду та за час вимірів коливались у одних і тих самих межах;

– суб'єкти вимірів мали однакову кваліфікацію;

– застосовувались засоби вимірів одного й того самого класу точності;

– виміри виконувались за однією і тією самою методикою;

– зовнішнє середовище, у якому виконувались виміри, характеризувалось одними й тими самими значеннями чинників.

5.2 Класифікація вимірів

Виміри класифікують за низкою ознак.

За фізичним виконанням:

– прямі виміри, у яких значення вимірюваної величини отримують **безпосереднім порівнянням** з фізичною величиною того самого роду, наприклад, вимірювання довжини лінії рулеткою або мірною стрічкою;

– непрямі, у яких значення вимірюваної величини отримують з обчислень, де як вихідні застосовують результати інших прямих вимірів, наприклад, вимірювання довжини лінії світлодалекоміром. У цьому випадку безпосередньо вимірюється час t проходження світлового сигналу від далекоміру до відбивача та назад, а потім обчислюється у рахунковому пристрої приладу довжина лінії $S = \frac{1}{2} vt$, де v – швидкість світла.

За родом:

– однорідні виміри, які виконують для однорідних фізичних величин, наприклад, геометричне нівелювання, що полягає у вимірюванні відрізків від земної поверхні до горизонтального візирного проміня нівеліру;

– різнорідні виміри, наприклад визначення перевищення методом тригонометричного нівелювання, коли вимірюють лінії (горизонтальні прокладання або нахилені відстані) та кути нахилу.

За кількістю:

– необхідні виміри надають тільки одне значення кожної вимірюваної величини;

– додаткові або надлишкові виміри виконують з метою отримання декількох значень вимірюваної величини для контроля та виключення грубих похибок та підвищення якості результатів вимірів.

За точністю:

– рівноточні виміри, що виконують в однакових умовах;

– нерівноточні виміри, що виконують у випадках, коли хоча б один із п'яти складників процесу виміру істотно відрізняється від аналогічного складника інших вимірів, наприклад вимірювання кутів у тріангуляції різних класів.

За зв'язками:

– незалежні виміри, якщо їх виконують у різних умовах та немає підстав вважати, що ці умови однаково впливатимуть на результати вимірів;

– залежні виміри, якщо результати вимірювань можуть мати спільні властивості.

За часом виконання:

– синхронні виміри, для яких моменти виміру збігаються, наприклад GPS-виміри, що виконують двома приймачами, які розташовані на двох різних точках, під час проведення вимірів у диференційному режимі;

– виміри, зсунуті за часом, для яких моменти вимірів відрізняються на істотну величину.

За місцем виконання:

– зосереджені виміри, місця виконання яких розташовані близько одне від одного;

– розосереджені виміри, місця виконання яких розташовані далеко одне від одного.

Зауважимо, що класична теорія похибок не враховує залежність, синхронність та зосередженість за місцем виконання, але сучасні методи вимірювань, насамперед електронні, вимагають врахування цих особливостей вимірювань.

Вибір засобів геодезичних вимірів та вивчення їх технічних характеристик є предметом вивчення геодезії, тому нагадаємо, що в засобах геодезичних вимірів (геодезичних приладах) реалізують різні фізичні явища, зокрема, це оптичні, оптико-механічні, оптико-електронні, електромагнітні, імпульсні, фазові, супутникові, допплерівські, інтерференційні та інші явища.

Докладніше розглянемо **методи геодезичних вимірів**, що відповідають принципам вимірів, які забезпечують отримання результатів із заданою точністю. У геодезії розрізняють такі методи вимірів:

– метод **прямих** геодезичних вимірів, за якого значення вимірюваної геодезичної величини отримують безпосередньо;

– метод **непрямих** геодезичних вимірів, за якого значення геодезичної величини визначають як функцію інших величин, отриманих шляхом безпосередніх вимірів;

– **комбінований** метод вимірів полягає в отриманні не лише геодезичних величин, розташованих між суміжними пунктами, але й їхніх різних поєднань (комбінацій);

– метод **прийомів** полягає у неодноразових вимірюваннях однієї і тієї самої геодезичної величини за єдиною методикою;

– метод **кругових прийомів** полягає у вимірюванні кутів шляхом послідовного спостерігання візирних цілей, що розташовані за колом повторним спостеріганням першого (початкового) напряму;

– метод **подвійних вимірів** полягає у виконанні однорідних геодезичних вимірів серіями, що складаються з двох прийомів (спостережень);

– **метод повторень** (метод реітерацій) полягає у n-кратному визначенні значення вимірюваної геодезичної величини та подальшому обчисленні визначеного значення;

– **метод вимірів «уперед»** полягає у спостеріганні за точкою, передньою за ходом;

– **метод вимірів « середини»** полягає в послідовному спостеріганні суміжних пунктів (точок) ходу, що прокладається, за допомогою приладу, який розташований між ними;

– **метод вимірів «через точку»** виконують шляхом встановлення вимірювального приладу тільки на парних або тільки на непарних пунктах ходу;

– **багатоштативний метод** вимірів полягає у зменшенні похибок центрування шляхом встановлення одночасно на кількох суміжних пунктах мережі штативів із підставками для розміщення у них візирних цілей або приладу. Найпоширений у практиці триштативний метод вимірів.

Виміри також класифікують як необхідні иа додаткові або надлишкові. Виміри називають **необхідними**, якщо вони дають тільки один результат прямого виміру, непрямого виміру, або тільки одне значення функції вимірюваних величин. Прикладами необхідних вимірів є одноразовий вимір довжини лінії мірною стрічкою або далекоміром, вимір горизонтального кута теодолітом за одним напівприйомом, визначення тахеометром перевищення зі станції на рейковий пікет, визначення координат точки засічкою за двома вимірюваними кутами, а також n – 1 виміряних ліній і кутів у теодолітному ході з n точок. Необхідні неможливо проконтролювати за точністю, тому немає можливості оцінити їхню якість.

Надлишковими називають усі виміри, які виконані понад необхідні. Вони дозволяють отримати два й більше значень вимірюваної величини або два й більше значень функції.

Надлишкові виміри дають можливість:

– здійснити контроль вимірів;

– оцінити точність виконаних вимірів;

– набути таких наближених значень вимірюваних величин, які у загальному випадку є ближчими до дійсного значення за окремо отриманий результат необхідного виміру.

На процес виміру переважно впливають такі чинники, що взаємодіють один з одним:

– специфіка об’єкта виміру;

– психофізіологічний стан і кваліфікація суб’єкта виміру, тобто виконавця;

– особливості вимірювального приладу;

– особливості методу вимірювання, який визначають за вимірювальним процесом;

– специфіка зовнішнього середовища, у якому перебігає процес вимірювання.

Завершальною процедурою в процесі геодезичних вимірів є математична обробка отриманих результатів, яка полягає у оцінюванні їхньої точності шляхом проведення обчислювальних операцій із виміряними значеннями геодезичних величин за певним алгоритмом. Математична обробка геодезичних вимірів ґрунтується на математичних методах і моделях теорії імовірностей, математичної статистики й теорії похибок. У процесі математичної обробки результатів вимірів можна виділити такі етапи:

– систематизація та класифікація результатів вимірів;

– виявлення структури похибок вимірів;

– обчислення числових значень похибок вимірів;

– обчислення поправок і ваг функцій результатів вимірів;

– оцінювання точності результатів вимірів;

– оцінювання надійності результатів вимірів.

5.3 Оцінки числових характеристик та їхні властивості

Методи обробки результатів спостережень випадкових явищ із метою виявлення наявних у них закономірностей розробляє математична статистика. Збір статистичних даних проводять за спеціальними правилами статистичного спостереження, основним з яких є подання результатів спостережень у числовому вигляді. Усю сукупність числових характеристик об’єктів або явищ, що підлягають вивченню, називають **генеральною сукупністю**. Але для вивчення генеральної сукупності найчастіше не застосовують суцільне обстеження із вивченням її кожного елементу, а зазвичай використовують вибірковий метод, що полягає у вивченні характеристик обмеженої кількості елементів генеральної сукупності.

Сутність **вибіркового методу** полягає в тому, що висновки, зроблені на основі вивчення частини сукупності, якою є **випадкова вибірка**, можна поширити на всю генеральною сукупність.

Генеральну сукупність зазвичай розглядають як випадкову величину X, а кожен елемент сукупності – як реалізацію цієї випадкової величини, до того ж імовірності появи будь-якого з цих елементів випадкової вибірки у результаті досліду вважають однаковими.

Числові характеристики генеральної сукупності називають генеральними параметрами. До них належать математичне сподівання та дисперсія, які є параметрами розподілу досліджуваної сукупності. Їхні теоретичні значення ніколи не відомі, але їх можна оцінити за випадковою вибіркою. Числову характеристику, отриману в результаті обробки випадкової вибірки, називають **оцінкою параметра**.

Будь-які значення шуканого параметра розподілу, зокрема математичного сподівання та дисперсії, обчислені на основі обмеженої кількості дослідів, містять елемент випадковості. Отже оцінки параметрів є наближеними випадковими їх значеннями.

Зокрема, математичне сподівання випадкової величини X становить її середнє значення. З n дослідів оцінку математичного сподівання визначають як середнє арифметичне m_x^*.

$$m_x^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i, \qquad (5.1)$$

де n – кількість дослідів;

$\frac{1}{n}$ – частота появи значення x_i у кожному з n дослідів.

Статистичну оцінку дисперсії випадкової величини X визначають як середнє арифметичне суми квадратів відхилень X від її середнього m_x^*:

$$D^*[X] = \frac{\sum (x_i - m_x^*)^2}{n}. \qquad (5.2)$$

Статистичні оцінки числових характеристик, які отримані з обмеженої кількості дослідів n, є лінійними функціями n незалежних випадкових величин, тому вони самі є випадковими величинами, а отже мають власні числові характеристики (математичні сподівання і дисперсії), та до них виставляють низку вимог:

– статистична оцінка параметра розподілу має бути **спроможною**. Це означає, що зі збільшенням кількості дослідів вона має збігатися за імовірністю до шуканого параметра:

$$\lim_{n \to \infty} m_x^* = m_x;$$

$$\lim_{n\to\infty} D_x^* = D_x;$$

– статистична оцінка параметра розподілу має бути **незміщеною**. Це означає, що її математичне сподівання має дорівнювати шуканому параметру, тобто вона не містить систематичної помилки:

$$M[m_x^*] = M[X];$$
$$M[D_x^*] = D[X];$$

– статистична оцінка параметра розподілу має бути **ефективною**. Це означає, що вона повинна мати мінімальну дисперсію, тобто бути щонайменше випадковою:

$$D[m_x^*] = min;$$
$$D[D_x^*] = min.$$

Можна показати, що оцінка математичного сподівання, яка отримана за формулою (5.1) є спроможною та незміщеною оцінкою. Водночас оцінка дисперсії, що обчислена за формулою (5.2), є спроможною оцінкою, але зміщеною, тобто результат обчислення за формулою (5.2) дає систематичну помилку. Для отримання незміщеної оцінки дисперсії потрібно суму квадратів відхилень X від її середнього m_x^* розділити не на n, а на $(n-1)$:

$$D^*[X] = \frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n-1}, \tag{5.3}$$

а оцінка середнього квадратичного відхилення відповідно дорівнює:

$$\sigma_x^* = \sqrt{D_x^*} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n-1}}. \tag{5.4}$$

Визначимо числові характеристики оцінки математичного сподівання як випадкової величини. Математичне сподівання випадкової величини m_x^* як математичне сподівання її арифметичної середньої відповідно до (5.1) дорівнює:

$$M[m_x^*] = M\left[\frac{\sum x_i}{n}\right] = \frac{1}{n}M[\sum x_i] = \frac{1}{n}\cdot \mathrm{n}\cdot \mathrm{M}[X] = M[X].$$

Тобто математичне сподівання оцінки математичного сподівання m_x^* випадкової величини X дорівнює математичному сподіванню самої випадкової величини X і не залежить від кількості дослідів n.

Визначимо дисперсію оцінки математичного сподівання, тобто арифметичної середньої випадкової величини X:

$$D[m_x^*] = D\left[\frac{\sum x_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\cdot D[\sum x_i] = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot D[\sum X] = \frac{D[X]}{n},$$

звідки випливає, що зі збільшенням кількості дослідів n дисперсія оцінки математичного сподівання прагне до нуля $D[m_x^*] \to 0$. Це свідчить про прагнення m_x^* до невипадкової величини m_x (оскільки дисперсія характеризує наявність розкиду, і цей розкид прагне до нуля).

Отже, дисперсія оцінки математичного сподівання, тобто арифметичної середньої, дорівнює дисперсії випадкової величини *X*, поділеній на кількість дослідів:

$$D_{m_x^*} = \frac{D_x}{n}. \qquad (5.5)$$

Середнє квадратичне відхилення оцінки математичного сподівання, тобто арифметичної середньої, відповідно дорівнює:

$$\sigma_{m_x^*} = \sqrt{D_{m_x^*}} = \sqrt{\frac{D_x}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \qquad (5.6)$$

5.4 Структура похибок вимірів

Відповідно до визначення, вимірювання є процесом порівняння вимірюваної величини з іншою однорідною величиною, яку обрано за одиницю порівняння. У процесі вимірювання завжди присутні п'ять складників: об'єкт виміру, суб'єкт виміру, засіб виміру, метод виміру та зовнішнє середовище. Ці складники безперервно змінюються, зокрема, змінюється стан приладів, увага виконавця, визначення точок та площин на реальній місцевості. Тому в експериментальній теорії вимірів виходять з постулату про неминучість похибок вимірів. Цей постулат ґрунтується на практичній основі, зокрема, на тому, що проведення повторних вимірів практично незмінної величини у одних і тих самих умовах дає хоч і близькі, але різні результати, що вказує на наявність похибок. Про наявність похибок також свідчать і нев'язки, які виникають у деяких рівностях із виміряними даними. Наприклад, сума перевищень у замкненому висотному полігоні має дорівнювати нулю, але у результаті похибок у виміряних перевищеннях зазвичай отримується нев'язка.

Похибку вимірів визначають як оцінку відхилення величини виміряного значення від її дійсного значення. За формою подання розрізняють такі похибки.

Абсолютна похибка – δ є оцінкою абсолютної помилки виміру. Її величина залежить від способу обчислення, який визначається законом розподілу випадкової величини m_x^*, що є виміряним значенням. Абсолютну похибку визначають у такий спосіб:

$$\delta = |M[X] - m_x^*|,$$

де $M[X]$ – дійсне, тобто невипадкове, значення *X*;

m_x^* – середнє виміряних значень.

Якщо випадкова величина m_x^* розподілена за нормальним законом, то за абсолютну похибку приймають середнє квадратичне відхилення $\sigma_{m_x^*}$, що обчислюють за формулою (5.6) Абсолютну похибку вимірюють у тих самих одиницях виміру, що й саму величину *X*.

Відносна похибка – відношення абсолютної похибки до того значення, яке приймають за дійсне значення, її обчислюють за формулою:

$$\Delta = \frac{\delta}{M[X]}. \tag{5.7}$$

Відносна похибка є безрозмірною величиною, її вимірюють у відносних одиницях, або у відсотках.

Приведена похибка – це відносна похибка, яку виражено відношенням абсолютної похибки засобу виміру до умовно набутого значення величини, постійного в усьому діапазоні вимірів або частині діапазону. Її обчислюють за формулою

$$\Delta_x = \frac{\sigma_{m_x^*}}{X_n}, \tag{5.8}$$

де X_n – нормоване значення, яке залежить від типу шкали вимірювального приладу й визначається за його градуюванням: якщо шкала приладу однобічна, тобто нижня межа вимірів дорівнює нулю, то вважають, що X_n дорівнює верхній межі вимірів; якщо шкала приладу двобічна, то нормувальне значення дорівнює ширині діапазону вимірів приладу.

Приведена похибка є безрозмірною величиною та її можна вимірювати у відсотках.

За походженням розрізняють такі похибки.

Інструментальні (приладові похибки) – ті, які визначають похибки вживаних засобів вимірів та викликані недосконалістю принципу дії, неточністю градуювання шкали та її ергономічністю.

Методичні похибки – ті, які зумовлені недосконалістю методу, а також спрощеннями, покладеними в основу методики вимірів.

Суб'єктивні (операторні) похибки – ті, які зумовлені ступенем уважності, зосередженості, підготовленості та іншими психофізіологічними властивостями людини, що здійснює вимір.

Окрім того, за походженням похибок виділяють похибки, залежні від специфіки об'єкта виміру та зовнішнього середовища.

У процесі вимірів застосовують прилади для вимірювання лише з певною заздалегідь заданою точністю – основною похибкою, за нормальних умов експлуатації для певного приладу. Якщо вимірювальний прилад використовують в умовах, які відрізняються від нормальних умов, то виникає додаткова похибка, що збільшує загальну похибку приладу. До додаткових похибок належать температурна, викликана відхиленням температури навколишнього середовища від нормальної, установча, що зумовлена відхиленням положення приладу від нормального робочого положення та ін.

За нормальну температуру навколишнього повітря приймають 20 °С, за нормальний атмосферний тиск – 101,325 кПа.

Узагальненою характеристикою засобів є клас точності, який визначають граничними значеннями припустимих основної та додаткової похибок. Клас точності засобів характеризує їхні точнісні властивості, але він не є безпосереднім показником точності вимірів, що виконуються за допомогою цих засобів, оскільки точність залежить також від методу вимірів та умов їх виконання.

За характером прояву розрізняють такі види похибок.

Грубі похибки або промахи, які різко відхиляють результати вимірів від дійсного значення. Вони завжди виникають тільки з вини виконавця (оператора). У теорії похибок грубі похибки не вивчають. Їх необхідно своєчасно виявляти, а результати вимірів, що містять ці похибки, виключати з подальшої обробки. Найдієвішими методами виявлення грубих похибок є виконання надлишкових вимірів, тому у геодезії кожну величину вимірюють, переважно не менше двох разів.

Систематичні елементарні похибки породжуються істотними зв’язками між чинниками, які впливають на виміри, і виникають кожного разу за одних і тих самих умов. Систематичні похибки підпорядковані певній закономірності. Ці закономірності піддаються вивченню та за певних умов систематичні похибки можна виключити з окремого результату вимірів.

Випадкові елементарні похибки породжуються не істотними, а другорядними випадковими зв’язками між чинниками вимірів за певних умов вимірів. Вони можуть з’являтися в процесі вимірів, а можуть і не з’явитися, можуть бути великими або малими, додатними або від’ємними. Величина і знак цих похибок має випадковий характер, а їхній закон розподілу зазвичай вважають нормальним.

Випадкові похибки не можна виключити з окремого результату виміру. Їхній вплив на результати вимірів можна лише послабити шляхом підвищення кваліфікації виконавця, вдосконалення вимірювальних приладів та методики вимірів, виконуючи виміри за сприятливіших умов. Вплив випадкових похибок можна також послабити належною математичною обробкою результатів вимірів.

В експериментальній теорії вимірів виходять з постулату про неминучість похибок вимірів, оскільки при повторних вимірах за тих самих умов отримують результати, що відрізняються один від одного. Отже, будь-який вимір містить похибку, тому завжди виникає необхідність оцінювання точності отриманого результату. Для цього зазвичай застосовують дві характеристики точності: загальний зсув (систематичну похибку) θ і розкид (випадкову похибку) результатів вимірів δ.

На практиці під час здійснення геодезичних вимірів систематичні й випадкові похибки виникають спільно, тому їх поділ у процесі обробки результатів вимірів є надзвичайно важким, а у певних випадках похибки, що є випадковими за походженням, за певних умов стають систематичними. Отже, не існує чіткої межі між цими двома видами елементарних похибок, елементарна похибка буде випадковою або систематичною залежно від умов, у яких вона виникає.

Кожен результат виміру x_i у загальному випадку є сумою двох складників – істинного значення вимірюваної величини L, що нам невідоме, та істинної похибки виміру ε_i, яка змінюється від одного виміру до іншого, тобто

$$x_i = L + \varepsilon_i,$$

де x_i – результат і-го виміру;

L – істинне значення вимірюваної величини;

ε_i – істинна похибка і-го результату виміру.

Теоретично похибка результату виміру x_i є різницею між цим результатом виміру та істинним (дійсним) значенням L вимірюваної фізичної величини:

$$\varepsilon_i = x_i - L. \quad (5.9)$$

Зі свого боку істинна похибка і-го результату виміру ε_i у загальному випадку містить два складники: систематичну похибку ряду вимірів, яка є однаковою для усіх отриманих результатів вимірів θ, та випадкову похибку результату і-го виміру δ_i:

$$\varepsilon_i = \theta + \delta_i. \quad (5.10)$$

Розглянемо ряд результатів повторних вимірів x_1, x_2, ..., x_n, що отримані в однакових умовах. Структура і-го результату виміру x_i наведена на рисунку 5.1.

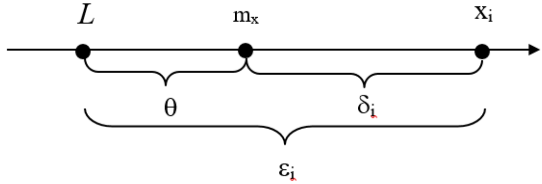


Рисунок 5.1 – Структура і-го результату виміру x_i:
L – істинне значення вимірюваної величини; m_x – математичне сподівання результатів вимірів (центр розсіяння); ε_i – істинна похибка результату і-го виміру; δ_i – випадкова похибка результату і-го виміру; θ – систематична похибка цього ряду вимірів (систематичний зсув)

З рисунка 5.1 випливає, що істинне значення вимірюваної величини L відрізняється від математичного сподівання ряду результатів вимірів x_1, x_2, ..., x_n саме на величину систематичного зсуву θ, яка для певної низки результатів вимірів є незмінною. Розташування значення x_i на числовій осі визначається випадковою похибкою δ_i. Випадкова похибка δ_i є випадковою величиною з нормальним законом розподілу, що має велике значення для встановлення технічних вимог до величини похибки виміру. Це твердження зазвичай обґрунтовують центральною граничною теоремою, оскільки величина випадкової похибки δ_i зумовлена впливом дуже великої кількості окремих джерел похибок.

Завдяки симетрії кривої нормального розподілу щодо початку координат теоретично математичне сподівання випадкової похибки δ_i дорівнює нулю:

$$M(\delta) = 0.$$

Тоді математичне сподівання повної похибки дорівнює систематичному зсуву:

$$M(\varepsilon) = \theta,$$

а і-й результат виміру x_i є різницею між цим результатом виміру та істинним (дійсним) значенням L вимірюваної фізичної величини:

$$x_i = m_x \pm \delta_i \,. \quad m_x = L - \theta, \tag{5.11}$$

звідки очевидна необхідність аналізу наявності та значущості систематичної похибки.

Отже, виникає необхідність для характеристики точності вимірів застосовувати щонайменше два чинники – характеристику зсуву та характеристику розкиду. Як такі характеристики застосовують:

– **загальний зсув** ряду вимірювань від істинного значення вимірюваної величини, тобто систематичну похибку θ, яка має закономірний характер;

– **характеристику розкиду** результатів вимірювань щодо математичного сподівання ряду вимірювань m_x, тобто середнє квадратичне відхилення σ.

Окрім вказаних, для повної характеристики відхилення результатів вимірів від істинного значення часто використовують також **граничну похибку**, яка ґрунтується на відомому «правилі трьох сигм». Це правило є властивістю всіх нормально розподілених випадкових величин. Правило трьох сигм полягає у тому, що 99,7 % усіх можливих значень нормальної випадкової величини влучають на ділянку $\pm 3\sigma$, тобто тільки 0,3 % значень виходять за межі цього інтервалу (3 значення з 1000 значень).

Граничну похибку визначають за формулою:

$$\Delta_{гр} = \theta \pm t \cdot \sigma, \tag{5.12}$$

де значення параметра t визначається законом розподілу похибок та заданою імовірністю появи граничної похибки. У геодезичній практиці граничні похибки розраховують при t = 2; 2,5; 3.

Абсолютне значення граничної похибки $\Delta_{гр}$ є верхньою межею припустимих розмірів похибок. Кожен результат виміру із похибкою, що перевищує за абсолютною величиною значення граничної похибки $\Delta_{гр}$, відкидають. Граничну похибку встановлюють інструкції для кожного виду геодезичних робіт.

Оскільки значення середньоквадратичного відхилення σ та систематичного зсуву θ зазвичай невідомі, то для характеристики точності вимірів застосовують їхні оцінки. У геодезичній практиці оцінку середньоквадратичного відхилення σ називають середньоквадратичною похибкою (СКП) та позначають m, а систематичного зсуву – систематичною похибкою θ. Величини m і θ, як оцінки характеристик точності, залежать від умов вимірів, а отже є величинами випадковими, і для них розраховують характеристики їх надійності: m_m – СКП середньоквадратичної похибки та m_θ – СКП систематичної похибки. Зазвичай ці величини застосовують для правильного заокруглення величин m та θ.

СКП середньоквадратичної похибки розраховують за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2\nu}}, \qquad (5.13)$$

де ν – число ступенів свободи, яким зазвичай є кількість проведених вимірів n.

Одним із завдань теорії похибок результатів вимірів є розроблення методів обчислення оцінок числових характеристик точності m та θ у різних геодезичних операціях.

5.5 Оцінювання точності результатів вимірів за дійсними похибками

У випадку, коли істинне значення вимірюваної величини невідоме, можна оцінити вплив лише випадкових похибок, що становлять відхилення результатів вимірів від середнього значення. Вплив систематичних похибок у цьому випадку виявити повністю неможливо.

Якщо маємо низку рівноточних вимірів $x_1, x_2, \ldots, x_n$, за умови, що істинне значення вимірюваної величини відоме та дорівнює L, за формулою (5.9) визначимо низку істинних похибок результатів вимірів. Покладемо, що систематична похибка відсутня, тобто $\theta = 0$. Тоді за відсутності систематичної похибки істинні похибки дорівнюють випадковим $\varepsilon_i = \delta_i$. Отже, середню квадратичну похибку (СКП) можна визначити як корінь із суми квадратів істинних похибок, поділеній на кількість вимірювань n:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n}}, \tag{5.14}$$

тоді її надійність становить:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}, \tag{5.15}$$

де [ ] – символ суми Гаусса, що означає додавання однорідних елементів, які відрізняються індексами, що змінюються від 1 до n. Символ Гаусса еквівалентний символу $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$, де n – число величин, які додаються одна до одної. Відповідно до правила розкриття символу Гаусса маємо:

$$[\varepsilon] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n.$$

У випадку, коли має місце наявність систематичної похибки, то необхідно знайти оцінку систематичного зсуву, характеристику розкиду й оцінити значущість виявленої систематичної похибки.

Оцінку середнього значення систематичної похибки можна визначити як середнє повної похибки ε_i, виходячи з того, що середнє випадкового складника похибки виміру дорівнює нулю $\bar{\delta} = 0$, тобто:

$$\bar{\theta} = \frac{[\varepsilon]}{n}, \tag{5.16}$$

Випадкову похибку результату і-го виміру δ_i можна виразити з формули (5.10) як відхилення від середнього $\bar{\delta_i} = \varepsilon_i - \bar{\theta}$ та для оцінювання середнього квадратичного відхилення за наявності θ, тобто середньої квадратичної похибки СКП, скористатись такою формулою:

$$m = \sqrt{\frac{\left[\left(\varepsilon_i - \bar{\theta}\right)^2\right]}{n-1}} = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}, \tag{5.17}$$

де $\delta_i = \varepsilon_i - \bar{\theta}$ – випадковий складник істинної похибки і-го результату виміру.

У цьому випадку оцінку надійності СКП обчислюють за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{5.18}$$

Для оцінювання значущості виявленої систематичної похибки діють у такий спосіб. Висувають нульову гіпотезу $H0 : \theta = 0$. Перевіряють гіпотезу за допомогою критерію $\Delta_{гр\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} < \left|\bar{\theta}\right|$, який являє собою граничне значення θ, зумовлене випадковими факторами. Значення t_q отримують з довідкових таблиць розподілу Стьюдента відповідно до рівня значущості α та числа ступенів свободи $\nu = n - 1$.

Якщо виконується нерівність вигляду $\left|\bar{\theta}\right| < \Delta_{гр\bar{\theta}}$, тобто якщо значення систематичного зсуву не перевищує граничної похибки, вважають, що θ

сформована випадковими факторами, а отже систематичні похибки відсутні. Виконання нерівності протилежного змісту дає підстави вважати наявність систематичних похибок у цих вимірах.

Для правильного заокруглення величини θ, якщо вона є значущою, обчислюють величину її похибки:

$$m_{\overline{\theta}} = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Оцінку СКП σ можна отримати при малому обсязі вибірки ($n \leq 10$) за величиною розмаху. Її обчислюють за формулою

$$\hat{m} = \frac{R_n}{d_n}, \tag{5.19}$$

де $R_n = \lambda_{max} - \lambda_{min}$ – розмах вибірки обсягу n;

d_n – коефіцієнт, що залежить від обсягу вибірки. Значення коефіцієнтів d_n надані у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Значення коефіцієнтів d_n

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14
d_n	1,13	1,69	2,06	2,33	2,53	2,70	2,85	2,97	3,08	3,41

Приклад 5.1. Відоме істинне значення лінії теодолітного ходу. У результаті проведення п'яти вимірів отриманий ряд значень похибок вимірів ε: 2,4 см, 9,4 см, 6,4 см, 1,4 см, -1,6 см. Знайти оцінку систематичної похибки та СКП вимірювання лінії.

Розв'язання. Проаналізуємо похибку виміру ε, для чого обчислимо її числові характеристики – середнє значення та середнє квадратичне відхилення.

Середнє значення ε визначимо за формулою

$$\overline{\varepsilon} = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{18{,}0}{5} = 3{,}6 \text{ см}.$$

Оскільки теоретично математичне сподівання випадкової складової похибки δ дорівнює нулю (завдяки симетричності нормального закону розподілу та рівної імовірності протилежних за знаком випадкових похибок), є підстава вважати, що отримане середнє повної похибки $\overline{\varepsilon} = 3{,}6$, яке є найімовірнішим значенням похибки вимірів, містить як систематичний складник θ, так і випадковий δ.

Обчислимо оцінку середнього квадратичного відхилення похибки вимірів:

$$m = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}},$$

де δ_i – відхилення ε_i від середнього $\overline{\varepsilon} = 3{,}6$, $\delta_i = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}$.

Решту проміжних розрахунків виконаємо у таблиці 5.2.

Таблиця 5.2 – Проміжні обчислення

Номер	ε_i, см	δ, см	δ^2, см^2
1	2,4	–1,2	1,44
2	9,4	+ 5,8	33,64
3	6,4	+ 2,8	7,84
4	1,4	–2,2	4,84
5	–1,6	–5,2	27,04
Σ	18,0	0	74,80

Отримали:

$$m = \sqrt{\frac{74,8}{5-1}} = 4,324 \text{ см.}$$

Надійність оцінки середнього значення похибки вимірювань ε оцінимо за СКП СКП, тобто m_m:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{4,324}{\sqrt{2(5-1)}} = 1,53 \text{ см.}$$

Приклад 5.2. Перевіримо значущість обчисленої у прикладі 5.1 систематичної похибки.

Розв'язання. Для перевірки значущості θ висунемо нульову гіпотезу, тобто гіпотезу про її незначущість H_0: $\theta = 0$. Перевіримо цю гіпотезу з використанням критерію

$$\Delta_{гр\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} < \left|\bar{\theta}\right|,$$

де $\Delta_{гр\bar{\theta}}$ – граничне значення $\bar{\theta}$, зумовлене впливом випадкових факторів;

t_q – значення критерію Стьюдента, яке обирають зі статистичних таблиць розподілення Стьюдента або використовують функцію Excel **СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х($\alpha; \nu$)**. Аргументами функції є імовірність α та число ступенів свободи $\nu = n - 1$.

Визначимо спочатку значення критерію Стьюдента t_q, для чого задамося рівнем значущості $\alpha = 0,05$ та визначимо число ступенів свободи $\nu = n - 1 = 5 - 1 = 4$. Скористаємось функцією Excel **СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х($\alpha; \nu$)**, отримаємо $t_q = 2,78$ (рис. 5.2).

Обчислимо $\Delta_{\text{гр}\bar{\theta}}$:

$$\Delta_{\text{гр}\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} = \frac{2,78 \cdot 4,324}{\sqrt{5}} = 5,376.$$

Перевіримо виконання нерівності $\left|\bar{\theta}\right| < \Delta_{\text{гр}\bar{\theta}}$:

$$\Delta_{\text{гр}\bar{\theta}} = 5,376 > \left|\bar{\theta}\right| = 3,6.$$

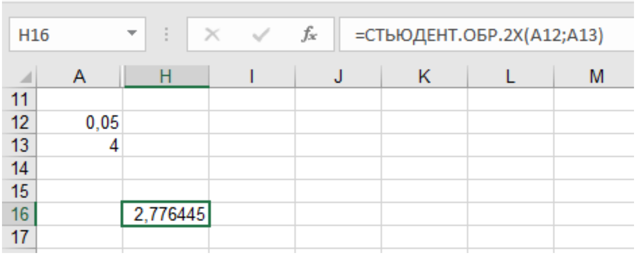


Рисунок 5.2 – Визначення критерію Стьюдента

Граничне значення θ, зумовлене випадковими факторами, перевищує її значення, що отримане зі статистичних даних. Отже, у нашому випадку справедливою є нульова гіпотеза H_0: $\theta = 0$, і значення $\overline{\theta} = 3{,}6$ см є незначущим, оскільки сформовано виключно випадковими факторами.

5.6 Інтервальне оцінювання числових характеристик

Якщо точкову оцінку параметра визначено на підставі вибірки малого обсягу, вона може істотно відрізнятися від оцінюваного параметра. Для визначення похибки від заміни шуканого параметра його оцінкою використовують поняття довірчого інтервалу та довірчої імовірності.

При визначенні дійсного значення шуканого параметру m_x величину похибки характеризує довірчий інтервал L, а ступінь впевненості, що похибка не перевищить L, характеризує довірча імовірність β. Якщо для певного параметра розподілу, наприклад, математичного сподівання m_x отримано спроможну й незміщену оцінку a^*, потрібно знати, до яких помилок може призвести заміна параметра m_x його точковою оцінкою a^*, та з яким ступенем впевненості можна очікувати, що ці помилки не вийдуть за певні межі. Для розв’язання цієї задачі призначають досить велику імовірність β (0,95; 0,99) таку, що подію $A = \{|a^* - m_x| < l\}$, яка характеризується цією імовірністю, можна вважати практично вірогідною, потім знаходять таке значення l, для якого справедлива рівність

$$\mathrm{P(A)} = P\{(a - l) < m_x < (a + l)\} = \beta. \qquad (5.20)$$

Тобто з імовірністю β невідоме значення параметра m_x перебуватиме в інтервалі $L = [a^* - l, a^* + l]$. Більші за l за абсолютним значенням помилки зустрічатимуться з імовірністю $\alpha = 1 - \beta$. Границі інтервалу називають довірчими границями $a_1 = a^* - l$, $a_2 = a^* + l$ (рис. 5.3).

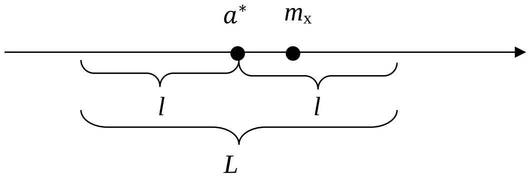


Рисунок 5.3 – Довірчий інтервал

Утруднення полягає в тому, що закон розподілу оцінки a^* залежить від закону розподілу досліджуваної ознаки X і, отже, від його невідомих параметрів (зокрема й від самого параметра a). Щоб обійти це утруднення, застосовують такий грубо наближений прийом: замінюють у виразі l невідомі параметри їхніми точковими значеннями. При 20–30 дослідах цей прийом зазвичай дає задовільні за точністю результати.

Приклад 5.3. З n = 40 незалежних дослідів визначені спроможні й незміщені точкові оцінки параметрів випадкової величини X $\bar{X} = 10$ і $\sigma^{*2} = 4$. Знайти інтервальні оцінки для арифметичної середньої.

Розв'язання. Задаємось значенням довірчої імовірності β = 0,95. Тоді можна записати:

$$P\{(\bar{X} - l) < \bar{X} < (\bar{X} + l)\} = 0{,}95.$$

Скористаємось тим, що випадкова величина $\bar{X}$ є функцією n незалежних випадкових величин x_i. Тоді відповідно до центральної граничної теореми щільність розподілу випадкової величини $\bar{X}$ практично підпорядковується нормальному законові розподілу з параметрами:

$$M[\bar{X}] = \bar{X} = 10\,], \qquad D[\bar{X}] = \frac{\sigma^{*2}}{n} = \frac{4}{40} = 0{,}1\,,$$

тобто $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{40}} = \frac{2}{6{,}32} = 0{,}316.$

Для нормального закону розподілу імовірність влучення випадкової величини на інтервал значень можна виразити за допомогою інтеграла імовірностей:

$$P\{(\bar{X} - l) \le \bar{X} \le (\bar{X} + l)\} = \left[\Phi\left(\frac{\bar{X} + l - \bar{X}}{\sqrt{\sigma_{\bar{X}}}}\right) - \Phi\left(\frac{\bar{X} - l - \bar{X}}{\sqrt{\sigma_{\bar{X}}}}\right)\right] =$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{l}{\sqrt{\sigma_{\bar{X}}}}\right) - \Phi\left(\frac{-l}{\sqrt{\sigma_{\bar{X}}}}\right)\right] = 2\Phi\left(\frac{l}{\sqrt{\sigma_{\bar{X}}}}\right) = \beta.$$

Підставимо значення:

$$\Phi\left(\frac{l}{\sqrt{0{,}316}}\right) = 0{,}475.$$

Аргумент інтеграла імовірностей $\Phi(x)$ = 0,475 дорівнює 1,96, тобто:

$$\frac{l}{0{,}562} = 1{,}96,$$

звідки $l = 1{,}96 \cdot 0{,}562 = 1{,}1$.

Тоді границі довірчого інтервалу $a_1 = 10 - 1{,}1$, $a_2 = 10 + 1{,}1$.

Отже, з імовірністю 0,95 інтервал (8,9; 11,1) накриває арифметичну середню випадкової величини X.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть визначення понять «фізична величина» та «істинне значення фізичної величини».
2. Поясніть, що являють собою принцип, метод та об’єкт вимірювання.
3. Перелічить та охарактеризуйте фактори, за наявності яких відбувається процес вимірювання.
4. Як відрізняються методи прямих та непрямих геодезичних вимірів?
5. Поясніть зміст вибіркового методу. У чому полягає різниця між генеральною сукупністю та вибіркою?
6. Яку інформацію про випадкову величину дістають з варіаційного ряду?
7. Що таке оцінка параметра розподілу?
8. Які властивості повинні мати оцінки числових характеристик випадкової величини?
9. Поясніть такі властивості оцінок випадкової величини як спроможність і незміщеність.
10. Поясніть, як відрізняються прямі та непрямі виміри?
11. До якого виду вимірів − до прямих або непрямих − потрібно віднести визначення перевищення методом тригонометричного нівелювання?
12. Поясніть призначення та сутність необхідних та надлишкових вимірів.
13. Поясніть сутність адитивної гіпотези будови повної похибки результату виміру.
14. У чому основна різниця між систематичними та випадковими похибками?
15. Поясніть смисл аксіоми компенсації.
16. Поясніть смисл аксіоми розсіяння.
17. Які варіанти оцінки математичного сподівання вам відомі? Найкраща оцінка математичного сподівання.
18. Оцінка дисперсії та СКП при відомому математичному сподіванні.
19. Оцінка дисперсії та СКП при невідомому математичному сподіванні.
20. Оцінка СКП за розмахом вибірки.

21. Оцінка моментів.

22. Оцінка коефіцієнта кореляції.

23. Які характеристики точності необхідні для оцінювання якості виміру та чому?

24. Що є характеристикою розкиду результатів вимірів?

25. На яких підставах можна вважати, що істинні похибки результатів вимірів розподілені нормально?

26. Як визначають граничну похибку результатів вимірів?

27. Що розуміють як оцінку числових характеристик точності результатів вимірів?

28. Що характеризує СКП результату виміру?

29. У чому полягає різниця між СКП та СКП?

30. Що характеризує СКП середньоквадратичної похибки та для чого її обчислюють?

31. Перелічіть основні завдання, що вирішує теорія похибок.

32. Напишіть формули, за якими оцінюють точність за істинними (дійсними) похибками.

33. Чим відрізняються точкова й інтервальна оцінки параметрів розподілу?

34. Поясніть поняття «довірчий інтервал» і «довірча імовірність».

35. Чим визначаються точність та надійність інтервальної оцінки параметра?

36. За яких умов можлива побудова довірчого інтервалу?

37. Як здійснити побудову довірчого інтервалу для математичного сподівання при відомій та невідомій дисперсії?

Задачі для самостійного розв’язання

5.1. Вибірка з генеральної сукупності задана таблицею:

x_i	2	3	5	7
n	7	10	11	2

Знайти оцінки математичного сподівання, дисперсії та середньоквадратичного відхилення.

5.2. Задано ряд нев’язок (у секундах) у трикутниках тріангуляції ІІ класу загальним обсягом 50 значень (табл. 5.3).

Таблиця 5.3 − Значення нев’язок (у секундах)

–1,81	–1,82	+2,32	0	–0,70
+1,51	+0,61	–1,29	–2,64	+0,04
+0,01 +	0,11	+1,56	–1,09	+2,78
–0,35	–0,01	+1,64	–0,77	–1,26
–0,52	–0,69	+1,02	–1,58	+1,78
+0,16	+0,64	+0,42	+0,99	–2,08
–0,55	+0,64	–0,09	+0,56	–0,35
–2,55	–0,76	+1,05	–1,51	+2,71
+0,70	–0,40	+2,22	–1,14	–0,17
–0,31	–0,01	+0,21	+1,32	–0,85

Уважаючи ряд нев’язок вибіркою з певної генеральної сукупності похибок суми виміряних кутів трикутників тріангуляції, необхідно розрахувати точкові оцінки математичного сподівання, дисперсії та СКП.

5.3. Обчислити числові характеристики для варіаційного ряду:

x_i	9	12	13	14	15	16	17	19	21	23	27
m_i	1	2	3	6	5	3	2	1	1	1	1

Тут m_i − кількість появ x_i.

5.4. Для визначення точності вимірювального приладу було зроблено п’ять незалежних вимірювань, результати яких наведені у таблиці:

Номер виміру	1	2	3	4	5
x_i	2781	2836	2807	2763	2858

Визначити незміщену оцінку дисперсії помилок вимірювального приладу, якщо дійсне значення вимірюваної величини:

а) відоме та дорівнює 2800;

б) невідоме.

5.5. Зроблено вимірювання випадкової величини Y за різних значень випадкової величини X:

x_i	−8	−10	22	2
y_i	−10	−2	4	−1

Визначити вибірковий коефіцієнт кореляції цих величин.

5.6. Перевищення між точками A і B визначено за програмою нівелювання другого класу та дорівнює 12,847 м. Окрім цього, перевищення h_{AB} багаторазово визначали нівеліром технічного класу точності, що надало такі результати: 12,870, 12,842, 12,833, 12,861, 12,831, 12,864. Знайти оцінку систематичної похибки, СКП та граничну похибку визначення перевищення нівеліра технічної точності. Перевірити значущість систематичної похибки.

5.7. Під час вимірювання величини, дійсне значення якої відомо, отримано ряд похибок: +6; –8; –4; –13; +7; +2; 0; +5; +4; –3. Знайти оцінку систематичної похибки, СКП та граничну похибку. Перевірити значущість систематичної похибки.

5.8. Вибірка з нормальної генеральної сукупності задана таблицею:

x	2	3	5	7
n	7	10	11	2

Знайти довірчі інтервали для математичного сподівання, дисперсії та СКП прийнявши рівень значущості α = 0,05.

5.9. За вибіркою обсягу n = 10 обчислені оцінки математичного сподівання $\bar{x} = 42{,}3$ та середньоквадратичного відхилення m = 5,0.

Побудувати довірчий інтервал для математичного сподівання, прийнявши рівень значущості α = 0,01.

5.10. За вибіркою обсягу n = 25 із нормально розподіленої генеральної сукупності обчислено оцінку СКП m = 0,8. Побудувати довірчий інтервал для СКП за рівнем значущості α = 0,05.

Тема 6 РЕГРЕСІЙНО-КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Поняття регресійної залежності. Побудова поля кореляції. Вибір виду статистичної залежності на підставі статистичних даних. Визначення параметрів рівняння регресії за методом найменших квадратів. Оцінювання тісноти лінійного зв’язку між залежними величинами.

6.1 Поняття регресійної залежності

У теорії та практиці велику роль грає дослідження залежності та взаємозв’язків між явищами й процесами, що існують об’єктивно. Для дослідження інтенсивності, виду й форми причинно-наслідкових співвідношень між явищами широко застосовують кореляційний, регресійний і дисперсійний аналіз. У загальному випадку розрізняють два типи залежностей між явищами: функціональну та стохастичну.

Залежність вигляду

$$y = f(x), \tag{6.1}$$

у якій кожному значенню X відповідає одне-єдине значення Y, називають **функціональною**. Отже, у функціональній залежності (6.1) для кожної незалежної змінної X існує цілком визначене значення залежної змінної Y.

Статистичною (стохастичною або імовірнісною) залежністю називають залежність, у якої зміна однієї з величин спричиняє зміну розподілення іншої. Статистична залежність виражає закономірності тільки в масових явищах.

Статистичну залежність називають кореляційною, якщо в разі зміни значень однієї величини змінюється середнє значення іншої.

Порівнюючи функціональну й кореляційну залежності, потрібно мати на увазі, що за наявності функціональної залежності, за відомим X, можна обчислить величину Y однозначно. За наявності кореляційної залежності лише встановлюється тенденція зміни Y у разі зміни X. Кореляційний зв'язок найчастіше характеризують вибірковим коефіцієнтом кореляції.

Завданням кореляційно-регресійного аналізу є визначення форми залежності між незалежною та залежною змінними X та Y, а також оцінювання тісноти зв'язку між ними.

У статистичній залежності одному значенню змінної X x_i може відповідати низка значень змінної Y: $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ik}$, що може бути викликане впливом різних факторів на змінну Y, а не тільки змінної X, або помилками вимірів. Отже, для кожного значення x_i можна визначити умовне середнє $\bar{y}_i$ (рис. 6.1):

$$\bar{y}_x = \varphi(x). \tag{6.2}$$

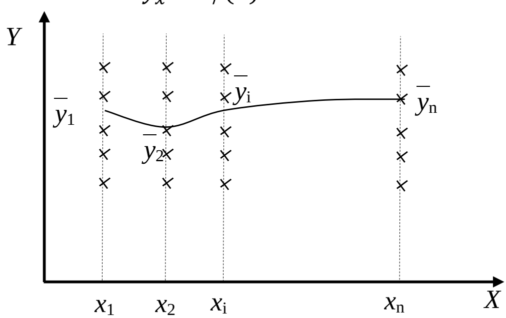


Рисунок 6.1 – Статистична залежність $y = f(x)$

Регресією Y на X називають умовне математичне сподівання випадкової величини Y за умови, що X прийняла значення x_i. Лінію, яка з'єднує точки $\bar{y}_i$, називають **лінією регресії** (рис. 6.1). Для апроксимації лінії регресії аналітичним виразом застосовують **рівняння регресії** (6.2). Розрізняють парну (або просту) регресію, якщо досліджують вплив на залежну змінну Y

однієї незалежної змінної X, і множинну регресію, якщо досліджують вплив на залежну змінну Y множини незалежних змінних X_i.

6.2 Вибір виду статистичної залежності

Вибір вигляду рівняння регресії зазвичай здійснюють або з теоретичних міркувань, якщо відомий вид теоретичної залежності $\bar{y}_x = \varphi(x)$, або графічно, для чого залежність зображують точками на координатній площині. Таке зображення статистичної залежності називають **полем кореляції.** Наприклад, розташування отриманих статистичним шляхом точок на рисунку 6.2 нагадує параболу, тоді для згладжування експериментальної залежності $\bar{y}_x = \varphi(x)$ можна скористатися поліномом другого порядку:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

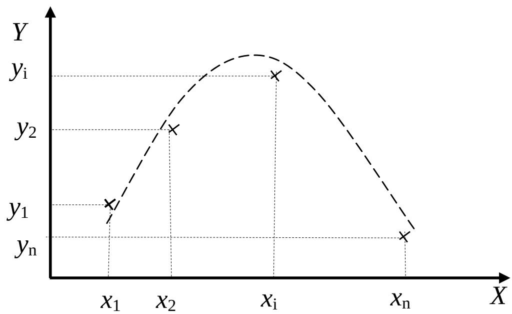


Рисунок 6.2 – Поле кореляції

На практиці найчастіше застосовують лінійне рівняння регресії:

$$Y = \rho_{yx} \mathrm{X} + b. \tag{6.3}$$

Коефіцієнт при змінній X ρ_{yx} називають коефіцієнтом регресії.

Після прийняття рішення щодо вигляду апроксимуючої залежності (лінійна, степенева або інша функція) виникає завдання із визначення її параметрів. Цими невідомими параметрами обраної залежності є коефіцієнти при змінних X та Y, а значення самих змінних X та Y відомі з дослідів, бо вони представлені як статистичні дані.

Для визначення параметрів залежності, що згладжує $\bar{y}_x = \varphi(x)$, зокрема значень параметрів ρ_{yx} та b рівняння регресії (6.3), застосовують **метод найменших квадратів** (МНК). Метод найменших квадратів дозволяє при відомому класі апроксимуючої залежності $\bar{y}_x = \varphi(x)$ так вибрати значення її параметрів ρ_{yx} та b, щоб ця залежність щонайкраще відбивала дані спостережень.

6.3 Визначення параметрів рівняння регресії за методом найменших квадратів

Нехай у результаті *n* дослідів для кожного значення незалежної змінної $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отримані значення залежної змінної $Y = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$. Потрібно згладити отриману статистичну залежність апроксимуючою кривою $\bar{y}_x = \varphi(x)$. Будемо вважати, що відхилення статистичних даних від апроксимуючої кривої $y_i - \varphi(x_i)$ (рис. 6.3) зумовлені помилками вимірів, а отже, розподілені нормально. Тоді залежна змінна Y при кожному значенні $X = x_i$ є випадковою величиною y_i, що розподілена нормально з параметрами $\varphi(x_i)$ та σ.

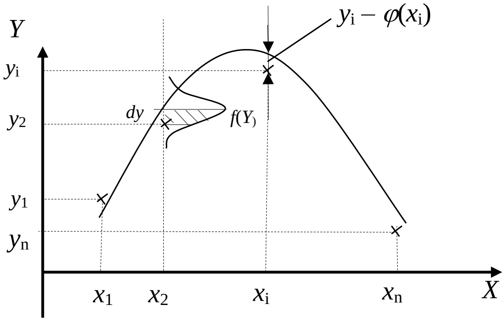


Рисунок 6.3 – Розподіл відхилень статистичних даних від апроксимуючої кривої $y_i - \varphi(x_i)$

Параметр розподілу σ характеризує точність виміру Y в і-му досліді. Будемо вважати, що виміри у всіх дослідах проводилися з однаковою точністю, тоді σ для усіх $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ одна й та сама. Закон розподілу Y_i (щільність розподілу) запишемо в такий спосіб:

$$f(Y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{[y_i - \phi(x_i)]^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Імовірність того, що Y_i потрапила на інтервал dy, дорівнює елементу імовірності (рис. 6.3):

$$P\{y_i - dy < Y_i < y_i + dy\} = f(Y_i) \cdot dy.$$

Імовірність того, що залежна змінна Y прийняла значення $y_1, y_2, \ldots, y_n$ визначимо за теоремою множення:

$$P\{y_1 = y_1, y_2 = y_2, \ldots, y_n = y_n\} = \prod_{i=1}^{n} f(Y_i)dy =$$

$$= \left(\frac{dy}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \frac{[y_i - \phi(x_i)]^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Ця імовірність буде найбільшою, коли аргумент експоненти $\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{[y_i-\phi(x_i)]^2}{2\sigma^2}\right\}$ прийме найменше значення, тому використання МНК збігається до вимоги, щоб сума квадратів відхилень цієї теоретичної кривої від експериментальних точок оберталась на мінімум:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{ip})^2 \rightarrow min, \tag{6.4}$$

де y_i – значення залежної змінної Y, отримані в результаті спостережень;

y_{ip} – розрахункові значення залежної змінної Y, отримані на підставі аналітичного виразу кривої, що згладжує $\bar{y}_x = \varphi(x)$.

Зауважимо, що виконання умови (6.4) забезпечує щонайкраще узгодження апроксимуючої кривої $\bar{y}_x = \varphi(x)$ із дослідними даними. Отже, якщо всі виміри проводились з однаковою точністю та помилки вимірів розподілені за нормальним законом, то знайдена залежність буде найімовірнішою з усіх можливих у певному класі функцій.

З огляду на те, що $y_{ip} = \varphi(x_i)$, вираз (6.4) можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i)]^2 \rightarrow min. \tag{6.5}$$

Невідомі параметри шуканої залежності визначають, записавши її не тільки як функцію аргументу x, але і як функцію невідомих параметрів a_j, $j = \overline{1,m}$:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i, \mathrm{a}_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_m)]^2 \rightarrow min, \tag{6.6}$$

де m – число шуканих параметрів.

Візьмемо часткові похідні від виразу (6.6) за параметрами a_j і, дорівнявши їх до нуля, дістанемо систему $m+1$ нормальних рівнянь з $m+1$ невідомими, розв’язання якої дає шукані параметри a_j, які задовольняють умові (6.5):

$$-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \phi(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_m)\right]\frac{\partial\phi}{\partial a_j} = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Розв’язання отриманої системи нормальних рівнянь залежить від конкретного вигляду залежності $\bar{y}_x = \varphi(x)$.

Отримаємо для лінійного рівняння регресії (6.3) методом найменших квадратів вираз для коефіцієнта регресії ρ_{yx} та вільного члена b. Для цього підставимо у (6.6) вираз (6.3), отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \rho_{yx}x_i - b]^2 \rightarrow min.$$

Для відшукання мінімуму візьмемо похідні за параметрами ρ_{yx} та b і, дорівнявши їх до нуля, одержимо систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} 2\sum_{i=1}^{n}[y_i - \rho_{yx}x_i - b]\cdot x_i = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n}[y_i - \rho_{yx}x_i - b] = 0 \end{array}\right\}, \tag{6.7}$$

з якої в результаті перетворень отримаємо:

$$\left.\begin{aligned}\rho_{yx}\cdot\sum x_i^2+b\cdot\sum x_i&=\sum x_iy_i\\ \rho_{yx}\cdot\sum x_i+nb&=\sum y_i\end{aligned}\right\}. \qquad (6.8)$$

Виразимо ρ_{yx} та b, маємо параметри шуканої залежності:

$$\rho_{yx}=\frac{n\sum x_iy_i-\sum x_i\sum y_i}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}; \qquad (6.9)$$

$$b=\frac{\sum x_i^2\cdot\sum y_i-\sum x_i\cdot\sum x_iy_i}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}. \qquad (6.10)$$

6.4 Оцінювання тісноти лінійного зв'язку між залежними величинами

Для оцінювання тісноти лінійної кореляційної залежності застосовують коефіцієнт кореляції. Для його визначення підставимо у вираз (6.8), використаний для одержання параметрів лінійної залежності за методом найменших квадратів, такі співвідношення:

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}, \qquad \text{звідки } \sum x_i=\overline{x}n;$$

$$\overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}, \qquad \text{звідки } \sum y_i=\overline{y}n;$$

$$\overline{x^2}=\frac{\sum x_i^2}{n}, \qquad \text{звідки } \sum x_i^2=\overline{x^2}n,$$

отримаємо

$$\left.\begin{aligned}\rho_{yx}\cdot\overline{x^2}n+b\cdot\overline{x}n&=\sum x_iy_i\\ \rho_{yx}\cdot\overline{x}+b&=\overline{y}\end{aligned}\right\}, \qquad (6.11)$$

із другого рівняння виразимо b:

$$b=\overline{y}-\rho_{yx}\cdot\overline{x} \qquad (6.12)$$

і, підставивши його до першого рівняння, знайдемо коефіцієнт регресії:

$$\rho\cdot\Sigma x_i^2+(\overline{y}-\rho\cdot\overline{x})\cdot\Sigma x_i=\Sigma x_iy_i$$

$$\rho\cdot\left(\Sigma x_i^2-\overline{x}\cdot\Sigma x_i\right)=\Sigma x_iy_i-\overline{y}\cdot\Sigma x_i$$

$$\rho=\frac{\sum x_iy_i-\overline{y}\cdot\sum x_i}{\sum x_i^2-\overline{x}\cdot\sum x_i}=\frac{\sum x_iy_i-n\overline{yx}}{n\overline{x^2}-n\overline{x}^2}=\frac{\sum x_iy_i-n\overline{yx}}{n\cdot\sigma_x^2}. \qquad (6.13)$$

Помножимо рівність (6.13) на дріб $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$, тоді

$$\rho\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=\frac{\sum x_iy_i-n\overline{yx}}{n\cdot\sigma_x\sigma_y}, \qquad (6.14)$$

де $\rho\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=r_в$ – вибірковий коефіцієнт кореляції.

Підставивши до рівняння лінійної регресії $\overline{y}_x=\rho_{yx}x+b$ вираз для b (6.12), отримаємо його в такому вигляді:

$$\overline{y_x}-\overline{y}=\rho_{xy}\cdot(x-\overline{x}) \qquad \text{або} \qquad \overline{y_x}-\overline{y}=r_в\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\overline{x}). \qquad (6.15)$$

Коефіцієнт кореляції $r_в$ має важливе значення. Він дозволяє оцінити величину лінійного зв'язку між двома випадковими величинами X та Y. Покладемо у рівнянні (6.14) $r_в = 0$, тоді

$$\overline{y_x} - \overline{y} = 0,$$

або

$$\overline{y_x} = \overline{y},$$

тобто при $r_в = 0$ усі умовні середні дорівнюють оцінці середньої, а отже при зміні незалежної величини X залежна змінна Y не змінюється, і графік рівняння регресії паралельний осі абсцис. Це говорить про те, що Y не залежить від X, між ними немає лінійного зв'язку. Проте X та Y можуть бути зв'язані нелінійним зв'язком, який може опинитися як кореляційним, так і функціональним.

Дисперсія залежної змінної Y у точці $X = x_i$ відносно її умовного середнього S_y визначається за формулою:

$$S_y = D_y(1 - r_в^2), \tag{6.16}$$

де D_y – дисперсія Y щодо оцінки середньої.

