МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до організації самостійної
і виконання контрольної робіт
із навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Модуль 1

(*для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти заочної форми навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології*)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2022

Методичні рекомендації до організації самостійної і виконання контрольної робіт із дисципліни «Вища математика». Модуль 1 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти заочної форми навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. П. Вороновська. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 67 с.

Укладач канд. пед. наук Л. П. Вороновська

Рецензент

Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 1 від 30.08.2022

ЗМІСТ

ВСТУП

У запропонованих методичних рекомендаціях викладено основні питання, необхідні для успішного засвоєння програми, а також подано зразки розв'язані типових задачі.

Доступне, коротке подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів для практичного закріплення вивченого.

Контрольна робота оформляється в окремому зошиті відповідно до варіанта. Номер варіанта повинен відповідати останній цифрі номера залікової книжки (шифру) студента.

Для зауважень рецензента необхідно залишити поля, а виправлення вносити в цьому ж зошиті. До іспиту допускаються лише після успішного захисту контрольної роботи.

Зразок оформлення першої сторінки контрольної роботи подано у ДОДАТОК А.

1 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

1.1 Короткі теоретичні відомості

1. *Відстань* d *між точками* $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$ площини знаходять за формулою $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2. Якщо x_1 і y_1 − координати точки A, а x_2 і y_2 − координати точки B, то координати x і y точки C, яка поділяє відрізок AB в цьому відношенні $\lambda = \frac{AC}{CB}$, знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо $\lambda=1$, то точка $C(x, y)$ *поділяє відрізок AB навпіл*, і тоді координати x і y середини відрізка AB знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. *Площу трикутника* за поданими координатами вершин $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ обчислюють за формулою

$$S = \frac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|.$$

4. *Рівняння прямої*:

а) загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$;

б) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$;

в) рівняння прямої у відрізках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;

г) рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ *з заданим кутовим коефіцієнтом* k

$$y - y_0 = k(x - x_0);$$

д) рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

5. *Кут між двома прямими.* Нехай дано дві прямі:

$$y = k_1 x + b_1 \text{ і } \quad y = k_2 x + b_2.$$

Кутом між двома прямими на площині називають кут θ (рис. 1), на який необхідно повернути пряму (1) проти годинникової стрілки до збігу із другою прямою (2), його знаходять за формулою:

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

З цієї формули випливають дві умови:

а) умова *паралельності* прямих: $k_1 = k_2$;

б) умова *перпендикулярності* прямих : $k_1 = \frac{-1}{k_2}$.

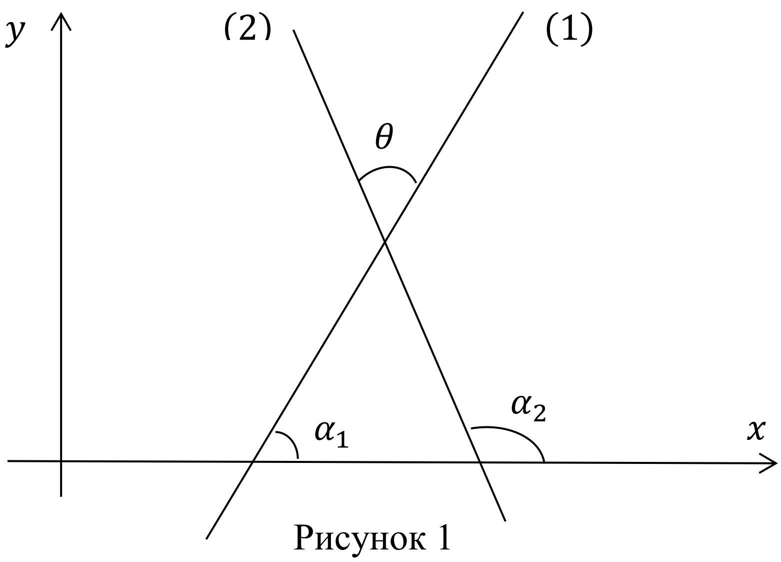

Рисунок 1

6. *Відстань від точки* $A(x_0, y_0)$ *до прямої* $Ax + By + C = 0$ знаходять за формулою

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

1. 2 Розв’язання задач

Для трикутника (рис. 2) з вершинами $A(-2,-4)$, $B(-6,3)$, $C(5,1)$ необхідно виконати певні завдання.

