МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до проведення практичних занять
та виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
МОДУЛЬ 1

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія та технології)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2022

Методичні рекомендації до проведення практичних занять та виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика». Модуль 1 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія та технології) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2022. – 37 с.

Укладачі : канд. фіз.-мат. наук, доц. С. М. Ламтюгова
канд. пед. наук, доц. Ю. В. Ситникова

Рецензент
А. В. Якунін, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 1 від 31.08.2021.

Методичні рекомендації розроблені відповідно до навчального плану та програми дисципліни «Вища математика» для здобувачів спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія та технології і містять навчальний матеріал першого семестру. У методичних рекомендаціях подано теми практичних занять відповідно до робочої програми з посиланням на рекомендовану літературу; приклади розв’язання типових задач; питання та завдання для самостійної роботи.

З М І С Т

ВСТУП

Мета дисципліни – забезпечити належну фундаментальну математичну підготовку студентів та сформувати у них знання та вміння застосовувати її для аналізу різноманітних явищ з орієнтацією на сфери професійної діяльності. Завдання дисципліни – допомогти студентам засвоїти основи математичного апарату, необхідного для розв'язування теоретичних і практичних задач, виробити вміння та навички математичного дослідження прикладних об'єктів, навчити студентів самостійно вивчати наукові джерела з математики та її прикладних застосувань, сприяти розвитку логічного та алгоритмічного мислення.

Навчальний процес з дисципліни «Вища математика» для здобувачів навчально-наукового інституту будівельної та цивільної інженерії, що навчаються за спеціальністю 185 – Нафтогазова інженерія та технології, триває три семестри на першому та другому курсах навчання. На лекціях викладається зміст, проводиться аналіз основних понять і методів вищої математики. На практичних заняттях студенти одержують пояснення теоретичних положень дисципліни, опановують основні методи, підходи та засоби розв'язання математичних задач.

Важливою формою засвоєння математичного апарату є самостійна робота студентів, місце і значення якої постійно зростає. Вона включає самостійне опрацювання теоретичного матеріалу низки тем, виконання домашніх завдань, проведення самоконтролю, творчі пошуки поза межами, передбаченими програмою дисципліни.

Методичні рекомендації спрямовані на надання студентові необхідної інформації щодо змісту, форми та особливостей організації навчального процесу під час проведення практичних занять і виконання самостійної роботи.

1 ЗМІСТ ПРАКТИЧНОЇ ЧАСТИНИ

Змістовий модуль 1.1 Лінійна та векторна алгебра

Практичне заняття № 1 – 2 год

Тема «Визначники».

Мета: сформувати навички знаходити значення визначників та вміння розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою методу Крамера.

Література: [1, 2, 5, 7].

Практичне заняття № 2 – 2 год

Тема «Матриці».

Мета: сформувати вміння та навички виконувати дії з матрицями.

Література: [1, 2, 5, 7].

Практичне заняття № 3 – 2 год

Тема «Метод Гауса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь».

Мета: сформувати вміння розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою методу Гауса.

Література: [1, 2, 5, 7].

Практичне заняття № 4 – 2 год

Тема «Вектори».

Мета: сформувати вміння та навички працювати з векторами та їх добутками.

Література: [1, 2, 7].

Практичне заняття № 5 – 2 год

Тема «Геометричні застосування добутків векторів».

Мета: сформувати вміння та навички застосовувати добутки векторів до геометричних задач.

Література: [1, 2, 7].

Змістовий модуль 1.2 Аналітична геометрія

Практичне заняття № 6 – 2 год

Тема «Декартова система координат».

Мета: сформувати вміння та навички працювати в декартовій системі координат.

Література: [1, 2, 9].

Практичні заняття № 7, 8 – 4 год

Тема «Пряма лінія на площині».

Мета: сформувати вміння та навички розв’язувати геометричні задачі, використовуючи рівняння прямої лінії на площині.

Література: [1, 2, 9].

Практичне заняття № 9 – 2 год

Тема «Криві другого порядку».

Мета: сформувати вміння та навички працювати з кривими другого порядку.

Література: [1, 2, 9].

Змістовий модуль 1.3 Диференціальне числення функцій однієї змінної

Практичні заняття № 10, 11 – 3 год

Тема «Границя функції».

Мета: сформувати вміння та навички знаходити границі функцій.

Література: [1–4, 6, 8].

Практичні заняття № 11, 12 – 3 год

Тема «Похідна функції».

Мета: сформувати вміння та навички знаходити похідні від різних класів функцій.

Література: [1–4, 6, 8].

Практичне заняття № 13, 14, 15 – 6 год

Тема «Застосування похідної».

Мета: сформувати вміння та навички досліджувати функції та будувати графіки функцій.

Література: [1–4, 6, 8].

2 ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Змістовий модуль 1.1 Лінійна та векторна алгебра

Приклад 1. Дано дві матриці:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}.

Розв'язання.

а) добуток AB має сенс, тому що число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Знаходимо матрицю $C = AB$, елементи якої

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Маємо:

$$C = AB = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3 \\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9 \\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix};$$

б) обчислимо BA

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4+4-0 & 0-2-6 & 1+6-6 \\ -8+0+3 & 0+0+2 & 2+0+2 \\ 8+2+9 & 0-1+6 & -2+3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 19 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $AB \neq BA$;

в) обернена матриця A^{-1} має такий вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$\text{де } \Delta_A=\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=8+4+3+24=39\neq 0,$$

отже матриця A невироджена, і має обернену матрицю A^{-1}.

Знаходимо:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-8; \quad A_{21}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2; \quad A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5; \quad A_{22}=\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-11; \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=14;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7; \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=8; \quad A_{33}=\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=4.$$

Тоді

$$A^{1}=\frac{1}{39}\cdot\begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Дано систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=3, \\ 2x_1+4x_2-3x_3=2, \\ 3x_1-\ x_2-3x_3=-7. \end{cases}$$

Розв’язати її: а) за формулами Крамера; б) за методом Гауса.

Розв’язання.

а) за формулами Крамера: $x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}$, $\quad x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}$, $\quad x_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}$.

$$\text{Тут: } \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-16, \quad \Delta x_1=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix}=64,$$

$$\Delta x_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix}=-16, \quad \Delta x_3=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix}=32,.$$

Знаходимо $x_1=\frac{64}{-16}=-4$, $\quad x_2=\frac{-16}{-16}=1$, $\quad x_3=\frac{32}{-16}=-2$.

б) за методом Гауса. Виключимо x_1 із другого і третього рівнянь. Для цього перше рівняння помножимо на 2 і віднімемо з другого, потім перше рівняння помножимо на 3 і віднімемо з третього:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ \quad -6x_2 - x_3 = -4, \\ -16x_2 = -16. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо $x_2 = 1$; з передостаннього знаходимо $x_3 = -2$ і з першого рівняння знаходимо $x_1 = -4$.