Покладемо у формулі (6.16) $r_в = 1$, тоді

$$S_y = 0,$$

отже при $r_в = 1$ розсіювання значень залежної змінної Y у кожній точці відсутнє, рівняння (6.15) матиме вигляд $\overline{y_x} - \overline{y} - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \overline{x}) = 0$, тобто будь-яка пара чисел x та y йому задовольняє. Звідси випливає, що при $r_в = 1$ між X та Y існує функціональний лінійний зв'язок.

Із формули (6.15) також випливає, що зі збільшенням $r_в$ дисперсія залежної змінної Y відносно умовної середньої S_y зменшується, тобто зменшується розсіювання навколо умовних середніх, а це означає, що тіснота зв'язку збільшується.

Отже, статистична оцінка коефіцієнта кореляції приймає значення від –1 до +1 і характеризує тісноту лінійного зв'язку між досліджуваними змінними X та Y. Якщо $r_в = 0$, то лінійний зв'язок відсутній, чим ближче значення $|r_в|$ до одиниці, тим тісніше зв'язок, при $|r_в| = 1$ він стає функціональним.

Приклад 6.1. Нехай у результаті досліду отримані такі експериментальні дані:

x_i	1	2	3
y_i	1	3	4

Потрібно визначити параметри лінійної та квадратичної залежностей для X та Y.

Розв'язання. Нанесемо на координатну площину точки з координатами (x_i, y_i) (рис. 6.4). Із графіка видно, що точки не лежать на одній прямій та що із зростанням X Y має тенденцію до зростання.

1. Нехай шукана залежність є лінійною:

$$y = a_0 + a_1 x,$$

підставивши її у (6.5), дістанемо:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \to min.$$

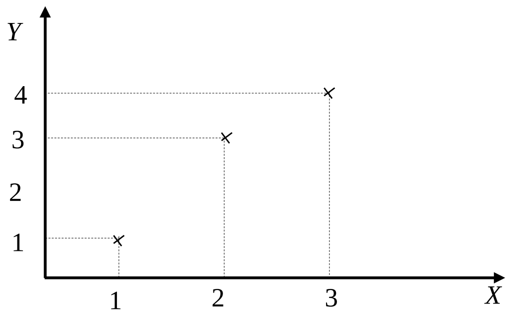


Рисунок 6.4 – Побудова поля кореляції

Візьмемо часткові похідні за параметрами a_1 і a_0 та дорівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} 2 \cdot \Sigma(y_i - a_0 - a_1 x_i) \cdot (-1) = 0 \\ 2 \cdot \Sigma(y_i - a_0 - a_1 x_i) \cdot (-x_i) = 0 \end{cases};$$

виконаємо перетворення:

$$\begin{cases} \Sigma a_0 + \Sigma a_1 x_i = \Sigma y_i \\ \Sigma a_0 x_i + \Sigma a_1 x_i^2 = \Sigma y_i x_i \end{cases}; \qquad \begin{cases} n a_0 + a_1 \Sigma x_i = \Sigma y_i \\ a_0 \Sigma x_i + a_1 \Sigma x_i^2 = \Sigma y_i x_i \end{cases}.$$

Підставимо значення: $n = 3$; $\Sigma x_i = 6$; $\Sigma x_i^2 = 14$; $\Sigma y_i = 8$; $\Sigma y_i x_i = 19$ та визначимо параметри.

$$\begin{cases} a_0 + 6 a_1 = 8 \\ 6a_0 + 14a_1 = 19 \end{cases}; \qquad \begin{cases} a_0 = -1/3 \\ a_1 = 1{,}5 \end{cases}.$$

Отже, шукана залежність має вигляд:

$$y = -\frac{1}{3} + 1{,}5\, x.$$

Отримана лінійна залежність є найбільш імовірною з лінійних залежностей.

2. Нехай шукана залежність – квадратична: $Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, підставимо її до виразу (6.6):

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2 \to min$$

та візьмемо часткові похідні й дорівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} 2 \cdot \Sigma(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) \cdot (-1) = 0 \\ 2 \cdot \Sigma(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) \cdot (-x_i) = 0, \\ 2 \cdot \Sigma(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) \cdot (-x_i^2) = 0 \end{cases}$$

виконаємо перетворення:

$$\begin{cases} \Sigma y_i - \Sigma a_0 - \Sigma a_1x_i - \Sigma a_2x_i^2 = 0 \\ \Sigma y_i\, x_i - \Sigma a_0x_i - \Sigma a_1x_i^2 - \Sigma a_2x_i^3 = 0, \\ \Sigma y_ix_i^2 - \Sigma a_0x_i^2 - \Sigma a_1x_i^3 - \Sigma a_2x_i^4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} na_0 + a_1\Sigma x_i + a_2\Sigma x_i^2 = \Sigma y_i \\ a_0\Sigma x_i + a_1\Sigma x_i^2 + a_2\Sigma x_i^3 = \Sigma y_i\, x_i, \\ a_0\Sigma x_i^2 + a_1\Sigma x_i^3 + a_2\Sigma x_i^4 = \Sigma y_ix_i^2 \end{cases}$$

Підставимо значення: $n = 3$; $\Sigma x_i = 6$; $\Sigma x_i^2 = 14$; $\Sigma y_i = 8$; $\Sigma y_i\, x_i = 19$; $\Sigma x_i^3 = 36$; $\Sigma x_i^4 = 98$; $\Sigma y_i\, x_i^2 = 49$ та визначимо параметри

$$\begin{cases} 3a_0 + 6\,a_1 + 14a_2 = 8 \\ 6\,a_0 + 14a_1 + 36a_2 = 19, \\ 14a_0 + 36a_1 + 98a_2 = 49 \end{cases}$$

звідки: $a_2 = -0{,}091$; $a_1 = 1{,}273$; $a_0 = 0{,}0455$.

Отже, найімовірніша квадратична залежність матиме вигляд:

$$y = 0{,}0455 + 1{,}273x - 0{,}091x^2.$$

Приклад 6.2. Визначити параметри лінійної регресії для системи випадкових величин *X* і *Y*, результати вимірювання яких наведені в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 – Вихідні дані

Номер досліду	x_i	y_i
1	4	0,041
2	8	0,05
3	10	0,081
4	14	0,104
5	16	0,12
6	20	0,139
7	19	0,154
8	23	0,18
9	26	0,208
10	30	0,241
11	31	0,25
12	36	0,269
13	37	0,301

Розв’язання. Для визначення параметрів лінійної залежності між *X* та *Y* скористаємось функціями Microsoft Excel та визначимо коефіцієнти ρ_{yx} і b за допомогою функції **ЛИНЕЙН** (рис. 6.5). Функція **ЛИНЕЙН** розраховує статистику для ряду із застосуванням методу найменших квадратів, щоб обчислити пряму лінію, яка щонайкраще апроксимує наявні дані. Функція повертає масив, який описує отриману пряму. Оскільки повертається масив значень, функція має задаватися у вигляді формули масиву.

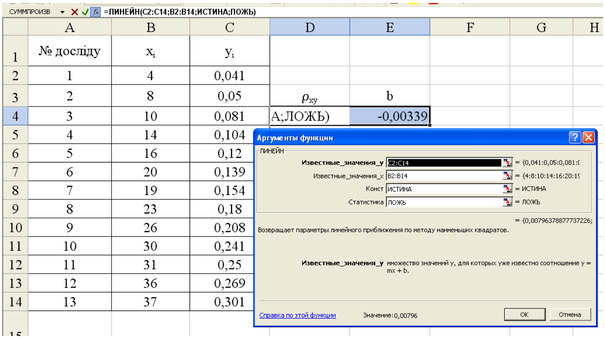


Рисунок 6.5 – Введення аргументів функції ЛИНЕЙН

Синтаксис функції:

=ЛИНЕЙН(известные_значения_у;известные_значения_х;конст;статистика),

де Известные_значения_у – множина значень *y*;

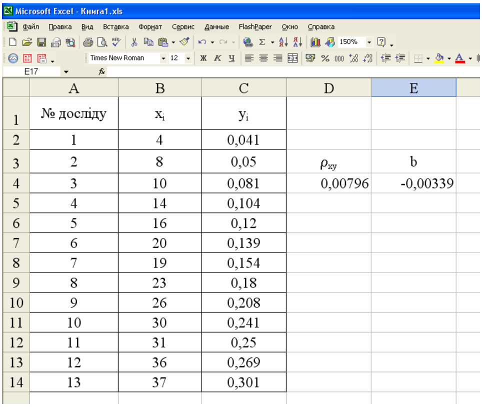
Известные_значения_х – необов’язкова множина значень *x*, якщо Известные_значения_*x* опущені, то передбачається, що це масив {1;2;3;...} такого ж розміру, як і Известные_значения_*y*;

Конст – логічне значення, що вказує, чи потрібно, щоб константа *b* дорівнювала 0. Якщо Конст має значення ИСТИНА або опущена, то *b* обчислюється звичайним способом. Якщо аргумент Конст має значення ЛОЖЬ, то *b* вважається рівним 0;

Статистика – логічне значення, що вказує, чи потрібно повернути додаткову статистику по регресії.

Оскільки функція повертає масив, виділимо в аркуші Excel дві комірки, в яких розмістяться параметри ρ_{yx} і *b* (рис. 6.5). Як аргумент Известные_значения_*y* вкажемо діапазон C2:C14, як аргумент Известные_значения_*x* – діапазон B2:B14. Щоб отримати ненульове значення *b*, в аргумент Конст введемо слово ИСТИНА. Оскільки нам не потрібні інші дані, в аргумент Статистика введемо слово ЛОЖЬ.

Для завершення введення функції скористаємось командою масиву: натискання функціональної клавіші F2, а потім комбінації клавіш Ctrl+Shift+Enter. Результат показаний на рисунку 6.6.



	A	B	C	D	E
1	№ досліду	x_i	y_i		
2	1	4	0,041		
3	2	8	0,05	ρ_{xy}	b
4	3	10	0,081	0,00796	-0,00339
5	4	14	0,104		
6	5	16	0,12		
7	6	20	0,139		
8	7	19	0,154		
9	8	23	0,18		
10	9	26	0,208		
11	10	30	0,241		
12	11	31	0,25		
13	12	36	0,269		
14	13	37	0,301		

Рисунок 6.6 – Визначення параметрів ρ_{yx} і b з використанням функції **ЛИНЕЙН**

Отже, шукана залежність має вигляд:

$$y = 0{,}00796x - 0{,}0034.$$

Запитання для самоперевірки

1. Які задачі вирішують методом кореляційного аналізу?

2. У яких випадках залежність $y = f(x)$ є функціональною, статистичною або кореляційною?

3. Дайте визначення термінів «регресія», «лінія регресії», «рівняння регресії».

4. З яких міркувань визначають тип кореляційної залежності $y = f(x)$? Які типи залежностей вам відомі?

5. Чим характерна лінійна залежність $y = f(x)$? Чому її використовують найчастіше?

6. Як називаються параметри лінійної залежності $y = f(x)$?

7. Які методи можна використовувати для визначення параметрів рівняння регресії $y = f(x)$?

8. Якій вимогі задовольняють параметри, що визначені за методом найменших квадратів?

9. Назвіть характеристики, що дозволяють оцінити наявність зв’язку між ознакою-фактором і результативною ознакою.

10. Які значення може приймати коефіцієнт кореляції, які висновки можна зробити на підставі цих значень?

11. Які значення може приймати кореляційне відношення, і які висновки можна зробити на підставі цих значень?

12. Що таке кореляційна таблиця?

13. Які параметри визначають за допомогою кореляційної таблиці?

14. Як перевірити значущість оцінки коефіцієнта кореляції?

15. У чому полягає загальна ідея регресійного аналізу?

16. Охарактеризуйте загальний вигляд лінійного рівняння регресії та зміст параметрів, що входять до рівняння.

Задачі для самостійного розв'язання

6.1. Результати вимірювань досліджуваної ознаки *Y* зведені в таблицю:

x_i	41	50	81	104	120	139	154	180	208	241	250	269	301
y_i	4	8	10	14	16	20	14	23	26	30	31	36	37

Використовуючи поле кореляції, вибрати клас залежності $y = f(x)$, побудувати рівняння регресії *Y* на *X*, оцінити тісноту зв'язку між фактором і результативною ознакою.

6.2. Результати вимірів фактора *X* і результативної ознаки *Y* наведені в таблиці:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	6	17	34	57	86	121	162	209

Користуючись методом найменших квадратів, визначити параметри апроксимуючої залежності $y = ax^2 + bx + c$.

6.3. У результаті статистичних спостережень зареєстрована залежність $u = f(t)$:

u_i	75	55	40	30	20	15	10	10	5	5
t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Визначити параметри експонентної апроксимуючої залежності.

6.4 На геодезичному пункті одночасно виконувались виміри кута двома теодолітами, з яких один був встановлений на сигналі, а інший – на штативі під сигналом. При цьому отримані результати:

Станція	Номер спостереження									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сигнал, 57º21′40″	3,21	2,21	2,11	2,49	3,19	3,29	4,41	2,67	0,75	2,20
Штатив, 57º21′40″	5,10	4,02	3,22	2,57	3,62	4,93	6,53	4,59	2,84	3,46

Обчислити оцінку коефіцієнта кореляції між спостереженнями на сигналі та на штативі й побудувати рівняння регресії значення кута, що виміряний на штативі залежно від значення кута, що отриманий на сигналі.

2 ОСОБЛИВОСТІ ОБРОБКИ ВИМІРЮВАНЬ У ПЛАНОВИХ І ВИСОТНИХ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖАХ

Тема 7 ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ФУНКЦІЙ ВИМІРЯНИХ ВЕЛИЧИН

Основні теореми теорії похибок. Визначення накопиченої похибки у геодезичних вимірах: під час передачі дирекційного кута за ходом в n поворотних точок, у сумі кутів полігона, у середній арифметичній n рівноточних вимірів кута, під час передачі висот за ходом у n станцій та у лінійних вимірах.

7.1 Основні теореми теорії похибок

У геодезичній практиці переважно використовують не окремі безпосередньо виміряні величини, а їхні функції, тобто застосовують непрямі вимірювання. Наприклад, нахил лінії визначають як відношення безпосередньо виміряного перевищення до довжини лінії. Довжину лінії, що недоступна для безпосереднього виміру, обчислюють із розв’язання трикутника, в якого безпосередньо вимірюють базисну сторону та горизонтальні кути. Площу земельної ділянки прямокутної форми обчислюють як добуток безпосередньо виміряної довжини та ширини ділянки. Перелік подібних прикладів можна продовжувати. Очевидно, що похибка функції залежить від похибок аргументів. Отже, виникає задача оцінювання точності функції виміряних величин за відомими характеристиками точності безпосередньо виміряних аргументів.

Зазвичай істинні похибки виміряних аргументів невідомі, а отже істинні похибки функцій можна визначити тільки якщо відома істинна величина функції, наприклад, сума виміряних кутів трикутника, або сума перевищень у замкненому висотному полігоні. У цих випадках похибку функції можна отримати як різницю між її теоретичним значенням та значенням, що обчислене за виміряними аргументами. Таку різницю називають **нев’язкою**.

Розглянемо задачі з визначення оцінок точності функцій за відомими оцінками точності їхніх аргументів. Зауважимо, що аргументи функції можуть опинитись як корельованими, так і некорельованими. Звернемось до задачі з визначення оцінок точності функцій за відомими оцінками точності некорельованих аргументів, для розв’язання якої сформульовано та доведено основні теореми теорії похибок.

Теорема 7.1. Нехай маємо лінійну функцію вигляду:

$$y = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n,$$

де C_i – постійні, визначені з теоретичних міркувань, ($i = \overline{1,n}$);

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – ряд результатів незалежних вимірів.

Результати вимірів отримані в умовах, що забезпечують точність, яка характеризується, систематичними похибками $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ та дисперсіями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$. Тоді систематичну похибку та дисперсію функції y можна обчислити за формулами:

$$\theta_y = C_1\theta_1 + C_2\theta_2 + \ldots + C_n\theta_n; \tag{7.1}$$

$$\sigma_y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \ldots + C_n^2\sigma_n^2. \tag{7.2}$$

Покажемо це. Нехай $L_1, L_2, \ldots, L_n$ – істинні значення виміряних величин, а Y – істинне значення їхньої лінійної функції. Тоді вірним є співвідношення:

$$Y = C_0 + C_1L_1 + C_2L_2 + \ldots + C_nL_n, \tag{7.3}$$

а отже значення функції y, що обчислене за результатами вимірів, матиме вигляд:

$$y = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n. \tag{7.4}$$

Для переходу до похибки лінійної функції від (7.4) віднімемо (7.3) та отримаємо:

$$y - Y = C_0 + C_1(x_1 - L_1) + \ldots + C_n(x_n - L_n)\,. \tag{7.5}$$

Нагадаємо, що кожен результат виміру x_i у загальному випадку є сумою двох складників – істинного значення вимірюваної величини L, яке нам невідоме, та похибки виміру ε_i, яка змінюється від одного виміру до іншого, тобто

$$x_i = L + \varepsilon_i, \qquad \text{або} \;\; \varepsilon_i = x_i - L_i. \tag{7.6}$$

Позначимо похибку функції $\varepsilon_y = y - Y$ та із врахуванням (7.6) із формули (7.5) отримаємо такий вираз:

$$\varepsilon_y = C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \ldots + C_n\varepsilon_n. \tag{7.7}$$

Перейдемо від похибок результатів вимірів до їхніх математичних сподівань, ураховуючи, що математичне сподівання суми дорівнює сумі математичних сподівань, отримаємо:

$$M(\varepsilon_y) = M(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \ldots + C_n\varepsilon_n). \tag{7.8}$$

Беручи до уваги, що $M(\varepsilon_y) = \theta_y$ і $M(\varepsilon_i) = \theta_i$, рівність (7.8) можна привести до вигляду рівності (7.1):

$$\theta_y = C_1\theta_1 + C_2\theta_2 + \ldots + C_n\theta_n.$$

Обчислимо дисперсію лівої та правої частин рівності (7.7):

$$D(\varepsilon_y) = D(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \ldots + C_n\varepsilon_n). \tag{7.9}$$

Оскільки дисперсії результатів вимірів відомі, та враховуючи, що для незалежних величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дисперсія суми дорівнює сумі дисперсій, до того ж постійні коефіцієнти при доданках виносять за знак дисперсії у квадраті, а також що $D(\varepsilon_y) = \sigma_y^2$ та $D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$ рівність (7.9) приведемо до вигляду (7.2):

$$\sigma_y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \ldots + C_n^2\sigma_n^2.$$

Отже вирази (7.1) та (7.2) є справедливими.

Теорема 7.2. Нехай маємо функцію у довільного виду, яка є диференційованою:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – ряд результатів незалежних вимірів, ($i = \overline{1,n}$).

Незалежні виміри отримані в умовах, що забезпечують точність із систематичними похибками $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ та дисперсіями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$.

Тоді систематичну похибку та дисперсію функції у можна обчислити за формулами:

$$\theta_y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\theta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\theta_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\theta_n; \qquad (7.10)$$

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\sigma_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\sigma_n\right)^2. \qquad (7.11)$$

Покажемо це. Нехай $L_1, L_2, \ldots, L_n$ – істинні значення вимірюваних величин, а Y – істинне значення їхньої функції:

$$Y = f(L_1, L_2, \ldots, L_n), \qquad (7.12)$$

тоді обчислене за результатами вимірів значення функції має вигляд:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (7.13)$$

Перейдемо до похибки функції y, для чого з рівності (7.13) віднімемо рівність (7.12), отримаємо:

$$y - Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(L_1, L_2, \ldots, L_n). \qquad (7.14)$$

Похибки вимірів можна розглядати як прирощення аргументів, тоді рівності (7.14) можна надати такий вигляд:

$$y - Y = \Delta y = f(L_1 + \varepsilon_1, \ldots, L_n + \varepsilon_n) - f(L_1, \ldots, L_n). \qquad (7.15)$$

За умовою функція $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є функцією довільного вигляду, зокрема вона може бути нелінійною, що зазвичай істотно утруднює розв’язання задач. Але більшість геодезичних задач містить нелінійні співвідношення, і тому часто доводиться застосовувати відомий із вищої математики прийом спрощення нелінійного виразу – розкладання нелінійної функції у ряд Тейлора з метою її лінеаризації.

Нагадаємо, що будь-який вираз є лінійним (графіком лінійного виразу є пряма лінія), якщо він не містить змінних у степенях, або добутків змінних, або іншого виду нелінійних складників.

Для лінеаризації функції $f_i(t_1, \ldots, t_k)$ застосовують формулу розкладання Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dots +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + R_n(x).$$

Зауважимо, що розкладання функції у ряд Тейлора є справедливим тільки для оточення певної точки, в якої відомі значення $x_i^0,\ i = \overline{1, n}$.

Отже, вираз (7.15) є нелінійним, але його можна розкласти у ряд Тейлора:

$$\Delta y = f(L_1, \dots,\ L_n) - f(L_1, \dots, L_n) +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \varepsilon_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \varepsilon_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 \varepsilon_n + R_n(x),$$

де $R_n(x)$ – остаточний член розкладання, яким зазвичай можна знехтувати.

Числові значення похідних можна визначити за наближеними значеннями відповідних аргументів.

Будемо вважати прирощення функції Δy за істинну похибку функції y, тоді отримаємо

$$\varepsilon_y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\varepsilon_n. \tag{7.16}$$

Отже, рівність (7.16) виражає похибку функції як лінійну комбінацію незалежних похибок результатів вимірів. Перетворимо її на підставі теореми 7.1 та отримаємо:

$$\theta_y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\theta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\theta_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\theta_n\ ;$$
$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\sigma_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\sigma_n\right)^2,$$

тобто отримали вирази, ідентичні (7.10) та (7.11).

Зауважимо, що теореми 7.1 та 7.2 доведені для теоретичних характеристик точності θ і σ^2. Проте у практиці геодезичних дій доводиться застосовувати їхні статистичні оцінки θ та m^2. Тоді формули (7.1), (7.2), (7.10), (7.11) мають такий вигляд:

$$\bar{\theta}_y = C_1\bar{\theta}_1 + C_2\bar{\theta}_2 + \ldots + C_n\bar{\theta}_n; \tag{7.18}$$
$$m_y^2 = C_1^2 m_1^2 + C_2^2 m_2^2 + \ldots + C_n^2 m_n^2; \tag{7.19}$$
$$\bar{\theta}_y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\bar{\theta}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\bar{\theta}_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\bar{\theta}_n; \tag{7.20}$$
$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}m_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}m_n\right)^2. \tag{7.21}$$

7.2 Визначення накопиченої похибки у геодезичних вимірах

На підставі основних теорем теорії похибок (7.1) і (7.2) можна визначити закони накопичення похибок під час проведення певних видів геодезичних вимірів, зокрема, таких як передача дирекційного кута за ходом в n поворотних точок, у сумі кутів полігона, у середньому арифметичному n рівноточних вимірів кута, передача висот за ходом у n станцій та у лінійних вимірах. Отриманими формулами доцільно скористатися під час планування геодезичних робіт та для апостеріорного оцінювання точності результатів виміру.

Розглянемо задачу визначення накопиченої похибки у результаті передачі дирекційного кута за ходом в n поворотних точок. Нехай прокладений теодолітний хід, схему якого наведено на рисунку 7.1.

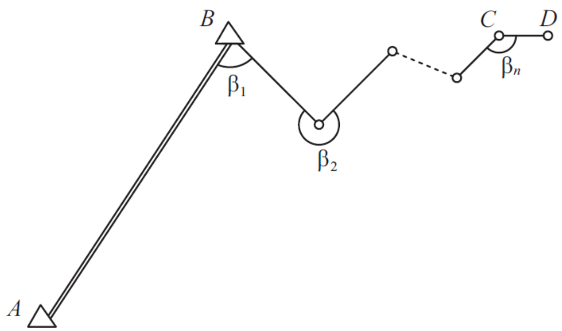


Рисунок 7.1 – Схема теодолітного ходу

Кути теодолітного ходу $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ виміряні незалежно один від одного в однакових умовах, що забезпечило рівні одна одній систематичні похибки $\theta_1 = \theta_2 =... = \theta_n = \theta_\beta$ та рівні одна одній середньоквадратичні похибки $m_1 = m_2 =... = m_n = m_\beta$. Потрібно розрахувати систематичну $\theta_{\alpha_{CD}}$ та середньоквадратичну $m_{\alpha_{CD}}$ похибки дирекційного кута останньої лінії ходу.

Будемо вважати, шо значення вихідного дирекційного кута α_{AB} лінії AB отримане з похибками, що зневажливо малі порівняно з похибками вимірів. Отже, α_{AB} вважаємо точною величиною.

Запишемо дирекційний кут лінії CD як функцію вихідних та виміряних величин. Оскільки виміряні праві за ходом кути, шуканий дирекційний кут має такий вигляд:

$$\alpha_{CD} = \alpha_{AB} + 180° \cdot n - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_n.$$

Перетворимо вираз, позначивши суму точних величин у формулі $\alpha_{AB} + 180°\cdot n = C_0$:

$$\alpha_{CD} = C_0 - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_n.$$

Для визначення похибки систематичного впливу скористаємось формулою (7.18), яка враховує тільки систематичні похибки вимірів, дістанемо:

$$\theta_{\alpha_{CD}} = -\theta_1 - \theta_2 - \ldots - \theta_n,$$

або, оскільки θ_i дорівнюють одна одній, маємо:

$$\theta_{\alpha_{CD}} = -n \cdot \theta_\beta\ . \qquad (7.22)$$

Визначимо квадрат СКП дирекційного кута останньої лінії теодолітного ходу CD, скориставшись формулою (7.19):

$$m_{\alpha_{CD}}^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2,$$

або, оскільки m_i дорівнюють одна одній, маємо:

$$m_{\alpha_{CD}}^2 = m_\beta^2 \cdot n.$$

Отже, накопичену СКП у результаті передачі дирекційного кута за ходом в n поворотних точок можна обчислити за формулою:

$$m_{\alpha_{CD}} = m_\beta \cdot \sqrt{n}. \qquad (7.23)$$

З отриманих формул (7.22) та (7.23) випливає, що під час передачі дирекційних кутів систематичні похибки накопичуються пропорційно числу виміряних кутів, а випадкові – пропорційно кореню квадратному з числа кутів.

Розглянемо задачу визначення накопиченої похибки у сумі кутів полігона. Нехай у багатокутнику виміряні всі внутрішні кути β_1, β_2, ..., β_n. Точність їх вимірювань характеризується однаковими систематичними похибками $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = \theta_\beta$ та СКП $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m_\beta$. Визначимо систематичну та середньоквадратичну похибки суми кутів багатокутника.

Скористуємось формулами (7.18) і (7.19) та отримаємо:

$$\theta_{\Sigma\beta} = n \cdot \theta_\beta; \qquad (7.24)$$

$$m_{\Sigma\beta} = m_\beta \cdot \sqrt{n}. \qquad (7.25)$$

Отже, сума кутів багатокутника має систематичну похибку, яка у n разів перевищує, та середньоквадратичну похибку, що у корінь з n разів перевищує відповідні похибки виміряних кутів.

Розглянемо задачу визначення накопиченої похибки у середньому арифметичному n рівноточних вимірів кута. Нехай один і той самий кут виміряний n разів та отримані результати β_1, β_2, ..., β_n, з однаковими систематичними похибками $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = \theta_\beta$ та однаковими СКП $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m_\beta$. Обчислимо систематичну та середньоквадратичну похибки середньої арифметичної виміряних значень кута $\bar{\beta}$. Середня арифметична виміряних значень кута визначається формулою:

$$\bar{\beta} = \frac{1}{n} \cdot \beta_1 + \frac{1}{n} \cdot \beta_2 + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \beta_n.$$

Оскільки коефіцієнти $C_i = \frac{1}{n}$, систематична похибка середнього арифметичного $\bar{\beta}$ відповідно до формули (7.18) становить

$$\theta_{\bar{\beta}} = \theta_{\beta}. \quad (7.26)$$

Тобто систематична похибка середнього арифметичного виміряних значень кута залишається такою самою, як і систематична похибка одиничного виміру. З цього випливає, що **за наявності систематичних похибок у результатах вимірів підвищення точності неможливе без їх виключення**.

Для квадрата СКП середнього арифметичного виміряних значень кута відповідно до формули (7.19) маємо вираз:

$$m_{\bar{\beta}}^2 = \frac{m_{\beta}^2}{n},$$

а для СКП середнього арифметичного виміряних значень кута:

$$m_{\bar{\beta}} = \frac{m_{\beta}}{\sqrt{n}}. \quad (7.27)$$

Отже, **середня квадратична похибка середньої арифметичної у корінь з *n* разів менша порівняно з середньою квадратичною похибкою одиничного виміру**. Цей висновок цілком стосується не тільки кутових вимірів, але й інших рівноточних вимірів будь-якого роду.

Розглянемо задачу визначення похибки. Нехай прокладено нівелірний хід з n станцій. Перевищення на станціях нівелірного ходу виміряні незалежно одно від одного. Виміри проводили в однакових умовах, та отже систематичні похибки дорівнюють одна одній $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = \theta_{ст}$ і СКП так само дорівнюють одна одній $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m_{ст}$. Визначимо систематичну θ_{H_B} і середньоквадратичну m_{H_B} похибки висоти кінцевої точки ходу H_B. Будемо вважати, що значення висоти початкової точки ходу H_A є точним. Запишемо висоту точки B H_B як функцію вихідної та виміряних величин:

$$H_B = H_A + h_1 + h_2 + \ldots + h_n.$$

Ураховуючи, що H_A – величина точна, скористаємось формулою (7.18) для визначення систематичної похибки висоти останньої точки ходу, отримаємо:

$$\theta_{H_B} = \theta_{ст} \cdot n, \quad (7.28)$$

а для квадрата СКП висоти останньої точки ходу за формулою (7.19) запишемо

$$m_{H_B}^2 = m_{ст}^2 \cdot n.$$

Тоді накопичену СКП у результаті передачі висот за нівелірним ходом у n станцій можна обчислити за формулою:

$$m_{\text{Н}_B} = m_{\text{ст}} \cdot \sqrt{n}. \tag{7.29}$$

З отриманих формул (7.28) та (7.29) випливає, що під час передачі висот точок **систематичні похибки накопичуються пропорційно числу виміряних перевищень**, **а випадкові – пропорційно кореню квадратному з їх числа**. Отже, закон накопичення систематичних та випадкових похибок не змінюється при використанні різних характеристик нівелірних ходів, будь то довжина ходу або число станцій у ході: систематичні похибки накопичуються пропорційно кількісній характеристиці ходу, а випадкові – пропорційно кореню квадратному з кількісної характеристики ходу.

Під час нівелювання на рівнинній місцевості відстані між рейками є приблизно однаковими, тому кількість станцій нівелірного ходу дорівнює:

$$n = \frac{L}{l_{\text{сер}}},$$

де L – довжина нівелірного ходу;

$l_{\text{сер}}$ – середня відстань між рейками.

Тоді вирази (7.28) та (7.29) можна перетворити в такий спосіб:

$$\theta_{H_B} = \theta_{\text{ст}} \cdot \frac{\text{L}}{l_{\text{сер}}};$$

$$m_{\text{Н}_B} = m_{\text{ст}} \cdot \sqrt{\frac{\text{L}}{l_{\text{сер}}}}.$$

Позначимо $\frac{\theta_{\text{ст}}}{l_{\text{сер}}} = \tau_{h_{\text{км}}}$ та $\frac{m_{\text{ст}}}{\sqrt{l_{\text{сер}}}} = \mu_{h_{\text{км}}}$, тоді остаточно маємо:

$$\theta_{H_B} = \tau_{h_{\text{км}}} L; \tag{7.30}$$

$$m_{\text{Н}_B} = \mu_{h_{\text{км}}} \cdot \sqrt{L}. \tag{7.31}$$

Величини $\tau_{h_{\text{км}}}$ і $\mu_{h_{\text{км}}}$ є систематичною та середньоквадратичною похибками перевищення за ходом завдовжки 1 кілометр. Це видно, якщо підставити у вирази L = 1 км. Ці величини називають коефіцієнтом систематичного і коефіцієнтом випадкового впливу у геометричному нівелюванні, а також кілометричною систематичною похибкою та кілометричною СКП нівелювання.

Розглянемо задачу визначення накопиченої похибки у лінійних вимірах. Нині у геодезичному виробництві застосовують два типи лінійних вимірів, що істотно відрізняються один від одного за принципом вимірів:

– безпосереднє вимірювання ліній із використанням мірного приладу, який укладають у створ вимірюваної лінії, зокрема це виміри, що виконують рулеткою, мірною стрічкою або проволокою;

– непрямі виміри, що пов’язані з вимірюванням часу проходження сигналу від приладу до відбивача та назад, до яких належать виміри за допомогою світло- або радіовіддалемірів.

Вказані типи вимірів відрізняються один від одного за характером накопичення похибок.

Розглянемо безпосереднє вимірювання ліній. Процес виміру лінії стрічкою (проволокою, рулеткою) за власною структурою дуже наближений до геометричного нівелювання, в обох випадках остаточний результат отримують як суму окремих елементів, тобто перевищень на станціях нівелірного ходу, або довжин відрізків між штативами під час виміру довжини лінії проволокою, або довжини відрізків між шпильками під час виміру лінії мірною стрічкою. Однаковий характер процесів виміру визначає однотипний характер накопичення похибок вимірів. Тому для лінії S, що виміряна стрічкою l та обчислена за формулою $S = l \cdot n$, систематичну й середню квадратичну похибки розраховують за формулами:

$$\theta_S = \theta_l \cdot n\,; \qquad m_S = m_l \cdot \sqrt{n}, \tag{7.32}$$

де θ_l – систематична похибка одного укладання стрічки;

m_l – СКП одного укладання стрічки;

n – кількість укладань стрічки у створі вимірюваної лінії.

Як і у нівелірних роботах, похибки вимірів ліній можна представити з використанням довжини лінії. Для цього у формулах (7.32) замість n потрібно підставити його вираз через S. Тоді маємо:

$$\theta_S = \theta_l \cdot \frac{S}{l}\,; \qquad m_S = m_l \cdot \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{l}}. \tag{7.33}$$

Якщо у формулах (7.31) ввести відповідні позначення, отримаємо:

$$\tau_S = \frac{\theta_l}{l}\,; \qquad \mu_S = \frac{m_l}{\sqrt{l}}. \tag{7.34}$$

Отже, остаточно вирази (7.30) матимуть вигляд

$$\theta_S = \tau_S \cdot S\,; \qquad m_S = \mu_S \cdot \sqrt{S}. \tag{7.35}$$

Величини τ_S та μ_S є відповідно систематичною та середньою квадратичною похибками виміру лінії довжиною в один метр. Іноді ці величини називають **коефіцієнтом систематичного** та **коефіцієнтом випадкового впливу** у лінійних вимірах.

Фізична основа лінійних вимірів довжин ліній за допомогою світло- та радіодалекомірами істотно відрізняється від вимірів, що виконують безпосередньо за методом «нарощення», коли остаточний результат є сумою окремих елементарних довжин, які вимірювали безпосередньо.

У світло- та радіовіддалемірних вимірах фіксується час проходження сигналу від приладу до відбивача та назад. Тому точність остаточного результату істотно визначається точністю виміру відрізку часу, що не завжди пов'язане із довжиною цього відрізка. Але у практиці світло- й радіодалекомірних вимірів для конкретного типу приладів у дуже широкому діапазоні довжин ліній ці виміри можна вважати рівноточними. Досить якісні характеристики точності можна отримати за паспортними даними вимірювального приладу.

Приклад 7.1. У трикутника виміряні два кути β_1 та β_2 із середніми квадратичними похибками $m_{\beta_1} = 5''$; $m_{\beta_2} = 3''$. Знайти m_{β_3}.

Розв'язання. Складемо функцію $f = \beta_3 = 180° - \beta_1 - \beta_2$ і скористаємось виразом (7.21):

$$m_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \beta_1}\right)^2 m_{\beta_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_2}\right)^2 m_{\beta_2}^2},$$

далі визначимо похідні:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \beta_1}\right)' = (180° - \beta_1 - \beta_2)' = 0 - 1 - 0 = 1;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \beta_2}\right)' = (180° - \beta_1 - \beta_2)' = 0 - 1 - 0 = 1.$$

Маємо:

$$m_f = \sqrt{1^2 m_{\beta_1}^2 + 1^2 m_{\beta_2}^2} = \sqrt{m_{\beta_1}^2 + m_{\beta_2}^2}.$$

Обидві частини останнього виразу піднесемо у квадрат, отримаємо:

$$m_f^2 = m_{\beta_1}^2 + m_{\beta_2}^2.$$

Зауважимо, що у випадку, коли функція безпосередньо виміряних величин є лінійною, тобто має вигляд:

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n,$$

її середню квадратичну похибку m_y визначають за формулою (7.19) у такий спосіб:

$$m_y^2 = C_1^2 \cdot m_1^2 + C_2^2 \cdot m_2^2 + \cdots + C_n^2 \cdot m_n^2,$$

де C_i – коефіцієнти при безпосередньо виміряних змінних x_i.

Формула (7.19) є частковим випадком формули (7.21).

Варто зауважити, що лінійним вважають вираз, який являє собою суму доданків, до того ж доданки не є нелінійними функціями, зокрема змінними у будь-якому степені, та не є добутками змінних. Також зауважимо, що у цьому випадку часткові похідні $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ функції *y* дорівнюють коефіцієнтам при змінних x_i C_i, які далі за формулою (7.21) піднесені у квадрат та помножені на m_i^2.

Отже, продовжимо розв'язання задачі та отримаємо:

$$\beta_3 = m_f = \sqrt{m_{\beta_1}^2 + m_{\beta_2}^2} = \sqrt{(5'')^2 + (3'')^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} = 5{,}8''.$$

Приклад 7.2. Кут обчислений як середнє з його *n* значень. Знайти середню квадратичну похибку отриманого значення кута, якщо похибка одного виміру дорівнює *m*.

Розв'язання. Оскільки середнє низки значень обчислюють за виразом

$$y = \frac{[x_i]}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

маємо лінійну функцію, де коефіцієнтами при x_i є $\frac{1}{n}$ і можна скористатися формулою (7.19)

$$m_y^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2 = \frac{nm^2}{n^2} = \frac{m^2}{n},$$

звідки

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Приклад 7.3. Знайти середні квадратичні похибки приростів координат, що обчислюють у геодезії за формулами $\Delta x = S \cdot cos\alpha$ та $\Delta y = S \cdot sin\alpha$, якщо довжина лінії S = 127,00 м, дирекційний кут $\alpha = 32°00'$, а похибки m_S = 0,03 м, та m_α= 1,5'.

Розв'язання. Для визначення середньої квадратичної похибки прирощення координати $\Delta x = S \cdot cos\alpha$ скористаємось формулою (7.21):

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2}$$

та обчислимо часткові похідні функції $\Delta x = S \cdot cos\alpha$:

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial S} = (S \cdot cos\alpha)' = cos\alpha;$$

(нагадаємо правило диференціювання $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, якщо с постійна, (cosα)' = −sinα, (sinα)' = cosα);

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial \alpha} = (S \cdot cos\alpha)' = -S \cdot sin\alpha.$$

Визначені похідні підставимо до формули, отримаємо

$$m_{\Delta x} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta x}{\partial S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2} =$$

$$= \sqrt{cos^2\alpha \cdot m_S^2 + S^2 \cdot sin^2\alpha \cdot m_\alpha^2} =$$

потрібно врахувати, що m_α = 1,5' слід попередньо виразити у радіанах: 1 градус = π/180 = 0,017453 рад, 1 хвилина = 0,017/60 = 0,000291 рад, 1,5 хвилини = 0,000291 · 1,5 = 0,000436 рад.

$$= \sqrt{0{,}848^2 \cdot 0{,}03^2 + 127^2 \cdot 0{,}53^2 \cdot m_\alpha^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}719 \cdot 9 \cdot 10^{-4} + 16129 \cdot 0{,}281 \cdot 0{,}000436^2} =$$

$$= \sqrt{6{,}47 \cdot 10^{-4} + 8{,}62 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{0{,}0151} = 0{,}039 \text{ м}.$$

Аналогічно визначимо середню квадратичну похибку прирощення координати $\Delta y = S \cdot sin\alpha$. Обчислимо часткові похідні функції $\Delta y = S \cdot sin\alpha$

$$\frac{\partial \Delta y}{\partial S} = (S \cdot sin\alpha)' = sin\alpha;$$

(нагадаємо правило диференціювання $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, *якщо с постійна, (cosα)' = −sinα, (sinα)' = cosα);*

$$\frac{\partial \Delta y}{\partial \alpha} = (S \cdot sin\alpha)' = -S \cdot cos\alpha.$$

Визначені похідні підставимо до формули, отримаємо

$$m_{\Delta Y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta y}{\partial S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial \Delta y}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2} =$$

$$= \sqrt{sin^2\alpha \cdot m_S^2 + S^2 \cdot cos^2\alpha \cdot m_\alpha^2} =$$

потрібно врахувати, що m_α *= 1,5' слід попередньо виразити у радіанах: 1 градус = π/180 = 0,017453 рад, 1 хвилина = 0,017/60 = = 0,000291 рад, 1,5 хвилини = 0,000291 · 1,5 = 0,000436 рад*

$$= \sqrt{0{,}53^2 \cdot 0{,}03^2 + 127^2 \cdot 0{,}848^2 \cdot 0{,}000436^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}281 \cdot 9 \cdot 10^{-4} + 16129 \cdot 0{,}719 \cdot 1{,}9 \cdot 10^{-7}} =$$

$$= \sqrt{2{,}53 \cdot 10^{-4} + 22{,}08 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{0{,}00246} = 0{,}0496 \text{ м.}$$

Отже, отримали результат: $m_{\Delta x} = 0{,}04$ м; $m_{\Delta Y} = 0{,}05$ м.

Приклад 7.4. Довжина лінії d = 120,0 м, середня квадратична похибка виміру становить m_d = 0,1 м. Дирекційний кут лінії α = 60°00', середня квадратична похибка виміру дирекційного кута m_α = 1,5'. Обчислити прирощення координат *ΔX*, *ΔY* та їхні середні квадратичні похибки $m_{\Delta X}$ та $m_{\Delta Y}$.

Розв'язання. Користуючись рисунком 7.2, виразимо прирощення координат *ΔX* та *ΔY* через безпосередньо виміряні величини – лінію d та дирекційний кут α, отримаємо:

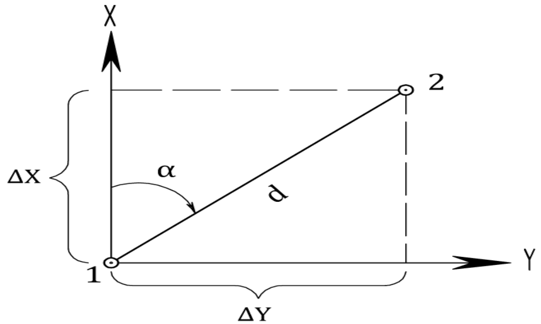


Рисунок 7.2 – Геометричне подання умови прикладу 7.4

$$\Delta X = d \cdot cos\alpha; \qquad \Delta Y = d \cdot sin\alpha.$$

Підставимо до виразів прирощень координат числові значення та обчислимо їх:

$\Delta X = 120 \cdot cos60°00' = 60{,}0$ м; $\qquad \Delta Y = 120 \cdot sin60°00' = 103{,}9$ м.

Для визначення середньої квадратичної похибки функцій ΔX та ΔY скористаємось формулою (7.21), попередньо визначивши часткові похідні функцій ΔX та ΔY з виразів прирощень координат.

Відповідно до формул диференціювання:

$(cu)' = cu'$, де c – постійна, та (cosα)' = –sinα та (sinα)' = cosα, отримаємо:

часткова похідна функції $\Delta X = d \cdot cos\alpha$ за змінною d дорівнює

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial d} = \frac{\partial d \cdot cos\alpha}{\partial d} = 1 \cdot cos\alpha = cos\alpha;$$

часткова похідна функції $\Delta X = d \cdot cos\alpha$ за змінною α дорівнює:

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha} = \frac{\partial d \cdot cos\alpha}{\partial \alpha} = d \cdot (cos\alpha)' = d \cdot (-sin\alpha) = -d \cdot sin\alpha;$$

часткова похідна функції $\Delta Y = d \cdot sin\alpha$ за змінною d дорівнює

$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial d} = \frac{\partial d \cdot sin\alpha}{\partial d} = 1 \cdot sin\alpha = sin\alpha;$$

часткова похідна функції $\Delta Y = d \cdot cos\alpha$ за змінною α дорівнює:

$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha} = \frac{\partial d \cdot sin\alpha}{\partial \alpha} = d \cdot (sin\alpha)' = d \cdot cos\alpha.$$

Визначимо числові значення отриманих часткових похідних:

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial d} = cos\alpha = cos\,60°00' = 0{,}5;$$

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha} = -d \cdot sin\alpha = -120 \cdot sin\,60°00' = -120 \cdot 0{,}866 = -103{,}92 \text{ м};$$

$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial d} = sin\alpha = 0{,}866;$$

$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha} = d \cdot cos\alpha = 120 \cdot cos\,60°00' = 120 \cdot 0{,}5 = 60{,}00 \text{ м}.$$

Обчислимо середні квадратичні похибки $m_{\Delta X}$ та $m_{\Delta Y}$ прирощень координат ΔX та ΔY за формулою (7.21), але попередньо переведемо похибку m_α з хвилин у радіани:

$$1° = \frac{2\pi}{360} = 0{,}0174 \text{ рад};$$

$$1{,}5' = \frac{0{,}0174}{60'} \cdot 1{,}5' = 0{,}000436 \text{ рад},$$

тоді маємо:

$$m_{\Delta X} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta X}{\partial d}\right)^2 m_{\Delta X}^2 + \left(\frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha}\right)^2 m_{\Delta X}^2} =$$

$$= \sqrt{(0{,}5)^2 \cdot 0{,}1^2 + (103{,}92)^2 0{,}000436^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}0025 + 0{,}0021} = \sqrt{0{,}004554} = 0{,}0675 \text{ м};$$

$$m_{\Delta Y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta Y}{\partial d}\right)^2 m_{\Delta Y}^2 + \left(\frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha}\right)^2 m_{\Delta Y}^2} = \sqrt{(0{,}866)^2 \cdot 0{,}1^2 + (60{,}00)^2 m_{\Delta Y}^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}0075 + 0{,}000685} = \sqrt{0{,}008185} = 0{,}0905 \text{ м.}$$

Отже, середні квадратичні похибки прирощень координат *ΔX* та *ΔY* дорівнюють:

$$m_{\Delta X} = 0{,}0675 \text{ м;}$$
$$m_{\Delta Y} = 0{,}0905 \text{ м.}$$

Приклад 7.5. Шляхом проведення вимірювань отримані наступні результати (рис. 7.3): перевищення h_{AB} = 12,6 м, довжина проєкції лінії *AB* d_{AB} = 468 м, оцінки їхньої точності, тобто середні квадратичні похибки становлять відповідно m_{h} = 0,1 м, m_{d} = 0,5 м. Визначити середню квадратичну похибку ухилу лінії *AB*.

Розв'язання. Використовуючи рекомендовану послідовність оцінювання точності функції виміряних величин, запишемо функцію виміру ухилу, як відому з геометрії, та введемо позначення $y = tg\alpha = \frac{h_{AB}}{d_{AB}}$. Підставимо числові значення та обчислимо $y = \frac{h_{AB}}{d_{AB}} = \frac{12{,}6}{468}$ = 0,027.

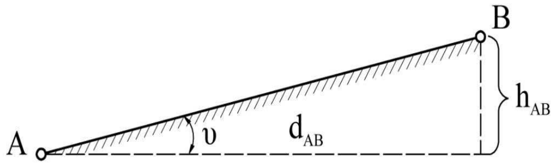


Рисунок 7.3 – Геометричне подання ухилу

Оскільки похибки вимірювань відомі, скористаємось формулою (7.1) та визначимо середню квадратичну похибку функції *y*.

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2},$$

де $\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2$ – часткові похідні функції *y*;

m_i – середні квадратичні похибки безпосередньо виміряних величин.

Запишемо:

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial h_{AB}}\right)^2 m_{h_{AB}}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial d_{AB}}\right)^2 m_{d_{AB}}^2}.$$

Далі визначимо часткові похідні функції $y = \frac{h_{AB}}{d_{AB}}$ за змінними h_{AB} і d_{AB}. Продиференціюємо функцію *y* за змінною h_{AB}, вважаючи d_{AB} незмінною, отримаємо

$$\left(\frac{\partial y}{\partial h_{AB}}\right) = \left(\frac{h_{AB}}{d_{AB}}\right)' = \frac{1}{d_{AB}} = \frac{1}{468} = 0{,}00213\ \frac{1}{\text{м}}.$$

Продиференціюємо функцію y за змінною d_{AB}, вважаючи h_{AB} незмінною та скориставшись формулою похідної $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, отримаємо:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial d_{AB}}\right) = \left(\frac{h_{AB}}{d_{AB}}\right)' = -\frac{h_{AB}}{(d_{AB})^2} = -\frac{12{,}6}{468^2} = -0{,}000057\ \frac{1}{\text{м}}.$$

Підставимо числові значення у формулу та обчислимо середньоквадратичну похибку ухилу:

$$m_y = \sqrt{(0{,}00213)^2 * 0{,}1^2 + (0{,}000057)^2 * 0{,}5^2} = 0{,}000216.$$

Мала величина m_y свідчить про точне визначення ухилу заданої лінії.

Запитання для самоперевірки

1. Як накопичуються систематичні похибки при передачі дирекційних кутів?

2. Як накопичуються випадкові похибки при передачі дирекційних кутів?

3. Виміряні дві величини, потім обчислені їхня сума та різниця. Як співвідносяться їхні СКП?

4. Що є спільним у законі накопичення випадкових похибок при передачі дирекційного кута та передачі висот методом геометричного нівелювання?

5. Охарактеризуйте поведінку випадкових та систематичних похибок при обчисленні середньоарифметичного ряду рівноточних вимірів однієї величини?

6. Лінія ходу вимірюється мірною стрічкою. Як накопичуються систематичні та випадкові похибки при такому вимірюванні?

7. Два результати вимірів однієї величини містять однакові систематичні похибки та характеризуються одним і тим самим СКП. Чому дорівнюватимуть систематична похибка та СКП різниці цих результатів вимірів?

8. Поясніть, що таке «коефіцієнт випадкового впливу» в геометричному нівелюванні.

9. Поясніть, що таке «коефіцієнт випадкового впливу» у лінійних вимірюваннях.

10. Чому в тригонометричному нівелюванні обмежують коливання місця нуля?

11. Поясніть, як накопичуються систематичні та випадкові похибки, якщо сумують рівноточні доданки.

Задачі для самостійного розв’язання

7.1. Обчислити граничну похибку в сумі кутів полігону, що має 12 вершин, якщо відомо, що СКП виміру кожного кута дорівнює $m_\beta = 0{,}5'$.

7.2. При прокладанні теодолітного ходу межами землекористування передбачається виміряти 25 кутів. Яких граничних розмірів може досягнути кутова нев’язка у цьому ході, якщо СКП виміру одного кута дорівнює $m_\beta = 0{,}5'$?

7.3. СКП виміру кута одним повним прийомом дорівнює $m_\beta = 0{,}5'$. Яких розмірів може досягнути різниця результатів двократного виміру кута з такою точністю? Яка СКП середнього цих результатів вимірів?

7.4. Полігонометричний хід має 16 сторін. Дирекційний кут вихідної сторони визначений з СКП $m_\alpha = 10''$, а кути в ході вимірювали з СКП $m_\beta = 15''$. Знайти СКП дирекційного кута останньої лінії хода.

7.5. Обчислити граничне значення різниці перевищень, що отримані у прямому та у зворотному напрямах за ходом геометричного нівелювання довжиною 5 км, якщо СКП визначення на станції дорівнює 1 мм та якщо на кожен кілометр ходу припадає 5 станцій.

7.6. Коефіцієнт випадкового впливу при лінійних вимірах дорівнює 0,004. Яких розмірів може досягнути різниця подвійного виміру лінії довжиною 225 м?

7.7. Коефіцієнт випадкового впливу при лінійних вимірах дорівнює 0,004. З якою точністю буде отримано середній результат чотирикратного виміру лінії довжиною 225 м?

7.8. Два кути в трикутнику передбачається виміряти рівноточно. З якою СКП їх потрібно вимірювати, щоб третій кут трикутника, що отриманий з обчислень, мав би граничну похибку 4′?

7.9. Між точками A і B, що розташовані на відстані 10 км, прокладені прямий та зворотний нівелірні ходи. При цьому СКП виміру перевищення за ходом у 1 км у прямому та зворотному ходах одна й та сама й дорівнює 8 мм. Обчислити, яких розмірів може досягнути різниця виміряних перевищень, а також СКП середньоарифметичного цих перевищень.

7.10. Радіус окружності визначений графічно з СКП $m_R = 0{,}01$ см. Його виміряна довжина дорівнює 10 см. Знайти СКП довжини окружності та площі круга, що обчислені за цим радіусом.

7.11. Вивести формулу СКП площі трикутника з основою а і висотою h, якщо їхні СКП відповідно дорівнюють m_α та m_h.

7.12. За проєктом було винесено в натуру прямокутну ділянку зі сторонами 225 м та 400 м. Чому дорівнює гранична похибка площі цієї ділянки, зумовлена похибками відкладання в натурі мірною стрічкою сторін поля, якщо коефіцієнт випадкового впливу при лінійних вимірах становить μ_S = 0,005?

7.13. За планом масштабу 1:5000 виміряні дві сторони прямокутної ділянки. Виміри виконувались лінійкою з міліметровими діленнями. Знайти площу цієї ділянки та її СКП, якщо її сторони дорівнюють 10,45 см та 19,85 см, СКП суміщення нульового штриха лінійки з одним кінцем сторони поля дорівнює 0,3 мм, а СКП відліку за лінійкою другого кінця сторони − 0,5 мм. Відповідь виразити у гектарах.

7.14. Знайти СКП зближення меридіанів, що обчислюється за формулою $\gamma = \Delta\lambda \sin \varphi$, якщо широту пункту φ = 55°41′45″ визначено із СКП m_φ = 5″, а різницю довгот осьового меридіана та меридіана цього пункту $\Delta\lambda$ = 2°03′ визначено із СКП $m_{\Delta\lambda}$ = 1″.

7.15. Знайти СКП площі трикутника зі сторонами 206,52 м та 186,47 м, якщо коефіцієнт випадкового впливу в лінійних вимірах дорівнює μ_S = 0,005, а кут між сторонами, рівний 45°21′, виміряний із СКП m_β = 0,5′.

7.16. Обчислити кут нахилу місцевості та його СКП, якщо перевищення дорівнює h = 25,00 м, горизонтальне прокладання S = 750 м, а їхні СКП відповідно дорівнюють m_h = 0,05 м та m_S = 0,5 м.

7.17. Знайти СКП обчислення синуса й тангенса кута β = 63°17,6′, якщо СКП його виміру дорівнює m_β = 0,5′.

Тема 8 МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ОДНІЄЇ ВЕЛИЧИНИ

Проста арифметична середина та її властивості. Зрівнювання ряду результатів вимірів однієї величини. Апостеріорне оцінювання точності результатів опрацювання ряду рівноточних вимірів. Послідовність математичної обробки ряду рівноточних вимірів однієї величини.

8.1 Проста арифметична середина та її властивості

Результати вимірів вважають рівноточними, якщо вони мають практично одну й ту саму середню квадратичну похибку, а отже виконані за однакових умов. Недотримання хоча б однієї з умов, у яких проведені виміри, робить їхні результати нерівноточними.

Нехай є ряд результатів незалежних рівноточних вимірів $x_1, x_2, \dots, x_n$ однієї величини X, істинне значення L якої невідоме. Задача полягає у математичному опрацюванні отриманого ряду вимірів, що передбачає вирішення двох задач – задачі зрівнювання та задачі апостеріорного оцінювання точності.

Задача зрівнювання полягає у визначенні щонайкращого у певному змісті наближення до істинного значення L вимірюваної величини X.

Задача апостеріорного оцінювання точності (a'posteriori – від лат. після досліду) полягає у обчисленні характеристик точності польових вимірів та зрівняного значення вимірюваної величини X.

Метод зрівнювання результатів вимірів однієї величини ґрунтується на принципі **арифметичної середини**, який полягає у тому, що середнє арифметичне отриманих результатів рівноточних вимірів є найбільш надійним значенням вимірюваної величини X. Найбільш надійне значення розуміють як найімовірніше за всі інші можливі значення. З теорії похибок відомо, що найкраще наближення до істинного значення повинне мати такі три властивості:

– властивість спроможності;

– властивість незміщеності;

– властивість ефективності.

Якщо $x_i,\ i = \overline{1,n}$ – ряд незалежних результатів рівноточних вимірів однієї величини X, то щонайкращим її наближенням до дійсного значення L є проста арифметична середина, яку обчислюють за формулою:

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}, \tag{8.1}$$

де n – кількість рівноточних вимірів, а квадратні дужки означають суму результатів вимірів у символах Гаусса.

Покажемо, що якщо результати вимірів вільні від систематичних похибок, то проста арифметична середина цих результатів, обчислена за формулою (8.1), при збільшенні кількості вимірів у границі наближується до дійсного значення вимірюваної величини L, тобто

$$\lim_{n\to\infty}(L - \bar{x}) = 0. \tag{8.2}$$

Ураховуючи, що похибка результату виміру x_i є різницею між цим результатом та істинним значенням L вимірюваної фізичної величини, запишемо:

$$\left.\begin{array}{c} \delta_1 = x_1 - L \\ \delta_2 = x_2 - L \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_n = x_n - L \end{array}\right\}. \tag{8.3}$$

Просумуємо праві та ліві частини виразів (8.3) та, розділивши їхні суми на n, отримаємо:

$$\frac{[\delta]}{n} = \frac{[x]}{n} - L,$$

або, враховуючи вираз (8.1), запишемо отриману рівність у такому вигляді:

$$\frac{[\delta]}{n} = \bar{x} - L. \tag{8.4}$$

Оскільки при $n \to \infty$ ліва частина виразу (8.4) на підставі властивості компенсації випадкових похибок прагне до нуля, права його частина так само прагне до нуля, що доводить справедливість виразу (8.2). Зі свого боку очевидно, що проста арифметична середина $\bar{x}$, визначена за формулою (8.1), є спроможною.

Отже, середнє арифметичне результатів рівноточних вимірів однієї величини має тенденцію прагнути до істинного значення L цієї величини при необмеженому зростанні числа вимірів n.