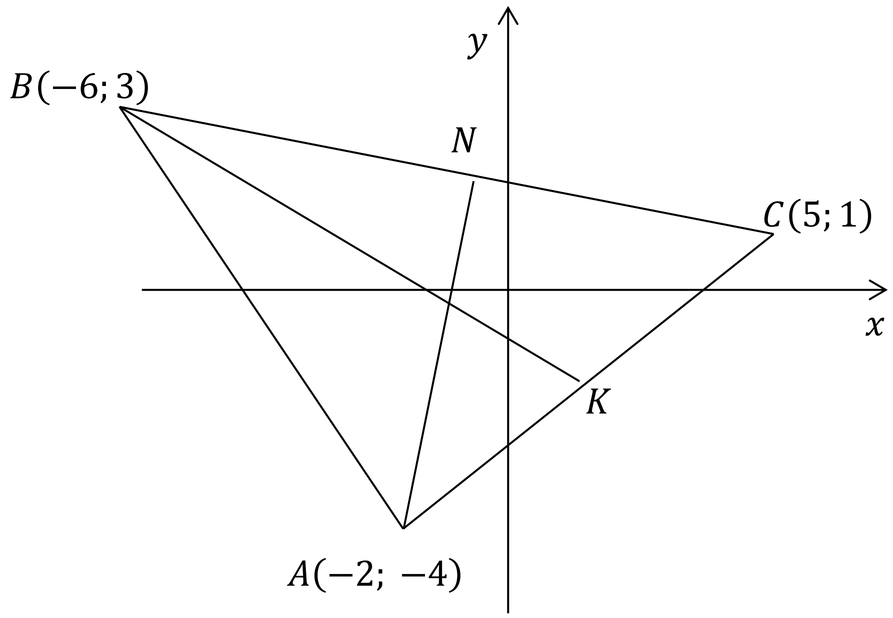

Рисунок 2

Приклад. Обчислити довжину сторін трикутника.

Розв’язання. Використаємо формулу : $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

$d_{AB}=\sqrt{(-6-(-2))^2+(3-(-4))^2}=\sqrt{(-6+2)^2+(3+4)^2}=\sqrt{65}$ од. д.

$d_{BC}=\sqrt{(5-(-6))^2+(1-3)^2}=\sqrt{(5+6)^2+4}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ од. д.

$d_{AC}=\sqrt{(5-(-2))^2+(1-(-4))^2}=\sqrt{(5+2)^2+(1+4)^2}=\sqrt{74}$ од. д.

Приклад. Обчислити площу трикутника.

Розв’язання. Площа даного трикутника за наведеною вище формулою дорівнює:

$$S=\frac{1}{2}|(-2-5)(3-1)-(-6-5)(-4-1)|=\frac{1}{2}|-14-55|=\left|\frac{-69}{2}\right|.$$

$$S=34{,}5 \text{ од. кв.}$$

Приклад. Записати рівняння сторін трикутника.

Розв’язання. Рівняння сторони AB: $A(-2,-4), B(-6,3)$. За формулою рівняння прямої, що проходить крізь дві точки, отримаємо:

$$\frac{x-(-2)}{-6-(-2)}=\frac{y-(-4)}{3-(-4)}$$

Після тотожних перетворень отримаємо:

$$y=-\frac{7}{4}x-\frac{15}{2}.$$

Рівняння сторін BC і AC знаходимо аналогічно.

BC: $B(-6,3)$, $C(5,1)$

$$\frac{x-(-6)}{5-(-6)}=\frac{y-3}{1-3}. \quad \text{Звідси:} \quad y=-\frac{2}{11}x+\frac{21}{11}.$$

AC: $A(-2,-4)$, $C(5,1)$

$$\frac{x-(-2)}{5-(-2)}=\frac{y-(-4)}{1-(-4)}. \quad \text{Звідси} \quad y=\frac{5}{7}x-\frac{18}{7}.$$

Приклад. Знайти внутрішні кути трикутника.

