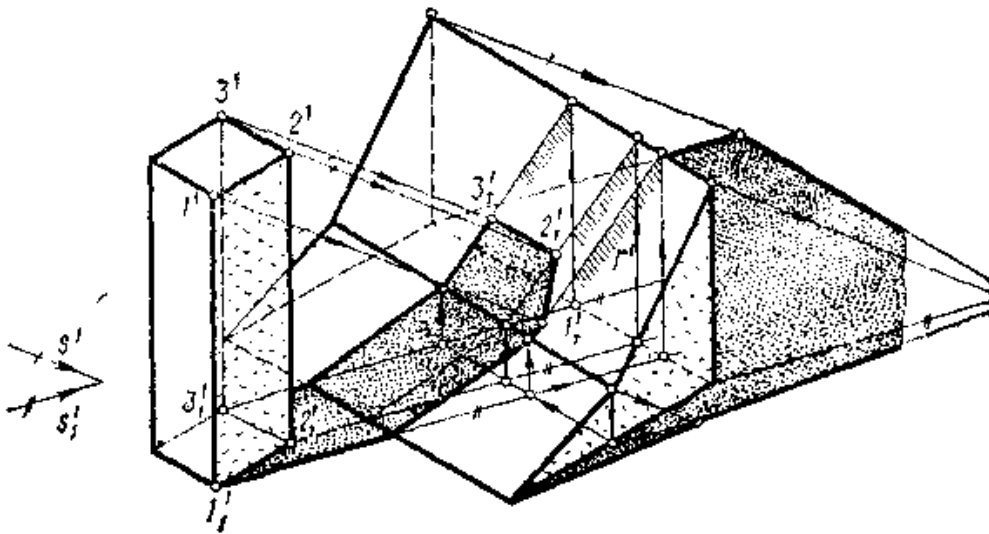


Міністерство освіти і науки України  
Харківська національна академія міського господарства

Т. Є. Киркач

# Конспект лекцій з нарисної геометрії

(для студентів 1-го курсу денної форми навчання  
за напрямом 6.060101 – „Будівництво”)



Харків – ХНАМГ – 2008

Конспект лекцій з нарисної геометрії (для студентів 1-го курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.060101 – „Будівництво”). /Автор: Киркач Т. Є. – Харків: ХНАМГ, 2008. – С. 50.

Автор: Т. Є. Киркач

Рекомендовано кафедрою інженерної та комп'ютерної графіки,  
протокол № 12 від 1 липня 2008 р.

# Лекція 1.

## Тема 1. ПОБУДОВА АКСОНОМЕТРИЧНИХ ПРОЕКЦІЙ.

Зображення об'єктів, виконані в системі ортогональних проекцій, часто не мають достатньої наочності. В зв'язку з цим такі зображення доповнюють їхніми аксонометричними проекціями, які дають можливість повніше скласти уявлення про зображені об'єкти.

В архітектурно-будівельних кресленнях аксонометрію використовують для наочного зображення як споруд у цілому, так і окремих будівельних деталей, елементів конструкцій, вузлів тощо.

### 1.1. Основні поняття та визначення.

Аксонометрія (від грецьк. *αξον* - вісь, *μετρο* - виміряю) є розділом теорії зображень, в якому розглядається побудова аксонометричних проекцій об'єктів. Аксонометрією називають і наочне зображення (проекцію) об'єкта, побудоване за правилами аксонометрії.

Таким чином, паралельну проекцію предмета на площині, побудовану разом з прямокутними координатними осями, до яких він віднесений, називають його *аксонометричною проекцією* або просто *аксонометрією*.

Утворення аксонометричної проекції точки  $A$  простору зображено на рис. 1.1, де  $\Pi'$  - площина аксонометричних проекцій;  $s$  - напрям проектування;  $\varphi$  - кут проектування;  $x'y'z'$  - аксонометричні осі;  $O'$  - аксонометрична проекція початку координат;  $A'$  - аксонометрична проекція точки  $A$ ;  $A_1$  - вторинна горизонтальна проекція точки  $A$ .

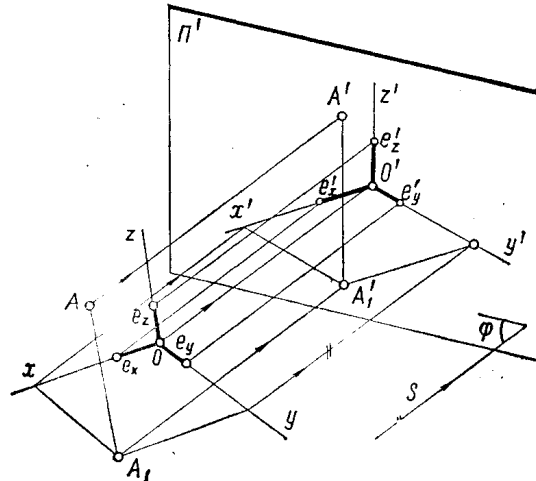


Рис. 1.1

Аналогічно утворюються вторинні - фронтальна та профільна проекції точки  $A$ , які позначають відповідно  $A'_2, A'_3$ .

Щоб побудувати аксонометрію предмета, спочатку необхідно віднести його до системи трьох взаємно перпендикулярних площин, що збігаються з площинами проекцій, вибрати площину і напрям проектування, а потім побудувати на основі паралельного проектування за заданим напрямом на площині проекцію предмета разом з прямокутними координатними осями.

Зображення об'єкта на аксонометричній площині і напрям аксонометричних осей залежать від положення площини відносно системи координатних осей, а також від напрямку проектування. Якщо

напряв проектування  $s$  перпендикулярний до площини проєкцій  $\Pi'$ , то аксонометричні проєкції називають *прямокутними* ( $\varphi = 90^\circ$ ). Якщо напряв проектування  $s$  не перпендикулярний до площини проєкцій  $\Pi'$ , то аксонометричні проєкції називають *косокутними* ( $\varphi \neq 90^\circ$ ).

У загальному випадку координатні осі, а разом з ними і об'єкт, проєктуються на площину проєкцій  $\Pi'$  зі спотворенням, ступінь якого визначається *коефіцієнтами (показниками) спотворення* по аксонометричних осях.

Якщо на кожній з координатних осей  $x, y, z$  (рис. 1.1) відкласти від точки  $O$  відрізки  $e_x, e_y, e_z$ , довжини яких дорівнюють одиниці натурального масштабу  $e$ , то внаслідок проєктування одержимо на  $\Pi'$  відрізки  $e'_x, e'_y, e'_z$  - *аксонометричні одиниці виміру*.

Відношення аксонометричної одиниці виміру  $e'$  до одиниці натурального масштабу  $e$  визначає показник спотворення по аксонометричній осі. Отже,

$$\frac{e'_x}{e_x} = u; \quad \frac{e'_y}{e_y} = v; \quad \frac{e'_z}{e_z} = w.$$

Оскільки  $e_x = e_y = e_z$ , то

$$\frac{e'_x}{e} = u; \quad \frac{e'_y}{e} = v; \quad \frac{e'_z}{e} = w;$$

тобто  $u, v, w$  - це показники спотворення по відповідних аксонометричних осях.

## 1.2. Види аксонометричних проєкцій.

Залежно від того, по скількох осях показники спотворення однакові, визначають той чи інший вид аксонометрії, а саме:

ізометрична проєкція (ізометрія) — однакові всі три показники спотворення ( $u = v = w$ );

диметрична проєкція (диметрія) — однакові два з трьох показників ( $u = v \neq w, u = w \neq v, u \neq v = w$ );

триметрична проєкція (триметрія) — показники різні ( $u \neq v \neq w$ ).

Основоположною в теорії аксонометрії є теорема Польке, яка стверджує, що три довільно вибраних на площині відрізки, які перетинаються в одній точці, завжди можуть відображати паралельну проєкцію трьох інших рівних між собою і взаємно перпендикулярних відрізків, що також перетинаються в одній точці.

Згідно з цією теоремою, аксонометричні осі на площині проєкцій, а також відношення показників спотворення можна задавати як завгодно. При цьому показники спотворення будуть пропорційними аксонометричним одиницям виміру:

$$u : v : w = e'_x : e'_y : e'_z.$$

Існує залежність між показниками спотворення і кутом проєктування, а саме:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 \pm \operatorname{ctg}^2 \varphi.$$

Ця формула відображає залежність між вказаними величинами в загальному випадку, тобто у випадку косокутної аксонометрії. Для окремого випадку - прямокутної аксонометрії - маємо  $u^2 + v^2 + w^2 = 2$ , оскільки  $\varphi = 90^\circ$ , а  $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$ .

## 1.3. Побудова осей і визначення показників спотворення.

### 1.3.1. Косокутна аксонометрія.

Задамо координатні осі  $Oxyz$ , площину загального положення  $\Pi'$  і напрям проектування  $s$  (рис. 1.2, а);  $\varphi \neq 90^\circ$ . Відшукаємо точки перетину кожної з осей з площиною  $\Pi'$ . Сполучивши ці точки, побудуємо трикутник  $A'B'C'$ , який має назву *аксонометричний трикутник слідів*. Сторони трикутника - це сліди координатних площин на  $\Pi'$ .

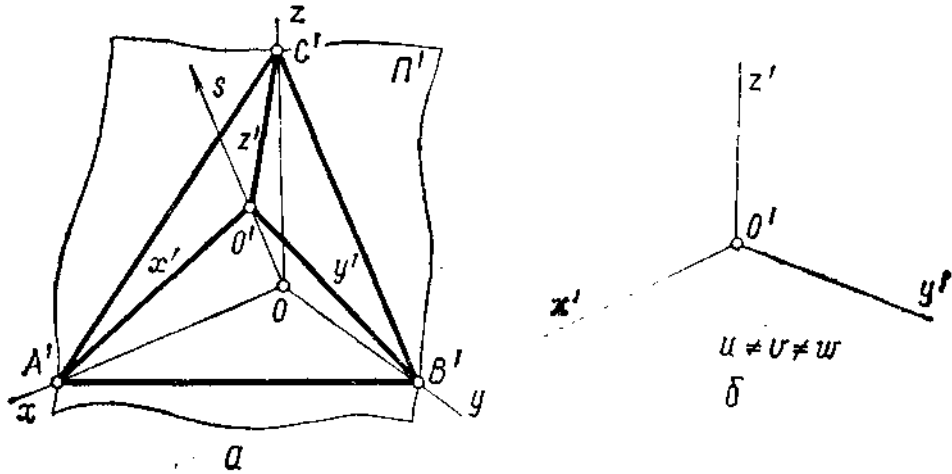


Рис. 1.2

Якщо з точки  $O$  провести промінь  $s$  до перетину з площиною  $\Pi'$  і отриману при цьому точку  $O'$  сполучити з точками  $A', B', C'$ , то в результаті буде побудована система осей (рис. 1.2, б), що відповідає триметричній косокутній проекції ( $u \neq v \neq w$ ).

Площину  $\Pi'$  можна розмістити паралельно осям, наприклад  $yz$  і  $x$  (рис. 1.3, а).

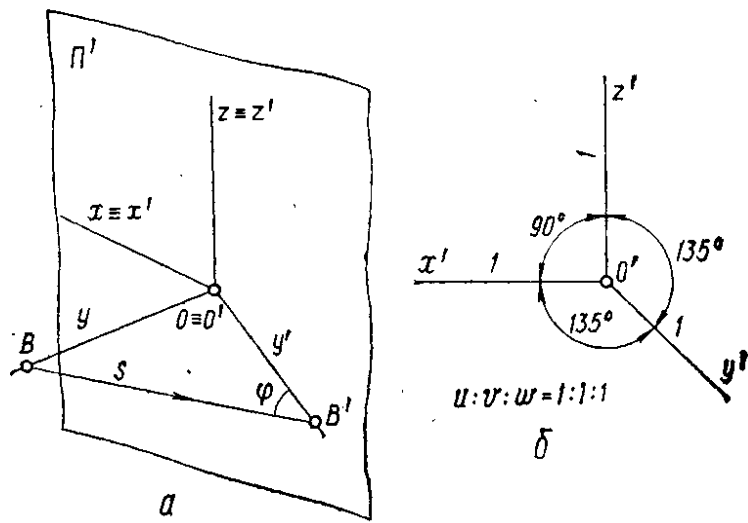


Рис. 1.3

Очевидно, що при будь-якому напрямі (крім  $s // \Pi'$ ) осі  $x$  і  $z$  проектуються на  $\Pi'$  без спотворення, тобто  $u = w = 1$ . При цьому буде змінюватися напрям і показник спотворення  $v$  осі  $y$ , який залежить від кута  $\varphi$ . При  $\varphi = 45^\circ$  показник спотворення  $v = 1$ , що очевидно з рисунка. Така аксонометрія має назву *косокутна фронтальна ізометрія* (рис. 1.3, б). Не змінюючи напрям осі  $y$ , зміною  $s$  можна досягти значення  $v = 0,5$ . Отримана аксонометрія має назву *фронтальна диметрія*.

### 1.3.2. Прямокутна аксонометрія.

У випадку прямокутної аксонометрії кут  $\varphi = 90^\circ$ . При цьому відрізок  $O'C'$  (рис. 1.4) є висотою тригранної піраміди  $OAB'C'$ . Побудовані на  $\Pi'$  аксонометричні осі є висотами трикутника слідів, а точка  $O'$  (початок координат) збігається з ортоцентром цього трикутника.

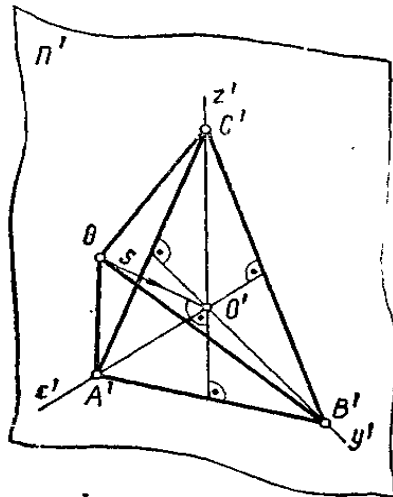


Рис. 1.4.

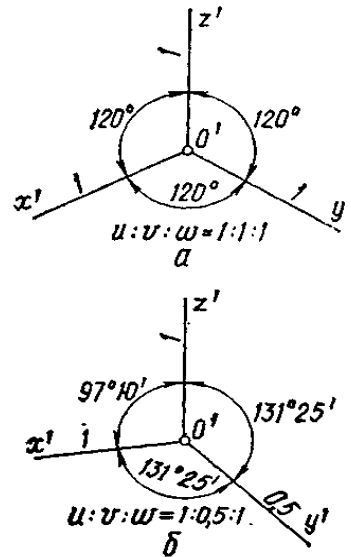


Рис. 1.5

Отже, в даному випадку трикутник слідів однозначно визначає напрям аксонометричних осей.

Як уже відомо, в прямокутній аксонометрії має місце співвідношення:  $u^2 + v^2 + w^2 = 2$ . У прямокутній ізометрії (рис. 1.5, а)  $u = v = w$ , тоді  $3u^2 = 2$ , звідки  $u = \sqrt{2/3} \approx 0,82$ . Для зручності приймають, що показник спотворення по осях дорівнює одиниці, що призводить до збільшення зображення в 1,22 рази ( $1 : 0,82$ ) Такі показники називають приведеними показниками спотворення.

У прямокутній диметрії (рис 1.5, б) скорочення по осі  $y'$  можна прийняти вдвічі більшим, ніж по осях  $x'$  і  $z'$ . Тоді  $u = w$ ,  $v = u/2$ ,  $2u^2 + (u/2)^2 = 2$ , звідки  $u = 8/9 \approx 0,94$ ,  $v = 0,47$ . Приведені показники спотворення  $u = w = 1$ ,  $v = 0,5$ . При цьому зображення збільшується в 1,06 рази ( $1 : 0,94$ ).

Підводячи підсумок викладеному, слід підкреслити, що аксонометрія вважається заданою, коли визначено аксонометричні осі, указано їх додатний напрям та показники спотворення.

## 1.4 Позиційні властивості геометричних фігур в аксонометрії.

Побудова аксонометричних зображень потребує знання загальних властивостей співвідношення геометричних фігур. Для цього розглянемо питання, що мають загальне значення при побудові аксонометрії.

### 1.4.1. Властивості проєкцій геометричних фігур.

В аксонометрії задають:

- 1) точку - аксонометричною і однією з вторинних проєкцій (рис. 1.6, а);

- 2) пряму - аксонометричною і вторинною проєкціями відрізка (напрямую) (рис. 1.6, б);
- 3) площину - аксонометричними і вторинними проєкціями: трьох точок, що не належать одній прямій; точки і прямої; двох паралельних прямих; двох прямих, що перетинаються, а також проєкціями плоских фігур або слідами площини (рис. 1.6, в).

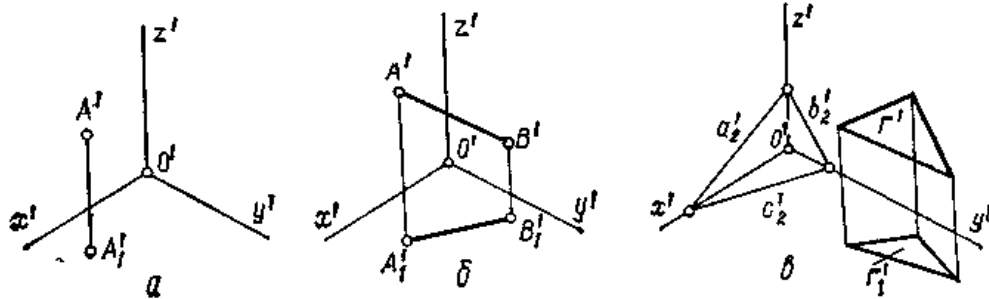


Рис. 1.6

Для аксонометричних проєкцій залишаються справедливими позиційні властивості геометричних пар в ортогональних проєкціях. Наприклад:

- аксонометричні проєкції паралельних прямих, а також їхні вторинні проєкції залишаються паралельними;
- точка перетину аксонометричних і вторинних проєкцій прямих належить одній лінії сполучення, у випадку з мимобіжними прямими ці точки належать різним лініям сполучення;
- якщо точка належить площині, то вона належить і прямій, що лежить у цій площині;
- пряма належить площині, якщо дві її точки належать площині;
- пряма паралельна площині, якщо вона паралельна будь-якій прямій площини;
- паралельні площини мають відповідно паралельні прямі.

#### 1.4.2. Взаємний перетин геометричних фігур.

Точку  $K$  перетину прямої  $\ell$  з заданою горизонтальною площиною (рис. 1.7) знаходять шляхом побудови лінії перетину  $1-2$  допоміжної вертикальної площини, що проходить через пряму, з заданою горизонтальною площиною. Шукана точка  $K$  знаходиться в перетині ліній  $1-2$  і  $\ell$ .

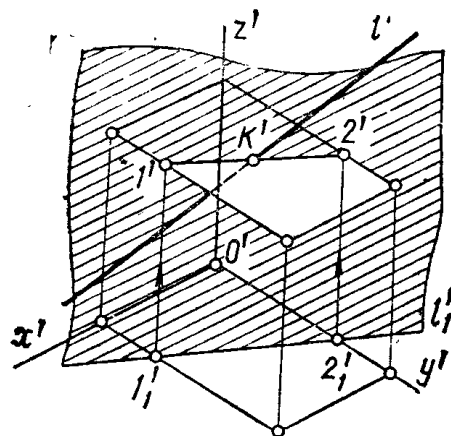


Рис. 1.7

Двічі повторена побудова відносно прямих  $\ell$  і  $m$  (рис. 1.8) дає можливість знайти лінію перетину заданих площин.