Приклад 3. По координатах точок *A(-5;1;6), B(1;4;3)* і *C(6;3;9)* знайти:

а) модуль вектора $\bar{a} = 4\overline{AB} + \overline{BC}$,

б) скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b} = \overline{BC}$;

в) проекцію вектора $\bar{c} = \bar{b}$ на вектор $\bar{d} = \overline{AB}$;

г) координати точки *M*, що поділяє відрізок *AB* у відношенні 1:3.

Розв'язання.

а) послідовно знаходимо $\overline{AB} = (6,3,-3)$, $\overline{BC} = (5,-1,6)$,

$$\bar{a} = 4\overline{AB} + +\overline{BC} = (29,11,-6), \ |\bar{a}| = |4\overline{AB} + \overline{BC}| = \sqrt{29^2 + 11^2 + (-6)^2} = \sqrt{998};$$

б) маємо $\bar{a} = (29,11,\text{-}6)$, $\bar{b} = (5,-1,6)$.

Тоді $\bar{a} \cdot \bar{b} = 29 \cdot 5 + 11(-1) + (-6)6 = 98.$

в) тому що $Пр_{\bar{d}}\bar{c} = \frac{\bar{c} \cdot \bar{d}}{|\bar{d}|}$, де $\bar{d} = (6,3,-3)$ $\bar{c} = \bar{b} = \overline{BC}$; $\bar{c} \cdot \bar{d} = 30 - 3 - 18 = 9$; $|\bar{d}| = \sqrt{36+9+9} = \sqrt{54}$, тоді $Пр_{\bar{d}}\bar{c} = \frac{9}{\sqrt{54}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$;

г) маємо: $\lambda = 1/3$, $\bar{r}_M = \frac{\bar{r}_A + \lambda \bar{r}_B}{1+\lambda}$.

Отже,

$$x_M = \frac{-5 + 1/3 \cdot 1}{1 + 1/3} = -\frac{7}{2}; \ y_M = \frac{1 + 1/3 \cdot 4}{1 + 1/3} = \frac{7}{4}; \ z_M = \frac{6 + 1/3 \cdot 3}{1 + 1/3} = \frac{21}{4};$$

$$M(-\frac{7}{2};\frac{7}{4};\frac{21}{4}).$$

Приклад 4. Довести, що вектори $\bar{a} = (3,\text{-}1,0)$, $\bar{b} = (2,3,1)$ і $\bar{c} = (-1,4,3)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\bar{d} = (2,3,7)$ у цьому базисі.

Розв'язання. Обчислюємо $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$.

Отже, вектори $\bar{a},\bar{b}$ і $\bar{c}$ утворюють базис, і вектор $\bar{d}$ є лінійною комбінацією базисних векторів:

$$\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}.$$

В координатній формі

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta - \gamma = 2, \\ -\alpha + 3\beta + 4\gamma = 3, \\ \qquad \beta + 3\gamma = 7. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему за формулами Крамера. Визначник системи $\Delta = 22$. Обчислюємо допоміжні визначники:

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 56 - 3 + 21 - 18 - 8 = 66,$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 7 + 6 - 84 = -44,$$

$$\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 63 - 2 + 14 - 9 = 66,$$

Маємо: $\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = 3$; $\beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = -2$; $\gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta} = 3$, тому $\bar{d} = (3,-2,3) = 3\bar{a} - 2\bar{d} + 3\bar{c}$.

Приклад 5. Дано вектори $\bar{a} = 4\bar{i} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = -\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$ і $\bar{c} = 3\bar{i} + 5\bar{j}$. Необхідно: а) обчислити мішаний добуток векторів $\bar{a},\bar{b}$ і $5\bar{c}$; б) знайти модуль векторного добутку векторів $3\bar{c}$ і $\bar{b}$; в) обчислити скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $3\bar{b}$; г) перевірити, чи будуть паралельні або перпендикулярні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$; д) перевірити, чи будуть належать одній площині вектори: $\bar{a},\bar{b}$ і $5\bar{c}$.

Розв'язання.

а) тому що $5\bar{c} = 15\bar{i} + 25\bar{j}$, маємо

$$\bar{a}\text{x}\bar{b} \cdot 5\bar{c} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 15 & 25 & 0 \end{vmatrix} = -100 - 180 - 200 = -480;$$

б) оскільки $3\bar{c} = 9\bar{i} + 15\bar{j}$, маємо

$$3\bar{c}\mathrm{x}\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 9 & 15 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30\bar{i} + 27\bar{k} + 15\bar{k} - 18\bar{j} = 30\bar{i} - 18\bar{j} + 42\bar{k},$$

$$|3\bar{c}\mathrm{x}\bar{b}| = \sqrt{30^2 + (-18)^2 + 42^2} = \sqrt{2988};$$

в) знаходимо: $3\bar{b} = -3\bar{i} + 9\bar{j} + 6\bar{k}$,

$$\bar{a} \cdot 3\bar{b} = 4(-3) + (0 \cdot 9) + 4 \cdot 6 = 12;$$

г) маємо $\bar{a} = (4,0,4)$, $\bar{b} = (-1,3,2)$ і $\frac{4}{-1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{4}{2}$, отже вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не паралельні. Оскільки $\bar{a} \cdot \bar{b} = 4(-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 4 \neq 0$, то вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не перпендикулярні;

д) вектори $\bar{a}, \bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарні, якщо $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$. Обчислюємо

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 - 36 - 40 \neq 0,$$

тобто вектори $\bar{a}, \bar{b}$ і $\bar{c}$ не належать одній площині.

Змістовий модуль 1.2 Аналітична геометрія

Приклад 1. Задані вершини *ДABC: A(4,3), B(–3,–3), C(2,7).* Знайти: а) рівняння сторони *AB*; б) рівняння висоти *CH;* в) рівняння медіани *AM*; г) точку *N* перетинання медіани *AM* і висоти *CH;* д) рівняння прямої, що проходить через вершину *C* паралельно стороні *AB;* е) відстань від точки *C* до прямої *AB;* ж) площу *ДABC.*

Розв'язання.

а) скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки, одержимо рівняння сторони *AB:*

$$\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3},$$

звідки $6(x-4)=7(y-3)$ або $6x - 7y - 3 = 0;$

б) кутовий коефіцієнт прямої *AB* $k_1 = \frac{6}{7}$. Тому що прямі *AB* і *CH* перпендикулярні, то кутовий коефіцієнт висоти CH $k_2 = \frac{-7}{6}$ $(k_1 k_2 = -1)$.