На практиці число вимірів завжди обмежене, і величина δ, яку називають істинною похибкою арифметичного середнього, визначає ступінь наближення отриманого середнього арифметичного $\bar{x}$ до істинного значення виміряної величини L за відсутності грубих і систематичних похибок.

Властивість незміщеності означає, що середнє арифметичне $\bar{x}$ не містить систематичної помилки.

Покажемо, що якщо арифметичне середнє отримане з результатів вимірів, вільних від систематичних похибок, то й само воно не містить систематичної похибки. Припустимо зворотне, тобто що результати вимірів містять систематичні похибки $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_n$. Тоді можна записати:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 - L = \theta_1 + \delta_1 \\ x_2 - L = \theta_2 + \delta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n - L = \theta_n + \delta_n. \end{array}\right\} .$$

Просумуємо праві та ліві частини отриманих рівнянь та розділимо їх на n, отримаємо:

$$L - \bar{x} = \frac{[\theta]}{n} + \frac{[\delta]}{n}.$$

Права частина отриманого рівняння містить два доданки, які є систематичною та випадковою похибками арифметичного середнього. Звідси випливає, що оскільки систематичні похибки дорівнюють нулю $\theta_1 = \theta_2 = \ldots =$ $= \theta_n = 0$, то і доданок $\frac{[\theta_i]}{n}$ дорівнюватиме нулю, отже арифметичне середнє є незміщеним.

Отже, за відсутності систематичних похибок арифметична середина L є не тільки спроможною, але й незміщеною оцінкою величини X. Таку оцінку в геодезії називають **найімовірнішим значенням** вимірюваної величини.

За наявності систематичних похибок арифметична середина так само міститиме систематичну похибку

$$\theta_L = \frac{[\theta_i]}{n},$$

а тому вона не матиме властивостей спроможності та незміщеності. У цьому випадку арифметична середина L, хоча і дасть щонайкраще з можливих наближень до X, але не буде її найімовірнішим значенням.

Властивість ефективності означає, що середнє арифметичне $\bar{x}$ має найменшу дисперсію, тобто є щонайменше випадковою.

Покажемо, що арифметична середина результатів незалежних рівноточних вимірів має середнє квадратичне відхилення, яке у $\sqrt{n}$ разів менше за середнє квадратичне відхилення σ цих вимірів.

Подамо вираз (8.1) у такому вигляді:

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n} = L = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \cdots + \frac{x_i}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Скористаємось формулою основної теореми теорії похибок (7.2) $\sigma_y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \ldots + C_n^2\sigma_n^2$ та визначимо дисперсію $\bar{x}$ як дисперсію лінійної функції n аргументів, до того ж дисперсії доданків $\sigma_{x_i}^2$ відомі і дорівнюють одна одній $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \cdots = \sigma_{x_n}$, отримаємо:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_2^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_n^2 = \frac{n}{n^2}\sigma^2,$$

звідки

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma\sqrt{\frac{n}{n^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{8.5}$$

Ділянка розсіювання похибок δ_i буде тим вужчою, чим більша кількість вимірів n. Але підвищення точності арифметичного середнього відбувається істотно повільніше за збільшення числа вимірів. Щоб підвисити точність $\bar{x}$ у 2 рази, потрібно повторити виміри 4 рази, для підвищення точності арифметичного середнього у 10 разів потрібно повторити виміри 100 разів.

Проте зростання точності відбуватиметься тільки за відсутності у результатах вимірів грубих і систематичних похибок. На практиці же усунути систематичні похибки повністю неможливо, хоча б тому, що залишаться непоміченими малі систематичні похибки, величина яких має один порядок із випадковими похибками. Одночасно більша кількість вимірів потребує більших витрат часу, а відповідно зросте період часу, протягом якого умови вимірів можуть змінитися, унаслідок чого порушиться рівноточність вимірів.

Ці міркування дають підстави вважати, що недоцільно виконувати понад 10–15 вимірів. Якщо підвищення точності середнього арифметичного у 3–4 рази недостатньо, то потрібно покращити умови виконання геодезичних робіт, застосувавши досконаліші прилади та методи вимірів. Малочутливий прилад не дозволить отримати високоточний результат навіть за величезної кількості повторних вимірів.

8.2 Зрівнювання ряду результатів вимірів однієї величини

Звернемося до розв'язання задачі зрівнювання, яка полягає у визначенні щонайкращого наближення до істинного значення L вимірюваної величини X.

Зрівнювання результатів вимірів дозволяє істотно послабити вплив випадкових похибок. Результати вимірів зрівнюють шляхом введення до обчислень поправок. **Поправками v_i,** або залишковими відхиленнями, називають різниці між арифметичним середнім та кожним із виміряних значень x_i.

Як точну поправку $\overline{v}$ розуміють величину, додавши яку до арифметичного середнього $\bar{x}$, отримують дійсне значення L, тобто

$$\bar{x} + \overline{v} = L. \tag{8.6}$$

Точне значення поправки $\overline{v}$ за абсолютною величиною дорівнює похибці $L - \bar{x}$, але протилежне їй за знаком:

$$\overline{v} = -(\bar{x} - L).$$

Для ряду n рівноточних вимірів отримаємо співвідношення:

$$\left.\begin{array}{c} v_1 = \bar{x} - x_1 \\ v_2 = \bar{x} - x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n = \bar{x} - x_n. \end{array}\right\}, \tag{8.7}$$

просумуємо ліві та праві частини співвідношень та отримаємо таке:

$$[v] = n \cdot \bar{x} - [x]. \tag{8.8}$$

Замість $\bar{x}$ підставимо його значення з (8.1) $\bar{x} = \frac{[x]}{n}$:

$$[v] = n \cdot \frac{[x]}{n} - [x],$$

звідки $[v] = 0$. Ця рівність виражає ще одну властивість середнього арифметичного:

алгебраїчна сума поправок *V* дорівнює нулю за будь-якої кількості вимірів.

Цю властивість застосовують для контролю правильності обчислення поправок V та середнього арифметичного $\bar{x}$.

Зазвичай величину $\bar{x}$ обчислюють з одним надлишковим десятковим знаком щодо виміряних даних. Якщо при цьому доводиться заокруглювати значення $\bar{x}$, то рівність $[v] = 0$ точно не задовольняється. Нехай похибка заокруглення β величини $\bar{x}$ дорівнює:

$$\beta = X' - \bar{x},$$

де $\bar{x}$ – точне значення середнього арифметичного;

X' – заокруглене значення середнього арифметичного.

Виразимо заокруглене значення як суму $X' = \beta + \bar{x}$. Підставимо у співвідношення (8.8) $[v] = n \cdot \bar{x} - [x]$ замість $\bar{x}$ його заокруглене значення, отримаємо:

$$[v] = n\left(\frac{[x]}{n} + \beta\right) - [x],$$

звідки

$$[v] = n \cdot \beta. \tag{8.9}$$

При обмеженій кількості вимірів n поправки v, що характеризують розсіювання результатів вимірів навколо арифметичного середнього $\bar{x}$, застосовують для оцінювання точності результатів вимірів та отриманих на їх підставі висновків.

Ще одну (п'яту) властивість середнього арифметичного $\bar{x}$ застосовують для контролю правильності обчислення поправок V та середнього арифметичного $\bar{x}$:

сума квадратів найімовірніших поправок, отриманих з арифметичної середини, завжди менша за суму квадратів наближених поправок, отриманих для будь-якої іншої функції тих самих результатів вимірів, тобто $[v^2] = min$.

Знання та розуміння розглянутих властивостей простої арифметичної середини дозволяє правильно організувати математичну обробку рівноточних геодезичних вимірів.

8.3 Апостеріорне оцінювання точності результатів опрацювання ряду рівноточних вимірів

Задача апостеріорного оцінювання точності (a′posteriori – від лат. після досліду) полягає в обчисленні характеристик точності польових вимірів, а також зрівняного значення вимірюваної величини *X*.

Отже, ми показали, що найкращою оцінкою для математичного сподівання є проста арифметична середина (8.1):

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}.$$

Як виходить із теорії похибок вимірів, для оцінювання точності застосовують характеристики розсіювання ряду виміряних значень. Мірою розсіювання результатів вимірів $x_1, x_2, \dots, x_n$ величини *X* щодо середнього арифметичного є дисперсія σ^2. Для обчислення її оцінки m застосовують формулу:

$$m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}. \tag{8.10}$$

Чим більша дисперсія, тим далі від арифметичної середини розкидані результати вимірів. Але будь-які значення числових характеристик, обчислені на підставі обмеженого числа вимірів, є випадковими величинами на відміну від самих числових характеристик, значення яких не випадкові. Необхідно, щоб похибка від заміни дійсного значення числової характеристики її наближеною оцінкою була мінімальною. Цю вимогу задовольняють оцінки числових характеристик, які є спроможними, незміщеними та ефективними.

Покажемо, що формула (8.10) дає спроможну оцінку дисперсії ряду результатів вимірів.

Статистична оцінка дисперсії є середнім арифметичним квадрата центрованої випадкової величини X, її також можна визначити як різницю другого початкового моменту та квадрата математичного сподівання:

$$m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{x}^2}{n} - 2\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x}}{n} = \alpha_2^* - (\overline{x})^2,$$

де перший доданок – середнє арифметичне квадратів елементів ряду вимірів, що при $n \to \infty$ збігається за імовірністю до другого початкового моменту α_2^*. Другий доданок – квадрат середнього арифметичного $\bar{x}$. Третій доданок – подвоєна сума добутків арифметичного середнього та елементів ряду вимірів, поділена на n, яка за $n \to \infty$ дорівнює нулю.

Отже, уся величина m, обчислена за статистичними даними, при $n \to \infty$ збігається за імовірністю до дисперсії:

$$\sigma^2 = D_x = \alpha_2 - (\overline{x})^2.$$

Отже, вибіркова дисперсія, яка визначена за формулою (8.10), є спроможною.

Нагадаємо, що оцінка параметра a^* є незміщеною, тобто не містить систематичної похибки, якщо її математичне сподівання дорівнює оцінюваному параметру a:

$$M[a^*] = a.$$

Розглянемо оцінку дисперсії m та переконаємось, що її обчислення за формулою (8.10) дає незміщену оцінку. Знайдемо її математичне сподівання:

$$M[m^2] = M[\alpha_2^* - (\overline{x})^2] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right] =$$

$$= M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}\right] - M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n^2}\right] - 2M\left[\frac{\sum_{i<j} x_i x_j}{n^2}\right],$$

де перший доданок – математичне сподівання оцінки другого початкового моменту α_2^*; другий доданок – математичне сподівання оцінки другого початкового моменту α_2^*, розділеного на n; третій доданок – становить оцінку другого змішаного моменту α_2^*, що дорівнює нулю, оскільки значення x_i

незалежні. Другий і третій доданки отримані шляхом піднесення у квадрат арифметичного середнього за формулою

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Тоді одержимо, з огляду на те, що генеральна середня дорівнює нулю,

$$M[m^2] = \frac{n}{n} M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}\right] - \frac{1}{n} M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}\right] = \frac{n-1}{n} M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\overline{x})^2}{n}\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Отже, математичне сподівання оцінки дисперсії, визначеної за формулою (8.10) не дорівнює дисперсії, тобто є її зміщеною оцінкою:

$$M[m^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Застосовуючи цю оцінку, ми будемо робити систематичну помилку в меншу сторону. Щоб від неї позбутися, необхідно ввести виправлення – помножити оцінку дисперсії, отриману за формулою (8.10), на $\frac{n}{n-1}$. Незміщену оцінку дисперсії m обчислюють за формулою:

$$m^2 = \frac{\sum (x_i-\overline{x})^2}{n-1}. \tag{8.11}$$

Отже, ми показали, що найкращою оцінкою для математичного сподівання є проста арифметична середина (8.1), а для дисперсії одного виміру – квадрат середньої квадратичної похибки, що визначають за формулою Бесселя:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1}, \tag{8.12}$$

де $v_i = \bar{x} - x_i$ – відхилення від арифметичної середини, які мають такі властивості:

$$[v] = 0 \quad \text{та} \quad [v^2] = min.$$

Величина $\bar{x}$ має середню квадратичну похибку $m_{\bar{x}}$ (або M), яку обчислюють за формулою:

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{8.13}$$

Спільний вплив випадкових похибок та постійної систематичної похибки можна виразити формулою:

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{m^2}{n} + \theta^2}, \tag{8.14}$$

де θ– систематична похибка.

Середня квадратична похибка СКП, як випливає з формули Бесселя, дорівнює:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \tag{8.15}$$

до того ж, вона (середня квадратична похибка) характеризується власною середньою квадратичною похибкою (СКП СКП), яку обчислюють за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \qquad (8.16)$$

Середню квадратичну похибку середньої квадратичної похибки (СКП СКП) (8.16) застосовують як оцінку надійності СКП m.

8.4 Послідовність математичної обробки ряду рівноточних вимірів однієї величини

Мета кожної обробки виміряних даних полягає у визначенні шляхом зрівнювальних обчислень найнадійнішого значення вимірюваної величини, оцінюванні точності результатів безпосередніх вимірів та отриманого з них висновку, а також у визначенні надійності знайдених середніх квадратичних похибок.

Порядок обробки результатів ряду рівноточних вимірів однієї величини наступний.

1. Знаходять найнадійніше значення вимірюваної величини за правилом арифметичної середини. Для полегшення обчислень величини $\bar{x}$ вводять її наближене значення x_0. Як x_0 зручніше узяти найменший результатів вимірів $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Тоді обчислені залишки ε_i

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = x_1 - x_0 \\ \varepsilon_2 = x_2 - x_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n = x_n - x_0 \end{array}\right\}$$

будуть додатними, а деякі з них дорівнюватимуть 0. Складемо рівності

$$[\varepsilon] = [x] - n \cdot x_0,$$

звідки отримаємо:

$$\frac{[x]}{n} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}, \quad \text{або} \quad \bar{x} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}.$$

2. Обчислюють поправки v:

$$v_i = \bar{x} - x_i.$$

Значення поправок v обчислюють з однаковим числом десяткових знаків, до того ж беруть стільки десяткових знаків, щоб найбільші з v мали дві значущі цифри, а якщо їхні значення починаються з одиниці – три значущі цифри.

Знайдені значення поправок v та арифметичної середини $\bar{x}$ перевіряють за рівністю

$$[v] = 0.$$

Якщо у процесі обчислення $\bar{x}$ виникла похибка заокруглення, то для перевірки правильності обчислення v_i, та $\bar{x}$ застосовують формулу (8.9)

$$[v] = n \cdot \beta.$$

3. Визначають $[v^2]$.

Отримаємо контрольні формули для перевірки розрахунку $[v^2]$. Оскільки $v_i = \bar{x} - x_i$, та одночасно $x_i = x_0 + \varepsilon_i$, то $[v^2] = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 =$ $= v_1(\bar{x} - x_0 - \varepsilon_1) + v_2(\bar{x} - x_0 - \varepsilon_2) + \dots + v_n(\bar{x} - x_0 - \varepsilon_n) = [v]\bar{x} - [v]x_0 - [\varepsilon v]$, або $[v^2] = -[\varepsilon v]$.

Проте за наявності похибки заокруглення β такий контроль не є досить чітким. Краще для контролю обчислення $[v^2]$ скористатися формулою

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}.$$

4. Обчислюють середню квадратичну похибку окремого виміру за формулою (8.15):

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

5. Якщо величину m обчислюють за результатами малої кількості вимірів, то необхідно ще визначити похибку самої похибки за формулою (8.16):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

Варто мати на увазі, що навіть при n = 51 m_m становить 10 % величини m, а при 9 вимірах $m_m = 0{,}25m$.

6. Обчислюють середню квадратичну похибку арифметичної середини за формулою (8.13):

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

7. Визначають надійність величини $m_{\bar{x}}$, для чого обчислюють її похибку також за формулою (8.13):

$$m_{m_{\bar{x}}} = \frac{m_m}{\sqrt{n}}.$$

Записують остаточний результат опрацювання рівноточних вимірів у такий спосіб:

$$\bar{x} = 25 \pm m_{\bar{x}}, \;\; m_{m_{\bar{x}}} = 1{,}1.$$

Приклад 8.1. Горизонтальний кут виміряний теодолітом 2Т5. Кількість повторних рівноточних вимірів становить n = 9. Отримані результати 110°08’38,2’’; 110°08’43,9’’; 110°08’33,1’’; 110°08’40,6’’; 110°08’43,7’’; 110°08’36,3’’; 110°08’39,1’’; 110°08’36,5’’; 110°08’39,2’’. Виконати математичне опрацювання результатів вимірів.

Розв’язання. 1. Обчислимо відхилення δ_i за формулою $\delta_i = x_1 - x_0$, причому за умовний нуль приймемо найменший з результатів вимірів, який дорівнює X_0 = 110°08’33,1’’. Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$\delta_1 = x_1 - X_0 = 110°08'38{,}2'' - 110°08'33{,}1'' = 5{,}1 \text{ сек.}$$

Усі результати обчислень заносимо у таблицю 8.1.

Таблиця 8.1 – Результати розрахунків

Номер виміру	Горизонтальний кут x_i	δ, сек	δ^2, сек^2	v, сек	v^2, сек^2
1	110°08’38,2’’	5,1	26,01	–0,76	0,5776
2	110°08’43,9’’	10,8	116,64	4,94	24,4036
3	110°08’33,1’’	0	0	–5,86	34,3396
4	110°08’40,6’’	7,5	56,25	1,64	2,6896
5	110°08’43,7’’	10,6	112,36	4,74	22,4676
6	110°08’36,3’’	3,2	10,24	–2,66	7,0756
7	110°08’39,1’’	6	36	0,14	0,0196
8	110°08’36,5’’	3,4	11,56	–2,46	6,0516
9	110°08’39,2’’	6,1	37,21	0,24	0,0576
Σ		52,7	406,27	–0,04	97,6824

2. Обчислимо просту арифметичну середину результатів вимірювань за формулою $\bar{x} = x_0 + \frac{[\delta]}{n}$:

$$\bar{x} = x_0 + \frac{[\delta]}{n} = 110°\,08'33{,}1'' + \frac{52{,}7}{9} = 110°\,08'38{,}956''$$

та заокруглимо її до двох знаків $\text{X}' = 110°\,08'38{,}96''$ і обчислимо похибку заокруглення $\beta = 110°\,08'38{,}96'' - 110°\,08'38{,}956'' = 0{,}004''$.

3. Для оцінювання точності вимірювань обчислюємо зміщені поправки v_i за формулою $v_i = x_i - \text{X}'$. Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$v_1 = x_1 - \text{X}' = 110°\,08'38.2'' - 110°\,08'38{,}96'' = -0{,}76''.$$

Перевіримо, чи виконується рівність (8.9):

$$[v] = n \cdot \beta;\ [v] = -0{,}04'';\quad n \cdot \beta = 9 \cdot 0{,}004'' = 0{,}036'' \approx 0{,}04''.$$

Отже, рівність (8.9) виконується за абсолютним значенням та із заокругленням результату.

Далі обчислюємо суму квадратів v_i та порівнюємо результат обчислення зі значенням, обчисленим за формулою (8.17):

$$[V^2] = 97{,}6824; \qquad [V^2] = [\delta^2] - \frac{[\delta]^2}{n} = 406{,}27^2 - \frac{52{,}7^2}{9} = 97{,}6822.$$

Отже, перевірка точності показує позитивний результат, що дозволяє як найбільш надійне значення вимірюваної величини прийняти

$$\text{X}' = 110°\,08'38{,}96''.$$

4. Визначимо точність отриманої арифметичної середини результатів вимірювань за формулою (8.15), тобто середнє квадратичне відхилення варіаційного ряду вимірювань:

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{97,682}{9-1}} = 3,49'',$$

отже отримали

$$X' = 110°\ 08'38,96'' \pm 3,49''.$$

Але, оскільки за правилом трьох сигм нормально розподілена випадкова похибка не перевищує 3m, або 3m = 3 · 3,49'' = 10,48'', маємо граничну похибку:

$$X' = 110°\ 08'38,96'' \pm 10,48''.$$

5. Оскільки отримане значення простої арифметичної середини є випадковою величиною, вона має власне середнє квадратичне відхилення (СКП $\bar{x}$), що у $\sqrt{n}$ разів менше за середнє квадратичне відхилення варіаційного ряду вимірювань, обчислимо його за формулою (8.13):

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{3,49''}{\sqrt{9}} = 1,165''.$$

Отже, $X' = 110°\ 08'38,96'' \pm 1,165''$.

6. Оцінимо надійність результату вимірювань, для чого визначимо середню квадратичну похибку m_m середньої квадратичної похибки m (СКП СКП) за формулою (8.16):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{3,49''}{\sqrt{2(9-1)}} = 0,87''.$$

Отримані результати дозволяють дійти висновку, що значення горизонтального кута $X' = 110°\ 08'38,96''$ є точним та надійним.

Приклад 8.2. Кількість повторних рівноточних вимірювань горизонтального кута дорівнює n = 12. Отримані результати вимірювань: 57°23'44''; 57°23'40''; 57°23'43''; 57°23'45''; 57°23'46''; 57°23'43''; 57°23'48''; 57°23'45''; 57°23'48''; 57°23'46''; 57°23'47''; 57°23'41''. Виконати математичне опрацювання результатів вимірювань.

Розв'язання. 1. Обчислимо відхилення δ_i за формулою $\delta_i = x_1 - x_0$, причому за умовний нуль приймемо найменший з результатів вимірювань, який дорівнює X_0 = 57°23'40''. Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$\delta_1 = x_1 - X_0 = 57°23'44'' - 57°23'40'' = 4 \text{ сек.}$$

Решту розрахунків виконуємо аналогічно та заносимо у таблицю 8.2.

Таблиця 8.2 – Результати розрахунків

Номер виміру	Горизонтальний кут x_i	δ, сек	δ^2, сек^2	v, сек	v^2, сек^2
1	57°23'44''	4	16	–0,70	0,490
2	57°23'40''	0	0	–4,70	22,090
3	57°23'43''	3	9	–1,70	2,890

Продовження таблиці 8.2

Номер виміру	Горизонтальний кут x_i	δ, сек	δ^2, сек^2	v, сек	v^2, сек^2
4	57°23’45’’	5	25	0,30	0,090
5	57°23’46’’	6	36	1,30	1,690
6	57°23’43’’	3	9	–1,70	2,890
7	57°23’48’’	8	64	3,30	10,890
8	57°23’45’’	5	25	0,30	0,090
9	57°23’48’’	8	64	3,30	10,890
10	57°23’46’’	6	36	1,30	1,690
11	57°23’47’’	7	49	2,30	5,290
12	57°23’41’’	1	1	–3,70	13,690
Σ		56	334	–0,4	72,680

2. Обчислимо просту арифметичну середину результатів вимірювань за формулою $\bar{x} = x_0 + \frac{[\delta]}{n}$, залишивши на два знаки більше, ніж у результатах вимірювань:

$$\bar{x} = x_0 + \frac{[\delta]}{n} = 57°23'40'' + \frac{56}{12} = 57°23'44{,}67''$$

та заокруглимо її до 1 знаку після коми

$$X' = 57°23'44{,}7''$$

і обчислимо похибку заокруглення

$$\beta = 57°23'44{,}7'' - 57°23'44{,}67'' = 0{,}03''.$$

3. Для оцінювання точності вимірювань обчислюємо зміщені поправки v_i за формулою $v_i = x_i - X'$. Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$v_1 = x_1 - X' = 57°23'44'' - 57°23'44{,}7'' = -0{,}7''.$$

Перевіримо, чи виконується рівність (8.9):

$$[v] = n \cdot \beta; [v] = -0{,}4''; \quad n \cdot \beta = 12 \cdot 0{,}03'' = 0{,}36'' \approx 0{,}4''.$$

Отже, рівність (8.9) виконується за абсолютним значенням та із заокругленням результату.

Далі обчислюємо суму квадратів v_i та порівнюємо результат обчислення із значенням, обчисленим за формулою (8.17):

$$[V^2] = 72{,}68; \qquad [V^2] = [\delta^2] - \frac{[\delta]^2}{n} = 334 - \frac{56^2}{12} = 72{,}67.$$

Отже, перевірка точності показує позитивний результат, що дозволяє як найнадійніше значення вимірюваної величини прийняти

$$X' = 57°23'44{,}7''.$$

4. Визначимо точність отриманої арифметичної середини результатів вимірювань за формулою (8.15), тобто середнє квадратичне відхилення варіаційного ряду вимірювань:

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{72,68}{12-1}} = 2,57'',$$

отже отримали

$$X' = 57°23'44,7'' \pm 2,57''.$$

Але, оскільки за правилом трьох сигм нормально розподілена випадкова похибка не перевищує $3m$, або $3m$ = 3 · 2,57'' = 7,71'', маємо граничну похибку:

$$X' = 57°23'44,7'' \pm 7,71''.$$

5. Оскільки отримане значення простої арифметичної середини є випадковою величиною, вона має власне середнє квадратичне відхилення (СКП $\bar{X}$), що у $\sqrt{n}$ разів є меншим за середнє квадратичне відхилення варіаційного ряду вимірювань, обчислимо його за формулою (8.13):

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{2,57''}{\sqrt{12}} = 0,742''.$$

Отже, $X' = 57°23'44,7'' \pm 0,7''$.

6. Оцінимо надійність результату вимірювань, для чого визначимо середню квадратичну похибку m_m середньої квадратичної похибки m (СКП СКП) за формулою (8.16):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{2,57''}{\sqrt{2(12-1)}} = 0,55''.$$

Отримані результати дозволяють заключити, що значення горизонтального кута $X' = 57°23'45''$ є точним та надійним.

Приклад 8.3. Під час дослідження полярного планіметра проведено 12 вимірювань площини ділянки. Результати вимірювань наведено у таблиці 8.3. Обчислити середнє значення та його середню квадратичну похибку, а також m та m_m.

Таблиця 8.3 – Вихідні дані

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Площина, см^2	41,0	41,1	40,8	41,0	40,5	40,9	40,4	41,0	41,2	40,6	40,7	41,3

Розв'язання. 1. За умовний нуль приймаємо як найменший з результатів вимірювань S_0 = 40,4 см^2. Обчислимо відхилення δ_i за формулою $\delta_i = x_1 - x_0$. Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$\delta_1 = s_1 - S_0 = 41,0 - 40,4 = 0,6 \text{ см}^2.$$

Таблиця 8.4 – Результати розрахунків

Номер виміру	Площина, см^2	δ, см^2	δ^2, см^4	v, см^2	v^2, см^4
1	41	0,6	0,36	0,12	0,014
2	41,1	0,7	0,49	0,22	0,048
3	40,8	0,4	0,16	–0,08	0,006
4	41	0,6	0,36	0,12	0,014
5	40,5	0,1	0,01	–0,38	0,144
6	40,9	0,5	0,25	0,02	0,000
7	40,4	0	0	–0,48	0,230
8	41	0,6	0,36	0,12	0,014
9	41,2	0,8	0,64	0,32	0,102
10	40,6	0,2	0,04	–0,28	0,078
11	40,7	0,3	0,09	–0,18	0,032
12	41,3	0,9	0,81	0,42	0,176
Σ		5,7	3,57	–0,06	0,858

2. Обчислимо просту арифметичну середину результатів вимірювань за формулою $\bar{x} = x_0 + \frac{[\delta]}{n}$

$$\bar{S} = S_0 + \frac{[\delta]}{n} = 40{,}4 + \frac{5{,}7}{12} = 40{,}875 \text{ см}^2$$

та заокруглимо її до двох знаків:

$$S' = 40{,}88 \text{ см}^2$$

і обчислимо похибку заокруглення:

$$\beta = S' - \bar{S} = 40{,}88 - 40{,}875 = 0{,}005 \text{ см}^2.$$

3. Для оцінювання точності вимірювань обчислюємо зміщені поправки v_i за формулою $v_i = x_i - X'$. Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$v_1 = s_1 - S' = 41{,}0 - 40{,}88 = 0{,}12 \text{ см}^2.$$

Перевіримо, чи виконується рівність (8.9)

$$[v] = n \cdot \beta; \ [v] = -0{,}06 \text{ см}^2; \quad n \cdot \beta = 12 \cdot 0{,}005 = 0{,}06 \text{ см}^2.$$

Отже, рівність (8.9) виконується.

Далі обчислюємо суму квадратів v_i та порівнюємо результат обчислення зі значенням, обчисленим за формулою (8.17):

$$[V^2] = 0{,}858; \qquad [V^2] = [\delta^2] - \frac{[\delta]^2}{n} = 3{,}57 - \frac{5{,}7^2}{12} = 0{,}862.$$

Отже, перевірка точності показує позитивний результат, що дозволяє як найнадійніше значення вимірюваної величини прийняти

$$S' = 40{,}88 \text{ см}^2.$$

4. Визначимо середнє квадратичне відхилення варіаційного ряду вимірювань за формулою (8.15):

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}86}{12-1}} = 0{,}078 \text{ см}^2.$$

5. Визначимо середнє квадратичне відхилення арифметичної середини (СКП $\bar{S}$), що у $\sqrt{n}$ разів менше за середнє квадратичне відхилення варіаційного ряду вимірювань, обчислимо його за формулою (8.13):

$$m_{\bar{S}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}078}{\sqrt{12}} = 0{,}023 \text{ см}^2.$$

6. Визначимо середню квадратичну похибку m_{m} середньої квадратичної похибки m (СКП СКП) за формулою (8.16) (надійність результату вимірювань):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{0{,}023}{\sqrt{2(12-1)}} = 0{,}005 \text{ см}^2.$$

Запитання для самоперевірки

1. Які завдання вирішують під час математичної обробки рядів вимірів?

2. Що включає до себе завдання зрівнювання результатів вимірів однієї величини та за якими формулами завдання вирішують?

3. Охарактеризуйте властивості спільної арифметичної середини?

4. Як здійснюють контроль зрівнювання при математичній обробці рядів вимірів?

5. Як розраховують вагу спільної арифметичної середини?

6. Чи можна вважати, що середнє арифметичне є частковим випадком спільної арифметичної середини?

7. Що станеться із рядом істинних похибок, якщо кожну з них помножити на корінь з її ваги?

8. За якою формулою можна обчислити СКП одиничної ваги за наявності ряду істинних похибок, ваги яких відомі?

9. За якою формулою можна обчислити СКП спільної арифметичної середини, якщо відома СКП одиничної ваги?

10. Як обчислюють поправки, що отримані зі зрівнювання та яка їхня властивість?

11. Як оцінити надійність СКП спільної арифметичної середини?

Задачі для самостійного розв’язання

8.1. Провести математичне опрацювання чотирикратного виміру лінії, м: 372,13; 372,25; 372,10; 372,18. Виміри рівноточні.

8.2. Провести математичне опрацювання рівноточних вимірів площі контуру планіметром, га: 26,31; 26,28; 26,32; 26,26; 26,30.

8.3. Один і той самий кут виміряно рівноточно чотири рази. Це дало такі результати: 60º 41′; 60º 40′; 60º 42′; 60º 40′. Виконати математичне опрацювання цього ряду результатів вимірювань.

8.4. Зайти вагу нев'язки в сумі кутів трикутника, якщо всі кути виміряні рівноточно.

8.5. Чому дорівнює вага кута, виміряного за трьома прийомами, якщо вага кута, виміряного одним прийомом, дорівнює одиниці?

8.6. Два кута трикутника виміряні рівноточно, а третій кут отриманий з обчислень. Знайти вагу третього кута.

Тема 9 МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ОДНІЄЇ ВЕЛИЧИНИ

Вага як міра відносної точності результатів нерівноточних вимірів. Вага функцій результатів нерівноточних вимірів. Обчислення ваги у певних видах вимірів. Загальна середньозважена арифметична середина. Апостеріорне оцінювання точності результатів опрацювання нерівноточних вимірів. СКП одиниці ваги. Планування точності вимірів. Порядок математичної обробки ряду нерівноточних вимірів однієї величини.

9.1 Вага як міра відносної точності результатів нерівноточних вимірів

Часто буває так, що виміри виконують за неоднакових умов, унаслідок чого їхні результати відрізняються точністю, тобто характеризуються різними середніми квадратичними похибками. Такі виміри називають нерівноточними. Нерівноточні результати отримують, зокрема, у результаті вимірів приладами різної точності, за різної кваліфікації виконавців, за різних методів виміру, за неоднакових зовнішніх умов та ін.

Очевидно, що під час спільного опрацювання результатів нерівноточних вимірів необхідно, щоб точніші результати вимірів мали більший вплив, тобто мали більшу вагу як достовірніші, а менш точні – відповідно менший вплив на остаточний результат опрацювання. Різну значущість вимірів, що відрізняються за точністю, враховують шляхом введення допоміжних чисел – ваг.

Чим менша середня квадратична похибка результату виміру, тим він надійніше й тим більшою має бути його вага. Вага виражає міру надійності певного результату порівняно з іншими результатами вимірів під час спільного опрацювання. Очевидно, що ваги окремих результатів вимірів доцільно застосовувати як певні коефіцієнти при їхніх значеннях. При точніших результатах – більші коефіцієнти, при менш точних – відповідно менші. Тоді чим більше вага одного результату виміру, тим точніше цей вимір порівняно з іншими. Цей підхід призводить до розуміння, що ваги мають бути числами, які зворотно пропорційні дисперсіям відповідних результатів вимірів.

Дійсно, якщо є ряд вимірів x_1, x_2, ..., x_n, кожен з яких характеризується, дисперсією $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ то вагу і-го результату виміру розраховують за формулою:

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}, \tag{9.1}$$

де σ_i^2 – дисперсія і-го виміру;

k – певне довільне число.

Із (9.1) можна отримати такі співвідношення:

$$k = p_i \cdot \sigma_i^2, \text{ тобто } k = p_1 \cdot \sigma_1^2 = p_2 \cdot \sigma_2^2 = \dots = p_n \cdot \sigma_n^2, \tag{9.2}$$

або $p_i \cdot \sigma_i^2 = p_j \cdot \sigma_j^2$, звідки у свою чергу видно, що

$$p_i = p_j \frac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2}, \quad \text{або} \quad \sigma_i = \sigma_j \sqrt{\frac{p_j}{p_i}}. \tag{9.3}$$

Вага показує, у скільки разів дисперсія одного виміру більша або менша за іншу. Вибір коефіцієнта пропорційності k доцільно обрати таким, щоб ваги p_i були найближчими до одиниці, тому його зазвичай приймають рівним дисперсії одного з результатів виміру σ_i^2, отже тоді вага цього результату дорівнюватиме одиниці. Дисперсію результату виміру, що має вагу, яка дорівнює одиниці, позначають символом σ_0^2. Тоді для будь-якого p_i рівняння (9.1) можна записати в такий спосіб:

$$p_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2};\ p_2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2};\ \dots;\ p_n = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2}\ . \tag{9.4}$$

Величину σ_0^2 називають **середньою квадратичною похибкою (СКП) одиниці ваги**, розуміючи її як «середнє квадратичне відхилення виміру, вага якого дорівнює одиниці», отже:

$$p_\mathrm{i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\mathrm{i}^2}\ .$$

Проте, оскільки дисперсія σ_0^2, що визначена з дослідних даних, невідома, ми застосовуємо її статистичну оцінку. Оцінку СКП одиниці ваги позначають символом μ та називають «середньою квадратичною похибкою (СКП) одиниці ваги». Вона дозволяє порівняти точність рядів нерівноточних вимірів.

Зауважимо, що, як випливає з наведених вище міркувань і виразів (9.1) та (9.4), результати рівноточних вимірів, які мають однакові середні квадратичні відхилення, тобто $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_n$, мають однакові ваги, які можна прийняти рівними одиниці $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$.

Очевидно, що результати нерівноточних вимірів, отримані за різних умов, мають нерівні ваги.

Зазвичай у практиці σ_i залишаються невідомими, тому для визначення ваг застосовують їхні оцінки, тобто СКП m_i. Тоді формула (9.1) набуває вигляду

$$p_i = \frac{k}{m_i^2} = \frac{\mu^2}{m_i^2}. \qquad (9.5)$$

Приклад 9.1. Маємо два результати виміру, що характеризуються СКП $\sigma_1 = 30''$ та $\sigma_2 = 1''$. Розрахуємо ваги вимірів.

Розв'язання. Приймемо для розрахунку ваг $k = 400$. Тоді ваги заданих величин будуть відповідно p_1 та p_2:

$$p_1 = \frac{400}{900} = \frac{4}{9}, \quad p_2 = \frac{400}{1} = 400.$$

Визначимо величину, яка має одиничну вагу:

$$k = \sigma_0^2, \text{ тобто } \sigma_0 = \sqrt{k} = \sqrt{400} = 20''.$$

Отже величиною, що має одиничну вагу, є кут, точність виміру якого визначається СКП, яке дорівнює 20″.

9.2 Вага функцій результатів нерівноточних вимірів

У практиці геодезичних робіт часто виникає потрібність визначення ваги функції результатів вимірів. Це завдання вирішують за допомогою двох теорем теорії похибок, якими є теореми 7.1 та 7.2.

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – результати незалежних вимірів, отримані з вагами, що відповідно дорівнюють $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тоді лінійна функція цих результатів вимірів $y = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$, де C_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) – постійні величини, має зворотну вагу, яку обчислюють за формулою:

$$\frac{1}{p_y} = \frac{C_1^2}{p_1} + \frac{C_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{C_n^2}{p_n}. \qquad (9.6)$$

Покажемо це. Відповідно до теореми 7.1 для функції

$$y = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

можна записати співвідношення для її дисперсії:

$$\sigma_y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \ldots + C_n^2\sigma_n^2. \qquad (9.7)$$

За визначенням ваги запишемо, що

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}, \quad \text{або} \quad \sigma_i^2 = \frac{k}{p_i}. \qquad (9.8)$$

Підставимо вираз (9.8) до (9.7), отримаємо:

$$\frac{k}{p_y} = \frac{kC_1^2}{p_1} + \frac{kC_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{kC_n^2}{p_n}. \qquad (9.9)$$

Скоротимо обидві частини рівності (9.9) на величину k, у наслідок чого отримаємо шукану рівність (9.6).

Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – результати незалежних вимірів, ваги яких відповідно дорівнюють $p_1, p_2, ..., p_n$. Тоді диференційована функція цих результатів вимірів $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має зворотну вагу, що обчислюють за формулою:

$$p_y^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 p_1^{-1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 p_2^{-1} + \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 p_n^{-1}. \qquad (9.10)$$

Перевіримо, чи це так. Відповідно до теореми 7.2 для функції $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна записати співвідношення щодо її дисперсії:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2. \qquad (9.11)$$

За визначенням ваги маємо:

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}, \text{ або } \sigma_i^2 = \frac{k}{p_i} = k \cdot p_i^{-1}. \qquad (9.12)$$

Підставимо вираз (9.12) до (9.11), отримаємо:

$$k \cdot p_y^{-1} = k \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot p_1^{-1} + k \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot p_2^{-1} + \ldots + k \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \cdot p_n^{-1}. \qquad (9.13)$$

Скоротимо обидві частини рівності (9.13), на величину k та отримаємо шукану рівність (9.10).

9.3 Обчислення ваги у певних видах вимірів

На підставі виразів (9.6) та (9.10) щодо визначення ваг функцій нерівноточних вимірів можна отримати співвідношення для визначення ваг у певних геодезичних задачах.

Кутові виміри. Розглянемо передачу дирекційного кута на n-у лінію теодолітного ходу. Нехай у теодолітному ході рівноточно виміряні праві кути $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$. Потрібно обчислити вагу n-ї лінії ходу за умови, що дирекційний кут α_{AB} вихідної лінії AB виміряний точно.

Оскільки кути виміряні рівноточно, усі виміряні значення мають однакові ваги, що дорівнюють одиниці: $p_1 = p_2 = ...= p_n = p_\beta = 1$.

Дирекційний кут останньої лінії теодолітного ходу обчислимо за відомою формулою:

$$\alpha_n = \alpha_{AB} + 180° \cdot n - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_n. \qquad (9.14)$$

Ураховуючи, що оскільки доданок $\alpha_{AB} + 180° \cdot n$ у виразі (9.14) є точною величиною, дисперсія якої дорівнює нулю і, відповідно, зворотна вага так само є нульовою, запишемо вираз зворотної ваги дирекційного кута останньої лінії теодолітного ходу, застосовуючи формулу (9.6):

$$\frac{1}{p_{\alpha_n}} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^2}{1} + \ldots + \frac{(-1)^2}{1} = n,$$

звідки маємо

$$p_{\alpha_n} = \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad p_\beta = 1. \tag{9.15}$$

Скористаємось властивістю ваг та помножимо усі ваги у рівностях (9.15) на число $k > 0$, маємо

$$p_{\alpha_n} = \frac{k}{n} \quad \text{при} \quad p_\beta = k. \tag{9.16}$$

Із (9.16) випливає, що величиною, яка має одиничну вагу, є дирекційний кут, отриманий за ходом у k поворотних точок. Це є очевидним, якщо у формулі (9.16) замість n підставити k.

Отже, вибір коефіцієнта k визначає вибір величини, вага якої дорівнює одиниці.

Отримані висновки є справедливими й у випадку, якщо у теодолітному ході вимірюють ліві кути. При цьому відбувається зміна знаків при коефіцієнтах C_i формули зворотної ваги, але це не впливає на остаточний результат, оскільки при обчисленні зворотної ваги функції усі C_i підносять у квадрат.

Аналогічно розраховують вагу суми кутів замкненого багатокутника та вагу кутової нев'язки в сумі кутів теодолітного ходу:

$$\sum \beta_{пр} = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n\ ; \tag{9.17}$$

$$f_\beta = \sum \beta_{пр} - \sum \beta_{теор} = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n - \sum \beta_{теор}.$$

Вирази (9.17) відрізняються від функції (9.14) тільки постійними доданками, що не впливають на визначення ваг. Отже, вирази для ваги суми кутів та кутової нев'язки мають вигляд:

$$p_{\alpha_n} = p_{\sum \beta} = p_{f\beta} = \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad p_\beta = 1, \tag{9.18}$$

або

$$p_{\alpha_n} = p_{\sum \beta} = p_{f\beta} = \frac{k}{n} \quad \text{при} \quad p_\beta = k. \tag{9.19}$$

Лінійні виміри. Нехай мірною стрічкою виміряно n ліній та отримані результати вимірів S_1, S_2, ..., S_n. Потрібно обчислити ваги результатів виміру цих ліній за умови, що усі виміри виконані з одним і тим самим коефіцієнтом випадкового впливу $\mu_S = \mu$ (7.34).

Дисперсії вимірів цих ліній відповідно до формули (7.35) дорівнюватимуть $\sigma_1^2 = \mu^2 \cdot S_1, \sigma_2^2 = \mu^2 \cdot S_2, \ldots, \sigma_n^2 = \mu^2 \cdot S_n$. Якщо прийняти як дисперсію одиничної ваги величину $\sigma_0^2 = C \cdot \mu^2$, то ваги виміряних значень ліній дорівнюватимуть:

$$p_1 = \frac{C}{S_1}, p_2 = \frac{C}{S_2}, \ldots, p_n = \frac{C}{S_n}, \tag{9.20}$$

тобто вага виміряного мірною стрічкою значення лінії буде зворотно пропорційною довжині цієї лінії. До того ж величиною, що має одиничну вагу, є результат виміру лінії довжиною C метрів. Щоб переконатися в цьому, потрібно підставити відповідне значення довжини лінії до формули ваги лінії.

Цей висновок є справедливим так само і для результатів вимірів ліній за допомогою дротів або рулеток, але пропонована методика розрахунку ваг виміряних значень довжин ліній не придатна при радіо- та світловіддалемірних вимірах.

Примітка. Обчислення ваг виміряних значень ліній як величин, що зворотно пропорційні їхній довжині, можливе тільки за умови, що значення вимірів усіх ліній отримані за тією самою методикою, тобто при том самому значенні μ_S.

Геометричне нівелювання. Розглянемо розрахунок ваг у геометричному нівелюванні у випадку пересіченої місцевості. Нехай за кількома ходами геометричного нівелювання отримані перевищення $h_1, h_2, ..., h_N$, до того ж число станцій у кожному з ходів дорівнює $n_1, n_2, ..., n_N$. Потрібно розрахувати ваги перевищень за умови, що перевищення на усіх станціях виміряні рівноточно.

Нехай m_{cm}^2 – дисперсія виміру перевищення на станції. Дисперсію одиничної ваги подамо у вигляді $\mu_0^2 = C \cdot m_{cm}^2$, де $C > 0$ – довільна постійна величина. Дисперсії перевищень за ходами на основі формули (7.29) можна подати у вигляді

$$m_i^2 = m_{cm}^2 \cdot n_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тоді для визначення ваг перевищень за ходами на основі (9.6) можна скористатись співвідношеннями

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2} = \frac{C \cdot m_{cm}^2}{m_{cm}^2 \cdot n_i} = \frac{C}{n_i}. \tag{9.21}$$

Отже, вага перевищення за ходом геометричного нівелювання на пересіченій місцевості є величиною, що зворотно пропорційна числу станцій. Величиною, що має одиничну вагу, є перевищення, отримане за ходом у C станцій. Величину, шо має одиничну вагу, визначає вибір коефіцієнта пропорційності.

Розглянемо розрахунок ваг у геометричному нівелюванні у випадку рівнинної місцевості. За кількома ходами геометричного нівелювання, що прокладені на рівнинній місцевості, отримані перевищення $h_1, h_2, ..., h_N$. Довжини ходів відповідно дорівнюють $L_1, L_2, ..., L_n$ км. В усіх ходах нівелювання виконувалось в однакових умовах, тобто з однаковими СКП нівелювання на 1 км хода $\mu_{hкм}$. Тоді дисперсію одиничної ваги можна представити як $\mu_0^2 = C \cdot \mu_{h_{км}}^2$, де $C > 0$ – довільна постійна величина. Дисперсії перевищень за ходами можна представити у вигляді

$$m_i^2 = \mu_{h_{км}}^2 \cdot L_i,\ i = \overline{1,N},$$

а тоді ваги перевищень за ходами можна отримати за співвідношеннями:

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2} = \frac{C \cdot \mu_{h_{км}}^2}{\mu_{h_{км}}^2 \cdot L_i} = \frac{C}{L_i}. \qquad (9.22)$$

Отже, вага перевищення за ходом геометричного нівелювання на рівнинній місцевості визначається як величина, що зворотно пропорційна довжині ходу. Величиною, що має одиничну вагу, при цьому є перевищення, отримане за ходом довжиною у *C* кілометрів.

Як і в попередніх випадках, вибір коефіцієнта пропорційності визначає величину з одиничною вагою.

Приклад 9.2. Результатам виміру кутів відповідають СКП 0,5′; 0,7′; 1,0′. Обчислити їхні ваги, якщо середньоквадратичне відхилення одиниці ваги дорівнює 1,5′.

Розв'язання. Відомо, що $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$, де σ_0 – СКП одиниці ваги, а σ_i – СКП i-го результату виміру. Тоді

$$p_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} = \frac{2{,}25}{0{,}25} = 9, \quad p_2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} = \frac{2{,}25}{0{,}49} = 4{,}5, \quad p_3 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_3^2} = \frac{2{,}25}{1{,}00} = 2{,}25.$$

Приклад 9.3. Обчислити ваги перевищень за ходами геометричного нівелювання відповідно довжиною 10, 20, 30 км.

Розв'язання. Ваги у геометричному нівелюванні обчислюють за формулою $p_i = \frac{k}{L_i}$, де L_i – довжина i-го хода. Покладемо $k = 15$, тоді отримаємо:

$$p_1 = \frac{15}{10} = 1{,}5, \ \ p_1 = \frac{15}{20} = 0{,}75, \ \ p_3 = \frac{15}{30} = 0{,}5.$$

Величиною, що має одиничну вагу, є перевищення за ходом довжиною у $k = 15$ км.

Приклад 9.4. З плану графічно отримані прямокутні координати x_1, y_1 початку та x_2, y_2 кінця певного відрізку, після чого була обчислена його довжина *S*. Вважаючи, що усі чотири координати були отримані рівноточно, обчислити вагу довжини цього відрізка. Порівняти отримане значення ваги з вагою значення безпосереднього виміру лінії по карті, якщо такий вимір виконаний з тією самою точністю, що й вимір будь-якої з координат кінця відрізка.

Розв'язання. Довжину відрізку визначають за співвідношенням

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ураховуючи, що усі чотири координати отримані рівноточно, їм можна надати однакові ваги, тобто

$$p_{x_1} = p_{x_2} = p_{y_1} = p_{y_2}.$$

Величина S є нелінійною функцією координат, отже для розв'язання задачі потрібно обчислити часткові похідні S за всіма координатами. Вони мають вигляд:

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = -\frac{x_2 - x_1}{s}, \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} = -\frac{x_2 - x_1}{s}, \quad \frac{\partial s}{\partial y_1} = -\frac{y_2 - y_1}{s}, \quad \frac{\partial s}{\partial y_2} = -\frac{y_2 - y_1}{s}.$$

Підставимо значення часткових похідних до формули (9.8) та отримаємо:

$$\frac{1}{p_s} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{s^2} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{s^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{s^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{s^2} =$$

$$= 2\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{s^2} = 2,$$

звідки випливає $p_s = \frac{1}{2}$.

Якщо прийняти, що вимір відрізка за картою виконується з тією самою точністю, що й вимір будь-якої координати, то дійдемо висновку, що отримання довжини S безпосередньо з плану матиме вагу, що дорівнює одиниці, тобто у два рази більшу за її непряме обчислення через виміряні координати.

9.4 Загальна середньозважена арифметична середина

Якщо x_1, x_2,…, x_n – незалежні результати вимірів однієї і тієї самої величини X, відносна точність яких характеризується відповідними вагами p_1, p_2,…, p_n, то за якнайкраще наближення до величини X приймають загальну арифметичну середньозважену, що визначають як відношення суми добутків виміряних значень та відповідних ваг до суми усіх ваг:

$$\bar{X} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{[px]}{[p]}, \tag{9.23}$$

до того ж сума усіх ваг $[p]$ є вагою загальної середньозваженої арифметичної середини $\bar{X}$.

Зауважимо, що формулу (9.23) можна застосовувати лише тоді, коли окремі результати вимірів можна порівнювати, тобто коли вони є величинами одного порядку. Не можна усереднювати результати вимірів, що істотно відрізняються умовами отримання, наприклад, не можна усереднювати довжину лінії, виміряну один раз звичайною рулеткою, а другий раз – світлодалекоміром, або величину кута, виміряного один раз технічним теодолітом, а другий раз високоточним теодолітом. Виходячи зі сказаного, на ваги у формулі (9.23) потрібно накладати обмежуючі умови, які можна виразити нерівністю

$$c_1 \le p_i \le c_2, \quad i = \overline{1, n}, \tag{9.24}$$

де c_1, c_2 – певні додатні постійні.

Зазвичай величину $\bar{X}$ обчислюють з одним залишковим десятковим знаком порівняно з виміряними даними.

Потрібно відзначити також, що ваги мають відносний характер, їх можна збільшувати та зменшувати у будь-яке число разів (усі одночасно), від цього середня зважена $\bar{X}$ не змінюється.

Розглянемо, чи задовольняє вимогам спроможності, незміщеності та ефективності нерівноточних вимірів середня зважена $\bar{X}$, обчислена за формулою (9.23).

Спроможність полягає у тому, що зі збільшенням обсягу вибірки (зі збільшенням числа вимірів заданої фізичної величини) середньозважене за імовірністю збігається до істинного значення цієї фізичної величини, тобто

$$\bar{X} \to X.$$

Для математичного обґрунтування цього твердження обчислимо математичне сподівання випадкової величини $\bar{X}$:

$$M(\bar{X}) = M\left(\frac{[px]}{[p]}\right) = M\left(\frac{p_1}{[p]}x_1 + \frac{p_2}{[p]}x_2 + \ldots + \frac{p_n}{[p]}x_n\right) =$$

$$= M\left(\frac{p_1}{[p]}x_1\right) + M\left(\frac{p_2}{[p]}x_2\right) + \ldots + M\left(\frac{p_n}{[p]}x_n\right) =$$

$$= \frac{p_1}{[p]}M(x_1) + \frac{p_2}{[p]}M(x_2) + \ldots + \frac{p_n}{[p]}M(x_n) =$$

$$= \frac{p_1}{[p]}X + \frac{p_2}{[p]}X + \ldots + \frac{p_n}{[p]}X = X \quad .$$

Отже, математичне сподівання середньозваженої загальної арифметичної середини результатів вимірів за відсутності систематичних похибок дорівнює істинному значенню вимірюваної величини $\mathrm{M}(\bar{X}) = X$.

Із цього положення випливає, що сума відхилень результатів нерівноточних вимірів від середньозваженої арифметичної середини дорівнює нулю:

$$\frac{[(x-\bar{x})p]}{[p]} = \frac{[xp]-[\bar{x}p]}{[p]} = \frac{[xp]}{[p]} - \frac{\bar{x}[p]}{[p]} = \bar{x} - \bar{x} = 0\,. \qquad (9.25)$$

Обчислимо вагу величини $\bar{X}$, вважаючи, що ваги усіх результатів вимірів обчислені за формулою (9.4):

$$p_{\mathrm{i}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\mathrm{i}}^2}\ ,$$

де σ_0^2 – дисперсія одиничної ваги.

За теоремою 7.1 відповідно до формул (9.6) та (9.23) маємо

$$\frac{1}{p_{\bar{X}}} = \frac{\left(\frac{p_1}{[p]}\right)^2}{p_1} + \frac{\left(\frac{p_2}{[p]}\right)^2}{p_2} + \ldots + \frac{\left(\frac{p_\mathrm{n}}{[p]}\right)^2}{p_n} = \frac{p_1}{[p]^2} + \frac{p_2}{[p]^2} + \cdots + \frac{p_\mathrm{n}}{[p]^2} = \frac{1}{[p]},$$

або

$$p_{\bar{X}} = [\,p]. \qquad (9.26)$$

Отже, вага загальної середньозваженої арифметичної середини $\bar{X}$ дорівнює сумі ваг результатів вимірів.

Незміщеність. Відповідно до принципів математичної статистики властивість незміщеності виражається рівністю $M(\bar{X}) = X$. Це означає, що за умови відсутності систематичних похибок у результатах вимірів середньозважене так само буде вільним від систематичних похибок, що було доведено під час доведення властивості спроможності.

Ефективність означає, що оцінка середньозваженої повинна мати мінімальну дисперсію, тобто бути щонайменше випадковою.

Дисперсію загальної середньозваженої арифметичної середини, враховуючи формулу (9.5) $p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2}$, можна визначити в такий спосіб:

$$m_{\bar{X}}^2 = \frac{\mu^2}{[p]}, \qquad \text{або} \qquad \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{[p]} . \tag{9.27}$$

Відповідно середнє квадратичне відхилення загальної арифметичної середини дорівнює:

$$m_{\bar{X}} = \text{M} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}, \qquad \text{або} \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{[p]}}. \tag{9.28}$$

Зауважимо, що для обчислення значення середнього квадратичного відхилення m_i будь-якого результату виміру або його функції, потрібно середнє квадратичне відхилення одиниці ваги μ розділити на корінь квадратний із ваги цього результату або його функції.

Для доведення ефективності оцінки середньозваженої потрібно показати, що з усіх функцій вигляду $y = C\,x_1 + Cx_2 + \ldots + Cx_n$ загальна арифметична середина $\bar{X}$ має максимальну вагу, тоді її дисперсія (9.27) буде найменшою.

Відповідно до (9.26), вага середньозваженої арифметичної середини дорівнює сумі ваг результатів вимірів, тобто $p_{\bar{X}} = [p]$.

Обчислимо вагу будь-якої іншої функції виду $y = C\,x_1 + Cx_2 + \ldots + Cx_n$, представивши її у формі $y = \frac{p_1+c_1}{[p]}x_1 + \frac{p_2+c_2}{[p]}x_2 + \ldots + \frac{p_n+c_n}{[p]}x_n$, при цьому $[c] = 0$.

Тоді зворотну вагу функції y на основі формули (9.6) можна записати в такому вигляді:

$$\frac{1}{p_y} = \frac{\left(\frac{p_1+c_1}{[p]}\right)^2}{p_1} + \frac{\left(\frac{p_2+c_2}{[p]}\right)^2}{p_2} + \ldots + \frac{\left(\frac{p_n+c_n}{[p]}\right)^2}{p_n}.$$

Перетворимо кожний доданок $\frac{\left(\frac{p_i+c_i}{[p]}\right)^2}{p_i} = \frac{p_i^2+2p_ic_i+c_i^2}{p_i[p]} = \frac{p_i+2c_i+\frac{c^2}{p_i}}{[p]}$, та обчисливши суму перетворених доданків, отримаємо

$$\frac{1}{p_y} = \frac{[p]+2[c]+\left[\frac{c^2}{p}\right]}{[p]^2} = \frac{1}{[p]} + 2\frac{[c]}{[p]^2} + \frac{\left[\frac{c^2}{p}\right]}{[p]^2},$$

де перший доданок є зворотною вагою середньозваженої арифметичної середини, другий доданок дорівнює нулю $[c]$ = 0, а третій – за будь-яких c перевищує нуль. Отже останню рівність можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{p_{\bar{X}}} + C,$$

де $C > 0$, звідки випливає, що $p_y < p_{\bar{X}}$. Отже, загальна арифметична середина $\bar{X}$ має максимальну вагу та її дисперсія є найменшою.

На підставі другої та третьої властивостей можна зробити висновок, що за відсутності систематичних похибок загальна арифметична середина $\bar{X}$, що є зрівняним значенням результатів нерівноточних вимірів, є спроможною, незміщеною та ефективною оцінкою X.

Нагадаємо визначення. Істинною поправкою V_i називають різницю між істинною величиною вимірюваної величини X та результатом виміру x_i $V_i = X - x_i$ на відміну від істинної похибки Δ, яка є різницею між виміряним значенням x_i та істинним значенням вимірюваної величини $\Delta = x_i - X$.