Розв'язання. Для виконання цього завдання використаємо формулу

$$tg\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Кут α утворено перетином прямих AB і AC (рис. 2). Отже, тут

$$k_1=k_{AC}=\frac{5}{7}, \qquad k_2=k_{AB}=-\frac{7}{4}.$$

Отримаємо:

$$tg\alpha=\frac{-\frac{7}{4}-\frac{5}{7}}{1-\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{4}}=\frac{-\frac{69}{28}}{-\frac{7}{28}}=\frac{69}{7};\alpha=arctg\frac{69}{7}.$$

Кут β утворено перетином прямих AB і BC (рис. 2). Отже, тут

$$k_1=k_{AB}=-\frac{7}{4}, \qquad k_2=k_{BC}=-\frac{2}{11}.$$

Отримаємо:

$$tg\beta=\frac{-\frac{2}{11}+\frac{7}{4}}{1+\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{11}}=\frac{\frac{69}{44}}{\frac{58}{44}}=\frac{69}{58};\ \beta=arctg\frac{69}{58}.$$

Кут γ утворено перетином прямих AC і BC (рис. 2). Отже, тут

$$k_1 = k_{BC} = -\frac{2}{11}, \qquad k_2 = k_{AC} = \frac{5}{7}.$$

Отримаємо:

$$tg\gamma = \frac{\frac{5}{7} + \frac{2}{11}}{1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{7}} = \frac{\frac{69}{77}}{\frac{67}{77}} = \frac{69}{67}; \; \gamma = arctg\frac{69}{67}.$$

Приклад. Знайти рівняння медіани BK.

Розв'язання. Медіана – це відрізок, який сполучає трикутника з серединою його протилежної сторони. Координати точки K (рис. 2) знайдемо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Тут $\mathrm{A}(-2, -4)$, $\mathrm{C}(5,1)$. Отже, отримаємо

$$x_K = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2}, \qquad y_K = \frac{-4 + 1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Рівняння BK запишемо, використовуючи формулу

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тут $B(-6,3), K\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Отже, $\dfrac{x + 6}{\frac{3}{2} + 6} = \dfrac{y - 3}{-\frac{3}{2} - 3}$.

Після тотожних перетворень отримаємо рівняння медіани *BK:*

$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}.$$

Приклад. Знайти рівняння висоти AN.

Розв'язання. Висота AN – це перпендикуляр, проведений з вершини A до сторони трикутника BC. Отже, для прямих BC і AN виконується умова їх перпендикулярності:

$$k_{AN} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\left(-\frac{2}{11}\right)} = \frac{11}{2}.$$

Рівняння висоти AN знаходимо за формулою $y - y_0 = k(x - x_0)$,

$$k = k_{AN}, A(x_0, y_0). \quad \text{Тобто,} \qquad k = \frac{11}{2}, \qquad A(-2,-4).$$

$$y + 4 = \frac{11}{2}(x + 2); \;\; y = \frac{11}{2}x + 11 - 4\,.$$

Рівняння висоти AN: $y = \dfrac{11}{2}x + 7.$

Приклад. Обчислити довжину висоти CM.

Розв'язання. Довжину висоти CM знайдемо як відстань від точки $C(x_0, y_0)$ до прямої AB, використовуючи формулу

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Для цього запишемо рівняння прямої AB в загальному вигляді

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}\,; \qquad 4y = -7x - 30; \;\; 7x + 4y + 30 = 0;$$

отже, $A = 7, B = 4, C = 30.$ Точка $C(x_0, y_0)$ має координати $x_0 = 5, y_0$=1.

Отже: $\quad d = \left|\dfrac{7 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 30}{\sqrt{7^2 + 4^2}}\right| = \dfrac{69}{\sqrt{65}}$ од. д.

Приклад. Знайти координати точки перетину медіани BK та висоти AN.

