МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до проведення практичних занять
та виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
М О Д У Л Ь 1

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти всіх форм навчання
зі спеціальності 191 – Архітектура та містобудування)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2022

Методичні рекомендації до проведення практичних занять та виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика». Модуль 1 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 191 – Архітектура та містобудування) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 42 с.

Укладачі : канд. фіз.-мат. наук, доц. С. М. Ламтюгова,
канд. пед. наук, доц. Ю. В. Ситникова

Рецензент

А. В. Якунін, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 1 від 31.08.2021.

Методичні рекомендації розроблені відповідно до навчального плану та програми дисципліни «Вища математика» для здобувачів спеціальності 191 – Архітектура та містобудування і містять навчальний матеріал третього семестру. У методичних рекомендаціях подано теми практичних занять відповідно до робочої програми з посиланням на рекомендовану літературу; приклади розв’язання типових задач; питання та завдання для самостійної роботи.

З М І С Т

ВСТУП

Мета дисципліни – забезпечити належну фундаментальну математичну підготовку студентів та сформувати у них знання та вміння застосовувати її для аналізу різноманітних явищ з орієнтацією на сфери професійної діяльності. Завдання дисципліни – допомогти студентам засвоїти основи математичного апарату, необхідного для розв'язування теоретичних і практичних задач, виробити вміння та навички математичного дослідження прикладних об'єктів, навчити студентів самостійно вивчати наукові джерела з математики та її прикладних застосувань, сприяти розвитку логічного та алгоритмічного мислення.

Навчальний процес з дисципліни «Вища математика» для здобувачів навчально-наукового інституту архітектури, дизайну та образотворчого мистецтва, що навчаються за спеціальністю 191 – Архітектура та містобудування триває один семестр на другому курсі навчання. На практичних заняттях викладається зміст та проводиться аналіз основних понять і методів вищої математики, студенти опановують основні підходи та засоби розв'язання математичних задач.

Важливою формою засвоєння математичного апарату є самостійна робота студентів, місце і значення якої постійно зростає. Вона включає самостійне опрацювання теоретичного матеріалу низки тем, виконання домашніх завдань, проведення самоконтролю, творчі пошуки поза межами, передбаченими програмою дисципліни.

Методичні рекомендації спрямовані на надання студентові необхідної інформації щодо змісту, форми та особливостей організації навчального процесу під час проведення практичних занять і виконання самостійної роботи.

1 ЗМІСТ ПРАКТИЧНОЇ ЧАСТИНИ

Змістовий модуль 1 Лінійна алгебра та векторна алгебра

Практичне заняття № 1 – 2 год

Тема «Визначники».

Мета: сформувати навички знаходити значення визначників та вміння розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою методу Крамера.

Література: [1, 2, 5, 7].

Практичне заняття № 2 – 2 год

Тема «Матриці».

Мета: сформувати вміння та навички виконувати дії з матрицями.

Література: [1, 2, 5, 7].

Практичне заняття № 3 – 2 год

Тема «Метод Гауса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь».

Мета: сформувати вміння розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою методу Гауса.

Література: [1, 2, 5, 7].

Практичне заняття № 4, 5 – 4 год

Тема «Вектори».

Мета: сформувати вміння та навички працювати з векторами та їх добутками.

Література: [1, 2, 7].

Змістовий модуль 2 Диференціальне числення

Практичне заняття № 6, 7 – 4 год

Тема «Похідна функції».

Мета: сформувати вміння та навички знаходити похідні від різних класів функцій.

Література: [1–4].

Практичне заняття № 8 – 3 год

Тема «Застосування похідної».

Мета: сформувати вміння та навички досліджувати функції та будувати графіки функцій.

Література: [1–4].

Змістовий модуль 3 Інтегральне числення. Диференціальні рівняння

Практичне заняття № 9 – 2 год

Тема «Первісна функція і невизначений інтеграл».

Мета: сформувати вміння та навички безпосереднього інтегрування за таблицею інтегралів.

Література: [1–4, 6].

Практичне заняття № 10 – 2 год

Тема «Методи інтегрування».

Мета: сформувати вміння та навички інтегрувати за допомогою заміни змінної та інтегрування частинами.

Література: [1–4, 6].

Практичне заняття № 11 – 2 год

Тема «Визначений інтеграл».

Мета: сформувати вміння та навички обчислювати визначені інтеграли.

Література: [1–4, 6].

Практичне заняття № 12 – 2 год

Тема «Застосування визначеного інтеграла».

Мета: сформувати вміння та навички застосовувати інтегрування до знаходження площі плоскої фігури, довжини дуги плоскої кривої та об’єма тіла обертання.

Література: [1–4, 6].

Практичне заняття № 13 – 2 год

Тема «Диференціальні рівняння першого порядку».

Мета: сформувати вміння та навички розв’язувати диференціальні рівняння першого порядку.

Література: [1–4, 6].

Практичне заняття № 14, 15 – 3 год

Тема «Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами».

Мета: сформувати вміння та навички розв'язувати лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Література: [1–4, 6].

2 ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Змістовий модуль 1 Лінійна алгебра та векторна алгебра

Приклад 1. Дано дві матриці:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}.

Розв'язання.

а) добуток AB має сенс, тому що число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Знаходимо матрицю С = AB, елементи якої

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Маємо:

$$C = AB = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3 \\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9 \\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix};$$

б) обчислимо BA

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4+4-0 & 0-2-6 & 1+6-6\\ -8+0+3 & 0+0+2 & 2+0+2\\ 8+2+9 & 0-1+6 & -2+3+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & -8 & 1\\ -5 & 2 & 4\\ 19 & 5 & 7\end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $AB \neq BA;$

в) обернена матриця A^{-1} має такий вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

де $\Delta_A=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=8+4+3+24=39\neq 0$,

отже, матриця A невироджена і має обернену матрицю A^{-1}.

Знаходимо:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-8;\quad A_{21}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2;\quad A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=5;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-11;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=14;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=7;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=8;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=4.$$

Тоді

$$A^{-1}=\frac{1}{39}\cdot\begin{pmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Дано систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3=3,\\ 2x_1+4x_2-3x_3=2,\\ 3x_1-\ \ x_2-3x_3=-7.\end{cases}$$

Розв'язати її:

а) за формулами Крамера;

б) за методом Гауса.

Розв'язання.

а) за формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$.

Тут: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16$, $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64,$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32,.$$

Знаходимо $x_1 = \frac{64}{-16} = -4$, $x_2 = \frac{-16}{-16} = 1$, $x_3 = \frac{32}{-16} = -2$;

б) за методом Гауса. Виключимо x_1 із другого і третього рівнянь. Для цього перше рівняння помножимо на 2 і віднімемо з другого, потім перше рівняння помножимо на 3 і віднімемо з третього:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ \quad -6x_2 - x_3 = -4, \\ -16x_2 = -16. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо $x_2 = 1$; з передостаннього знаходимо $x_3 = -2$ і з першого рівняння знаходимо $x_1 = -4$.

Змістовий модуль 2 Диференціальне числення

Приклад 1. Знайти похідні заданих функцій.

Розв'язання.