Систему поправок V_i (i = 1, 2, ..., n) визначає зрівняне значення $\bar{X}$:

$$V_i = \bar{X} - x_i. \tag{9.29}$$

Ці поправки іноді називають імовірнішими поправками. Система поправок V_i має дві важливі властивості, перша з яких $[pv] = 0$**.** Покажемо це.

$$[pv] = [p(\bar{X} - x_i)] = \bar{X}[p] - [px].$$

Ураховуючи, що $\bar{X} = \frac{[px]}{[p]}$ перетворимо отриманий вираз

$$[pv] = \frac{[px]}{[p]}[p] - [px] = [px] - [px] = 0.$$

Отже, маємо:

$$[pv] = 0. \tag{9.30}$$

Систему поправок застосовують для контроля правильності обчислення $\bar{X}$. Зазвичай величину $\bar{X}$ обчислюють з одним залишковим десятковим знаком порівняно з виміряними даними. Оскільки у результаті доводиться заокруглювати значення $\bar{X}$, рівність (9.30) на практиці не виконується. Похибка заокруглення, на яку $\bar{X}_{\text{пр}}$ відрізняється від $\bar{X}$ становить $\beta = \bar{X}_{\text{пр}} - \bar{X}$. У цьому випадку властивість системи поправок V_i' матиме вигляд $[pv'] = \beta[p]$. Покажемо, що це так:

$$v_i' = \bar{X}_{\text{пр}} - x_i, \quad (i = \overline{1,n}).$$

Помноживши кожну з V_i' на відповідні ваги, отримаємо n рівнянь, складемо їх почленно та дістанемо:

$$[pv'] = \bar{X}_{\text{пр}}[p] - [px]\,.$$

Скористаємось тим, що $\bar{X}_{\text{пр}} = \bar{X} + \beta = \frac{[px]}{[p]} + \beta$ та підставимо його у попередній вираз:

$$[pv'] = \frac{[px]}{[p]}[p] + \beta\,[p] - [px] \ = [px] + \beta\,[p] - [px] \ = \beta\,[p].$$

Остаточно отримали

$$[pv'] = \beta[p]. \tag{9.31}$$

Система поправок має властивість $[pv^2] \ = min$**.** Покажемо, що сума добутків ваг на квадрати відхилень від загальної арифметичної середини завжди менша за суму добутків ваг на квадрати відхилень від будь-якої іншої функції тих самих результатів вимірів, тобто

$$[pv^2] = min, \tag{9.32}$$

що відповідає нерівності

$$[pv^2] < [p(v')^2]. \tag{9.33}$$

Розглянемо певну функцію результатів вимірів $y = f\ (x_1, x_2, ..., x_n)$, що створює систему поправок $v\,{}_i' = \bar{Y} - x_i$, або $v\,{}_i' = v_i + \bar{Y} - \bar{X}$.

Піднесемо ліві й праві частини останньої рівності у другий степінь відповідно до формул скороченого множення для многочленів, отримаємо:

$$(v')_{\mathrm{i}}^2 = v_{\mathrm{i}}^2 + 2v_{\mathrm{i}}(y - X) + (y - X)^2,$$

далі помножимо ліві й праві частини цих рівнянь на відповідні ваги p_i та отримані вирази почленно додамо один до одного

$$[p(v')^2] = [pv^2] + 2[pv](y - \mathrm{X}) + [p](y - \mathrm{X})^2.$$

Очевидно, що оскільки $[pv] = 0$; $[p](y - \mathrm{X})^2 > 0$, то

$$[p(v')^2] = [pv^2] + [p](y - \mathrm{X})^2\ ,$$

а отже

$$[pv^2] < [p(v')^2].$$

Знання властивостей загальної арифметичної середини дозволяє правильно й коректно організувати математичні обчислення нерівноточних геодезичних вимірів.

9.5 Апостеріорне оцінювання точності результатів опрацювання нерівноточних вимірів

Звернемось до оцінювання точності. По-перше, точність польових вимірів вже є оціненою, оскільки відомі середні квадратичні похибки m_i. По-друге, точність загальної арифметичної середини визначається її середнім квадратичним відхиленням, що відповідно до формули (9.28) дорівнює:

$$m_{\bar{X}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}, \qquad \text{або} \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{[p]}}.$$

Зауважимо, що подібне співвідношення можна отримати для середніх квадратичних похибок результатів вимірів m_i, скориставшись формулою (9.5) $p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2}$, звідки:

$$\mu = m_i \cdot \sqrt{p_i} \qquad \text{та} \qquad m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}, \tag{9.34}$$

отже, **для знаходження значення середнього квадратичного відхилення m_i будь-якого результату виміру або його функції, потрібно середнє квадратичне відхилення одиниці ваги μ розділити на корінь квадратний із ваги цього результату або його функції.**

Формулу (9.34) застосовують для обчислення остаточних значень середніх квадратичних похибок m_i результатів вимірів після їх опрацювання.

Для контролю наявності систематичних похибок у результатах вимірів можна скористатись властивістю компенсації випадкових похибок у нерівноточних вимірах.

Наведемо визначення.

Істинною похибкою Δ_i є різниця між виміряним x_i та істинним X значенням вимірюваної величини X:

$$\Delta_i = x_i - X.$$

Істинною поправкою v_i є різниця між істинним X та виміряним x_i значенням вимірюваної величини X:

$$v_i = X - x_i.$$

Істинною похибкою ω загальної арифметичної середини $\bar{X}$ є різниця між $\bar{X}$ та істинним значенням вимірюваної величини X:

$$\omega = \bar{X} - X.$$

З врахуванням визначення істинної похибки Δ_i кожен результат виміру являє собою суму істинного значення вимірюваної величини X та істинної похибки Δ_i:

$$x_i = X + \Delta_i. \tag{9.35}$$

Підставимо до формули загальної середньозваженої арифметичної середини (9.23) $\bar{X} = \frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n} = \frac{[px]}{[p]}$, замість x_i його значення з (9.35), отримаємо:

$$\bar{X} = \frac{p_1(X+\Delta_1) + p_2(X+\Delta_2) + \cdots + p_n(X+\Delta_n)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} =$$

$$= \frac{X[p]+[p\Delta]}{[p]} = X + \frac{[p\Delta]}{[p]}.$$

Отримане співвідношення підставимо до виразу істинної похибки ω загальної арифметичної середини:

$$\omega = \bar{X} - X = X + \frac{[p\Delta]}{[p]} - X = \frac{[p\Delta]}{[p]}.$$

Отже, істинна похибка ω загальної арифметичної середини дорівнює середньозваженій істинних похибок окремих вимірів. Можна показати, що при необмеженому зростанні числа вимірів n істинна похибка загальної арифметичної середини ω прагне до нуля.

Якщо під час проведення геодезичних робіт вплив систематичних похибок був істотно послабленим, то

$$\frac{[p\Delta]}{[p]} \approx 0. \tag{9.36}$$

Співвідношення (9.36) можна застосовувати під час опрацювання результатів нерівноточних вимірів для виявлення систематичних похибок. Наявність систематичних похибок буде показувати перевага додатних або від'ємних похибок.

Основною задачею оцінювання точності під час опрацювання нерівноточних вимірів є визначення щонайкращої оцінки дисперсії одиничної ваги μ. Спосіб обчислення похибки одиниці ваги μ визначається особливостями вихідних даних. Розглянемо варіанти обчислення μ.

У тому випадку, якщо відомі середні квадратичні похибки m_i результатів вимірів x_1, x_2, …,x_n, ваги визначають за формулою (9.5):

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} = \frac{k}{m_i^2},$$

де k – певна постійна, яку призначають довільно. Тоді похибку одиниці ваги μ можна обчислити безпосередньо як квадратний корінь із постійної величини k:

$$\mu = \sqrt{k}.$$

У тому випадку, якщо відомі середні квадратичні похибки m_i та певним чином встановлені ваги однорідних результатів вимірів p_i, то для кожного результату обчислюють похибку одиниці ваги μ_i за формулою

$$\mu_i = m_i\sqrt{p_i},$$

а потім визначають остаточне значення μ за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_n^2}{n}},$$

де n – число результатів, для яких були відомі m_i та p_i, до того ж вважають, що надійність усіх m_i приблизно однакова.

Якщо ваги результатів нерівноточних вимірів визначені, то середню квадратичну похибку одиниці ваги μ можна обчислити, застосовуючи поправки v_i, які являють собою різницю між арифметичною середньою $\bar{X}$ та результатом виміру x_i $v_i = \bar{X} - x_i$. У цьому випадку для обчислення похибки одиниці ваги μ застосовують формулу:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}. \tag{9.37}$$

Формулу (9.37) називають формулою Бесселя. Обґрунтуємо обчислення μ за поправками v_i. Нехай отримано результати вимірів $x_1, x_2, \dots, x_n$ випадкової величини, істинне значення якої дорівнює X. Найбільш надійним її виміряним значенням є загальна арифметична середина $\bar{X}$. Запишемо вирази для істинної похибки Δ_i та істинної поправки v_i:

$$\Delta_i = x_i - X;$$
$$v_i = \bar{X} - x_i.$$

Додамо ці вирази один до одного:

$$\Delta_i + v_i = \bar{X} - X,$$

де права частина виражає істинну похибку ω загальної арифметичної середньої $\bar{X}$:

$$\bar{X} - X = \omega.$$

Виразимо істинні похибки Δ_i через істинну похибку загальної арифметичної середньої ω:

$$\Delta_i = \omega - v_i.$$

Отриманий вираз піднесемо у квадрат та помножимо на відповідні ваги

$$p_i\Delta_i^2 = p_i\omega^2 + p_i v_i^2 - 2\omega p_i v_i.$$

Далі складемо n отриманих рівностей:

$$[p\Delta^2] = [p]\omega^2 + [pv^2] - 2\omega[pv],$$

де останній доданок $2\omega[pv] = 0$, та розділимо на n, отже маємо

$$\frac{[p\Delta^2]}{n} = \frac{[p]\omega^2}{n} + \frac{[pv^2]}{n}.$$

В останньому виразі ліва частина є середньозваженою сумою квадратів відхилень результатів вимірів x_i від центру розсіювання X, поділеною на n, тобто за визначенням є дисперсією

$$\frac{[p\Delta^2]}{n} = \mu^2.$$

У першому доданку правої частини виразу квадрат істинної похибки загальної арифметичної середньої ω^2 за змістом дорівнює дисперсії загальної арифметичної середньої $\bar{X}$, яка за формулою (9.28) дорівнює $m_{\bar{X}}^2 = \frac{\mu^2}{[p]}$. Виконавши відповідні заміни, отримаємо:

$$\mu^2 = \frac{[p]}{n} \cdot \frac{\mu^2}{[p]} + \frac{[pv^2]}{n} = \frac{\mu^2}{n} + \frac{[pv^2]}{n},$$

звідки

$$n \cdot \mu^2 - \mu^2 = [pv^2];\ \mu^2 = \frac{[pv^2]}{n-1},$$

або остаточно отримаємо формулу (9.37)

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}.$$

Якщо число вимірювань невелике, необхідно визначати надійність обчисленої за формулою (9.37) дисперсії одиниці ваги μ. Надійність μ визначають як її середню квадратичну похибку за формулою:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (9.38)$$

За невеликої кількості вимірів потрібно також, окрім дисперсії загальної арифметичної середньої $\bar{X}$, яку визначають за формулою (9.28) $m_{\bar{X}}^2 = \frac{\mu^2}{[p]}$, оцінити її надійність. Надійність оцінки загальної арифметичної середньої $\bar{X}$ оцінюють шляхом обчислення середньої квадратичної похибки m_M середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середньої $m_{\bar{X}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$ за такою формулою:

$$m_{m_{\bar{X}}} = m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}. \quad (9.39)$$

Зауважимо, що коли у результаті опрацювання результатів нерівноточних вимірів похибку одиниці ваги μ можна отримати як за формулою (9.34), тобто як квадратний корінь з постійної величини k $\mu = \sqrt{k}$, так і за формулою (9.37) $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$, отримані значення μ зазвичай не збігаються, але якщо розходження має порядок m_μ, то це нормально. Для подальших обчислень потрібно застосовувати значення μ, обчислене за формулою (9.37).

9.6 Планування точності вимірів

Під час розроблення плану проведення вимірів часто постає задача отримання певних величин із заздалегідь заданою точністю. Для розв’язання такої задачі потрібно провести розрахунок необхідної точності вимірів до початку їх практичного виконання. Таке оцінювання точності називають **апріорним**.

Розглянемо підходи до розв’язання задачі апріорного оцінювання точності із застосуванням низки певних прикладів.

Приклад 9.5. Нехай потрібно визначити потрібну точність виміру радіуса кола R, щоб точність результату обчислення площі кола не перевищувала q, тобто щоб СКП $\leq q$.

Розв'язання. Площу кола обчислюють за формулою:

$$S = \pi R^2.$$

Для визначення СКП площі кола скористаємось формулою (7.21), $m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} m_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} m_n\right)^2$, отже

$$m_s = \sqrt{\left(\frac{d\pi R^2}{dR} m_R\right)^2} = 2\pi R m_R.$$

Водночас граничну похибку площі S можна прийняти рівною

$$\Delta_{гр} = 3 \cdot m_s = 6\pi R m_R.$$

Тоді за умовою задачі

$$\Delta_{гр} = 6\pi R m_R \leq q,$$

звідки маємо:

$$m_R \leq \frac{q}{6\pi R}.$$

Оскільки розглянутий випадок найпростіший, для його розв'язання застосоване безпосереднє визначення СКП вимірів.

Приклад 9.6. Розглянемо, з якою точністю потрібно виміряти висоту h та основу трикутника a, щоб обчислена площа цього трикутника мала СКП, яка не перевершує q.

Розв'язання. Виразимо значення площі трикутника через вимірювані величини h та a:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

СКП площі трикутника відповідно до формули (7.21) становитиме

$$m_s = \sqrt{\left(\frac{1}{2} h m_a\right)^2 + \left(\frac{1}{2} a m_h\right)^2} \leq q,$$

тоді

$$\left(\frac{1}{2} h m_a\right)^2 + \left(\frac{1}{2} a m_h\right)^2 \leq q^2.$$

Оскільки отримана нерівність містить дві невідомі змінні m_a та m_h, задача має необмежену множину рішень. Для її розв'язання та отримання єдиного рішення потрібно накласти певні додаткові обмеження. У цьому випадку зазвичай пропонується застосувати однин з двох принципів. Перший з них - принцип рівного впливу. Цей принцип полягає у тому, що кожен вимір вносить однакові за величиною частки у спільну похибку шуканої величини. Застосовуючи принцип рівного впливу, отримаємо дві нерівності:

$$\left(\frac{1}{2} h m_a\right)^2 \leq \frac{1}{2} q^2 \text{ та } \left(\frac{1}{2} a m_h\right)^2 \leq \frac{1}{2} q^2.$$

Розв'яжемо систему нерівностей та у результаті отримаємо:

$$\frac{1}{2} h m_a \leq \frac{1}{\sqrt{2}} q \Rightarrow m_a = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{q}{h} = 1{,}41 \frac{q}{h};$$

$$\frac{1}{2}am_h \leq \frac{1}{\sqrt{2}}q^2 \Rightarrow m_h = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{q}{a} = 1{,}41\frac{q}{a}.$$

Розглянемо застосування ще іншого принципу - принципу рівноточності. Принцип рівноточності можна застосовувати, якщо вимірювані величини є однорідними та близькими за розміром. У розв'язуваній задачі приймаємо, що $m_a = m_h = m$. Тоді СКП площі трикутника набуває вигляду:

$$m_s = \sqrt{\left(\frac{1}{2}hm\right)^2 + \left(\frac{1}{2}am\right)^2} \leq q;$$

$$m_s = \frac{1}{2}m\sqrt{(h)^2 + (a)^2} \leq q,$$

звідки $m \leq \frac{2q}{\sqrt{h^2+a^2}}$.

Вибір принципу обчислення визначають залежно від конкретних умов, зокрема наявності конкретних вимірювальних приладів, розмірів вимірюваних величин, зручності виконання робіт. Зауважимо, що при $a = h$ застосування будь-якого з двох розглянутих принципів дає той самий результат.

Приклад 9.7. Визначимо, з якою точністю необхідно виміряти кут нахилу γ та горизонтальне прокладання S, щоб отримати перевищення з граничною похибкою, яка не перевищує q.

Розв'язання. Перевищення обчислюють за формулою:

$$h = S \cdot tg\,\gamma,$$

отже гранична похибка перевищення відповідно до формули (7.21) становитиме

$$\varDelta_{гр} = 3\sqrt{(tg\gamma \cdot m_S)^2 + \left(\frac{S}{cos^2\gamma} \cdot \frac{m_\gamma}{\rho}\right)^2} \leq q,$$

де m_S та m_γ – шукані СКП горизонтального прокладання S та кута нахилу γ відповідно.

У цьому випадку доцільно застосувати принцип рівного впливу, тобто похибки вимірюваних параметрів вважати однаковими. Тоді отримаємо

$$(tg\gamma \cdot m_S)^2 \leq \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}q^2 \quad \text{та} \quad \left(\frac{S}{cos^2\gamma} \cdot \frac{m_\gamma}{\rho}\right)^2 \leq \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}q^2,$$

звідки отримаємо шукані величини:

$$m_S \leq \frac{0{,}7q}{3tg\gamma}; \qquad m_\gamma \leq \frac{0{,}7q\rho\, cos^2\gamma}{3S}.$$

Приклад 9.8. Визначимо, яка точність виміру кута α та двох сторін a і b трикутника необхідна для того, щоб його площина S мала СКП, яка не перевищить q.

Розв'язання. Площу трикутника та його СКП визначають відповідно за такими формулами:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot sin\,\alpha$$

та

$$m_S = \sqrt{\left(\frac{1}{2}b \cdot sin\,\alpha\, m_a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a \cdot sin\,\alpha\, m_b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ab \cdot cos\,\alpha \cdot m_\alpha\right)^2} \leq q.$$

У цьому випадку для розв’язання задачі доцільно застосувати одночасно обидва принципи – принцип рівного впливу та принцип рівноточності. Перший принцип застосуємо для усіх складників, а другий – тільки для однорідних складників. Тоді отримаємо:

$$m_a = m_b = m$$

і

$$\left(\frac{1}{2}b \cdot sin\,\alpha\, m\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a \cdot sin\,\alpha\, m\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a \cdot b \cdot cos\,\alpha\, m_\alpha\right)^2 \leq \frac{1}{3}q^2.$$

У цій задачі виходить певна невизначеність, що пов’язана із першими двома рівностями. Вказані рівності виконуються тільки за умови $a = b$. Зауважимо, що похибка не буде великою, якщо розрахунок вести за мінімальним значенням вимірюваних сторін трикутника. Приймаємо, що $a \leq b$. Тоді отримаємо:

$$\frac{1}{2}a \cdot sin\,\alpha\, m \leq \frac{1}{\sqrt{3}}q;$$

$$\frac{1}{2}ab \cdot cos\,\alpha\, m_\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{3}}q,$$

звідки дістанемо:

$$m \leq \frac{2q}{\sqrt{3}a \cdot sin\,\alpha};$$

$$m_\alpha \leq \frac{2q\rho}{\sqrt{3}a \cdot b \cdot cos\,\alpha},$$

Приклад 9.9. Тепер визначимо точність, яка необхідна під час вимірювань перевищення h та відстані S, щоб обчислити ухил i, похибка якого становитиме $m_{\text{i}} < q$.

Розв’язання. Ухил визначають за формулою:

$$i = \frac{h}{S},$$

а його СКП – за формулою:

$$m_i = \sqrt{\frac{1}{S^2}m_h^2 + \frac{h^2}{S^4}m_S^2}.$$

Зазвичай другий складник підкорінного виразу істотно менший за перший, отже його впливом на похибку ухилу можна знехтувати, тоді маємо:

$$m_i = \sqrt{\frac{1}{S^2}m_h^2}, \quad \text{тобто} \quad \sqrt{\frac{1}{S^2}m_h^2} < q,$$

звідки остаточно отримаємо $m_h < qS$.

9.7 Порядок математичної обробки ряду нерівноточних вимірів однієї величини

У результаті повторних нерівноточних вимірів однієї величини X, істинне значення якої є невідомим, отриманий ряд результатів $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ із середніми квадратичними похибками $m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_n$.

1. Визначають ваги результатів вимірів за формулою (9.5)

$$p_i = \frac{k}{m_i^2},$$

де m_i – середня квадратична похибка результату вимірювання;

k – коефіцієнт пропорційності, який може набувати довільних значень.

Коефіцієнт k обирають у такий спосіб, щоб значення ваг були близькими до одиниці, наприклад, використовуючи формулу:

$$k = \frac{m_{max-1}^2 + m_{min+1}^2}{2},$$

де m_{max-1}^2 – друга за величиною найбільша середня квадратична похибка;

m_{min+1}^2 – друга за величиною найменша середня квадратична похибка.

2. Обчислюють найімовірніше значення вимірюваної величини, яким є загальна арифметична середина результатів вимірів, за формулою (9.23):

$$\bar{X} = \frac{[px]}{[p]},$$

де x_i – результат і-го виміру;

p_i – вага і-го результату виміру.

Якщо кількість вимірів n є досить великою, то замість формули (9.23) на практиці застосовують зручнішу формулу:

$$\bar{X} = X_0 + \frac{[p\delta]}{[p]},$$

де X_0 – найменше значення з отриманих результатів, тобто умовний нуль;

δ_i – відхилення від умовного нуля, обчислення яких виконують за формулою:

$$\delta_\mathrm{i} = x_\mathrm{i} - X_0.$$

Щоб не накопичувати похибки заокруглення, загальну арифметичну середину $\bar{X}$ обчислюють з кількістю десяткових знаків, яка на три перевищує кількість десяткових знаків у результатах вимірів x_i. Далі це значення заокруглюють, залишаючи таку саму кількість десяткових знаків, як і у результатах вимірів. У результаті отримують дещо зміщене значення X', яке відрізняється від $\bar{X}$ на малу величину β, обчислену за формулою

$$\beta = \mathrm{X}' - \overline{\mathrm{X}},$$

де X' – заокруглене значення простої арифметичної середини.

3. Обчислюють поправки, тобто відхилення результатів вимірів x_i від загальної арифметичної середини X′, за формулою:

$$v_i = x_i - X' .$$

Знайдені значення поправок та арифметичної середини перевіряють за рівністю (9.30) $[pv] = 0$. Але оскільки поправки v_i обчислюють з використанням заокругленого на величину β значення загальної арифметичної середини, то замість найімовірніших поправок отримують їхні зміщені значення, які відрізняються від найімовірніших також на величину β. Тому для контролю обчислення поправок застосовують рівність (9.31):

$$[pv] = [p] \cdot \beta.$$

4. Обчислюють суму квадратів відхилень виміряних значень від $\bar{X}$, тобто $[pv^2]$ за формулою:

$$[pv^2] = [p\delta^2] - \frac{[p\delta]^2}{[p]}$$

та визначають емпіричну середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою (9.37):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}.$$

5. Визначають надійність отриманої середньої квадратичної похибки одиниці ваги, застосовуючи формулу (9.38):

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

6. Визначають середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини $m_{\bar{X}} = M$, застосовуючи формулу (9.28):

$$m_{\bar{X}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}.$$

7. Обчислюють похибку середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини, оцінюючи її надійність за формулою (9.39):

$$m_{m_{\bar{X}}} = m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}.$$

8. Остаточний результат обчислень записують у такий спосіб:

$$\bar{X} = 21 \pm M; \quad (m_M = 0{,}2).$$

Приклад 9.10 Виконано 13 серій вимірів довжини лінії світлодалекоміром. У кожній серії виконано різну кількість прийомів. Середнє значення довжини лінії x_i в кожній серії та її середня квадратична похибка m_i наведені в таблиці 9.1. Виконати математичне опрацювання результатів нерівноточних вимірювань та оцінити їхню надійність.

Таблиця 9.1 – Вихідні дані

Номер виміру	x_i, м	m_i, мм	Номер виміру	x_i, м	m_i, мм
1	251,035	3,2	8	251,051	4,7
2	251,035	4,2	9	251,037	4,9
3	251,06	0,6	10	251,052	3,1
4	251,033	1,6	11	251,043	0,6
5	251,045	1,5	12	251,049	2,7
6	251,043	2,4	12	251,046	1,2
7	251,044	1,8			

Розв'язання. Для обчислення ваг p_i результатів нерівноточних вимірів за формулою (9.5) потрібно визначитися із коефіцієнтом пропорційності k. Для його обчислення скористаємось формулою:

$$k = \frac{m_{max-1}^2 + m_{min+1}^2}{2}.$$

Нехай $m_{max-1} = 4{,}7$, а $m_{min+1} = 0{,}6$, отримаємо

$$k = \frac{4{,}7^2 \ + 1{,}2^2}{2} = \frac{22{,}09 + 1{,}44}{2} = \frac{23{,}53}{2} \approx 12.$$

Подальші розрахунки заносимо до таблиці 9.2.

Таблиця 9.2 – Результати розрахунків

Номер виміру	x_i, м	m_i, мм	p	δ, мм	$p\delta$	$p\delta^2$	v, мм	pv	pv^2
1	251,035	3,2	1,2	2	2,4	4,8	–14	–16,8	235,2
2	251,035	4,2	0,7	2	1,4	2,8	–14	–9,8	137,2
3	251,06	0,6	33,3	27	899,1	24275,7	11	366,3	4029,3
4	251,033	1,6	4,7	0	0,0	0,0	–16	–75,2	1203,2
5	251,045	1,5	5,3	12	63,6	763,2	–4	–21,2	84,8
6	251,043	2,4	2,1	10	21,0	210,0	–6	–12,6	75,6
7	251,044	1,8	3,7	11	40,7	447,7	–5	–18,5	92,5
8	251,051	4,7	0,5	18	9,0	162,0	2	1,0	2,0
9	251,037	4,9	0,5	4	2,0	8,0	–12	–6,0	72,0
10	251,052	3,1	1,2	19	22,8	433,2	3	3,6	10,8
11	251,043	0,6	33,3	10	333,0	3330,0	–6	–199,8	1198,8
12	251,049	2,7	1,6	16	25,6	409,6	0	0,0	0,0
13	251,046	1,2	8,3	13	107,9	1402,7	–3	–24,9	74,7
Σ			96,4		1528,5	31449,7		–13,9	7216,1

За формулою (9.5) $p_i = \frac{k}{m_i^2}$ обчислюємо ваги вимірів p_i. Значення ваг заокруглюємо до 0,1.

Наступним кроком обчислимо різниці $\delta_{\text{i}} = x_{\text{i}} - X_0$, для чого як умовний нуль оберемо найменше значення $X_0 = 252{,}033$ м. Значення δ_{i}, подаємо у міліметрах.

Далі обчислюємо добутки $p\delta$, результати обчислень заокруглюємо до 0,1, та добутки $p\delta^2$.

Скориставшись формулою (9.23), обчислимо найімовірніше значення вимірюваної довжини лінії, до того ж $p\delta$ перекладемо у метри. Результат заокруглимо до 0,001 мм.

$$\bar{X} = X_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = 252{,}033 + \frac{1528{,}5}{96{,}4 \cdot 1000} = 251{,}048856.$$

Найімовірніше значення вимірюваної довжини лінії заокруглимо до 1 мм та визначимо похибку заокруглення за формулою:

$$\beta = \text{X}' - \bar{\text{X}} = 251{,}049 \ - \ 251{,}048856 \ = -0{,}000144 \text{ м } = -0{,}144 \text{ мм}.$$

Для контролю точності вимірів обчислимо зміщені поправки:

$$v_i = x_i - \text{X}'.$$

Далі обчислюємо добутки pv та pv^2, результати заокруглюємо до 0,1 і виконуємо контроль розрахунків шляхом підстановки отриманих результатів у рівність (9.31):

$$[pv] = -13{,}9; \quad [p] \cdot \beta = 96{,}4 \cdot (-0{,}144) = -13{,}9.$$

Далі суму квадратів відхилень виміряного значення від $\bar{X}$, $[pV^2]$ обчислюємо двічі – у таблиці та за формулою (9.10), отримаємо:

$$[pV^2] = 7216{,}1; \qquad [p\delta^2] - \frac{[p\delta]^2}{[p]} = 31449{,}7 - \frac{1528{,}5^2}{96{,}4} = 7214{,}1.$$

З урахуванням двох отриманих значень $[pV^2]$, двічі обчислюємо значення емпіричної середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою (9.36):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{7216{,}1}{13-1}} = 24{,}52 \text{ мм, або } \mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{7214{,}1}{13-1}} = 24{,}5 \text{ мм.}$$

Отже, результати збігаються.

Обчислимо середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини за формулою (9.28):

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{24{,}5}{\sqrt{96{,}4}} = 2{,}5 \text{ мм.}$$

Визначимо оцінку надійності величини μ за формулою (9.38):

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{24{,}5}{\sqrt{2(13-1)}} = 5{,}0 \text{ мм.}$$

Надійність середньої квадратичної похибки арифметичної середини M оцінимо за формулою (9.39):

$$m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{5{,}0}{\sqrt{96{,}4}} = 0{,}51 \text{ мм.}$$

Отримали остаточну довжину вимірюваної лінії $\bar{X}$ = 251,049 м ± 2,5 мм ($m_M = 0{,}51$ мм).

Приклад 9.11. Виконати математичне опрацювання вимірювань, що наведені в таблиці 9.3. У таблиці надані середні значення одного й того самого кута x_i, що виміряний різною кількістю прийомів n_i. Для обчислень доцільно скористатися формулою $p_i = \frac{n_i}{3}$.

Таблиця 9.3 – Вихідні дані

Номер виміру	1	2	3	4	5	6
x_i, м	89°47’16"	89°47’9"	89°47’6"	89°47’10"	89°47’23"	89°47’8"
n_i	6	18	3	15	6	12

Розв’язання. Скористаємось рекомендованою формулою $p_i = \frac{n_i}{3}$ та обчислимо вагу середніх квадратичних похибок p_i. Значення ваги заокруглюємо до 0,1 та результати розрахунку заносимо у таблицю 9.4.

Далі обчислимо різниці $\delta_i = x_i - X_0$, для чого як умовний нуль виберемо найменше значення $X_0 = 89°\ 47'\ 6''$. Значення δ_i, подаємо у секундах.

Обчислимо добутки $p\delta$ та добутки $p\delta^2$, результати обчислень заокруглюємо до 0,1.

Таблиця 9.4 – Результати розрахунків

Номер виміру	x, м	n	p	δ, сек	$p\delta$, сек	$p\delta^2$, сек^2	v, сек	pv, сек	pv^2, сек^2
1	89° 47’ 16"	6	2,0	10	20	200	6	12	72
2	89° 47’ 9"	18	6,0	3	18	54	–1	–6	6
3	89° 47’ 6"	3	1,0	0	0	0	–4	–4	16
4	89° 47’ 10"	15	5,0	4	20	80	0	0	0
5	89° 47’ 13"	6	2,0	7	14	98	3	6	18
6	89° 47’ 8"	12	4,0	2	8	16	–2	–8	16
Σ			20,0		80	448		0	128

Скориставшись формулою (9.23), обчислимо найімовірніше значення вимірюваної довжини лінії. Результат заокруглимо до 0,1 сек.

$$\bar{X} = X_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = 89°\ 47'6'' + \frac{80''}{20} = 89°\ 47'\ 6'' + 4'' = 89°\ 47'\ 10{,}0'';$$

$$X' = 89°\ 47'\ 10{,}0''.$$

Визначимо похибку заокруглення за формулою:

$$\beta = X' - \bar{X} = 89°\ 47'\ 10'' - 89°\ 47'\ 10{,}0'' = 0 \text{ сек.}$$

Для контроля точності вимірів обчислимо зміщені поправки:

$$v_i = x_i - X'.$$

Далі обчислимо добутки pv та pv^2, результати заокруглимо до 0,1 і виконуємо контроль розрахунків шляхом підстановки отриманих результатів у рівність:

$$[pv] = 0; \quad [p] \cdot \beta = 20 \cdot 0 = 0.$$

Суму квадратів відхилень виміряного значення від $\bar{X}$, $[pV^2]$ обчислюємо двічі – у таблиці та за формулою (9.10), отримаємо:

$$[pV^2] = 128; \qquad [p\delta^2] - \frac{[p\delta]^2}{[p]} = 448 - \frac{80^2}{20} = 128.$$

З урахуванням двох отриманих значень $[pV^2]$ обчислимо значення емпіричної середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою (9.36):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{128}{6-1}} = 5{,}1''.$$

Обчислимо середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини за формулою (9.28):

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{5{,}1}{\sqrt{20}} = 1{,}1''.$$

Визначимо оцінку надійності величини μ за формулою (9.38)

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{5{,}1}{\sqrt{2(6-1)}} = 1{,}6''.$$

Надійність середньої квадратичної похибки арифметичної середини M оцінимо за формулою (9.39):

$$m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{1{,}6}{\sqrt{20}} = 0{,}36''.$$

Остаточно величина вимірюваного кута становить:

$$\bar{X} = 89° \, 47' \, 10'' \pm 1{,}1''. (m_M = 0{,}36'').$$

Приклад 9.12. Відзнаку H точки місцевості отримано за 6 нівелірними лініями. Провести повну математичну обробку результатів вимірів за вихідними даними, що наведені в таблиці 9.5.

Таблиця 9.5 – Вихідні дані

Номер виміру	1	2	3	4	5	6
H, м	196,529	196,522	196,517	196,532	196,530	196,520
m_h, мм	6,3	8,4	9,1	4,3	5,2	7,5

Розв'язання. Першим кроком потрібно обчислити вагу середніх квадратичних похибок p_i за формулою:

$$p_i = \frac{c}{m_i^2},$$

де m_i – середня квадратична похибка результату виміру;

c – коефіцієнт пропорційності, який може набувати довільних значень.

Задаємо коефіцієнт пропорційності $c = 10$ та виконуємо обчислення, результати яких заокруглюємо до 0,1 та заносимо до таблиці 9.6.

Таблиця 9.6 – Результати розрахунків

Номер виміру	H, м	m_h, мм	p_i	δ, мм	$p\delta$, мм	$p\delta^2$, мм^2	v, мм	pv, мм	pv^2, мм^2
1	196,529	6,3	0,25	12	3,00	36,0	1,0	0,25	0,3
2	196,522	8,4	0,14	5	0,70	3,5	–6,0	–0,84	5,0
3	196,517	9,1	0,12	0	0,00	0,0	–11,0	–1,32	14,5
4	196,532	4,3	0,54	15	8,10	121,5	4,0	2,16	8,6
5	196,530	5,2	0,37	13	4,81	62,5	2,0	0,74	1,5
6	196,520	7,5	0,18	3	0,54	1,6	–8,0	–1,44	11,5
Σ			1,60		17,15	225,1		–0,45	41,4

За умовний нуль беремо щонайменше значення $H_0 = 196{,}517$ м та обчислюємо різниці $\delta_i = h_i - H_0$. Значення δ_i, подаємо у міліметрах, заокруглюючи їх до цілих.

Далі обчислюємо добутки $p\delta$ та добутки $p\delta^2$, результати обчислень заокруглюємо до 0,01.

Скориставшись формулою (9.23), обчислимо найімовірніше значення відзнаки H. Результат заокруглимо до 0,1 мм.

$$\overline{H} = H_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = 196{,}517 + \frac{17{,}15}{1{,}6} = 196{,}517\text{м} + 0{,}01072\text{м} = 196{,}5277 \text{ м}.$$

Заокруглимо отримане значення до 1 мм, $H' = 196{,}528$ м.

Визначимо похибку заокруглення:

$$\beta = H' - H = 196{,}528 - 196{,}5277 = 0{,}0003\text{м} = 0{,}3 \text{ мм}.$$

Далі для контролю точності вимірів обчислимо зміщені поправки за формулою:

$$v_i = h_i - H'.$$

Обчислюємо добутки pv та pv^2, результати заокруглюємо до 0,1 і виконуємо контроль розрахунків шляхом підстановки отриманих результатів у рівність $[pv] = 0$:

$$[pv] = -0{,}45; \quad [p] \cdot \beta = 1{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}48.$$

Далі суму квадратів відхилень виміряного значення від $\overline{H}$ $[pV^2]$ обчислюємо двічі – у таблиці та за формулою (9.10), отримаємо:

$$[pV^2] = 41{,}4; \qquad [p\delta^2] - \frac{[p\delta]^2}{[p]} = 225{,}1 - \frac{17{,}15^2}{1{,}6} = 41{,}27.$$

З урахуванням двох отриманих значень $[pV^2]$ обчислюємо значення емпіричної середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою (9.36):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{41,4}{6-1}} = 2,88 \text{ мм}; \quad \mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{41,27}{6-1}} = 2,88 \text{ мм}.$$

Обчислимо середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини за формулою (9.28)

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{2,88}{\sqrt{1,6}} = 2,27 \text{ мм}.$$

Визначимо оцінку надійності величини μ за формулою (9.38)

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{2,88}{\sqrt{2(6-1)}} = 0,91 \text{ мм}.$$

Надійність середньої квадратичної похибки арифметичної середини M оцінимо за формулою (9.39):

$$m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{0,91}{\sqrt{1,6}} = 0,72 \text{ мм}.$$

Відзнака H точки місцевості становить:

$$\overline{H} = 196,528 \text{ м} \pm 2,27 \text{ мм} \ \ (m_M = 0,72).$$

Приклад 9.13. Географічна широта однієї з точок земної поверхні визначена з 8 серій спостережень вісім разів, у результаті чого обчислені прості арифметичні середини φ_i та їхні середні квадратичні похибки m_i. Визначити остаточне значення широти (загальну арифметичну середину). Вихідні дані наведено у таблиці 9.7.

Таблиця 9.7 – Вихідні дані

Номер виміру	φ_i	m_i	Номер виміру	φ_i	m_i
1	15°45’36,18’’	0,25	5	15°45’35,78’’	0,28
2	15°45’36,53’’	0,21	6	15°45’35,96’’	0,23
3	15°45’36,49’’	0,31	7	15°45’36,02’’	0,35
4	15°45’35,27’’	0,19	8	15°45’35,81’’	0,15

Розв’язання. Обчислимо вагу середніх квадратичних похибок p_i за формулою $p_i = \frac{c}{m_i^2}$, до того ж за c візьмемо одне із значень середніх квадратичних похибок $m_i = 0,28$, тоді

$$p_i = \frac{(0,28)^2}{m_i^2}.$$

Результати обчислень заокруглюємо до 0,1 та заносимо у таблицю 9.8.

Таблиця 9.8 – Результати розрахунків

Номер виміру	φ_i	m_i, сек	p_i	δ, сек	$p\delta$, сек	$p\delta^2$, сек^2	v, сек	pv, сек	pv^2, сек^2
1	15°45'36,18''	0,25	1,25	0,91	1,14	1,00	0,20	0,25	0,05
2	15°45'36,53''	0,21	1,78	1,26	2,24	2,82	0,53	0,94	0,50
3	15°45'36,49''	0,31	0,82	1,22	1,00	1,22	0,49	0,40	0,20
4	15°45'35,27''	0,19	2,17	0,00	0,00	0,00	–0,73	–1,58	1,15
5	15°45'35,78''	0,28	1,00	0,51	0,51	0,26	–0,22	–0,22	0,05
6	15°45'35,96''	0,23	1,48	0,69	1,02	0,70	–0,04	–0,06	0,00
7	15°45'36,02''	0,35	0,64	0,75	0,48	0,36	0,02	0,01	0,00
8	15°45'35,81''	0,15	3,48	0,54	1,88	1,02	–0,19	–0,66	0,13
Σ			12,62		8,27	7,38		–0,92	2,10

За умовний нуль беремо щонайменше значення $\varphi_0 = 15°\,45'\,35{,}27''$ та обчислюємо різниці $\delta_i = \varphi_i - \varphi_0$. Значення δ_i, подаємо у секундах, заокруглюючи їх до 0,01″.

Далі обчислюємо добутки $p\delta$ та добутки $p\delta^2$, результати обчислень заокруглюємо до 0,01.

Скориставшись формулою (9.23), обчислимо найімовірніше значення географічної широти φ. Результат заокруглимо до 0,1″.

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = 15°\,45'\,35{,}27'' + \frac{8{,}27}{12{,}62} =$$
$$= 15°\,45'\,35{,}27'' + 0{,}655'' = 15°\,45'\,35{,}925''.$$

Заокруглимо отримане значення до 1″, $\varphi' = 15°\,45'\,36''$.

Визначимо похибку заокруглення за формулою:

$$\beta = \varphi' - \varphi = 15°\,45'\,36'' - 15°\,45'\,35{,}925'' = 0{,}075''.$$

Далі для виконання контролю точності обчислень визначимо зміщені поправки:

$$v_i = \varphi_i - \varphi'.$$

Обчислимо добутки pv та pv^2, результати заокруглимо до 0,01 і виконуємо контроль розрахунків шляхом підстановки отриманих результатів у рівність $[pv] = 0$:

$$[pv] = -0{,}92''; \quad [p] \cdot \beta = 12{,}62 \cdot 0{,}075'' = 0{,}95''.$$

Далі суму квадратів відхилень виміряного значення від φ $[pV^2]$ обчислюємо двічі – у таблиці та за формулою (9.36), отримаємо:

$$[pV^2] = 2{,}1; \qquad [p\delta^2] - \frac{[p\delta]^2}{[p]} = 7{,}38 - \frac{8{,}27^2}{12{,}62} = 1{,}96.$$

З урахуванням двох отриманих значень $[pV^2]$ обчислюємо значення емпіричної середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою (9.36):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{2,1}{8-1}} = 0,55\,''; \quad \mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{1,96}{8-1}} = 0,53\,''.$$

Обчислимо середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини за формулою (9.28)

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{0,55}{\sqrt{12,62}} = 0,15\,''.$$

Визначимо оцінку надійності величини μ за формулою (9.38)

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{0,55}{\sqrt{2(8-1)}} = 0,15\,''.$$

Надійність середньої квадратичної похибки арифметичної середини M оцінимо за формулою (9.28):

$$m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{0,15}{\sqrt{12,62}} = 0,04\,''.$$

Географічна широта досліджуваної точки земної поверхні дорівнює:

$$\bar{\varphi} = \ 15°\,45'\,36'' \pm 0,15'' \ \ (m_M = 0,04\,'').$$

Запитання для самоперевірки

1. Поясніть, що таке вага результату виміру?

2. Чи доцільно призначати вагу одиничному результату виміру? Якщо так, то чому? Якщо ні, то теж чому?

3. Чому під час розрахунку ваг коефіцієнт пропорційності має перевищувати нуль?

4. Чи можуть ваги приймати від’ємні значення?

5. Надані два однорідних виміри із різними вагами. Що можна сказати про їхню точність?

6. Що розуміють як вираження «СКП одиничної ваги»?

7. За якою формулою можна розрахувати вагу результату виміру, якщо задані СКП результату виміру та СКП одиничної ваги?

8. Як змінюються ваги при передачі дирекційних кутів?

9. Чому дорівнює вага суми рівноточних доданків?

10. Подан ряд вимірів зі своїми вагами. Обчислена диференційована функція цих результатів вимірів. Як розрахувати вагу цієї функції?

11. Як розрахувати ваги перевищень, що отримані у ходах геометричного нівелювання, які прокладаються на пересіченій і на рівнинній місцевості?

12. Чи більше вага суми за вагу різниці двох результатів вимірів?

13. Охарактеризуйте властивості спільної арифметичної середини.

14. Як розраховують вагу спільної арифметичної середини?

15. Чи можна вважати, що середнє арифметичне є частковим випадком спільної арифметичної середини?

16. За якою формою можна обчислити СКП спільної арифметичної середини, якщо відома СКП одиничної ваги?

17. Як обчислюють поправки зі зрівнювання та яку властивість вони мають?

18. Як оцінити надійність СКП загальної арифметичної середини?

Задачі для самостійного розв'язання

9.1. Один і той самий кут виміряно різною кількістю прийомів, що дало такі результати:

Номер з/п	Кути	Прийоми
1	54 º 12′ 18″	5
2	54 º 12′ 22″	3
3	54 º 12′ 20″	2

Виконати математичну обробку цього ряду вимірів.

9.2. За трьома кутомірними ходами з різним числом поворотних точок був переданий дирекційний кут на вузлову лінію. Виконати математичну обробку цього ряду результатів вимірів:

Номер з/п	Дирекційні кути	Кількість поворотних точок
1	314º16,5′	4
2	20,0	8
3	21,0	6

9.3. За трьома ходами різної довжини передано висоту на вузловий репер, що дало такі результати:

Номер з/п	Висота репера, м	Довжина ходу, км
1	286,571	8,6
2	591	6,2
3	558	4,5

Виконати математичну обробку цього ряду результатів вимірів.

9.4. Ваги результатів вимірів горизонтальних кутів відповідно дорівнюють 0,5; 1,0; 1,5; 2,0. Обчислити їхні середньоквадратичні відхилення, якщо відомо, що СКП одиниці ваги дорівнює 10″.

9.5. Прийнявши ваги результатів вимірів кожного з 10 кутів теодолітного ходу рівними 2, обчислити вагу суми усіх кутів.

9.6. В трикутнику один кут отриманий з 6 прийомів, другий − з 18, а третій отриманий з обчислень. Знайти вагу третього кута, якщо за одиницю ваги прийнята вага кута, що виміряний одним прийомом.

9.7. Підрахувати вагу висоти репера, отриманої за ходом геометричного нівелювання довжиною 16 км, якщо вага перевищення, отриманого за ходом в 1 км, прийнята за одиницю.

9.8. На репер за чотирма ходами геометричного нівелювання різної довжини передано висоту, при цьому отримані результати:

Номер виміру	H_i, м	L_i, км
1	134,178	5
2	134,211	4
3	134,188	5
4	134,195	6

Виконати математичну обробку цього ряду результатів вимірів.

Тема 10 ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ЗА РІЗНИЦЯМИ ПОДВІЙНИХ ВИМІРІВ

Поняття різниць подвійних вимірів однорідних величин. Середня квадратична похибка одного виміру. Середня квадратична похибка одиниці ваги. Залишкова систематична похибка. Критерій наявності систематичної похибки. Надійність оцінок точності подвійних рівноточних та нерівноточних вимірів.

10.1 Поняття подвійних вимірів однорідних величин

У геодезичній практиці прийнято кожну фізичну величину вимірювати незалежно та рівноточно не менше двох разів, оскільки один вимір не дає можливості здійснити контроль правильності виміру. Зокрема, горизонтальний кут вимірюють у положеннях труби теодоліта «круг право» і «круг ліво», довжину лінії вимірюють двічі – у прямому та зворотному напрямах, при геометричному нівелюванні перевищення на станції визначають за чорним і червоним боками рейки, у тригонометричному нівелюванні перевищення визначають у прямому та зворотному напрямах, при нівелюванні II і III класу нівелірний хід прокладають у прямому та зворотному напрямах. Такі пари вимірів називають **подвійними вимірами**.

Мова йде про вимірювання великої кількості однорідних величин, кожну з яких вимірюють тільки двічі. Завдання полягає у тому, щоб за загальною сукупністю різниць подвійних вимірів однорідних величин оцінити їхню точність.

Нехай з n однорідних величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, кожна виміряна двічі та отримані два ряди результатів вимірів:

$$x_1', x_2', \dots, x_n' \qquad x_1'', x_2'', \dots, x_n''. \tag{10.1}$$

На підставі результатів вимірів (10.1) можна обчислити n різниць подвійних вимірів, щоб застосувати їх для оцінювання загальної для усіх вимірів точності:

$$d_i = x_i' - x_i'', \quad i = \overline{1, n}, \tag{10.2}$$

де x_i', x_i'' – результати двох вимірів одного і того самого об'єкту.

У геодезичній практиці зазвичай зустрічаються два випадки: усі подвійні виміри рівноточні, або виміри у парах рівноточні, але пари одна з одною нерівноточні.

10.2 Оцінювання точності за різницями подвійних рівноточних вимірів

Розглянемо випадок, коли усі x_i' та x_i'' у рядах (10.1) рівноточні. Звернемо увагу на те, що істинне значення випадкової величини d_i відоме, оскільки якщо би виміри були точними, то всі різниці d_i дорівнювали би нулю, і це є істинним значенням d. Звідси випливає, що ненульові різниці d_i є їхніми істинними похибками. Зазвичай, точність вимірів оцінюють за середньою квадратичною похибкою, яку визначають як корінь квадратний із дисперсії. Дисперсією випадкової величини є середнє арифметичне квадратів її відхилень від істинного значення (5.2), отже, для d дисперсію визначають співвідношенням $\frac{[d^2]}{n}$, відповідно середнє квадратичне відхилення d дорівнює:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \tag{10.3}$$

де n – число різниць d, тобто число вимірюваних величин X_i.

Середнє квадратичне відхилення різниць d характеризує їхню середню квадратичну похибку, скориставшись якою, потрібно визначити середню квадратичну похибку результатів вимірів m.

З визначення різниці d_i, тобто зі співвідношення (10.2), випливає, що випадкова величина d є алгебраїчною сумою двох незалежних випадкових величин x_i' та x_i''. Відповідно до формули (4.13) дисперсія суми незалежних випадкових величин, дорівнює сумі їхніх дисперсій, до того ж, оскільки виміри рівноточні, їхні дисперсії однакові й дорівнюють m^2:

$$m_d^2 = m^2 + m^2 = 2 \cdot m^2,$$

звідки

$$m^2 = \frac{m_d^2}{2} = \frac{[d^2]}{2n},$$

відповідно середнє квадратичне відхилення результатів вимірів m визначається в такий спосіб:

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \tag{10.4}$$

Найбільш надійні значення $\bar{x}_i$ величин X_i, кожна з яких виміряна два рази, обчислюють як середні арифметичні відповідних результатів вимірів x_i' та x_i'':

$$\bar{x}_i = \frac{x_i' + x_i''}{2}. \tag{10.5}$$

Для оцінювання точності середніх арифметичних результатів вимірів $\bar{x}$ визначимо середню квадратичну похибку, скориставшись формулою (5.6):

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{m}{\sqrt{2}},$$

де n – число результатів вимірів однієї вимірюваної величини, $n = 2$, з яких визначена її арифметична середня $\bar{x}_i$.

До останнього виразу підставимо m із формули (10.4) та отримаємо середню квадратичну похибку $\bar{x}$, виражену через різниці d_i:

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{4n}},$$

отже, остаточно маємо:

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{4n}}. \tag{10.6}$$

За невеликої кількості подвійних вимірів n потрібно визначати надійність оцінок m та $m_{\bar{x}}$, отриманих за формулами (10.4) та (10.6). Можна показати, що середню квадратичну похибку m_m можна визначити за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}, \tag{10.7}$$

а середню квадратичну похибку $m_{m_{\bar{x}}}$ – за формулою:

$$m_{m_{\bar{x}}} = \frac{m_{\bar{x}}}{\sqrt{2n}}. \tag{10.8}$$

Розглянутий підхід до оцінювання точності за різницями подвійних вимірів застосовують, коли різниці d_i у певному ряді результатів вимірів не містять систематичних похибок.

Щодо впливу на результати подвійних вимірів наявності систематичних похибок вважають, що систематичні похибки двох рівноточних вимірів однієї величини X_i близькі одна до одної за величиною та у різницях d_i істотною мірою погашаються. Тому систематичні похибки у різницях d_i називають **залишковими систематичними похибками.**

Для виявлення у ряді результатів подвійних вимірів систематичної похибки можна скористатися властивістю компенсації випадкових похибок. За відсутності систематичної похибки величина $\frac{[d]}{n}$ має наближатися до нуля. Якщо це не так, то властивість компенсації випадкових похибок порушена й можна вважати, що на процес вимірів мали вплив певні випадкові чинники або різниці d_i містять систематичні похибки θ_d.

Звичайний підхід до виключення систематичних похибок полягає у наступному. Будемо вважати, що похибки, які містять різниці d_i, змінюються неістотно та що різниці складаються з випадкової Δ та систематичної θ похибок. Тоді співвідношення $\frac{[d]}{n}$ можна представити в такий спосіб:

$$\frac{[d]}{n} = \frac{[\Delta]}{n} + \frac{[\theta]}{n}.$$

Скористаємось властивістю компенсації випадкових похибок та дорівняємо до нуля середнє випадкових похибок $\frac{[\Delta]}{n} = 0$, тоді залишкове середнє систематичних похибок дорівнюватиме $\frac{[\theta]}{n} = \frac{[d]}{n} = \theta_{\text{сер}}$.

Виключимо з кожного d_i середнє значення систематичної похибки та отримаємо значення залишкових відхилень ε_i:

$$d_i - \theta_{\text{сер}} = \varepsilon_i,$$

додамо їх одне до одного $[d] - n \cdot \theta_{\text{сер}} = [\varepsilon]$, звідки, оскільки теоретично $[\varepsilon] = 0$ як сума остаточних випадкових відхилень від середнього різниць d_i, є справедливим $[d] = n \cdot \theta_{\text{сер}}$. Але практично $[\varepsilon]$ дорівнює не нулю, а сумі n різниць між точним та обчисленим значеннями середньої систематичної похибки $\theta_{\text{сер}}$:

$$[\varepsilon] = n \cdot \beta,$$

де $\beta = \theta_{\text{сер}}^{\text{точ}} - \theta_{\text{сер}}^{\text{обч}}$.

Оскільки величини d_i отримані з вимірів, то відхилення ε_i можна розглядати як відхилення від середнього різниць d_i, і тому за формулою Бесселя (9.36) для середньої квадратичної похибки m_d будь-якої різниці d_i записати:

$$m_d = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n-1}}, \tag{10.9}$$

тоді для середньої квадратичної похибки вимірів отримаємо:

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{2(n-1)}}. \tag{10.10}$$

Для контролю обчислення $[\varepsilon^2]$ застосовують формулу:

$$[\varepsilon^2] = [d^2] - \frac{[d^2]}{n}. \tag{10.11}$$

Відповідно, у цьому випадку для обчислення середньої квадратичної похибки середнього арифметичного парних вимірів потрібно застосовувати таку формулу:

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{4(n-1)}}. \tag{10.12}$$

Отже, для обчислення середньої квадратичної похибки вимірів отримано дві формули – (10.4) та (10.10), а для обчислення середньої квадратичної похибки середнього арифметичного парних вимірів – формули (10.6) та (10.12), тому потрібно визначитись, за якого значення систематичного впливу $\theta_{\text{сер}}$ потрібно застосовувати формули (10.10) та (10.12). Як умову, за якою формули (10.10) та (10.12) застосовувати непотрібно вважають нерівність:

$$|\theta_{\text{сер}}| \le \frac{m_d}{5} \quad \text{або} \quad |[d]| \le 0{,}25[|d|]. \tag{10.13}$$

Якщо умова (10.13) виконується, то потрібно для визначення m та $m_{\bar{x}}$ застосовувати формули (10.4) та (10.6) відповідно.

Приклад 10.1. У результаті вимірювання довжин ліній далекоміром за двобічними рейками отримані результати вимірів, які наведені в таблиці 10.1. Необхідно визначити точність вимірів та їх надійність.

Таблиця 10.1 – Результати вимірювань

Номер виміру	$L_{чор}$, м	$L_{черв}$, м	d, м	$\varepsilon = d - \theta_{сер}$	ε^2
1	169,8	170,6	–0,8	–0,5	0,25
2	170,7	170,1	+0,6	+0,9	0,81
3	171,0	171,6	–0,6	–0,3	0,09
4	169,0	169,8	–0,8	–0,5	0,25
5	170,6	171,1	–0,5	–0,2	0,04
6	169,9	170,8	–0,9	–0,6	0,36
7	171,7	171 ,0	+0,7	+1,0	1,00
8	170,1	170,9	–0,8	–0,5	0,25
9	171,0	171,6	–0,6	–0,3	0,09
10	169,9	169,2	+0,7	+1,0	1,00
Σ			–3,0	0,0	4,14

Розв'язання. З переважання знаків мінус та з накопичення суми різниць видно, що необхідно виключити систематичні похибки. Обчислимо середнє значення систематичної похибки за формулою:

$$\theta_{\text{сер}} = \frac{[d]}{n} = -0{,}3 \text{ м}$$

та виключимо цю величину з різниць d_{i}, до того ж обчислення контролюємо за виразом:

$$[\varepsilon] = n \cdot \beta,$$

де $[\varepsilon] = 0, n \cdot \beta = n \cdot (\theta_{\text{сер}}^{\text{точ}} - \theta_{\text{сер}}^{\text{обч}}) = 10 \cdot (-3 + 3) = 0$ м.

Середня квадратична похибка пари вимірів, обчислена за формулою (10.10), становить

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{4{,}14}{18}} = 0{,}48 \text{ м.}$$

Середня квадратична похибка середнього парних вимірів, обчислена за формулою (10.12), становить

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{4(n-1)}} = \sqrt{\frac{4{,}14}{36}} = 0{,}34 \text{ м.}$$

Визначимо надійність оцінки середньої квадратичної похибки вимірів m використовуючи формулу (10.7):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{0{,}48}{\sqrt{18}} = 0{,}11 \text{ м}$$

і надійність оцінювання середньої квадратичної| похибки середнього значення вимірів $m_{m_{\bar{x}}}$ за формулою (10.8):

$$m_{m_{\bar{x}}} = \frac{m_{\bar{x}}}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{0{,}34}{\sqrt{18}} = 0{,}08 \text{ м.}$$

Визначимо відносну похибку:

$$\frac{m_{\bar{x}}}{L} = \frac{0{,}34}{170} = 0{,}002.$$

З порівняння показників точності вимірів та їх надійності видно, що виміри виконані досить точно й отриманим результатам можна довіряти.

10.3 Оцінювання точності за різницями подвійних нерівноточних вимірів

Нехай з *n* однорідних величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, кожна виміряна двічі незалежно, до того ж у кожній парі результати вимірів рівноточні, а пари вимірів одна з одною нерівноточні. На підставі результатів вимірів обчислимо *n* різниць подвійних вимірів для оцінювання їх загальної для усіх вимірів точності за формулою (10.2): $d_i = x_i' - x_i''$, де x_i', x_i'' – результати двох вимірів одного й того самого об'єкта.

Оскільки пари вимірів одна з одною нерівноточні, позначимо ваги вимірів у і-й парі p_i:

$$p_i = p_{x'_i} = p_{x''_i},$$

тоді ваги різниць $d_i = x'_i - x''_i$, які є істинними похибками, запишемо з врахуванням основної теореми теорії похибок (9.6)

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i} = \frac{2}{p_i},$$

звідки вага різниці d_i кожного виміру визначається в такий спосіб:

$$p_{d_i} = \frac{p_i}{2}. \qquad (10.14)$$

Середню квадратичну похибку одиниці ваги визначимо через середньозважену суму квадратів відхилень результатів вимірів x_i від центру розсіювання X, поділену на n, тобто через визначення дисперсії $\frac{[p\Delta^2]}{n} = \mu^2$, де Δ_i – істинні похибки замінимо на істинні похибки подвійних вимірів, якими є різниці d_i, скористаємось вагами d_i (10.14) та отримаємо:

$$\mu = \sqrt{\frac{\frac{p_1}{2}\cdot d_1^2 + \frac{p_2}{2}\cdot d_2^2 + \cdots + \frac{p_n}{2}\cdot d_n^2}{n}},$$

остаточно маємо формулу:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}, \qquad (10.15)$$

де p_i – вага одного виміряного значення з кожної пари вимірів.