Розв'язання. Позначимо цю точку літерою P (рис. 2). Для знаходження її координат треба розв'язати систему рівнянь медіани BK та висоти AN:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{11}{2}x + 7 \end{cases}; \;\; \text{звідси отримаємо:} \;\; -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} = \frac{11}{2}x + 7.$$

Після тотожних перетворень отримаємо: $x = -\frac{76}{61}$. Знайдене значення x підставимо у перше рівняння і отримаємо $y = \frac{9}{61}$.

Отже, точка перетину медіани і висоти $- P\left(-\frac{76}{61}, \frac{9}{61}\right)$.

Приклад. Записати рівняння прямої, яка проходить через вершину трикутника B паралельно до його сторони AC.

Розв'язання. Позначимо рівняння шуканої прямої як BF. За умовою пряма BF паралельна прямій AC, а тому використавши умову паралельності двох прямих знайдемо кутовий коефіцієнт прямої BF:

$$k_{BF} = k_{AC} = \frac{5}{7}.$$

Для прямої BF відомі кутовий коефіцієнт та точка, яка належить прямій, а отже, використаємо таке рівняння

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Тут: $k = \frac{5}{7}$, $B(6,3)$. Отже, $y - 3 = \frac{5}{7}(x + 6)$; $y = \frac{5}{7}x + \frac{30}{7} + 3$.

Рівняння прямої BF: $y = \frac{5}{7}x + \frac{51}{7}$.

2 ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1 Вектори. Означення, операції з векторами

Величина, яка характеризується не тільки числовим значенням, а й напрямком, називається *векторною величиною* (*вектором*). Вектор зображується напрямленим прямолінійним відрізком, у якому зазначено його *початок* A і *кінець* B. Позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$. Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називається нульовим і позначається $\vec{0}$.

Модулем (*абсолютною величиною, довжиною*) вектора називається довжина відрізка, який зображає цей вектор. Позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$.

Вектори, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називаються *колінеарними* (*паралельними*). Позначається $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Вектори, які лежать у паралельних площинах або в одній площині, називаються *компланарними*.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *рівними*, якщо:

1) модулі векторів рівні $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right|$;

2) вектори колінеарні $\left(\vec{a} \parallel \vec{b}\right)$і напрямлені в один бік. Позначається $\vec{a} = \vec{b}$.

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який визначається за правилом паралелограма.

Добутком вектора $\vec{a}$ *та числа* λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який задовольняє такі умови:

1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$;

2) $\lambda\vec{a} \parallel \vec{a}$;

3) якщо $\lambda > 0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в один бік; якщо $\lambda < 0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в протилежні боки; якщо $\lambda = 0$, то $\vec{a} = \vec{0}$.

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

Різниця $\vec{a} - \vec{b}$ обчислюється за формулою

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right).$$

2.2 Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| cos\varphi.$$

Властивості скалярного добутку:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a} \cdot \vec{b}$;
3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
4) $(\vec{a})^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|cos0 = |\vec{a}|^2$.

2.3 Дії з векторами, розкладеними за базисом координатних ортів

Нехай у просторі задана декартова прямокутна система координат. Упорядкована трійка одиничних векторів (ортів) $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ зі спільним початком O, спрямованих уздовж додатного напряму осей Ox, Oy і Oz відповідно утворює *координатний базис* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, тобто кожний вектор $\vec{a}$ у цьому просторі єдиним чином подається у вигляді:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

де a_x, a_y, a_z – деякі числа, які називаються координатами вектора $\bar{a}$. Інша форма запису: $\vec{a} = \vec{a}(a_x; a_y; a_z)$. Якщо відомі координати точки $M_1(x_1; y_1 z_1)$ і точки $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1);$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Дії з векторами можна легко записати у координатній формі. Нехай:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}; \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

тоді:

1) при додаванні (відніманні) векторів їх відповідні координати додаються (віднімаються):

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k};$$

2) при множенні вектора на число кожну координату множать на це число:

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k};$$

3) довжина вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

2.4 Кут між двома векторами

Кут між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знаходиться зі співвідношення

$$cos\varphi \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Приклад. Задані вершини $A(2, 0, -1), B(3, -1, 4), C(-3,\ 2,\ 2)$ трикутника. Знайти довжини сторін AB і AC та кут φ між ним.