а) $y = 9x^5 - 4x^{-3} + \sqrt[3]{x^7} - 3x + 4$;

$$y' = 9 \cdot 5x^4 - 4 \cdot (-3)x^{-4} + \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - 3 = 45x^4 + 12x^{-4} + \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} - 3;$$

б) $y = \sqrt[4]{(2x^2 - 3x + 1)^3} - 6(x+1)^{-3}$;

$$y' = \frac{3}{4}(2x^2 - 3x + 1)^{-\frac{1}{4}} \cdot (4x - 3) - 6(-3)(x+1)^{-4} =$$

$$=\frac{3(4x-3)}{4\sqrt[4]{2x^2-3x+1}}+\frac{18}{(x+1)^4};$$

в) $y=tg^5(x+2)arccos\,3x^2$;

$$y'=5tg^4(x+2)\cdot\frac{1}{cos^2(x+2)}\cdot arccos\,3x^2+tg^5(x+2)\cdot\frac{6x}{-\sqrt{1-9x^4}};$$

г) $y=arcsin^5 4x\cdot log_2(x-5)$;

$$y'=5\,arcsin^4 4x\cdot\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}\cdot log_2(x-5)+arcsin^5 4x\cdot\frac{1}{(x-5)ln\,2};$$

д) $y=3^{-x^4}ctg7x^3$;

$$y'=3^{-x^4}(ln\,3)(-4x^3)ctg7x^3+3^{-x^4}\cdot\frac{1}{-sin^2 7x^3}21x^2=$$

$$=-3^{-x^4}x^2\left(4x(ln\,3)ctg7x^3+\frac{21}{sin^2 7x^3}\right);$$

е) $y=\sqrt{3x^2-7x+5}\cdot e^{x^4}$;

$$y'=\frac{(6x-7)e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2-7x+5}}+4x^3e^{x^4}\sqrt{3x^2-7x+5};$$

ж) $y=(lg(x^2-3x+5))/\,arcctg^2 5x$;

$$y'=\left(\frac{(2x-3)arcctg^2 5x}{(x^2-3x+5)ln\,10}+\frac{10\,lg(x^2-3x+5)arcctg5x}{1+25x^2}\right)arcctg^{-4}5x;$$

и) $y=\left(3\,ln\left(x^2-5\right)\right)/\left(x+3\right)^7$;

$$y'=3\left(\frac{2x(x+3)}{x^2-5}-7\,ln\left(x^2-5\right)\right)(x+3)^{-8};$$

к) $y=\sqrt[7]{(x+5)/(x-5)}\cdot ctg(3x-4)$;

$$y'=\frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\frac{(x-5)-(x+5)}{(x-5)^2}ctg(3x-4)-\frac{3}{sin^2(3x-4)}\cdot\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}=$$

$$=\frac{10}{7}\,\frac{ctg(3x-4)\sqrt[7]{(x-5)^6}}{\sqrt[7]{(x+5)^6}}-\frac{3}{sin^2(3x-4)}\cdot\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}};$$

л) $y=(sin7x)^{arctg(3x-5)}$.

Логарифмуємо:

$$lny = arctg(3x-5)ln(sin7x).$$

Далі знаходимо похідну:

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{1+(3x-5)^2}\cdot 3\cdot ln(sin7x)+arctg(3x-5)\cdot\frac{7\cos 7x}{sin7x},$$

$$y'=(sin7x)^{arctg(3x-5)}\cdot\left(\frac{3ln(sin7x)}{1+(3x-5)^2}+\frac{7(arctg(3x-5))cos7x}{sin7x}\right);$$

м) $x^3y-y^2=6x$.

Диференціюємо обидві частини з урахуванням того, що $y=y(x)$. Маємо рівність $3x^2y+x^3y'-2yy'=6$, звідки

$$y'=(6-3x^2y)/(x^3-2y).$$

н) $\begin{cases} x=3t^4-t^2, \\ y=t^3-5. \end{cases}$

Тут

$$\begin{cases} x'_t=12t^3-2t, \\ y'_t=3t^2, \end{cases}$$

тому

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3t^2}{12t^2-2t}=\frac{3t}{12t^2-2}.$$

Приклад 2. Провести повне дослідження функції $y=(x+3)^2/(x-4)$ і зробити ескіз її графіка.

Розв'язання. Для повного дослідження функції рекомендуємо наступну схему:

1) знайти області визначення і значень функції;

2) знайти точки розриву функції, точки перетину її графіка з осями координат і вертикальні асимптоти (якщо вони існують) ;

3) установити наявність чи відсутність парності, непарності, періодичності функції;

4) визначити критичні точки, інтервали монотонності і екстремуми функції;

5) визначити інтервали опуклості й увігнутості, точки перегину графіка функції;

6) знайти похилі асимптоти графіка функції;

7) зробити необхідні додаткові обчислення, наприклад, знайти точки перетину графіка з осями координат;

8) зробити ескіз графіка функції.

Отже:

1) областю визначення даної функції є множина

$$x \in (-\infty;4) \cup (4;\infty)\,;\; y \in (-\infty;0) \cup (28;\infty)\,;$$

2) лінія $x = 4$ - вертикальна асимптота, причому

$$\lim_{x \to 4-0} y = \lim_{x \to 4-0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = -\infty\,, \quad \lim_{x \to 4+0} = \lim_{x \to 4+0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = \infty\,.$$

Точки перетину графіка з осями координат: $(0,-\frac{4}{9})$ і $(-3,0)$;

3) функція загального вигляду, тобто не є ні парною, ні непарною, ні періодичною;

4) знаходимо похідну:

$$y' = \frac{2(x+3)(x-4)-(x+3)^2}{(x-4)^2} = \frac{2x^2-2x-24-x^2-6x-9}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2}\,,$$

визначаємо інтервали монотонності і локальні екстремуми.

З $y' = 0$ випливає $x^2-8x-33=0$, відкіля $x_1 = 11$, $x_2 = -3$. В інтервалі $(-\infty;-3)$ похідна $y' > 0$, отже, функція зростає; в інтервалі $(-3;4)$ похідна $y' < 0$, тобто функція спадає; в точці $x = -3$ функція має локальний максимум: $y(-3) = 0$. В інтервалі $(4;11)$ похідна $y' < 0$, отже, функція спадає; в інтервалі $(11;\infty)$ похідна $y' > 0$, тобто функція зростає. У точці $x = 11$ функція має локальний мінімум: $y(11) = 28$;

5) досліджуємо функцію на опуклість, увігнутість і визначимо точки перегину. Для цього знайдемо y'':

$$y'' = \left(\frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2}\right)' = \frac{(2x-8)(x-4)^2-(x^2-8x-33)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{2x^2-8x-8x+32-2x^2+16x+66}{(x-4)^3} = \frac{98}{(x-4)^3}\,.$$

Очевидно, що в інтервалі $(-\infty;4)$ друга похідна $y'' < 0$, і в цьому інтервалі крива опукла; у інтервалі $(4;\infty)$ друга похідна $y''>0$, тобто в цьому інтервалі крива увігнута. Тому що при $x = 4$ функція не визначена, то точка перегину відсутня;

6) знаходимо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+3)^2}{x(x-4)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+3)^2}{x-4}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+6x+9-x^2+4x}{x-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{10x+9}{x-4}=10.$$

Таким чином, існує похила асимптота $y = x+10$;

7) додаткові обчислення при $x=0$ дають $y=\frac{-9}{4}$;

8) ескіз графіка функції зображено на рисунку 1.

Тут для збереження масштабу виконано розрив осі Oy.

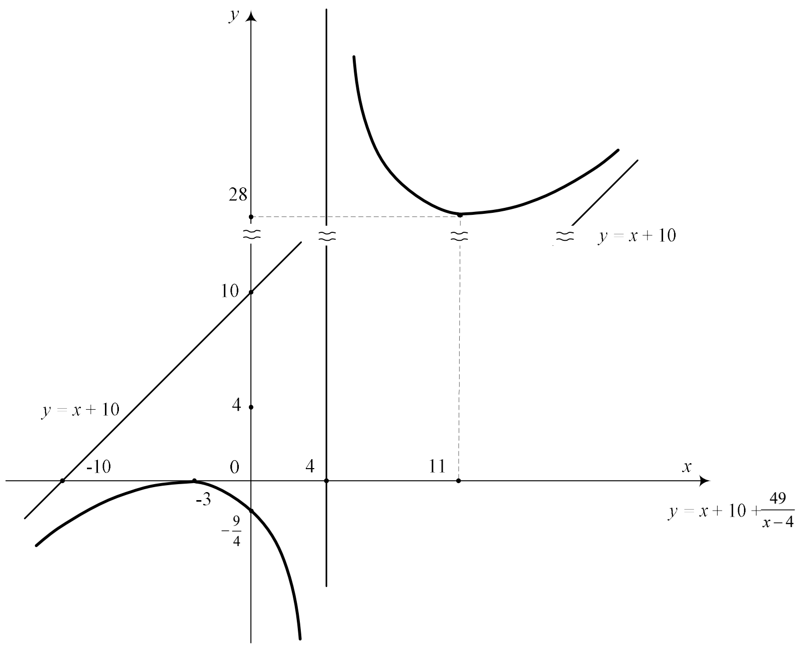

Рисунок 1

Приклад 1. Знайти невизначені інтеграли.