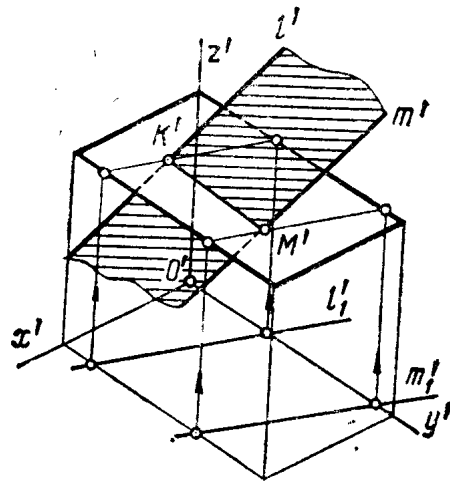


Рис. 1.8

Щоб побудувати точку перетину прямої з поверхнею (рис. 1.9), через пряму також проводять вертикальну січну площину. Будують лінію її перетину з поверхнею, яка, перетинаючи аксонометричну проекцію прямої, визначає шукану точку.

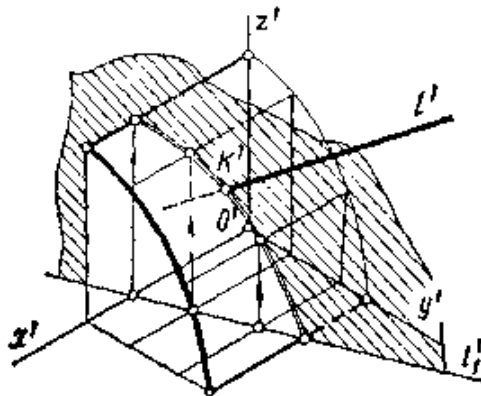


Рис. 1.9

На рис. 1.10 зображено хід побудови лінії перетину поверхні піраміди площиною.

Задачу розв'язують способом допоміжного проектування на одну із координатних площин. Спочатку визначають напрям, при якому січна площина на координатній буде проектуватися слідом. Потім будують власне слід площини і допоміжну проекцію піраміди. Позначають точки перетину ребер піраміди з січною площиною на координатній площині. Зворотним проектуванням ці точки будують на аксонометричному зображенні піраміди.

Цей спосіб досить універсальний - він дає можливість розв'язувати подібні задачі з циліндром, конусом, призмою, лінійчатыми поверхнями та іншими, побудова допоміжної проекції яких не викликає утруднень.

Побудова лінії перетину кривих поверхонь показана на рис. 1.11. Задача розв'язана за допомогою горизонтальних довільно взятих січних площин, які одночасно перетинають обидві поверхні. Точки лінії перетину поверхонь визначають взаємним перетином ліній (у даному випадку прямих), по яких горизонтальні площини перетинають задані поверхні.



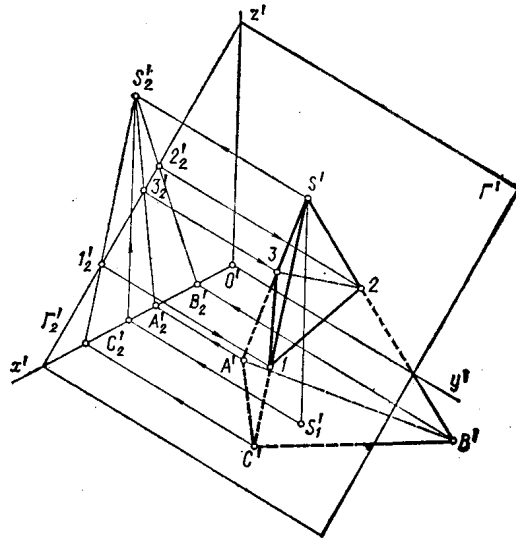


Рис. 1.10

Залежно від виду поверхонь, що перетинаються, допоміжні січні площини можуть бути по-різному орієнтовані у просторі.

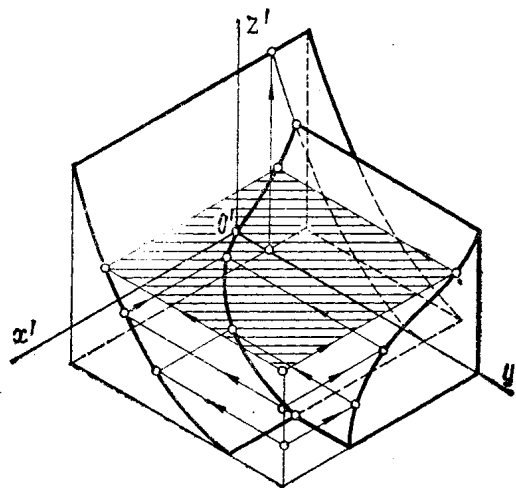


Рис. 1.11

## 1.5. Побудова аксонометричних проєкцій геометричних тіл.

Як було показано, існує безліч видів аксонометрії. Вибір тієї чи іншої системи повинен забезпечувати наочність зображення і простоту його побудови.

### 1.5.1. Стандартні види аксонометричних проєкцій.

Доцільно користуватися стандартними видами аксонометрії, в яких показники спотворення зведено до зручних при користуванні зображень величин.

Серед прямокутних аксонометричних проєкцій - це ізометрична (рис. 1.12) і диметрична (рис. 1.13), серед косокутних - фронтальна ізометрична (рис. 1.14), горизонтальна ізометрична (рис. 1.15) і фронтальна диметрична (рис. 1.16). На цих рисунках зображено зведені показники

спотворення, а також відносні розміри осей еліпсів - аксонометричних кіл.

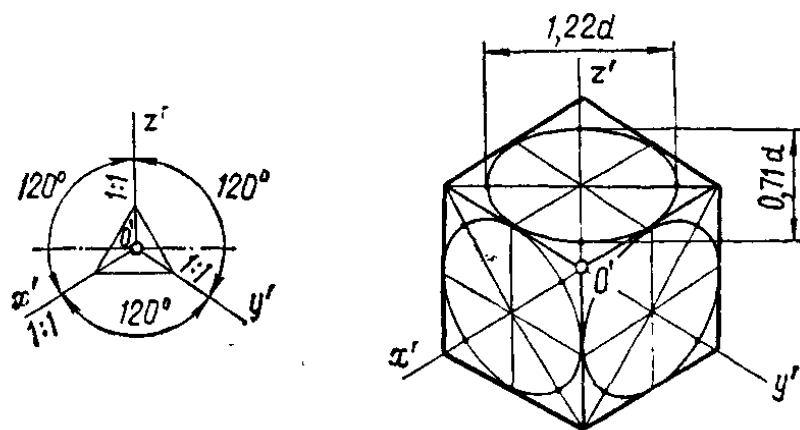


Рис. 1.12

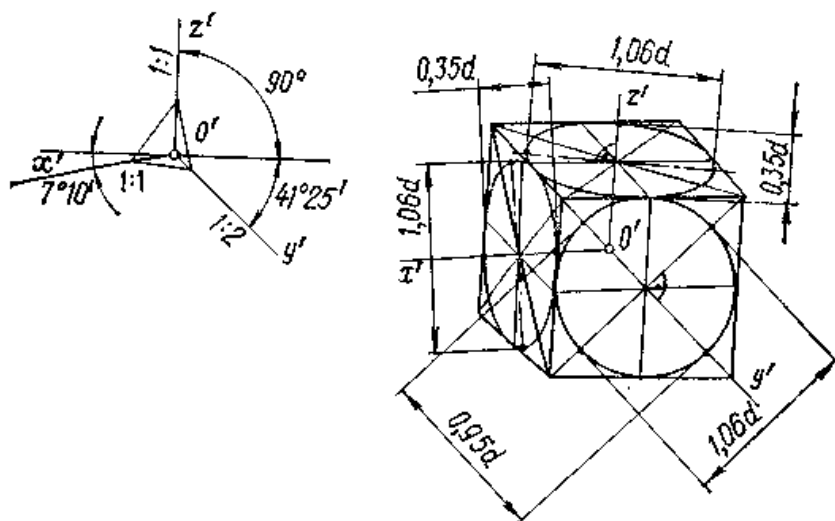


Рис. 1.13

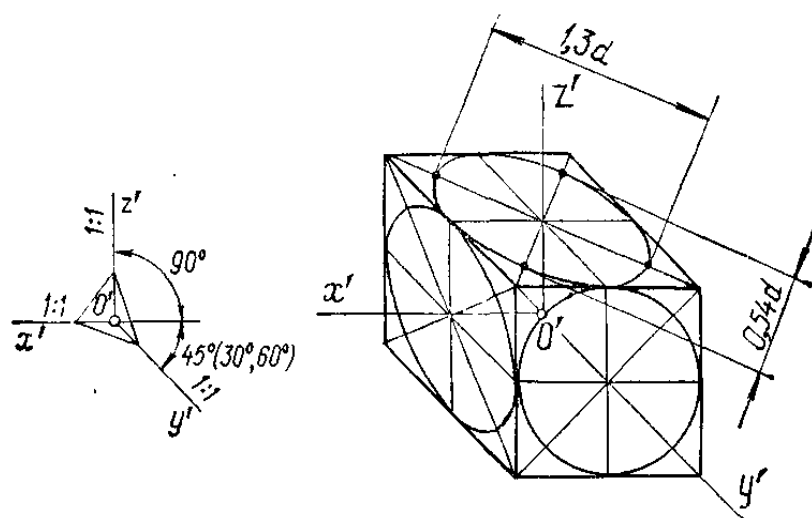


Рис. 1.14

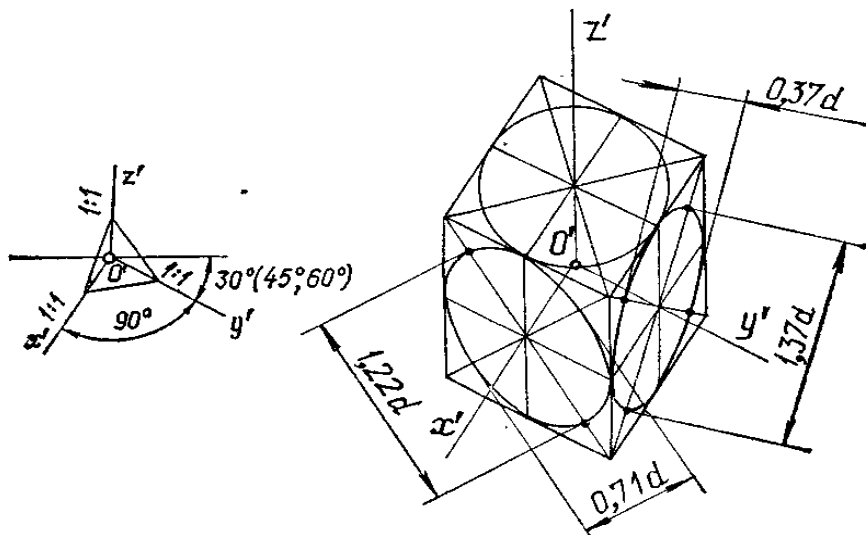


Рис. 1.15

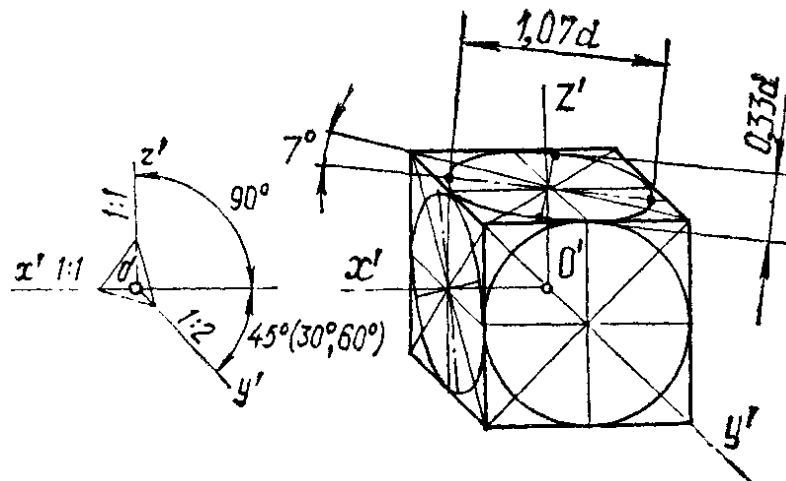


Рис. 1.16

Прямокутні проєкції застосовуються для реального зорового сприйняття об'єктів. Косокутні проєкції мають іншу перевагу - при забезпеченні наочності зображень дають змогу будувати складні контури в певних площинах без спотворення. Практичне значення має вміння будувати аксонометрію кола, яке зображується еліпсами в різних площинах залежно від виду аксонометрії.

Оскільки побудова еліпсів трудомістка, їх замінюють овалами. Це дає змогу будувати аксонометрію кола за допомогою циркуля.

На рис. 1.17 представлено спосіб побудови кола радіуса  $R$  в прямокутній ізометрії. Для цього на аксонометричних осях відкладають величину радіуса, будують ромб, позначають точки  $I$  і  $O_1$ , знаходять точки  $O_2$  і циркулем проводять ділянки дуг овалу.

На рис. 1.18 показано побудову овалу, що замінює прямокутну диметричну проєкцію кола в горизонтальній (профільній) площині. Спочатку проводять аксонометричні осі, через точку  $O'$  - вертикальну і горизонтальну прямі. На аксонометричних осях будують паралелограм, на відстані, що дорівнює  $1,06$  діаметра кола, від точки  $O'$  позначають точки  $I$ , сполучають їх з точками  $A$ . Лінія  $I-A$  в перетині з горизонтальною віссю визначає точки  $2$ . Точки  $I$  і  $2$  є

центрами дуг, що складають овал.

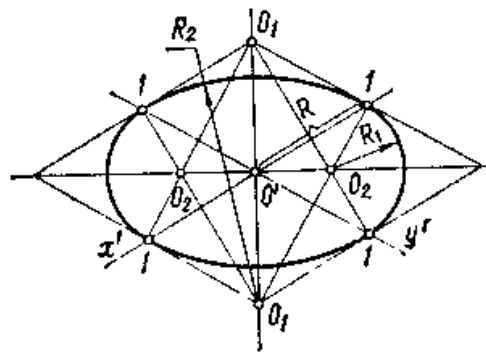


Рис. 1.17

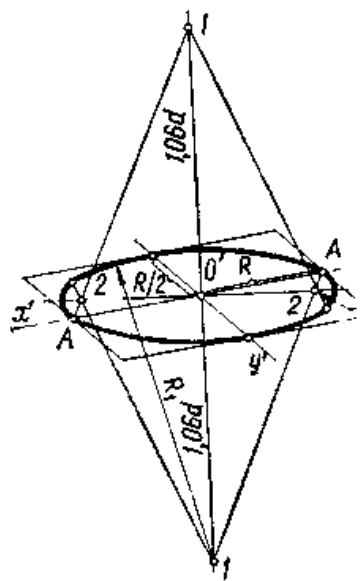


Рис. 1.18

Побудову фронтального зображення кола в прямокутній диметрії представлено на рис. 1.19. З точок  $A$  будують перпендикуляри до відповідних сторін ромба, знаходять точки  $1$  і  $2$  перетину перпендикулярів з діагоналями. Ці точки і є шуканими центрами дуг овалу.

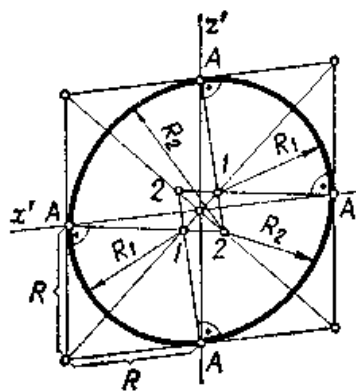


Рис. 1.19

У загальному вигляді аксонометричне зображення кола можна побудувати, як показано на рис. 1.20.

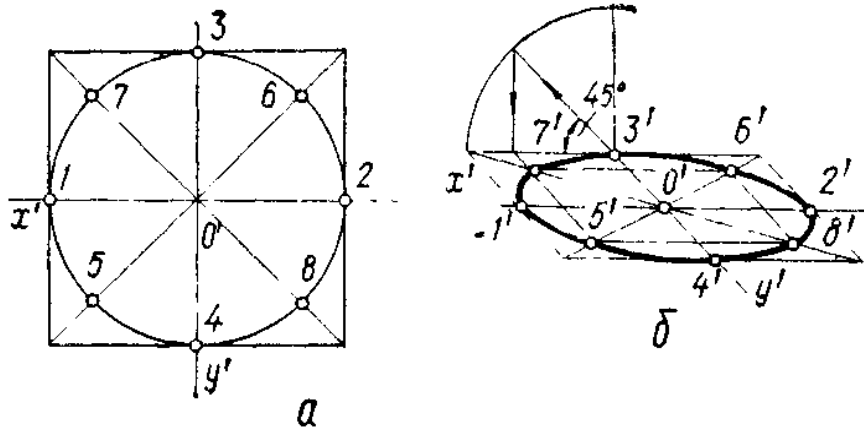


Рис. 1.20

На цій основі зображують аксонометрію тіл обертання, зокрема сфери (рис. 1.21).

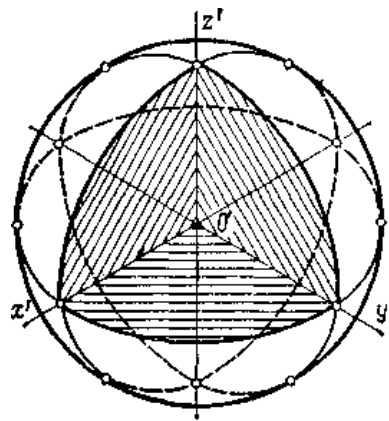


Рис. 1.21

### 1.5.2. Побудова аксонометрії точки.

Точка  $A$  (рис. 1.22, *a*) закріплена в системі  $Oxyz$  і має координати  $A(3, 2, 5)$ , тобто  $X_A = 3$ ,  $Y_A = 2$ ,  $Z_A = 5$ . Щоб побудувати аксонометрію точки  $A$ , необхідно в зазначеній аксонометричній системі побудувати аксонометричну ламану в одному з шести варіантів (рис. 1.22, *б*). На основі побудови точки в аксонометрії зображують всі інші геометричні об'єкти.

Аксонометрію об'єкта будують за його ортогональними проекціями, за числовими даними і за уявою.