Середню квадратичну похибку результату одного виміру з вагою p_i визначимо за формулою (9.34):

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}. \qquad (10.16)$$

Найнадійніші значення $\bar{x}_i$ величин X_i, кожна з яких виміряна двічі, отримуємо як середні арифметичні відповідних результатів вимірів x'_i та x''_i за формулою (10.5):

$$\bar{x}_i = \frac{x'_i + x''_i}{2},$$

до того ж, вага кожного значення $\bar{x}_i$ середніх арифметичних відповідних результатів вимірів $p_{\bar{x}_i}$ дорівнюватиме

$$p_{\bar{x}_i} = 2p_i. \qquad (10.17)$$

Середню квадратичну похибку арифметичної середини $\bar{x}_i$ для кожної пари обчислюють за формулою

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}. \qquad (10.18)$$

Середню квадратичну похибку m_μ власно похибки μ, що обчислена за формулою (10.15), визначають за рівністю

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2n}}. \quad (10.19)$$

Середню квадратичну похибку m_{m_i} середньої квадратичної похибки результату одного виміру, визначають за формулою

$$m_{m_i} = \frac{m_\mu}{\sqrt{p_i}} = \frac{m_i}{\sqrt{2n}}, \quad (10.20)$$

а середню квадратичну похибку $m_{m_{\bar{x}_i}}$ середньої квадратичної похибки арифметичної середини $\bar{x}_i$, визначають за формулою

$$m_{m_{\bar{x}_i}} = \frac{m_\mu}{\sqrt{2p_i}} = \frac{m_{\bar{x}_i}}{\sqrt{2n}}. \quad (10.21)$$

Отримані формули (10.15–10.21) є справедливими, якщо різниці d_i не містять істотних систематичних похибок, на наявність яких вказуватимуть переважання додатних або від'ємних знаків у різницях d_i та помітна величина $[d]$, унаслідок чого буде порушеною властивість компенсації випадкових похибок і співвідношення

$$\frac{[pd]}{[p]} \neq 0,$$

до того ж $\frac{[pd]}{[p]}$ буде істотно відрізнятись від нуля та одночасно виражати величину систематичної похибки $\theta_{\text{сер}}$:

$$\frac{[pd]}{[p]} = \theta_{\text{сер}}.$$

Далі, встановивши наявність систематичних похибок, визначають їхні величини θ_1, θ_2, …, θ_n та виключають з різниць d_i, обчислюючи значення ε_i:

$$d_i - \theta_i = \varepsilon_i .$$

Величини систематичних похибок при лінійних вимірах та при геометричному нівелюванні визначають за допомогою коефіцієнта залишкового систематичного впливу λ_l, що показує частку систематичного впливу на одиницю довжини

$$\lambda_l = \frac{[d]}{[l]}, \quad (10.22)$$

де l – довжини вимірюваних ліній для лінійних вимірів;

$$\lambda_L = \frac{[d]}{[L]}, \quad (10.23)$$

де L – довжина ходу подвійного нівелювання.

Далі величини θ_i визначають за формулою:

$$\theta_i = \lambda_l \cdot l_i \quad (10.24)$$

Під час опрацювання результатів лінійних вимірів полігонометрії $[d]$, l_i та $[l]$ виражають у метрах. Визначивши коефіцієнт систематичного впливу, обчислюють значення ε_i:

$$d_i - \theta_i = \varepsilon_i.$$

Як і при рівноточних вимірах, величини ε_i є залишковими відхиленнями з протилежним знаком, але з вагами

$$p_d = \frac{p}{2}, \quad (10.25)$$

Відповідно для середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ маємо

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{2(n-1)}} . \quad (10.26)$$

Для середнього з двох виміряних значень отримаємо:

$$m_{\bar{x}_i} = \sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{4(n-1)}}. \quad (10.27)$$

Формули (10.19) та (10.21) для визначення надійності обчислених середніх квадратичних похибок μ та $m_{\bar{x}_i}$ матимуть вигляд:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} , \quad (10.28)$$

$$m_{m_{\bar{x}_i}} = \frac{m_{\bar{x}_i}}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (10.29)$$

Оцінка точності, обчислена за різницями подвійних вимірів, зазвичай перевищує дійсну точність результатів вимірів.

Зазвичай виміри, що складають пари, виконують майже в одних і тих самих умовах, тобто одним виконавцем, тим самим інструментом, у тій самій місцевості, при температурі й вологості повітря, ґрунту та інших факторів, що відрізняються неістотно. За таких обставин так само й вплив низки джерел похибок на пари результатів вимірів буде майже тим самим. Тому на різницях парних результатів певні джерела похибок зовсім не вплинуть, а вплив частки інших буде послаблений, проте у дійсності їхній вплив на результати вимірів помітний.

Величина коефіцієнта залишкового систематичного впливу λ_l характеризує тільки вплив різниць систематичних похибок першого та другого результатів парних вимірів, але не дає уявлення про величину самих систематичних похибок.

Отже, різниці d_i зазвичай лише частково виражають вплив усіх джерел похибок на результат окремого виміру пари. Унаслідок цього оцінка за різницями подвійних вимірів дає зазвичай дещо зменшене значення похибок m та μ, до того ж іноді у 2–3 рази. Найнадійніші дані з оцінювання точності дають розрахунки за нев'язками вільної мережі полігонів, далі за внутрішнім збігом результатів вимірів та найменш надійними – за різницями подвійних вимірів.

Послідовність опрацювання подвійних нерівноточних вимірів така:

1. Обчислюють вагу p_i перевищення кожного нівелірного ходу за формулою:

$$p_i = \frac{1}{L_i}, \tag{10.30}$$

де L_i – довжина нівелірного ходу, км.

2. Обчислюють суму різниць d_i перевищень прямого та зворотного ходу й суму довжин нівелірних ходів L_i.

3. Визначають величину коефіцієнта систематичного впливу за формулою (10.23):

$$\lambda = \frac{[d]}{[L]}.$$

4. Обчислюють добутки λL_i, які є систематичними похибками θ_1, θ_2, …, θ_n. Сума цих добутків має дорівнювати сумі різниць d_i, тобто:

$$[d] = [\lambda L]. \tag{10.31}$$

5. Обчислюють остаточні відхилення ε_i:

$$\varepsilon_i = d_i - \theta_i = d_i - \lambda \cdot L_i. \tag{10.32}$$

6. Обчислюють середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою (10.26):

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{2(n-1)}}.$$

7. Оцінюють надійність величини μ, отриманої на підставі (10.26). Це можна зробити за формулою (10.28):

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

8. Обчислюють середню квадратичну похибку кожного нівелірного ходу за формулою:

$$m_i = \mu \cdot \sqrt{L_i}. \tag{10.33}$$

9. Обчислюють середню квадратичну похибку середнього перевищення в нівелірному ході за формулою:

$$m_{m_i} = \frac{m_i}{\sqrt{2}}. \tag{10.34}$$

Приклад 10.2. У таблиці 10.2 подані різниці перевищень прямих та зворотних ходів нівелювання II класу та число станцій за ходами в одному напряму. Виконати оцінювання точності отриманих результатів вимірів.

Таблиця 10.2 – Результати вимірювань

Номер ходу	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Різниці d, мм	–4,1	2,6	3	–1,8	–3,7	7,3	–6,4	3,2	1,2	–1,5
Число станцій N	25	17	19	22	33	35	28	21	8	13

Розв'язання. За розташуванням знаків різниць та за їх величиною

$$\frac{[pd]}{[p]} = \frac{1,2}{5,41} = 0,22 \text{ мм}$$

можна вважати, що у цьому ряді подвійних вимірів немає помітного впливу джерел систематичних похибок на різниці d_i. Виконаємо обчислення та результати розрахунків занесемо у таблицю 10.3.

Таблиця 10.3 – Результати обчислень

Номер ходу	Різниці d, *мм*	Число станцій N	Ваги $P = \frac{10}{N}$	pd, *мм*	pd^2	d^2
1	–4,1	25	0,40	–1,64	6,7	16,8
2	2,6	17	0,59	1,53	4,0	6,8
3	3	19	0,53	1,58	4,7	9,0
4	–1,8	22	0,45	–0,82	1,5	3,2
5	–3,7	33	0,30	–1,12	4,1	13,7
6	7,3	35	0,29	2,09	15,2	53,3
7	–6,4	28	0,36	–2,29	14,6	41,0
8	3,2	21	0,48	1,52	4,9	10,2
9	1,2	8	1,25	1,50	1,8	1,4
10	–1,5	13	0,77	–1,15	1,7	2,3
Σ	–0,2		5,41	1,20	59,3	157,7

Середня квадратична похибка одиниці ваги (перевищення за ходом із 10 станцій у одному напрямі), обчислена за формулою (10.15) та її похибка, обчислена за формулою (10.19) становлять:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{59,3}{20}} = 1,7 \text{ мм},$$

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2n}} = \frac{1,7}{\sqrt{20}} = 0,38 \text{ мм}.$$

Середня квадратична похибка середнього з парних вимірів за ходом тієї самої протяжності, тобто на 1 умовний кілометр, за формулою (10.18) становить

$$m_{\bar{x}_i} = \sqrt{\frac{[pd^2]}{4n}} = \sqrt{\frac{59,3}{40}} = 1,2 \text{ мм}.$$

Середня квадратична похибка похибки $m_{\bar{x}_i}$ за формулою (10.21):

$$m_{m_{\bar{x}_i}} = \frac{m_{\bar{x}_i}}{\sqrt{2n}} = \frac{1,2}{\sqrt{20}} = 0,27 \text{ мм}.$$

Приклад 10.3. У таблиці 10.4 наведені результати нівелювання (перевищення у метрах) між точками за двох положень нівеліра. Обчислити середні квадратичні похибки одного виміру з середнього та з подвійних вимірювань.

Таблиця 10.4 – Вихідні дані

Номер перевищення	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-й стан X_i, м	1,273	0,987	1,069	0,542	0,768	0,895	1,166	1,304	1,198	0,484
2-й стан X_i', м	1,270	0,988	1,065	0,542	0,766	0,891	1,167	1,302	1,194	0,481

Розв'язання. Для кожної пари подвійних вимірювань складаємо різницю d_i за формулою (10.2):

$$d_i = x_i - x_i',$$

де x_i та x_i' – результати двох вимірювань одного перевищення.

Результати розрахунків занесемо у таблицю 10.5.

Таблиця 10.5 – Результати розрахунків

Номер перевищення	1-й стан x_i, м	2-й стан x_i', м	d_i, мм	ε_i, мм	ε_i^2, мм^2
1	1,273	1,270	3	1,0	1
2	0,987	0,988	–1	–3,0	9
3	1,069	1,065	4	2,0	4
4	0,542	0,542	0	–2,0	4
5	0,768	0,766	2	0,0	0
6	0,895	0,891	4	2,0	4
7	1,166	1,167	–1	–3,0	9
8	1,304	1,302	2	0,0	0
9	1,198	1,194	4	2,0	4
10	0,484	0,481	3	1,0	1
S			20	0,0	36,0

Перед усім для виявлення систематичної похибки перевіримо виконання нерівності (10.13):

$$|[d]| \leq \ 0{,}25[|d|];$$

$$|[d]| = 20\ ; \qquad 2{,}5\frac{[|d|]}{\sqrt{n}} = 2{,}5 \cdot \frac{24}{\sqrt{10}} = 18{,}97;$$

$$20 > 18{,}97\ ,$$

отже, нерівність не виконується, що вказує на потребу перевірити значущість систематичної похибки.

Для цього обчислимо систематичну похибку $\theta_{\text{сер}}$:

$$\theta_{\text{сер}} = \frac{[d]}{n} = \frac{20}{10} = 2\ \text{мм},$$

а також обчислимо значення залишкових відхилень ε_i:

$$d_i - \ \theta_{\text{сер}} = \ \varepsilon_i,$$

Тоді середня квадратична похибка пари вимірів, обчислена за формулою (10.10), становить:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{36}{18}} = 1{,}4 \text{ мм.}$$

Середня квадратична похибка перевищення при одному положенні нівеліра за формулою (10.12) становить

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{4(n-1)}} = \sqrt{\frac{36}{36}} = 1 \text{ мм.}$$

Середню квадратичну похибку перевищення, що отримана як середнє з результатів нівелювання при двох положеннях приладу визначимо в такий спосіб:

$$m_{x_{i\,\text{ср}}} = \frac{m_x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7 \text{ мм.}$$

Приклад 10.4. У таблиці 10.6 наведені результати першого та другого суміщень штрихів оптичного теодоліта. Визначити середню квадратичну похибку суміщення штрихів та середню квадратичну похибку отриманих середніх значень за результатами подвійних наведень штрихів оптичного теодоліта.

Таблиця 10.6 – Вихідні дані

Номер перевищ.	1-ше суміщення X_i	2-ге суміщення X'_i, сек	Номер перевищ.	1-ше суміщення X_i	2-ге суміщення X'_i, сек
1	0°17’23,4"	21,1"	7	180°42’18,8"	18,2"
2	30°08’14,6"	13,1"	8	210°16’24,0"	25,6"
3	60°33’49,5"	50,6"	9	240°25’41,3"	40,3"
4	90°44’03,7"	5,4"	10	270°37’33,4"	32,3"
5	120°56’20,9"	21,9"	11	300°09’21,6"	22,8"
6	150°29’53,2"	51,5"	12	330°51’54,0"	55,9"

Розв’язання. Обчислюємо різниці d_i у кожній парі подвійних рівноточних вимірювань за формулою (10.2) та визначаємо їхню суму. Результати виражаємо в секундах та заносимо до таблиці 10.7.

$$d_i = x_i - x'_i.$$

Для виявлення систематичної похибки перевіримо виконання нерівності (10.13):

$$|[d]| = 0{,}3'' ; \qquad 2{,}5 \cdot \frac{[|d|]}{\sqrt{n}} = 2{,}5 \cdot \frac{16{,}7}{\sqrt{12}} = 12{,}05'',$$

$$0{,}3'' < 12{,}05'',$$

отже, нерівність $|[d]| \leq 0{,}25[|d|]$ виконується, тому перевіряти значущість систематичної похибки не потрібно.

Таблиця 10.7 – Результати розрахунків

Номер суміщ.	1-ше суміщ. x_i, сек	2-ге суміщ. x'_i, сек	d_i, сек	d_i^2, сек^2	ε_i, сек	ε_i^2, сек^2
1	0°17’23,4"	21,1"	2,3	5,29	2,33	5,43
2	30°08’14,6"	13,1"	1,5	2,25	1,53	2,34
3	60°33’49,5"	50,6"	–1,1	1,21	–1,07	1,14
4	90°44’03,7"	5,4"	–1,7	2,89	–1,67	2,79
5	120°56’20,9"	21,9"	–1	1	–0,97	0,94
6	150°29’53,2"	51,5"	1,7	2,89	1,73	2,99
7	180°42’18,8"	18,2"	0,6	0,36	0,63	0,40
8	210°16’24,0"	25,6"	–1,6	2,56	–1,57	2,46
9	240°25’41,3"	40,3"	1	1	1,03	1,06
10	270°37’33,4"	32,3"	1,1	1,21	1,13	1,28
11	300°09’21,6"	22,8"	–1,2	1,44	–1,17	1,37
12	330°51’54,0"	55,9"	–1,9	3,61	–1,87	3,50
Σ			–0,3	25,71	0,06	25,70

Але спробуємо обчислити $\theta_{сер}$ за формулою:

$$\theta_{сер} = \frac{[d]}{n} = \frac{-0{,}3}{12} = -0{,}025''$$

та обчислимо ε_i за формулою:

$$\varepsilon_i = d_i - \theta_{сер}.$$

Контролем обчислень різниць ε_i слугує рівність

$$|[\varepsilon]| = 0,$$

яка має виконуватись в межах похибки заокруглення. Результати вимірювань у цьому прикладі отримані з точністю 0,1″. При обчисленні середньої систематичної похибки $\theta_{сер}$ ми залишаємо на один десятковий знак більше, ніж у вихідних даних. Тому гранична похибка заокруглення величини $\theta_{сер}$ становить ±0,05″, а рівність $|[\varepsilon_i\,]| = 0$ у цьому випадку повинна виконуватись в межах

$$|[\varepsilon_i\,]| \leq 0{,}05'' \cdot n\,.$$

Підставивши відповідні числові значення, отримаємо

$$0{,}06'' \leq 0{,}05'' \cdot 12 = 0{,}6''.$$

Якщо нерівність виконується, далі обчислюємо значення ε_i^2 з точністю 0,01″.

Середню квадратичну похибку окремого результату суміщення штрихів оптичного теодоліта обчислюємо за формулою (10.4)

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{25{,}71}{24}} = 1{,}07''\,.$$

Обчислюємо середню квадратичну похибку середньої величини суміщення штрихів у кожній парі подвійних вимірювань за формулою (10.6):

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{4n}} = \sqrt{\frac{[25,71]}{48}} = 0,73''.$$

Оцінюємо надійність отриманих величин на підставі виразів (10.7) та (10.8):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} = \frac{1,07}{\sqrt{2 \cdot 12}} = 0,22'';$$
$$m_{m_{\bar{x}}} = \frac{m_{\bar{x}}}{\sqrt{2n}} = \frac{0,73}{\sqrt{2 \cdot 12}} = 0,15''.$$

Приклад 10.5. Наведені результати рівноточних вимірювань довжин ліній світлодалекоміром (табл. 10.8). Кожна лінія виміряна двічі. Виконати оцінювання точності подвійних рівноточних вимірювань.

Таблиця 10.8 – Вихідні дані

Номер виміру	l_i'	l_i''	Номер виміру	l_i'	l_i''
1	451,259	451,264	8	377,504	377,513
2	357,437	357,434	9	407,643	407,665
3	495,557	495,562	10	334,896	334,901
4	424,053	424,061	11	225,038	225,037
5	396,236	396,243	12	390,858	390,858
6	241,971	241,979	13	316,733	316,729
7	340,614	340,625	14	361,279	361,285

Розв'язання. Обчислюємо різниці d_i у кожній парі подвійних рівноточних вимірювань за формулою (10.2):

$$d_i = x_i - x_i',$$

та знаходимо їхню суму. Результати виражаємо в міліметрах у таблиці 10.9.

Зіставляємо нерівність (10.13), яка є критерієм значущості систематичної похибки в різницях подвійних вимірювань

$$|[d]| = 78; \ \geq 2,5\frac{[|d|]}{\sqrt{n}} = 2,5 \cdot \frac{94}{\sqrt{14}} = 62,8\ ,$$
$$78 \geq 62,8.$$

Оскільки нерівність виконується, приходимо до висновку, що різниці d_i містять залишкову систематичну похибку, яку необхідно врахувати під час оцінювання точності.

Отже, визначаємо величину середньої систематичної похибки $\theta_{сер}$ за формулою:

$$\theta_{сер} = \frac{[d]}{n} = \frac{-78}{14} = -5,57 \ \text{мм},$$

і вилучаємо її із різниць d_i, тобто обчислюємо величини ε_i за формулою:

$$\varepsilon_i = d_i - \theta_{\text{сер}}.$$

Таблиця 10.9 – Результати обчислень

Номер виміру	Довжина ліній		d_i, мм	ε_i, мм	ε_i^2, мм
	l_i'	l_i''			
1	451,259	451,264	–5	0,6	0,32
2	357,437	357,434	3	8,6	73,44
3	495,557	495,562	–5	0,6	0,32
4	424,053	424,061	–8	–2,4	5,90
5	396,236	396,243	–7	–1,4	2,04
6	241,971	241,979	–8	–2,4	5,90
7	340,614	340,625	–11	–5,4	29,48
8	377,504	377,513	–9	–3,4	11,76
9	407,643	407,665	–22	–16,4	269,94
10	334,896	334,901	–5	0,6	0,32
11	225,038	225,037	1	6,6	43,16
12	390,858	390,858	0	5,6	31,02
13	316,733	316,729	4	9,6	91,58
14	361,279	361,285	–6	–0,4	0,18
Σ			–78	0,0	565,43

Результати заокруглюємо до 0,1 мм, розраховуємо їхню суму.

Контролем обчислень різниць ε_i слугує рівність

$$|[\varepsilon]| = 0,$$

яка повинна виконуватись у межах похибки заокруглення. Результати вимірювань довжин ліній у цьому прикладі отримані з точністю 1 мм. Під час обчислення середньої систематичної похибки $\theta_{\text{сер}}$ ми залишаємо на один десятковий знак більше, ніж у вихідних даних. Тому гранична похибка заокруглення величини $\theta_{\text{сер}}$ становить ±0,05 мм, а рівність $|[\varepsilon]| = 0$ у цьому випадку повинна виконуватись у межах

$$|[\varepsilon]| \leq 0{,}05 \cdot n.$$

Підставивши відповідні числові значення, отримаємо

$$0{,}4 \leq 0{,}7.$$

Якщо нерівність виконується, далі обчислюємо значення ε^2 з точністю 0,01 мм^2 та обчислюємо їхню суму.

Середню квадратичну похибку окремого результату вимірювання у цьому випадку визначаємо за формулою (10.10):

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{565{,}43}{2(14-1)}} = 4{,}7 \text{ мм}.$$

Визначаємо середню квадратичну похибку середньої довжини лінії в кожній парі подвійних вимірювань за формулою (10.12):

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{4(n-1)}} = \sqrt{\frac{565{,}43}{4(14-1)}} = 3{,}3 \text{ мм.}$$

Оцінюємо надійність величин m та $m_{\bar{x}}$ за формулами (10.7) і (10.8) відповідно

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} = \frac{4{,}7}{\sqrt{2\cdot 14}} = 0{,}88 \text{ мм;}$$

$$\mathrm{m}_{\mathrm{m}_{\bar{\mathrm{x}}}} = \frac{\mathrm{m}_{\bar{\mathrm{x}}}}{\sqrt{2\mathrm{n}}} = \frac{3{,}3}{\sqrt{2\cdot 14}} = 0{,}62 \text{ мм.}$$

Приклад 10.6. У таблиці 10.10 наведені різниці d_i подвійних вимірів певних величин і ваги вимірів. Виконати оцінювання точності.

Таблиця 10.10 – Вихідні дані

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Різниці d_i	2,4	–6,2	–2,2	1,3	–0,6	2,1	–4	1,4	7,5	–1,3
Ваги вимірювань p_i	1,1	0,28	0,62	0,32	0,27	0,71	0,43	0,45	0,48	0,53

Розв'язання. Результати проміжних обчислень будемо заносити до таблиці 10.11.

Таблиця 10.11 – Проміжні обчислення

Номер виміру	Різниці d_i	Ваги вимірів p_i	d^2	pd^2	pd_i	$m_{x_{i\text{ср}}}$
1	2,4	1,1	5,76	6,3	2,64	1,17
2	–6,2	0,28	38,44	10,8	–1,736	2,31
3	–2,2	0,62	4,84	3,0	–1,364	1,55
4	1,3	0,32	1,69	0,5	0,416	2,16
5	–0,6	0,27	0,36	0,1	–0,162	2,35
6	2,1	0,71	4,41	3,1	1,491	1,45
7	–4,0	0,43	16	6,9	–1,72	1,87
8	1,4	0,45	1,96	0,9	0,63	1,82
9	7,5	0,48	56,25	27,0	3,6	1,77
10	–1,3	0,53	1,69	0,9	–0,689	1,68
S	0,4	5,19	131,4	59,5	3,106	1,81

Спочатку визначимо, чи є у вимірах систематична похибка. Для цього обчислимо співвідношення $\frac{[pd]}{[p]}$. Ознакою наявності систематичної похибки є істотна відмінність від нуля співвідношення $\frac{[pd]}{[p]}$. Отже:

$$\frac{[pd]}{[p]} = \frac{3{,}106}{5{,}2} = 0{,}6.$$

до того ж $\frac{[pd]}{[p]}$ буде істотно відрізнятись від нуля.

Будемо вважати, що $\theta \approx 0$, отже приймаємо гіпотезу про відсутність систематичних похибок. Тому середня квадратична похибка одиниці ваги за формулою (10.15) становить:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{59{,}5}{2*10}} = 1{,}73.$$

Середні квадратичні похибки середніх значень $x_{i\text{ср}} = \frac{x_i + x'_i}{2}$, обчислені за формулою (10.16) дорівнюють, зокрема для першого перевищення

$$m_{x_{i\text{ср}}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}} = \frac{1{,}73}{\sqrt{2 \cdot 1{,}1}} = 1{,}17.$$

Решта значень наведена у таблиці 10.11.

Приклад 10.7. Прокладено 17 ходів нівелювання III класу. Нівелювання виконано в прямому та зворотному напрямках. Довжина нівелірного ходу та різниці перевищень прямого й зворотного ходу наведені в таблиці 10.12. Необхідно виконати оцінювання точності нівелірних ходів.

Таблиця 10.12 – Результати вимірювань в нівелірних ходах

Номер ходу	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_i	70,5	17,4	–50,4	33,7	45,5	–44,1	–48,1	6,9	–38,9
L_i	3,4	8,3	6,9	4	2,6	7,2	7,2	3,8	2,8
Номер ходу	10	11	12	13	14	15	16	17	
d_i	–18,4	–57,3	–50	66,7	54,9	–24,4	11,1	40,5	
L_i	1,8	3,1	5,8	7,3	3	1,9	5,6	5,4	

Розв'язання. Перед усім обчислюємо вагу перевищення кожного нівелірного ходу як величину, що зворотна довжині ходу за формулою $p_i = \frac{1}{L_i}$. Результати обчислення заокруглюємо до 0,01 і заносимо до таблиці 10.13. Для першого нівелірного ходу, зокрема, маємо $p_i = \frac{1}{L_i} = \frac{1}{3{,}4} = 0{,}29$.

Таблиця 10.13 – Результати обчислень

Номер ходу	d_i	L_i	λL_i	ε_i	ε_i^2	p_i	$p\varepsilon_i^2$	m_i	m_{m_i}
1	70,5	3,4	0,66	69,84	4877,32	0,29	1434,51	29,2	20,6
2	17,4	8,3	1,62	15,78	249,12	0,12	30,01	45,6	32,2
3	–50,4	6,9	1,34	–51,74	2677,42	0,14	388,03	41,6	29,4
4	33,7	4	0,78	32,92	1083,79	0,25	270,95	31,7	22,4
5	45,5	2,6	0,51	44,99	2024,43	0,38	778,63	25,5	18,0
6	–44,1	7,2	1,40	–45,50	2070,45	0,14	287,56	42,5	30,0
7	–48,1	7,2	1,40	–49,50	2450,47	0,14	340,34	42,5	30,0
8	6,9	3,8	0,74	6,16	37,94	0,26	9,99	30,9	21,8
9	–38,9	2,8	0,55	–39,45	1555,93	0,36	555,69	26,5	18,7
10	–18,4	1,8	0,35	–18,75	351,58	0,56	195,32	21,2	15,0
11	–57,3	3,1	0,60	–57,90	3352,84	0,32	1081,56	27,9	19,7
12	–50	5,8	1,13	–51,13	2614,23	0,17	450,73	38,1	27,0
13	66,7	7,3	1,42	65,28	4261,25	0,14	583,73	42,8	30,2
14	54,9	3	0,58	54,32	2950,20	0,33	983,40	27,4	19,4
15	–24,4	1,9	0,37	–24,77	613,55	0,53	322,92	21,8	15,4
16	11,1	5,6	1,09	10,01	100,19	0,18	17,89	37,5	26,5
17	40,5	5,4	1,05	39,45	1556,17	0,19	288,18	36,8	26,0
S	15,6	80,1	15,6	0			8019,45		

Для обчислення величини коефіцієнта систематичного впливу λ визначимо суму різниць $[d]$ і суму довжин нівелірних ходів $[L]$ та скористаємось формулою (10.23):

$$\lambda = \frac{[d]}{[L]} = \frac{15{,}6}{80{,}1} = 0{,}195.$$

Під час обчислення добутків λL_i, які є величинами систематичних похибок θ_1, θ_2, …, θ_n, результати заокруглюємо до 0,01, та перевіримо виконання рівності (10.31) $[d] = [\lambda L]$:

$$[d] = 15{,}6; \quad [\lambda L] = 15{,}6.$$

Обчислимо з точністю 0,01 випадкові похибки ε_i (залишкові відхилення) за формулою (10.32):

$$d_i - \theta_i = \varepsilon_i,$$

а також значення ε_i^2 та добутки $p\varepsilon_i^2$ та визначимо суму добутків $p\varepsilon_i^2$.

Як і при рівноточних вимірах, величини ε_i є залишковими відхиленнями з протилежним знаком, але з вагами $p_d = \frac{p}{2}$ (10.25).

Обчислимо середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою (10.26):

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{8019{,}45}{2(17-1)}} = 15{,}8$$

та оцінимо її надійність за формулою (10.28)

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{15{,}8}{\sqrt{2(17-1)}} = 2{,}8.$$

За формулою (10.33) $m_i = \mu \cdot \sqrt{L_i}$ обчислимо середні квадратичні похибки для кожного нівелірного ходу:

$$m_i = \mu \cdot \sqrt{L_i} = 15{,}8 \cdot \sqrt{3{,}4} = 29{,}1$$

та визначимо середні квадратичні похибки середнього перевищення в кожному нівелірному ході за формулою (10.34) $m_{m_i} = \frac{m_i}{\sqrt{2}}$:

$$m_{m_i} = \frac{m_i}{\sqrt{2}} = \frac{29{,}1}{\sqrt{2}} = 20{,}6.$$

Запитання для самоперевірки

1. За яких умов у результаті проведення геодезичних робіт результати вимірів називають подвійними вимірами?

2. Охарактеризуйте сутність завдання оцінювання точності результатів подвійних вимірів однорідних величин.

3. Поясніть, за яких умов у геодезичній практиці мають місце рівноточні подвійні виміри.

4. Поясніть, за яких умов у геодезичній практиці мають місце нерівноточні подвійні виміри.

5. Поясніть, яку роль відіграють у оцінюванні точності результатів подвійних вимірів різниці d_i.

6. Поясніть, чи є різниці d_i подвійних вимірів випадковими величинами та чи відоме їхні істинні значення.

7. За якою формулою визначають середнє квадратичне відхилення результатів вимірів m? Чи є однаковими m для будь-яких пар рівноточних подвійних вимірів?

8. Як обчислюють найнадійніші значення $\bar{x}_i$ величин X_i у результаті рівноточних подвійних вимірів?

9. Які характеристики застосовують для оцінювання точності рівноточних подвійних вимірів?

10. Які характеристики застосовують для оцінювання надійності рівноточних подвійних вимірів?

11. Чому систематичні похибки у різницях d_i називають залишковими систематичними похибками?

12. Поясніть, як визначають, чи є істотним вплив залишкових систематичних похибок на точність результатів вимірів та як його враховують.

13. Поясніть, як у загальному випадку визначають ваги результатів нерівноточних подвійних вимірів.

14. Як ваги різниць d_i пов'язані з вагами результатів нерівноточних подвійних вимірів?

15. За якими ознаками можна визначити наявність систематичних похибок у результатах нерівноточних подвійних вимірів?

16. Який математичний критерій застосовують для встановлення наявності систематичної похибки θ?

17. Яке умовне рівняння виникає при двократному вимірюванні однієї величини?

18. Оцінювання точності кутових вимірів можна виконати за різницями подвійних вимірів у напівприйомах, а також за нев'язками у полігонах і ходах. Яке з них найбільш об'єктивно відбиває якість кутових вимірів у теодолітних ходах?

19. Як визначити значущість колімаційної погрішності теодоліту?

20. Чому при обчисленні систематичної похибки за різницями подвійних лінійних вимірів ми говоримо про «залишковий коефіцієнт систематичного впливу»?

21. За якою формулою оцінюють точність геометричного нівелювання за різницями перевищень, що отримані з прямого та зворотного ходів?

Задачі для самостійного розв'язання

10.1. Виконати оцінювання точності кутових вимірів за різницями подвійних вимірів (круг право КП та круг ліво КЛ) напрямів, що виміряні теодолітом Т-30:

Номер з/п	КП	КЛ	d = КП – КЛ	d^2
1	16°16′	13′	+3′	9
2	29 32	30	+2	4
3	44 46	45	+1	1
4	75 52	50	+2	4
5	116 21	19	+2	4
6	133 27	25	+2	4
7	141 14	11	+3	9
8	179 39	36	+3	9
[ ]			+18	44

10.2. Виконати оцінювання точності лінійних вимірів за десятьма різницями подвійних вимірів ліній. Дослідити систематичні похибки:

Номер лінії	S', м	S'', м	d, м	$\frac{d^2}{S}$
1	161,75	161,80	$-5 \cdot 10^{-2}$	$0{,}154 \cdot 10^{-4}$
2	217,24	217,32	$-8 \cdot 10^{-2}$	$0{,}295 \cdot 10^{-4}$
3	201,66	201,60	$+6 \cdot 10^{-2}$	$0{,}179 \cdot 10^{-4}$
4	175,49	175,49	$-4 \cdot 10^{-2}$	$0{,}091 \cdot 10^{-4}$
5	298,44	298,51	$-7 \cdot 10^{-2}$	$0{,}164 \cdot 10^{-4}$
6	363,14	363,10	$+4 \cdot 10^{-2}$	$0{,}044 \cdot 10^{-4}$
7	279,38	279,45	$-7 \cdot 10^{-2}$	$0{,}175 \cdot 10^{-4}$
8	112,75	112,78	$-3 \cdot 10^{-2}$	$0{,}080 \cdot 10^{-4}$
9	147,25	147,31	$-6 \cdot 10^{-2}$	$0{,}244 \cdot 10^{-4}$
10	220,12	220,20	$-8 \cdot 10^{-2}$	$0{,}291 \cdot 10^{-4}$
[ ]	2177		–0,38	$1{,}737 \cdot 10^{-4}$

10.3. У таблиці наведені значення кутів, що отримані у напівприйомах:

Номер кута	КП	КЛ
1	243°15,0′	243°15,5′
2	112°36,0′	112°35,0′
3	83°50,5′	83°51,5′
4	137°12,0′	137°12,5′
5	210°31,5′	210°30,5′

Оцінити точність кутових вимірів.

10.4. У таблиці наведені результати подвійного виміру лінії мірною стрічкою:

Номер лінії	Результати вимірів, м	
	прямий напрям	зворотний напрям
1	215,75	215,65
2	184,19	184,16
3	154,27	154,35
4	341,82	341,54
5	243,14	243,12

Оцінити точність лінійних вимірів та дослідити систематичні похибки.

10.5. У таблиці наведені результати подвійного нівелювання та кількість станцій у ходах. Оцінити точність нівелювання та дослідити систематичні похибки:

Номер ходу	Перевищення, м		Число станцій в ході
	прямий напрям	зворотний напрям	
1	–1,671	+1,680	26
2	+8,344	–8,320	44
3	+5,973	–5,980	21
4	–0,669	+0,702	39
5	+0,127	–0,140	25

3 СПОСІБ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Тема 11 ПАРАМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ПОБУДОВ

Сутність спільного зрівнювання виміряних величин. Надлишкові виміряні величини. Сутність методу найменших квадратів. Особливості параметричного способу зрівнювання геодезичних побудов. Параметричні рівняння зв'язку. Параметричні рівняння поправок. Система нормальних рівнянь. Порядок розв'язання задач параметричним методом.

11.1 Сутність спільного зрівнювання виміряних величин

До цієї теми математична обробка геодезичних вимірів застосовувалась для розв'язання переважно трьох задач:

- знаходження найімовірнішого значення однієї фізичної величини в результаті багатократних вимірів (рівноточних або нерівноточних) і оцінювання його точності;
- оцінювання точності функцій однієї або кількох незалежно виміряних величин;
- оцінювання точності за результатами подвійних вимірів.

Здобуття точних і достовірних геодезичних даних не обмежується вказаними трьома задачами. Необхідність здобуття точних та надійних результатів вимірів призвела шляхом їх дослідження до формування обов'язкової процедури, яка отримала назву **надлишкові виміри**. Наприклад, виміряні три кути плоского трикутника. З теорії відомо, що сума трьох кутів трикутника дорівнює 180°. Досить виміряти два кути α та β трикутника, а третій кут γ можна обчислити зі співвідношення $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Це співвідношення справедливе тільки для істинних значень кутів α і β. Але, оскільки результати вимірів містять похибки, то вони можуть призвести або до їх часткової компенсації, або до грубої похибки. Виникає ситуація невизначеності, яку власне й вирішують шляхом використання надлишкових вимірів, тобто вимірюють третій кут, кут γ, результат виміру якого так само містить певну похибку. Отже, виникає завдання знаходження поправок до виміряних величин, які би мінімізували сумарну похибку вимірів. Таку процедуру в геодезії називають **зрівнюванням** виміряних величин.

Зрівнюванням геодезичних вимірів є сукупність математичних операцій, які виконують для набуття найімовірнішого значення геодезичних координат точок земної поверхні та для оцінювання точності результатів вимірів. Реалізація процедури зрівнювання дає **поправки** до виміряних значень величин. Зрівнювання виконують за методом найменших квадратів, відповідно до якого виміряні величини отримують поправки v_i до виміряних величин (кутів, напрямів, довжин ліній, перевищень тощо), що задовольняють умові $[pv^2] \to min$, де p_i – вага виміру. У математичній статистиці доведено, що цей метод призводить до найкращих оцінок шуканих невідомих.

Розрізняють строге і спрощене (нестроге) зрівнювання геодезичних вимірів. У разі строгого зрівнювання поправки зазвичай визначають за допомогою методу найменших квадратів так, щоб сума квадратів всіх поправок була найменшою. Поправки такого зрівнювання мають найімовірніші значення. Застосування методу найменших квадратів до зрівнювання виміряних величин справедливе тільки у тому випадку, коли похибки вимірів мають випадковий характер.

Строге зрівнювання геодезичних мереж, особливо великих за розмірами, пов'язане з труднощами технічного та організаційного характеру. Тому на практиці часто застосовують спрощене (нестроге) зрівнювання, за якого всі геометричні умови виконуються, а найімовірніше значення величин і оцінку точності визначають приблизно.

Будь-який спосіб зрівнювання складається з таких основних етапів:

– попередні обчислення;
– складання умовних рівнянь або рівнянь похибок;
– вирішення нормальних рівнянь;
– оцінювання точності виміряних та зрівняних величин.

У геодезичній практиці можна скористатись будь-яким з відомих способів зрівнювання: параметричним, корелатним, комбінованим, рекурентним, параметричним способом із залежними змінними, корелатним способом з додатковими параметрами, способом послідовних наближень та ін.

У цій дисципліні ми розглянемо тільки два основних способи зрівнювання – параметричний і корелатний. Перший спосіб передбачає безпосереднє отримання зрівнюваних значень шуканих величин – параметрів шляхом рішення системи нормальних рівнянь, а в другому способі – спочатку отримують допоміжні множники – так звані корелати, а потім шукані величини та їхні функції. Ці способи зрівнювання призводять до однакових результатів, але мають різну складність під час розв'язання тієї самої задачі.

11.2 Сутність методу найменших квадратів

Оскільки результати вимірів є випадковими величинами, вони містять істотну невизначеність, а тому описати їх можливо тільки невизначеними системами рівнянь, тобто такими, в яких число рівнянь менше за число невідомих, або число рівнянь перевищує число невідомих. Такі системи рівнянь є невизначеними, оскільки вони не мають єдиного розв'язку та їх неможна розв'язати способами елементарної алгебри, оскільки число їхніх розв'язків нескінченне. Зауважимо, що з нескінченої множини розв'язків нас цікавлять не будь-які, а тільки найкращі у певному сенсі. Отже, розв'язання невизначеної системи рівнянь полягає у знаходженні з нескінченної множини розв'язків одного єдиного, який є найкращим за умови мінімуму суми квадратів відхилень результатів вимірів від істинних значень шуканих величин. Цей метод вирішення невизначених систем рівнянь був запропонований на початку XIX ст. німецьким математиком і геодезистом К. Ф. Гауссом і французьким математиком А. М. Лежандром та отримав назву **методу найменших квадратів.**

Метод найменших квадратів є одним із методів регресійного аналізу, він призначений для оцінювання невідомих величин за результатами вимірів, що містять випадкові похибки. З метою збільшення точності результатів вимірів у геодезії виміри шуканої фізичної величини здійснюють багато разів і як остаточний результат приймають арифметичну середину з усіх окремих вимірів. Властивості арифметичної середини мають стохастичну природу. Ураховуючи властивості арифметичної середини, легко довести, що сума квадратів відхилень окремих вимірів від арифметичної середини буде меншою за суму квадратів відхилень окремих вимірів від певної іншої величини. Отже, правило обчислення арифметичної середини є простим випадком методу найменших квадратів.

Сутність вирішення невизначеної системи рівнянь, що описує певну геодезичну побудову, полягає в тому, що на рішення рівнянь системи накладають умову мінімізації суми квадратів відхилень

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = [pv^2] \to min, \tag{11.1}$$

де p_i – ваги вимірів;

v_i – поправки до вимірів.

Нехай виміряно n величин, істинні значення яких X_i. Результати вимірювань цих величин x_i отримані з вагами p_i. Відомо, що виміряні величини X_i пов'язані одна з одною співвідношеннями, кількість яких становить r:

$$\left.\begin{matrix} \varphi_1(X_1, \dots, X_n) = 0 \\ \varphi_2(X_1, \dots, X_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \varphi_r(X_1, \dots, X_n) = 0 \end{matrix}\right\}. \tag{11.2}$$

Отже, система (11.2) містить r незалежних рівнянь. Число рівнянь у системі (11.2) r менше за число виміряних величин n, $r < n$, тобто менше за число величин n, для яких потрібно визначити поправки. Така система є невизначеною, оскільки припускає нескінченну множину рішень. Рівняння (11.2) називають **умовними рівняннями**. До того ж кожен новий додатковий вимір приводить до нового умовного рівняння.

Умовним рівнянням називають будь-яке математичне співвідношення, що пов'язує істинні значення вимірюваних величин.

Отримані результати вимірів $(x_1, \dots, x_n)$ перед усім перевіряють, наскільки вони задовольняють умовним рівнянням (11.2). Після підстановки виміряних значень величин система умовних рівнянь набуває такого вигляду:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = W_1 \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = W_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \varphi_r(x_1, \dots, x_n) = W_r\end{array}\right\}, \tag{11.3}$$

де w_i – нев'язки.

Головною задачею, яку необхідно розв'язати під час зрівнювання, є усунення усіх нев'язок w_i, для чого потрібно виправити результати вимірів, тобто знайти для них поправки.

Виправлені результати вимірів позначають $x_i' = x_i + v_i$, де v_i – шукані поправки. Якщо до (11.3) підставити виправлені результати вимірів, отримаємо
вираз:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_1(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \varphi_r(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = 0\end{array}\right\}. \tag{11.4}$$

Мета зрівнювання – визначення таких поправок v_i до виміряних значень x_i, які усунули би нев'язки w_i.

Отже, математичний вираз принципу найменших квадратів (11.1) $[pv^2] \to min$ – це вимога, щоб сума квадратів відхилень від істинного значення вимірюваної величини була мінімальною.

З урахуванням того, що шукана поправка v_i становить різницю зрівняного та виміряного значень $v_i = x_i' - x_i$, підставимо її до виразу мінімуму суми квадратів відхилень $\sum p_i(x_i' - x_i)^2 \to min$ та позначимо цей вираз $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i' - x_i)^2 \to min.$$

Нам потрібно знайти такі зрівняні значення x_i', за яких $f(x)$ буде мінімальною.

Оскільки відомо, що певна функція має екстремуми у точках, де її похідні дорівнюють нулю $\frac{df(x)}{dx} = 0$, потрібно скласти систему рівнянь з n часткових похідних функції $f(x)$, прирівняних до нуля:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} 2\mathrm{p}_i(x_i' - x_i) = 0.$$

У результаті отримаємо систему n рівнянь за кількістю часткових похідних. Саме підходами до складання функції $f(x)$, що мінімізується, відрізняються параметричний та корелатний методи зрівнювання геодезичних побудов.

11.3 Особливості параметричного способу зрівнювання геодезичних побудов

Сутність параметричного способу зрівнювання полягає у такому. Зазвичай число рівнянь r, які пов'язують шукані величини X_i (11.2), менше за число самих виміряних величин n, $r < n$. Для визначення n невідомих потрібно і n рівнянь. Тому кількість рівнянь у системі додають до n шляхом введення певних параметрів t_j, що пов'язані з виміряними величинами та не пов'язані одна з одною. Оскільки необхідно додати $k = n - r$ рівнянь, то і таких параметрів додають k.

Обравши параметри t_j, складають **параметричні рівняння зв'язку:**

$$X_i = f_i(t_1, \dots, t_k), \;\; j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}\,, \tag{11.5}$$

де t_j – параметри;

X_i – виміряні величини.

Параметричні рівняння зв'язку – це математичні співвідношення, що пов'язують істинні значення виміряних величин X_i з істинними значеннями величин, що визначають t_j.

Загальна кількість параметричних рівнянь зв'язку має становити n:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1k}t_k + a_{10} \\ X_2 &= a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2k}t_k + a_{20} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ X_n &= a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \dots + a_{nk}t_k + a_{n0} \end{aligned}\right\}. \tag{11.6}$$

Систему параметричних рівнянь зв'язку (11.6) зручно подавати також у матричній формі:

$$X = A \cdot T + A_0,$$

де A – матриця коефіцієнтів при t_j розмірністю $n \times k$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix};$$

X – матриця-стовпець істинних значень виміряних величин X_i, розмірністю $n \times 1$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ або компактніше } X = (x_1 \ \ x_2 \ \ \dots \ \ x_n)^T;$$

T – матриця-стовпець істинних значень шуканих величин, розмірністю $k \times 1$:

$$T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_k \end{pmatrix};$$

A_0 – матриця-стовпець вільних членів рівнянь, розмірністю $n \times 1$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n0} \end{pmatrix}.$$

Як результат розв'язання системи рівнянь ми бажаємо отримати поправки до вимірюваних значень $x_i' = x_i + v_i$, де x_i' – зрівняне значення, v_i – поправки до виміряних значень x_i, що отримані зі зрівнювання.

Запишемо систему (11.5) у такому вигляді:

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k), \ \ j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}\ , \tag{11.7}$$

та з неї виразимо істинні поправки v_i:

$$v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) - x_i, \ \ j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}\ . \tag{11.8}$$

Систему рівнянь (11.8) називають системою параметричних рівнянь істинних поправок. У матричній формі система параметричних рівнянь істинних поправок має вигляд:

$$V = A \cdot T + A_0 - X.$$

Позначимо $a_{j0} - x_j = l_j'$, тоді вектор істинних поправок набуде вигляду:

$$V = A \cdot T + l', \tag{11.9}$$

або у розгорнутому вигляді

$$\left.\begin{array}{c} v_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1k}t_k + l_1' \\ v_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2k}t_k + l_2' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ v_n = a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \dots + a_{nk}t_k + l_n' \end{array}\right\}. \tag{11.10}$$

Останній вираз (11.10) дозволяє записати вимогу мінімуму суми добутків ваг на поправки в такий спосіб:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i \{f_i(t_1, \dots, t_k) - l_i'\}^2 \to min\ , \tag{11.11}$$

або компактніше

$$F(t_1, \dots, t_k) \to min\ . \tag{11.12}$$

Залишається, узявши часткові похідні функції F за параметрами t_j, звести їх до системи k рівнянь:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = 0, \quad j = \overline{1,k} \,. \tag{11.13}$$

Проведені перетворення дозволили від задачі на умовний екстремум перейти шляхом введення параметрів t_j до задачі на абсолютний, тобто безумовний екстремум.

Зробимо певне відступлення. Оскільки в більшості задач вираз $f_i(t_1, \dots, t_k)$ є нелінійним, що істотно утруднює розв'язання, функцію (11.7) $x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k)$ лінеаризують (спрощують, призводячи до лінійного вигляду) шляхом розкладання у ряд Тейлора.

Нагадаємо, що будь-який вираз вважають лінійним (графіком лінійного виразу є пряма лінія), якщо він не містить змінних у степенях, або добутків змінних, або іншого виду нелінійних складників (рис. 11.1).

Для лінеаризації функції $f_i(t_1, \dots, t_k)$ застосовують формулу розкладання функції у ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + R_n(x).$$

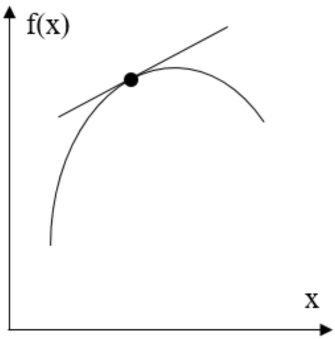


Рисунок 11.1 – Сутність лінеаризації

Зауважимо, що розкладання функції у ряд Тейлора є справедливим тільки для оточення певної точки, в якої відомі значення t_j^0, $j = \overline{1,k}$. Тому вводять поправки до параметрів t_j:

$$t_j = t_j^0 + \tau_j, \quad j = \overline{1,k},$$

де τ_j – поправка до t_j;

t_j^0 - відоме значення параметра у j-й точці, яке обчислюють із системи параметричних рівнянь зв'язку, застосовуючи результати вимірів x_i.

Підставимо їх до рівності для v_i (11.8) та отримаємо:'

$$v_i = f_i(t_1^0 + \tau_1, \dots, t_k^0 + \tau_k) - x_i, \tag{11.14}$$

де $j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}$.

Розкладання в ряд Тейлора передбачає визначення часткових похідних виразу (11.12). Запишемо результат лінеаризації (11.12), це є важливим, оскільки з'являться нові коефіцієнти a_{ij} та нові змінні τ_j:

$$v_i = f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 \tau_1 + \dots + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 \tau_k - x_i, \tag{11.15}$$

де $j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n},$ до того ж потрібно врахувати, що доданок $f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) \approx x_i$.

Коефіцієнти у виразі (11.15), що стоять при τ_j, позначимо буквами a_{ik}, а вільний член рівняння позначимо l_i, тоді маємо:

$$\left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 = a_{i1}; \dots; \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 = a_{ik}. \tag{11.16}$$

$$f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i = x_i^0 - x_i = l_i\,. \tag{11.17}$$

Скориставшись прийнятими позначеннями, запишемо систему (11.8) для поправок v_i як залежності від поправок параметрів t_j:

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i, \quad j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}\,. \tag{11.18}$$

Система (11.18) є **системою параметричних рівнянь поправок,** тобто поправки v_i виражені через поправки до параметрів τ_j. Зауважимо також, що коефіцієнти a_{ij}, які отримані у процесі розкладання в ряд Тейлора, є наближеними числовими значеннями похідних. Отже, ми отримали систему параметричних рівнянь поправок, рівняння якої є лінійними.

Закінчивши лінеаризацію виразу v_i (11.8), повернемось до розв'язання задачі на знаходження мінімуму суми квадратів відхилень та запишемо вимогу мінімуму суми добутків ваг на поправки із врахуванням (11.18):

$$[pv^2] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (a_{i1} \cdot \tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i)^2 = F(\tau_1, \dots, \tau_k) \to min. \tag{11.19}$$

Зауважимо, що дужка у квадраті – це v_i у квадраті.

Нагадаємо, що функція має точки екстремуму при значеннях змінних, які обертають її часткові похідні на нуль, а нам потрібний мінімум функції F.

Візьмемо часткову похідну функції F за змінною τ_1 та дорівняємо її до нуля:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = 2p_1 \cdot v_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \tau_1} + 2p_2 \cdot v_2 \cdot \frac{\partial v_2}{\partial \tau_1} + 2p_3 \cdot v_3 \cdot \frac{\partial v_3}{\partial \tau_1} + \dots +$$
$$+2p_n \cdot v_n \cdot \frac{\partial v_n}{\partial \tau_1} = 0. \qquad (11.20).$$

Рівність виразу (11.20) нулю дозволяє скоротити множник 2. З виразу (11.18) видно, що часткові похідні v_i дорівнюють коефіцієнтам a_{i1}:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau_1} = a_{11};\ \dots \frac{\partial v_2}{\partial \tau_1} = a_{21}; \cdot \dots; \frac{\partial v_n}{\partial \tau_1} = a_{n1},$$

тому можна записати $\frac{\partial F}{\partial \tau_1}$ у такий спосіб:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = p_1 \cdot v_1 \cdot a_{11} + p_2 \cdot v_2 \cdot a_{21} +$$
$$+2p_3 \cdot v_3 \cdot a_{31} + \dots + 2p_n \cdot v_n \cdot a_{n1} = 0,$$

або

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot v_i \cdot a_{i1} = 0, \qquad \text{або} \qquad [\,pva_1] = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_2} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot v_i \cdot a_{i2} = 0, \qquad \text{або} \qquad [\,pva_2] = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_k} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot v_i \cdot a_{ik} = 0, \qquad \text{або} \qquad [\,pva_k] = 0.$$

Отже, отримано систему k рівнянь, що виражають часткові похідні функції F:

$$\left.\begin{matrix} [\,pva_1] = 0 \\ [\,pva_2] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ [\,pva_k] = 0 \end{matrix}\right\}. \qquad (11.21)$$

Звернемося тепер до складання **системи нормальних рівнянь**. Для цього повернемось до розгорнутого запису $[\,pa_1v]$:

$$[\,pa_1v] = p_1a_{11}v_1 + p_2a_{21}v_2 + \cdots + p_na_{n1}v_n =$$

тепер замість v_i *підставимо їхні праві частини з (11.18):*

$$= p_1a_{11}\,(a_{11}\tau_1 + \cdots + a_{1k}\tau_k + l_1) + p_2a_{21}\,(a_{21}\tau_1 + \cdots +$$
$$+ a_{2k}\tau_k + l_2) + \cdots + p_na_{n1}\,(a_{n1}\tau_1 + \cdots + a_{nk}\tau_k + l_n) =$$
$$= p_1a_{11}\,a_{11}\tau_1 + \cdots + p_1a_{11}a_{1k}\tau_k + p_1a_{11}l_1 + p_2a_{21}\,a_{21}\tau_1 + \cdots +$$
$$+ p_2a_{21}a_{2k}\tau_k + p_2a_{21}l_2 + \cdots + p_na_{n1}a_{nk}\tau_k + p_na_{n1}l_n =$$
$$= \tau_1(p_1a_{11}\,a_{11} + p_2a_{21}a_{21} \ldots + p_na_{n1}a_{n1}) + \cdots +$$
$$+ \tau_k(p_1a_{11}\,a_{1k} + p_2a_{21}a_{2k} \ldots + p_na_{n1}a_{nk}) + l_i(p_1a_{11} + p_2a_{21} + \cdots + p_na_{n1}) =$$
$$= [pa_1\,a_1]\tau_1 + \cdots + [pa_1\,a_k]\tau_k + [pa_1]l_i.$$

Зробимо аналогічні підстановки та приведемо подібні в решті рівнянь, отже отримаємо систему нормальних рівнянь, в якої k рівнянь і k невідомих τ_j:

$$\left.\begin{matrix} [pa_1\,a_1]\tau_1 + [pa_1\,a_2]\tau_2 \ldots + [pa_1\,a_k]\tau_k + [pa_1l] = 0 \\ [pa_1\,a_2]\tau_1 + [pa_2\,a_2]\tau_2 \ldots + [pa_2\,a_k]\tau_k + [pa_2l] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pa_1\,a_k]\tau_1 + [pa_2\,a_k]\tau_2 \ldots + [pa_k\,a_k]\tau_k + [pa_kl] = 0 \end{matrix}\right\}. \qquad (11.22)$$

Отримали систему нормальних рівнянь (11.22), розв’язком якої є поправки до параметрів τ_j. Наступним кроком за відомими поправками до параметрів τ_j отримаємо поправки до шуканих величин v_i.

Для контролю обчислень використовують рівняння (11.7):

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \ldots, t_k), \;\; j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}\,.$$

Запис системи нормальних рівнянь (11.22) у матричній формі має вигляд:

$$A^T \cdot P \cdot A \cdot T + A^T \cdot P \cdot L = 0\,, \qquad (11.23)$$

де матриця T є матрицею невідомих поправок τ_j до параметрів t_j.

Матричний запис великого числа лінійних рівнянь у вигляді одного рівняння є перевагою матричних позначень. Зауважимо, що добутки матриць коефіцієнтів, що стоять при змінних τ_j та вільних членах l_i відповідають структурі коефіцієнтів системи нормальних рівнянь. Після обчислення числових значень коефіцієнтів та вільних членів множник $A^T \cdot P \cdot A$ позначають N і систему нормальних рівнянь остаточно записують у такому вигляді:

$$N \cdot T = -L, \tag{11.24}$$

де T – матриця-вектор невідомих τ_j;

L – матриця-вектор вільних членів l_i.

Система нормальних рівнянь (11.24) завжди має єдине рішення, тому при зрівнюванні геодезичних побудов завжди можна знайти щонайкращі наближення x_i' до істинних значень X_i із максимальними вагами.

У системі нормальних рівнянь (11.24) матриця коефіцієнтів при невідомих N є квадратною матрицею. Її діагональні елементи квадратичні, а отже завжди додатні. Коефіцієнти, які розташовані симетрично щодо головної діагоналі, попарно дорівнюють один одному, тобто матриця N є симетричною. Визначник матриці $D(N) = |\mathrm{N}|$ називають визначником Грама, тобто матриця N є неособливою, її визначник не дорівнює нулю, а отже вона має зворотну матрицю N^{-1}.

Нагадаємо, що зворотною до N називають матрицю N^{-1}, таку, що $N \cdot N - 1\ = E$. Зворотну матрицю зручно застосовувати для рішення системи нормальних рівнянь за допомогою матричних функцій табличного процесора MS Excel. Для отримання розв'язку потрібно помножити зліва обидві частини виразу (11.24) на матрицю N^{-1}:

$$N^{-1} \cdot N \cdot T = -N^{-1} \cdot L\,, \quad \text{звідки } T = -N^{-1} \cdot L\,.$$

Формула MS Excel для обчислення коренів системи рівнянь має два аргументи:

=**МУМНОЖ(МОБР**(A1:B3);D1:D3),

де (A1:B3) – матриця N (матриця коефіцієнтів при змінних);

МОБР(A1:B3) – функція обернення матриці коефіцієнтів при змінних, яка є першим аргументом функції **МУМНОЖ**;

D1:D3 – матриця вільних членів, яка є другим аргументом функції **МУМНОЖ**. Передбачається, що вільні члени розташовані у правих частинах рівнянь системи після знаку рівності.

Для розв'язання системи рівнянь у таблиці MS Excel потрібно помістити масив коефіцієнтів рівнянь, виділити комірки, в яких буде розміщено розв'язок, та натиснути комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter.