Розв'язання.

а) $\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx$.

Розділивши чисельник підінтегральної функції на знаменник і використавши правило інтегрування степеневої функції, одержимо:

$$\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx = 3\int x^{-1/4}dx - 2\int x^{15/4}dx + \int x^{5/12}dx =$$

$$= 4x^{3/4} - \frac{8}{19}x^{19/4} + \frac{12}{17}x^{17/12} + C = 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19}\sqrt[4]{x^{19}} + \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + C$$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}} = \int (4-8x)^{-2/5}dx =$

$= -\frac{5}{8\cdot 3}(4-8x)^{3/5} + C = -\frac{5}{24}\sqrt[5]{(4-8x)^3} + C$.

в) $\int \frac{dx}{6-7x} = -\frac{1}{7}\ln|6-7x| + C$.

г) $\int \cos(2-5x)d = -\frac{1}{5}\sin(2-5x) + C$.

д) $\int \frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{3}{4}}} = \frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{3}{4}}\right| + C$.

е) $\int \frac{7xdx}{3x^2+4}$.

Перетворимо підінтегральну функцію таким чином, щоб у чисельнику вийшла похідна знаменника:

$$\int \frac{7xdx}{3x^2+4} = \frac{7}{6}\int \frac{6xdx}{3x^2+4} = \begin{vmatrix} t = 3x^2+4 \\ dt = 6xdx \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{7}{6}\int\frac{dt}{t}=\frac{7}{6}\ln|t|+C=\frac{7}{6}\ln|3x^2+4|+C.$$

ж) $\int\frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx$.

За допомогою заміни змінної:

$$\int\frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx=\begin{vmatrix}t=\ln(x+2)\\ dt=\frac{1}{x+2}dx\end{vmatrix}=\int\sqrt[7]{t^3}dt=\int t^{\frac{3}{7}}dt=\frac{t^{\frac{10}{7}}}{\frac{10}{7}}+C=$$

$$=\frac{7\sqrt[7]{t^{10}}}{10}+C=\frac{7\sqrt[7]{\ln^{10}(x+2)}}{10}+C.$$

и) $\int e^{3\cos x+2}\sin xdx$.

За допомогою заміни змінної:

$$\int\sin xe^{3\cos x+2}dx=\begin{vmatrix}t=3\cos x+2\\ dt=-3\sin xdx\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\int e^t dt=$$

$$=-\frac{1}{3}e^t+C=-\frac{1}{3}e^{3\cos x+2}+C.$$

к) $\int(x-7)\sin 5xdx$.

За допомогою інтегрування частинами:

$$\int(x-7)\sin 5xdx=\begin{vmatrix}u=x-7, & du=dx,\\ dv=\sin 5xdx, & v=-\frac{1}{5}\cos 5x\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x+\frac{1}{5}\int\cos 5xdx=-\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x+\frac{1}{25}\sin 5x+C$$

л) $\int\arccos 4xdx$.

Інтегруємо частинами:

$$\int\arccos 4xdx=\begin{vmatrix}\arccos 4x=u, & dv=dx\\ -\frac{4dx}{\sqrt{1-16x^2}}=du, & v=x\end{vmatrix}=-x\arccos 4x+$$

$$+4\int \frac{xdx}{\sqrt{1-16x^2}} = -x\arccos 4x - \frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{1-16x^2} + C =$$

$$= -x\arccos 4x - \frac{1}{4}\sqrt{1-16x^2} + C.$$

м) $\int xe^{x-7}dx$.

Інтегруємо частинами:

$$\int xe^{x-7}dx = \begin{vmatrix} x = u, & e^{x-7}dx = dv \\ dx = du, & e^{x-7} = v \end{vmatrix} =$$

$$= xe^{x-7} - \int e^{x-7}dx = xe^{x-7} - e^{x-7} + C.$$

Приклад 2. Обчислити визначені інтеграли.

Розв'язання.

а) $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Використовуємо метод заміни змінної:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{vmatrix} x^2+1 = t^2; & t = 1, & \text{коли x} = 0 \\ \text{xdx} = \text{tdt}; & t = \sqrt{2}, & \text{коли x} = 1 \end{vmatrix} = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)}{t}dt =$$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)dt = \left(\frac{1}{3}t^3 - t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2} - \frac{1}{3} + 1 \approx 0,20.$$

б) $\int\limits_1^e \ln^2 xdx$.

Двічі застосувавши метод інтегрування частинами, одержимо:

$$\int\limits_1^e \ln^2 xdx = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x & dv = dx \\ du = \dfrac{2\ln x}{x}dx & v = x \end{vmatrix} = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int\limits_1^e \ln xdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = e\ln^2 e - 2(x\ln x - x)\Big|_1^e = e - 2e + 2e - 2 \approx 0,72$$

Приклад 3. Обчислити (з точністю до двох знаків після коми) площу фігури, обмеженої лініями $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння $\ln^2 x = \ln x$ і знайдемо точки перетину даних кривих: $M_1(1,0)$; $M_2(e,1)$.

Шукана площа (рис. 2) знаходиться за формулою: $S = \int\limits_a^b (y_2 - y_1)dx$.

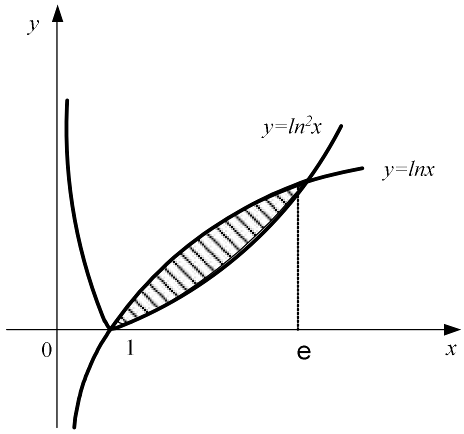

Рисунок 2

Тут $y_2 = \ln x$, $y_1 = \ln^2 x$, тобто: $S = \int\limits_1^e (\ln x - \ln^2 x)dx$. Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\int \ln^2 x dx = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x, & dv = dx \\ du = \dfrac{2\ln x}{x}dx, & v = x \end{vmatrix} = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx,$$

$$\int \ln x dx = \begin{vmatrix} \ln x = u, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Тоді

$$S = \int\limits_1^e \ln x dx - \int\limits_1^e \ln^2 x dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e - (x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x)\Big|_1^e =$$

$$= e\ln e - e + 1 - (e\ln^2 e - 2e\ln e + 2e - 2) = 3 - e \approx 0{,}28 \text{ од}^2.$$

Приклад 4. Обчислити довжину дуги заданих ліній.

Розв'язання.

а) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \quad 0 \le \text{t} \le \pi. \end{cases}$

Скористаємося формулою:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt\ ,$$

$$x_t'=2t\sin t+(t^2-2)\cos t+2\cos t-2t\sin t=t^2\cos t\ ,$$

$$y_t'=-2t\cos t-(2-t^2)\sin t+2\sin t+2t\cos t=t^2\sin t\ ,$$

$$\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}=\sqrt{t^4\cos^2 t+t^4\sin^2 t}=t^2\ .$$

Остаточно маємо:

$$l=\int_0^{\pi}t^2dt=\frac{t^3}{3}\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}\approx 10,32\ \text{од.}$$

б) $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

Довжину лінії у полярній системі координат знаходимо за формулою:

$$L=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}\,d\varphi\text{. Тут }\rho'=4(1-\sin\varphi)'=-4\cos\varphi\ .$$

Побудована лінія (рис. 3) симетрична відносно осі oy. Отже,

$$L=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-4\cos\varphi)^2+(1-\sin\varphi)^2}\,d\varphi=$$

$$=8\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\varphi+1-2\sin\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

Використаємо основну тригонометричну тотожність:

$$=8\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(1-\sin\varphi)}\,d\varphi=8\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2})}dy={}^2dy=$$

$$=8\sqrt{2}(-2\cos\frac{\varphi}{2}-2\sin\frac{\varphi}{2})\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}=16\sqrt{2}(2\frac{\sqrt{2}}{2})=32\ \text{од.}$$

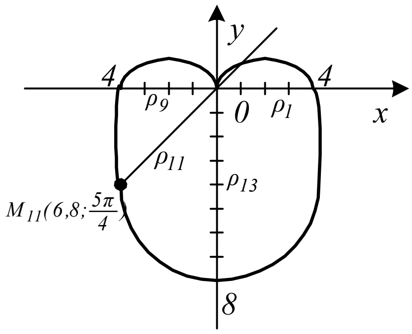

Рисунок 3

Приклад 5. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі абсцис плоскої фігури, обмеженої параболами: $y = 3 - x^2$, $y = x^2 + 1$.

Розв'язання. Знаходимо точки перетину парабол: $M_1(-1,2)$, $M_2(1,2)$. Об'єм V даного тіла одержуємо як різницю об'ємів $V_1 - V_2$, де

$$V_2 = \pi\int_{-1}^{1}(3-x^2)^2\,dx\,; \qquad V_1 = \pi\int_{-1}^{1}(x^2+1)^2\,dx\,.$$

Таким чином,

$$V = V_2 - V_1 = \pi\int_{-1}^{1}((3-x^2)^2-(x^2+1)^2)dx = \pi\int_{-1}^{1}(8-8x^2)dx =$$

$$= 8\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 16\pi\left(1-\frac{1}{3}\right) \approx 33{,}50 \text{ од}^3.$$

Рисунок до задачі виконати самостійно!

Приклад 6. Знайти загальний (або частинний) розв'язок заданих диференціальних рівнянь.

Розв'язання.

а) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

Перетворимо дане рівняння

$$y(1-x^2)dy = -x(y^2+1)dx\,.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні:

$$\frac{ydy}{y^2+1} = \frac{-xdx}{1-x^2}\,.$$

Інтегруємо обидві частини останньої рівності:

$$y^2+1 = C|x^2-1| \Rightarrow y^2 = |x^2-1| - 1.$$

Отже, загальним рішенням рівняння є

$$y = \pm\sqrt{C|x^2-1|-1}.$$

б) $y - x\dfrac{dy}{dx} = x + y\dfrac{dy}{dx}$.

З даного рівняння знаходимо $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}.$$

Це однорідне рівняння першого порядку. Вирішуємо його за допомогою підстановки $y = xu(x)$.

Далі знаходимо:

$$y' = u'x + u;\ u'x + u = \frac{ux - x}{x + ux};\ u'x + u = \frac{u-1}{u+1};$$

$$u'x = \frac{u-1}{u+1} - u = \frac{-u^2-1}{u+1};\ x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2+1}{u+1}.$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його та знайдемо загальний інтеграл:

$$\frac{u+1}{u^2+1}du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{u+1}{u^2+1}du = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{2udu}{u^2+1} + \int\frac{du}{u^2+1} =$$

$$= -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|u^2+1| + arctgu = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow arctgu = \ln\left|\frac{C}{x\sqrt{u^2+1}}\right| \Rightarrow arctg\frac{y}{x} = \ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

в) $dy - e^{-x}dx + ydx - xdy = xydx, \quad \mathrm{y}(0) = \ln 5$.

Перетворимо рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + e^{-x} - y}{1-x}; \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{1-x}{1-x}y = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

Рівняння $\frac{dy}{dx}+y=\frac{e^{-x}}{1-x}$ є лінійним, першого порядку. Розв'язуємо його за допомогою підстановки $y = uv$, де $u=u(x)$ i $v=v(x)$. Маємо:

$$y'=u'v+uv'\,;\ u'v+uv'+uv=\frac{e^{-x}}{1-x},\ u'v+u\left(\frac{dv}{dx}+v\right)=\frac{e^{-x}}{1-x}\,.$$

Знаходимо функцію $v(x)$ з умови $\frac{dv}{dx}+v=0$.

Тоді

$$\frac{dv}{dx}=-v\,;\ \frac{dv}{v}=-dx\,;\ \int\frac{dv}{v}=-\int dx\,;\ \ln|v|=-x\,;\ v=e^{-x}\,.$$

Підставляємо отриманий вираз для v у рівняння $u'v=\frac{e^{-x}}{1-x}$:

$$\frac{du}{dx}e^{-x}=\frac{e^{-x}}{1-x}\,;\ \frac{du}{dx}=\frac{1}{1-x}\,;\ du=\frac{dx}{1-x}\,;\ \int du=\int\frac{dx}{1-x}\,;$$

$$u=-\ln|1-x|+\ln C\,;\ u=\ln\frac{C}{|1-x|}\,.$$

Тоді $y=uv=e^{-x}\ln\frac{C}{|1-x|}$ є загальним розв'язком рівняння.

Знаходимо C, використовуючи початкову умову:

$$y(0) = lnC = ln5, \qquad C = 5.$$

Остаточно одержуємо:

$$y=e^{-x}\ln\frac{5}{|1-x|}\,.$$

г) $y'+2e^{x}y=2e^{x}\sqrt{y}$.

Дане рівняння є рівнянням Бернуллі. Вирішуємо його за допомогою підстановки $y = uv$. Тоді

$$y'=u'v+uv'\,;\ u'v+uv'+2e^{x}uv=2e^{x}\sqrt{uv}\,,$$

$$u'v+(u'+2e^{x}u)v=2e^{x}\sqrt{uv}\,. \qquad (1)$$

Знаходимо $u(x)$ з умови

$$u'+2e^{x}u=0\Rightarrow\frac{du}{dx}=-2e^{x}u\Rightarrow\frac{du}{u}=-2e^{x}dx\Rightarrow\int\frac{du}{u}=-2\int e^{x}dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|u| = -2e^x,\ u = e^{-2e^x}.$$

Отриманий вираз для *u(x)* підставляємо у рівняння (1):

$$v'e^{-2e^x} = 2e^x\sqrt{e^{-2e^x}v},\quad v'e^{-2e^x} = 2e^x e^{-e^x}\sqrt{v},$$

$$v' = 2e^x e^{e^x}\sqrt{v} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2e^{e^x}e^x\sqrt{v} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2e^{e^x}e^x dx,$$

$$\int\frac{dv}{\sqrt{v}} = 2\int e^x e^{e^x}dx \Rightarrow 2\sqrt{v} = 2e^{e^x} + 2C \Rightarrow v = (e^{e^x} + C)^2.$$

Остаточно знаходимо, що загальний розв'язок рівняння визначається формулою $y = uv = e^{-2e^x}(e^{e^x} + C)^2$.

д) $y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$.

Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичне рівняння $k^2 - 3k - 4 = 0$ має корені $k_1 = 4$, $k_2 = -1$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння визначається формулою

$$y_0 = C_1e^{4x} + C_2e^{-x}.$$

За функцією $f(x) = 6xe^{-x}$, що стоїть у правій частині початкового рівняння, записуємо частинний розв'язок

$$y_r = (Ax + B)e^{-x}x = (Ax^2 + Bx)e^{-x}.$$

Коефіцієнти *A* і *B* визначимо методом невизначених коефіцієнтів. Для цього знаходимо:

$$y_r' = (2Ax + B)e^{-x} + (Ax^2 + Bx)e^{-x}\cdot(-1) = (2Ax + B)e^{-x} +$$

$$+(Ax^2 + Bx)e^{-x} = (2Ax + B - Ax^2Bx)e^{-x},$$

$$y_r'' = (2A - 2Ax - B)e^{-x} - (2Ax + B - Ax^2 - Bx)e^{-x} =$$

$$= (2A - 2Ax - B - 2Ax - B + Ax^2 + Bx)e^{-x} =$$

$$= (2A - 4Ax - 2B + 2Ax^2 + Bx)e^{-x}.$$

Знайдені вирази для y_r', і y_r'' підставимо у початкове рівняння і, розділивши обидві його частини на $e^{-x} \neq 0$, дорівняємо коефіцієнти при x^1 і x^0. Одержимо систему, з якої знайдемо *A* і *B*.

Відповідно до викладеного, маємо:

$$2A + Bx - 4Ax - 2B - 6Ax - 3B + 3Bx - 4Bx = 6x,$$

$$\begin{array}{c\|\|c} x^1 & B - 4A - 6A + 3B - 4B = 6 \\ x^0 & 2A - 2B - 3B = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{5}, \\ B = -\dfrac{6}{25}, \end{cases}$$

тоді $y_r = -\left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right)e^{-x}$ і загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння визначається формулою

$$y = y_0 + y_r = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - \left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right)e^{-x}.$$

3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Змістовий модуль 1 Лінійна алгебра та векторна алгебра

І. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь: а) за формулами Крамера; б) за методом Гауса.

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$	2. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 19 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$	4. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$
5. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$	6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$	8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$
9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$	10. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$
11. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$	12. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$	14. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 13 \end{cases}$
15. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$	16. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$
17. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$	18. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$
19. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$	20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=6 \\ 5x_2+4x_3=-20 \\ 3x_1-2x_2+5x_3=-22 \end{cases}$	22. $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=1 \\ x_1+5x_2+x_3=-3 \end{cases}$
23. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=14 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-16 \\ 3x_1-2x_2-5x_3=-8 \end{cases}$	24. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=7 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3=6 \end{cases}$
25. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=6 \\ 7x_1-5x_2=24 \\ 4x_1+11x_3=30 \end{cases}$	26. $\begin{cases} -2x_1+x_2-2x_3=-8 \\ x_1+x_2+2x_3=11 \\ 4x_1+x_2+4x_3=22 \end{cases}$
27. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4 \\ 2x_1+x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3=1 \end{cases}$	28. $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=-9 \\ 4x_1-x_2+5x_3=-2 \\ 3x_2-7x_3=-6 \end{cases}$
29. $\begin{cases} 8x_1+3x_2-6x_3=-4 \\ x_1+x_2-x_3=2 \\ 4x_1+x_2-3x_3=-5 \end{cases}$	30. $\begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3=19 \\ 2x_1-x_2+2x_3=11 \\ 11x_1+x_2+2x_3=9 \end{cases}$

II. Ознайомитись з матричним методом розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь і розв’язати систему із завдання 1 за допомогою оберненої матриці (матричним методом).

Змістовий модуль 2 Диференціальне числення

I. Ознайомитись з геометричним та фізичним змістом похідної та розв’язати наступні задачі:

1. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 7x + 3$ у точці з абсцисою $x = 1$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^2 - 16x + 7$ у точці з абсцисою $x = 1$.

3. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x - 4}$ у точці з абсцисою $x = 8$.

4. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{x + 4}$ у точці з абсцисою $x = -3$.

5. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ у точці з абсцисою $x = 2$.

6. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ у точці з абсцисою $x = 1$.

7. Визначити кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$ у точці M (3, 2).

8. У якій точці кривої $y^2 = 4x^3$ її дотична перпендикулярна до прямої $x + 3y - 1 = 0$?

9. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 6x + 2$ у точці з абсцисою $x = 2$.

10. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 / 4 - x + 5$ у точці з абсцисою $x = 4$.

11. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^4 / 4 - 27x + 60$ у точці з абсцисою $x = 2$.

12. Записати рівняння дотичної до кривої $y=-2x^2+7x-8$ у точці з абсцисою $x=3$.

13. Записати рівняння нормалі до кривої $y=3tg\left(2x\right)+1$ у точці з абсцисою $x=\pi/2$.

14. Записати рівняння дотичної до кривої $y=4tg\left(3x\right)$ у точці з абсцисою $x=\pi/9$.

15. Записати рівняння нормалі до кривої $y=6tg\left(5x\right)$ у точці з абсцисою $x=\pi/20$.

16. Записати рівняння дотичної до кривої $y=sin\left(6x\right)$ у точці з абсцисою $x=\pi/18$.

17. З'ясувати, в яких точках кривої $y=sin\left(2x\right)$ її дотична утворює з віссю Ox кут $\pi/4$.

18. З'ясувати, в яких точках кривої $y=2x^3-1$ її дотична утворює з віссю Ox кут $\pi/3$.

19. З'ясувати, в яких точках кривої $y=x^3/3-x^2/2-7x+9$ її дотична утворює з віссю Ox кут $-\pi/4$.

20. З'ясувати, в яких точках кривої $y=x^3/3-5x^2/2+7x+4$ її дотична утворює з віссю Ox кут $\pi/4$.

21. Знайти точки на кривій $y=x^3/3-9x^2/2+20x-7$, в яких її дотична паралельна вісі Ox.

22. Знайти точку на кривій $y=x^4/4-7$, в якій її дотична паралельна прямій $y=8x-4$.

23. Знайти точку на кривій $y=-3x^2+4x+7$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $x-20y+5=0$.

24. Знайти точку на кривій $y=5x^2-4x+1$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $x+6y+15=0$.

25. Знайти точку на кривій $y = 3x^2 - 4x + 6$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $8x - y - 5 = 0$.

26. Знайти точку на кривій $y = 3x^2 - 5x - 11$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $x - y + 10 = 0$.

27. Знайти точку на кривій $y = -x^2 + 7x + 16$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $y = 3x + 4$.

28. З’ясувати, в якій точці кривої $y = 4x^2 - 10x - 13$, її дотична паралельна прямій $y = 6x - 7$.

29. З’ясувати, в якій точці кривої $y = 7x^2 - 5x + 4$, її дотична перпендикулярна до прямої $x + 23y - 1 = 0$.

30. З’ясувати, в якій точці кривої $y = x^2/4 - 7x + 5$, її дотична перпендикулярна до прямої $y = 2x + 5$.

II. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік.

1. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$	2. $y = \dfrac{x^3 - 8}{2x^2}$	3. $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$
4. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2}$	5. $y = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$	6. $y = \dfrac{(x+3)^2}{x + 4}$
7. $y = \left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)^2$	8. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$	9. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$

10. $y=\frac{2\left(x-1\right)^2}{x^2}$	11. $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$	12. $y=\frac{3x^2-10}{3-2x}$
13. $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$	14. $y=\frac{x^3-32}{x^2}$	15. $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$
16. $y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}$	17. $y=\frac{x^3+2x^2}{\left(x-1\right)^2}$	18. $y=\frac{\left(x+3\right)^2}{x-4}$
19. $y=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$	20. $y=\frac{\left(x-1\right)^3}{\left(x-2\right)^2}$	21. $y=x-2+\frac{4}{x-2}$
22. $y=\frac{x^2+x-1}{\left(x-1\right)^2}$	23. $y=\frac{x^3-5x}{5-3x^2}$	24. $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$
25. $y=\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$	26. $y=\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}$	27. $y=\frac{-x^2-4x+13}{4x+3}$
28. $y=\frac{\left(x-1\right)^2}{x^2+1}$	29. $y=\frac{x^3-4x}{3x^2-4}$	30. $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