### 1.5.3. Побудова аксонометрії об'ємних фігур.

Необхідно побудувати, наприклад, аксонометрію правильної призми з отвором за її ортогональними проекціями (рис. 1.23). Оскільки основою призми є квадрат з вершинами на горизонтальних осях, то для забезпечення наочності зображення доцільно звернутися, наприклад, до прямокутної диметрії. Побудову виконують у такій послідовності:

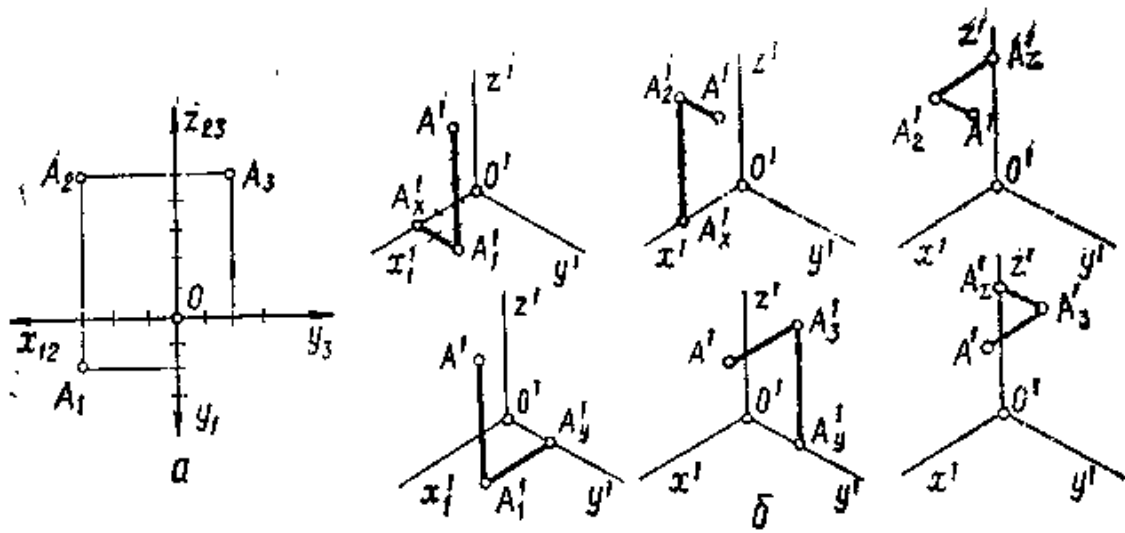


Рис. 1.22

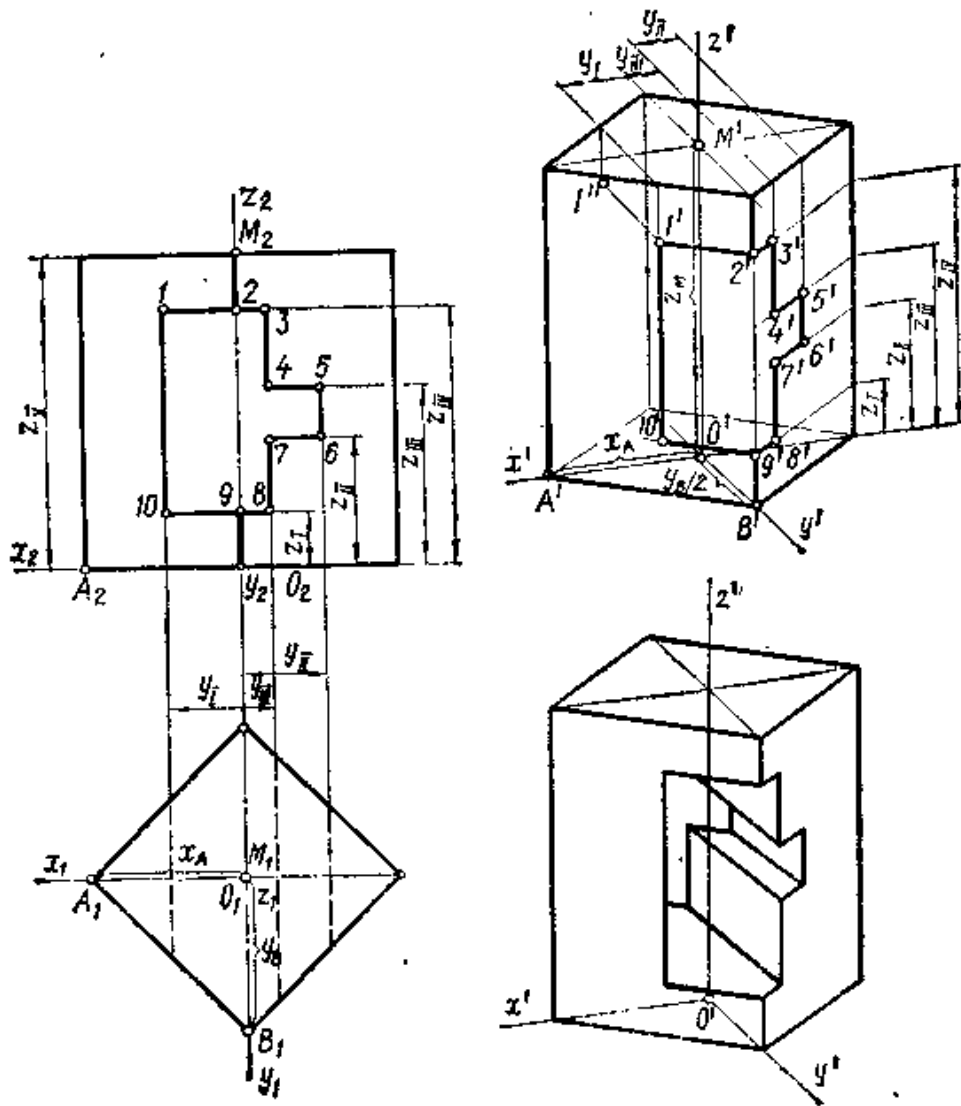


Рис. 1.23

1) Наносять ортогональні осі на горизонтальній і фронтальній проекціях, будують диметричну проекцію осей.

2) Будують об'єм призми в цілому: спочатку точки  $A$  і  $B$  та симетричні їм точки. Сполучивши їх, одержують аксонометрію нижньої основи. Вимірюють висоту призми і відкладають цю величину уздовж осі аплікат від точки  $O$ , визначивши точку  $M$ . Через точку  $M$  проводять аксонометричні осі і будують верхню основу призми. Проводять вертикальні ребра.

3) Для побудови отвору на бічну поверхню наносять лінії горизонтальних перерізів, виконаних площинами, розміщеними на відстанях від горизонтальної координатної площини, які дорівнюють відповідно  $z_I, \dots, z_{IV}$ .- Сліди вертикальних січних площин на верхній основі будують за допомогою відстаней  $y_I, \dots, y_{III}$ . Взаємний перетин ліній перерізів поверхні призми визначає контур отвору - точки  $1, \dots, 10$ . Протилежний контур отвору будують також з використанням січних площин, що продемонстровано на прикладі точки  $1''$ .

4) Зображення доповнюють необхідними лініями, графічно оформлюють.

На рис. 1.24 зображена прямокутна ізометрія деталі з вирізаною четвертиною. В даному випадку спочатку будують аксонометрію паралелепіпеда (основи) і циліндра. Побудову овалу було розглянуто раніше. Потім будують окремі деталі. Виріз виконують після повної побудови аксонометрії в тонких лініях.

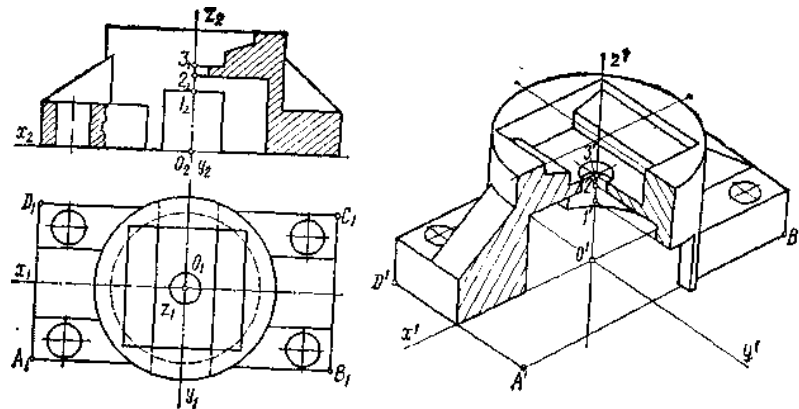


Рис. 1.24

Як вже зазначалось, аксонометрія об'єкта може бути побудована за табличними даними, одержаними в результаті розрахунків тощо. На рис. 1.25 зображено аксонометрію поверхні, координати точок якої є результатом розв'язування задачі формоутворення за допомогою обчислювальної техніки. Крім того, інженери, архітектори можуть зображувати в аксонометрії деякі форми в процесі творчого пошуку. При цьому виникає зворотна задача - відтворити ортогональні проекції об'єкта за його аксонометричним зображенням.

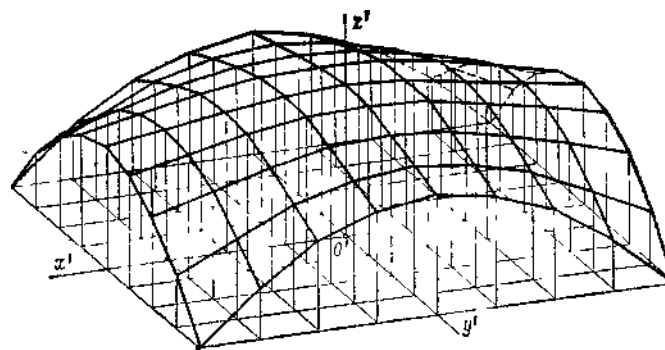


Рис. 1.25

## Лекції 2-4.

### Тема 2. ПОБУДОВА ТІНЕЙ У ПРЯМОКУТНИХ ТА АКСОНОМЕТРИЧНИХ ПРОЕКЦІЯХ.

Розвиток методів виконання зображень об'ємних предметів на площині визначається переходом від контурних лінійних зображень до світлотіньових, здатних наочно відтворювати їх просторову будову. У цій главі розглянуто основні способи побудови контурів тіней різноманітних геометричних тіл і композицій, складених з них, які найчастіше використовують в архітектурному проектуванні та інженерному конструюванні.

#### 2.1. Світлотінь як засіб архітектурної та інженерної графіки.

Графічне зображення архітектурно-будівельних об'єктів повинне сприяти якнайповнішому відтворенню їх реальних властивостей. Ефективним засобом досягнення виразності зображень таких об'єктів є світлотіньове моделювання їхньої форми. Світлотінь - це закономірний розподіл ступенів освітленості поверхні тіла. Відображення світлотіні на ортогональних і наочних зображеннях будівель та споруд надає рельєфності зображенню, відтворює дійсний вигляд освітленого об'єкта, дає можливість розв'язувати інженерні задачі, пов'язані з оцінкою інсоляції забудови тощо. Крім того, пошуки естетично виразної форми неможливі без урахування характеру розподілу на її поверхні світла і тіні.

Існують декілька способів зображення світлотіні на поверхнях форм. Серед них:

- означення границь тіней з однотонною заливкою затінених областей;
- відтворення наближеного до реальної фізичної картини розподілу світла і тіні на поверхні тіла відмивкою, тобто з урахуванням його форми та повітряної перспективи.

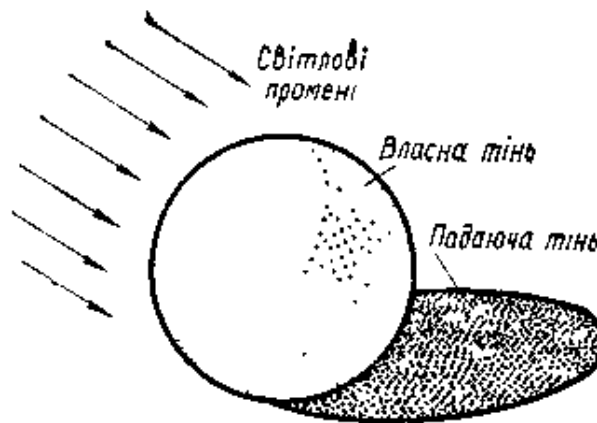


Рис. 2.1

Характеристики світлотіні на поверхні залежать від освітленості ділянок поверхні, положення джерела світла та спостерігача відносно об'єкта. Так, на віддалених від спостерігача об'єктах тіні сприймаються менш контрастно, ніж на близьких. Формується світлотінь від природного (сонячного) або штучного джерела світла:

- прямого, що безпосередньо йде з джерела;
- відбитого від інших поверхонь (направленого або розсіяного).

Залежно від ступеня освітленості поверхні звичайно розрізняють (рис. 2.1):



- поверхні, що освітлені променями, перпендикулярними до них;
- поверхні, освітлені похилими променями;
- зону переходу від освітлених до затінених областей (границю тіней);
- власну тінь, що утворюється на поверхні, на яку не потрапляють прямі промені світла;
- рефлекс, що утворюється відбитими променями в зоні тіні;
- полиск - найяскравішу точку поверхні;
- падаючу тінь - затінену непрозорим тілом частину освітленої поверхні.

До геометричних задач зображення світлотіні на поверхнях архітектурних об'єктів належать задачі побудови контурів (границь) тіней та ліній однакової освітленості - ізофот.

## 2.2. Загальні положення побудови тіней.

При зображенні тіней сонячні світлові промені вважають паралельними, а якщо джерело світла штучне точкове, то світлові промені приймають як такі, що виходять з однієї точки. Можлива побудова тіней також від лінійних джерел світла.

На рис. 2.2 схематично зображено утворення тіні на площині  $\Pi$  від тіла  $\Phi$ , яке освітлюють сукупністю променів, що поширюються від точкового джерела, та променів даного напрямку. При цьому утворюються тіні власні і падаючі. Власна тінь ( $BT$ ) утворюється на неосвітленій частині поверхні - її контур  $n$  визначає контур падаючої тіні ( $PT$ ). Умовно при зображенні тіней інтенсивність падаючої тіні приймають приблизно вдвічі сильнішою, ніж власної.

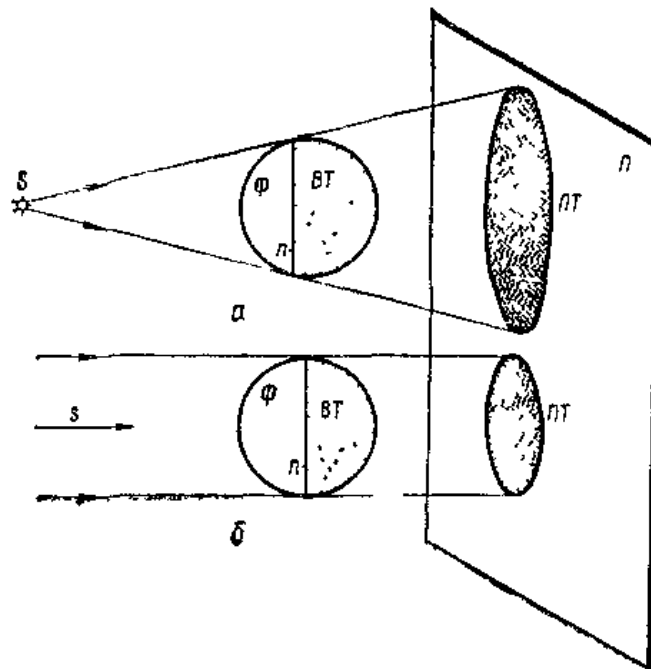


Рис. 2.2

При побудові тіні в прямокутних проекціях прийнято такі основні позначення:

- $s (s_1, s_2, s_3, s_4)$  - світловий промінь і його проекції на відповідні площини проєкцій (поверхні);
- $A_{T1}, A_{T2}, A_{T3}, A_{T4}$  - тіні від точки на відповідні площини проєкцій (поверхні);
- $A_T$  - тінь від точки на поверхні, площині, в тому числі і на площині проєкцій, коли за

рисунок зрозуміло, на якій з поверхонь або площин побудовано тінь;

- $a_{T1}, a_{T2}, a_{T3}, a_{TD}, \dots, a_T$  - тіні від прямої;
- $S (S_1, S_2, S_3, S_A)$  - точкове джерело світла та його проєкції.

В аксонометрії:

- $s' (s'_1, s'_2, s'_3, s'_A)$  - світловий промінь і його проєкції на відповідні площини проєкцій (поверхні);
- $A'_{T1}, A'_{T2}, A'_{T3}, A'_{TD}$ , або просто  $A'_T$ , - тіні точки на відповідні площини (поверхні);
- $S' (S'_1, S'_2, S'_3, S'_A)$  - точкове джерело світла та його аксонометричні проєкції.

Для спрощення викладення матеріалу в деяких випадках будемо вживати: замість виразу «побудувати проєкції контурів тіні» - «побудувати тінь», замість «площина (поверхня), утворена світловими променями» - «світлова променева або світлова площина (поверхня)».

З геометричної точки зору побудова власних тіней будь-якої поверхні - це розв'язання задачі на побудову на ній ліній дотику іншої, обгортаючої її поверхні - конічної або циліндричної (див. рис. 2.2).

Побудову падаючих тіней зводять до розв'язування задач на перетин поверхні (площини), на яку падає тінь, з прямою лінією (тінь точки), з площиною (тінь прямої), іншою поверхнею (тінь кривої або поверхні).

У прямокутних проєкціях напрям світлових променів беруть паралельним діагоналі паралелепіпеда, грані якого паралельні координатним площинам (рис. 2.3, а). Проєкції діагоналі на грані паралелепіпеда визначають напрями проєкцій світлових променів на відповідні площини проєкцій.

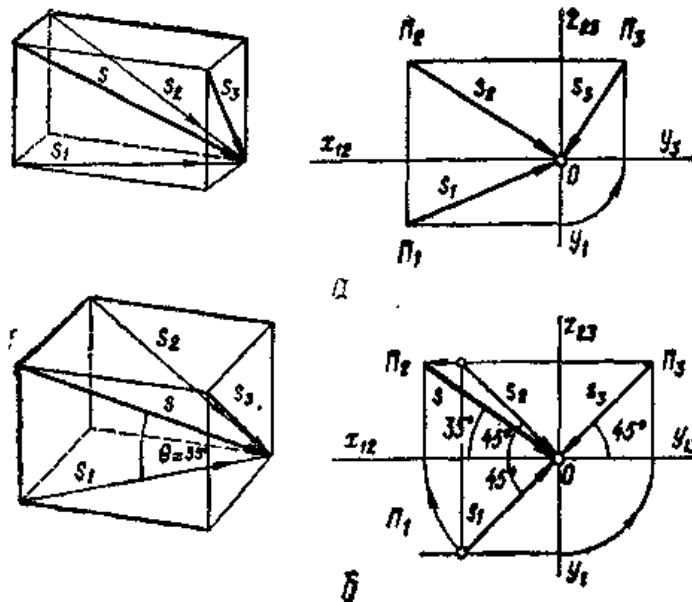


Рис. 2.3

В окремих випадках згаданий паралелепіпед замінюють кубом. При цьому проєкції світлових променів на площини проєкцій утворюють з осями проєкцій кути  $45^\circ$  (рис. 2.3, б). Дійсний кут нахилу цих променів до площин проєкцій дорівнює приблизно  $35^\circ$ . Таке положення світлових променів відносно площин проєкцій часто називають *стандартним*.

Точкове джерело задають двома проєкціями точки  $S$ .

В аксонометричній проекції при побудові тіней найчастіше використовують паралельні промені, які визначаються аксонометрією напрямку променя та його проекцією на горизонтальну площину (вторинна проекція) або ж на інші площини (рис. 2.4).

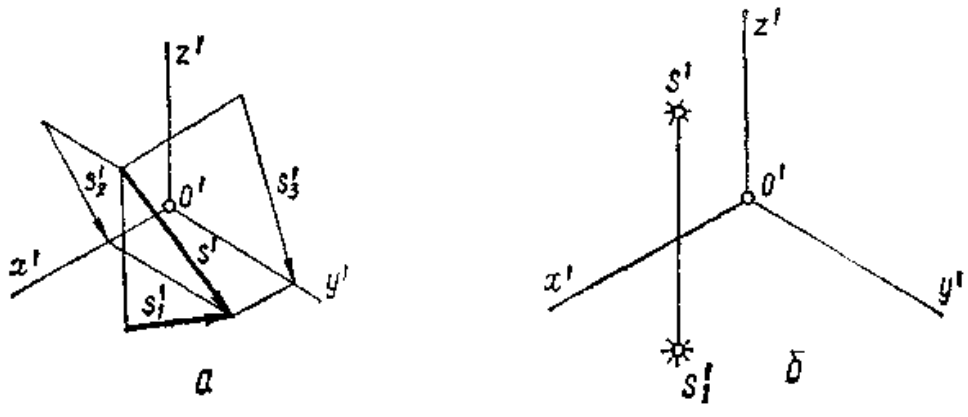


Рис. 2.4

При точковому джерелі світла його проекції задаються аксонометричною та вторинною проекціями джерела (рис. 2.4, б).

Принципово побудова тіні в прямокутних проекціях і в аксонометрії не різняться. Щоб побудувати тіні на геометричній формі в прямокутній проекції та в аксонометрії, необхідно спочатку побудувати відповідні проекції променя заданого напрямку, а потім незалежно розв'язувати задачу побудови тіні в прямокутних проекціях і в аксонометрії. Можливий і інший підхід - спочатку побудувати тіні в прямокутних проекціях, а потім аксонометрію геометричної форми разом з тінями. Іноді застосовують і зворотний перехід від аксонометрії до прямокутних проекцій

**2.3 Побудова тіней способом сліду променя.**

2.3.1 Побудова тіні точки.

Тінню точки є точка перетину променя, що проходить через точку, з площиною чи поверхнею, тобто - слід променя на площині (поверхні). Для побудови тіні точки необхідно через точку провести світловий промінь і розв'язати задачу перетину його з площиною чи поверхнею.