Розв'язання. Спочатку знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3-2, -1-0, 4+1) = (1, -1, 5),$$

$$\overrightarrow{AC} = (-3-2, 2-0, 2+1) = (-5, 2, 3),$$

тоді

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}, \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38},$$

$$cos\varphi = \frac{1 \cdot (-5) + (-1) \cdot 2 + 5 \cdot 3}{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{38}} = \frac{8}{3\sqrt{114}},$$

$$\varphi = arccos\frac{8}{3\sqrt{114}}.$$

Умова колінеарності (паралельності) двох векторів: два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *колінеарні* тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z};\ \vec{a} \neq \vec{0};\ \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів: два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні* тоді і тільки тоді , коли їх скалярний добуток дорівнює нулю

$$\vec{a} \perp \vec{b} \ \Rightarrow\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0, \vec{a},\ \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Кути $\alpha,\ \beta$ і γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями Ox, Oy і Oz, відповідно, називаються *напрямними*, а

$$cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|};\ cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};\ cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

називаються *напрямними косинусами* вектора $\vec{a} = \vec{a}\left(a_x; a_y; a_z\right)$.

Напрямні косинуси зв'язані співвідношенням

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

2.5 Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який позначається $\vec{a} \times \vec{b}$ і задовольняє такі умови:

1) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) модуль вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює добутку модулів співмножників на синус кута φ між ними:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\varphi.$$

Інакше кажучи, модуль векторного добутка $\vec{a} \times \vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S_{пар};$$

3) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ напрямлений так, що найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ здійснюється у додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки), якщо дивитися з кінця вектора $\vec{a} \times \vec{b}$.

Отже,

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a};\ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b};$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\varphi = S_{пар}.$$

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\vec{a} \times \vec{b}$;

3) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Якщо вектори задані своїми координатами, то

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{і} \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

то застосовується формула

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Оскільки діагональ ділить паралелограм на два рівні трикутники, то з геометричного змісту векторного добутку отримаємо *площу трикутника*:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|.$$

Приклад. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(-2; 3; 5), B(4;\ -1; 2)$ і $C(3; 7;\ -1)$.

Розв'язання.

$$\overrightarrow{AB} = (4-(-2);\ -1-3; 2-5) = (6;\ -4; -3);$$

$$\overrightarrow{AC} = (3-(-2); 7-3;\ -1-5) = (5; 4;\ -6);$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -4 & -3 \\ 5 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 24\vec{i} + 24\vec{k} - 15\vec{j} + 20\vec{k} + 12\vec{i} + 36\vec{j} =$$

$$= 36\vec{i} + 21\vec{j} + 44\vec{k};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{36^2 + 21^2 + 44^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3673}\ \ (\text{од}^2).$$

2.6 Мішаний добуток трьох векторів

Мішаний добуток трьох векторів дорівнює визначнику третього порядку, у якому кожний рядок складається з координат відповідного співмножника:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\ \right) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Об'єм трикутної піраміди $SABC$ обчислюється за формулою

$$V_{SABC} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AS}\right|.$$

Приклад. Задані координати вершин трикутної піраміди: $S(4;\ -1; 2), A(5; 1; 4), B(3; 2;\ -1), C(0; 0; 3)$. Знайти її об'єм.

Розв'язання. $\overrightarrow{SA} = (5-4; 1-(-1); 4-2) = (1; 2; 2);$

$$\overrightarrow{SB} = (3-4; 2-(-1);\ -1-2) = (-1; 3;\ -3);$$

$$\overrightarrow{SC} = (0-4; 0-(-1); 4-3) = (-4; 1; 1);$$

$$\left(\overrightarrow{SA} \times \overrightarrow{SB}\right) \cdot \overrightarrow{SC} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 + 24 + 24 + 3 + 2 = 54;$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{SA} \times \overrightarrow{SB}\right) \cdot \overrightarrow{SC}\right| = \frac{1}{6} \cdot |54| = 9\ (\text{од}^3).$$

3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

3.1 Пряма лінія у просторі

Параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

де $t -$ параметр; $M_0(x_0; y_0; z_0)$ $-$ точка, яка належить прямій; $\vec{S} = (m; n; p) -$ вектор напряму прямої.