Зауважимо, що якщо результати вимірів містять лише випадкові похибки, що підкоряються нормальному закону розподілу, то значення невідомих, отримані за методом найменших квадратів, є найімовірнішими значеннями і мають найменшу середню квадратичну похибку. Якщо результати вимірів, окрім випадкових, містять систематичні похибки, то знайдені за методом найменших квадратів зрівняні значення не будуть найімовірнішими і не матимуть найбільшої ваги.

11.4 Порядок розв'язання задач параметричним методом

Передусім, необхідно всі виміри призвести до зручних одиниць виміру. Для обчислення ваг обирають постійний коефіцієнт так, щоб усі p_i були близькими до одиниці.

Параметри t_j обирають так, щоб через них виражалися всі виміряні величини та щоб вони були незалежними один від одного. Такими параметрами можуть бути як виміряні, так і невиміряні величини.

1. Усі виміряні величини виражають функціями (11.7):

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \ldots, t_k), \;\; j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}\ ,$$

де $x_i' = x_i + v_i$ – зрівнюване значення;

v_i – поправки до виміряних значень x_i, отримані зі зрівнювання.

2. Знаходять наближені значення параметрів t_j^0, причому, число їхніх десяткових знаків має дорівнювати числу десяткових знаків їхніх зрівнюваних значень. Беруть похідні та визначають коефіцієнти й вільні члени виразу (11.18)

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \cdots + a_{ik}\tau_k + l_i, \quad j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}\ ,$$

розмірності t мають бути такими, щоб коефіцієнти рівнянь поправок були близькими до одиниці.

3. Складають систему нормальних рівнянь (11.22)

$$\left.\begin{array}{c} [pa_1\, a_1]\tau_1 + [pa_1\, a_2]\tau_2 \ldots + [pa_1\, a_k]\tau_k + [pa_1 l] = 0 \\ [pa_1\, a_2]\tau_1 + [pa_2\, a_2]\tau_2 \ldots + [pa_2\, a_k]\tau_k + [pa_2 l] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pa_1\, a_k]\tau_1 + [pa_2\, a_k]\tau_2 \ldots + [pa_k\, a_k]\tau_k + [pa_k l] = 0 \end{array}\right\},$$

в результаті розв'язання якої отримують поправки параметрів τ_j, а потім поправки v_i.

Для обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь доцільно скористатися схемою, що наведена у таблиці 11.1.

Таблиця 11.1 – Схема обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Номер	p_j	a_{j1}	a_{j2}	a_{j3}	l_j	S_j	V_j
1	p_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	l_1	S_1	V_1
2	p_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	l_2	S_2	V_2
…							
n	p_n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	l_n	S_n	V_n
[ ]		$[a_1]$	$[a_2]$	$[a_3]$	$[l]$	$[S]$	$[V]$
		$[pa_1a_1]$	$[pa_1a_2]$	$[pa_1a_3]$	$[pa_1l]$	$[pa_1S]$	
			$[pa_2a_2]$	$[pa_2a_3]$	$[pa_2l]$	$[pa_2S]$	
				$[pa_3a_3]$	$[pa_3l]$	$[pa_3S]$	
					$[p_ll]$	$[p_lS]$	
						$[pSS]$	

4. Обчислюють поправки до зрівнюваних значень виміряних величин v_i, використовуючи вираз (11.18).

5. Контролюють результати розрахунків, для чого перевіряють виконання рівностей (11.7):

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k),\ \ j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}\ .$$

Приклад 11.1. У трикутнику, в якому відомі координати пункту A, сторона c та її дирекційний кут α_{AB}, рівноточно виміряні кути X_1, X_2, X_3 для визначення розташування вершини C (рис. 11.2) і отримані результати вимірів x_1, x_2, x_3.

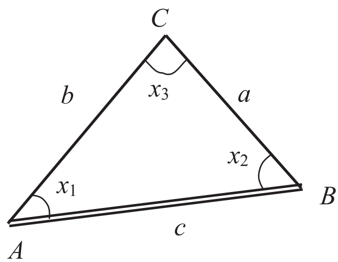


Рисунок 11.2 – Вимірюваний трикутник

Розв'язання. Для рішення трикутника з відомою стороною необхідно мати два кути. Оскільки виміряні три кути, які пов'язані рівнянням

$$x_1' + x_2' + x_3' = 180^\circ,$$

виникає задача зрівнювання, для розв'язання якої маємо одно рівняння зв'язку й три невідомих, для яких потрібно обчислити поправки v_i, тобто число змінних $n = 3$, число рівнянь $r = 1$.

Для обчислення трьох невідомих потрібно мати три незалежних рівняння, отже потрібно ввести $k = n - r = 3 - 1 = 2$ параметра.

1. Виберемо параметри t, їхня кількість має дорівнювати $k = 2$. Як такі параметри приймаємо дирекційні кути напрямів AC і BC, тобто:

$$\alpha_{AC} = t_1;$$
$$\alpha_{BC} = t_2.$$

Дирекційні кути α_{AC} і α_{BC} не залежать один від одного.

Усі змінні x_i, що виміряні, виразимо через параметри t_1 і t_2:

$x_1' = \alpha_{AB} - t_1$ – дирекційний кут *AB* (відомий) мінус дирекційний кут напряму *AC*;

$x_2' = t_2 - \alpha_{AB} \pm 180^\circ$ – дирекційний кут *BC* мінус дирекційний кут *AB* (відомий) і плюс-мінус 180°;

$x_3' = t_1 - t_2$.

Отже, маємо систему умовних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{c} x_1' = \alpha_{AB} - t_1 \\ x_2' = t_2 - \alpha_{AB} \pm 180^\circ \\ x_3' = t_1 - t_2 \end{array}\right\}.$$

2. З отриманої системи рівнянь визначимо наближені значення параметрів t_j^0, для чого підставимо виміряні значення x_i:

$$t_1^0 = \alpha_{AB} - x_1;$$
$$t_2^0 = \alpha_{AB} \pm 180^\circ - x_2.$$

Обчислимо коефіцієнти a_{ij} і вільні члени l_i рівнянь поправок із (11.16) та (11.17):

$$\left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 = a_{i1}; \dots; \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 = a_{ik}.$$
$$f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i = x_i^0 - x_i = l_i\ .$$

Для першого рівняння отримаємо:

$$\left(\frac{\partial x_1'}{\partial t_1}\right)_0 = (\alpha_{AB} - t_1)' = -1 = a_{11};$$
$$\left(\frac{\partial x_1'}{\partial t_2}\right)_0 = (\alpha_{AB} - t_1)' = 0 = a_{12};$$
$$l_1 = \alpha_{AB} - t_1^0 - x_1 = \alpha_{AB} - \alpha_{AB} + x_1 - x_1 = 0;$$

для другого рівняння:

$$a_{21} = \left(\frac{\partial x_2'}{\partial t_1}\right)_0 = (t_2 - \alpha_{AB} \pm 180^\circ)' = 0;$$
$$a_{22} = \left(\frac{\partial x_2'}{\partial t_2}\right)_0 = (t_2 - \alpha_{AB} \pm 180^\circ)' = 1;$$
$$l_2 = t_2^0 - \alpha_{AB} \pm 180^\circ - x_2 = \alpha_{AB} \pm 180^\circ + x_2 - \alpha_{AB} \pm 180^\circ - x_2 = 0;$$

для третього рівняння:

$$a_{31} = \left(\frac{\partial x_3'}{\partial t_1}\right)_0 = (t_1 - t_2)' = 1;$$
$$a_{32} = \left(\frac{\partial x_3'}{\partial t_2}\right)_0 = (t_1 - t_2)' = -1;$$

$$l_3 = f_3 - x_3 = t_1^0 - t_2^0 - x_3 = \alpha_{AB} \pm 180^{\circ} + x_2 - \alpha_{AB} \pm 180^{\circ} - x_2 = 0.$$

3. Тепер складемо систему нормальних рівнянь. Для цього потрібно передусім визначити коефіцієнти й вільні члени рівнянь системи. Тому запишемо параметричні рівняння поправок (11.18):

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \cdots + a_{ik}\tau_k + l_i, \quad j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}\ .$$

$$v_1 = -\tau_1;$$

$$v_2 = \tau_2;$$

$$v_3 = \tau_1 - \tau_1 = W.$$

Обчислимо коефіцієнти і вільні члени нормальних рівнянь, кількість яких дорівнює 2:

$$[a_1a_1] = 2;\ \ [a_1a_2] = -1;\ \ [a_1l_1] = W;\ \ \ [a_2a_2] = 2;\ \ [a_2l_1] = +W;$$

і складемо систему нормальних рівнянь:

$$2\tau_1 - \tau_2 - W = 0;$$

$$-\tau_1 - 2\tau_2 + W = 0.$$

Додаємо рівняння одно до одного та отримаємо:

$$\tau_1 + \tau_2 = 0,$$

звідки $\tau_2 = -\tau_1$.

Тепер, додаємо до першого нормального рівняння вираз $\tau_1 + \tau_2 = 0$, отримаємо

$$\frac{\begin{array}{l} 2\tau_1 - \tau_2 - W = 0 \\ \tau_1 + \ \tau_2 \qquad = 0 \end{array}}{3\tau_1 \qquad - W = 0},$$

звідки

$$\tau_1 = \frac{W}{3}$$

і, враховуючи $\tau_2 = -\ \tau_1$, маємо $\tau_2 = -\frac{W}{3}$.

Тепер підставимо τ_1 і τ_2 до рівняння поправок v_i,

$$v_1 = -\frac{W}{3};$$

$$v_2 = -\frac{W}{3};$$

$$v_3 = \frac{W}{3} - \left(-\frac{W}{3}\right) - W = \frac{2W}{3} - \frac{3W}{3} = -\frac{W}{3}.$$

Отже, нев’язка трикутника у випадку рівноточних вимірів має бути розподілена на три кути трикутника нарівно з протилежним знаком.

Приклад 11.2. Вирішити попередню задачу 11.1, вважаючи, що виміри нерівноточні та ваги вимірів відповідно дорівнюють p_1, p_2, p_3.

Розв’язання. Рівняння поправок будуть такими самими, як і в попередній задачі, але під час складання системи нормальних рівнянь потрібно врахувати ваги вимірювань.

Отримаємо:

$$v_1 = - \tau_1 \text{ з вагою } p_1;$$
$$v_2 = + \tau_1 \text{ з вагою } p_2;$$
$$v_3 = + \tau_1 - \tau_2 - W \text{ з вагою } p_3.$$

Коефіцієнти нормальних рівнянь будуть такими:

$$[pa_1a_1] = (p_1 + p_3);$$
$$[pa_1l] = -p_3W;$$
$$[pa_2a_2] = (p_2 + p_3);$$
$$[pa_2l] = +p_3W.$$

Напишемо систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} (p_1 + p_3)\tau_1 - p_3\tau_2 - p_3W &= 0 \\ -p_3\tau_1 + (p_2 + p_3)\tau_2 + p_3W &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Додаємо рівняння одне до одного та отримаємо:

$$p_1\tau_1 + p_2\tau_2 = 0,$$

звідки

$$\tau_2 = -\frac{p_1}{p_2}\tau_1.$$

Розділимо перше рівняння на p_3 та підставимо до нього вираз для τ_2:

$$\left(\frac{p_1}{p_3} + 1\right)\tau_1 - \tau_2 - W = \left(\frac{p_1}{p_3} + 1\right)\tau_1 + \frac{p_1}{p_2}\tau_1 - W =$$
$$= \left(\frac{p_1}{p_1} + \frac{p_1}{p_2} + \frac{p_1}{p_3}\right)\tau_1 - W = 0.$$

Введемо позначення:

$$\frac{1}{p_1} = q_1; \quad \frac{1}{p_2} = q_2; \quad \frac{1}{p_3} = q_3;$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = \sum q;$$

величини q називають зворотними вагами.

Тепер отримаємо

$$\frac{\sum q}{p_1}\tau_1 = W,$$

звідки,

$$\tau_1 = \frac{q_1}{\sum q}W,$$

а тоді

$$\tau_2 = -\frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{q_1}{\sum q}W.$$

Обчислимо поправки та кути

$$v_1 = -\frac{q_1}{\sum q}W;$$
$$v_2 = -\frac{q_2}{\sum q}W;$$
$$v_3 = -\frac{q_3}{\sum q}W,$$

тобто поправки в кути трикутника за нерівноточних вимірів розподіляються пропорційно зворотним вагам вимірів.

Приклад 11.3. Виміряні три кути X_1, X_2, X_3, що утворені трьома напрямками (рис. 11.3), і отримані результати вимірювань x_1 із вагою p_1, x_2 із вагою p_2 та x_3 із вагою p_3. Визначити взаємне розташування трьох напрямів.

Розв'язання. Для визначення взаємного розташування трьох напрямів необхідно знати два кути. Тому як необхідні невідомі (параметри t) виберемо кути $t_1 = x_1'$ і $t_2 = x_2'$. Параметричні рівняння зв'язку мають вигляд:

$$x_1' = t_1;$$
$$x_2' = t_2;$$
$$x_3' = t_1 + t_2.$$

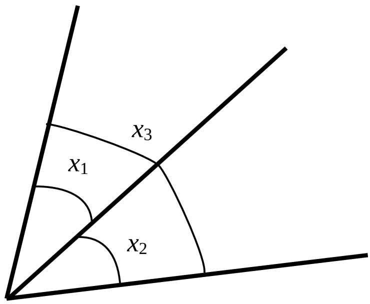


Рисунок 11.3 – Розташування трьох напрямів

Наближені значення t_j приймаємо рівними їхнім виміряним значенням

$$t_1^0 = x_1;$$
$$t_2^0 = x_2.$$

Обчислимо коефіцієнти та вільні члени рівнянь поправок із (11.16) та (11.17):

$$\left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 = a_{i1}; \dots ; \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 = a_{ik};$$
$$f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i = x_i^0 - x_i = l_i$$

та отримаємо:

$$l_1 = t_1^0 - x_1 = 0;$$
$$l_2 = t_2^0 - x_2 = 0;$$
$$l_3 = t_1^0 + t_2^0 - x_3 = x_1 + x_2 - x_3.$$

Запишемо рівняння поправок:

$$v_1 = +\tau_1 \qquad \text{з вагою } p_1;$$
$$v_2 = +\tau_2 \qquad \text{з вагою } p_2;$$
$$v_3 = +\tau_1 + \tau_2 + l_3 \qquad \text{з вагою } p_3.$$

З врахуванням ваг отримаємо нормальні рівняння

$$\left.\begin{aligned}(p_1 + p_3)\tau_1 + p_3\tau_2 + p_3 l_3 = 0\\ p_3\tau_1 + (p_2 + p_3)\tau_2 + p_3 l_3 = 0\end{aligned}\right\}.$$

Віднімемо друге рівняння від першого

$$p_1\tau_1 - p_2\tau_2 = 0,$$

звідки

$$\tau_2 = \frac{p_1}{p_2}\tau_1.$$

Розділимо перше нормальне рівняння на p_3, підставимо вираз для τ_2 та отримаємо

$$\left(\frac{p_1}{p_3} + 1\right)\tau_1 + \tau_2 + l_3 = \left(\frac{p_1}{p_3} + 1\right)\tau_1 + \frac{p_1}{p_2}\tau_1 + l_3 = 0.$$

Після перетворень маємо

$$\left(\frac{p_1}{p_1}+\frac{p_1}{p_2}+\frac{p_1}{p_3}\right)\tau_1 + l_3 = 0.$$

Введемо зворотні ваги $\frac{1}{p_1} = q_1$; $\frac{1}{p_2} = q_2$; $\frac{1}{p_3} = q_3$, отримаємо

$$\tau_1 = \frac{-q_1}{\sum q} l_3;$$

$$\tau_2 = -\frac{q_2}{q_1}\cdot\frac{q_1}{\sum q} l_3 = -\frac{q_2}{\sum q} l_3;$$

і, нарешті, визначимо поправки до результатів вимірів:

$$v_1 = -\frac{q_1}{\sum q} l_3;$$

$$v_2 = -\frac{q_2}{\sum q} l_3;$$

$$v_3 = +\frac{q_3}{\sum q} l_3,$$

де $l_3 = x_1 + x_2 - x_3$.

Приклад 11.4. У трикутнику дана сторона $AB = c = 1000$ м, та виміряні решті дві сторони та три кути. Потрібно знайти зрівнювані значення виміряних величин (рис. 11.4).

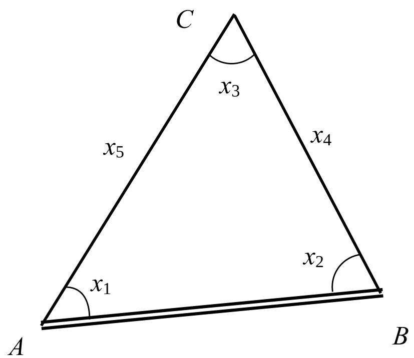


Рисунок 11.4 – Виміряний трикутник

Розв'язання. Кути виміряні із середньою квадратичною похибкою m = 10″.

Середні квадратичні похибки вимірювання сторін відповідають співвідношенню

$$m_i^{\text{см}} = \frac{s_i^{\text{см}}}{30000} + 2 \text{ см}.$$

Отримані результати вимірювань:

$x_1 = 46°25'13''$;

$x_2 = 68°01'25''$;

$x_3 = 65°33'07''$;

$x_4 = 795{,}881$ м;

$x_5 = 1018{,}660$ м.

Обчислимо середні квадратичні похибки вимірювання сторін

$$m_4^{\text{см}} = \frac{79588 \text{ см}}{30000} + 2 \text{ см} = 4{,}6 \text{ см};$$

$$m_5^{\text{см}} = \frac{101866 \text{ см}}{30000} + 2 \text{ см} = 5{,}4 \text{ см}.$$

Ваги обчислимо за формулою:

$$p_i = \left(\frac{10}{m_i}\right)^2,$$

тоді ваги кутів будуть:

$p_1 = p_2 = p_3 = 1\,\frac{1}{('')^2}$ (тут розмірність – одиниця на секунду у квадраті).

Виразимо середні квадратичні похибки сторін у сантиметрах та отримаємо:

$$p_4 = \left(\frac{10}{4{,}6\ \text{см}}\right)^2 = 4{,}7\ \frac{1}{(\text{см})^2};$$

$$p_5 = \left(\frac{10}{5{,}4\ \text{см}}\right)^2 = 3{,}4\ \frac{1}{(\text{см})^2}.$$

Виражати середні квадратичні похибки сторін не у сантиметрах, а в інших одиницях, недоцільно, оскільки ваги при цьому будуть або дуже малі, або, навпаки, дуже великі.

Помітимо, що у подальших обчисленнях усі лінійні величини мають виражатися також у сантиметрах.

Як параметри найзручніше обрати два кути X_1 та X_2 (для рішення трикутника, в якому відома одна сторона, необхідно мати дві виміряні величини).

Покладемо

$$t_1 = x_1';$$

$$t_2 = x_2'.$$

Далі виразимо усі виміряні величини як функції параметрів:

$$x_1' = t_1;$$

$$x_2' = t_2;$$

$$x_3' = 180° - t_1 - t_2;$$

$$x_4' = c\frac{\sin t_1}{sin(180° - t_1 - t_2)} = c\frac{\sin x_1'}{\sin x_3'};$$

$$x_5' = c\frac{\sin t_2}{sin(180° - t_1 - t_2)} = c\frac{\sin x_2'}{\sin x_3'}.$$

Тепер обчислимо наближені значення невідомих. Для їхнього уточнення спочатку визначимо нев’язку трикутника, а потім розподілимо її із протилежним знаком на три кути трикутника (табл. 11.2).

Нев’язка становить:

180° – 46°25′13″ – 68°01′25″ – 65°33′07″ = 180° – 179°59′45″ = 15″.

Таблиця 11.2 – Результати розрахунків

Кут	Результат вимірювання	Поправка (допоміжна)	Виправлений кут
X_1	46°25′13″	+5″	46°25′18″
X_2	68°01′25″	+5″	68°01′30″
X_3	65°33′07″	+5″	65°33′12″
Σ	179°59′45″	+15″	180°00′00″
W	–15		

Тепер приймемо $t_1^0 = 46°25'18''$, $t_2^0 = 68°01'30''$, звідки

$$180° - t_1^0 - t_2^0 = 65°33'12''.$$

Далі обчислимо вільні члени всіх рівнянь поправок та коефіцієнти останніх двох рівнянь (коефіцієнти решти рівнянь є очевидними) відповідно до формул (11.16) та (11.17)

$$l_1 = 180° - t_1^0 - x_1 = 46°25'18'' - 46°25'13'' = +5'';$$

$$l_2 = t_2^0 - x_2 = 68°01'30'' - 68°01'25'' = +5'';$$

$$l_3 = 180° - t_1^0 - t_2^0 - x_3 = 65°33'12'' - 65°33'07'' = +5'';$$

$$l_4^{\text{см}} = 100000\frac{\sin 46°25'18''}{\sin 65°33'12''} - 79588{,}1 = 79577{,}6 - 79588{,}1 = -10{,}5 \text{ см};$$

$$l_5^{\text{см}} = 100000\frac{\sin 68°01'30''}{\sin 65°33'12''} - 101866{,}0 = 101867{,}5 - 101866{,}0 = +1{,}5 \text{ см};$$

$$\frac{\partial x_4'}{\partial t_1} = c\frac{\cos t_1 \cdot \sin(t_1 + t_2) - \sin t_1 \cdot \cos(t_1 + t_2)}{\sin^2(t_1 + t_2)} =$$

$$= c\frac{\sin t_2}{\sin^2 x_3'} = c\frac{\sin x_2'}{\sin x_3'} \cdot \frac{1}{\sin x_3'} = \frac{x_5'}{\sin x_3'}.$$

$$\frac{\partial x_4'}{\partial t_2} = c\frac{-\sin t_1 \cdot \cos(t_1 + t_2)}{\sin^2 x_3'} = c\frac{\sin t_1 \cdot \cos(180° - t_1 - t_2)}{\sin^2 x_3'} =$$

$$= c\frac{\sin x_1'}{\sin x_3'} \cdot \frac{\cos x_3'}{\sin x_3'} = \frac{x_1'}{\operatorname{tg} x_3'}.$$

$$\frac{\partial x_5'}{\partial t_1} = c\frac{-\sin t_2 \cdot \cos(t_1 + t_2)}{\sin^2 x_3'} = c\frac{\sin x_2'}{\sin x_3'} \cdot \frac{\cos x_3'}{\sin x_3'} = \frac{x_5'}{\operatorname{tg} x_3'}$$

$$\frac{\partial x_5'}{\partial t_2} = c\frac{\cos t_2 \cdot \sin(t_1 + t_2) - \sin t_2 \cdot \cos(t_1 + t_2)}{\sin^2 x_3'} =$$

$$= c\frac{\sin t_1}{\sin x_3'} \cdot \frac{1}{\sin x_3'} = \frac{x_4'}{\sin x_3'}.$$

Напишемо тепер одне з рівнянь поправок для лінійних вимірів:

$$v_4^{\text{см}} = \left(\frac{\partial x_4'}{\partial t_1}\right)_0 \cdot \tau_1 + \left(\frac{\partial x_4'}{\partial t_2}\right)_0 \cdot \tau_2 + l_4^{\text{см}}.$$

Оскільки диференціювання виконується за кутовими аргументами, що виражені тільки у радіанній мірі, а поправки τ практично виражаються у секундах, то останнє рівняння слід записати так:

$$v_4^{\text{см}} = \left(\frac{\partial x_4'}{\partial t_1}\right)_0 \cdot \frac{\tau''}{\rho''} + \left(\frac{\partial x_4'}{\partial t_2}\right)_0 \cdot \frac{\tau''}{\rho''} + l_4^{\text{см}}.$$

Тепер отримаємо при поправках τ'' такі коефіцієнти поправок для лінійних вимірів:

$$a_{41} = \frac{x_5^{\text{см}}}{\rho''} cosec\, x_3 = \frac{101866}{206265} cosec\, 65°33' = +0{,}54;$$

$$a_{42} = \frac{x_4^{\text{см}}}{\rho''} ctg\, x_3 = \frac{79588}{206265} ctg\, 65°33' = +0{,}18;$$

$$a_{51} = \frac{x_5^{\text{см}}}{\rho''} ctg\, x_3 = \frac{101866}{206265} ctg\, 65°33' = +0{,}22;$$

$$a_{52} = \frac{x_4^{\text{см}}}{\rho''} cosec\, x_3 = \frac{79588}{206265} cosec\, 65°33' = +0{,}42.$$

Напишемо нормальні рівняння:

$$\left.\begin{aligned} 3{,}54\,\tau_1 + 1{,}77\,\tau_2 - 25{,}54 = 0 \\ 1{,}77\,\tau_1 + 2{,}75\,\tau_2 - 6{,}78 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Для розв'язання отриманої системи скористаємось табличним процесором MS Excel. Формула для обчислення коренів має вигляд:

=**МУМНОЖ**(**МОБР**(A2:B3);D2:D3),

де (A2:B3) – матриця *A* (матриця коефіцієнтів при змінних);

МОБР(A2:B3) – функція обернення матриці коефіцієнтів при змінних – перший аргумент функції **МУМНОЖ**;

D2:D3 – матриця вільних членів, передбачається, що вони знаходяться у правих частинах рівнянь системи після знаку рівності – другий аргумент функції **МУМНОЖ**.

Для розв'язання системи рівнянь у таблицю MS Excel потрібно внести масив коефіцієнтів рівнянь, виділити комірки, в яких буде розміщено розв'язок (у нас B5:B6) та натиснути комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter (рис. 11.5).

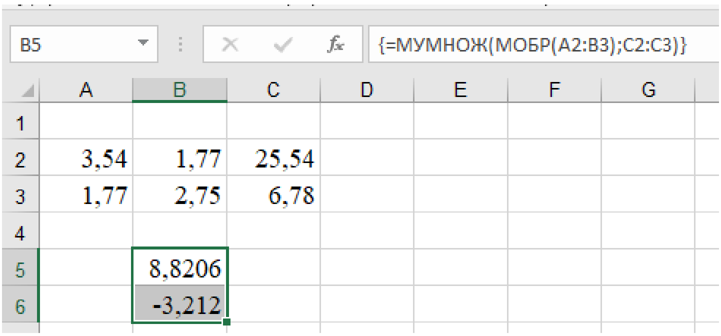


Рисунок 11.5 – Результат розв'язання системи нормальних рівнянь

Для контроля правильності обчислень підставимо отримані значення τ_1 і τ_2 до системи нормальних рівнянь:

$$(3{,}54 + 1{,}77)\,\tau_1 + (1{,}77 + 2{,}75)\,\tau_2 - (25{,}54 + 6{,}78) = 0;$$

$$5{,}31 \cdot 8{,}8206 + 4{,}52 \cdot (-3{,}212) - 32{,}32 = 0,$$

звідки зрозуміло, що отримані значення $\tau_1 = 8{,}8206$ і $\tau_2 = -3{,}212$ задовольняють системі нормальних рівнянь.

Запитання для самоперевірки

1. Поясніть, які рівняння називають умовними рівняннями.
2. Наведіть приклад умовного рівняння нелінійного виду.
3. Поясніть, що таке нев'язка та як її обчислюють.
4. Охарактеризуйте властивості нев'язок.
5. У яких випадках виникає задача зрівнювання геодезичних побудов?
6. У чому полягає ідея принципу найменших квадратів та принципу найбільшої ваги?

7 Надайте визначення параметричним рівнянням зв'язку. Як визначають загальне число параметричних рівнянь зв'язку?

8. Надайте визначення параметричним рівнянням поправок.
9. Як перетворюють параметричні рівняння поправок шляхом введення наближених значень невідомих?
10. Як можна отримати наближені значення шуканих величин?
11. Проведіть вивід нормальних рівнянь, ґрунтуючись на принципі найменших квадратів.
12. Як потрібно діяти, якщо параметричні рівняння зв'язку мають нелінійний вигляд?
13. Опишіть порядок зрівнювання геодезичних побудов параметричним методом у випадку лінійних параметричних рівнянь зв'язку.
14. Опишіть порядок зрівнювання геодезичних побудов параметричним методом у випадку нелінійних параметричних рівнянь зв'язку.
15. У чому полягає підсумковий контроль зрівнювання за параметричним методом?
16. За яких умов система з n рівнянь з n невідомими має єдине рішення?
17. Поясніть, у чому полягає «лінійне перетворення системи рівнянь»?
18. Які системи рівнянь називають еквівалентними?
19. Як обчислюють невідомі системи лінійних рівнянь з використанням зворотної матриці?

Задачі для самостійного розв'язання

11.1. На рисунку 11.6 наведена система ходів геометричного нівелювання. Скласти параметричні рівняння зв'язку, вважаючи репери *A*, *B*, *C* і *D* вихідними.

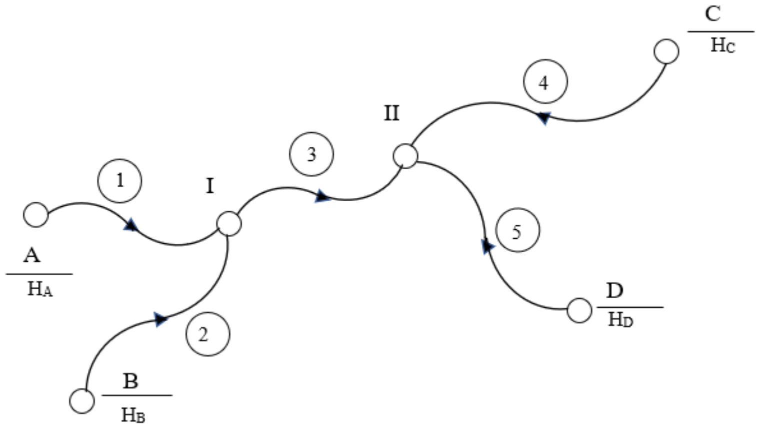


Рисунок 11.6 − Система ходів геометричного нівелювання

11.2. Перетворити рівняння поправок шляхом введення наближених значень невідомих:

$$V_1 = x_1 - 30°16'17'';$$
$$V_2 = x_2 - 50°10'19'';$$
$$V_3 = x_1 + x_2 - 80°26'39''.$$

11.3. Надані параметричні рівняння поправок. Скласти з контролем за сумами нормальні рівняння, враховуючи, що виміри були проведені рівноточні.

$$V_1 = x_1 + x_2 - 2;$$
$$V_2 = x_2 + x_3 - 1;$$
$$V_3 = x_1 + x_3 + 3;$$
$$V_4 = x_1 - x_2.$$

11.4. Надані параметричні рівняння поправок та ваги результатів вимірів:

$$V_1 = 2x_1 - x_2 - 3, \quad p_1 = 0{,}8;$$
$$V_2 = x_1 + x_2 + 1, \quad p_2 = 1{,}2;$$
$$V_3 = x_1 + 2x_2 - 2, \quad p_1 = 1{,}4.$$

Скласти (з контролем за сумами) нормальні рівняння.

11.5. Скласти параметричні рівняння зв'язку для побудови, наведені на рисунку 11.6, вважаючи, що координати пунктів *A* і *B* відомі, а координати пунктів *C* і *D* необхідно визначити. На місцевості виконані вимірювання кутів, що позначені на рисунку. Провести лінеаризацію параметричних рівнянь зв'язку.

11.6. Розкрити відповідно до алгоритму Гаусса символи $[pa_2a_3]$, $[pa_3S\cdot 1]$, $[pa_3a_3\cdot 2]$, $[plS\cdot 3]$, $[pSS\cdot 4]$.

11.7. Чи можна вважати системи рівнянь

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 6 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 1 = 0 \\ -1x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8 = 0 \end{aligned}\right\};$$
$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 7 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 9 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 1 = 0 \end{aligned}\right\};$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 5 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 7 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 8 = 0 \end{aligned}\right\}$$

системами нормальних рівнянь?

11.8. Розв'язати такі системи лінійних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - 3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 9 = 0 \end{aligned}\right\};$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\};$$
$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - 7 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

11.9. Вирішити наступну систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 7 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 9 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 1 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Тема 12 КОРЕЛАТНИЙ МЕТОД ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ПОБУДОВ

Функція Лагранжа. Невизначені множники Лагранжа. Умовні рівняння поправок. Корелатні рівняння поправок. Система нормальних рівнянь корелат. Апостеріорне оцінювання точності зрівняних результатів вимірів.

12.1 Особливості корелатного способу зрівнювання

Сутність зрівнювання корелатним способом полягає у тому, що задачу знаходження мінімуму функції $[pv^2]$ розв'язують, застосовуючи метод Лагранжа. Метод Лагранжа є одним з найбільш загальних підходів до розв'язання задач з пошуку екстремуму функції за наявності сполучних обмежень на її змінні, тобто задач умовної оптимізації. Основне практичне значення методу Лагранжа полягає в тому, що він дозволяє перейти від умовної оптимізації до безумовної. Методи, що припускають таке розв'язання, називають непрямими. Їх можна застосовувати для досить вузького класу задач, для яких вдається одержати лінійну або таку, що збігається до лінійної, систему рівнянь.

Ідея методу Лагранжа полягає у такому. Якщо потрібно знайти мінімум функції $[pv^2]$, на змінні якої $X_1, \dots, X_n$, що пов'язані одна з одною незалежними умовними рівняннями, накладені обмеження:

$$\left.\begin{array}{r} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ g_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array}\right\}, \tag{12.1}$$

то для зведення задачі пошуку умовного екстремуму функції $[pv^2]$ до задачі безумовної оптимізації застосовують функцію Лагранжа, яка має вигляд:

$$\Phi(x, \lambda) = [pv^2] + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_r g_r(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{12.2}$$

де λ_i – вектор додаткових змінних, які називають невизначеними множниками Лагранжа, а функцію $\Phi(x, \lambda)$ – функцією Лагранжа.

Доведено, що екстремум функції Лагранжа дорівнює умовному екстремуму функції $[pv^2]$. Для визначення екстремуму функції Лагранжа $\Phi(x, \lambda)$ вирішують систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(x,\lambda)}{\partial x_j} = 0, \ (j = \overline{1,n}) \\ \frac{\partial \Phi(x,\lambda)}{\partial \lambda_i} = \varphi_i(x) = 0, \ (i = \overline{1,r}) \end{cases} \tag{12.3}$$

щодо змінних x і λ.

Метод Лагранжа складається з таких етапів.

1. Складання функції Лагранжа $\Phi(x,\lambda)$.

2. Знаходження частинних похідних:

$$\frac{\partial\Phi(x,\lambda)}{\partial x_j},\ j=\overline{1,n} \quad \text{і} \quad \frac{\partial\Phi(x,\lambda)}{\partial\lambda_i},\ i=\overline{1,r}.$$

3. Розв’язання системи рівнянь (12.3) щодо змінних x і λ.

4. Дослідження точок екстремумів, що задовольняють системі (12.3), на максимум (мінімум) за допомогою достатньої ознаки екстремуму.

Нехай виміряні n величин $X_1,\dots,X_n$, що пов’язані одна з одною незалежними умовними рівняннями:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_1(x_1,\dots,x_n)=0\\ \varphi_2(x_1,\dots,x_n)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_r(x_1,\dots,x_n)=0\end{array}\right\}. \qquad (12.4)$$

Рівняння (12.4) завжди потрібно подавати так, щоб у правих частинах стояли нулі.

Нехай для величин X_i отримані результати вимірів x_1, x_2, …, x_n із вагами відповідно p_1, p_2,…, p_n.

Оскільки всі вимірювання x_i містять похибки вимірів, то у результаті підстановки їх до лівих частин умовних рівнянь у правих частинах, як правило, виходять не нулі, а нев’язкі W_j, що є істинними похибками функцій φ_1, φ_2, …, φ_r. Відповідно система рівностей (12.4) матиме такий вигляд:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_1(x_1,\ x_2,\dots,x_n)=W_1\\ \varphi_2(x_1,\ x_2,\dots,x_n)=W_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_r(x_1,\ x_2,\dots,x_n)=W_r\end{array}\right\}. \qquad (12.5)$$

Задача зрівнювання, перед усім, полягає у задоволенні вимоги щодо усунення усіх нев’язок. Тому виправлені результаті вимірювань мають задовольнити системі рівностей

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_1(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=0\\ \varphi_2(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_r(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=0\end{array}\right\}. \qquad (12.6)$$

Зрозуміло, що з усієї множини можливих рішень невизначеної системи (12.6) обирають те, за якого $[pv^2]$ приймає найменше значення.

Отже, математично поставлену задачу формулюють у такий спосіб: знайти $[pv^2]=min$, за умови, що змінні v_1, v_2,…, v_n пов’язані одна з одною рівняннями (12.6). Цю задачу на умовний екстремум у корелатному способі розв’язують за правилами Лагранжа, тобто за допомогою невизначених множників умовних рівнянь.

Зауважимо, що в параметричному способі цю саму задачу на умовний екстремум розв'язують за допомогою допоміжних незалежних змінних, які дозволяють перейти від пошуку умовного екстремуму до пошуку безумовного екстремуму.

Для системи (12.6) функція Лагранжа матиме вигляд

$$\Phi(v_1, \dots, v_n) = pv^2 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_r\varphi_r, \tag{12.7}$$

де $$\varphi_j = \varphi_j(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = 0, (j = \overline{1, r})$$

та $$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_r\varphi_r = 0.$$

Доведено, що знаходження умовного екстремуму функції $F = f(x_1, \dots, x_n)$ дає те саме рішення, що й знаходження абсолютного екстремуму функції

$$\Phi = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_r\varphi_r(x_1, \dots, x_n).$$

Введення r невизначених множників $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ дозволяє розглядати функцію Лагранжа як функцію незалежних змінних. Тоді шукані значення поправок v_i мають задовольняти рівності виду

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \tag{12.8}$$

У результаті приєднання до рівностей (12.8) рівностей (12.6) отримуємо систему з $n + r$ рівнянь із $n + r$ невідомими (тобто з поправками $v_1, v_2, \dots, v_n$ та невизначеними множниками Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$).

Такою є схема розв'язання задачі.

Зауважимо, що у випадку, коли умовні рівняння є нелінійними, задача стає практично нерозв'язуваною. Проте, нелінійну функцію можна лінеаризувати шляхом її розкладання у ряд Тейлора. Отже, рівності (12.4) розкладають у ряд Тейлора та, скориставшись тим, що поправки v_i завжди малі, нехтують членами розкладання порядку вище за перший або другий.

Для кожної з функцій φ_i за формулою розкладання у ряд Тейлора можна записати такий вираз:

$$\varphi_j(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n) + \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}\right)_0 v_1 + \dots + \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_n}\right)_0 v_n.$$

Позначимо коефіцієнти при змінних v_i:

$$\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_0 = a_{ij} \tag{12.9}$$

та отримаємо (12.5) у такому вигляді:

$$a_{1j}v_1 + \dots + a_{nj}v_n + W_j = 0.$$

Або у вигляді системи:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n + W_1 = 0 \\ a_{12}v_1 + \dots + a_{n2}v_n + W_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{1r}v_1 + \dots + a_{nr}v_n + W_r = 0 \end{array}\right\}, \tag{12.10}$$

а також у вигляді скороченого запису:

$$\left.\begin{array}{c}[a_1v]+W_1=0\\ [a_2v]+W_2=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\\ [a_rv]+W_r=0\end{array}\right\}. \qquad (12.11)$$

Рівності (12.10) і (12.11) називають умовними рівняннями поправок. Нев'язкі W_j є вільними членами цих рівнянь. Матрична форма запису умовних рівнянь поправок має наступний вигляд:

$$AV+W=0\ . \qquad (12.12)$$

Якщо умовні рівняння початково є лінійними, то їх розкладання у ряд Тейлора не потрібне.

Тепер задачу можна сформулювати в такий спосіб. Потрібно знайти мінімум функції $[pv^2]$, якщо змінні v_i пов'язані одна з одною рівняннями (12.10).

Для зручності обчислень множники Лагранжа позначають так:

$$\lambda_1=-2k_1,\ \lambda_2=-2k_2\ ,\ \ldots,\ \lambda_r=-2k_r\ ,$$

де змінні $k_1, k_2\ , \ldots, k_r$ називають корелатами.

Функція Лагранжа (12.7) тепер має вигляд:

$$\Phi(v_1,\ldots,v_n)=[pv^2]-2k_1([a_1v]+W_1)-\cdots-2k_r([a_rv]+W_r).$$

Далі напишемо її похідну

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_i}=2p_iv_i-2k_1a_{i1}-2k_2a_{i2}-\cdots-2k_ra_{ir}=0,$$

звідки отримаємо поправки

$$v_i=q_ia_{i1}k_1+q_ia_{i2}k_2+\cdots+q_ia_{ir}k_r, \qquad (12.13)$$

де q_i – зворотні ваги $q_i=\frac{1}{p_i}$.

Вираз (12.13) називають **корелатними рівняннями поправок**, що у матричній формі мають такий вигляд:

$$V=P^{-1}A^Tk \qquad (12.14)$$

Або v_i можна виразити інакше:

$$v_i=\frac{a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+\cdots+a_{ir}k_r}{p_i}\ . \qquad (12.15)$$

Рівності (12.13) і (12.14) називають корелатними рівняннями поправок. Із цих рівностей можна визначити шукані поправки v_i за відомими корелатами k_j.

Для визначення корелат скористаємось системою (12.13). Помножуючи рівності системи одну за одною на $a_{i1},\ a_{i2}, \ldots, a_{ir}$ та кожен раз додаючи їх одну до одної, отримаємо такі співвідношення:

$$\left.\begin{array}{c}[a_1v]=[qa_1a_1]k_1+[qa_1a_2]k_2+\cdots+[qa_1a_r]k_r\\ [a_2v]=[qa_1a_2]k_1+[qa_2a_2]k_2+\cdots+[qa_2a_r]k_r\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\\ [a_rv]=[qa_1a_r]k_1+[qa_2a_r]k_2+\cdots+[qa_ra_r]k_r\end{array}\right\}. \qquad (12.16)$$

Врахуємо тепер рівності (12.11) та отримаємо

$$\left.\begin{array}{r}[qa_1a_1]k_1+[qa_1a_2]k_2+\cdots+[qa_1a_r]k_r+W_1=0\\ [qa_1a_2]k_1+[qa_2a_2]k_2+\cdots+[qa_2a_r]k_r+W_2=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\\ [qa_1a_r]k_1+[qa_2a_r]k_2+\cdots+[qa_ra_r]k_r+Wr=0\end{array}\right\}. \qquad (12.17)$$

Очевидно, що система (12.17) становить систему нормальних рівнянь корелат, оскільки вона містить число рівнянь r, що дорівнює числу невідомих.

Матрична форма запису системи нормальних рівнянь має вигляд:

$$AP^{-1}A^Tk+W=0. \qquad (12.18)$$

Отримавши розв'язок цієї системи, з рівностей (12.15), визначають шукані поправки та результати вимірів.

12.2 Порядок розв'язання задачі зрівнювання корелатним способом

1. Встановлюють систему результатів вимірів $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ та їхні ваги $p_1,\ p_2,\dots,p_n$, так само, як і в параметричному способі.

2. Вибирають і складають умовні рівняння (12.4). Необхідно, щоб умовні рівняння задовольняли таким вимогам:

– рівняння мають бути незалежними, тобто жодне з них не має бути наслідком іншого;

– число умовних рівнянь має дорівнювати $r\ =\ n-\ k.$

3. За формулами (12.5) і (12.9) обчислюють вільні члени та коефіцієнти умовних рівнянь поправок. Одночасно, як і під час складання параметричних рівнянь поправок, необхідно привести коефіцієнти й поправки в умовних рівняннях до величин одного порядку, вводячи відповідні розмірності для функцій φ.

4. Обчислюють коефіцієнти нормальних рівнянь корелат.

5. Розв'язують нормальні рівняння, в результаті чого отримують корелати k.

6. Обчислюють поправки v за формулами (12.15).

7. Обчислюють зрівнювані значення вимірюваних величин $x_i'=x_i+v_i$, після чого виконують контрольні обчислення, які полягають у підстановці зрівнюваних значень до умовних рівнянь (12.6).

Приклад 12.1. У трикутнику, в якому відомі координати пункту A, сторона c та її дирекційний кут α_{AB}, рівноточно виміряні кути X_1, X_2, X_3 для визначення розташування вершини C (рис. 11.2) і отримані результати вимірювань x_1, x_2, x_3. Потрібно знайти зрівнювані значення кутів.

Розв'язання. 1. Для вирішення трикутника з відомою стороною необхідно мати два кути. Оскільки виміряні три кути, що пов'язані рівнянням

$$X_1+X_2+X_3=180^\circ,$$

виникає задача зрівнювання, для розв'язання якої є один надлишковий вимір. Зауважимо, що **кожний новий додатковий вимір породжує умовне рівняння**.

Умовним рівнянням називають будь-яке математичне співвідношення, що пов'язує істинні значення вимірюваних величин.

Оскільки всі виміри x_i містять похибки вимірів, то за їхньої підстановці до лівої частини рівняння зв'язку у правій його частині буде не нуль, а нев'язка w. Перепишемо рівність відповідно до (12.5):

$$x_1 + x_2 + x_3 - 180^{\circ} = w_1.$$

Виправлені результати вимірів мають задовольняти рівностям (12.6):

$$\varphi_1(x_1 + v_1 + x_2 + v_2 + x_3 + v_3) = 0, \quad (j = \overline{1,r}).$$

2. Складемо умовне рівняння поправок у вигляді (12.10)

$$a_{1j}v_1 + \cdots + a_{nj}v_n + w_j = 0,$$

або

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0,$$

його можна подати у вигляді скороченого запису (12.11)

$$[v] + w = 0.$$

Отримана рівність – умовне рівняння поправок, а нев'язка w є його вільним членом.

Задача сформулюється в такий спосіб. Потрібно знайти мінімум функції $[pv^2]$, за умови, що змінні v_i пов'язані одна з одною умовним рівнянням поправок.

Нагадаємо, що множники Лагранжа позначають так:

$$\lambda_1 = -2k_1, \lambda_2 = -2k_2, \dots, \lambda_r = -2k_r,$$

де $k_1, k_2, \dots, k_r$ називають корелатами.

Запишемо функцію Лагранжа:

$$\Phi(v_1, \dots, v_n) = [pv^2] - 2k_1([a_1v] + W_1) - \cdots - 2k_r([a_rv] + W_r)$$

або

$$\Phi(v_1, v_2, v_3) = [v^2] - 2k([v] + W).$$

Візьмемо часткові похідні від функції Лагранжа за v_i до дорівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_1} = 2v_1 - 2k = 0;$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_2} = 2v_2 - 2k = 0;$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_3} = 2v_3 - 2k = 0.$$

Скоротивши вираз на 2 та виразивши v_i, отримаємо:

$$v_1 = k; \quad v_2 = k; \quad v_3 = k.$$

Додаємо одно до одного отримані рівняння почленно та дістанемо:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 3k = -w$$

або

$$3k = -w,$$

звідки

$$k = -\frac{W}{3}.$$

4. Поправки визначимо за формулою (12.13), враховуючи, що $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 1$ та виміри є рівноточними:

$$v_1 = -\frac{W}{3};$$
$$v_2 = -\frac{W}{3};$$
$$v_3 = -\frac{W}{3}.$$

Отримали такий самий результат, як у параметричному способі (приклад 11.1).

На практиці не проходять весь алгоритм отримання корелат, починаючи від складання функції Лагранжа, а використовують систему нормальних рівнянь (12.17) як формулу. Для цього визначають її складники – зворотні ваги q_j, коефіцієнти a_{ij} та нев'язкі w_j.

Повернемося до нашої задачі. По-перше, оскільки ми маємо один додатковий вимір, то він породжує одно умовне рівняння, тобто $r = 1$, і нев'язка одна, вона дорівнює w. Відповідно у системі нормальних рівнянь має бути одне рівняння, в якому один складник, тобто одне невідоме (одна корелата):

$$[qa_1a_1]k_1 + W_1 = 0.$$

Усі коефіцієнти умовного рівняння поправок дорівнюють одиниці:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$$

Відкривши дужку та підставивши значення змінних, отримаємо:

$$(q_1 \cdot a_{11} \cdot a_{11} + q_2 \cdot a_{12} \cdot a_{12} + q_3 \cdot a_{13} \cdot a_{13})\, k_1 + W_1 = 0,$$
$$(1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1) \cdot k + W = 0,$$
$$(1 + 1 + 1) \cdot k + W = 0,$$
$$3k + W = 0$$

або $$3k = -W \quad \text{і} \quad k = -\frac{W}{3}.$$

Далі, отримавши корелату, визначаємо поправки:

$$v_1 = -\frac{W}{3};$$
$$v_2 = -\frac{W}{3};$$
$$v_3 = -\frac{W}{3},$$

а потім обчислюємо зрівнювані значення кутів x_1', x_2', x_3' та обов'язково перевіряємо, з якою точністю їхня сума відповідає 180°.

Приклад 12.2. Розв'яжемо попередню задачу, вважаючи, що виміри нерівноточні та ваги вимірів відповідно дорівнюють p_1, p_2, p_3.

Розв'язання. Умовне рівняння поправок буде таким самим, як і в попередній задачі, але під час складання системи нормальних рівнянням потрібно врахувати ваги вимірів, тобто зворотні ваги q_1, q_2, q_3.

Отримаємо з урахуванням, що $[qa_1a_1] = q_1 + q_2 + q_3$:

$$(q_1 + q_2 + q_3)k + W = 0,$$

звідки

$$k = -\frac{W}{q_1+q_2+q_3} = -\frac{W}{\sum q}.$$

Поправки визначимо за формулами (12.13), (12.15):

$$v_1 = -\frac{q_1}{\sum q}W;$$
$$v_2 = -\frac{q_2}{\sum q}W;$$
$$v_3 = -\frac{q_3}{\sum q}W.$$

Результати обчислень також збігаються із результатом розв'язання прикладу 11.2 за параметричним методом.

Приклад 12.3. Виміряно три кути X_1, X_2, X_3, що утворені трьома напрямами (рис. 11.3), та отримані результати вимірів x_1 із вагою p_1, x_2 із вагою p_2 та x_3 із вагою p_3. Визначити взаємне розташування трьох напрямів.

Розв'язання. Для визначення взаємного розташування трьох напрямів необхідно знати два кути. Оскільки є один додатковий вимір, виникає задача зрівнювання. Умовне рівняння запишемо у вигляді:

$$X_1 + X_2 - X_3 = 0.$$

Вільний член дорівнює:

$$w = x_1 + x_2 - x_3.$$

Умовне рівняння поправок:

$$v_1 + v_2 - v_3 + w = 0.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$\Phi(v_1, v_2, v_3) = [pv^2] - 2k([av] + W).$$

Візьмемо часткові похідні від функції Лагранжа за v_i та дорівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_1} = 2p_1v_1 - 2ka_1 = 0;$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_2} = 2p_2v_2 - 2ka_2 = 0;$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_3} = 2p_3v_3 - 2ka_3 = 0.$$

Скоротимо вирази на 2, та виразивши v_i, отримаємо:

$$v_1 = \frac{ka_1}{p_1}; \quad v_2 = \frac{ka_2}{p_2}; \quad v_3 = k\frac{ka_3}{p_3}.$$

Додаємо отримані рівняння одно до одного почленно та дістанемо:

$$v_1 + v_2 - v_3 = (q_1a_1 + q_2a_2 + q_3a_3)k = -w$$

або, оскільки $a_1 = a_2 = a_3 = 1$,

$$(q_1 + q_2 + q_3) \cdot k = -w,$$

звідки

$$k = -\frac{w}{\sum q}.$$

Визначимо поправки до результатів вимірювань:

$$v_1 = -\frac{q_1}{\sum q}w;$$

$$v_2 = -\frac{q_2}{\sum q}w;$$

$$v_3 = -\frac{q_3}{\sum q}w.$$

Результати такі самі, як і в прикладі 11.3, де застосований параметричний метод розв'язання.

Тепер розв'яжемо задачу, склавши систему нормальних рівнянь (12.17). Оскільки є один додатковий вимір, він породжує одне умовне рівняння, тобто $r = 1$, і нев'язка одна, вона дорівнює w. Відповідно у системі нормальних рівнянь має бути одне рівняння, в якому один доданок, тобто одне невідоме (одна корелата).

Відомі складники нормального рівняння – зворотні ваги q_j, коефіцієнти a_{ij} та одна нев'язка w.

Коефіцієнти умовного рівняння поправок дорівнюють одиниці:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1.$$

У системі нормальних рівнянь має бути одно рівняння, в якому один доданок:

$$[qa_1a_1]k_1 + W_1 = 0.$$

Відкривши дужку та підставивши значення змінних, отримаємо:

$$(q_1 \cdot a_{11} \cdot a_{11} + q_2 \cdot a_{12} \cdot a_{12} + q_3 \cdot a_{13} \cdot a_{13}) \cdot \ k_1 + W_1 = 0,$$

$$(q_1 \cdot 1 \cdot 1 + q_2 \cdot 1 \cdot 1 + q_3 \cdot 1 \cdot 1) \cdot k + W = 0,$$

$$(q_1 + q_2 + q_3) \cdot k = -W$$

або
$$k = -\frac{w}{\sum q}.$$

Отримавши корелату, знаходимо поправки:

$$v_1 = -\frac{q_1}{\sum q}w;$$

$$v_2 = -\frac{q_2}{\sum q}w;$$

$$v_3 = -\frac{q_3}{\sum q}w.$$

Далі обчислюємо зрівнювані значення кутів x_1', x_2', x_3' та перевіряємо точність виконання умови $X_1 + X_2 - X_3 = 0$.

Приклад 12.4. На рисунку 12.1 подано систему нівелірних ходів, що спираються на три марки, висоти яких отримані з нівелювання більш високого класу. У таблиці 12.1 наведені виміряні значення перевищень за ходами та довжини ходів.

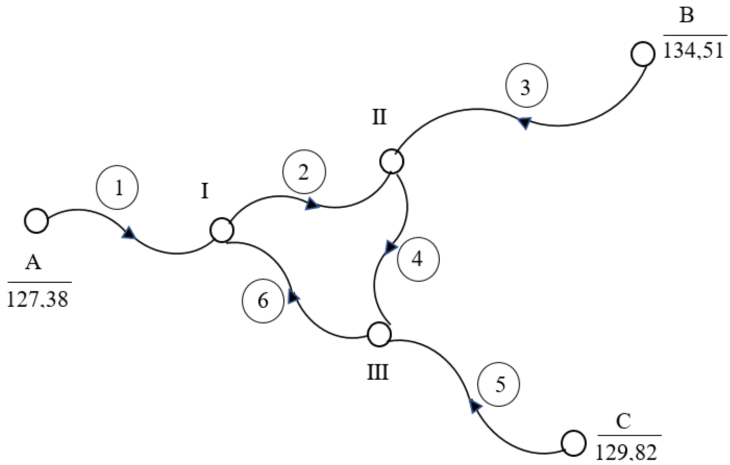


Рисунок 12.1 – Система нівелірних ходів

Таблиця 12.1 – Вихідні дані

Номер ходу	Виміряне перевищення h, м	Довжина ходу L, км
1	+4,881	4,7
2	–4,132	6,2
3	–6,427	9,1
4	+2,588	5,3
5	+0,883	6,3
6	+1,611	8,6

Знайти зрівнювані значення висот реперів I, II, III та СКП перевищення, що отримане за ходом довжиною у 1 км.

Розв'язання. 1. Складемо незалежні умовні рівняння.

Число незалежних умовних рівнянь визначається співвідношенням

$$r = n - k,$$

де r – число незалежних умовних рівнянь;

n – число виміряних величин;

k – число величин, що потрібно визначити.

У нашому випадку n = 6, k = 3, звідки r = 3. Отже, сформуємо три незалежних умовних рівняння у наступному вигляді:

$$h_1 + h_2 - h_3 - (H_B - H_A) = 0;$$
$$h_1 - h_5 - h_6 - (H_C - H_A) = 0;$$
$$h_3 + h_4 - h_5 - (H_C - H_B) = 0.$$

2. Обчислимо нев'язки умовних рівнянь.

Підставимо до умовних рівнянь замість істинних значень результати вимірів та отримаємо

$$w_1 = +4{,}881 - 4{,}132 + 6{,}427 - 134{,}517 + 127{,}381 = +0{,}040 \text{ м};$$
$$w_2 = +4{,}881 - 0{,}883 - 1{,}611 - 129{,}822 + 127{,}381 = -0{,}054 \text{ м};$$
$$w_1 = -6{,}427 + 2{,}588 - 0{,}883 - 129{,}822 + 134{,}517 = -0{,}027 \text{ м}.$$

Краще подати усі нев'язки у міліметрах, тобто

w_1 = + 40 мм, w_2 = – 54 мм і w_3 = – 27 мм.

3. Складемо умовне рівняння поправок:

$$v_1 + v_2 - v_3 - 40 = 0;$$
$$v_1 - v_5 - v_6 + 54 = 0;$$
$$v_3 + v_4 - v_5 + 27 = 0.$$

4. Розрахуємо зворотні ваги результатів вимірювань.

Ваги обчислимо за формулою:

$$p_i = \frac{k}{L_i},$$

де L_i – довжина і-го ходу.

Зворотні ваги відповідно визначимо за формулою $q_i = \frac{L_i}{k}$. Прийнявши k = 1, отримаємо q_1 = 4,7; q_2 = 6,2; q_3 = 9,1; q_4 = 5,3; q_5 = 6,3; q_6 = 8,6.

5. Складемо нормальні рівняння корелат.

Оскільки ми маємо три додаткових виміри, які породжують три умовних рівняння, то, відповідно, у системі нормальних рівнянь має бути три рівняння, в яких три корелати. Отже, у загальному вигляді система нормальних рівнянь відповідно до (12.17) має вигляд:

$$\left.\begin{array}{r} [qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]k_2 + \cdots + [qa_1a_r]k_r + w_1 = 0 \\ [qa_1a_2]k_1 + [qa_2a_2]k_2 + \cdots + [qa_2a_r]k_r + w_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ [qa_1a_r]k_1 + [qa_2a_r]k_2 + \cdots + [qa_ra_r]k_r + w_r = 0 \end{array}\right\}.$$

Тепер, скориставшись системою (12.17) як формулою, визначимо параметри системи нормальних рівнянь. Такі параметри, як ваги q_i та нев'язки w_i, ми вже визначили. Обчислимо коефіцієнти системи.