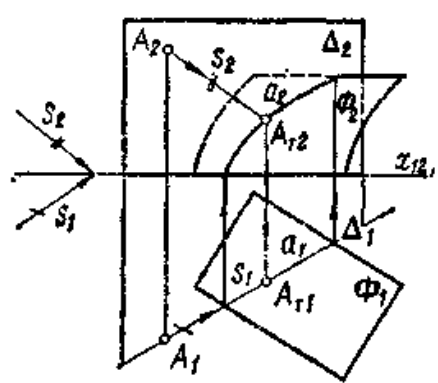


Рис. 2.5

Падаючу тінь точки  $A$  на поверхню  $\Phi$  (рис. 2.5) будують у такій послідовності. Паралельно заданому напрямку світлових променів через точку  $A$  проводять проєкції  $s_1, s_2$  променя  $s$ . Через промінь проводять січну площину  $\Delta$  і будують лінію її перетину з поверхнею  $\Phi$  (лінія  $a$ ). Точка перетину променя  $s$  з лінією  $a$  і є тінню точки  $A$  на поверхні  $\Phi$ .

Аналогічно будують тінь точки на площині загального положення (рис. 2.6,  $a$ ) та на площинах проєкцій (рис. 2.6,  $b, в$ ).

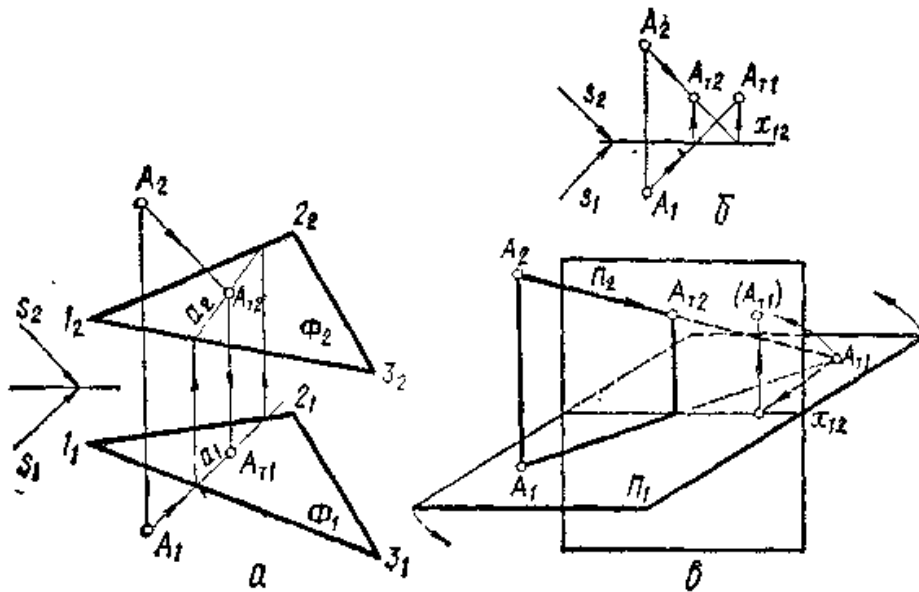


Рис. 2.6

Тіні точки на площині та поверхні на аксонометричній проєкції будують за тією ж методикою (рис. 2.7).

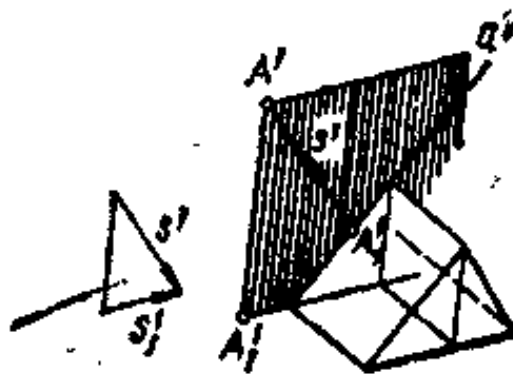


Рис. 2.7

### 2.3.2. Побудова тіні кривої лінії.

Тінь кривої лінії на поверхні чи площині - це лінія перетину лінійчатої світлової поверхні, що утворена світловими променями і проходить через криву, з заданою поверхнею чи площиною. Тінь лінії будують як сукупність тіней її точок (рис. 2.8,  $a$ ).

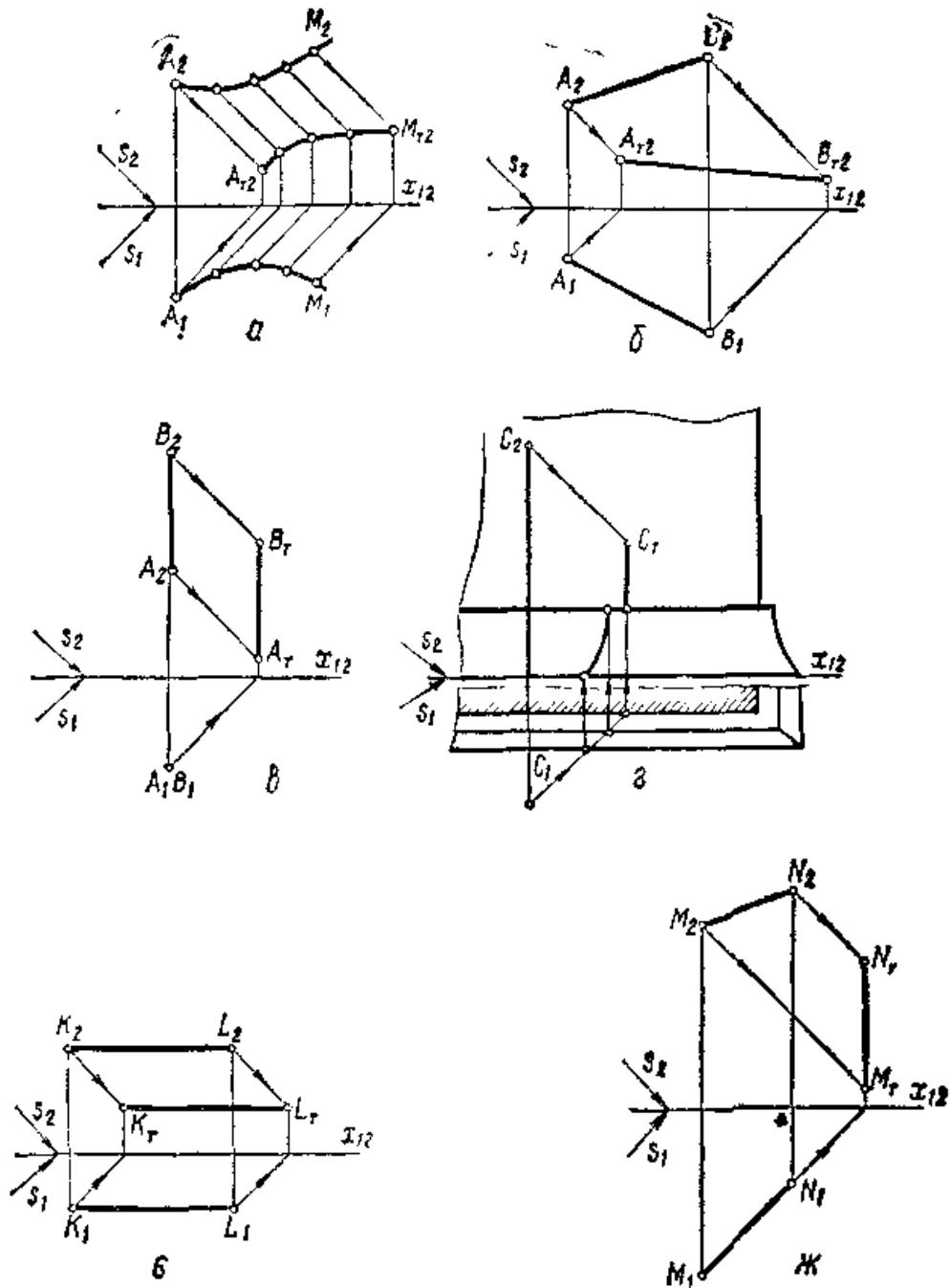


Рис. 2.8

### 2.3.3. Побудова тіні прямої лінії.

Тінь прямої на поверхні чи площині - це лінія перетину світлової площини, що проходить через пряму, з заданою поверхнею чи площиною (рис. 2.8, б).

Практичне значення мають окремі випадки побудови тіней відрізків прямих, які розглянемо відносно фронтальної площини проєкцій, а саме:

- тінь на фронтальну площину від відрізка вертикальної прямої вертикальна (рис. 2.8, в), а на поздовжню форму - дзеркально відтворює її профіль (рис. 2.8, з);
- тінь фронтально-проєктуючого відрізка на фронтальну площину збігається з

фронтальною проекцією світлового променя (рис. 2.8, *д*). Тінь такого відрізка на яку завгодно поверхню залишається на фронтальній проекції відрізком прямої (рис. 2.8, *є*);

- тінь відрізка прямої на паралельну площину проєкцій паралельна прямій, а її довжина дорівнює довжині відрізка (рис. 2.8, *є*). Уданому випадку побудовано тінь відрізка поздовжньої прямої;

- тінь відрізка прямої, що належить світловій площині, збігається зі слідом цієї площини (рис. 2.8, *ж*).

За аналогічних умов ці властивості тіні зберігаються відносно інших площин. В аксонометрії тінь прямої на паралельну їй площину залишається паралельною прямій, а тінь лінії, що належить світловій площині, збігається з лінією перетину її з площинами та поверхнями.

### 2.3.4 Побудова тіні плоского відсіку площини.

Тінь плоского відсіку площини будують як сукупність тіней точок його контуру (рис. 2.9, *а*). Для побудови тіні плоского многокутника досить побудувати тіні його вершин і сполучити їх відрізками прямих. При довільному положенні світлового променя побудову падаючої тіні на фронтальну площину від горизонтального квадрата показано на рис. 2.9, *б*.

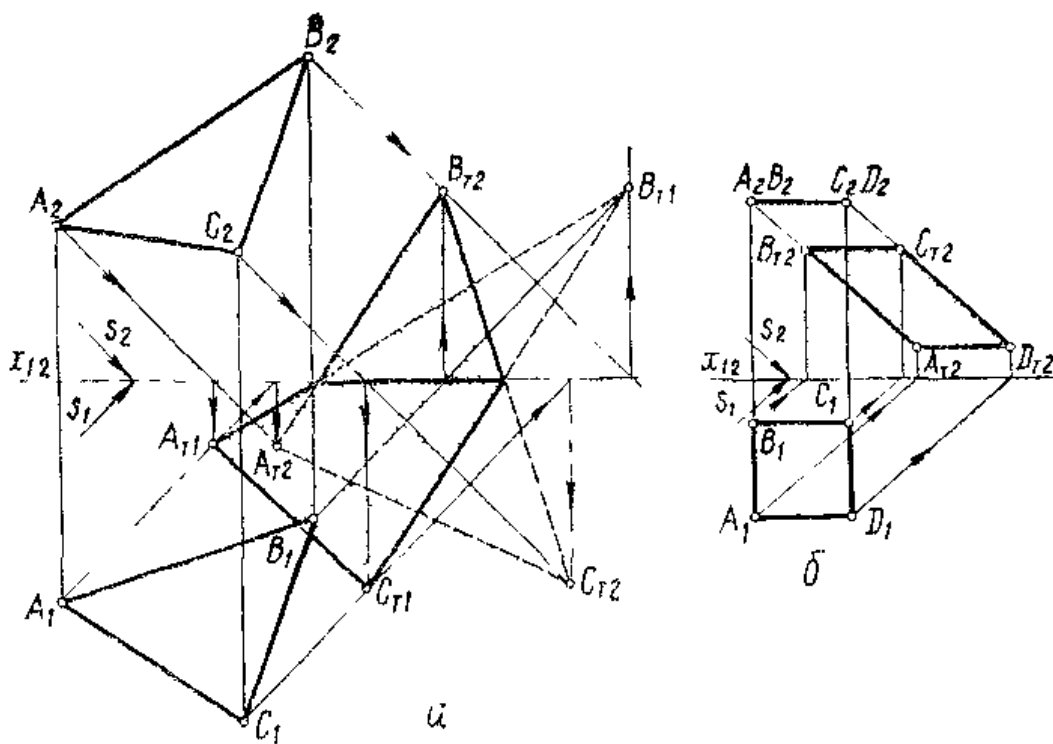


Рис. 2.9

На основі побудови тіні такого квадрата будують тінь інших фігур, вписаних в нього (рис. 2.10).

При стандартному положенні світлового променя (з нахилом його проєкцій  $45^\circ$ ) побудову тіні, наприклад від квадрата, на фронтальну площину можна спростити - виконати без використання горизонтальної проєкції. Але в цьому випадку необхідно знати відстань  $m$  від центра квадрата до фронтальної площини. На фронтальній площині ця відстань визначає положення сліду світлової променевої площини, що проходить через центр квадрата (рис. 2.11).

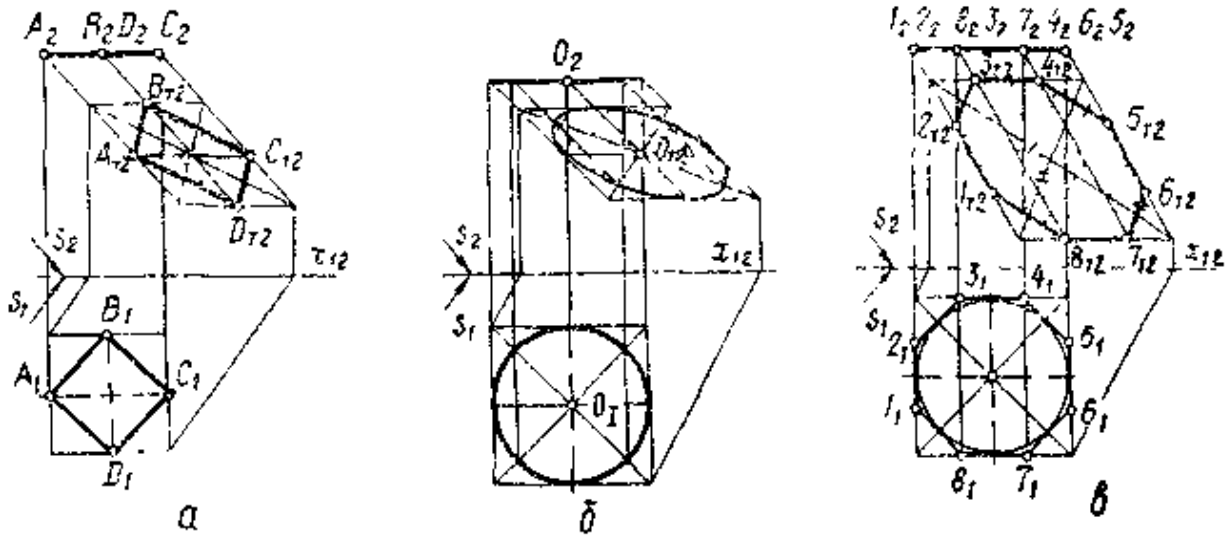


Рис. 2.10

Тіні вершин квадрата  $A$  і  $C$ , що належать цій площині, визначаються на її фронтальному сліді - точки  $A_T, C_T$ . Точки  $B_T, D_T$  будують на горизонтальних прямих, проведених через побудовані точки тіні. При цьому довжини відрізків тіні дорівнюють довжині сторони квадрата. Ділянки контуру тіні  $A_TB_T, C_TD_T$  збігаються з фронтальною проекцією світлового променя.

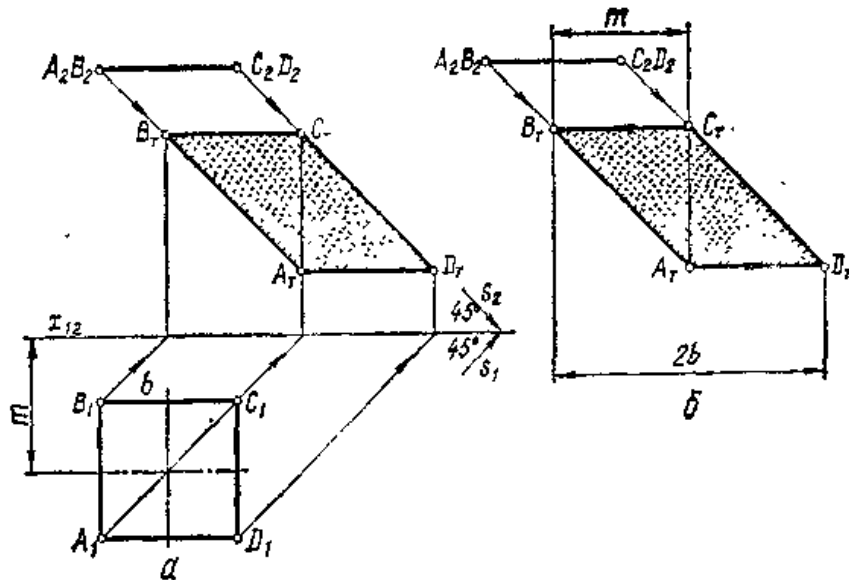


Рис. 2.11

За допомогою цього прийому можна побудувати тінь від горизонтального круга (рис. 2.12, а) та від круга, що лежить у профільній площині (рис. 2.12, б), на фронтальну площину без використання горизонтальної проекції. Горизонтальну проекцію, як і в попередньому прикладі, наведено для наочності. Хід побудови такий. За допомогою відстані  $m$  зображують слід площини, що проходить через центр круга. Довжина фронтальної проекції описаного квадрата дорівнює діаметру круга. Проекцію вписаного квадрата визначають,

розділивши радіус круга у співвідношенні 7 : 3. Будують падаючі тіні на фронтальну проекцію від горизонтальних та профільних квадратів і точки  $O$ . Сполучають необхідні точки, щоб отримані контур тіні - еліпс.

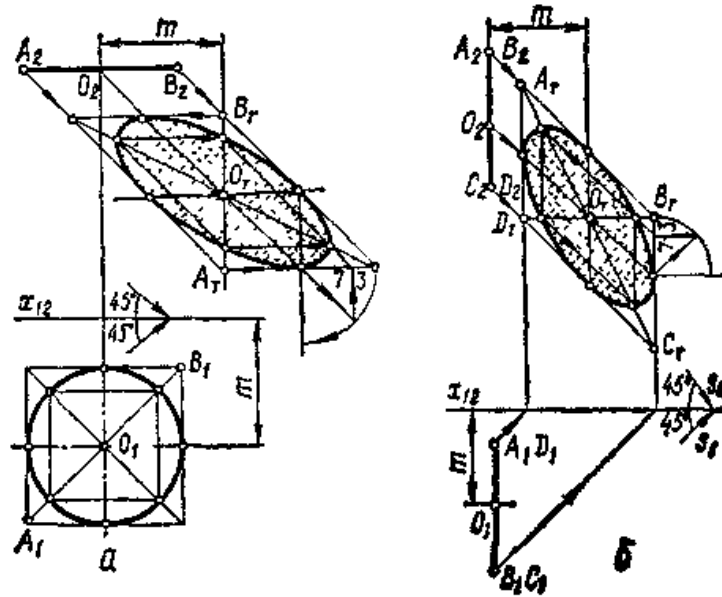


Рис. 2.12

Слід пам'ятати, що тїнь плоскої фігури на паралельну площину повторює форму цієї фігури (рис. 2.13, а). Тїнь плоскої фігури, що належить світловій площині, на будь-яку поверхню збігається із слідом світлової площини на цій поверхні (рис. 2.13, б). Щоб побудувати тїнь профільно розміщеної фігури, доцільно скористатися її профільною проекцією (рис. 2.13, в), попередньо побудувавши профільну проекцію світлового променя  $s_3$ .