По точці $C(2,7)$ і кутовому коефіцієнту $k_2 = \frac{-7}{6}$ складаємо рівняння висоти CH

$$y - 7 = -7/6(x - 2) \text{ чи } 7x+6y - 56 = 0;$$

в) координати x, y середини M відрізка BC:

$$x = \frac{-3+2}{2} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{-3+7}{2} = 2.$$

Тепер за двома відомими точками A і M складаємо рівняння медіани AM:

$$\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4} = \frac{y-3}{2-3} \text{ чи } 2x - 9y+19 = 0;$$

г) для знаходження координат точки N перетину медіани AM і висоти CH складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 7x + 6y - 56 = 0, \\ 2x - 9y + 19 = 0. \end{cases}$$

Після її розв'язку, одержимо $x = \frac{26}{5}$; $y = \frac{49}{15}$;

$$N(\frac{26}{5}; \frac{49}{15});$$

д) тому що пряма, яка проходить через вершину C, паралельна стороні AB, то їхні кутові коефіцієнти рівні $k_1 = \frac{6}{7}$. Тоді по точці C і кутовому коефіцієнту k_1, складаємо рівняння прямої CD:

$$y - 7 = \frac{6}{7}(x-2) \quad \text{чи} \quad 6x - 7y + 37 = 0;$$

е) відстань від точки C до прямої AB обчислюємо за формулою:

$$d = |CH| = \frac{|6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 3|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{48}{\sqrt{85}};$$

ж) площу ДABC обчислюємо по координатах точок $A(4,3)$, $B(-3,-3)$, $C(2,7)$ за допомогою визначника

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-12+6-21+6+9-28| = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20 \text{ од. кв.}$$

Рисунок трикутника і шуканих ліній зробити самостійно.

Приклад 2. Скласти канонічні рівняння: а) еліпса, велика піввісь якого дорівнює 3, а фокус знаходиться у точці $F(\sqrt{5},0)$; б) гіперболи з уявною піввіссю, рівної 2, і фокусом $F(-\sqrt{13},0)$; в) параболи, що має директрису $x = -3$.

Розв'язання.

а) канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. За умовою задачі $a = 3$, $c=\sqrt{5}$.

Для еліпса виконується рівність $b^2=a^2-c^2$. Підставивши в неї значення a і c, знайдемо

$$b^2=3^2-(\sqrt{5})^2=4.$$

Шукане рівняння еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

б) канонічне рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. За умовою задачі $b = 2$, $c=\sqrt{13}$.

Для гіперболи справедлива рівність $b^2=c^2-a^2$. Тому

$$a^2=c^2-b^2=(\sqrt{13})^2-2^2=9.$$

Записуємо шукане рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;$$

в) канонічне рівняння параболи у даному випадку повинне мати вигляд $y^2=2px$, а рівняння її директриси $x=-\frac{p}{2}$. Але за умовою задачі рівняння директриси $x=-3$. Отже $-\frac{p}{2}=-3$. Звідки $p = 6$.

Шукане рівняння має вигляд $y^2=12x$.

Приклад 3. Скласти рівняння кола, що проходить через фокуси еліпса $x^2+4y^2=4$ і має центр у його верхній вершині.

Розв'язання. Для даного еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ верхня вершина $A(0,1)$, $a = 2$, $b = 1$. Тому $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ і фокуси знаходяться у точках $F_1(-\sqrt{3},0)$, $F_2(\sqrt{3},0)$.

Радіус R шуканого кола обчислюємо за формулою відстані між двома точками:

$$R = |AF_1| = |AF_2| = \sqrt{(\pm\sqrt{3} - 0)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2 .$$

Відповідно до канонічного рівняння кола радіуса R з центром у точці $A(a,b)$: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, записуємо шукане рівняння кола

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 2^2 \quad \text{або} \quad x^2 + (y-1)^2 = 4 .$$

Приклад 4. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(3,2)$ на відстані, у три рази більшої, ніж від точки $B(-1,0)$.

Розв'язання. Нехай $M(x, y)$ - будь-яка точка шуканої лінії. Тоді за умовою задачі $|AM| = 3|BM|$.

Тому що

$$|AM| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} , \ |BM| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} ,$$

то рівняння шуканої лінії

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 3\sqrt{(x+1)^2 + y^2} .$$

Перетворимо його, піднявши обидві частини до другого степеня:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9x^2 + 18x + 9 + 9y^2 ,$$

$$8x^2 + 24x + 8y^2 + 4y - 4 = 0 .$$

Виділимо повні квадрати, прийдемо до рівняння такого вигляду:

$$(x + \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = (\frac{3\sqrt{5}}{4})^2 .$$

Це рівняння кола з центром у точці $C(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ і радіусом $R = \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

Змістовий модуль 1.3 Диференціальне числення функцій однієї змінної

Приклад 1. Знайти зазначені границі.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{5x+3}{3x-4} = \frac{7}{10} = 0{,}7$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-10x-8}{4x^2+6x-64}=\dfrac{3\cdot 16-10\cdot 4-8}{4\cdot 16+6\cdot 4-64}=\dfrac{0}{24}=0$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^3-7x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4\left(7+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^4}\right)}{x^4\left(6+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}\right)}=\dfrac{7}{6}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(10x-3)}{x^3\left(2+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)}=\dfrac{10}{\infty}=0$;

д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5\left(2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^4}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\left(2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^4}\right)}{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{-\infty}{3}=-\infty.$;

е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{21+x}-5)(\sqrt{21+x}+5)}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{21+x-25}{(x-4)(x^2+x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x-4)(x^2+x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(x^2+4x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=\dfrac{1}{480}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x}{2x-3}-1\right)^{2-5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{\frac{2-5x}{3}}\right)^{\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=e^{-\frac{15}{2}}$;

и) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2^{1+7x}=2^{-\infty}=0$;

к) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi^2-x^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)}{\pi^2-x^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{\pi-x}{4}\right)}{(\pi-x)(\pi+x)}=$

$=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2\sin\left(\dfrac{\pi-x}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\pi-x}{4}\right)}{4\left(\dfrac{\pi-x}{4}\right)(\pi+x)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi-x}{4}\right)}{(\pi+x)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{0}{2\pi}=0$.

Приклад 2. Знайти похідні заданих функцій.

Розв'язання.