Звернемо увагу, що у Гаусових сумах мають стояти 6 доданків відповідно до загальної кількості вимірів n = 6. Тоді відповідно до форми першого нормального рівняння коефіцієнт при корелаті k_1 дорівнює:

$$[qa_1a_1] = q_1a_{11}a_{11} + q_2a_{12}a_{12} + q_3a_{13}a_{13} + q_4a_{14}a_{14} +$$
$$+q_5a_{15}a_{15} + q_6a_{16}a_{16} = 4{,}7 \cdot 1 \cdot 1 + 6{,}2 \cdot 1 \cdot 1 + 9{,}1 \cdot (-1) \cdot (-1) +$$
$$+5{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 6{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 8{,}6 \cdot 0 \cdot 0 = 4{,}7 \ + \ 6{,}2 \ + \ 9{,}1 \ = \ 20{,}0;$$

при кореляті k_2:

$$[qa_1a_2] = q_1a_{11}a_{21} + q_2a_{12}a_{22} + q_3a_{13}a_{23} + q_4a_{14}a_{24} +$$
$$+q_5a_{15}a_{25} + q_6a_{16}a_{26} = 4{,}7 \cdot 1 \cdot 1 + 6{,}2 \cdot 1 \cdot 1 + 9{,}1 \cdot (-1) \cdot (-1) +$$
$$+5{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 6{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 8{,}6 \cdot 0 \cdot 0 = 4{,}7 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ = \ 4{,}7;$$

при кореляті k_3:

$$[qa_1a_3] = q_1a_{11}a_{31} + q_2a_{12}a_{32} + q_3a_{13}a_{33} + q_4a_{12}a_{32} +$$
$$+q_5a_{12}a_{32} + q_6a_{12}a_{32} = 4{,}7 \cdot 1 \cdot 0 + 6{,}2 \cdot 1 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot (-1) \cdot 1 +$$
$$+5{,}3 \cdot 0 \cdot 1 + 6{,}3 \cdot 0 \cdot 1 + 8{,}6 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \ + \ 0 - \ 9{,}1 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 = -9{,}1.$$

У другому рівнянні коефіцієнт при кореляті k_1 дорівнює:

$$[qa_1a_2] = q_1a_{11}a_{21} + q_2a_{12}a_{22} + q_3a_{13}a_{23} + q_4a_{14}a_{24} +$$
$$+q_5a_{15}a_{25} + q_6a_{16}a_{26} = 4{,}7 \cdot 1 \cdot 1 + 6{,}2 \cdot 1 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot (-1) \cdot 0 +$$
$$+5{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 6{,}3 \cdot 0 \cdot (-1) + 8{,}6 \cdot 0 \cdot (-1) =$$
$$= \ 4{,}7 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ = \ 4{,}7;$$

при кореляті k_2:

$$[qa_2a_2] = q_1a_{21}a_{21} + q_2a_{22}a_{22} + q_3a_{23}a_{23} + q_4a_{24}a_{24} +$$
$$+q_5a_{25}a_{25} + q_6a_{26}a_{26} = 4{,}7 \cdot 1 \cdot 1 + 6{,}2 \cdot 0 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot 0 \cdot 0 +$$
$$+5{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 6{,}3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 8{,}6 \cdot (-1) \cdot (-1) =$$
$$= \ 4{,}7 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 6{,}3 \ + \ 8{,}6 \ = \ 19{,}6;$$

та при кореляті k_3:

$$[qa_2a_3] = q_1a_{21}a_{31} + q_2a_{22}a_{32} + q_3a_{23}a_{33} + q_4a_{24}a_{34} +$$
$$+q_5a_{25}a_{35} + q_6a_{26}a_{36} = 4{,}7 \cdot 1 \cdot 0 + 6{,}2 \cdot 0 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot 0 \cdot 1 +$$
$$+5{,}3 \cdot 0 \cdot 1 + 6{,}3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 8{,}6 \cdot (-1) \cdot 0 =$$
$$= \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 6{,}3 \ + \ 0 \ = \ 6{,}3.$$

У третьому рівнянні коефіцієнт при кореляті k_1 дорівнює:

$$[qa_1a_3] = q_1a_{11}a_{31} + q_2a_{12}a_{32} + q_3a_{13}a_{33} + q_4a_{14}a_{34} +$$
$$+q_5a_{15}a_{35} + q_6a_{16}a_{36} = 4{,}7 \cdot 1 \cdot 0 + 6{,}2 \cdot 1 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot -1 \cdot 1 +$$
$$+5{,}3 \cdot 0 \cdot 1 + 6{,}3 \cdot 0 \cdot (-1) + 8{,}6 \cdot 0 \cdot 0 =$$
$$= \ 0 \ + \ 0 - \ 9{,}1 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ = -9{,}1;$$

при кореляті k_2:

$$[qa_2a_3] = q_1a_{21}a_{31} + q_2a_{22}a_{32} + q_3a_{23}a_{33} + q_4a_{24}a_{34} +$$
$$+q_5a_{25}a_{35} + q_6a_{26}a_{36} = 4{,}7 \cdot 1 \cdot 0 + 6{,}2 \cdot 0 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot 0 \cdot 1 +$$
$$+5{,}3 \cdot 0 \cdot 1 + 6{,}3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 8{,}6 \cdot (-1) \cdot 0 =$$
$$= \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 0 \ + \ 6{,}3 \ + \ 0 \ = \ 6{,}3;$$

при кореляті k_3:

$$[qa_3a_3] = q_1a_{31}a_{31} + q_2a_{32}a_{32} + q_3a_{33}a_{33} + q_4a_{34}a_{34} +$$

$$+q_5 a_{35} a_{35} + q_6 a_{36} a_{36} = 4{,}7 \cdot 0 \cdot 0 + 6{,}2 \cdot 0 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot 1 \cdot 1 +$$
$$+5{,}3 \cdot 1 \cdot 1 + 6{,}3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 8{,}6 \cdot 0 \cdot 0 =$$
$$= 0 + 0 + 9{,}1 + 5{,}3 + 6{,}3 + 0 = 20{,}7.$$

Для зручності запишемо результати розрахунків у таблицю 12.2.

Таблиця 12.2 – Розрахунок параметрів системи нормальних рівнянь

q	Номер виміру	a_1	a_2	a_3	qa_1a_1	qa_1a_2	qa_1a_3	qa_1a_2	qa_2a_2	qa_2a_3	qa_1a_3	qa_2a_3	qa_3a_3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4,7	1	1	1	0	4,7	4,7	0	4,7	4,7	0	0	0	0
6,2	2	1			6,2	0	0	0	0	0	0	0	0
9,1	3	–1		1	9,1	0	–9,1	0	0	0	–9,1	0	9,1
5,3	4			1	0	0	0	0	0	0	0	0	5,3
6,3	5		–1	–1	0	0	0	0	6,3	6,3	0	6,3	6,3
8,6	6		–1		0	0	0	0	8,6	0	0	0	0
	[ ]	1	–1	1	20	4,7	–9,1	4,7	19,6	6,3	–9,1	6,3	20,7

Нормальні рівняння корелат мають вигляд:

$$+20{,}0k_1 + 4{,}7k_2 - 9{,}1k_3 - 40 = 0;$$
$$+4{,}7k_1 + 19{,}6k_2 + 6{,}3k_3 + 54 = 0;$$
$$-9{,}1k_1 + 6{,}3k_2 + 20{,}7k_3 + 27 = 0.$$

6. Розв’яжемо систему нормальних рівнянь корелат.

Розв’язання системи нормальних рівнянь виконаємо за допомогою формули Excel (рис. 12.2).

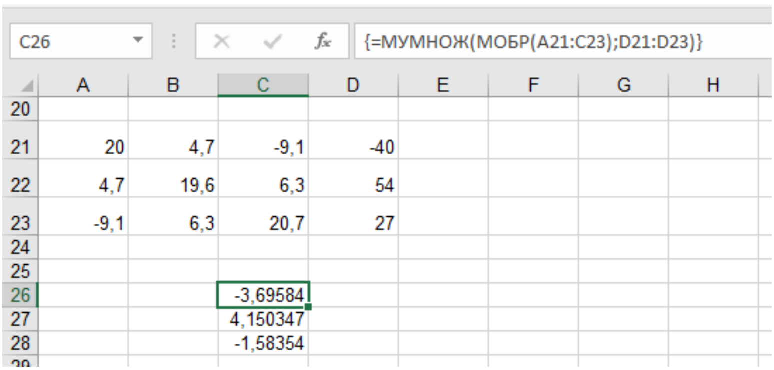


Рисунок 12.2 – Результат розв’язання системи нормальних рівнянь корелат

Отже, в результаті розв'язання нормальних рівнянь отримали такі значення корелат $k_1 = –3{,}695$; $k_2 = +4{,}149$; $k_3 = –1{,}582$.

7. Обчислимо поправки до результатів вимірів.

Обчислення поправок виконаємо відповідно до формули (12.13):

$$v_i = q_i\,(a_{1i}k_1 + a_{2i}k_2 + a_{3i}k_3).$$

Отримаємо значення v_1:

$$v_1 = q_1a_{11}k_1 + q_1a_{21}k_2 + q_1a_{31}k_3 =$$
$$= 4{,}7 \cdot 1 \cdot (-3{,}6958) + 4{,}7 \cdot 1 \cdot 4{,}15 + 4{,}7 \cdot 0 \cdot (-1{,}5835) =$$
$$= 4{,}7 \cdot 1 \cdot (-3{,}6958) + 4{,}7 \cdot 1 \cdot 4{,}15 + 0 = 2{,}136.$$

Аналогічно обчислимо решті значення v_i у таблиці 12.3, скориставшись абсолютними посиланнями Excel на значення k_j.

Таблиця 12.3 – Розрахунок поправок v_i

q	Номер виміру	a_1	a_2	a_3	k_1	k_2	k_3	v_i
4,7	1	1	1	0	–3,695	4,150	–1,583	2,136
6,2	2	1						–22,914
9,1	3	–1		1				19,222
5,3	4			1				–8,393
6,3	5		–1	–1				–16,171
8,6	6		–1					–35,693

Отже, поправки отримали значення: $v_1 = +2{,}13$ мм; $v_2 = –22{,}91$ мм; $v_3 = +19{,}23$ мм; $v_4 = –8{,}39$ мм; $v_5 = –16{,}17$ мм; $v_6 = –35{,}68$ мм.

Отримані поправки мають задовольняти умовним рівнянням поправок:

$$v_1 + v_2 - v_3 - 40 = 0;$$

+2,13 – 22,91 – 19,23 = – 40,01 мм ($w_1 = +40$ мм);

$$v_1 - v_5 - v_6 + 54 = 0;$$

+2,13 + 16,17 + 35,68 = +53,98 мм ($w_2 = –54$ мм);

$$v_3 + v_4 - v_5 + 27 = 0;$$

+19,23 – 8,39 +16,17 = +27,01 мм ($w_3 = –27$ мм).

8. Обчислимо зрівнювані значення виміряних величин за формулою:

$$h_i' = h_i + v_i,$$

отримаємо

$$h_1' = h_1 + v_1 = 4{,}881 + 0{,}00213 = 4{,}883;$$
$$h_2' = h_2 + v_2 =- 4{,}132 - 0{,}0229 = -4{,}155;$$
$$h_3' = h_3 + v_3 =- 6{,}427 + 0{,}01923 = 6{,}408;$$
$$h_4' = h_4 + v_4 = 2{,}588 - 0{,}00839 = 2{,}580;$$

$$h_5' = h_5 + v_5 = 0{,}883 - 0{,}01617 = 0{,}867;$$
$$h_6' = h_6 + v_6 = 1{,}611 - 0{,}03568 = 1{,}575,$$
або, скориставшись Excel, отримаємо таблицю 12.4.

Таблиця 12.4 – Розрахунок зрівнюваних значень вимірюваних величин h_i'

v_i, мм	h_i, м	h_i', м
2,13	4,881	4,883
–22,91	–4,132	–4,155
19,22	–6,427	–6,408
–8,39	2,588	2,580
–16,17	0,883	0,867
–35,69	1,611	1,575

Зрівнювані значення виміряних величин h_i' мають задовольняти вихідним умовним рівнянням:

$$h_1 + h_2 - h_3 - (H_B - H_A) = 0;$$
$$h_1 - h_5 - h_6 - (H_C - H_A) = 0;$$
$$h_3 + h_4 - h_5 - (H_C - H_B) = 0;$$
$$+4{,}883 - 4{,}155 + 6{,}408 - 134{,}517 + 127{,}381 = 0;$$
$$+4{,}883 - 0{,}867 - 1{,}575 - 129{,}822 + 127{,}381 = 0;$$
$$-6{,}408 + 2{,}580 - 0{,}867 - 129{,}822 + 134{,}517 = 0.$$

9. Визначимо зрівнювані значення висот точок I, II, III, використовуючи зрівнювані значення виміряних величин:

$$H_{\mathrm{I}} = H_{\mathrm{A}} + h_1 = 127{,}381 + 4{,}883 = 132{,}264 \text{ м};$$
$$H_{\mathrm{II}} = H_{\mathrm{B}} - h_3 = 134{,}517 - 6{,}408 = 128{,}109 \text{ м};$$
$$H_{\mathrm{III}} = H_{\mathrm{C}} + h_5 = 129{,}822 + 0{,}867 = 130{,}689 \text{ м}.$$

10. Обчислимо середньоквадратичну похибку одиниці ваги.

Обчислення СКП одиниці ваги виконаємо за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}},$$

де значення $[pv^2]$ отримаємо з використанням зворотних ваг:

$$[pv^2] = \left[\frac{v^2}{q}\right] = 329{,}196.$$

Тоді $\mu = \sqrt{\frac{329}{3}} = 10{,}5$ мм ≈ 10 мм.

Визначимо СКП одиниці ваги:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2r}} = \frac{10{,}5}{\sqrt{2*3}} = 4{,}2 \text{ мм}.$$

Оскільки зворотні ваги розраховані за формулою $q_i = L_i$, то μ у цьому випадку характеризує точність визначення перевищення за ходом довжиною 1 км.

12.3 Апостеріорне оцінювання точності зрівняних результатів вимірів

Метод найменших квадратів дозволяє не тільки обчислити значення найкращих наближень до шуканих невідомих, а також надає можливості провести оцінювання точності як результатів безпосередніх вимірів, так і шуканих величин та їхніх функцій.

Під час апостеріорного оцінювання точності розв'язують такі завдання:

– визначення найкращої оцінки дисперсії одиничної ваги μ^2;

– визначення зворотних ваг зрівняних значень невідомих та їхніх СКП;

– визначення зворотних ваг функцій зрівняних значень невідомих та їхніх СКП.

Зауважимо, що **після зрівнювання за методом найменших квадратів точність завжди підвищується, що доведено теоретично**. Також можна оцінити і ступінь підвищення точності.

Оцінювання точності полягає у оцінюванні середніх квадратичних похибок вимірів і функцій виміряних величин після зрівнювання. У найбільш загальному випадку середню квадратичну похибку будь-якої i-ї величини визначають за формулою:

$$M_i = \mu\sqrt{\frac{1}{P_i}}, \tag{12.19}$$

де μ – похибка одиниці ваги;

P – вага величини, яку оцінюють.

Отже, задача складається з двох етапів – визначення похибки одиниці ваги та визначення ваги величини, що оцінюється.

Визначимо похибку одиниці ваги. Для цього у нашому розпорядженні є кілька способів. По-перше можна скористатись формулою з теорії похибок:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\theta^2]}{n}}, \tag{12.20}$$

де θ_i – похибки вимірів, за які беруть нев'язки W_i.

Потрібні для обчислення ваг нев'язки визначають з умовних рівнянь, які виражають залежності між виміряними величинами, за формулою:

$$\frac{1}{P} = \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 \frac{1}{p_i}\right], \tag{12.21}$$

де φ – ліві частини умовних рівнянь.

У цьому випадку формула для обчислення похибки одиниці ваги така:

$$\mu = \sqrt{\frac{[PW^2]}{N}}, \tag{12.22}$$

де N – число всіх нев'язок умовних рівнянь, не тільки незалежних, тому може статись, що $N > n$.

По-друге, похибку одинці ваги μ можна визначити за допомогою поправок у результати вимірів v_i. Розмір цих поправок саме й визначає точність вимірів.

Найкращою оцінкою дисперсії одиничної ваги є величина, що обчислена за формулою:

$$\mu^2 = \frac{[pv^2]}{n-k}, \tag{12.23}$$

де $n - k = r$ – число надлишково виміряних величин;

v_i – поправки, обчислені у результаті зрівнювання;

p_i – ваги виміряних величин, що були прийнятими до зрівнювання.

Відповідно середню квадратичну похибку одиничної ваги розраховують за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}. \tag{12.24}$$

Для оцінювання надійності отриманої величини μ застосовують формулу:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-k)}}. \tag{12.25}$$

Для обчислення значення $[pv^2]$ під час зрівнювання за параметричним методом існує низка способів, найпростіший з яких – визначення $[pv^2]$ безпосередньо у схемі розв'язання системи нормальних рівнянь.

Тепер звернемось до задачі визначення ваг зрівняних величин. На відміну від величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, що отримані в результаті вимірів та є незалежними, зрівнювані значення $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ неможна вважати незалежними, оскільки під час їх визначення були застосовані рівняння зв'язку. Тому при оцінюванні точності результатів зрівнювання необхідно враховувати їхню кореляцію. Отже це вимагає визначення характеристик зв'язку зрівняних величин.

Отримані як результати зрівнювання за методом найменших квадратів шукані величини x'_i є випадковим вектором-стовпцем:

$$X = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T.$$

Як відомо з підрозділу 4.4, числовими характеристиками вектора-стовпця є вектор математичних сподівань:

$$M(X) = [M(x'_1), M(x'_2), \dots, M(x'_n)]^T$$

та коваріаційна матриця:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}.$$

Коваріаційна матриця K є симетричною, а отже квадратною матрицею, в якої всі елементи, що розташовані симетрично щодо головної діагоналі, попарно дорівнюють один одному ($K_{ij} = K_{ji}$). На головній діагоналі матриці K стоять квадратичні елементи, які є дисперсіями складників випадкового вектора:

$$K_{ii} = D(X_i)\,, \qquad (\mathrm{i} = 1, 2, \dots, n).$$

Неквадратичні елементи матриці K, які розташовані поза головною діагоналлю, є кореляційними моментами складників випадкового вектора, що мають відповідні індекси, а отже характеризують наявність лінійного зв'язку між цими складниками, наприклад, кореляційний момент K_{34} є коваріацією зрівняних величин x_3' та x_4'.

У матричній формі систему нормальних рівнянь для параметричного метода зрівнювання можна записати в такий спосіб:

$$N \cdot \tau = -L, \tag{12.26}$$

де N – квадратна матриця коефіцієнтів при τ;

τ – матриця-стовпець невідомих;

L – матриця-стовпець вільних членів.

Звідки рішення системи нормальних рівнянь має вигляд:

$$\tau = -N^{-1} \cdot L.$$

Коефіцієнти нормальних рівнянь у параметричному методі мають таку структуру:

$$N_{sj} = [pa_s a_j]; \qquad x_j = \tau_j \quad \text{та} \qquad L_i = [pa_j l],$$

отже для матриці N системи нормальних рівнянь справедливою є рівність

$$N = A^T pA, \tag{12.27}$$

де A^{T} – транспонована матриця коефіцієнтів A;

p – діагональна матриця ваг.

Як випливає з (12.27), матриця N – квадратна та симетрична щодо головної квадратичної діагоналі, тому її неквадратичні елементи із симетричними індексами дорівнюють один одного, тобто $N_{sj} = N_{js}$.

Під час зрівнювання за параметричним методом число рівнянь $m = k$, тобто є числом необхідних величин t_{j}.

Зворотну матрицю N^{-1} застосовують для визначення ваг зрівняних невідомих, що потрібні для оцінювання їхньої точності, як у параметричному, так і у корелатному методах зрівнювання. Тому у загальному випадку її прийнято позначати символом Q (як зворотні ваги), тобто $Q = N^{-1}$, тоді шукані невідомі змінні визначаються рівністю:

$$\tau = -\, Q \cdot L,$$

або у розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_k \end{pmatrix}.$$

Діагональні елементи зворотної матриці N^{-1}, тобто матриці Q, також є квадратичними, а решті – не квадратичними. Неквадратичні елементи матриці Q так само мають властивість симетрії щодо головної діагоналі $Q_{sj} = Q_{js}$.

Елементи зворотної матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь *Q* у параметричному методі зрівнювання є ваговими коефіцієнтами. До того ж діагональні елементи матриці Q є зворотними вагами невідомих τ_j. Зворотна вага j-го невідомого дорівнює квадратичному ваговому коефіцієнту, який розташований на діагоналі матритці Q, з відповідними індексами, тобто:

$$\frac{1}{P_j} = Q_{jj}. \tag{12.28}$$

Звернемось до таких міркувань. За визначенням вага результату виміру є співвідношенням $p_j = \frac{\mu^2}{m_j^2}$, або $p_j m_j^2 = \mu^2$, звідки $m_j^2 = \frac{\mu^2}{p_j}$. Отже, дисперсія дорівнює добутку дисперсії одиниці ваги μ^2 та зворотної ваги $\frac{1}{P_j}$, що відповідає фомулі (12.19). Тому помножимо на величину дисперсії одиничної ваги μ^2 вагову матрицю Q та отримаємо коваріаційну матрицю вектора зрівняних значень τ:

$$K_\tau = \mu^2 \cdot Q.$$

Коваріаційна матриця вектора зрівняних значень τ є зворотною матрицею щодо матриці нормальних рівнянь, помноженою на величину дисперсії одиничної ваги.

Обчислення елементів коваріаційної матриці вектора зрівняних значень τ означає, що нам відомі дисперсії зрівняних значень τ. Це діагональні елементи K_τ, а також кореляційні моменти складників випадкового вектора $X = (x_1', x_2', \dots, x_n')^T$. Це елементи матриці K_τ, що стоять поза діагоналлю.

Отже, на першому кроці обчислення точності результатів зрівнювання ми обчислюємо дисперсію одиниці ваги μ за допомогою формул (12.20), (12.22), або (12.23). Далі із зворотної матриці N коефіцієнтів при τ визначаємо ваги зрівняних величин τ, а потім, помноживши їх на μ, отримуємо їхні дисперсії. Зауважимо, що на цьому кроці отримані оцінки точності зрівняних величин, якими є поправки до параметрів τ_j.

Для оцінювання точності значень решти шуканих величин, отриманих шляхом зрівнювання, кожну з них треба записати як функцію результатів вимірів:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{12.29}$$

після чого для оцінювання точності функцій застосовують формулу теорії похибок вимірів (9.10):

$$\frac{1}{P_y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_i},$$

де p_i – ваги вимірів.

Головним утрудненням оцінювання точності при спільному зрівнюванні кількох величин є отримання формул (12.29), тобто подання оцінюваної величини через результати вимірів.

Приклад 12.5. Маємо систему нівелірних ходів, що наведена на рисунку 12.3.

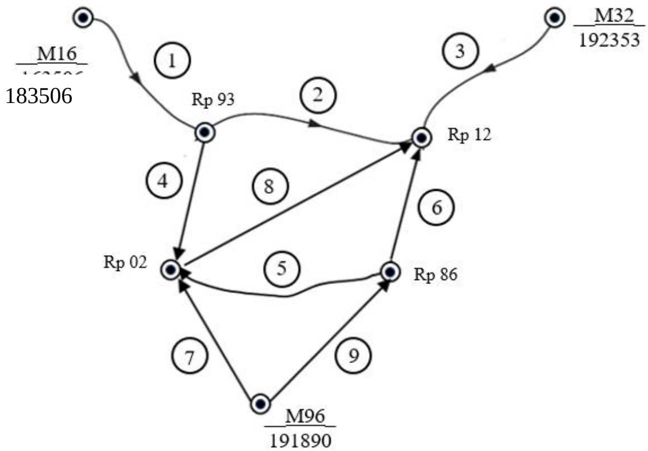


Рисунок 12.3 - Система нівелірних ходів

Висоти марок *M*16, *M*32 та *M*96 є вихідними, висоти ґрунтових реперів *Rp* 86, *Rp* 02, *Rp* 93 і *Rp* 12 потрібно визначити. На рисунку 12.3 показано вихідні дані марок та напрями й номера ланок, у таблиці 12.5 наведені довжини ходів у кілометрах, ваги виміряних величин та суми перевищень у ланках ходів.

Таблиця 12.5 – Вихідні дані

Номер ланки	Довжина ходу S, км	Вага p=15/S	Перевищення h, мм
1	12,6	1,2	6125
2	16,4	0,9	8320
3	14,1	1,1	5580
4	10,0	1,5	1368

Продовження таблиці 12.5

Номер ланки	Довжина ходу S, км	Вага p=15/S	Перевищення h, мм
5	16,3	0,9	-4694
6	20,4	0,7	11652
7	12,0	1,3	-905
8	13,2	1,1	6944
9	15,4	1,0	5585

Потрібно шляхом зрівнювання отримати висоти ґрунтових реперів, а також оцінити точність висот реперів, різниць висот та 1 км нівелювання.

Розв'язання. Необхідними невідомими, тобто параметрами, є висоти чотирьох реперів. Надамо їм відповідні позначення:

$$H_{86} = t_1;\ H_{02} = t_2;\ H_{93} = t_3;\ H_{12} = t_4.$$

Обчислення будемо виконувати у міліметрах. Виміряними величинами є суми перевищень x_i' у дев'яти ланках, виразимо їх через параметри:

$x_1' = t_3 - 183506;$ $\quad$ $x_6' = t_4 - t_1;$

$x_2' = t_4 - t_3;$ $\quad$ $x_7' = t_2 - 191890;$

$x_3' = t_4 - 192353;$ $\quad$ $x_8' = t_4 - t_2;$

$x_4' = t_2 - t_3;$ $\quad$ $x_9' = t_1 - 191890.$

$x_5' = t_2 - t_1;$

Обчислимо наближені значення параметрів t_j, тобто шуканих висот реперів шляхом розподілення нев'язок у ходах від марки 96 до марок 16 і 32:

t_1^0 =191890-5585 = 186297; $\quad$ t_3^0 = 191890-905-1368 =189627;

t_2^0 =191890-905 =190990; $\quad$ t_4^0 = 192353+5580 = 197941.

Для обчислення вільних членів рівнянь скористаємось формулою (11.17)

$$f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i = x_i^0 - x_i = l_i.$$

$$l_1 = x_0^1 - x_1 = 189627 - 183506 - 6125 = -4;$$
$$l_2 = x_2^0 - x_2 = 197941 - 189627 - 8320 = -6;$$
$$l_3 = x_3^0 - x_3 = 197941 - 192353 - 5580 = 8;$$
$$l_4 = x_4^0 - x_4 = 190990 - 189627 - 1368 = -5;$$
$$l_5 = x_5^0 - x_5 = 190990 - 186297 - 4694 = -1;$$
$$l_6 = x_6^0 - x_6 = 197941 - 186297 - 11652 = -8;$$
$$l_7 = x_7^1 - x_7 = 190990 - 191890 + 905 = 5;$$
$$l_8 = x_8^0 - x_8 = 197941 - 190990 - 6944 = 7;$$
$$l_9 = x_9^0 - x_9 = 186297 - 191890 + 5585 = -8.$$

Далі потрібно визначити коефіцієнти a_{ij} за формулами (11.16):

$$\left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 = a_{i1}; \dots; \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 = a_{ik}.$$

Узявши часткові похідні від виразів для x_i' за параметрами t_j, отримаємо:

$a_{11} = 0$;	$a_{12} = 0$;	$a_{13} = 1$;	$a_{14} = 0$;
$a_{21} = 0$;	$a_{22} = 0$;	$a_{23} = -1$;	$a_{24} = 1$;
$a_{31} = 0$;	$a_{32} = 0$;	$a_{33} = 0$;	$a_{34} = 1$;
$a_{41} = 0$;	$a_{42} = 1$;	$a_{43} = -1$;	$a_{44} = 0$;
$a_{51} = -1$;	$a_{52} = 1$;	$a_{53} = 0$;	$a_{54} = 0$;
$a_{61} = -1$;	$a_{62} = 0$;	$a_{63} = 0$;	$a_{64} = 1$;
$a_{71} = 0$;	$a_{72} = 1$;	$a_{73} = 0$;	$a_{74} = 0$;
$a_{81} = 0$;	$a_{82} = -1$;	$a_{83} = 0$;	$a_{84} = 1$;
$a_{91} = 1$;	$a_{92} = 0$;	$a_{93} = 0$;	$a_{94} = 0$.

Далі складаємо допоміжну таблицю 12.6 для обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь.

Таблиця 12.6 – Обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Номер виміру	Вага	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	l_i	S_i	v_i
1	1,2			1		–4	–3	–6,15
2	0,9			–1	1	–6	–6	–5,26
3	1,1				1	8	9	6,59
4	1,5		1	–1		–5	–5	–1,68
5	0,9	–1	1			–1	–1	–0,22
6	0,7	–1			1	–8	–8	–9,8
7	1,3		1			5	6	6,18
8	1,1		–1		1	7	7	4,42
9	1,0	1				–8	–7	–7,61
S		–1	2	–1	4	–12	–8	–13,53
	pa_1	2,63	–0,92	0	–0,74	–0,99		
	pa_2		4,81	–1,5	–1,14	–10,12		
	pa_3			3,61	–0,91	8,23		
	pa_4				3,85	5,10		
	pl					354,81	363,70	

У нижніх рядках таблиці 12.6 розраховані коефіцієнти системи нормальних рівнянь, яка має вигляд:

$$\left.\begin{aligned} 2{,}63\tau_1 - 0{,}92\tau_2 + 0\tau_3 - 0{,}74\tau_4 - 0{,}99 &= 0 \\ -0{,}92\tau_1 + 4{,}81\tau_2 - 1{,}5\tau_3 - 1{,}14\tau_4 - 10{,}12 &= 0 \\ 0\tau_1 - 1{,}5\tau_2 + 3{,}61\tau_3 - 0{,}91\tau_4 + 8{,}23 &= 0 \\ -0{,}74\tau_1 - 1{,}14\tau_2 - 0{,}91\tau_3 + 3{,}85\tau_4 + 5{,}10 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Розв'язавши систему нормальних рівнянь, отримаємо поправки τ_j до параметрів t_j

$$\tau_1 = 0{,}39 \text{ мм}, \tau_2 = 1{,}18 \text{ мм}, \tau_3 = -2{,}15 \text{ мм}, \tau_4 = -1{,}41 \text{ мм}.$$

Тепер визначимо висоти реперів t_j, додавши до їх наближених значень обчислені поправки:

$$t_1 = t_1^0 + \tau_1 = 186297 + 0{,}39 = 186297{,}39 \text{ мм};$$
$$t_2 = t_2^0 + \tau_2 = 190990 + 1{,}18 = 190991{,}2 \text{ мм};$$
$$t_3 = t_3^0 + \tau_3 = 189627 - 2{,}15 = 189624{,}9 \text{ мм};$$
$$t_4 = t_4^0 + \tau_4 = 197941 - 1{,}41 = 197939{,}6 .$$

Результат перевірки правильності розрахунків шляхом підстановки обчислених τ_j до системи рівнянь показує таке:

$$\left.\begin{array}{c} 2{,}63 \cdot 0{,}39 - 0{,}92 \cdot 1{,}18 + 0 - 0{,}74 \cdot (-1{,}41) - 0{,}99 = 0 \\ -0{,}92 \cdot 0{,}39 + 4{,}81 \cdot 1{,}18 - 1{,}5 \cdot (-2{,}15) - 1{,}14 \cdot (-1{,}41) - 10{,}12 = 0 \\ 0 - 1{,}5 \cdot 1{,}18 + 3{,}61 \cdot (-2{,}15) - 0{,}91 \cdot (-1{,}41) + 8{,}23 = 0 \\ -0{,}74 \cdot 0{,}39 - 1{,}14 \cdot 1{,}18 - 0{,}91 \cdot (-2{,}15) + 3{,}85 \cdot (-1{,}41) + 5{,}10 = 0 \end{array}\right\}.$$

Отже, шукані висоти ґрунтових реперів становлять:

$$H_{86} = t_1 = 186{,}297 \text{ м};$$
$$H_{02} = t_2 = 190{,}991 \text{ м};$$
$$H_{93} = t_3 = 189{,}625 \text{ м};$$
$$H_{12} = t_4 = 197{,}940 \text{ м}.$$

Скористаємось системою (11.18) для поправок v_i як залежностями від поправок параметрів τ_j:

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \cdots + a_{ik}\tau_k + l_i,$$

обчислимо поправки до виміряних значень v_i у таблиці 12.6 та визначимо суму квадратів відхилень

$$\sum_{i=1}^{n} pv^2 = 317{,}62 \text{ мм}^2,$$

а також зрівняні значення виміряних перевищень h_i:

$$h_1 = 6125 – 6{,}15 = 6118{,}85 \text{ мм};$$
$$h_2 = 8320 – 5{,}26 = 8314{,}74 \text{ мм};$$
$$h_3 = 5580 + 6{,}59 = 5586{,}59 \text{ мм};$$
$$h_4 = 1368 – 1{,}68 = 1366{,}32 \text{ мм};$$
$$h_5 = –4694 – 0{,}22 = 4693{,}78 \text{ мм};$$
$$h_6 = 11652 – 9{,}8 = 11642{,}20 \text{ мм};$$
$$h_7 = –905 + 6{,}18 = –898{,}82 \text{ мм};$$
$$h_8 = 6944 + 4{,}42 = 6948{,}42 \text{ мм};$$
$$h_9 = 5585 – 7{,}61 = –5592{,}61 \text{ мм}.$$

Звернемося до оцінювання точності. Перед усім визначимо похибку одиниці ваги за формулою (12.24)

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}},$$

де $n - k = r$ – число надлишково виміряних величин;

v – поправки, що отримані зі зрівнювання;

p – ваги виміряних величин, прийняті до зрівнювання.

$$\mu = \sqrt{\frac{317{,}62}{9-4}} = 7{,}97.$$

Для обчислення середніх квадратичних похибок невідомих τ_j за формулою (12.19)

$$m_{\tau_j} = \mu\sqrt{Q_{jj}}$$

потрібно визначити зворотні ваги величин τ_j, які є діагональними елементами зворотної матриці коефіцієнтів системи нормальних рівнянь N^{-1}. Матриця N має вигляд:

$$N = \begin{pmatrix} 2{,}63 & -0{,}92 & 0 & -0{,}74 \\ -0{,}92 & 4{,}81 & -1{,}5 & -1{,}14 \\ 0 & -1{,}5 & 3{,}61 & -0{,}91 \\ -0{,}74 & -1{,}14 & -0{,}91 & 3{,}85 \end{pmatrix}.$$

Для отримання зворотної матриці N^{-1} скористаємось функцією MS Excel МОБР(), отримаємо:

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}49 & 0{,}17 & 0{,}11 & 0{,}17 \\ 0{,}17 & 0{,}34 & 0{,}19 & 0{,}18 \\ 0{,}11 & 0{,}19 & 0{,}40 & 0{,}17 \\ 0{,}17 & 0{,}18 & 0{,}17 & 0{,}39 \end{pmatrix},$$

де діагональні елементи – зворотні ваги зрівняних величин.

Отже СКП невідомих τ_j такі:

$m_{\tau_1} = 7{,}97\sqrt{0{,}49} = 5{,}56$ мм; $m_{\tau_2} = 7{,}97\sqrt{0{,}34} = 4{,}65$ мм;

$m_{\tau_3} = 7{,}97\sqrt{0{,}40} = 5{,}02$ мм; $m_{\tau_4} = 7{,}97\sqrt{0{,}39} = 4{,}95$ мм.

СКП нівелювання 1 кілометра, оскільки ця вага відома і $p_{1км} = 15$, маємо:

$$m_{1км} = \mu\sqrt{\frac{1}{p_{1\ км}}} = 7{,}97\frac{1}{\sqrt{15}} = 2{,}06 \text{ мм}.$$

Тепер визначимо точність різниць висот реперів, тобто обчислимо їхні СКП. Під час визначення ваг функцій зрівняних величин, якими є різниці висот реперів, потрібно врахувати кореляцію. Запишемо ці різниці як функції результатів зрівнювання:

$$F_1 = t_3 - t_4 \quad \text{і} \quad F_2 = t_4 - t_2.$$

Застосуємо до них формулу теорії похибок для залежних величин, оскільки t_j – залежні:

$$\frac{1}{P_{F_i}} = \sum_{j=1}^{k} f_{jj}^2 \cdot Q_{jj} + 2\sum_{i\neq j} f_{ij}f_{ij} \cdot Q_{ij},$$

де перший доданок відповідає теоремі похибок для незалежних результатів, а другий враховує залежності, що виникли у наслідку спільного зрівнювання.

У функції $F_1 = t_3 - t_4$ $f_1 = -1$; $f_2 = 0$; $f_3 = 1$; $f_4 = 0$. Тоді

$$\frac{1}{P_{F_1}} = f_1^2 \cdot Q_{11} + f_3^2 \cdot Q_{33} + 2 f_1 f_3 \cdot Q_{13} =$$

$$= 1 \cdot 0{,}49 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 0{,}11 = 0{,}658.$$

У функції $F_2 = t_4 - t_2$ $f_1 = 0$; $f_2 = -1$; $f_3 = 0$; $f_4 = 1$. Тоді

$$\frac{1}{P_{F_2}} = f_2^2 \cdot Q_{22} + f_4^2 \cdot Q_{44} + 2 f_2 f_4 \cdot Q_{24} =$$

$$= 1 \cdot 0{,}34 + 1 \cdot 0{,}39 + 2(-1) \cdot 1 \cdot 0{,}18 = 0{,}371.$$

Отже, СКП різниць висот реперів становлять:

$$m_{3-1} = \mu \sqrt{\frac{1}{\mathrm{p}_{F_1}}} = 7{,}97\sqrt{0{,}658} = 9{,}8 \text{ мм};$$

$$m_{4-2} = \mu \sqrt{\frac{1}{\mathrm{p}_{F_2}}} = 7{,}97\sqrt{0{,}371} = 13{,}1 \text{ мм}.$$

Розглянемо деякі відмінності та загальні властивості двох методів зрівнювання – параметричного та корелатного. У самому загальному випадку систему нормальних рівнянь можна записати у матричній формі так:

$$N \cdot Z = -L,$$

де N – квадратна матриця коефіцієнтів;

Z – матриця-стовпець невідомих;

L – матриця-стовпець вільних членів.

Або у розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & \dots & N_{1m} \\ N_{21} & N_{22} & \dots & N_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{m1} & N_{m2} & \dots & N_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_m \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_m \end{pmatrix}.$$

Під час зрівнювання параметричним способом число нормальних рівнянь дорівнює $m = k$, тобто числу необхідних величин (параметрів). У корелатному способі число нормальних рівнянь дорівнює $m = r$, тобто числу надлишкових величин.

Коефіцієнти нормальних рівнянь в обох способах мають одну й ту саму структуру:

$N_{sj} = [pa_s a_j]$ ·– у параметричному способі;

$N_{sj} = [qa_s a_j]$ ·– у корелатному способі,

причому, $Z_j = \tau_j$ · та $L_i = [pa_j l]$ · – у параметричному способі;

$Z_j = k_j$ · та $L_i = [W_j]$ · – у корелатному способі.

Звернемо увагу до рівнянь поправок v_i. У параметричному способі – це параметричні рівняння поправок (матриця A), а у корелатному способі – це корелатні рівняння поправок (також матриця A). До того ж ці матриці прямокутні із розміром $m \times n$, де $n > m$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Шляхом перетворення матриці A ми далі отримуємо систему нормальних рівнянь, отже ця матриця для кожного метода є вихідною. За допомогою матриці A формуються коефіцієнти нормальних рівнянь, що мають таку структуру:

$N = A^T pA$ – для параметричного способа;

$N = A^T qA$ – для корелатного способа.

У транспонованій матриці коефіцієнтів умовних рівнянь поправок у рядках будуть розташовані коефіцієнти корелатних рівнянь поправок. Отже, на цьому грунтується зв'язок параметричного та корелатного методів зрівнювання.

Під час застосування для зрівнювання шуканих невідомих корелатного метода як результат розв'язання системи нормальних рівнянь отримують корелати. Далі обчислені корелати застосовують для визначення поправок до результатів вимірювань та обчислюють зрівняні результати вимірів:

$$x_i' = x_i + v_i.$$

Контроль зрівнювання здійснюють шляхом підстановки зрівняних результатів до умовних рівнянь.

Для апостеріорного оцінювання точності вирішують такі завдання:

– обчислюють СКП одиниці ваги μ;

– обчислюють ваги функцій зрівняних величин;

– обчислюють СКП функцій зрівняних величин.

Отже, ваги корелат не визначають.

СКП одиниці ваги μ обчислюють за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}}.$$

Для оцінювання надійності отриманої величини μ застосовують формулу:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2r}}.$$

Але, оскільки у корелатному методі застосовують зворотні ваги, то для обчислення величини $[pv^2]$ зазвичай користуються формулою:

$$[pv^2] = \left[\frac{v^2}{q}\right].$$

Для контроля точності обчислення застосовують співвідношення:

$$[pv^2] = -[\,kW].$$

Нехай маємо сукупність функцій зрівняних значень виміряних величин:

$$F_1 = f_{11}\bar{x}_1 + f_{12}\bar{x}_2 + \cdots + f_{1n}\bar{x}_n + f_{10}$$
$$F_2 = f_{21}\bar{x}_1 + f_{22}\bar{x}_2 + \cdots + f_{2n}\bar{x}_n + f_{20}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F_s = f_{s1}\bar{x}_1 + f_{s2}\bar{x}_2 + \cdots + f_{sn}\bar{x}_n + f_{s0}$$

і потрібно визначити зворотні ваги заданої низки функцій.

Розв'язання цього завдання дещо ускладнене, оскільки ваги зрівняних значень виміряних величин невідомі, та, окрім того, ці величини є залежними як отримані із спільного зрівнювання. Тому до функцій F у цьому випадку неможливо застосувати теорему теорії похибок.

Для розв'язання задачі щодо обчислення зворотних ваг функцій F_i їх треба виразити через результати безпосередніх вимірів, які є незалежними та ваги їх відомі. Перед усім зауважимо, що вектор зрівняних значень $\bar{X}_i$ був отриманий через результати безпосередніх вимірів x_i:

$$x_i' = x_i + v_i.$$

Приклад 12.6. Візьмемо той самий приклад, що був наведений для параметричного методу (рис. 12.3). На рисунку 12.3 показано вихідні дані марок та напрями й номера ланок, у таблиці 12.7 наведені довжини ходів у кілометрах, зворотні ваги виміряних величин та суми перевищень у ланках ходів.

Таблиця 12.7 – Вихідні дані

Номер ланки	Довжина ходу S, км	Зворотна вага q = S/15	Перевищення h, мм
1	12,6	0,8	6125
2	16,4	1,1	8320
3	14,1	0,9	5580
4	10,0	0,7	1368
5	16,3	1,1	–4694
6	20,4	1,4	11652
7	12,0	0,8	–905
8	13,2	0,9	6944
9	15,4	1,0	5585

Потрібно шляхом зрівнювання за корелатним методом отримати висоти ґрунтових реперів, а також оцінити середні квадратичні похибки зрівняного значення різниці висот $H_{86} - H_{93}$ та зрівняної висоти репера 12.

Розв'язання. Маємо систему результатів вимірів величин x_i , $i = \overline{1, n}$, та їхні зворотні ваги $q_1, q_2, \dots, q_n$, так само, як і в параметричному способі.

Під час зрівнювання висоти та перевищення будемо виражати у міліметрах. Складаємо умовні рівняння (12.4). Необхідно, щоб умовні рівняння були незалежними, тобто жодне з них не було наслідком іншого. Число умовних рівнянь має дорівнювати $r = n - k$. Тобто r = 9 – 4 = 5.

Скористаємось схемою системи нівелірних ходів та складемо п'ять умовних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= x'_5 - x'_7 + x'_9 = 0 \\ \varphi_2 &= x'_5 + x'_8 - x'_6 = 0 \\ \varphi_3 &= x'_2 - x'_8 - x'_4 = 0 \\ \varphi_4 &= 191890 + x'_9 + x'_6 - x'_3 - 192353 = 0 \\ \varphi_5 &= 183506 + x'_1 + x'_2 - x'_3 - 192353 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

За формулою (12.5) обчислимо вільні члени рівнянь, тобто нев'язки W_i:

W_1 = 4694 + 905 – 5585 = +14 мм;

W_2 = 4694 + 6944 – 11652 = –14 мм;

W_3 = 8320 – 6944 – 1368 = +8 мм;

W_4 = 191890 – 5585 + 11652 – 5580 – 192353 = +24 мм;

W_5 = 183506 + 6125 + 8320 – 5580 – 192353 = +18 мм.

Коефіцієнти умовних рівнянь поправок є очевидними з системи умовних рівнянь, запишемо їх у таблицю 12.8. Одночасно, як і під час складання параметричних рівнянь поправок, необхідно привести коефіцієнти й поправки в умовних рівняннях до величин одного порядку, вводячи відповідні розмірності для функцій φ. Для обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь корелат скористаємось схемою розрахунку коефіцієнтів, що наведена у таблиці 12.8.

Система нормальних рівнянь має вигляд:

$$\left.\begin{aligned} 2{,}91\cdot k_1 + 1{,}09\cdot k_2 + 0\cdot k_3 + 1{,}03\cdot k_4 + 0\cdot k_5 - 14 = 0 \\ 1{,}09\cdot k_1 + 3{,}3\cdot k_2 - 0{,}9\cdot k_3 - 1{,}4\cdot k_4 + 0\cdot k_5 + 14 = 0 \\ 0\cdot k_1 - 0{,}9\cdot k_2 + 2{,}6\cdot k_3 + 0\cdot k_4 + 1{,}1\cdot k_5 - 8 = 0 \\ 1{,}03\cdot k_1 - 1{,}4\cdot k_2 + 0\cdot k_3 + 3{,}33\cdot k_4 + 0{,}94\cdot k_5 - 24 = 0 \\ 0\cdot k_1 + 0\cdot k_2 + 1{,}1\cdot k_3 + 0{,}94\cdot k_4 + 2{,}9\cdot k_5 - 18 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Розв'язуємо нормальні рівняння, в результаті чого отримуємо корелати k:

k_1 = –7,72; k_2 = 7,52; k_3 = 2,51; k_4 = 0,31; k_5 = –7,32.

У таблиці 12.9 обчислюємо поправки v за формулами (12.13):

$$v_i = q_i\,(a_{1i}k_1 + a_{2i}k_2 + a_{3i}k_3).$$

Таблиця 12.8 – Розрахунок параметрів системи нормальних рівнянь

q	Номер виміру	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	qa_1a_1	qa_1a_2	qa_1a_3	qa_1a_4	qa_1a_5	qa_2a_2	qa_2a_3	qa_2a_4	qa_2a_5	qa_3a_3	qa_3a_4	qa_3a_5	qa_4a_4	qa_4a_5	qa_5a_5
0,8	1					1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8
1,1	2			1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,1	0	1,1	0	0	1,1
0,9	3				–1	–1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9	0,9	0,9
0,7	4			–1			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	0	0	0	0	0
1,1	5	1	1				1,09	1,1	0	0	0	1,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,4	6		–1		1		0	0	0	0	0	1,4	0	–1,4	0	0	0	0	1,4	0	0
0,8	7	–1					0,80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,9	8		1	–1			0	0	0	0	0	0,9	–0,9	0	0	0,9	0	0	0	0	0
1,0	9	1			1		1,03	0	0	1,03	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0	0	0
	W	14	–14	8	24	18															
[qa1							2,91	1,1	0	1,03	0										
[qa2												3,3	–0,9	–1,4	0						
[qa3																2,6	0	1,1			
[qa4																			3,3	0,9	
[qa5																					2,9

Таблиця 12.9 – Обчислення поправок v_i

q	Номер виміру	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	v_i
0,8	1					1	–7,72	7,522	2,509	0,313	–7,32	–6,15
1,1	2			1		1						–5,26
0,9	3				–1	–1						6,59
0,7	4			–1								–1,67
1,1	5	1	1									–0,22
1,4	6		–1		1							–9,81
0,8	7	–1										6,18
0,9	8		1	–1								4,41
1,0	9	1			1							–7,61

Отримані поправки мають задовольняти умовним рівнянням поправок, зробимо перевірку:

$$v_5 - v_7 + v_9 + 14 = 0;$$
–0,22 – 6,18 – 7,61 + 14 = –0,01 мм;
$$v_5 + v_8 - v_6 - 14 = 0;$$
–0,22 + 4,41 + 9,81 – 14 = 0 мм;
$$v_2 - v_8 - v_4 + 8 = 0;$$
–5,26 – 4,41 + 1,67 + 8 = 0 мм;
$$v_9 + v_6 - v_3 + 24 = 0;$$
–7,61 – 9,81 – 6,59 + 24 = –0,01 мм;
$$v_1 + v_2 - v_3 + 18 = 0$$
–6,15 – 5,26 – 6,59 + 18 = 0 мм.

Обчислимо зрівнювані значення виміряних величин $x_i' = x_i + v_i$ у таблиці 12.10.

Таблиця 12.10 – Розрахунок зрівняних значень виміряних величин x_i'

Номер	v_i, мм	x_i, м	x_i', м
1	–6,15	6125	6118,85
2	–5,26	8320	8314,74
3	6,59	5580	5586,59
4	–1,67	1368	1366,33
5	–0,22	–4694	–4694,22
6	–9,81	11652	11642,19
7	6,18	–905	–898,82
8	4,41	6944	6948,41
9	–7,61	5585	5577,39

Відзначимо, що отримані значення зрівняних величин x_i' такі самі, що й отримані за параметричним методом, але перевіримо, чи задовольняють вони вихідним умовним рівнянням корелатного метода:

$$\left.\begin{array}{r} \varphi_1 = x_5' - x_7' + x_9' = 0 \\ \varphi_2 = x_5' + x_8' - x_6' = 0 \\ \varphi_3 = x_2' - x_8' - x_4' = 0 \\ \varphi_4 = 191890 + x_9' + x_6' - x_3' - 192353 = 0 \\ \varphi_5 = 183506 + x_1' + x_2' - x_3' - 192353 = 0 \end{array}\right\},$$

зробимо підстановку:

4694,22 + 898,82 – 5577,39 = 15,65 мм;
4694,22 + 6948,41 – 11642,19 = 0,43 мм;
8314,74 – 6948,41 – 1366,33 = 0,00 мм;
191890 – 5577,39 + 11642,19 – 5586,59 – 192353 = 15,21 мм;
183506 + 6118,85 + 8314,74 – 5586,59 – 192353 = 0,00 мм.

Отже, можна вважати, що всі умовні рівняння задовольняються.

Звернемось до оцінювання точності. Визначимо дисперсію одиниці ваги μ, вона є такою самою, що й у параметричному методі, оскільки поправки такі самі, а отже сума $[pv^2]$ = 317,62, маємо:

$$\mu = \sqrt{\frac{317{,}62}{9-4}} = 7{,}97.$$

СКП нівелювання 1 кілометра, оскільки ця вага відома і $p_{1\text{км}}$ = 15, маємо:

$$m_{1\text{км}} = \mu\sqrt{\frac{1}{p_{1\text{ км}}}} = 7{,}97\frac{1}{\sqrt{15}} = 2{,}06 \text{ мм}.$$

Тепер оцінимо точність зрівняного значення різниці висот, для чого запишемо функції:

$$F_1 = H_{86} - H_{93} = x_2' - x_6' \qquad \text{і} \qquad F_2 = H_{12} = H_{22} + x_3'.$$

Запитання для самоперевірки

1. Поясніть, що називають умовним рівнянням. Наведіть декілька прикладів умовних рівнянь.

2. Як обчислюють нев’язки (вільні члени) умовних рівнянь?

3. Опишіть перехід від умовних рівнянь до умовних рівнянь поправок.

4. Є система умовних рівнянь поправок. Необхідно обчислити поправки до результатів вимірів. Чому приходиться ставити додаткові умови для визначення цих поправок? Як формулюють додаткову умову та що вона дає?

5. Який математичний прийом застосовують при вирішенні задачі знаходження мінімуму суми квадратів поправок у корелатному методі?

6. Поясніть, що таке корелати?

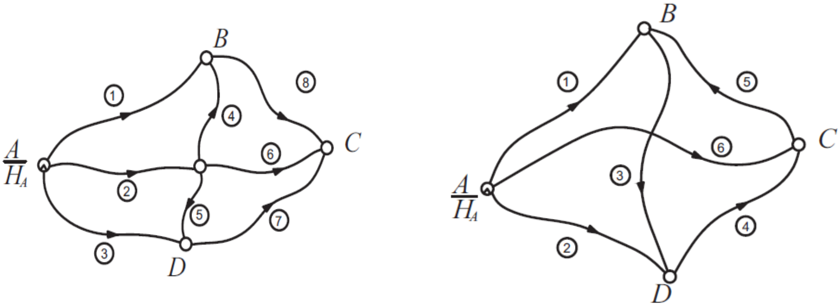
7. Опишіть структуру нормальних рівнянь корелат.

8. Як отримати поправки до результатів вимірів, якщо відомі корелати?

9. Як проводять зрівнювання геодезичних побудов у випадку нелінійних умовних рівнянь?

Задачі для самостійного розв’язання

12.1. Скласти незалежні умовні рівняння для систем нівелірних ходів, що вказані на рисунках 12.4, а та 12.4, б. Стрілками показано напрями ходів. Репер *A* вихідний, а всі решті репера визначаються.

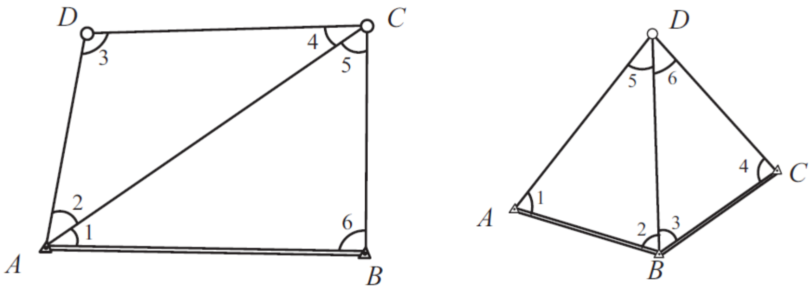


а б

Рисунок 12.4 − Системи нівелірних ходів

12.2. Скласти незалежні умовні рівняння для системи, зображеної на рисунку 12.5, а, де пункти *A* і *B* вихідні, а дугами вказано виміряні кути.

12.3. Скласти незалежні умовні рівняння для системи, зображеної на рисунку 12.5, б, де пункт *D* потрібно визначити, а решті − вихідні.



а б

Рисунок 12.5 − Система вимірів

12.4. Подані умовні рівняння:

$$L_1 - 2L_2 + L_3 = 0,$$
$$2L_1 + L_2 - L_3 = 0$$

та нев’язки $W_1 = -4$ і $W_2 = 5$, що їм відповідають. Вважаючи, що виміри рівноточні, скласти умовні рівняння поправок та з контролем за сумами нормальні рівняння.

12.5. Подані умовні рівняння поправок:

$$V_1 + V_2 + V_3 + 3'' = 0;$$

$$V_1 + V_2 + V_5 + V_6 - 2'' = 0.$$

Знайти поправки та СКП безпосередніх вимірів, вважаючи, що виміри виконані рівноточно.

12.6. Для умов попередньої задачі знайти вагу та СКП функції зрівняних значень вимірюваних величин $F = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3$.

12.7. Подані умовні рівняння:

$$L_1 - 2L_2 + L_3 = 0,$$

$$2L_1 + L_2 - L_3 = 0.$$

Обчислити вагу функції $F = 2\bar{X}_1 - \bar{X}_2 + 3\bar{X}_3$, якщо виміри рівноточні.

12.8. Подані умовні рівняння поправок:

$$V_1 + V_2 + V_3 + 2'' = 0,$$

$$V_1 - V_2 + 1'' = 0$$

та ваги результатів вимірів p_1 = 1,0; p_2 = 0,5; p_3 = 1,5. Знайти поправки та СКП одиниці ваги.

12.9. Для умов попередньої задачі обчислити СКП функції $F = \bar{X}_1 + \bar{X}_2$.

12.10. Подані нормальні рівняння корелат:

$$5k_1 + 2k_2 + 3 = 0;$$

$$2k_1 + 4k_2 - 2 = 0.$$

Знайти СКП одиниці ваги.

4 ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

4.1 Практичне завдання 1

ВАРІАНТ 1

Задача 1. Вироби виготовляє два підприємства. У магазин надходить 60 % виробів з першого підприємства й 40 % – з другого. Перше підприємство виготовляє 90 % виробів без браку й 10 % бракованих, а друге – 80 % виробів без браку й 20 % – бракованих. Знайти ймовірність того, що навмання куплений виріб виявиться а) без браку; б) бракованим.

Задача 2. Закон розподілу випадкової величини X заданий таблицею (перший рядок – можливі значення X, другий – відповідні їм значення імовірностей). Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

x_i	10	12	20	25	30
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

Задача 3. Випадкова величина X задана інтегральною функцією (функцією розподілу $F(x)$). Знайти: а) диференціальну функцію розподілу (щільність імовірностей); б) математичне сподівання і дисперсію X; в) побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \frac{1}{9}(x-2)^2, & 2 < x \le 5. \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Задача 4. Задано математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність того, що X прийме значення, що належить інтервалу (α, β), та імовірність того, що абсолютна величина відхилення $x - m$ буде менше ε:

m	σ	α	β	ε
15	2	9	19	3

Задача 5. Випадкова величина X нормально розподілена з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, вибірковою середньою $\bar{x}_В$, обсягом вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання m з довірчою імовірністю β:

$\bar{x}_В$	σ	n	β
0	0,5	35	0,99

Задача 6. За заданим статистичним розподілом знайти:

а) оцінку арифметичного середнього $\bar{x}_B$; б) оцінку дисперсії D_B;

в) оцінку середнього квадратичного відхилення σ_B:

x_i	10	12	20	25	30
n_i	5	18	11	1	9

Задача 7. Знайти рівняння лінійної регресії y на x, $Y = \rho_{yx}x + b$. Оцінити коефіцієнт кореляції та тісноту лінійного зв'язку. Дані спостережень наведені в таблиці:

Номер досліду	X	Y
1	4	10
2	9	20
3	14	30
4	19	40
5	24	50

ВАРІАНТ 2

Задача 1. На склад надходить продукція трьох фабрик. Продукція першої фабрики становить 25 %, другої – 40 %, третьої – 35 %. Відомо також, що імовірність браку для першої фабрики – 4 %, для другої – 1 % і для третьої – 3 %. Знайти імовірність того, що обраний навмання виріб: а) стандартний; б) бракований та вироблений на першій фабриці.