Канонічне рівняння $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ отримаємо з попереднього, коли вилучимо параметр t.

Приклад. Пряма задана канонічним рівнянням

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+1}{5}.$$

Записати параметричне рівняння цієї прямої.

Розв'язання.

$$\frac{x-1}{4} = t, \quad \frac{y+2}{-3} = t, \qquad \frac{z+1}{5} = t.$$

$$\begin{cases} x - 1 = 4t \\ y + 2 = -3t; \\ z + 1 = 5t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = -3t - 2\,. \\ z = 5t - 1 \end{cases}$$

Кут між двома прямими у просторі обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{{m_1}^2 + {n_1}^2 + {p_1}^2}\sqrt{{m_2}^2 + {n_2}^2 + {p_2}^2}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, отримаємо відповідні умови для прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Умова паралельності двох прямих:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

3.2 Площина

Загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0,$

де A, B, C — коефіцієнти; D — вільний член. Одночасно величини A, B, C є проєкціями вектора, який перпендикулярний до даної площини, він називається нормальним вектором і позначається $\overrightarrow{N}(A, B, C)$.

Нормальне рівняння площини: $x \cdot cos\alpha + y \cdot cos\beta + z \cdot cos\gamma - p = 0$;
де $cos\alpha$, $cos\beta, cos\gamma$ — напрямні косинуси нормального вектора; p — відстань від даної точки до площини.

Рівняння площини, яка має напрямний вектор $\overrightarrow{N}(A, B, C)$ *і проходить крізь дану точку* $M_1(x_1; y_1; z_1)$, виглядає так:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Рівняння площини, яка проходить крізь три дані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$, виглядає так:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Це визначник третього порядку, який необхідно розкрити за елементами першого рядка.

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, 6, -3), M_3(5, 3, 3)$.

Розв'язання. Запишемо визначник з відомими координатами точок:

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y + 1 & z - 2 \\ 4 - 3 & 6 + 1 & -3 - 2 \\ 5 - 3 & 3 + 1 & 3 - 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси: $(x - 3)\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (y + 1)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z - 2)\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0;$

$$(x - 3)(7 + 20) - (y + 1)(1 + 10) + (z - 2)(4 - 14) = 0;$$

$$27(x - 3) - 11(y + 1)(1 + 10) - 10(z - 2) = 0.$$

Розкривши дужки, отримаємо шукане рівняння:

$$27x - 11y - 10z - 72 = 0.$$

Кут між двома площинами обчислюємо за методами векторної алгебри, це кут між двома нормальними векторами $\overrightarrow{N_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overrightarrow{N_2} = (A_2; B_2; C_2)$, отже,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}}.$$

Умова перпендикулярності двох площин:

$$\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}.$$

Умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Відстань від даної точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *до даної площини* $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходять за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Приклад. Знайти відстань d від точки $M_0(4; -3; 5)$ до площини α: $3x + 6y - 2z - 2 = 0$.

Розв'язання. $A = 3$, $B = 6$, $C = -2$, $D = -2, x_0 = 4, y_0 = -3, z_0 = 5$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) + (-2) \cdot 5 - 2|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}};$$

$$d = \frac{|-18|}{\sqrt{50}} = \frac{18}{5\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{5} \text{ (од.)}.$$

3.3 Пряма та площина у просторі

Кут між прямою та площиною обчислюємо за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

де A, B, C — координати вектора $\vec{N}$; m, n, p — координати вектора $\vec{S}$.