а) $y = 9x^5 - 4x^{-3} + 3\sqrt[3]{x^7} - 3x + 4$;

$$y' = 9 \cdot 5x^4 - 4 \cdot (-3)x^{-4} + \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - 3 = 45x^4 + 12x^{-4} + \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} - 3;$$

б) $y = \sqrt[4]{(2x^2 - 3x + 1)^3} - 6(x+1)^{-3}$;

$$y' = \frac{3}{4}(2x^2 - 3x + 1)^{-\frac{1}{4}} \cdot (4x - 3) - 6(-3)(x+1)^{-4} =$$

$$= \frac{3(4x-3)}{4\sqrt[4]{2x^2 - 3x + 1}} + \frac{18}{(x+1)^4};$$

в) $y = tg^5(x+2)\arccos 3x^2$;

$$y' = 5tg^4(x+2) \cdot \frac{1}{\cos^2(x+2)} \cdot \arccos 3x^2 + tg^5(x+2) \cdot \frac{6x}{-\sqrt{1 - 9x^4}};$$

г) $y = \arcsin^5 4x \cdot \log_2(x-5)$;

$$y' = 5\arcsin^4 4x \cdot \frac{4}{\sqrt{1 - 16x^2}} \cdot \log_2(x-5) + \arcsin^5 4x \cdot \frac{1}{(x-5)\ln 2};$$

д) $y = 3^{-x^4} ctg7x^3$;

$$y' = 3^{-x^4}(\ln 3)(-4x^3)ctg7x^3 + 3^{-x^4} \cdot \frac{1}{-\sin^2 7x^3} 21x^2 =$$

$$= -3^{-x^4}x^2\left(4x(\ln 3)ctg7x^3 + \frac{21}{\sin^2 7x^3}\right);$$

е) $y = \sqrt{3x^2 - 7x + 5} \cdot e^{x^4}$;

$$y' = \frac{(6x-7)e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2 - 7x + 5}} + 4x^3e^{x^4}\sqrt{3x^2 - 7x + 5};$$

ж) $y = (\lg(x^2 - 3x + 5)) / arcctg^2 5x$;

$$y' = \left(\frac{(2x-3)arcctg^2 5x}{(x^2 - 3x + 5)\ln 10} + \frac{10\lg(x^2 - 3x + 5)arcctg 5x}{1 + 25x^2}\right)arcctg^{-4} 5x;$$

и) $y = \left(3\ln\left(x^2 - 5\right)\right)/(x+3)^7$;

$$y' = 3\left(\frac{2x(x+3)}{x^2 - 5} - 7\ln\left(x^2 - 5\right)\right)(x+3)^{-8};$$

к) $y = \sqrt[7]{(x+5)/(x-5)} \cdot ctg(3x-4)$;

$$y' = \frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}} \cdot \frac{(x-5)-(x+5)}{(x-5)^2} ctg(3x-4) - \frac{3}{sin^2(3x-4)} \cdot \sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}} =$$

$$= \frac{10}{7}\frac{ctg(3x-4)\sqrt[7]{(x-5)^6}}{\sqrt[7]{(x+5)^6}} - \frac{3}{sin^2(3x-4)} \cdot \sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}};$$

л) $y = (sin7x)^{arctg(3x-5)}$.

Логарифмуємо

$$lny = arctg(3x-5)ln(sin7x).$$

Далі знаходимо похідну:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{1+(3x-5)^2} \cdot 3 \cdot ln(sin7x) + arctg(3x-5) \cdot \frac{7cos7x}{sin7x},$$

$$y' = (sin7x)^{arctg(3x-5)} \cdot \left(\frac{3ln(sin7x)}{1+(3x-5)^2} + \frac{7(arctg(3x-5))cos7x}{sin7x}\right);$$

м) $x^3y - y^2 = 6x$.

Диференціюємо обидві частини з урахуванням того, що $y = y(x)$. Маємо рівність $3x^2y + x^3y' - 2yy' = 6$, звідки

$$y' = (6 - 3x^2y)/(x^3 - 2y).$$

н) $\begin{cases} x = 3t^4 - t^2, \\ y = t^3 - 5. \end{cases}$

Тут

$$\begin{cases} x'_t = 12t^3 - 2t, \\ y'_t = 3t^2, \end{cases}$$

тому

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{12t^2 - 2t} = \frac{3t}{12t^2 - 2}.$$

Приклад 3. Провести повне дослідження функції $y = (x+3)^2/(x-4)$ і зробити ескіз її графіка.

Розв'язання. Для повного дослідження функції рекомендуємо наступну схему:

1) знайти області визначення і значень функції;

2) знайти точки розриву функції, точки перетину її графіка з осями координат і вертикальні асимптоти (якщо вони існують) ;

3) установити наявність чи відсутність парності, непарності, періодичності функції;

4) визначити критичні точки, інтервали монотонності і екстремуми функції;

5) визначити інтервали опуклості й увігнутості, точки перегину графіка функції;

6) знайти похилі асимптоти графіка функції;

7) зробити необхідні додаткові обчислення, наприклад, знайти точки перетину графіка з осями координат;

8) зробити ескіз графіка функції.

Отже:

1) областю визначення даної функції є множина

$$x \in (-\infty;4) \cup (4;\infty)\,;\;\; y \in (-\infty;0) \cup (28;\infty)\,;$$

2) лінія $x = 4$ - вертикальна асимптота, причому

$$\lim_{x \to 4-0} y = \lim_{x \to 4-0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = -\infty\,, \quad \lim_{x \to 4+0} = \lim_{x \to 4+0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = \infty\,.$$

Точки перетину графіка з осями координат: $(0,-\frac{4}{9})$ і $(-3,0);$

3) функція загального вигляду, тобто не є ні парною, ні непарною, ні періодичною;

4) знаходимо похідну:

$$y' = \frac{2(x+3)(x-4)-(x+3)^2}{(x-4)^2} = \frac{2x^2-2x-24-x^2-6x-9}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2}\,,$$

визначаємо інтервали монотонності і локальні екстремуми.

З $y'=0$ випливає $x^2-8x-33=0$, відкіля $x_1=11$, $x_2=-3$. В інтервалі $(-\infty;-3)$ похідна $y' > 0$, отже, функція зростає; в інтервалі $(-3;4)$ похідна $y' < 0$, тобто функція спадає; в точці $x = -3$ функція має локальний максимум: $y(-3) = 0$. В інтервалі *(4;11)* похідна $y' < 0$, отже, функція спадає; в інтервалі $(11;\infty)$ похідна $y' > 0$, тобто функція зростає. У точці $x = 11$ функція має локальний мінімум: $y(11) = 28$;

5) досліджуємо функцію на опуклість, увігнутість і визначимо точки перегину. Для цього знайдемо y'':

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2} \right)' = \frac{(2x-8)(x-4)^2 - (x^2 - 8x - 33)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 8x - 8x + 32 - 2x^2 + 16x + 66}{(x-4)^3} = \frac{98}{(x-4)^3}.$$

Очевидно, що в інтервалі $(-\infty;4)$ друга похідна $y'' < 0$, і в цьому інтервалі крива опукла; у інтервалі $(4;\infty)$ друга похідна $y'' > 0$, тобто в цьому інтервалі крива увігнута. Тому що при $x = 4$ функція не визначена, то точка перегину відсутня;

6) знаходимо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+3)^2}{x(x-4)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(x+3)^2}{x-4} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4x}{x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{10x+9}{x-4} = 10.$$

Таким чином, існує похила асимптота $y = x+10$;

7) додаткові обчислення при $x = 0$ дають $y = \frac{-9}{4}$;

8) ескіз графіка функції зображено на рисунку 1.