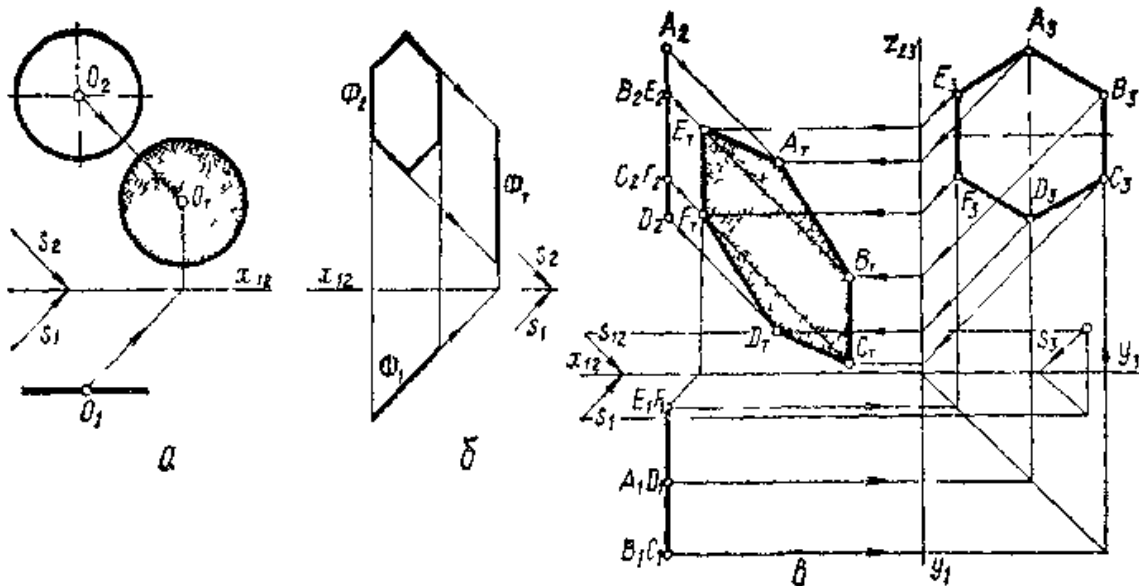


Рис. 2.13

Тїнь від круга на горизонтальну площину в аксонометрії показано на рис.2.14.



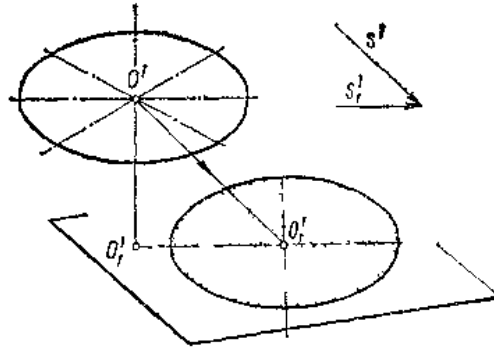


Рис. 2.14

## 2.4. Побудова тіней способом обгортаючих поверхонь.

Щоб побудувати власну тінь об'ємного тіла, необхідно знайти лінію дотику обгортаючої поверхні, твірні якої розміщені у просторі паралельно світловому променю (циліндрична поверхня) або ж виходять з однієї точки (конічна поверхня). Побудову обгортаючої поверхні зводять до побудови множини дотичних площин. Для багатьох тіл побудову дотичних площин логічно суміщати з побудовою їхніх тіней.

### 2.4.1. Побудова власної тіні об'ємних тіл.

Розглянемо приклади побудови обгортаючих поверхонь і на цій основі - контурів власної тіні об'ємних тіл.

На основі прикладів побудови дотичних площин, паралельних заданій прямій, будують лінію дотику циліндричної поверхні, що обгортає задану (рис. 2.15). Цю лінію будують окремими ділянками. На циліндричній частині поверхні лінії дотику 1-3, 2-4 будують так, як було показано це раніше на прикладі побудови дотичної до циліндра. Визначення точок дотику 5, 6 в довільному горизонтальному перерізі  $\Delta$  виконують за допомогою вписаного дотичного (по лінії перерізу) допоміжного конуса (див. приклад побудови точок дотику площин, паралельних заданому напрямку, до сфери у визначеному перерізі). Те, що конус спрямований вершиною вниз, не вносить ніяких принципових змін у побудову шуканих точок.

Необхідним етапом побудови лінії дотику є пошук точок на контурі зображеної поверхні та найвищої (найнижчої) точки лінії дотику 8.

Щоб знайти точки на фронтальному контурі поверхні обертання, потрібно уявити фронтально проектуючий циліндр, що є дотичним до поверхні по її фронтальному контуру. Досить побудувати дотичну площину до цього циліндра, щоб одночасно визначити точку дотику на контурі поверхні обертання. Практично для побудови таких точок (у даному випадку точки 7) необхідно на фронтальній проекції провести дотичну, паралельну заданому напрямку  $s_2$ , до контуру тіла обертання.

Найвища точка шуканої лінії знаходитиметься в осьовій площині, паралельній заданому напрямку. Для побудови найвищої точки використовують допоміжний описаний конус, твірні якого мають кут нахилу до основи, що дорівнює його дійсній величині. Для цього обертанням навколо вертикальної осі визначають фронтальне положення відрізка прямої, що задає вгаданий напрям. Осьова площина разом з твірною поверхні, що лежить в ній, також обертанням навколо осі тіла розміщується фронтально. При цьому твірна, що лежить в осьовій площині, природно, суміститься з фронтальним контуром поверхні. Для визначення точки 8

необхідно провести дотичну до суміщеної твірної паралельно побудованій фронтальній проекції напрямку. Після цього осьову площину разом з точкою  $\bar{\delta}_2$  повертають зворотним обертанням у вихідне положення. Іншими словами, щоб побудувати найвищу (найнижчу) точку, необхідно знайти фронтальне положення заданого напрямку, паралельно йому провести дотичну (дотичні) до контуру тіла обертання. Цю точку (точки) шляхом зворотного обертання повернути в осьову площину, яка є паралельною заданому напрямку.

Побудову конічної обгортаючої поверхні з вершиною  $S$  показано на рис. 2.16.

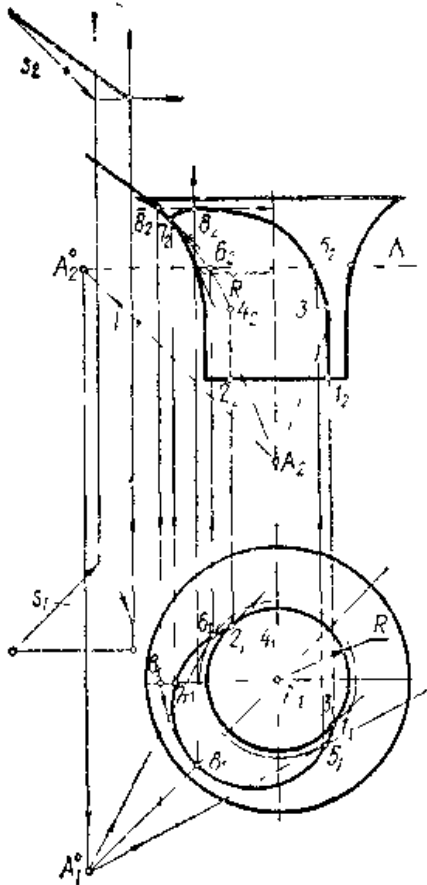


Рис. 2.15

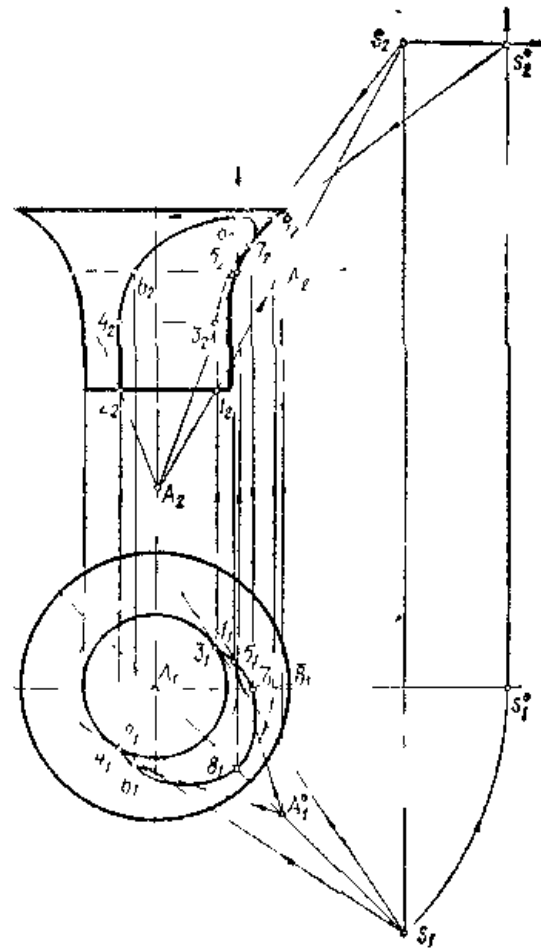


Рис. 2.16

Відрізки ліній 1-3 і 2-4 будують з використанням горизонтальної проекції як лінії дотику площин, що проходять через задану точку  $S$ . Точки 5 і 6 у довільному горизонтальному перерізі визначають за допомогою вписаного дотичного допоміжного конуса, спрямованого в даному випадку вершиною  $A$  вниз. Щоб визначити точку 7 на фронтальному контурі, проводять дотичну до контура з точки  $S_2$ . Найвищу точку 8 будують у такій послідовності: осьову площину, що проходить через точку  $S$ , обертанням навколо осі заданого тіла розміщують фронтально. З точки  $S_2$  проводять дотичну до контуру і одержують точку  $\bar{\delta}_2$  потім точку  $\bar{\delta}_1$ . Зворотним обертанням з використанням горизонтальної проекції визначають найвищу точку 8 ( $\delta_1, \delta_2$ ).

#### 2.4.2. Побудова власних і падаючих тіней основних геометричних форм.

Використовуючи методику побудови дотичних площин та обгортаючих поверхонь, можна будувати контури власних і падаючих тіней основних геометричних форм. Розглянемо

прикладі. Контуром власної тіні призми (рис. 2.17) є ламана лінія 1-2-3-4-5. Обгортаюча поверхня складається з світлових площин, які в перетині з площинами проєкцій визначають контур падаючої тіні.

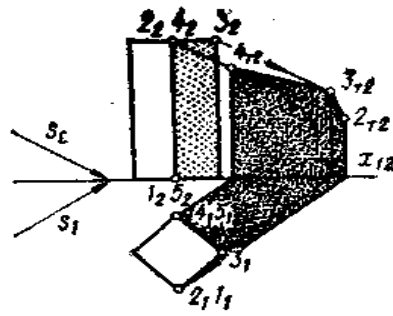


Рис. 2.17

Падаюча тінь від піраміди (рис. 2.18) визначається світловими площинами, що проходять через ребра  $T-1 \setminus T-2$ . Вказані ребра є частиною контуру власної тіні піраміди.

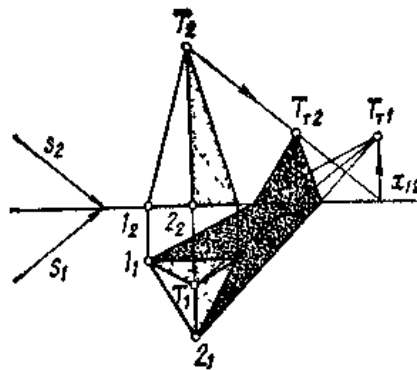


Рис. 2.18

Аналогічно будують власні і падаючі тіні циліндра і конуса (рис. 2.19).

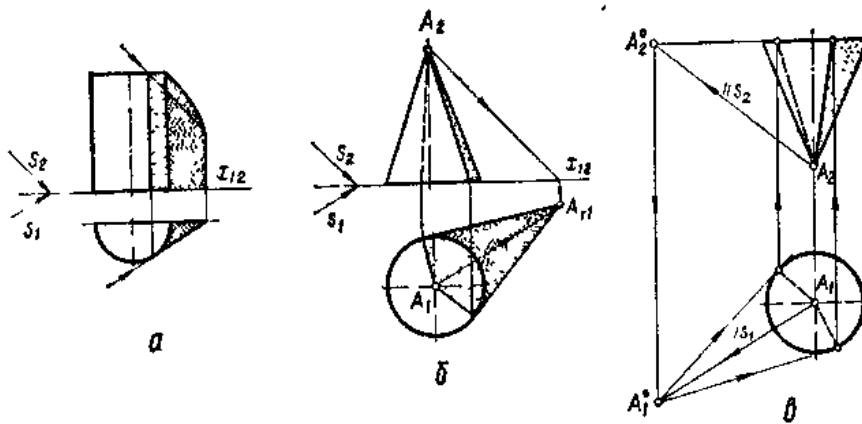


Рис. 2.19

Побудову власних та падаючих тіней паралелепіпеда і куба при стандартному положенні

світлових променів ( $45/45^\circ$ ) показано на рис. 2.20 і 2.21, де  $a$  - слід світлової площини, що проходить через центр куба.

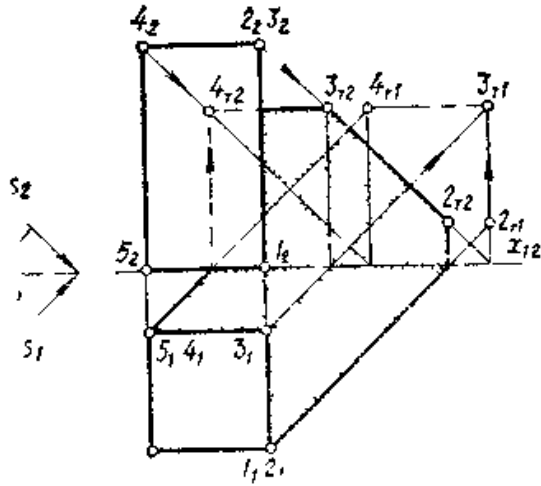


Рис. 2.20

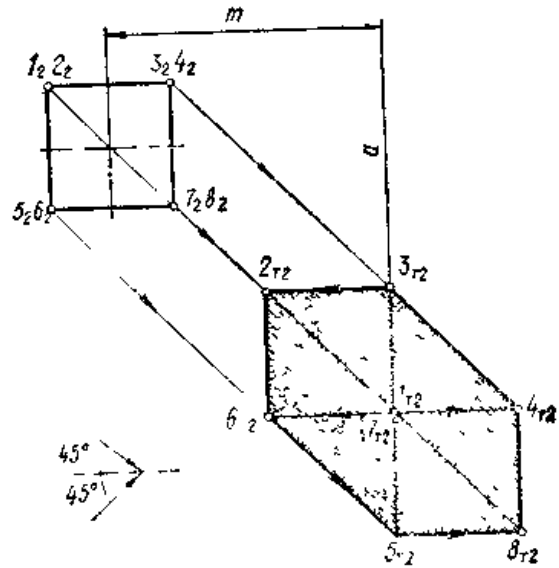


Рис. 2.21

Якщо характер тіні на поверхні вертикальних призм чи циліндрів не змінюється зі зміною їхньої висоти, то для пірамід і конусів зміна їхньої висоти впливає на відносну величину затіненої поверхні. Для конуса критичною висотою є така, при якій тінь від вершини падає на контур основи (рис. 2.22). Власна тінь при цьому відображується твірною. Це стає можливим тоді, коли твірні конуса нахилені до горизонтальної площини під кутом, що дорівнює дійсній величині кута нахилу світлового променя.

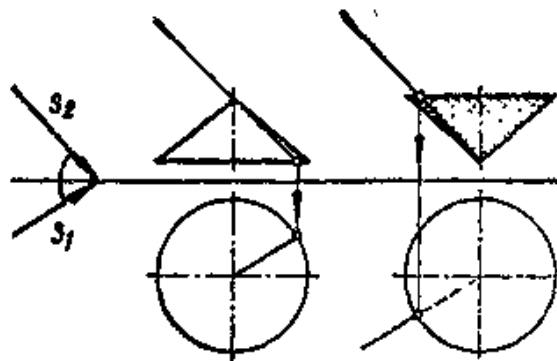


Рис. 2.22

На поверхнях обертання контур власної тіні визначають за допомогою описаних або вписаних конусів і циліндрів. На рис. 2.23 зображено побудову тіні на поверхні еліпсоїда обертання при довільному розміщенні в просторі світлового променя. В даному прикладі світловий промінь зафіксовано проєкціями відрізків прямих. Точки 1 і 2 - це точки дотику до контуру фронтальної проєкції світлового променя. Точки 3 і 4 будують за допомогою вертикального описаного циліндра. Точки в проміжних довільних перерізах визначають за допомогою описаних конусів. Для побудови найвищої та найнижчої точок границі власної тіні

еліпсоїда використовують конуси, що мають «критичну» висоту.

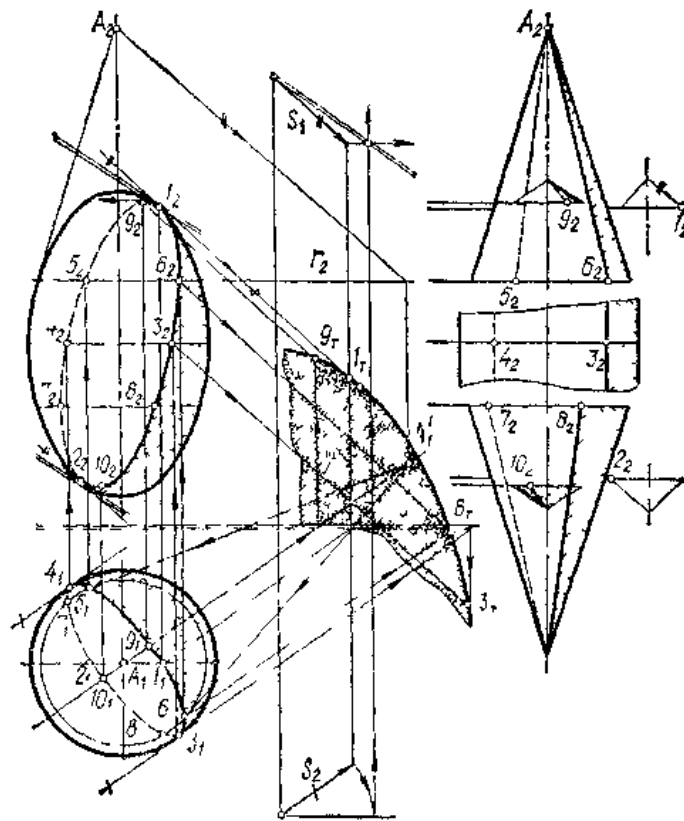


Рис. 2.23

Власну тінь сфери доцільно будувати з використанням способу заміни площин проєкцій (рис. 2.24).

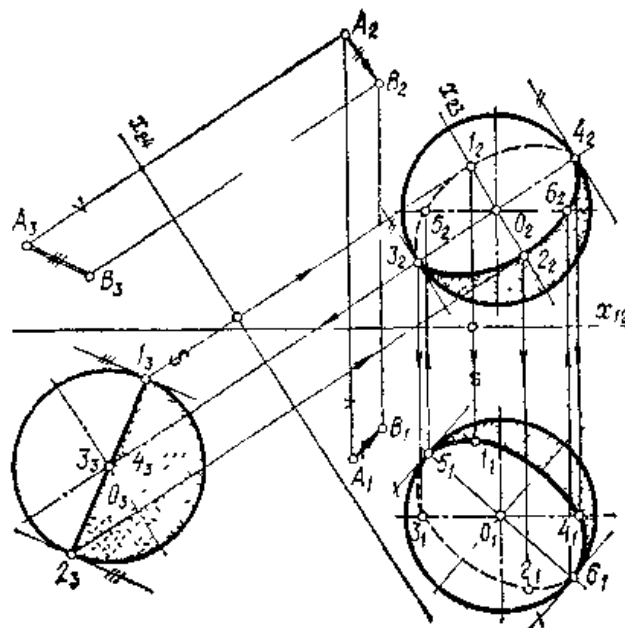


Рис. 2.24

Допоміжну площину вибирають так, щоб відрізок світлового променя проектувався на неї дійсною величиною  $A_3B_3$ . Досить провести дотичні до кола з центром  $O_3$ , щоб знайти лінію власної тіні сфери (проектуючий слід). Зворотна побудова дозволяє відобразити контур власної тіні сфери на  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ .

При стандартному положенні світлового променя ( $45/45^\circ$ ) побудову тіней на поверхнях обертання здійснюють з використанням деяких спрощень. На поверхні циліндра лінія розподілу світла і тіні ділить фронтальну проекцію радіуса основи у співвідношенні 3 : 7 (рис. 2.25).