Умова перпендикулярності прямої та площини:

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}.$$

Умова паралельності прямої та площини:

$$\boldsymbol{Am + Bn + Cp = 0}\ .$$

Приклад. Знайти кут між площиною $2x - 3y + 7z - 5 = 0$ і прямою

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою для визначення $sin\varphi$:

$$sin\varphi = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 7 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{19}{\sqrt{62} \cdot \sqrt{6}} = \frac{19}{2\sqrt{93}}.$$

Отже,

$$\varphi = arcsin\frac{19}{2\sqrt{93}}.$$

4 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

4.1 Матриці. Визначники

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, що складається з m рядків та n стовпців. Матриця записується, як

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

або, скорочено, $A = (a_{ij})$, де $i = \overline{1,m}$ – номер рядка, $j = \overline{1,n}$ – номер стовпця.

Матрицю A називають матрицею розміру $m \times n$ і записують $A_{m\times n}$. Числа a_{ij} називаються її *елементами.* Матриці A і B *рівні між собою*, якщо рівні всі відповідні елементи матриць, тобто $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\,)$.

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількість стовпців $m = n$, називається *квадратною m-го порядку*. Елементи, у яких $i = j$ $(a_{11}, a_{22}, \dots)$, утворюють *головну діагональ* матриці.

Квадратна матриця, у якій всі елементи, окрім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається *діагональною*.

Діагональна матриця, у якій кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається *одиничною* і позначається E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що розміщуються вище (нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається *нижньою трикутною (верхньою трикутною) або східчастою.*

Квадратній матриці A порядку n відповідає число $detA$ (або $|A|$ або Δ), яке є її визначником:

1. $n = 1.$ $A = a_1;$ $detA = a_1.$
2. $n = 2.$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. $n = 3$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + +a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Приклад. Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти $detA$.

Розв'язання.

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) -$$
$$-(1 \cdot 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 5) = -3 - 8 - (18 - 10) = -19.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку Δ_n називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержують з визначника Δ_n шляхом видалення i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких розміщується елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається за формулою

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Загальний метод обчислення визначників полягає у його розкладанні *за елементами рядка (або стовпця)*.

Наприклад, якщо $A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$, то алгебраїчне доповнення для елемента a_{13} вигляд так: $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}$, а для елемента a_{32} $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{21}a_{23} \end{vmatrix}$.

Тоді формула розкладання визначника за елементами першого рядка подається у такому вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Розкладання можна проводити як за елементами будь-якого рядка, так і за елементами будь-якого стовпця.

Приклад. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ за елементами другого стовпця.

Розв'язання.

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+2} 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 68 - 21 = 45.$$

Властивості визначників:

1. Якщо визначник має нульовий рядок (стовпець), то $detA = 0$.

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Якщо визначник має два пропорційні або однакові рядки, то $detA = 0$.

$detA = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \end{vmatrix} = -24 - 24 - 16 + 24 + 24 + 16 = 0$, бо другий і третій рядок пропорційні: $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{4}{8}$.

3. Спільний множник якогось рядка можна винести за знак визначник: $detA = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

4. Якщо переставити місцями рядки, то визначник змінить знак:

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного ряду додати відповідні елементи паралельного ряду, помноживши їх на будь-яке число. (Елементарні перетворення визначника).

4.2 Дії з матрицями

Додавання

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакових розмірів. Сумою двох матриць $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ і $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)$ називається матриця $C_{m\times n} = \left(c_{ij}\right)$, така, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

Приклад.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно виконується віднімання матриць.

Множення на число

Добутком матриці $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ на число k називається матриця $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)$, така, що $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, k = 2, \qquad 2A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 6 & 2 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Властивості лінійних дій над матрицями:

1. $A + B = B + A$.
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$.
3. $A+O=A$.
4. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$.
5. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$.
6. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$.

Елементарні перетворення матриць:

– перестановка місцями двох рядків матриці;

– множення всіх елементів ряду матриці на число, відмінне від нуля;

– додавання до всіх елементів ряду матриці відповідних елементів іншого ряду, помноженого на число.

Дві матриці A і B називаються *еквівалентними*, якщо одна з них отримується з іншої за допомогою елементарних перетворень. Записується: $A \sim B$.