Тут для збереження масштабу виконано розрив осі *Oy*.

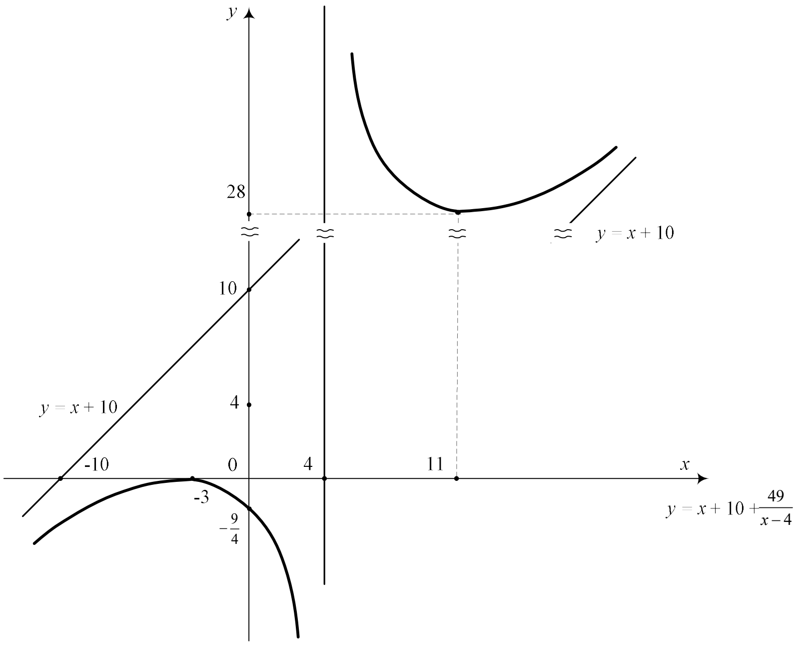

Рисунок 1

3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Змістовий модуль 1.1 Лінійна та векторна алгебра

I. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь: а) за формулами Крамера; б) за методом Гауса.

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$	2. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 19 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$	4. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -3x_1+5x_2+6x_3=-8 \\ 3x_1+x_2+x_3=-4 \\ x_1-4x_2-2x_3=-9 \end{cases}$	6. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=3 \\ x_1+x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-3 \end{cases}$	8. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=12 \\ 7x_1-5x_2+x_3=-33 \\ 4x_1+x_3=-7 \end{cases}$
9. $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-9 \\ x_1+5x_2+x_3=20 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=15 \end{cases}$	10. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=12 \\ 2x_1+x_2+3x_3=16 \\ 3x_1+2x_2+x_3=8 \end{cases}$
11. $\begin{cases} 7x_1+4x_2-x_3=13 \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3=-10 \end{cases}$	12. $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=9 \\ x_1+x_2-x_3=-2 \\ 8x_1+3x_2-6x_3=12 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+x_2+4x_3=6 \\ x_1+x_2+2x_3=4 \end{cases}$	14. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=9 \\ 5x_1+x_2+2x_3=11 \\ x_1+2x_2+4x_3=13 \end{cases}$
15. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-4x_3=-16 \\ x_1+3x_3=1 \\ 2x_1-3x_2+x_3=0 \end{cases}$	16. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=12 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=6 \\ 2x_1-x_2-x_3=-9 \end{cases}$
17. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3=5 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-1 \\ x_1-2x_2+3x_3=3 \end{cases}$	18. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=-4 \\ -3x_1+5x_2+6x_3=36 \\ x_1-4x_2-2x_3=-19 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1+5x_2-6x_3=-15 \\ 3x_1+x_2+4x_3=13 \\ 2x_1-3x_2+x_3=9 \end{cases}$	20. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=12 \\ x_1+2x_2+4x_3=6 \\ 5x_1+x_2+2x_3=3 \end{cases}$
21. $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=6 \\ 5x_2+4x_3=-20 \\ 3x_1-2x_2+5x_3=-22 \end{cases}$	22. $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=1 \\ x_1+5x_2+x_3=-3 \end{cases}$
23. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=14 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-16 \\ 3x_1-2x_2-5x_3=-8 \end{cases}$	24. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=7 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3=6 \end{cases}$
25. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=6 \\ 7x_1-5x_2=24 \\ 4x_1+11x_3=30 \end{cases}$	26. $\begin{cases} -2x_1+x_2-2x_3=-8 \\ x_1+x_2+2x_3=11 \\ 4x_1+x_2+4x_3=22 \end{cases}$
27. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4 \\ 2x_1+x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3=1 \end{cases}$	28. $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=-9 \\ 4x_1-x_2+5x_3=-2 \\ 3x_2-7x_3=-6 \end{cases}$
29. $\begin{cases} 8x_1+3x_2-6x_3=-4 \\ x_1+x_2-x_3=2 \\ 4x_1+x_2-3x_3=-5 \end{cases}$	30. $\begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3=19 \\ 2x_1-x_2+2x_3=11 \\ 11x_1+x_2+2x_3=9 \end{cases}$

II. Ознайомитись з матричним методом розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь і розв’язати систему із завдання 1 за допомогою оберненої матриці (матричним методом).

III. За даними координатами точок A, B і C для зазначених векторів знайти: а) модуль (довжину) вектора $\overline{a}$; б) скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$; в) проекцію вектора $\overline{c}$ на вектор $\overline{d}$.

	A	B	C	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{d}$
1.	(5, 4, 4)	(-5, 2, 3)	(4, 2, -5)	$11\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
2.	(6, 5, -4)	(-5, 2,2)	(3, 3, 2)	$6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CB}$
3.	(2, 4, 3)	(3, 1, -4)	(-1, 2, 2)	$2\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AB}$
4.	(-2, -3, -4)	(2, -4, 0)	(1, 4, 5)	$4\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$
5.	(2, 4, 6)	(-3, 5, 1)	(4, -5, -4)	$-6\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BA}$
6.	(-5, 4, 3)	(4, 5, 2)	(2, 7, -4)	$3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{AB}$
7.	(3, 5, 4)	(4, 2, -3)	(-2, 4, 7)	$3\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
8.	(-2, 3, -4)	(3, -1, 2)	(4, 2, 4)	$7\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$
9.	(3, 4, 1)	(5, -2, 6)	(4, 2, -7)	$-7\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$
10.	(4, 6, 7)	(2, -4, 1)	(-3, -4, 2)	$5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$
11.	(1, 3, 2)	(-2, 4, -1)	(1, 3, -2)	$2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
12.	(10, 6, 3)	(-2, 4, 5)	(3, -4, -6)	$5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
13.	(3, 4, 6)	(-4, 6, 4)	(5, -2, -3)	$-7\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BC}$
14.	(-3, -5, 6)	(3, 5, -4)	(2, 6, 4)	$4\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
15.	(2, 4, 5)	(1, -2, 3)	(-1, -2, 4)	$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$
16.	(-2, -3, -2)	(1, 4, 2)	(1, -3, 3)	$2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
17.	(-4, -2, -5)	(3, 7, 2)	(4, 6, -3)	$9\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$
18.	(6, 4, 5)	(-7, 1,8)	(2, -2, -7)	$5\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$
19.	(-2, -2, 4)	(1, 3, -2)	(1, 4, 2)	$2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$
20.	(0, 2, 5)	(2, -3, 4)	(3, 2, -5)	$-3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
21.	(4, 5, 3)	(-4, 2, 3)	(5, -6, -2)	$9\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$