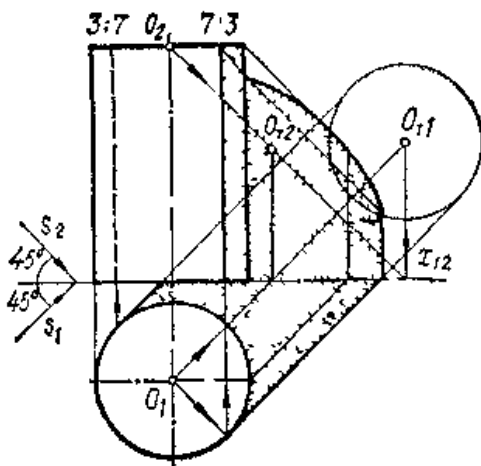


Рис. 2.25

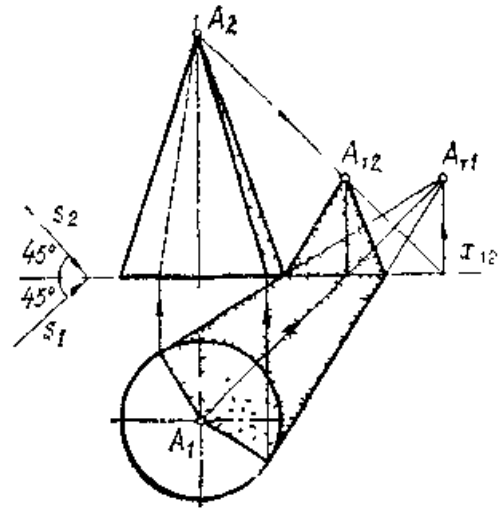


Рис. 2.26

Тінь на поверхні конусів з довільним кутом нахилу твірних до основи будують як показано на рис. 2.26, з кутом нахилу  $45^\circ$  - на рис. 2.27, а, а з кутом нахилу  $35^\circ$  - на рис. 2.27, б.

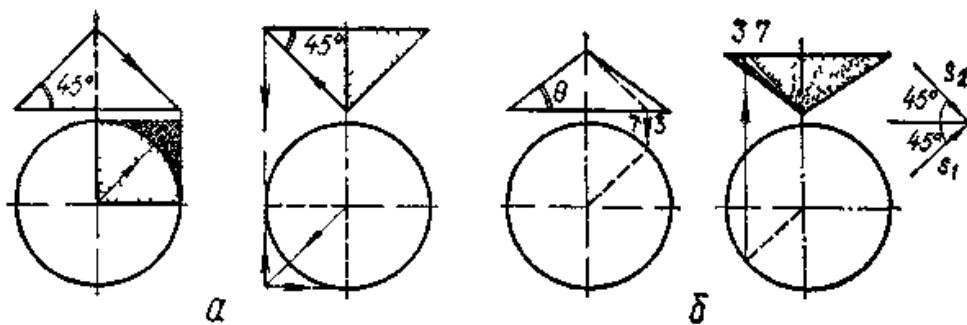


Рис. 2.27

Побудову власної тіні конуса довільної висоти за його фронтальною проекцією показано на рис. 2.28. Хід побудови збігається з нумерацією точок.

Побудову границі власної тіні сфери при стандартному положенні світлового променя показано на рис. 2.29. Спочатку будують точки  $1_2$  і  $7_2$  на фронтальному контурі, потім  $5_2$ ,  $9_2$  і  $3_2$ ,  $11_2$  - на перпендикулярних осях. З точок  $1_2$  і  $7_2$  проводять прямі під кутом  $30^\circ$  до похилої осі і знаходять точки  $4_2$  і  $10_2$ . Щоб побудувати точки  $6_2$ ,  $2_2$ ,  $8_2$  і  $12_2$ , відповідно з точок  $4_2$  і  $10_2$  проводять вертикальні та горизонтальні прямі, на яких відкладають по три однакових відрізки від точок  $4_2$  і  $10_2$ . Довжина кожного відрізка дорівнює відстані від точки  $4_2$  або  $10_2$  до вертикальної чи горизонтальної осі сфери. Горизонтальну проекцію контуру власної тіні

будують аналогічно.

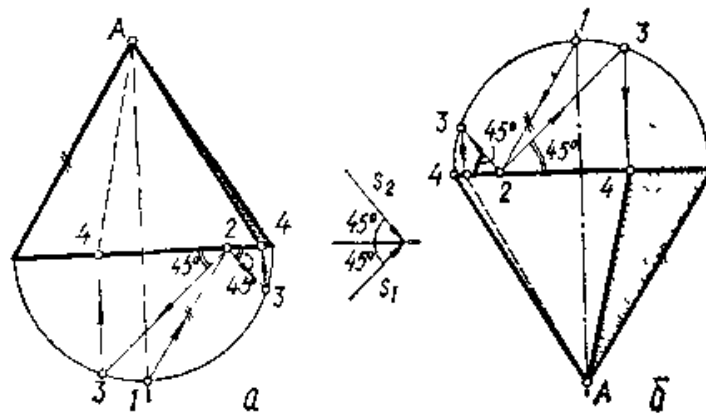


Рис. 2.28

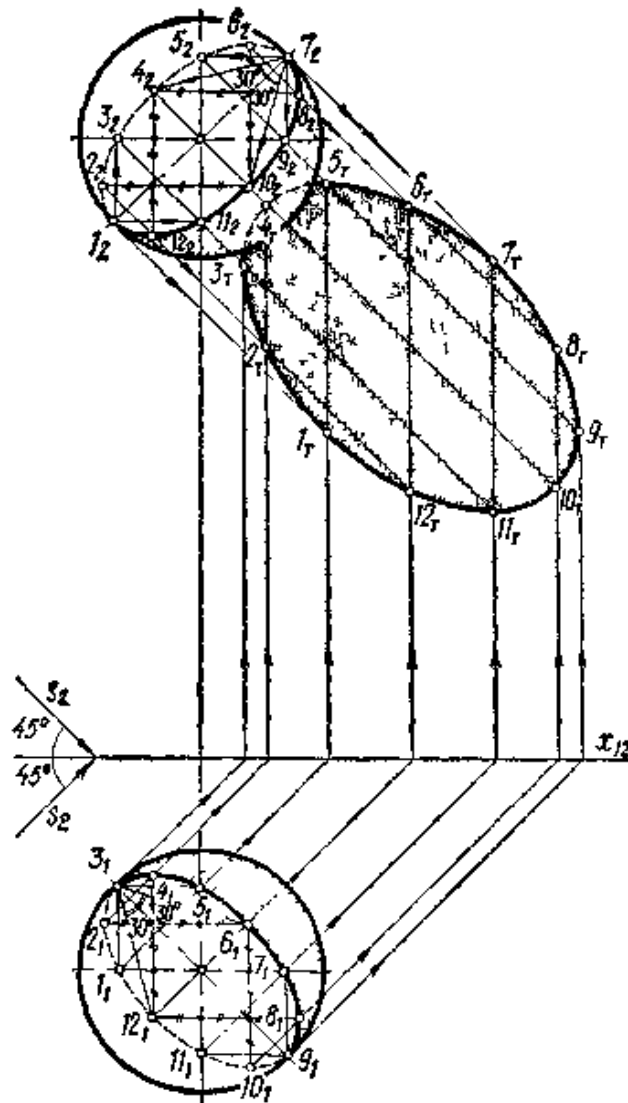


Рис. 2.29

Точки на фронтальному контурі сферичних форм будують за допомогою дотичних з кутом нахилу  $45^\circ$ . В поясоному перерізі точки тіні будують як на описаному циліндрі, тобто радіуси ділять у співвідношенні  $3:7$  по обидва боки від центра. В довільному горизонтальному перерізі точки тіні будують як на описаному конусі (див. рис. 2.28). Найвищу та найнижчу точки будують за допомогою конусів з кутом нахилу твірних  $35^\circ$  (див. рис. 2.27). Горизонтальну проекцію будують за правилами проекційного зв'язку.

При побудові контуру тіні форми обертання, складеної з кількох простих, слід звернути увагу на те, що наявність на контурі точки, в якій радіуси кривини лінії різні, зумовлює злом лінії тіні.

На поверхні обертання при стандартному положенні світлових променів контур власної тіні будують в певній послідовності (рис. 2.30). Проводять дотичні ( $45^\circ$ ) до контуру і одержують точки  $1$  і  $3$ .

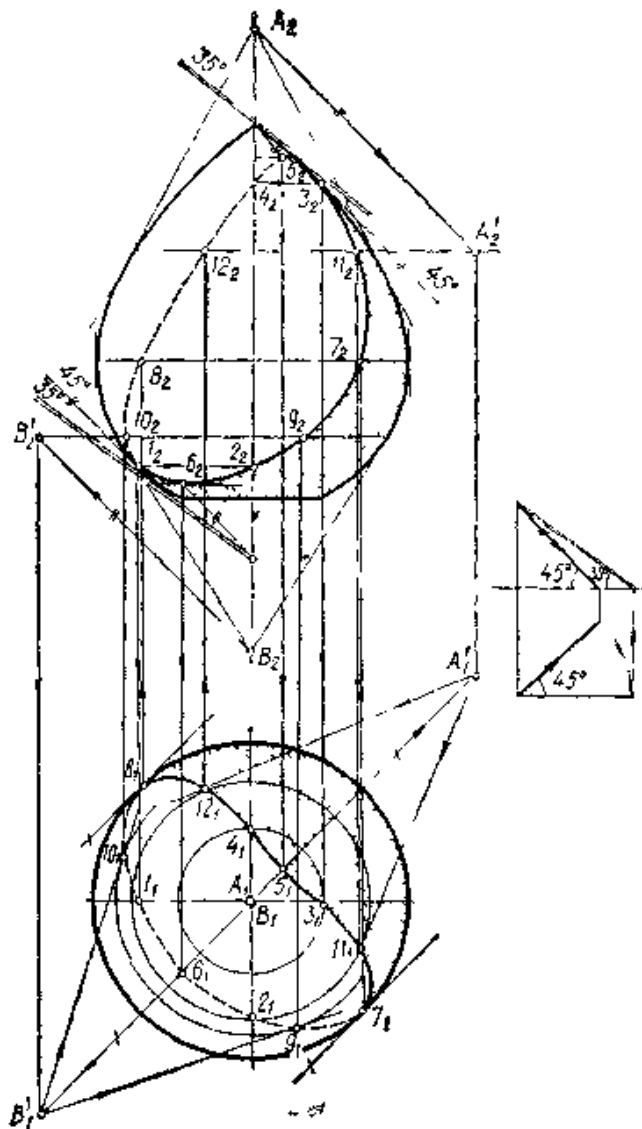


Рис. 2.30

Внаслідок симетрії відносно вертикальної світлової площини їм відповідають точки  $2$  і  $4$  на осі. Проводять дотичні ( $35^\circ$ ) до контуру і креслять відповідні горизонтальні перерізи. Їхні половини ділять у співвідношенні  $3:7$  і дістають точки  $5$  і  $6$  (найвищу та найнижчу). В перерізі між вертикальними дотичними будують точки  $7$  і  $8$  діленням радіусів у



співвідношенні 3 : 7. Задають довільні горизонтальні перерізи, будують допоміжні конуси і знаходять точки 9, 10, 11 і 12. Точки сполучають плавною кривою лінією з урахуванням видимих її ділянок.

Приклади побудови власних і падаючих тіней об'ємних тіл від точкового джерела світла в прямокутних проєкціях показано на рис. 2.31, а, а побудову тіней в аксонометрії від точкового джерела світла - на рис. 2.31, б.

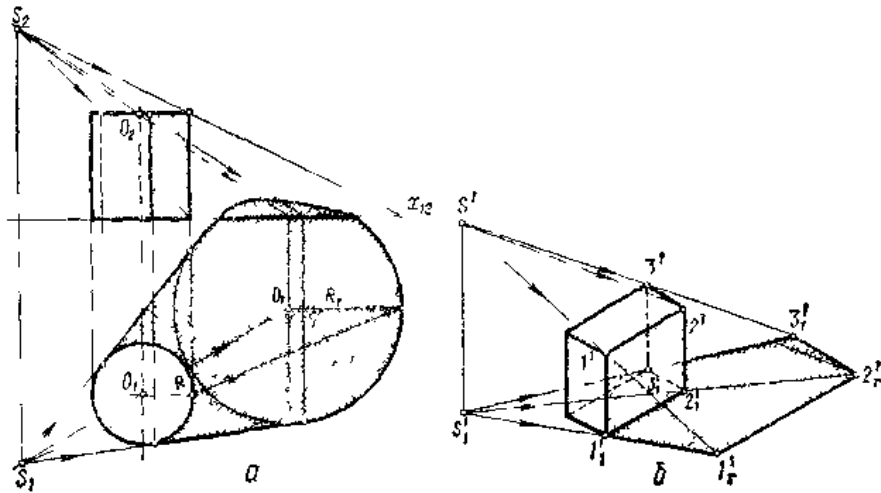


Рис. 2.31

### 2.5. Спосіб світлових січних площин.

Особливості цього способу полягають у тому, що через кожну з точок контуру, який створює тінь, проводять ряд світлових січних площин і будують лінії перетину їх з поверхнею, на яку падає тінь. Потім через точку, що дає тінь, в січній площині проводять світловий промінь до перетину з побудованою лінією перетину поверхні, де і визначають точку падаючої тіні. Цей спосіб доцільно використовувати у випадках, коли побудова ліній перетину променевої площини з поверхнею не викликає утруднень.

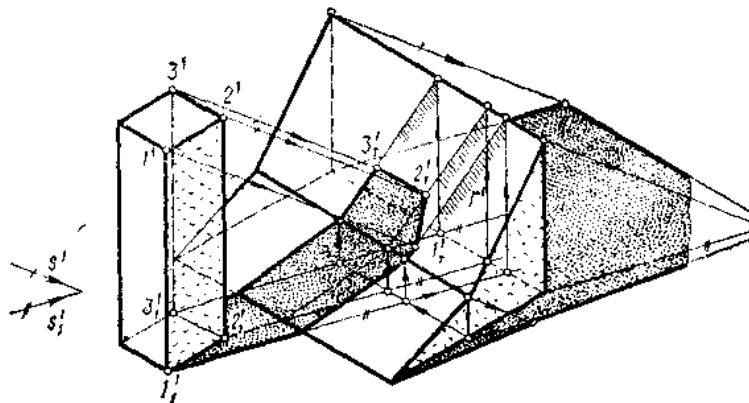


Рис. 2.32

Особливості застосування способу світлових січних площин продемонстровано на рис. 2.32. Наприклад, через точку 1' призми проводять вертикальну світлову площину  $\Gamma$  і будують лінію її перетину з поверхнею, на яку падає тінь. При цьому горизонтальний слід

світлової площини паралельний вторинній проекції світлового променя. Тінь точки  $I'$  визначається точкою перетину  $I'_T$  світлового променя, що проходить через точку  $I'$ , з лінією перерізу форми. Аналогічно будують інші точки падаючої тіні на цьому та на наступних рисунках.

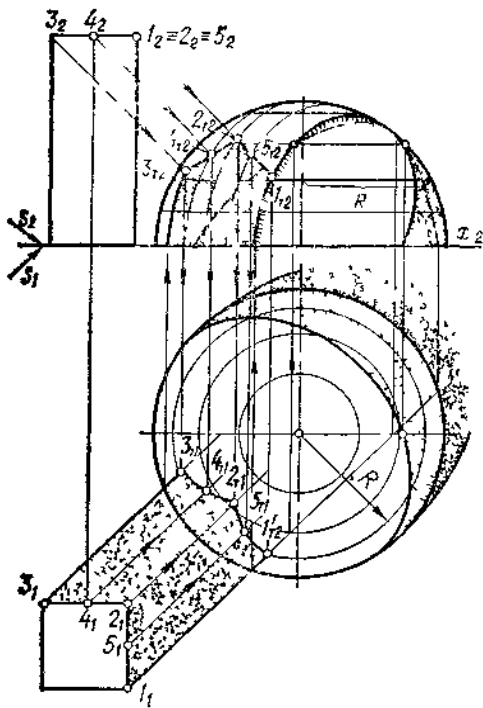


Рис. 2.33

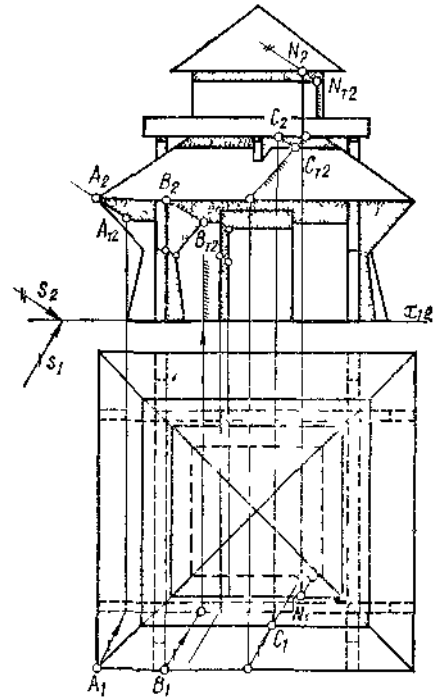


Рис. 2.34

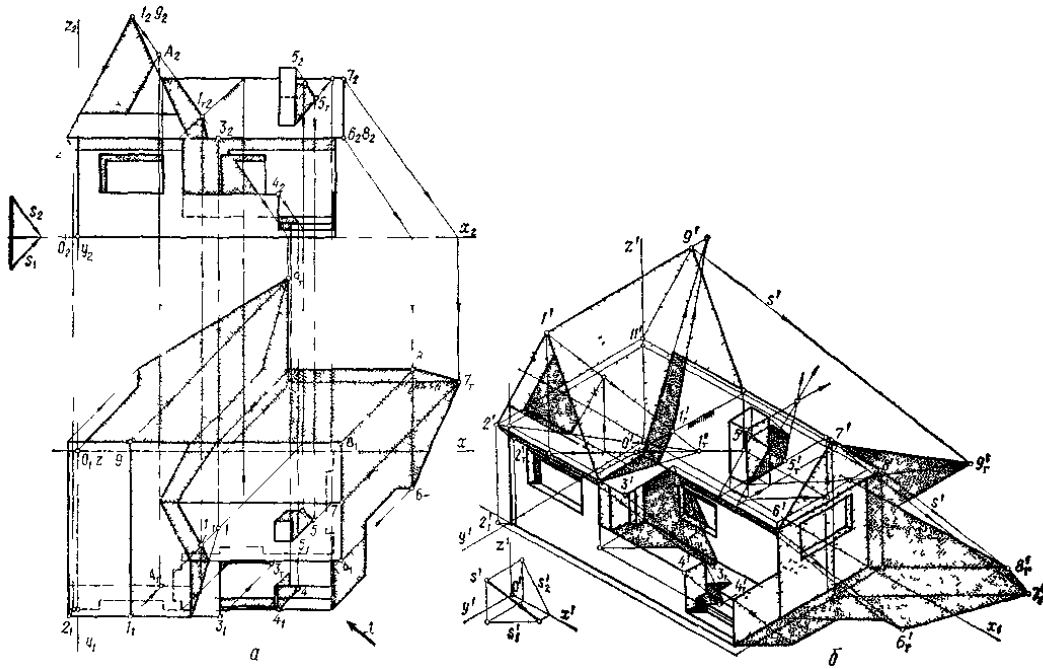


Рис. 2.35

Побудовою вертикальних перерізів визначають контур тіні від призми на півсферу (рис. 2.33).

Способом світлових січних площин побудовано також контури падаючих тіней на фасаді споруди (рис. 2.34).

Наприклад, для побудови тіні точки  $B$  через цю точку проводять вертикальну площину, паралельну горизонтальній проекції променя, до перетину з фронтальною площиною фасаду і на побудованій лінії перетину знаходять точку  $B_{T2}$ .