Змістовий модуль 3 Інтегральне числення. Диференціальні рівняння

I. Знайти невизначені інтеграли:

1.	$\int \frac{\sqrt{3}dx}{9x^2-3}$	11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$	21.	$\int \frac{dx}{3x^2-2}$
2.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{9x^2+3}}$	12.	$\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$	22.	$\int \frac{dx}{4x^2+3}$
3.	$\int \frac{xdx}{9x^2+3}$	13.	$\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3-4x^2}}$	23.	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$
4.	$\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$	24.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$
5.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$	15.	$\int \frac{dx}{2x^2+7}$	25.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}$
6.	$\int \frac{dx}{7x^2-4}$	16.	$\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$	26.	$\int \frac{xdx}{4x^2-3}$
7.	$\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-4}}$	17.	$\int \frac{xdx}{3x^2+2}$	27.	$\int \frac{dx}{8x^2-9}$
8.	$\int \frac{dx}{5x^2+3}$	18.	$\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{7-2x^2}}$	28.	$\int \frac{dx}{4x^2+7}$
9.	$\int \frac{dx}{5x^2-3}$	19.	$\int \frac{\sqrt{14}dx}{2x^2-7}$	29.	$\int \frac{dx}{4+3x^2}$
10.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$	20.	$\int \frac{dx}{8x^2+9}$	30.	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}}$

II. Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{(2x+1)\cdot\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(1-x)}dx}{x-1}$

3. $\int \frac{dx}{(1-x)\cdot\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$

4. $\int \frac{dx}{(1-x)\cdot\sqrt[2]{\ln^3(1-x)}}$

5. $\int \frac{\ln^3(1-x)dx}{x-1}$

6. $\int \frac{\sqrt[2]{\ln(2x-1)}dx}{2x-1}$

7. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}dx}{3x+1}$

8. $\int \frac{dx}{(x+1)\cdot \ln^2(x+1)}$

9. $\int \frac{dx}{(x+1)\cdot \sqrt[3]{\ln(x+1)}}$

10. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(1+x)}dx}{x+1}$

11. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{(\sin x-4)^3}}dx$

12. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$

13. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}}dx$

14. $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x}dx$

15. $\int \sin^3 4x\cdot \cos 4x dx$

16. $\int \sqrt[4]{\cos 2x}\cdot \sin 2x dx$

17. $\int \sqrt{\cos^3 2x}\cdot \sin 2x dx$

18. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}}dx$

19. $\int \sin^3 5x\cdot \cos 5x dx$

20. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}}dx$

21. $\int \frac{ctg^5 4x}{\sin^2 4x}dx$

22. $\int \frac{\sqrt[3]{tg^5 4x}}{\cos^2 4x}dx$

23. $\int \frac{\sqrt[5]{tg^2 3x}}{\cos^2 3x}dx$

24. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x\cdot \sqrt{tg 4x}}$

25. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot \sqrt[5]{ctg^4 x}}$

26. $\int \frac{tg 6x}{\cos^2 6x}dx$

27. $\int \frac{tg^6 2x}{\cos^2 2x}dx$

28. $\int \frac{\sqrt{ctg 4x}}{\sin^2 4x}dx$

29. $\int \frac{\sqrt[5]{ctg^2 x}}{\sin^2 x}dx$

30. $\int \frac{tg^7 3x}{\cos^2 3x}dx$

III. Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\sqrt{arctg^6 3x}}{1+9x^2}dx$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

3. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

4. $\int \frac{\mathrm{arc}\,tg^3 2x}{1+4x^2}dx$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

6. $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^3 x}$

7. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$ 8. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arc} tg^2 x}}{1+x^2}dx$ 9. $\int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^4 x}$ 11. $\int e^{5x^2-3}xdx$ 12. $\int e^{1-4x^2}xdx$

13. $\int e^{3x^2+4}xdx$ 14. $\int e^{\sin x+1}\cos xdx$ 15. $\int e^{4-x^2}xdx$

16. $\int \frac{e^{tgx}dx}{\cos^2 x}$ 17. $\int e^{3\cos x+2}\sin xdx$ 18. $\int e^{4\sin x-1}\cos xdx$

19. $\int e^{5x^2-3}xdx$ 20. $\int e^{5-2x^2}xdx$ 21. $\int e^{4-3x^2}xdx$

22. $\int e^{\cos 2x}\sin 2xdx$ 23. $\int e^{1-6x^2}xdx$ 24. $\int e^{x^3+1}x^2dx$

25. $\int \frac{e^{arctgx}dx}{1+x^2}$ 26. $\int e^{3x^2-2}xdx$ 27. $\int \frac{x^4dx}{e^{x^5+1}}$

28. $\int \frac{xdx}{e^{x^2-3}}$ 29. $\int \frac{xdx}{e^{2x^2+1}}$ 30. $\int e^{4-5x^2}xdx$

IV. Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \ln(x-5)\,dx$ 2. $\int arctg 2x\,dx$ 3. $\int x^2e^{-x}\,dx$

4. $\int (x+1)e^{-4x}\,dx$ 5. $\int x^2e^{2x}\,dx$ 6. $\int arctg 3x\,dx$

7. $\int x\cdot\cos 8x\,dx$ 8. $\int arcctg 4x\,dx$ 9. $\int \arcsin 5x\,dx$

10. $\int (x+1)e^{-x}\,dx$ 11. $\int arctgx\,dx$ 12. $\int x^2\cdot e^{3x}\,dx$

13. $\int x\cdot\cos(x+4)\,dx$ 14. $\int x\cdot\cos(x-2)\,dx$ 15. $\int x\cdot\cos(x+3)\,dx$

16. $\int x\cdot e^{2+x}\,dx$ 17. $\int x\cdot e^{-7x}\,dx$ 18. $\int \arcsin 2x\,dx$

19. $\int \arcsin 2x\,dx$ 20. $\int x\cdot\cos(x-4)\,dx$ 21. $\int \arccos 2x\,dx$

22. $\int x\cdot\cos(x+9)\,dx$ 23. $\int (x+3)e^{-x}\,dx$ 24. $\int \arccos x\,dx$

25. $\int (x^2-3)e^x\,dx$ 26. $\int x\cdot e^{-4x}\,dx$ 27. $\int x\cdot\cos(x+7)\,dx$

28. $\int x^2\cdot e^{\frac{x}{2}}\,dx$ 29. $\int x\cdot e^{3+x}\,dx$ 30. $\int x\cdot\cos(2-x)\,dx$

V. Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int_{1}^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

2. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$

3. $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6+9}}$

4. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^3 x$

5. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$

6. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$

7. $\int_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{1+x^8}$

8. $\int_{1}^{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

9. $\int_{3}^{8} \sqrt{1+x}\,dx$

10. $\int_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

11. $\int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

12. $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

13. $\int_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}\,dx$

14. $\int_{0}^{\sqrt{\pi/4}} \frac{x\,dx}{\cos^2(x^2)}$

15. $\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

16. $\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

17. $\int_{0}^{1} x^2\left(1+e^{x^3}\right)dx$

18. $\int_{0}^{2} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4+4}}$

19. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3 x \cdot \cos x$

20. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$

21. $\int_{1}^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^2 x\,dx$

22. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$

23. $\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

24. $\int_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$

25. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9}$

26. $\int_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{1+x^2}$

27. $\int_{\pi/18}^{\pi/6} ctg3x\,dx$

28. $\int_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

29. $\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{1+x^2}$

30. $\int_{0}^{1} x^3 \cdot \sqrt{4+5x^4}\,dx$

VI. Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int\limits_{-3}^{0}(x-2)e^{-\frac{x}{3}}\,dx$
2. $\int\limits_{1}^{e^2}\sqrt{x}\cdot\ln x\,dx$
3. $\int\limits_{-2}^{0}x^2e^{-\frac{x}{2}}\,dx$
4. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}arctg\frac{1}{x}\,dx$
5. $\int\limits_{0}^{\pi/8}x^2\cdot\sin 4x\,dx$
6. $\int\limits_{-1/2}^{1/2}\arccos 2x\,dx$
7. $\int\limits_{0}^{\pi/2}x\cos x\,dx$
8. $\int\limits_{-1}^{0}x\cdot\ln(1-x)\,dx$
9. $\int\limits_{1}^{2}x^2\cdot\ln x\,dx$
10. $\int\limits_{1}^{2}(x-1)\cdot\ln\mathrm{x}\,dx$
11. $\int\limits_{0}^{4}x^3\cdot\sqrt{x^2+9}\,dx$
12. $\int\limits_{0}^{\pi/2}(x+3)\cdot\sin x\,dx$
13. $\int\limits_{-1/3}^{-2/3}\frac{\mathrm{x}}{e^{3x}}\,dx$
14. $\int\limits_{0}^{1}x\cdot arctgx\,dx$
15. $\int\limits_{0}^{\pi/9}\frac{xdx}{\cos^2 3x}$
16. $\int\limits_{0}^{1}arctg\sqrt{x}\,dx$
17. $\int\limits_{1}^{l}\frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$
18. $\int\limits_{2}^{3}x\cdot\ln(x-1)\,dx$
19. $\int\limits_{1/2}^{1}\arcsin(1-x)\,dx$
20. $\int\limits_{0}^{\pi}(x+2)\cos\frac{x}{2}\,dx$
21. $\int\limits_{0}^{\pi}x^2\sin x\,dx$
22. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\arcsin x/2}{\sqrt{2-x}}\,dx$
23. $\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln(x+1)dx}{(1+x)^2}$
24. $\int\limits_{-1/2}^{0}x\cdot e^{-2x}\,dx$
25. $\int\limits_{-1}^{0}(x+1)\cdot e^{-2x}\,dx$
26. $\int\limits_{1}^{l}x\cdot\ln^2 x\,dx$
27. $\int\limits_{3/2}^{2}arctg(2x-3)\,dx$
28. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\cdot\sin x\cdot\cos x\,dx$
29. $\int\limits_{0}^{\pi/4}x\cdot tg^2x\,dx$
30. $\int\limits_{1}^{2}\ln(3x+2)\,dx$

VII. Обчислити площу фігури, обмеженої зазначеними лініями:

1. $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$.
2. $y=\cos x\sin^2 x$, $y=0$, $(0\le x\le\pi/2)$.
3. $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.
4. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$.
16. $y=x\sqrt{9-x^2}$, $y=0$, $x\ge 0$.
17. $y=\sin x\cos^2 x$, $y=0$, $(0\le x\le\pi/2)$.
18. $y=x^2\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $(0\le x\le 2)$.
19. $y=\sqrt{e^x-1}$, $y=0$, $x=\ln 2$.

5. $y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $y=0$, $x=1$, $x=e^3$.

20. $y=\arccos x$, $y=0$, $x=0$.

6. $y=(x+1)^2$, $y^2=x+1$.

21. $y=2x-x^2+3$
$y=x^2-4x+3.$

7. $y=x\sqrt{36-x^2}$, $y=0$, $(0\le x\le 6)$.

22. $x=\arccos y$, $x=0$, $y=0$.

8. $y=xarctgx$, $y=0$, $x=\sqrt{3}$.

23. $y=x^2\sqrt{8-x^2}$, $y=0$, $\left(0\le x\le 2\sqrt{2}\right)$.

9. $x=\sqrt{e^y-1}$, $x=0$, $y=\ln 2$.

24. $y=x\sqrt{4-x^2}$, $y=0$, $(0\le x\le 2)$.

10. $y=\frac{x}{1+\sqrt{x}}$, $y=0$, $x=1$.

25. $y=\frac{1}{1+\cos x}$, $y=0$, $x=\pi/2$, $x=-\pi/2$.

11. $x=(y-2)^2$,
$x=4y-8.$

26. $y=\cos^5 x\sin 2x$, $y=0$, $(0\le x\le \pi/2)$.

12. $y=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $y=0$, $x=1$.

27. $x=4-y^2,$
$x=y^2-2y.$

13. $y=\frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}$, $x=0$, $y=1$, $y=e^3$.

28. $y=\frac{e^{1/x}}{x^2}$, $y=0$, $x=2$, $x=1$.

14. $y=x^2\sqrt{16-x^2}$, $y=0$, $(0\le x\le 4)$.

29. $x=\sqrt{4-y^2}$, $x=0$, $y=0$, $y=1$.

15. $y=(x-1)^2$, $y^2=x-1$.

30. $y=x^2\cos x$, $y=0$, $(0\le x\le \pi/2)$.

VIII. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь

1. $e^{x+3y}dy=xdx$

2. $x^{-1}\cdot e^{-x^2}dy+sec^2\, ydx=0$

3. $y' = (2x-1)\cdot ctgy$ 4. $sec^2 x\cdot tgydy = -sec^2 y\cdot tgx\cdot dx$

5. $(1+e^x)\cdot ydy - e^y dx = 0$ 6. $(y^2+3)dx = e^x\cdot x^{-1}\cdot ydy$

7. $y' = (2y+1)\cdot tgx$ 8. $sin\, y\, cos\, xdy - cos\, y\, sin\, dx = 0$

9. $(1+e^x)\cdot y\cdot y' = e^x$ 10. $sin(x+y)dx + sec\, ydy = sin(y-x)dx$

11. $y' = e^{2x} : ln\, y$ 12. $3e^x sin\, ydx + (1-e^x)cos\, ydy = 0$

13. $2^{x^2+y}dy + xdx = 0$ 14. $sin\, x\cdot tgydx - cos\, ecydy = 0$

15. $y' = e^{x^2}\cdot(1+y^2)\cdot x$ 16. $cos(x-2y)y' + cos(x+2y)y' = sec\, x$

17. $1+e^y+e^y\cdot y' = 0$ 18. $ctgx\cdot cos^2 ydx + sin^2 x\cdot tgydy = 0$

19. $y'ctgx + y = 2$ 20. $sin\, x\cdot y' = y\cdot cos\, x + 2\, cos\, x$

21. $3^{y^2-x^2} = y\cdot y'\cdot x^{-1}$ 22. $cos^3 y\cdot y' - cos(2x+y) = cos(2x-y)$

23. $(1+e^{3y})x\cdot dx = e^{3y}dy$ 24. $(sin(2x+y) - sin(2x-y))dx = cos\, ecydy$

25. $y' sin\, x = y\, ln\, y$ 26. $e^x\cdot tgydx = (1-e^x)sec^2 ydy$

27. $e^x\cdot sin\, ydx + tgy\cdot dy = 0$ 28. $y' + sin(x+y) = sin(x-y)$

29. $y'\cdot\sqrt{1-x^2} - cos^2 y = 0$ 30. $cos\, ydx = 2\sqrt{1+x^2}dy + cos\, y\cdot\sqrt{1+x^2}dy$