22.	(4, 3, 2)	(-4, -3, 5)	(6, 4, -3)	$8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
23.	(4, 6, 3)	(-5, 2, 6)	(4, -4, -3)	$4\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$
24.	(2, -4, 3)	(-3, -2, 4)	(0, 0, -2)	$3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$
25.	(3, 2, 4)	(-2, 1, 3)	(2, -2, 1)	$4\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$
26.	(-5, -2, -6)	(3, 4, 5)	(2, -5, 4)	$8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$
27.	(1, 3, 2)	(-2, 4, -1)	(1, 3, -2)	$2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
28.	(-1, -2, 4)	(-1, 3, 5)	(1, 4, 2)	$3\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
29.	(5, 6, 1)	(-2, 4, -1)	(3, -3, 3)	$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
30.	(4, 3,-2)	(-3, -1, 4)	(2, 2, 1)	$-5\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CB}$

Змістовий модуль 1.2 Аналітична геометрія

I. Дани вершини A, B, C трикутника. Побудувати ці трикутники. Знайти: 1) довжину сторони; 2) рівняння сторони; 3) площу трикутника; 4) кут трикутника; 5) рівняння висоти; 6) довжину висоти; 7) рівняння медіани; 8) точку перетину медіани і висоти.

	A	B	C
1.	(−2, 4)	(3, 1)	(10, 7)
2.	(1, 7)	(−3, −1)	(11, −3)
3.	(1, −2)	(7, 1)	(3, 7)
4.	(−4, 2)	(−6, 6)	(6, 2)
5.	(4, −4)	(8, 2)	(3, 8)
6.	(1, −6)	(3, 4)	(−3, 3)
7.	(−5, 2)	(0, −4)	(5, 7)
8.	(−3, 8)	(−6, 2)	(0, −5)
9.	(4, 1)	(−3, −1)	(7, −3)
10.	(3, −1)	(11, 3)	(−6, 2)

11.	(−1, −4)	(9, 6)	(−5, 4)
12.	(−3, −1)	(−4, −5)	(8, 1)
13.	(−7, −2)	(3, −8)	(−4, 6)
14.	(7, 0)	(1, 4)	(−8, −4)
15.	(−5, 1)	(8, −2)	(1, 4)
16.	(−3, −2)	(14, 4)	(6, 8)
17.	(1, 0)	(−1, 4)	(9, 5)
18.	(−2, −3)	(1, 6)	(6, 1)
19.	(4, −3)	(7, 3)	(1, 10)
20.	(−3, −3)	(5, −7)	(7, 7)
21.	(−4, 2)	(8, −6)	(2, 6)
22.	(4, −4)	(6, 2)	(−1, 8)
23.	(6, −9)	(10, −1)	(−4, 1)
24.	(−4, 2)	(6, −4)	(4, 10)
25.	(−7, −2)	(−7, 4)	(5, −5)
26.	(10, −2)	(4, −5)	(−3, 1)
27.	(−2, −6)	(−3, 5)	(4, 0)
28.	(0, 2)	(−7, −4)	(3, 2)
29.	(1, −3)	(0, 7)	(−2, 4)
30.	(2, 5)	(−3, 1)	(0, 4)

II. Скласти канонічні рівняння: а) еліпса; б) гіперболи; в) параболи. Тут: A, B − точки, які лежать на кривій; F − фокус; a − більша (дійсна) піввісь; b − менша (уявна) піввісь; ε − ексцентриситет; k − кутовий коефіцієнт у рівнянні асимптоти гіперболи; D − директриса кривої; $2c$ − міжфокусна відстань; $x = a$ або $y = b$ − рівняння директриси .

	а)	б)	в)
1.	$a = 15$; $F(-10, 0)$	$a = 13$; $\varepsilon = 14/13$	D: $x = -4$

2.	$A(3,0); B(2, \sqrt{5}/3)$	$A(-3,4); B(-5, 4\sqrt{5})$	$D: y=1$
3.	$\varepsilon=\sqrt{21}/5; A(-5,0)$	$A(\sqrt{80}, 3); B(4\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$	$D: x=5$
4.	$b=2;\ F(4\sqrt{2}, 0)$	$a=7;\ \varepsilon=\sqrt{85}/7$	$D: y=-2$
5.	$a=11;\ \varepsilon=\sqrt{57}/11$	$k=2/3;\ C=5\sqrt{13}$	$D: x=-2$
6.	$b=\sqrt{15}; \varepsilon=\sqrt{10}/5$	$k=3/4;\ a=8$	$D: y=2$
7.	$a=4;\ F(3,0)$	$A(4,-6); B(6, 4\sqrt{6})$	$D: x=3$
8.	$b=4;\ F(9,0)$	$b=2\sqrt{10};\ F(-11,0)$	$D: y=-4$
9.	$A(0, \sqrt{3});\ B(\sqrt{14}/3, 1)$	$a=5;\ \varepsilon=7/5$	$D: x=-1$
10.	$A(4,-2);\ B(2, \sqrt{7})$	$\varepsilon=8/7;\ A(-7,0)$	$D: y=4$
11.	$a=12;\ \varepsilon=\sqrt{22}/6$	$k=4/3;\ c=5$	$D: x=4$
12.	$b=2;\ \varepsilon=5\sqrt{29}/29$	$A(-4,-3);\ B(8,9)$	$D: y=-1$
13.	$b=7;\ F=(5,0)$	$k=12/13;\ a=13$	$D: x=-3$
14.	$a=6;\ F=(-4,0)$	$b=3;\ F=(7,0)$	$D: y=3$
15.	$A(0,2),\ B(\sqrt{32}/3,1)$	$a=11;\ \varepsilon=12/11$	$D: x=2$
16.	$\varepsilon=3/5;\ A(0,8)$	$A(\sqrt{6}, 0);\ B(-2\sqrt{2}, 1)$	$D: y=-3$
17.	$a=11;\ \varepsilon=10/11$	$A(8,12);\ B(-6, 2\sqrt{15})$	$D: x=-5$
18.	$b=5;\ \varepsilon=12/13$	$k=\sqrt{11}/5;\ c=6$	$D: y=5$
19.	$a=9;\ F(7,0)$	$b=6;\ F(12,0)$	$D: x=1$
20.	$b=5;\ F(-10,0)$	$a=9;\ \varepsilon=4/3$	$D: y=-5$
21.	$A(0,-2);\ B(\sqrt{15}/2, 1)$	$k=\sqrt{29}/14;\ c=15$	$D: x=-1/4$
22.	$\varepsilon=2/3;\ A(-6,0)$	$A(8,6);\ B(10, -3\sqrt{10})$	$D: y=1/4$
23.	$a=25;\ \varepsilon=3/5$	$A(\sqrt{2}, 0);\ B(\sqrt{20}/3, 2)$	$D: x=1/2$
24.	$b=2\sqrt{15};\ \varepsilon=7/8$	$k=5/6;\ a=6$	$D: y=-1/3$
25.	$a=13;\ F(-5,0)$	$b=4;\ F(-7,0)$	$D: x=-1/2$
26.	$b=7;\ F(13,0)$	$A(\sqrt{32}/3, 1);\ B(\sqrt{8}, 0)$	$D: y=1/3$
27.	$A(-3;0);\ B(1, \sqrt{40}/3)$	$A(10, -3\sqrt{3});\ k=3/5$	$D: x=1/3$