Задача 2. Закон розподілу випадкової величини X заданий таблицею (перший рядок – можливі значення X, другий – відповідні їм значення імовірностей). Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

x_i	8	12	18	24	30
p_i	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1

Задача 3. Випадкова величина X задана інтегральною функцією (функцією розподілу $F(x)$). Знайти: а) диференціальну функцію розподілу (щільність імовірностей); б) математичне сподівання та дисперсію X; в) побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{4}(x-1)^2, & 1 < x \leq 3. \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Задача 4. Задано математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність того, що X прийме значення, що належить інтервалу (α, β), та імовірність того, що абсолютна величина відхилення $x - m$ буде меншою за ε:

m	σ	α	β	ε
14	4	10	20	4

Задача 5. Випадкова величина X нормально розподілена з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, вибірковою середньою $\bar{x}_\text{В}$, обсягом вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання m з довірчою імовірністю β:

$\bar{x}_\text{В}$	σ	n	β
10	9,2	30	0,95

Задача 6. За заданим статистичним розподілом знайти: а) оцінку арифметичного середнього $\bar{x}_\text{В}$; б) оцінку дисперсії D_B; в) оцінку середнього квадратичного відхилення $\sigma_\text{В}$:

x_i	8	12	18	24	30
n_i	2	20	7	1	5

Задача 7. Знайти рівняння лінійної регресії y на x, $Y = \rho_{yx}\, x + b$. Оцінити коефіцієнт кореляції та тісноту лінійного зв'язку. Дані спостережень наведені в таблиці:

Номер досліду	X	Y
1	10	30
2	15	40
3	20	50
4	25	60
5	30	70

ВАРІАНТ 3

Задача 1. Булки, які випікає хлібозавод, мають такий розподіл за вагою: менше 90 г – 5 %, більше 110 г – 10 %, інші 85 % булок мають нормальну масу (90–110 г). З досить великої партії беруть навмання дві булки. Знайти імовірність того, що а) обидві булки мають нормальну масу; б) одна булка має масу менше норми, а інша – більше.

Задача 2. Закон розподілу випадкової величини X заданий таблицею (перший рядок – можливі значення X, другий – відповідні їм значення імовірностей). Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

x_i	30	40	50	60	70
p_i	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1

Задача 3. Випадкова величина X задана інтегральною функцією (функцією розподілу $F(x)$). Знайти: а) диференціальну функцію розподілу (щільність імовірностей); б) математичне сподівання та дисперсію X; в) побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 5\\ \frac{1}{6}(x-1)^2, & 5<x\le 6.\\ 1, & x>6\end{cases}$$

Задача 4. Задано математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність того, що X прийме значення, що належить інтервалу $(\alpha,\ \beta)$, та імовірність того, що абсолютна величина відхилення $x-m$ буде меншою за ε:

m	σ	α	β	ε
13	4	10	21	2

Задача 5. Випадкова величина X нормально розподілена з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, вибірковою середньою $\bar{x}_В$, обсягом вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання m з довірчою імовірністю β:

$\bar{x}_В$	σ	n	β
20	8,2	80	0,9

Задача 6. За заданим статистичним розподілом знайти: а) оцінку арифметичного середнього $\bar{x}_В$; б) оцінку дисперсії D_B; в) оцінку середнього квадратичного відхилення $\sigma_В$:

x_i	30	40	50	60	70
n_i	1	11	3	1	17

Задача 7. Знайти рівняння лінійної регресії y на x, $Y=\rho_{yx}x+b$. Оцінити коефіцієнт кореляції та тісноту лінійного зв’язку. Дані спостережень наведені в таблиці:

Номер досліду	X	Y
1	15	5
2	20	10
3	25	15
4	30	20
5	35	25

ВАРІАНТ 4

Задача 1. Працюють три пристрої. Імовірність того, що протягом одного дня перший пристрій відмовить – 0,3, другий – 0,6, третій – 0,1. Знайти імовірність того, що протягом одного дня відмовлять: а) всі пристрої; б) будь-який один; в) принаймні, один пристрій.

Задача 2. Закон розподілу випадкової величини *X* заданий таблицею (перший рядок – можливі значення *X*, другий – відповідні їм значення імовірностей). Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*:

x_i	21	25	32	40	50
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Задача 3. Випадкова величина *X* задана інтегральною функцією (функцією розподілу $F(x)$). Знайти: а) диференціальну функцію розподілу (щільність імовірностей); б) математичне сподівання та дисперсію *X*; в) побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3 \\ \frac{1}{4}(x-3)^2, & 3 < x \le 5. \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Задача 4. Задано математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини *X*. Знайти імовірність того, що *X* прийме значення, що належить інтервалу (α, β), та імовірність того, що абсолютна величина відхилення $x - m$ буде меншою за ε:

m	σ	α	β	ε
9	3	9	18	5

Задача 5. Випадкова величина *X* нормально розподілена з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, вибірковою середньою $\bar{x}_В$, обсягом

вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання m з довірчою імовірністю β:

$\bar{x}_В$	σ	n	β
75	1,2	160	0,99

Задача 6. За заданим статистичним розподілом вибірки знайти: а) оцінку арифметичного середнього $\bar{x}_В$; б) оцінку дисперсії $D_В$; в) оцінку середнього квадратичного відхилення $\sigma_В$:

x_i	21	25	32	40	50
n_i	8	8	13	2	18

Задача 7. Знайти рівняння лінійної регресії y на x, $Y = \rho_{yx}x + b$. Оцінити коефіцієнт кореляції та тісноту лінійного зв'язку. Дані спостережень наведені в таблиці:

Номер досліду	X	Y
1	5	20
2	10	30
3	15	40
4	20	50
5	25	60

ВАРІАНТ 5

Задача 1. На столі в певному порядку лежать 32 екзаменаційних білета. Знайти імовірність того, що номер взятого навмання білета буде числом, кратним 5 або 2.

Задача 2. Закон розподілу випадкової величини X заданий таблицею (перший рядок – можливі значення X, другий – відповідні їм значення імовірностей). Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

x_i	10	12	16	18	20
p_i	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

Задача 3. Випадкова величина X задана інтегральною функцією (функцією розподілу $F(x)$). Знайти: а) диференціальну функцію розподілу (щільність імовірностей); б) математичне сподівання та дисперсію X; в) побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{1}{9}(x-1)^2, & 1<x\le 4.\\ 1, & x>4\end{cases}$$

Задача 4. Задано математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність того, що X прийме значення, що належить інтервалу (α, β), та імовірність того, що абсолютна величина відхилення $x-m$ буде меншою за ε:

m	σ	α	β	ε
8	4	8	12	8

Задача 5. Випадкова величина X нормально розподілена з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, вибірковою середньою $\bar{x}_{\text{В}}$, обсягом вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання m з довірчою імовірністю β:

$\bar{x}_{\text{В}}$	σ	n	β
8	6,5	20	0,95

Задача 6. За заданим статистичним розподілом вибірки знайти: а) оцінку арифметичного середнього $\bar{x}_{\text{В}}$; б) оцінку дисперсії D_B; в) оцінку середнього квадратичного відхилення $\sigma_{\text{В}}$:

x_i	10	12	16	18	20
n_i	18	3	11	14	19

Задача 7. Знайти рівняння лінійної регресії y на x, $Y=\rho_{yx}x+b$. Оцінити коефіцієнт кореляції та тісноту лінійного зв’язку. Дані спостережень наведені в таблиці:

Номер досліду	X	Y
1	10	6
2	15	12
3	20	18
4	25	24
5	30	30

ВАРІАНТ 6

Задача 1. Чотири студенти складають іспит. Імовірність того, що перший студент складе іспит, дорівнює 0,95, другий – 0,9, третій – 0,85, а четвертий 0,8. Знайти імовірність того, що: а) хоча б два студенти складуть іспит; б) усі чотири студенти складуть іспит.

Задача 2. Закон розподілу випадкової величини X заданий таблицею (перший рядок – можливі значення X, другий – відповідні їм значення імовірностей). Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

x_i	11	15	20	25	30
p_i	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1

Задача 3. Випадкова величина X задана інтегральною функцією (функцією розподілу $F(x)$). Знайти: а) диференціальну функцію розподілу (щільність імовірностей); б) математичне сподівання та дисперсію X; в) побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \\ \frac{1}{9}(x-1)^2, & 3 \leq x \leq 6. \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

Задача 4. Задано математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність того, що X прийме значення, що належить інтервалу (α, β), та імовірність того, що абсолютна величина відхилення $x - m$ буде меншою за ε:

m	σ	α	β	ε
12	5	12	22	10

Задача 5. Випадкова величина X нормально розподілена з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, вибірковою середньою $\bar{x}_B$, обсягом вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання m з довірчою імовірністю β:

$\bar{x}_B$	σ	n	β
8	0,9	100	0,9

Задача 6. За заданим статистичним розподілом знайти: а) оцінку арифметичного середнього $\bar{x}_В$; б) оцінку дисперсії D_B; в) оцінку середнього квадратичного відхилення $\sigma_В$:

x_i	11	15	20	25	30
n_i	19	5	18	8	20

Задача 7. Знайти рівняння лінійної регресії y на x, $Y = \rho_{yx}x + b$. Оцінити коефіцієнт кореляції та тісноту лінійного зв'язку. Дані спостережень наведені в таблиці:

Номер досліду	X	Y
1	5	8
2	10	12
3	15	16
4	20	20
5	25	24

ВАРІАНТ 7

Задача 1. Достатня умова здачі колоквіуму – відповідь на одне з двох питань, що пропонує викладач студентові. Студент не знає відповідей на десять питань із сорока, які можуть бути запропоновані. Знайти імовірність здачі колоквіуму.

Задача 2. Закон розподілу випадкової величини X заданий таблицею (перший рядок – можливі значення X, другий – відповідні їм значення імовірностей). Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

x_i	12	16	21	26	30
p_i	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

Задача 3. Випадкова величина X задана інтегральною функцією (функцією розподілу $F(x)$). Знайти: а) диференціальну функцію розподілу (щільність імовірностей); б) математичне сподівання та дисперсію X; в) побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{25}x^2, & 0 < x \le 5. \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Задача 4. Задано математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність того, що X прийме значення, що належить інтервалу (α, β), та імовірність того, що абсолютна величина відхилення $x - m$ буде меншою за ε:

m	σ	α	β	ε
11	4	13	23	6

Задача 5. Випадкова величина X нормально розподілена з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, вибірковою середньою $\bar{x}_{\text{В}}$, обсягом вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання m з довірчою імовірністю β:

$\bar{x}_{\text{В}}$	σ	n	β
95	8,9	130	0,99

Задача 6. За заданим статистичним розподілом вибірки знайти: а) оцінку арифметичного середнього $\bar{x}_{\text{В}}$; б) оцінку дисперсії D_B; в) оцінку середнього квадратичного відхилення $\sigma_{\text{В}}$:

x_{i}	12	16	21	26	30
n_{i}	17	20	1	8	2

Задача 7. Знайти рівняння лінійної регресії y на x, $Y = \rho_{yx}x + b$. Оцінити коефіцієнт кореляції та тісноту лінійного зв’язку. Дані спостережень наведені в таблиці:

Номер досліду	X	Y
1	2	10
2	7	20
3	12	30
4	17	40
5	22	50

ВАРІАНТ 8

Задача 1. Є дві партії виробів по 12 і 10 штук, до того ж у кожній партії один виріб бракований. Виріб, взятий навмання з першої партії, перекладено в другу, після чого вибирають навмання виріб із другої партії. Визначити імовірність виймання бракованого виробу із другої партії.

Задача 2. Закон розподілу випадкової величини X заданий таблицею (перший рядок – можливі значення X, другий – відповідні їм значення імовірностей). Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

x_i	13	17	20	27	30
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Задача 3. Випадкова величина X задана інтегральною функцією (функцією розподілу $F(x)$). Знайти: а) диференціальну функцію розподілу (щільність імовірностей); б) математичне сподівання та дисперсію X; в) побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{1}{6}(x-2)^2, & 2 \leq x \leq 4. \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Задача 4. Задано математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність того, що X прийме значення, що належить інтервалу (α, β), та імовірність того, що абсолютна величина відхилення $x - m$ буде меншою за ε:

m	σ	α	β	ε
10	8	14	18	2

Задача 5. Випадкова величина X нормально розподілена з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, вибірковою середньою $\bar{x}_В$, обсягом вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання m із довірчою імовірністю β:

$\bar{x}_В$	σ	n	β
13	0,5	170	0,95

Задача 6. За заданим статистичним розподілом вибірки знайти: а) оцінку арифметичного середнього $\bar{x}_В$; б) оцінку дисперсії $D_В$; в) оцінку середнього квадратичного відхилення $\sigma_В$:

x_i	13	17	20	27	30
n_i	7	9	1	12	1

Задача 7. Знайти рівняння лінійної регресії y на x, $Y = \rho_{yx}x + b$. Оцінити коефіцієнт кореляції та тісноту лінійного зв'язку. Дані спостережень наведені в таблиці:

Номер досліду	X	Y
1	11	25
2	16	35
3	21	45
4	26	55
5	31	65

ВАРІАНТ 9

Задача 1. Для контролю продукції із трьох партій деталей взята для випробування одна деталь. Яка імовірність виявлення браку, якщо в одній партії 2/3 деталей браковані, а у двох інших – усі доброякісні?

Задача 2. Закон розподілу випадкової величини X заданий таблицею (перший рядок – можливі значення X, другий – відповідні їм значення імовірностей). Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

x_i	14	18	23	28	30
p_i	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1

Задача 3. Випадкова величина X задана інтегральною функцією (функцією розподілу $F(x)$). Знайти: а) диференціальну функцію розподілу (щільність імовірностей); б) математичне сподівання та дисперсію X; в) побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3 \\ \frac{1}{6}(x-2)^2, & 3 \le x \le 6. \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

Задача 4. Задано математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність того, що X прийме значення, що належить інтервалу (α, β), та імовірність того, що абсолютна величина відхилення $x - m$ буде меншою за ε:

m	σ	α	β	ε
7	2	6	10	1

Задача 5. Випадкова величина X нормально розподілена з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, вибірковою середньою $\bar{x}_В$, обсягом вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання m з довірчою імовірністю β:

$\bar{x}_В$	σ	n	β
18	4,5	40	0,9

Задача 6. За заданим статистичним розподілом вибірки знайти: а) оцінку арифметичного середнього $\bar{x}_В$; б) оцінку дисперсії D_B; в) оцінку середнього квадратичного відхилення $\sigma_В$:

$x_і$	14	18	23	28	30
$n_і$	15	18	6	13	13

Задача 7. Знайти рівняння лінійної регресії y на x, $Y = \rho_{yx}x + b$. Оцінити коефіцієнт кореляції та тісноту лінійного зв'язку. Дані спостережень наведені в таблиці:

Номер досліду	X	Y
1	4	8
2	9	18
3	14	28
4	19	38
5	24	48

ВАРІАНТ 10

Задача 1. У шухляді перебувають 15 тенісних м'ячів, із яких 9 нових. Для першої гри навмання беруть три м'ячі, які після гри повертають до шухляди. Для другої гри також навмання беруться три м'ячі. Знайти імовірність того, що всі м'ячі, взяті для другої гри, нові.

Задача 2. Закон розподілу випадкової величини X заданий таблицею (перший рядок – можливі значення X, другий – відповідні їм значення імовірностей). Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

$x_і$	15	19	24	29	30
$p_і$	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4

Задача 3. Випадкова величина X задана інтегральною функцією (функцією розподілу $F(x)$). Знайти: а) диференціальну функцію розподілу (щільність імовірностей); б) математичне сподівання та дисперсію X; в) побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 6 \\ (x-6)^2, & 6 \leq x \leq 7. \\ 1, & x > 7 \end{cases}$$

Задача 4. Задано математичне сподівання m і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність того, що X прийме значення, що належить інтервалу (α, β), та імовірність того, що абсолютна величина відхилення $x - m$ буде меншою за ε:

m	σ	α	β	ε
6	2	4	12	0,5

Задача 5. Випадкова величина X нормально розподілена з відомим середнім квадратичним відхиленням σ, вибірковою середньою $\bar{x}_В$, обсягом вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання m з довірчою імовірністю β:

$\bar{x}_В$	σ	n	β
19	3,6	96	0,9

Задача 6. За заданим статистичним розподілом вибірки знайти: а) оцінку арифметичного середнього $\bar{x}_В$; б) оцінку дисперсії D_B; в) оцінку середнього квадратичного відхилення $\sigma_В$:

x_i	15	19	24	29	30
n_i	13	17	6	4	9

Задача 7. Знайти рівняння лінійної регресії y на x, $Y = \rho_{yx}x + b$. Оцінити коефіцієнт кореляції та тісноту лінійного зв'язку. Дані спостережень наведені в таблиці:

Номер досліду	X	Y
1	5	11
2	10	21
3	15	31
4	20	41
5	25	51

4.2 Практичне завдання 2

Варіант 1

1. Обчислити середню квадратичну похибку площини круга, якщо його радіус R = 80 м виміряний із середньою квадратичною похибкою m_R = 0,08 м.

2. Земельна ділянка має форму трапеції. Дві основи та висота трапеції, що виміряні незалежно і рівноточно із середньою квадратичною похибкою 0,11 м, відповідно дорівнюють a = 91,6 м, b = 117,3 м, h = 41,7 м. Знайти площу ділянки та середню квадратичну похибку її визначення.

Варіант 2

1. Знайти прирощення координат ΔX, ΔY та їхні середні квадратичні похибки $m_{\Delta X}$ і $m_{\Delta Y}$, якщо довжина лінії d =78,1 м, m_d = 0,15 м, а її дирекційний кут становить α = 67°, m_α = 1,5'.

2. Визначити довжину дуги окружності K радіусом R = 120 м та її середню квадратичну похибку m_K, якщо кут повороту φ = 51°47' виміряний із середньою квадратичною похибкою m_φ = 2'.

Варіант 3

1. Перевищення з точки A на точку B визначене за методом тригонометричного нівелювання. Знайти перевищення h_{AB} та його середню квадратичну похибку m_h, якщо горизонтальне прокладання лінії AB d = 111,4 м і її середня квадратична похибка m_d = 0,1; кут нахилу лінії AB ν = 4°12', m_ν =1'; висота приладу дорівнює висоті точки візирування i = v = 1,45 м (приймаються як точні).

2. Радіус круга R = 75,2 виміряний із середньою квадратичною похибкою m_R = 0,15 м. Визначити площу круга та її середню квадратичну похибку.

Варіант 4

1. В трикутнику ABC виміряні сторони AB = 548,3 м і AC = 561,7 м із середньою квадратичною похибкою m_{AB} = m_{AC} = m_d = 0,3 м та кут між ними β = 61°30' із середньою квадратичною похибкою m_β = 2'. Визначити площу трикутника S та її середню квадратичну похибку m_S.

2. Обчислити координати точки B та їхні середні квадратичні похибки m_x, m_y, якщо відомо, що довжина лінії, що становить d_{AB} = 284,3, та її дирекційний кут α_{AB} = 223°11' визначені незалежно із середніми квадратичними похибками m_d = 0,5 м, m_α = 2' відповідно. (Координати точки A приймаються як точні).

Варіант 5

1. Земельна ділянка має форму трапеції, в якої незалежно й рівноточно виміряні основи a = 413,2 м, b = 536,1 м і висота h = 184,1 м із середньою квадратичною похибкою m = 0,2 м. Визначити площину трапеції S та її середню квадратичну похибку m_S.

2. Земельна ділянка має форму трикутника. Незалежно й рівноточно виміряні одна сторона (основа) a = 99,17 і висота h = 132,21 із середньою квадратичною похибкою m = 0,2. Визначити площину ділянки S та її середню квадратичну похибку m_S.

Варіант 6

1. При тахеометричному зніманні відстань від точки стояння до пікету виміряна нитковим далекоміром D = 86,1 м із середньою квадратичною похибкою m_d = 0,4 м, кут нахилу v = 4°43’ виміряний із середньою квадратичною похибкою m_v = 1’. Перевищення обчислюється за формулою: $h = \frac{1}{2} D \cdot sin2v$. Знайти перевищення h та його середню квадратичну похибку m_h.

2. У прямокутнику виміряні дві сторони a = 88,73 і b = 114,61 із середніми квадратичними похибками m_a = 0,15, m_b = 0,10. Знайти діагональ прямокутника d та її із середню квадратичну похибку m_d.

Варіант 7

1. Для визначення площини прямокутника виміряні дві сторони a = 113,26 і b = 412,41 із середніми квадратичними похибками m_a = 0,15, m_b = 0,20. Знайти площину прямокутника S та її середню квадратичну похибку m_S.

2. У трикутнику ABC виміряні сторона b = 72,26 із середньою квадратичною похибкою $m_в$ = 0,2м і кути A = 62°23’, B = 52°15’ із середньою квадратичною похибкою m_β = 1,5’. Обчислити довжину сторони a та її із середню квадратичну похибку m_a.

Варіант 8

1. У прямокутному трикутнику виміряні катет a = 23,08 м із середньою квадратичною похибкою m_a = 0,03 м і катет b = 63,24 м із середньою квадратичною похибкою m_b = 0,04. Знайти гіпотенузу c та її із середню квадратичну похибку m_c.

2. Знайти прирощення координат ΔX, ΔY та їхні середні квадратичні похибки $m_{\Delta X}$ і $m_{\Delta Y}$, якщо довжина лінії d = 208,4 м, m_d = 0,3 м, а її дирекційний кут α = 45°, m_α = 2,5’.

Варіант 9

1. У трикутнику *ABC* виміряна сторона b = 190,20 із середньою квадратичною похибкою $m_в$ = 0,16 м і кути A = 51°20’, B = 60°35’ із середньою квадратичною похибкою $m_β$ = 0,4’. Обчислити довжину сторони a та її середню квадратичну похибку m_a.

2. Для визначення площини прямокутника виміряно дві сторони a = 108,14 і b = 312,21 із середніми квадратичними похибками m_a = 0,2, m_b = 0,1. Знайти площину прямокутника *S* та її середню квадратичну похибку m_S.

Варіант 10

1. У прямокутнику виміряні дві сторони a = 164,71 і b = 241,69 із середніми квадратичними похибками m_a = 0,08, m_b = 0,11. Знайти діагональ прямокутника d та її із середню квадратичну похибку m_d.

2. При тахеометричному зніманні відстань від точки стояння до пікета виміряна нитковим далекоміром D = 54,2 м із середньою квадратичною похибкою m_d = 0,3 м, кут нахилу v = 6°09’ виміряний із середньою квадратичною похибкою m_v = 1’. Перевищення обчислюється за формулою: $h = \frac{1}{2} D \cdot sin2v$. Знайти перевищення h та його середню квадратичну похибку m_h.

4.3 Практичне завдання 3

Надайте відповіді на пропоновані запитання відповідно до варіанта.

Варіант 1

1. Поясніть, що називають умовним рівнянням.
2. Як обчислюють нев’язки (вільні члени) умовних рівнянь?
3. Розкрити відповідно до алгоритму Гаусса символи [pa_2a_3], [$pa_3S \cdot 1$].
4. Чи можна вважати систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 6 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 1 = 0 \\ -1x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8 = 0 \end{aligned}\right\}$$

системою нормальних рівнянь? Запишіть систему у матричному вигляді та обґрунтуйте відповідь.

5. Розв’язати таку систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 7 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 9 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 1 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Варіант 2

1. Наведіть приклад умовного рівняння нелінійного виду.

2. Опишіть перехід від умовних рівнянь до умовних рівнянь поправок.

3. Розкрити відповідно до алгоритму Гаусса символи $[pa_3a_3\cdot 2]$, $[plS\cdot 3]$.

4. Чи можна вважати систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 7 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 9 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

системою нормальних рівнянь? Запишіть систему у матричному вигляді та обґрунтуйте відповідь.

5. Розв’язати таку систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 1x_2 - 1x_3 - 3{,}5 = 0 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 - 4{,}5 = 0 \\ -1x_1 + 1x_2 + 3{,}5x_3 - 0{,}5 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Варіант 3

1. Поясніть, що таке нев’язка та як її обчислюють.

2. Який математичний прийом застосовують для вирішення задачі знаходження мінімуму суми квадратів поправок у корелатному методі?

3. Розкрити відповідно до алгоритму Гаусса символи $[pa_2a_3]$, $[pSS\cdot 4]$.

4. Чи можна вважати систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 5 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 7 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 8 = 0 \end{aligned}\right\}$$

системою нормальних рівнянь? Запишіть систему у матричному вигляді та обґрунтуйте відповідь.

5. Розв’язати таку систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 12x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 14 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 18 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 + 14x_3 - 2 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Варіант 4

1. Охарактеризуйте властивості нев’язок.

2. Опишіть структуру нормальних рівнянь корелат.

3. Розкрити відповідно до алгоритму Гаусса символи $[pa_3S\cdot 1]$, $[plS\cdot 3]$.

4. Чи можна вважати систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 5 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 8 = 0 \end{aligned}\right\}$$

системою нормальних рівнянь? Запишіть систему у матричному вигляді та обґрунтуйте відповідь.

5. Розв’язати таку систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 18x_1 + 6x_2 - 6x_3 - 21 = 0 \\ 6x_1 + 12x_2 + 9x_3 - 27 = 0 \\ -6x_1 + 6x_2 + 21x_3 - 3 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Варіант 5

1. У яких випадках виникає задача зрівнювання геодезичних побудов?

2. Поясніть, що називають умовним рівнянням? Наведіть декілька прикладів умовних рівнянь.

3. Розкрити відповідно до алгоритму Гаусса символи $[pa_2a_3]$, $[pa_3S\cdot 1]$.

4. Чи можна вважати систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 6 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 1 = 0 \\ -1x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 8 = 0 \end{aligned}\right\}$$

системою нормальних рівнянь? Запишіть систему у матричному вигляді та обґрунтуйте відповідь.

5. Розв’язати таку систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 10{,}5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4{,}5x_3 - 13{,}5 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 + 10{,}5x_3 - 1{,}5 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Варіант 6

1. У чому полягає ідея принципу найменших квадратів?

2. Який математичний прийом застосовують для вирішення задачі знаходження мінімуму суми квадратів поправок у корелатному методі?

3. Розкрити відповідно до алгоритму Гаусса символи $[pa_3a_3\cdot 2]$, $[plS\cdot 3]$.

4. Чи можна вважати систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 5 = 0 \\ 8x_1 + 2x_2 - 4x_4 + 7 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 8 = 0 \end{aligned}\right\}$$

системою нормальних рівнянь? Запишіть систему у матричному вигляді та обґрунтуйте відповідь.

5. Розв’язати таку систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 24x_1 + 8x_2 - 8x_3 - 28 = 0 \\ 8x_1 + 16x_2 + 12x_3 - 36 = 0 \\ -8x_1 + 8x_2 + 28x_3 - 4 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Варіант 7

1. Надайте визначення параметричним рівнянням зв’язку.

2. Опишіть структуру нормальних рівнянь корелат.

3. Розкрити відповідно до алгоритму Гаусса символи $[pa_3S\cdot 1]$, $[plS\cdot 3]$.

4. Чи можна вважати систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} 11x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 5 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 - 18x_3 + 7 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 8 = 0 \end{aligned}\right\}$$

системою нормальних рівнянь? Запишіть систему у матричному вигляді та обґрунтуйте відповідь.

5. Розв’язати таку систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 15x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 17{,}5 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7{,}5x_3 - 22{,}5 = 0 \\ -5x_1 + 5x_2 + 17{,}5x_3 - 2{,}5 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Варіант 8

1. Як визначають загальне число параметричних рівнянь зв’язку?

2. Як отримати поправки до результатів вимірів, якщо відомі корелати?

3. Розкрити відповідно до алгоритму Гаусса символи $[pa_2a_3]$, $[pSS\cdot 4]$.

4. Чи можна вважати систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 5 = 0 \\ -6x_1 + 2x_2 - 14x_3 + 7 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 8 = 0 \end{aligned}\right\}$$

системою нормальних рівнянь? Запишіть систему у матричному вигляді та обґрунтуйте відповідь.

5. Розв’язати таку систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 36x_1 + 12x_2 - 12x_3 - 42 = 0 \\ 12x_1 + 24x_2 + 18x_3 - 54 = 0 \\ -12x_1 + 12x_2 + 42x_3 - 6 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Варіант 9

1. Надайте визначення параметричним рівнянням поправок.

2. Який математичний прийом застосовують для розв’язання задачі знаходження мінімуму суми квадратів поправок у корелатному методі?

3. Розкрити відповідно до алгоритму Гаусса символи $[pa_2a_3]$, $[pa_3S\cdot 1]$.

4. Чи можна вважати систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} 12x_2 - 6x_2 - 2x_3 + 5 = 0 \\ -6x_1 + 12x_3 - 4x_4 + 7 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 13x_5 - 8 = 0 \end{aligned}\right\}$$

системою нормальних рівнянь? Запишіть систему у матричному вигляді та обґрунтуйте відповідь.

5. Розв'язати таку систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}21x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 24{,}5 = 0\\ 7x_1 + 14x_2 + 7{,}5x_3 - 31{,}5 = 0\\ -7x_1 + 7x_2 + 24{,}5x_3 - 3{,}5 = 0\end{aligned}\right\}.$$

Варіант 10

1. Як перетворюють параметричні рівняння поправок шляхом введення наближених значень невідомих?

2. Поясніть, що таке корелати?

3. Розкрити відповідно до алгоритму Гаусса символи [$pa_3a_3\cdot 2$], [$plS\cdot 3$].

4. Чи можна вважати систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned}7x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 5 = 0\\ -6x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 7 = 0\\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 8 = 0\end{aligned}\right\}$$

системою нормальних рівнянь? Запишіть систему у матричному вигляді та обґрунтуйте відповідь.

5. Розв'язати таку систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}6x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 7 = 0\\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 18 = 0\\ -2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 1 = 0\end{aligned}\right\}.$$

4.4 Індивідуальні завдання до розрахунково-графічної роботи

Зрівняти параметричним способом результати нівелювання за нерівноточними вимірами, що наведені у вихідних даних, якщо відомі висоти твердих марок $H_А$ і $H_В$. На схемі нівелірної мережі направлення ходів показані стрілками:

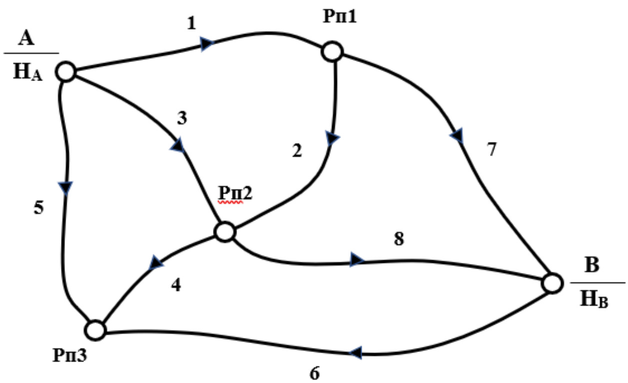


Схема нівелірних ходів

Вихідні дані

Варіант № 1		
Номер ходу	Перевищення *h*, м	Число станцій, *N*
1	–1,354	24
2	–1,796	26
3	–3,148	27
4	0,208	21
5	–2,941	25
6	1,517	24
7	–3,106	26
8	–1,306	22
$H_A = 65{,}715$; $H_B = 61{,}257$		

Варіант № 2		
Номер ходу	Перевищення *h*, м	Число станцій, *N*
1	0,196	16
2	0,263	14
3	0,458	15
4	0,208	12
5	0,667	14
6	–1,133	15
7	1,605	14
8	1,346	13
$H_A = 45{,}395$; $H_B = 47{,}198$		

Варіант № 3		
Номер ходу	Перевищення *h*, м	Число станцій, *N*
1	0,142	12
2	–0,896	14
3	–0,753	16
4	0,067	13
5	–0,687	11
6	1,692	15
7	–2,522	14
8	–1,622	11
$H_A = 109{,}245$; $H_B = 106{,}867$		

Варіант № 4		
Номер ходу	Перевищення *h*, м	Число станцій, *N*
1	0,142	19
2	0,132	16
3	0,276	17
4	0,037	12
5	0,312	13
6	–0,985	15
7	1,152	14
8	1,024	13
$H_A = 257{,}691$; $H_B = 258{,}987$		

Варіант № 5		
Номер ходу	Перевищення *h*, м	Число станцій, *N*
1	1,842	16
2	0,365	14
3	2,204	15
4	0,154	12
5	2,363	13
6	–3,786	15
7	4,306	14
8	3,937	13
$H_A = 71{,}365$; $H_B = 77{,}511$		

Варіант № 6		
Номер ходу	Перевищення *h*, м	Число станцій, *N*
1	1,381	17
2	0,496	14
3	1,875	19
4	0,101	12
5	1,979	18
6	–0,118	15
7	0,713	14
8	0,221	13
$H_A = 164{,}951$; $H_B = 167{,}047$		

Варіант № 7		
Номер ходу	Перевищення *h*, м	Число станцій, *N*
1	0,381	11
2	0,142	12
3	0,522	16
4	0,203	12
5	0,727	15
6	–1,278	15
7	1,622	18
8	1,484	13
$H_А$ = 39,751; $H_В$ = 41,756		

Варіант № 8		
Номер ходу	Перевищення *h*, м	Число станцій, *N*
1	0,412	10
2	0,065	10
3	0,476	15
4	0,046	12
5	0,525	15
6	–1,072	12
7	1,179	14
8	1,116	11
$H_А$ = 71,586; $H_В$ = 73,179		

Варіант № 9		
Номер ходу	Перевищення *h*, м	Число станцій, *N*
1	0,871	12
2	0,345	12
3	1,215	17
4	0,421	15
5	1,635	14
6	–0,131	15
7	0,897	14
8	0,556	14
$H_А$ = 48,354; $H_В$ = 50,124		

Варіант № 10		
Номер ходу	Перевищення *h*, м	Число станцій, *N*
1	0,914	16
2	0,975	14
3	1,887	16
4	1,166	12
5	3,055	15
6	0,739	15
7	1,401	14
8	0,429	13
$H_А$ = 217,557; $H_В$ = 219,874		

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Метешкін К. О. Математична обробка геодезичних вимірів : навч. посібник / К. О. Метешкін, Д. В. Шаульський ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2012. – 176 с.

2. Метешкін К. О. Практикум з математичної обробки геодезичних вимірів : навч. посібник / К. О. Метешкін, Д. В. Шаульський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ, 2014. – 100 с.

3. Математична обробка геодезичних вимірів : дистанційний курс [Електронний ресурс] / К. О. Метешкін, О. О. Воронков ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Режим доступу : https://cdo.kname.edu.ua/course/view.php?id=219.

4. Гмурман В. Э. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Э. Гмурман. – М. : Высш. школа, 1977. – 498 с.

5. Гмурман В. Э. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Э. Гмурман. – М. : Высш. школа, 1975. – 330 с.

6. Воронков О. О. Теорія імовірностей і математична статистика : навч. посіб. / О. О. Воронков, А. Є. Ачкасов, В. Т. Плакіда. – Харків : ХНАМГ, 2008. – 249 с.

7. Беликов А. Б. Математическая обработка результатов геодезических измерений : учебное пособие / А. Б. Беликов, В. В. Симонян. – М. : НИУ МГСУ, 2016. – 432 с.

8. Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений : учебник / В. Д. Большаков, П. А. Гайдаев. – 2-е изд. – М. : Недра, 1977. – 367 с.

9. Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений : практикум / В. Д. Большаков, Ю. И. Маркузе. – 2-е изд. – М. : Недра, 1977. – 345 с.

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

Абсолютне вимірювання – вимірювання, яке ґрунтується на прямих вимірах однієї або кількох основних величин або використанні значень фізичних констант.

Абсолютна похибка – дорівнює модулю різниці між оцінкою та межею інтервалу, тобто половині ширини надійного інтервалу.

Апостеріорі (лат. a posteriori, буквально – з наступного) – знання, засноване на досвіді, на практиці.

Апріорі (лат. a priori, букв. – «від попереднього») – знання, що отримане до проведення досліду та незалежно від нього (знання апріорі, апріорне знання), тобто знання, нібито заздалегідь відоме.

Вага (weight) – у найзагальнішому розумінні певне дійсне число $f(x)$, поставлене у відповідність до кожного елемента (об'єкта) x із множини X та обране в такий спосіб, щоб цю множину можна було впорядкувати, увівши умову: $x < y$, якщо $f(x) < f(y)$.

Вимірювання – сукупність операцій для визначення відношення однієї (вимірюваної) величини до іншої однорідної величини, прийнятої за одиницю, яка зберігається в технічному засобі (засобі вимірів). Значення, що отримані, називають числовим значенням вимірюваної величини, числове значення сумісне з позначенням використаної одиниці виміру називають значенням фізичної величини. Вимірювання фізичної величини дослідним шляхом проводять за допомогою різних засобів вимірів.

Випадкова похибка – похибка, що змінюється (за величиною та за знаком) від одного виміру до іншого.

Відносне вимірювання – вимірювання відношення величини до однойменної величини, що відіграє роль одиниці, або вимірювання зміни величини відносно однойменної величини, яку приймають за початкову.

Відносна похибка – дорівнює відношенню абсолютної похибки до оцінки дійсного значення. Переважно цю похибку виражають у відсотках. Величину, що зворотна відносній похибці, називають **точністю** вимірів.

Геодезія – система наук про визначення форми й розмірів Землі та про методи вимірювання на земній поверхні для відображення її на планах і картах. Геодезія пов'язана з астрономією, геофізикою, космонавтикою, картографією та ін., широко використовується під час проєктування та будівництва споруд, судноплавних каналів тощо.

Геодезія підрозділяється:

– на астрономогеодезію, що вивчає фігуру та гравітаційне поле Землі;

– теорію та методи побудови опорної геодезичної мережі;

– топографію;

– прикладну геодезію та ін.

Геодезичні вимірювання перевищень – вид лінійних геодезичних вимірів, у яких вимірюваною геодезичною величиною є різниці висот пунктів (точок).

Геодезичні вимірювання – вимірювання, що проводять у процесі топографо-геодезичних робіт.

Принципом геодезичних вимірів є фізичне явище, покладене в основу геодезичних вимірів. У геодезичних засобах вимірів використовують низку принципів, які реалізують різні фізичні явища: оптичне, оптико-механічне, оптико-електронне, електромагнітне, імпульсне, фазове, супутникове, доплерівське, інтерференційне та інші явища.

Границя – одне з основних понять математики. Постійна, до якої необмежено наближається певна змінна величина, що залежить від іншої змінної величини, за певної зміни останньої. Простим є поняття «границя числової послідовності», за допомогою якого можна визначити поняття «границя функції», «границя послідовності точок простору» та ін.

Груба похибка (промах) – похибка, яка виникла внаслідок недогляду експериментатора або несправності апаратури (наприклад, якщо експериментатор неправильно прочитав номер поділки на шкалі приладу, або якщо відбулося замикання в електричному ланцюзі).

Дисперсія – у математичній статистиці та теорії імовірності – міра розсіяння (відхилення від середнього). У статистиці дисперсією є середнє арифметичне з квадратів відхилень спостережуваних значень (x_1, x_2...,x_n) випадкової величини, які спостерігають, від їх арифметичної середини.

Емпірика – конкретні, досвідні дані.

Єдність вимірів – стан вимірів, що характеризується тим, що їх результати виражаються в узаконених одиницях, розміри яких у встановлених межах дорівнюють розмірам одиниць, відтвореним первинними еталонами, а похибки результатів вимірів відомі та із заданою імовірністю не виходять за встановлені межі.

Засіб вимірів – технічний засіб, що призначений для вимірів і має нормовані метрологічні характеристики.

Інструментальні (приладові) похибки – похибки, які визначаються похибками вжитих засобів вимірів і спричинені недосконалістю принципу дії, неточністю градуювання шкали, ненаглядністю приладу.

Клас точності – узагальнена характеристика приладу, що характеризує припустимі за стандартом значення основних і додаткових похибок, які впливають на точність виміру.

Кореляція – статистичний взаємозв’язок двох або кількох випадкових величин або величин, які можна з певною припустимою мірою точності вважати за такі. При цьому зміни однієї або кількох із цих величин призводять до систематичної зміни іншої або інших величин. Математичною мірою кореляції двох випадкових величин слугує коефіцієнт кореляції.

Критерій – ознака, підстава, мірило оцінки будь-чого. Особливо виділяють критерії істинності знань. Розрізняють логічні (формальні) та емпіричні (експериментальні) критерії істинності. Формальним критерієм істини слугують логічні закони: істинно все, що не містить у собі суперечності, логічно правильне. Емпіричним критерієм істинності слугує відповідність знання експериментальним даним. Питанням про критерії істини, що визначають різні філософські школи, займається теорія пізнання або **гносеологія**.

Кутові (геодезичні) виміри – вид геодезичних вимірів, у яких вимірюваною геодезичною величиною є горизонтальні або вертикальні кути (зенітні відстані).

Лінійні (геодезичні) виміри – вид геодезичних вимірів, у яких вимірюваною геодезичною величиною є довжини сторін геодезичних мереж (відстані або їх різниці).

Логарифм числа $\boldsymbol{b}$ за основою $\boldsymbol{a}$ – визначають як показник степені, у яку потрібно піднести число a, щоб отримати число b. Позначення: $\log_a$ b. З визначення виходить, що записи $log_a b = x$ і $a^x = b$ рівнозначні. Приклад: $log_2 8 = 3$, тому що $2^3 = 8$.

Математичне сподівання – поняття середнього значення випадкової величини у теорії ймовірностей.

Метод геодезичних вимірів – сукупність операцій з виконання геодезичних вимірів відповідно до принципу вимірів, виконання яких забезпечує отримання результатів із заданою точністю, що реалізується.

Метод вимірів – прийом або сукупність прийомів порівняння вимірюваної фізичної величини з її одиницею виміру відповідно до реалізованого принципу вимірів. Метод вимірів зазвичай зумовлений будовою засобів вимірів.

Методичні похибки – похибки, зумовлені недосконалістю методу, а також спрощеннями, покладеними в основу методики.

Метрологія – наука, що вивчає загальноприйняті основи вимірів, методи та засоби вимірів, одиниці фізичних величин, методи точності вимірів, принципи забезпечення єдності вимірів і одноманітності засобів вимірів. Метрологія дуже детально (ретельно) розглядає такі поняття, як еталони та зразкові засоби вимірів, застосування зразкових засобів вимірів до засобів вимірів, які використовують у виробництві.

Головним завданням і метою метрології є вивчення всіх аспектів вимірів фізичних величин, а також міжнародне сприяння в галузі метрології та законодавчі елементи.

Натуральні числа – числа, які отримують при природному рахунку; нескінченність натуральних чисел позначається N. Отже, $N = \{1,2,3 \dots\}$ (іноді до нескінченності натуральних чисел також відносять нуль, тобто $N = \{0,1,2,3 \dots\}$. Натуральні числа щодо складання та множення завжди дають натуральне число (але не віднімання або ділення). Натуральні числа комутативні й асоціативні щодо складання та множення, а множення натуральних чисел дистрибутивне стосовно складання.

Натурфілософія – спроба тлумачити й пояснити природу явищ, ґрунтуючись на результатах, отриманих науковими методами, з метою знайти відповіді на певні філософські питання. Займається найважливішими природничонауковими поняттями (субстанція, матерія, сила, простір, час та ін.), пізнанням зв’язків і закономірностей явищ природи.

Нев’язка (відхилення) – різниця між значенням функції, обчисленим за результатами вимірів, і дійсним її значенням, яке виникає внаслідок неминучих похибок вимірів.

Є декілька різновидів нев’язок. Існує фактична й припустима (знайдена за формулою) нев’язка, за порівнянням із якими визначається якість виконаних робіт. Характеризує якість роботи відносна та абсолютна нев’язки. Нев’язка, що характеризує похибку певного виду вимірів: кутова, лінійна, висотна нев’язки.

Непряме вимірювання – визначення шуканого значення фізичної величини на підставі результатів прямих вимірів інших фізичних величин, функціонально пов’язаних із шуканою величиною.

Нерівноточні виміри – ряд вимірів фізичної величини, виконаних різними за точністю засобами вимірів або у різних умовах. Зазвичай нерівноточні виміри обробляють з метою отримання результату вимірів, коли неможливо отримати ряд рівноточних вимірів.

Носієм результатів геодезичних вимірів є «основа» – папір, плівка, магнітна стрічка, карта пам’яті та ін., на якому записані результати геодезичних вимірів з метою їх зберігання, передачі або подальшої обробки.

Об’єкти геодезичних вимірів – предмети матеріального світу (місцевості, споруди будівельного майданчика, виробничого приміщення та ін.), які характеризуються однією або кількома геодезичними величинами, що підлягають вимірюванням.

Парадигма – у філософії, соціології – початкова концептуальна схема, модель постановки проблем та їх розв'язання, методів дослідження, що панують протягом певного історичного періоду в науковому суспільстві.

Похибка виміру – оцінка відхилення величини вимірюваного значення величини від її дійсного значення. Похибка вимірювання є характеристикою (мірою) точності виміру.

Прецизійність (precision) – ступінь близькості один до одного незалежних результатів вимірів, отриманих у конкретних регламентованих умовах. Прецизійність залежить тільки від випадкових похибок і не стосується дійсного або встановленого значення вимірюваної величини. Міру прецизійності зазвичай виражають у термінах неточності та обчислюють як стандартне відхилення результатів вимірів. Менша прецизійність відповідає більшому стандартному відхиленню.

Принцип вимірів – фізичне явище або ефект, покладене в основу вимірів.

Прогресуюча (дрейфова) похибка – непередбачувана похибка, змінна в часі. Вона являє собою нестаціонарний випадковий процес.

Похідна – основне поняття диференційного числення, що характеризує швидкість зміни функції. Визначають як границю відношення приросту функції до приросту її аргументу при прагненні приросту аргументу до нуля, якщо така границя існує. Процес обчислення похідної називають диференціюванням.

Пряме вимірювання – вимірювання, за якого шукане значення фізичної величини отримують безпосередньо.

Рівноточні виміри – ряд вимірів фізичної величини, виконаних однаковими за точністю засобами вимірів в одних і тих самих умовах.

Раціональні числа – числа, представлені у вигляді дробу m/n $(n \neq 0)$, де m і n – цілі числа. Для раціональних чисел визначені всі чотири «класичні» арифметичні дії: складання, віднімання, множення та ділення (окрім ділення на нуль). Для позначення раціональних чисел використовують знак Q.

Систематична похибка – похибка, що змінюється в часі за певним законом (окремим випадком є постійна похибка, що не змінюється з часом). Систематичні похибки можуть бути пов'язані з помилками приладів (неправильна шкала, калібрування та ін.), неврахованими експериментатором.

Середньоквадратичне відхилення або **стандартне відхилення** – в теорії імовірностей і статистиці найпоширеніший показник розсіювання значень випадкової величини стосовно її математичного сподівання.

Суб'єктивні (операторні) особисті похибки – похибки, зумовлені ступенем уважності, зосередженості, підготовленості та іншими особливостями оператора.

Теодолітний хід – замкнена або розімкнена ламана лінія, точки зламу якої відповідним чином закріплені на місцевості і між ними зміряні відстані, а також ліві (або праві) кути повороту.

Теорема – твердження, для якого у певній теорії існує доказ (інакше кажучи, висновки). Окремим випадком теорем є аксіоми, які приймають істинними без усяких доказів або обґрунтувань, за очевидністю.

Точність засобу вимірів – характеристика якості засобу вимірів, що відображає близькість його похибки до нуля.

Тріангуляція – один із методів створення мережі опорних геодезичних пунктів і власно мережа, створена цим методом. Тріангуляція полягає у побудові рядів або мереж трикутників, що примикають один до одного, та у визначенні положення їх вершин у вибраній системі координат. У кожному трикутнику вимірюють усі три кути, а одну з його сторін визначають з обчислень шляхом послідовного розв'язання попередніх трикутників, починаючи від того з них, в якого одна з його сторін отримана з вимірів. Якщо сторона трикутника отримана з безпосередніх вимірів, то її називають базисною стороною. У минулому замість базисної сторони безпосередньо вимірювали коротку лінію, так званий базис, і від неї шляхом тригонометричних обчислень через особливу мережу трикутників переходили до сторони трикутника. Цю сторону зазвичай називають вихідною стороною, а мережу трикутників, через які вона обчислена, – базисною мережею. У рядах або мережах для контролю та підвищення їх точності вимірюють більшу кількість базисів або базисних сторін, ніж це мінімально необхідно.

Фізична величина – одна з властивостей фізичного об'єкта, що є загальною у якісному відношенні для багатьох фізичних об'єктів, але в кількісному відношенні індивідуальна для кожного з них.

Функція – це «закон», за яким кожний елемент x із певної множини X ставиться у відповідність до єдиного елемента y із множині Y.

Хід нівелірний – геодезичний хід, що прокладають способом геометричного нівелювання за допомогою нівеліра. Слугує для визначення висот нівелірних знаків (реперів). Нівелірний хід створюють шляхом вимірювання перевищень між точками.

Цілі числа – числа, що отримують об'єднанням натуральних чисел із множиною від'ємних чисел і нулем, їх позначають $Z = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Цілі числа замкнені щодо складання, віднімання та множення (але не ділення).

Частинна похідна – одне з узагальнених понять похідної на випадок функції кількох змінних.

Чутливість приладу (або чутливість засобу виміру) – це реакція на підведення до нього вимірюваної величини. Чутливість може обчислюватися як абсолютна, так і відносна, характеризуючи чутливість у певній відмітці.

Шкала – частина конструкції відлікового пристрою, що складається з відміток і чисел, відповідних до послідовних значень вимірюваної величини. Відмітки можуть бути рисками, точками, зубцями та ін. Покажчики можуть бути краплеподібними, ножеподібними та світловими стрілками.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ДОДАТОК А

Похідні деяких функцій

Правила диференціювання

$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(cu)' = cu'$, де $c = \text{const}$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Похідна складної функції

Якщо $y = f(g(x))$ та існують похідні f'_g та g'_x, то $y'_x = f'_g \cdot g'_x$, наприклад

$$\left(\sqrt{sin\,x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{sin\,x}} \cdot (sin\,x)' = \frac{cos\,x}{2\sqrt{sin\,x}};$$

$$(ln\,sin\,x)' = \frac{1}{sin\,x} \cdot (sin\,x)' = \frac{cos\,x}{sin\,x} = ctg\,x.$$

Похідні простих функцій

$c' = 0$, де $c = const$	$(x)' = 1$	$(x^a)' = ax^{a-1}$
$(sin\,x)' = cos\,x$	$(\text{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\text{arcsin}\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(cos\,x)' = -sin\,x$	$(ctg\,x)' = -\frac{1}{sin^2\,x}$	$(\text{arccos}\,x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{xlna}$	$(\text{arctg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\text{arcctg}\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

ДОДАТОК Б

Розкладання у ряд Тейлора деяких функцій

Функція	Формула
Натуральний логарифм	$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)} =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}$, для всіх $-1 < x < 1$
Квадратний корінь	$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n) n!^2 4^n} x^n$ для всіх
Тригонометричні функції	
Синус	$sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in C$
Косинус	$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in C$
Тангенс	$tg\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1}$, для всіх $\lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$, де B_{2n} – числа Бернуллі
Арксинус	$arcsin\, x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots =$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$, для всіх $\lvert x \rvert \leq 1$
Арккосинус	$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x =$ $= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$ для всіх $\lvert x \rvert \leq 1$
Арктангенс	$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$, для всіх $\lvert x \rvert \leq 1$

ДОДАТОК В

Основні відомості з теорії матриць

Матриця є системою елементів (чисел), що розташовані у певному порядку та утворюють таблицю. Якщо матриця містить m рядків та n стовпців, а її елементи позначені, a_{ij}, де i – номер рядка, j – номер стовпця, на перехресті яких розташований цей елемент, то матрицю записують у такому вигляді:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{В.1}$$

де $A = [a_{ij}], \quad i = \overline{1, m} \qquad j = \overline{1, n}.$

Якщо кількість рядків матриці не дорівнює кількості її стовпців, то матрицю називають **прямокутною**.

Транспонованою називають матрицю A, якщо поміняти місцями рядки та стовпці:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ & \dots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Розмір матриці A $m \times n$, а транспонованої матриці A^T – $n \times m$. Якщо $m = n$, то матрицю називають **квадратною**. У квадратній матриці елементи a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} утворюють головну діагональ.

Нульовою називають матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю:

$$a_{ij} = 0.$$

Діагональною називають квадратну матрицю, всі елементи якої, що стоять поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Скалярною називають квадратну матрицю, всі елементи якої, що стоять на головній діагоналі, дорівнюють один одному:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Одиничною називають діагональну матрицю, всі елементи якої, що стоять на головній діагоналі, дорівнюють одиниці. Одиничну матрицю позначають символом E:

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Індекс *n* показує порядок одиничної матриці.

Симетричною називають квадратну матрицю, всі елементи якої, що стоять симетрично головній діагоналі, дорівнюють один одному:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Визначник квадратної матриці A позначають $|A|$, або $D(A)$. Якщо визначник $|A|$ не дорівнює нулю, матрицю A називають невиродженою (неособливою). Якщо визначник $|A| = 0$, матрицю A називають виродженою (або сингулярною).

Дві матриці A і B називають рівними одна одній, якщо число рядків матриці A дорівнює числу рядків матриці B, а число стовпців матриці A дорівнює числу стовпців матриці B та відповідні елементи (в яких однакові індекси) дорівнюють один одному, тобто $a_{ij} = b_{ij}$, тоді $A = B$.

Лінійним перетворенням величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ на величини $y_1, y_2, \dots, y_m$ називають систему виразів, за якими величини $y_1, y_2, \dots, y_m$ лінійно та однорідно виражаються через $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned}\right\}, \qquad (В.2)$$

або у скороченій формі:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad i = \overline{1,n}.$$

Коефіцієнти лінійного перетворення (В.2) величин x_j на величини y_i можна записати як матрицю A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрицю A у цьому випадку називають **матрицею лінійного перетворення**.

Сумою двох прямокутних матриць A і B однакового розміру $m \times n$ називають матрицю C того самого розміру, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A і B, тобто

$$A + B = C, \text{ якщо } \; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Множення матриці на число. Щоб помножити матрицю A на число α, треба на це число помножити кожен елемент матриці A:

$$\alpha \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ & & \dots & \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Множення матриць. Матрицю *C* називають добутком матриці *B* на матрицю A, $C = B \cdot A$, якщо число стовпців матриці *B* дорівнює числу рядків матриці *A*, та якщо розмір матриці *B* дорівнює $s \times m$, а матриці $A - m \times n$, то матриця *C* має розмір $s \times n$, а елемент c_{ij} матриці *C*, що стоїть у і-му рядку та у
j-му стовпці, дорівнює сумі добутків елементів і-го рядка елементів матриці *B* на відповідні елементи j-го стовпця матриці *A*, тобто:

$$c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{im}a_{mj} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}. \qquad (B.3)$$

Отже, в матриці, що є добутком двох матриць, число рядків дорівнює числу рядків лівого співмножника, а число стовпців – числу стовпців правого співмножника.

Добуток двох матриць у загальному випадку не має властивості комутативності, тобто $\mathrm{B} \cdot \mathrm{A} \neq \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$. Тому у добутку $\mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$ говорять, що матриця A множиться зліва на матрицю B, або що матриця B множиться справа на матрицю A. Комутативними є матриці, якщо $\mathrm{B} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$, наприклад, квадратна та одинична матриці однакового порядка. Добуток двох діагональних матриць однакового порядка є комутативним, тобто $\mathrm{B} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix},$$

звідки випливає, що множення матриці *A* на одиничну матрицю *E* не змінює її, тобто одинична матриця грає роль одиниці:

$$A \cdot E = A.$$

Множення квадратної матриці зліва на діагональну матрицю збігається до множення на постійну величину усіх елементів кожного рядка цієї матриці.

Множення квадратної матриці справа на діагональну матрицю збігається до множення на постійну величину усіх елементів кожного стовпця цієї матриці.

Якщо матриці A і B є квадратними матрицями однакового порядка, а їхній добуток $A \cdot B$ є одиничною матрицею *E*:

$$A \cdot B = E,$$

то матрицю *B* називають матрицею, зворотною до *A* і позначають A^{-1}:

$$A \cdot A^{-1} = E. \qquad (B.4)$$

Квадратна матриця *A* та зворотна їй матриця A^{-1} – комутативні:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Щоб квадратна матриця мала зворотну, необхідно та достатньо, щоби її визначник $|A|$ не дорівнював нулю (щоб вона не була виродженою).

Існує кілька методів визначення зворотної матриці, найпростіший з яких полягає у застосуванні формули масива MS Excel **МОБР**(числовий масив з однаковою кількістю рядків та стовпців).

Операція визначення зворотної матриці має дуже велике значення для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Матричний запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Система n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = d_n \end{array}\right\}. \qquad \text{(В.5)}$$

У системі рівнянь (В.5) невідомими є $x_1, x_2, \dots, x_n$, а коефіцієнти при невідомих a_{ij} та вільні члени рівнянь d_i є дійсними числами.

Матриця A, що складається з коефіцієнтів при невідомих a_{ij}, має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

матриця-стовпець з невідомих:

$$x = [x_1, x_2, \ \dots\ , \ x_n]^T;$$

матриця-стовпець з вільних членів:

$$d = [d_1, d_2, \ \dots\ , \ d_n]^T.$$

Враховуючи правила множення матриць систему рівнянь можна записати у розгорнутій матричній формі:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix}, \qquad \text{(В.6)}$$

або компактно у вигляді одного матричного рівняння:

$$A \cdot x = d. \qquad \text{(В.7)}$$

Якщо матриця A – неособлива, то вона має зворотну матрицю A^{-1}. Помножимо обидві частини рівняння (В.7) на A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot d, \qquad \text{(В.8)}$$

та враховуючи, що $A^{-1} \cdot A = E$, отримаємо:

$$x = A^{-1} \cdot d, \qquad \text{(В.9)}$$

тобто отримали стовпець шуканих невідомих x.

Навчальне видання

МЕТЕШКІН Костянтин Олександрович,
ВОРОНКОВ Олексій Олександрович

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Відповідальний за випуск *С. Г. Нестеренко*

Редактор *В. І. Шалда*
Комп'ютерне верстання *Т. П. Воробйова*
Дизайн обкладинки *Т. А. Лазуренко*

Підп. до друку 07.02.2022. Формат 148x210 мм.
Папір офсетний. Друк цифровий. Ум. друк. арк. 16,74.
Наклад 100 пр. Зам. №22-02376.

Видавець:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.

Надруковано в типографії
«Impress» (ФОП Болібок О.В.)
Україна, м. Харків, вул. Пушкінська, 56.
Тел.: (057) 714-42-11.