## Лекції 5-7.

### Тема3. ПОБУДОВА ПРОЕКЦІЙ З ЧИСЛОВИМИ ПОЗНАЧКАМИ.

При проектуванні генеральних планів забудови території розроблюють проекти горизонтального та вертикального планування, організації рельєфу, план земляних робіт та інші графічні матеріали, в яких використовують інформацію про поверхню ділянок, відведених під забудову. Проекти доріг, естакад, дамб, організації зелених насаджень, благоустрою території базуються на інформації про поверхню землі.

Способи зображення і перетворення рельєфу, а також штучних великовимірних об'єктів розглядають в проекціях з числовими позначками.

#### 3.1. Проекції геометричних фігур.

Проекції з числовими позначками - це прямокутні проекції на одну площину. Оскільки одна проекція об'єкта не визначає однозначно положення точки у просторі, відсутність другої проекції компенсується числовими позначками. Це дає перевагу при зображенні об'єктів, лінійні розміри яких, наприклад довжина і висота, значно відрізняються.

Таким чином, проекціями з числовими позначками називають прямокутні проекції об'єкта на горизонтальну площину проекцій, позначені цифрами, що визначають відстань від цієї площини (в метрах) до об'єкта.

##### 3.1.1. Проекції точки.

Зображення точки в проекціях з числовими позначками показано на рис. 3.1.

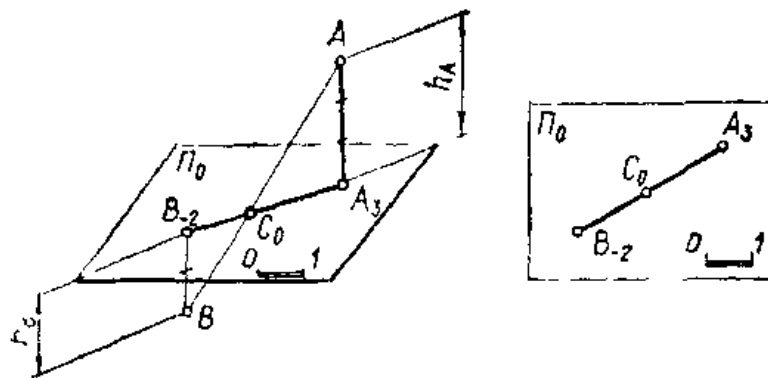


Рис. 3.1

Горизонтальну площину проекцій називають площиною нульового рівня, або нульовою.

Точку в проекціях з числовими позначками зображують її проекцією на нульову площину з позначенням буквою і цифрою. Цифра - це значення позначки.

Точки, які знаходяться над нульовою площиною, позначають знаком «плюс», що відповідає додатним значенням позначок. Точки, які знаходяться під нульовою площиною, позначають знаком «мінус», що відповідає від'ємним значенням позначок. Точки, що належать нульовій площині, мають нульову позначку.

Знак «плюс» часто не проставляють. Крім того, інколи точки позначають позначками, не використовуючи букви. Відстань від точки, наприклад  $A$ , до нульової площини позначають як

$h_A$ . Креслення виконують у масштабі, який приводять біля зображень у вигляді лінійного або числового масштабу.

### 3.1.2. Проекції прямої.

Пряму лінію загального положення задають в проекціях з числовими позначками проекціями двох її точок з позначками. Так, зображену на рис. 3.2 пряму, що проходить через точки  $A$  і  $B$ , задають проекціями точок  $A_3$  і  $B_6$ , тобто відрізком  $A_3B_6$ .

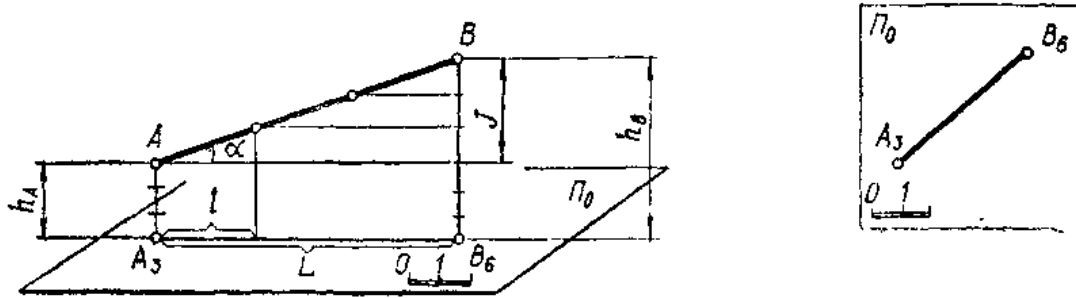


Рис. 3.2

Розглянемо деякі поняття, що характеризують пряму:

$L$  - закладення - довжина горизонтальної проекції відрізка, що задає пряму;

$i$  - уклон - визначається відношенням різниці позначок кінцевих точок відрізка до закладення:  $i = (h_B - h_A)/L = \text{tg}\alpha$ , де  $\alpha$  - кут нахилу прямої до горизонтальної площини;

$J$  - підйом відрізка дорівнює різниці позначок кінців відрізка  $h_B - h_A$ ;

$\ell$  - інтервал прямої - величина закладення при підйомі, що дорівнює одиниці, тобто  $\ell = L/J$ . А оскільки  $J = \Delta h$ , то уклон  $i = J/L = 1/\ell$ , звідки видно, що інтервал і уклон - величини взаємно обернені. Це значить, що при збільшенні уклону прямої зменшується її інтервал і, навпаки, зменшення уклону спричинює збільшення інтервалу.

На рис. 3.3, *а* дано пряму  $C_6D_8$ . Користуючись лінійним масштабом, визначимо, що  $L = 4$ , отже, уклон цієї прямої  $i = J/L = (8-6)/2 = 1/2$ . Знаючи величину  $i$ , пряму можна позначити, як показано на рис. 3.3, *б*, або, визначивши кут  $\alpha$  - як на рис. 3.3, *в*. Стрілка вказує напрям скату прямої - від більшої позначки до меншої. При цьому досить обмежитись однією позначкою.

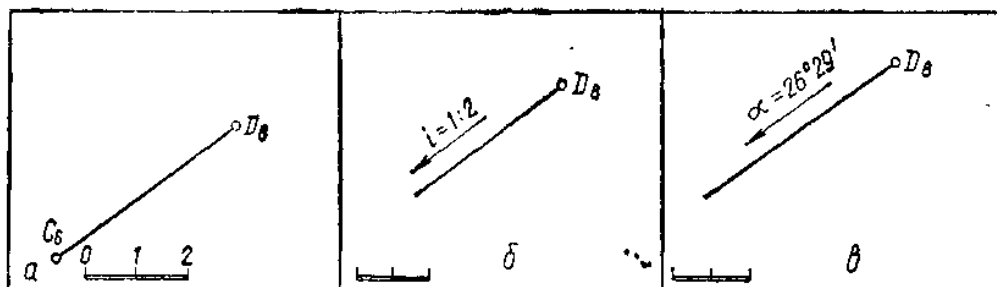


Рис. 3.3

Горизонтальну пряму задають двома точками з однаковими позначками. Проекції точок, що задають вертикальну пряму, збігаються (рис. 3.4).

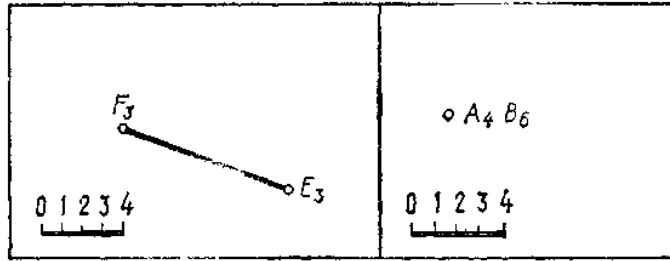


Рис. 3.4

Важливе практичне значення має задача градуювання прямої лінії. Полягає воно у визначенні на прямій точок, що мають позначки у вигляді цілого числа. Проградувати пряму  $A_{4,2}B_{8,6}$  (рис. 3.5) можна на основі пропорційного ділення відрізка. На допоміжній прямій  $a$ , проведеній довільно, відкладаємо  $8,6 - 4,2 = 4,4$ . Для зручності різницю помножимо на 10, щоб мати справу з цілими числами. Отже,  $4,4 \cdot 10 = 44$ , тобто маємо 44 одиниці (наприклад, міліметрів). Від точки  $A$  по лінії  $a$  відкладаємо 8 одиниць, що відповідає цілій позначці 5, потім робимо позначки через 10 одиниць, що відповідає цілим позначкам 6, 7, 8. І нарешті, відкладаємо 6 одиниць і одержуємо точку  $M$ . Сполучаємо її з точкою  $B_{8,6}$ . Паралельно променю  $MB_{8,6}$  проводимо лінії, які розбивають пряму  $A_{4,2}B_{8,6}$  на шукані частини.

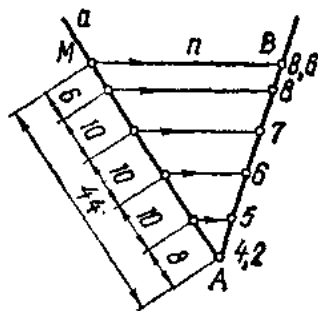


Рис. 3.5

### 3.1.3. Проекції двох прямих.

Паралельні прямі мають паралельні проекції, рівні між собою інтервали і однаковий напрям скату (рис. 3.6, а), а отже, і однаковий уклон.

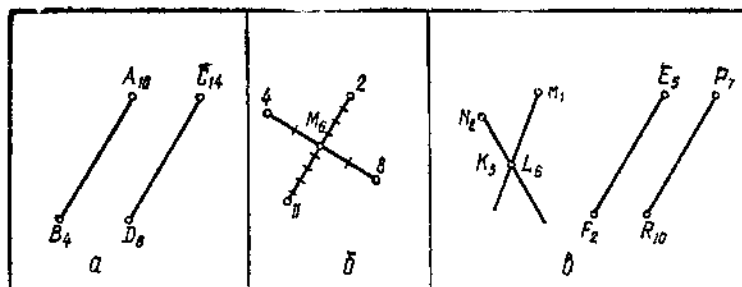


Рис. 3.6

Проекції прямих, що перетинаються, також перетинаються, причому точка перетину прямих і проекцій належить вертикальній проектуючій прямій (рис. 3.6, б). Мимобіжні прямі можуть мати паралельні проекції при різних інтервалах або напрямках скату прямих. Проекції мимобіжних прямих можуть перетинатися, але точка перетину проекцій не є проекцією точки перетину прямих (рис. 3.6, в). Щоб графічно перевірити взаємне положення прямих, необхідно їх спроектувати на будь-яку вертикальну площину (рис. 3.7) і сумістити її з горизонтальною площиною. Оскільки в даному випадку точки перетину проекцій прямих лежать на лінії сполучення, то зображені прямі перетинаються.

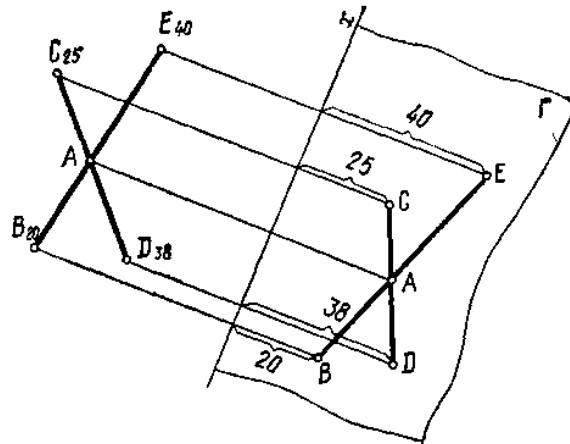


Рис. 3.7

### 3.1.4. Проекції площини.

Площину в проекціях з числовими позначками можна визначити проекціями трьох точок, що не лежать на одній прямій, двох прямих, що перетинаються або є паралельними, тощо.

Поширеним способом завдання площини в проекціях з числовими позначками є використання масштабу уклону площини - горизонтальної проекції лінії найбільшого скату площини, на якій нанесено інтервал, тобто проекції точок з позначками точок через одиницю виміру.

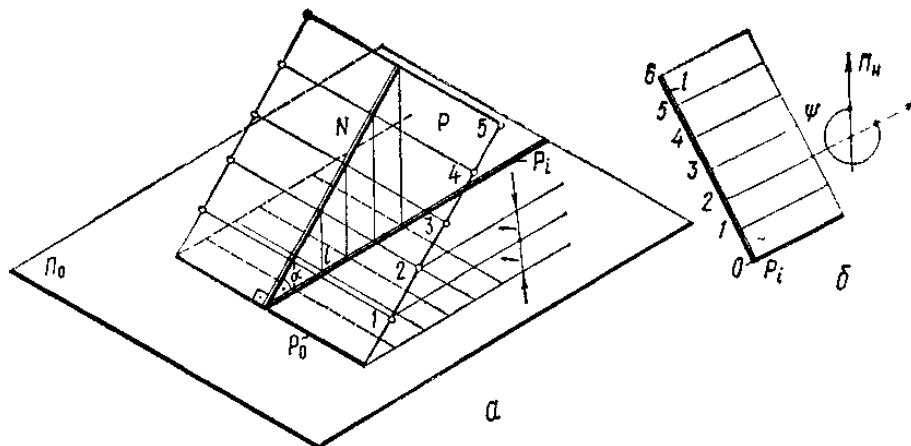


Рис. 3.8

На рисунку 3.8, а показані похила площина  $P$ , її слід  $P_0$ , лінія найбільшого скату площини

$P (N \perp P)$ , кут падіння  $\alpha$ , горизонталі площини, утворені внаслідок перетину допоміжних горизонтальних площин, проведених через кожен метр висоти, з площиною  $P$ , та інтервал  $\ell$ . Горизонталі площини перпендикулярні до лінії найбільшого скату площини, тому проекції горизонталей перпендикулярні до проекції лінії найбільшого скату, яку позначають  $Pi$ .

Масштаб уклону площини показують подвійною лінією (товстою і тонкою) і перпендикулярно до неї проводять горизонталі (рис. 3.8, б).

Щоб показати орієнтацію площини за сторонами світу, вказують напрям і кут простягання площини. Напрямок простягання іде вправо, якщо на площину дивитися в напрямі наростання позначок. Кут простягання  $\psi$  вимірюють між північним напрямом меридіана і проекціями горизонталей проти ходу годинникової стрілки.

### 3.1.5. Проекції кривих ліній.

В проекціях з числовими позначками плоску криву задають її проекцією на нульову площину і позначками трьох довільно вибраних точок (рис. 3.9, а). Просторову криву визначають її проекцією і позначками точкового каркаса (рис. 3.9, б).

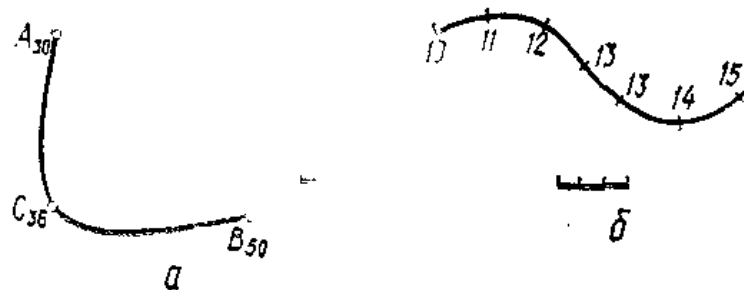


Рис. 3.9

### 3.1.6. Проекції кривих поверхонь.

Топографічні поверхні зображують проекціями їхніх горизонталей. Для побудови горизонталей поверхонь їх, як у випадку з площиною, перетинають горизонтальними площинами, що мають відстань між собою 1 м (рис. 3.10).

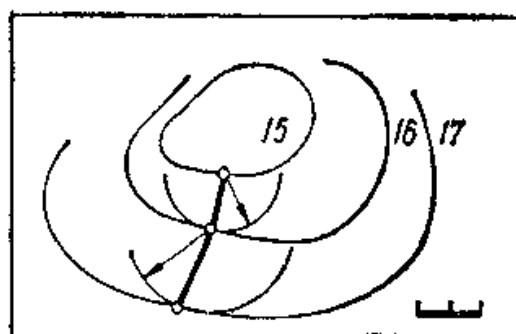


Рис. 3.10

Якщо через довільно взяту точку поверхні провести лінію, перпендикулярну до горизонталі, то вона матиме найбільший кут нахилу до горизонтальної площини серед інших ліній, що проходять через цю точку. Побудована таким чином лінія є лінією скату.



Поверхню прямого кругового конуса (рис. 3.11, а) задають проекцією вершини з позначкою і проекцією градуйованої твірної. Ця твірна одночасно є масштабом уклону та лінією скату поверхні. Поверхню такого конуса можна задати вершиною та укладом твірних.

Циліндричну поверхню з горизонтальними твірними (рис. 3.11, б) зображують горизонталями, побудованими за допомогою фронтальної проекції. Лінія скату збігається з нормальним перерізом.

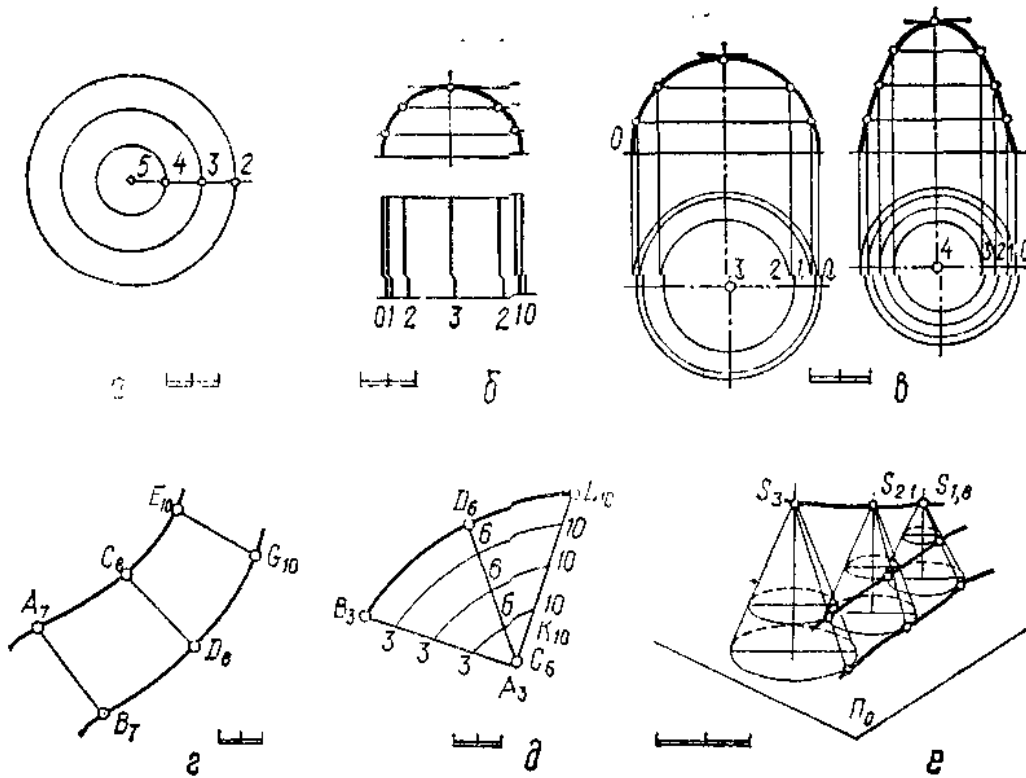


Рис. 3.11

Проекції сферичної поверхні та поверхні параболоїда обертання з вертикальною віссю за аналогічних умов зображені на рис. 3.11, в.

Циліндроїд (рис. 3.11, г) визначається твірними, що рухаються по двох кривих напрямних і паралельні заданій площині паралелізму (наприклад, горизонтальній).

Коноїд (рис. 3.11, д) визначається твірними, паралельними площині паралелізму. Вони рухаються по кривій та напрямній прямій, яка в даному випадку вертикальна.

Поверхня однакового скату (рис. 3.11, е) утворюється рухом прямого кругового конуса при умові, що вісь його залишається вертикальною, а вершина ковзає уздовж напрямної кривої. Однойменні горизонталі конусів обводять кривими - горизонталями поверхні однакового скату.