28.	$\varepsilon = 5/6$; $A(0, -\sqrt{11})$	$b = 4$; $F(-11, 0)$	$D: y = -1/2$
29.	$a = 15$; $\varepsilon = 15/17$	$k = \sqrt{17}/8$; $c = 9$	$D: x = -1/3$
30.	$b = 2\sqrt{2}$; $\varepsilon = 7/9$	$k = \sqrt{2}/2$; $a = 6$	$D: y = 1/2$

III. Поверхня S задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$. У прямокутній системі координат $Oxyz$ побудувати частину цієї поверхні, що відповідає вказаним нерівностям, користуючись методом паралельних перерізів.

1.	$x^2 + 4y^2 + z - 8 = 0$ (Еліптичний параболоїд); $z \geq 0$	16.	$9x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0$ (Конус другого порядку); $-3 \leq z \leq 3$
2.	$x^2 + 4y^2 - 3z^2 - 16 = 0$ (Однопорожнинний гіперболоїд); $-4 \leq z \leq 4$	17.	$x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 16 = 0$ (Двопорожнинний гіпербо-лоїд); $-4 \leq y \leq 4$
3.	$9x^2 + y^2 + 9z^2 - 81 = 0$ (Еліпсоїд); $z \geq 0$	18.	$x^2 - 4y = 0$ (Параболічний циліндр); $-4 \leq z \leq 4$
4.	$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ (Еліптичний циліндр); $-4 \leq z \leq 4$	19.	$4x^2 + y^2 - 4z^2 + 48 = 0$ (Двопорожнинний гіпербо-лоїд); $-4 \leq z \leq 4$
5.	$16x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 48 = 0$ (Двопорожнинний гіперболоїд); $-4 \leq y \leq 4$	20.	$x + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$ (Еліптичний параболоїд); $x \geq 0$
6.	$x^2 - 4y^2 - 4z = 0$ (Гіпер-болічний параболоїд); $-4 \leq x \leq 4$; $-2 \leq y \leq 2$	21.	$4x^2 + 16y^2 + z^2 - 16 = 0$ (Еліпсоїд); $x \geq 0$
7.	$x^2 - 4y + 4z^2 = 0$ (Еліптичний параболоїд);$0 \leq y \leq 9$	22.	$25x^2 - 9y^2 - 225 = 0$ (Гіперболічний циліндр); $-4 \leq z \leq 4$
8.	$x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 32 = 0$ (Однопорожнинний гіперболоїд); $-4 \leq z \leq 4$	23.	$2x^2 + 3y^2 - z^2 - 36 = 0$ (Однопорожнинний гіпербо-лоїд); $-2 \leq z \leq 2$
9.	$x^2 + 12y^2 + 3z^2 - 48 = 0$ (Еліпсоїд); $y \geq 0$	24.	$3y - 9x^2 - 4z^2 = 0$ (Еліптичний параболоїд); $0 \leq y \leq 12$

10.	$9x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$ (Конус другого порядку); $-6 \le y \le 6$	25.	$2x^2 - 4y^2 - z^2 + 32 = 0$ (Однопорожнинний гіпербо-лоїд); $-4 \le x \le 4$
11.	$x + 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0$ (Еліптичний параболоїд); $x \ge 0$	26.	$3x^2 + y^2 - z^2 + 16 = 0$ (Двопорожнинний гіпербо-лоїд); $-5 \le z \le 5$
12.	$16x^2 - 2y^2 + z^2 - 32 = 0$ (Однопорожнинний гіперболоїд); $-4 \le y \le 4$	27.	$6x^2 + y^2 + 4z^2 - 36 = 0$ (Еліпсоїд); $z \ge 0$
13.	$4x^2 - 8y^2 + z^2 + 16 = 0$ (Двопорожнинний гіперболоїд); $-2 \le y \le 2$	28.	$9x^2 - 4y^2 - 4z = 0$ (Гіперболічний параболоїд); $-2 \le x \le 2$; $-3 \le y \le 3$
14.	$x^2 + 4y^2 - 2z = 0$ (Еліптичний параболоїд); $0 \le z \le 8$	29.	$4x^2 + y^2 - 2z^2 - 32 = 0$ (Однопорожнинний гіпербо-лоїд); $-4 \le z \le 4$
15.	$x^2 - 9z = 0$ (Параболічний циліндр); $-4 \le y \le 4$	30.	$x^2 + y^2 + z^2 = 25$ (Сфера); $z \ge 0$

Змістовий модуль 1.3 Диференціальне числення функцій однієї змінної

I. Знайти зазначені границі:

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-x-12}$

2. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$

5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+x-2}$

6. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$

8. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$

9. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$

11. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$

12. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$

13. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$

15. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$

16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-6x+4}{x^2-5x+6}$

17. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

18. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$

19. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+7x-15}{x^2-6x-27}$

20. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$

21. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

22. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$

23. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

25. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$

26. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$

28. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$

29. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}$

30. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$

II. Знайти зазначені границі:

1. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+7x^2-8}{6x^3-4x+3}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2+7x+1}{3x^2+x-5}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4-2x-7}{3x^4+3x+5}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+7x+-2}{3x^3-x-4}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$

III. Ознайомитись з геометричним та фізичним змістом похідної та розв’язати наступні задачі:

1. Записати рівняння дотичної до кривої $y=x^2-7x+3$ у точці з абсцисою $x=1$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y=x^2-16x+7$ у точці з абсцисою $x=1$.

3. Записати рівняння дотичної до кривої $y=\sqrt{x-4}$ у точці з абсцисою $x=8$.

4. Записати рівняння нормалі до кривої $y=\sqrt{x+4}$ у точці з абсцисою $x=-3$.

5. Записати рівняння дотичної до кривої $y=x^3-2x^2+4x-7$ у точці з абсцисою $x=2$.