IX. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь

1. $(xy+x^3y)y' = 1+y^2$ 2. $y^2 ln\, xdx = (y-1)xdy$

3. $y - xy' = 2(1+x^2y')$ 4. $y - xy' = 1+x^2y'$

5. $(x+4)dy - xydx = 0$ 6. $(x^2+x)ydx + (y^2+1)dy = 0$

7. $y' : 7^{y-x} = 3$ 8. $(x+xy^2)dy + ydx = y^2dx$

9. $(xy^3+x)dx + (x^2y^2-y^2)dy = 0$ 10. $y' + y + y^2 = 0$

11. $y' + 2y - y^2 = 0$ 12. $(1+y^2)dx = (y+yx^2)dy$

13. $y' = 2xy + x$ 14. $y' - xy' = 3(1+x^2y')$

15. $2xyy' = 1-x^2$ 16. $(x^2-1)y' - xy = 0$

17. $(y^2x+y^2)dy + xdx = 0$ 18. $(1+x^3)y^3dx = (y^2-1)x^3dy$

19. $xy' - y = y^2$

20. $(y+1)y' = y : \sqrt{1-x^2} + xy$

21. $(x^2 y - y)^2 y' = x^2 y - y + x^2 - 1$

22. $2x^2 yy' + y^2 = 2$

23. $y' = (1+y^2) : (1+x^2)$

24. $y' \cdot \sqrt{1+y^2} = x^2 : y$

25. $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$

26. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$

27. $xyy' = (1+x^2) : (1-y^2)$

28. $(xy-x)^2 dy = y(x-1)dx$

29. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$

30. $y' - xy^2 = 2xy$

X. Знайти загальні розв’язки диференціальних рівнянь

1. $y - xy' = x \cdot sec(y : x)$

2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$

3. $(x+2y)dx - xdy = 0$

4. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$

5. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$

6. $y^2 + x^2 y' = xyy'$

7. $xy' - y = xtg(y : x)$

8. $xy' = y - x \cdot e^{y:x}$

9. $xy' - y = (x+y)ln(x)$

10. $xy' = y \cdot cos(ln \frac{y}{x})$

11. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$

12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

13. $y \; u = x(y' - e^{\frac{y}{x}})$

14. $y' = y : x - 1$

15. $y'x + x + y = 0$

16. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

17. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$

18. $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$

19. $(x-y)ydx - x^2 dy = 0$

20. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$

21. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$

22. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$

23. $xy' + y(ln(y : x) - 1) = 0$

24. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

25. $(y^2 - 2xy)dx - x^2 dy = 0$

26. $(x+2y)dx + xdy = 0$

27. $(2x-y)dx + (x+y)dy = 0$

28. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$

29. $x^2 y' = y(x+y)$ 30. $y' = \dfrac{4x^2+3xy+y^2}{4y^2+3xy+x^2}$

XI. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь

1. $y'' - 8y' + 17y = 10 \cdot e^{2x}$
2. $y'' - 7y' + 12y = 3 \cdot e^{4x}$
3. $y'' - 6y' + 34y = 18\cos 5x$
4. $y'' + 2y' + y = 22x - 4$
5. $y'' - 2y' + y = 4 \cdot e^{x}$
6. $y'' - 6y' + 13y = 34 \cdot e^{-3x} \cdot \sin 2x$
7. $y'' + 4y' + 4y = 6 \cdot e^{-2x}$
8. $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x$
9. $y'' + 4y' + 5y = 5 - 32x$
10. $y'' - 4y = (-24x) \cdot e^{2x}$
11. $y'' + 16y = 80 \cdot e^{2x}$
12. $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x$
13. $y'' - 14y' + 49y = 144\sin 7x$
14. $4y'' - 4y' + y = -25\cos x$
15. $y'' + 4y' + 29y = 26 \cdot e^{-x}$
16. $y'' + y' - 6y = 6x \cdot e^{3x}$
17. $y'' - 2y' = 6 + 12x$
18. $y'' - 2y' = (4x+4) \cdot e^{2x}$
19. $y'' - 4y' = 8 - 16x$
20. $y'' - 8y' + 20y = 16\sin 2x$
21. $y'' + 2y' - 3y = (6x-4) \cdot e^{x}$
22. $y'' + 3y' = 10 - 6x$
23. $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x$
24. $y'' + 2y' + y = 12x \cdot e^{-x}$
25. $y'' + 6y' + 9y = 72 \cdot e^{3x}$
26. $y'' + 4y' = 15 \cdot e^{x}$
27. $y'' + 2y' + y = 18x \cdot e^{-x}$
28. $y'' + 9y = 10 \cdot e^{3x}$
29. $3y'' - 5y' - 2y = 6\cos 2x$
30. $4y'' + 3y' - y = 11\cos x$

XII. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь

1. $y'' - 2y' - y = -12\cos 2x - 9\sin 2x,\ \ y(0) = -2,\quad y'(0) = 0$
2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,\ \ y(0) = -1,\quad y'(0) = 0$
3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,\ \ y(0) = 1,\quad y'(0) = 4$

4. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x,\ y(0) = 2,\quad y'(0) = -2$

5. $y'' - 14y' + 53y = 42x^2 + 59x - 14,\ y(0) = 0,\quad y'(0) = 7$

6. $y'' + 16y = e^x(\cos 4x - 8\sin 4x),\ y(0) = 0,\quad y'(0) = 5$

7. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},\ \ y(0) = 1,\quad y'(0) = 2$

8. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x,\ \ y(0) = 2,\quad y'(0) = 4$

9. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 3$

10. $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x},\ \ y(0) = 0,\quad y'(0) = -1$

11. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x\ \ + 66,\ \ y(0) = 3,\quad y'(0) = 0$

12. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x},\ \ y(0) = 0,\quad y'(0) = 6$

13. $y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\sin 3x,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 0$

14. $y'' + 25y = e^x(\cos 5x - 10\sin 5x),\ \ y(0) = 3,\quad y'(0) = -4$

15. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x}\sin 2x,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 6$

16. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x},\ \ y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$

17. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x},\ \ y(0) = 3,\quad y'(0) = 5$

18. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12,\ \ y(0) = 0,\quad y'(0) = 2$

19. $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8,\ \ y(0) = 1,\quad y'(0) = 3$

20. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x\cos 6x,\ \ y(0) = 0,\quad y'(0) = 6$

21. $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3,\ \ y(0) = -1,\quad y'(0) = 14$

22. $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18,\ \ y(0) = 1\quad y'(0) = 0$

23. $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x},\ \ y(0) = 0,\quad y'(0) = 2$

24. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x,\ y(0) = 0,\quad y'(0) = 2$

25. $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3,\ \ y(0) = 5,\quad y'(0) = 2$

26. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x,\ \ y(0) = 2,\quad y'(0) = 7$

27. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$

28. $y'' + 16y = 32e^{4x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

29. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -2$

30. $y'' - 4y = 8e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -8$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 1980. – Ч. 1. – 320 с.; Ч. 2. – 365 с.

2. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике : в 4 ч. / И. А. Каплан. – Харьков : ХГУ, 1973. – Ч. 1. – 204 с.; 1973. – Ч. 2. – 368 с.; 1974. – Ч. 3. – 375 с.; 1971. – Ч. 4. – 498 с.

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Физматлит, 2003. − Т. 1. − 680 с.; Т. 2. − 864 с.; Т. 3. – 662 с.

4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. − М. : Наука, 1985. − Т. 1. – 430 с.; Т. 2. − 560 с.

5. Sytnykova Y. V. Linear algebra. Tutorial [Electronic resource] / Yu. V. Sytnykova, S. M. Lamtyugova, H. A. Kuznetsova ; O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv. − Kharkiv : O. M. Beketov NUUE, 2019. – 120 p. − Electronic text data. − Access mode : https://eprints.kname.edu.ua/53210, free (date of application: 12.10.2022). – Title from the screen.

6. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях : в 3 ч. [Електронний ресурс] : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – Ч. 2. – 141 с. − Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/42486, вільний (дата звернення: 12.10.2022). – Назва з екрана.

7. Ю. В. Ситникова. Лінійна та векторна алгебра [Електронний ресурс] : у схемах і таблицях : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання) / Ю. В. Ситникова, С. М. Ламтюгова, Г. А. Кузнецова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 109 с. − Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/49932, вільний (дата звернення: 12.10.2022). – Назва з екрана.

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації
до проведення практичних занять
та виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
М О Д У Л Ь 1

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти всіх форм навчання
зі спеціальності 191 – Архітектура та містобудування)

Укладачі : **ЛАМТЮГОВА** Світлана Миколаївна,
СИТНИКОВА Юлія Валеріївна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп’ютерне верстання *С. М. Ламтюгова*

План 2021, поз. 190М

Підп. до друку 12.10.2022. Формат 60 × 84/16.
Електронне видання. Ум. друк. арк. 2,4.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.