## 3.2. Позиційні задачі.

### 3.2.1. Дві площини.

Як відомо, дві площини завжди перетинаються по власній чи невластній прямій (в другому випадку вони паралельні). Паралельні площини мають паралельні масштаби уклонів, однакові інтервали і однаковий напрям скату (рис. 3.12, а). На рис. 3.12, б представлено дві площини, кожна з яких задана масштабом уклону. Досить знайти дві точки взаємного перетину

горизонталей площин з однаковими позначками, щоб побудувати лінію перетину площин.

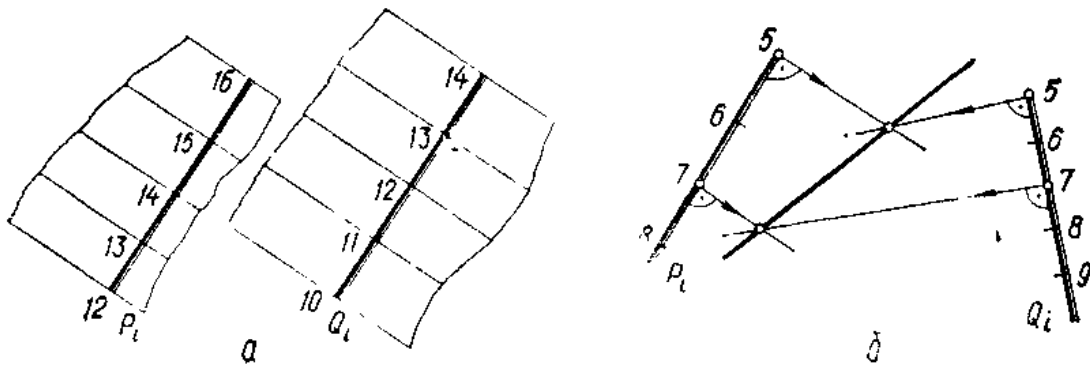


Рис. 3.12

### 3.2.2. Пряма і площина (поверхня).

Для визначення точки перетину прямої, наприклад  $A_6B_8$ , з площиною  $P_i$  (рис. 3.13) через пряму проводять допоміжну вертикальну площину  $\Gamma$ , будують лінію  $a$  - лінію перетину її із заданою площиною. Цю лінію і пряму  $AB$  суміщують з горизонтальною площиною, де і визначають шукану точку  $M$ , яку зворотним шляхом повертають на початкову проекцію прямої ( $M_{7,6}$ ). Така побудова дає можливість також визначити пряму, паралельну заданій площині. При цьому лінія перетину заданої і допоміжної площин повинна бути паралельною проекції прямої. Якщо лінія перетину цих площин і допоміжна проекція прямої збігаються, то пряма належить площині.

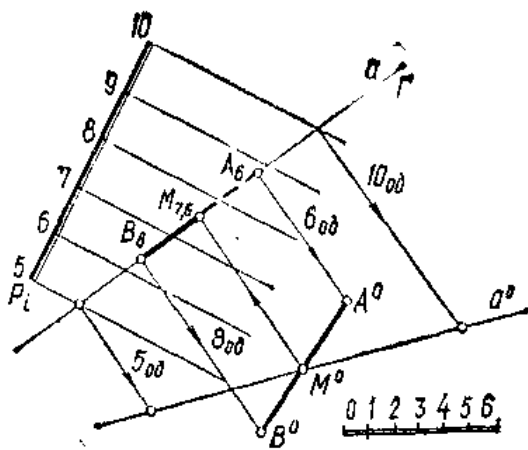


Рис. 3.13

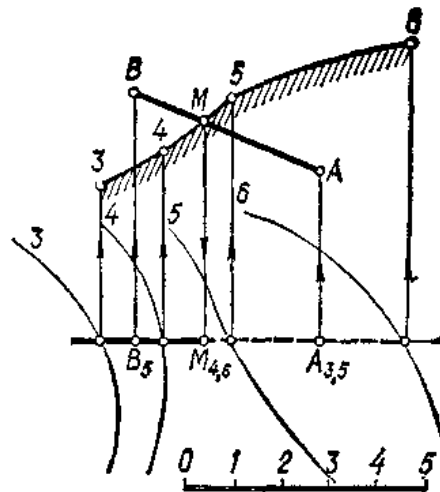


Рис. 3.14

Аналогічно попередньому прикладу визначають точку перетину прямої, наприклад  $A_{3,5}B_5$  з поверхнею, заданою горизонталями (рис. 3.14).

### 3.2.3. Площина і поверхня.

В даному прикладі (рис. 3.15) поверхня визначена горизонталями, а площина - масштабом уклону. Лінію перетину будують по точках, які є результатом перетину горизонталей площини і поверхні з однаковими позначками.

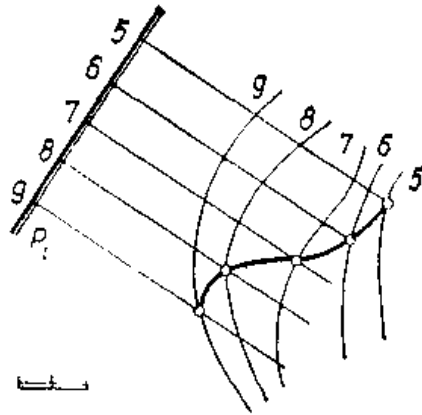


Рис. 3.15

### 3.2.4. Дві поверхні.

Цю задачу розв'язують, як і попередню. Лінія перетину поверхонь визначається перетином однойменних горизонталей (рис. 3.16).

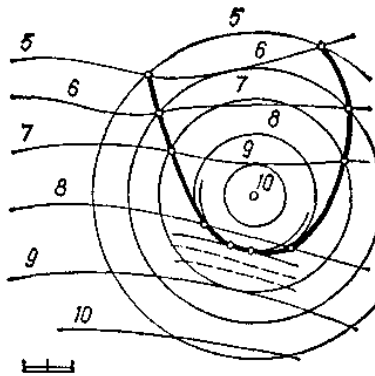


Рис. 3.16

### 3.3. Побудова границі укосів насипу та виїмки ґрунту.

Приклад 1. Запроектувати насип на горизонтальній площині з позначкою +2, який має горизонтальну трикутну площадку с позначкою +8 (рис. 3.17, а). Уклоли укосів відповідно  $i_1 = 1 : 1$ ;  $i_2 = 1 : 0,5$ ;  $i_3 = 1 : 2$ .

Спочатку будують графік уклонів (рис. 3.17, б). У масштабі креслення на осях  $L$  та  $J$  відкладають відрізки завдовжки 1 м, креслять графіки уклонів і визначають інтервали  $l_1, l_2, l_3$  кожної з площин укосів. Далі будують масштаби уклонів укосів - перпендикуляри до ліній контуру площадки, які є горизонталями з позначкою +8. Через точки, нанесені з відповідним інтервалом на масштабі уклонів укосів, проводять горизонталі площин, які, відповідно перетинаючись, визначають лінії перетину укосів. З горизонтальною площиною укоси перетинаються по горизонталях з позначкою +2. Верхню границю укосів позначають бергштрнхами, які наносять перпендикулярно до горизонталей у бік скату.

Аналогічно будують границі укосів виїмки при спорудженні котлована.

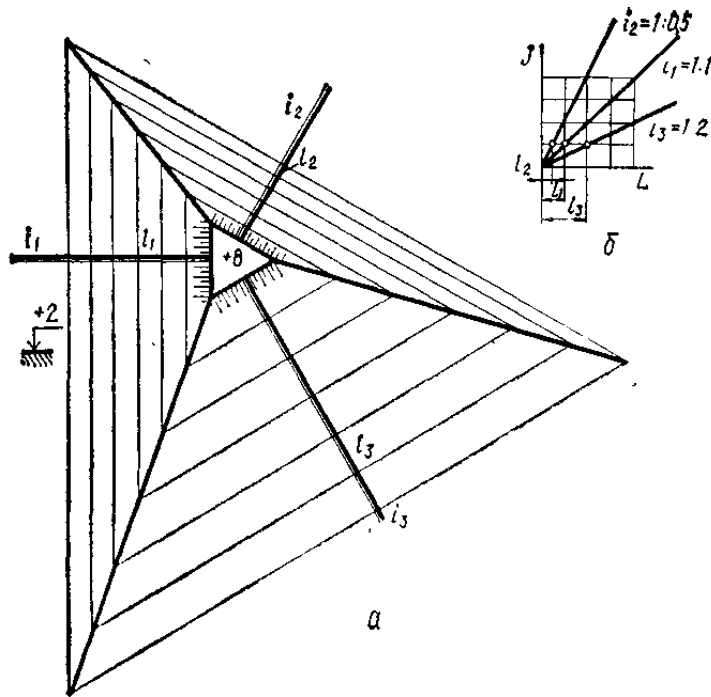


Рис. 3.17

Приклад 2. Визначити границі укосів насипу похилої площини з горизонтальною площадкою - півкругом. Насип споруджують на горизонтальній площині з позначкою +22 (рис. 3.18). Уклон площини  $i_{nl} = 1 : 1$ , конічної поверхні  $i_k = 1 : 1,5$ .

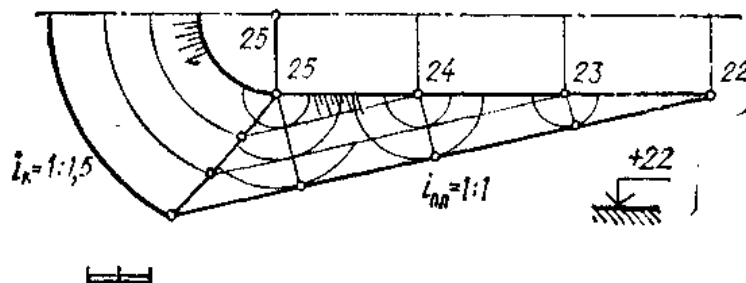


Рис. 3.18

Спочатку визначають інтервали для площин і конічної поверхні:  $l_{nl} = 1$  м;  $l_k = 1,5$  м.

Щоб побудувати бокові укоси, спочатку виконують градуювання похилої площини, тобто визначають точки з позначками 23 і 24. Потім з цих точок і з точки 25, як із центра, проводять кола радіусами відповідно  $l$ ,  $2l$ ,  $3l$ , тобто будують допоміжні конуси з радіусами основи 1, 2 і 3 м. Побудовані кола дають змогу провести горизонталі площин - дотичні до відповідних кіл. Горизонталі конічної поверхні будують як кола, що проходять через точки проградуйованої проекції лінії скату (інтервал 1,5 м). Перетин однойменних горизонталей площин і конічної поверхні визначає криву лінію їх перетину. З горизонтальною площиною укоси перетинаються по горизонталі з позначкою +22.

Приклад 3. За даним планом місцевості в горизонталях і планом горизонтальної площадки з проектною позначкою +20 (рис. 3.19, а) побудувати границі укосів виїмки і насипу, якщо уклон виїмки  $i_v = 1 : 1$ , уклон насипу  $i_n = 1 : 0,6$ .

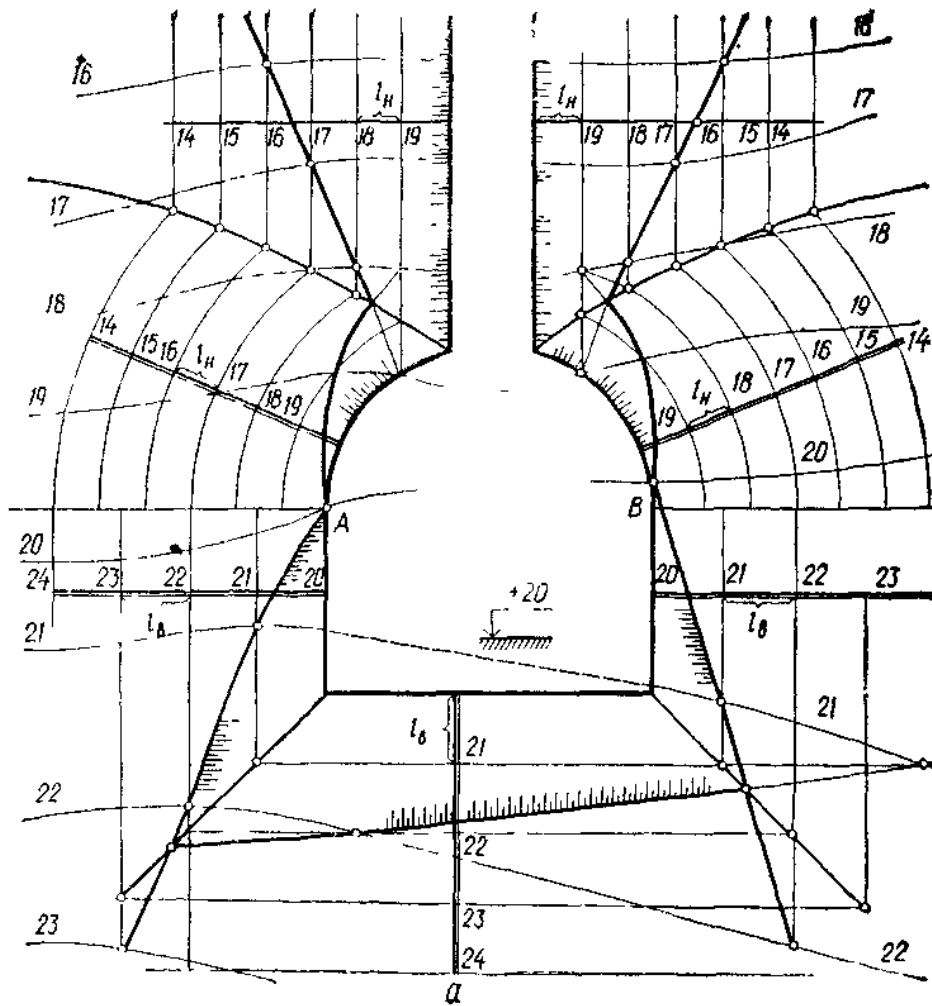


Рис. 3.19, а

Розв'язування задачі зводиться до пошуку ліній перетину площин і поверхонь укосів з топографічною поверхнею, а також між собою.

Спочатку, користуючись прийнятим лінійним масштабом, будують графік уклонів (рис.3.19, б). Горизонтальна лінія  $I$ , що відповідає висоті позначки 1 м, виявляє інтервал лінії найбільшого скату площин і поверхні укосів виїмки і насипу, що дає змогу побудувати масштаби укосів площин і проградуювати поверхню.

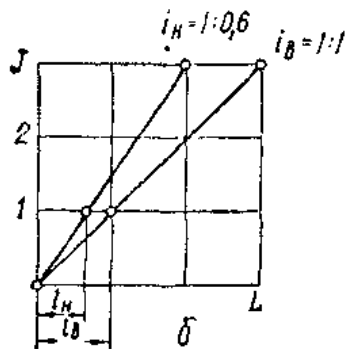


Рис. 3.19, б

Далі, на кожній ділянці контуру площадки будують лінію найбільшого скату (зображують подвійною лінією), на якій відкладають відрізки, що дорівнюють інтервалу - виїмки або насипу відповідно. Через помічені на лініях найбільшого скату точки проводяться горизонталі площин і поверхні укосів. Горизонталі площин (поверхні), перетинаючись з горизонталлями топографічної поверхні, що мають однакові позначки, визначають лінії - границі укосів.

Лінії взаємного перетину укосів також визначаються точками перетину однойменних горизонталей площин і поверхні укосів.

Для збільшення наочності зображення використовують бергштрихи.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Антонович Є.А., Фольта О.В., Шпільчак В.А., Юрковський П.В. Нарисна геометрія та перспектива: Навч. посібник. Ч.1-7.- К., 1990-1993.
2. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. Учебник для вузов. - М.: Высш. шк., 1985.
3. Винницкий И.Г. Начертательная геометрия. Учебник для вузов. - М.: Высш. шк., 1975.
4. Виноградов В.Н. Начертательная геометрия. - М., 1989.
5. Гордон В.О., Семенов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии: Учебное пособие для вузов. - М.: Высш.шк., 2000.
6. Климухин А.Г. Начертательная геометрия: Учебник для вузов. - М.: Стройиздат, 1978.
7. Михайленко В.Э., Пономарев А.М. Инженерная графика. - К., 1990.
8. Нарисна геометрія: Підручник / В.Є. Михайленко, М.Ф. Євстіфєєв, С.М. Ковальов, О.В. Кащенко; За ред. В.Є. Михайленка –К.: Вища шк., 2004.
9. Начертательная геометрия: Учебник для вузов / Н.Н. Крылов, Г.С. Иконникова, В.Л. Николаев, Н.М. Лаврухина; Под ред. Н.Н. Крылова –М.: Высш. шк., 1990.
10. Начертательная геометрия (проекции с числовыми отметками): Метод. рекомендации / Под ред. А.В. Фольта – К., 1988.
11. Фольта О.В., Антонович Є.А., Юрловський П.В. Нарисна геометрія: Підручник. – Львів, 1994.

# ЗМІСТ

## Лекція 1

<b>Тема 1. Побудова аксонометричних проєкцій</b> .....	<b>3</b>
1.1 Основні поняття та визначення.....	3
1.2 Види аксонометричних проєкцій.....	4
1.3 Побудова осей і визначення показників спотворення.....	4
1.3.1 Косокутна аксонометрія.....	4
1.3.2 Прямокутна аксонометрія.....	5
1.4 Позиційні властивості геометричних фігур в аксонометрії.....	6
1.4.1 Властивості проєкцій геометричних фігур.....	6
1.4.2 Взаємний перетин геометричних фігур.....	7
1.5 Побудова аксонометричних проєкцій геометричних тіл.....	9
1.5.1 Стандартні види аксонометричних проєкцій.....	9
1.5.2 Побудова аксонометрії точки.....	13
1.5.3 Побудова аксонометрії об'ємних фігур.....	13

## Лекції 2-4

<b>Тема 2. Побудова тіней у прямокутних та аксонометричних проєкціях</b> .....	<b>16</b>
2.1 Світлотінь як засіб архітектурної та інженерної графіки.....	16
2.2 Загальні положення побудови тіней.....	17
2.3 Побудова тіней способом сліду променя.....	19
2.3.1 Побудова тіні точки.....	19
2.3.2 Побудова тіні кривої лінії.....	20
2.3.3 Побудова тіні прямої лінії.....	21
2.3.4 Побудова тіні плоского відсіку площини.....	22
2.4 Побудова тіней способом обгортаючи поверхонь.....	25
2.4.1 Побудова власної тіні об'ємних тіл.....	25
2.4.2 Побудова власних і падаючих тіней основних геометричних форм.....	26
2.5 Спосіб світлових січних площин.....	33

## Лекції 5-7

<b>Тема 3. Проєкції з числовими позначками</b> .....	<b>36</b>
3.1 Проєкції геометричних фігур.....	36
3.1.1 Проєкції точки.....	36
3.1.2 Проєкції прямої.....	37



3.1.3 Проекції двох прямих.....	38
3.1.4 Проекції площини.....	39
3.1.5 Проекції кривих ліній.....	40
3.1.6 Проекції кривих поверхонь.....	40
3.2 Позиційні задачі.....	41
3.2.1 Дві площини.....	41
3.2.2 Пряма і площина.....	42
3.2.3 Площина і поверхня.....	42
3.2.4 Дві поверхні.....	43
3.3 Побудова границі укосів насипу та виїмки ґрунту.....	43
<b>Література.....</b>	<b>47</b>

Навчальне видання

Конспект лекцій з нарисної геометрії (для студентів 1-го курсу денної форми навчання за напрямом 6.060101 – «Будівництво»).

Укладач: Тетяна Євгенівна Киркач

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2008, поз. 34Л

---

Підп. до друку 2.07.2008	Формат 210×297 1/8	Папір офісний
Друк на ризографі	Умовн.-друк. арк. 2,3	Обл.-вид. арк. 2,3
Тираж 150 прим.	Замовл. №	

---

61002, ХНАМГ, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ

61002, ХНАМГ, Харків, вул. Революції, 12