6. Записати рівняння дотичної до кривої $y=x^3-5x^2+7x-2$ у точці з абсцисою $x=1$.

7. Визначити кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x^2-y^2+xy-11=0$ у точці M (3, 2).

8. У якій точці кривої $y^2=4x^3$ її дотична перпендикулярна до прямої $x+3y-1=0$?

9. Записати рівняння дотичної до кривої $y=x^2-6x+2$ у точці з абсцисою $x=2$.

10. Записати рівняння дотичної до кривої $y=x^2/4-x+5$ у точці з абсцисою $x=4$.

11. Записати рівняння нормалі до кривої $y=x^4/4-27x+60$ у точці з абсцисою $x=2$.

12. Записати рівняння дотичної до кривої $y=-2x^2+7x-8$ у точці з абсцисою $x=3$.

13. Записати рівняння нормалі до кривої $y=3tg\left(2x\right)+1$ у точці з абсцисою $x=\pi/2$.

14. Записати рівняння дотичної до кривої $y=4tg\left(3x\right)$ у точці з абсцисою $x=\pi/9$.

15. Записати рівняння нормалі до кривої $y=6tg\left(5x\right)$ у точці з абсцисою $x=\pi/20$.

16. Записати рівняння дотичної до кривої $y = sin(6x)$ у точці з абсцисою $x = \pi/18$.

17. З'ясувати, в яких точках кривої $y = sin(2x)$ її дотична утворює з віссю Ox кут $\pi/4$.

18. З'ясувати, в яких точках кривої $y = 2x^3 - 1$ її дотична утворює з віссю Ox кут $\pi/3$.

19. З'ясувати, в яких точках кривої $y = x^3/3 - x^2/2 - 7x + 9$ її дотична утворює з віссю Ox кут $-\pi/4$.

20. З'ясувати, в яких точках кривої $y = x^3/3 - 5x^2/2 + 7x + 4$ її дотична утворює з віссю Ox кут $\pi/4$.

21. Знайти точки на кривій $y = x^3/3 - 9x^2/2 + 20x - 7$, в яких її дотична паралельна вісі Ox.

22. Знайти точку на кривій $y = x^4/4 - 7$, в якій її дотична паралельна прямій $y = 8x - 4$.

23. Знайти точку на кривій $y = -3x^2 + 4x + 7$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $x - 20y + 5 = 0$.

24. Знайти точку на кривій $y = 5x^2 - 4x + 1$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $x + 6y + 15 = 0$.

25. Знайти точку на кривій $y = 3x^2 - 4x + 6$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $8x - y - 5 = 0$.

26. Знайти точку на кривій $y = 3x^2 - 5x - 11$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $x - y + 10 = 0$.

27. Знайти точку на кривій $y = -x^2 + 7x + 16$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $y = 3x + 4$.

28. З'ясувати, в якій точці кривої $y = 4x^2 - 10x - 13$, її дотична паралельна прямій $y = 6x - 7$.

29. З’ясувати, в якій точці кривої $y = 7x^2 - 5x + 4$, її дотична перпендикулярна до прямої $x + 23y - 1 = 0$.

30. З’ясувати, в якій точці кривої $y = x^2 / 4 - 7x + 5$, її дотична перпендикулярна до прямої $y = 2x + 5$.

IV. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік.

1. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$	2. $y = \dfrac{x^3 - 8}{2x^2}$	3. $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$
4. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2}$	5. $y = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$	6. $y = \dfrac{(x+3)^2}{x+4}$
7. $y = \left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)^2$	8. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$	9. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$
10. $y = \dfrac{2(x-1)^2}{x^2}$	11. $y = \dfrac{1 - 2x^3}{x^2}$	12. $y = \dfrac{3x^2 - 10}{3 - 2x}$
13. $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$	14. $y = \dfrac{x^3 - 32}{x^2}$	15. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$
16. $y = \dfrac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$	17. $y = \dfrac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}$	18. $y = \dfrac{(x+3)^2}{x-4}$

19. $y=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$	20. $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$	21. $y=x-2+\dfrac{4}{x-2}$
22. $y=\dfrac{x^2+x-1}{(x-1)^2}$	23. $y=\dfrac{x^3-5x}{5-3x^2}$	24. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$
25. $y=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$	26. $y=\dfrac{4x^3-3x}{4x^2-1}$	27. $y=\dfrac{-x^2-4x+13}{4x+3}$
28. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$	29. $y=\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}$	30. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 1980. – Ч. 1. – 320 с.; Ч. 2. – 365 с.

2. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике : в 4 ч. / И. А. Каплан. – Харьков : ХГУ, 1973. – Ч. 1. – 204 с.; 1973. – Ч. 2. – 368 с.; 1974. – Ч. 3. – 375 с.; 1971. – Ч. 4. – 498 с.

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Физматлит, 2003. − Т. 1. − 680 с.; Т. 2. − 864 с.; Т. 3. – 662 с.

4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. − М. : Наука, 1985. − Т. 1. – 430 с.; Т. 2. − 560 с.

5. Sytnykova Y. V. Linear algebra. Tutorial [Electronic resource] / Yu. V. Sytnykova, S. M. Lamtyugova, H. A. Kuznetsova ; O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv. − Kharkiv : O. M. Beketov NUUE, 2019. – 120 p. − Electronic text data. − Access mode : https://eprints.kname.edu.ua/53210, free (date of application: 12.10.2022). – Title from the screen.

6. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях : в 3 ч. [Електронний ресурс] : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – Ч. 2. – 141 с. − Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/42486, вільний (дата звернення: 12.10.2022). – Назва з екрана.

7. Ю. В. Ситникова. Лінійна та векторна алгебра [Електронний ресурс] : у схемах і таблицях : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання) / Ю. В. Ситникова, С. М. Ламтюгова, Г. А. Кузнецова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. –

109 с. − Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/49932, вільний (дата звернення: 12.10.2022). – Назва з екрана.

8. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях в 3 ч. [Електронний ресурс] : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології») / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – Ч. 1. – 106 с. − Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/39383, вільний (дата звернення: 12.10.2022). – Назва з екрана.

9. Навчальний довідник в схемах і таблицях [Електронний ресурс] : для самостійного вивчення теми «Аналітична геометрія» з курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології») / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2013. – 77 с. − Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/34810, вільний (дата звернення: 12.10.2022). – Назва з екрана.

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації
до проведення практичних занять
та виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

М О Д У Л Ь 1

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти всіх форм навчання
зі спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія та технології)*

Укладачі : **ЛАМТЮГОВА** Світлана Миколаївна
СИТНИКОВА Юлія Валеріївна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *С. М. Ламтюгова*

План 2021, поз. 191М

Підп. до друку 12.10.2022. Формат 60 × 84/16.
Електронне видання. Ум. друк. арк. 2,1.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.