Множення матриць

Операцію добутку двох матриць можна виконати тільки тоді, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на матрицю* $B_{n\times p} = (b_{jk})$ називається матриця $C_{m\times p} = (c_{ik})$, така, що

$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$, де $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,p}$.

Приклад. Знайти добуток матриць:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Якщо матриці A і B квадратні, одного розміру, то існує добуток AB і BA, до того ж $AB \neq BA$.

Приклад. Знайти добуток двох матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку звернемо увагу на те, що обидві матриці квадратичні одного розміру, а отже в такому випадку завжди можливо виконати дію множення.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 3 - 1\cdot 5 & 1\cdot 1 - 2\cdot 1 - 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 - 1\cdot 2 \\ 0\cdot 4 + 4\cdot 3 + 3\cdot 5 & 0\cdot 1 - 4\cdot 1 + 3\cdot 1 & 0\cdot 2 + 4\cdot 0 + 3\cdot 2 \\ 2\cdot 4 - 1\cdot 3 - 1\cdot 5 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 - 1\cdot 1 & 2\cdot 2 - 1\cdot 0 - 1\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 27 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\cdot1+1\cdot0+2\cdot2 & 4\cdot2+1\cdot4-2\cdot1 & 4(-1)+1\cdot3-2\cdot1 \\ 3\cdot1-1\cdot0+0\cdot2 & 3\cdot2-1\cdot4-0\cdot1 & 3(-1)-1\cdot3-0\cdot1 \\ 5\cdot1+1\cdot0+2\cdot2 & 5\cdot2+1\cdot4-2\cdot1 & 5(-1)+1\cdot3-2\cdot1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 10 & -3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 9 & 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи отримані результати можемо зробити висновок:

$$AB \neq BA\,.$$

Приклад. Знайти $AB,$ якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Звертаємо увагу, що число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці, а отже можемо виконати їх множення:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot3+2\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot2-1\cdot3 \\ 0\cdot3+4\cdot1-2\cdot1 & 0\cdot0+4\cdot2+2\cdot3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

А чи можна виконати дію BA? Відповідь $-$ так. Бо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до невиродженої квадратної матриці A, якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

де $E-$ одинична матриця того самою порядку, що й матриця A. Матриця A^{-1} має ті самі розміри, що й матриця A.

Теорема. *Для будь-якої невиродженої матриці А n-го порядку існує єдина обернена матриця A^{-1}.*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11}^T A_{12}^T \dots A_{1n}^T \\ A_{21}^T A_{22}^T \dots A_{2n}^T \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ A_{n1}^T A_{n2}^T \dots A_{nn}^T \end{pmatrix},$$

де A_{ij}^T – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} транспонованої матриці A^T.

Приклад. Знайти A^{-1} до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виконаємо наступне:

1) $detA = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 + 10 - 1 - 12 + 20 = 27, detA \neq 0;$

2) знайдемо транспоновану матрицю A^T. Для цього міняємо рядки на стовпці: $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

3) знайдемо алгебраїчні доповнення до всіх елементів A^T:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(20 - 2) = -18,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 5) = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 + 1) = -7,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8;$$

4) з отриманих алгебраїчних доповнень запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix};$$

5) зробимо перевірку: $AA^{-1} = E.$

$$AA^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0+30-3 & 0+6-6 & 0+12-12 \\ -54+55-1 & 18+11-2 & -18+22-4 \\ 27-35+8 & -9-7+16 & 9-14+32 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отриманий результат вказує на те, що обернена матриця знайдена вірно.

4.3 Правило Крамера розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Основна матриця A такої системи квадратна. Визначник цієї матриці

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається *визначником системи.* Якщо визначник системи відмінний від нуля, то система невироджена.

Правило Крамера. Нехай $detA = \Delta \neq 0$, тоді розв'язок системи рівнянь виглядає, як $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ $(j = \overline{1,n})$, де $\Delta_j -$ визначник, отриманий із визначника Δ

системи шляхом заміни j-го стовпця при невідомому x_j стовпцем вільних членів B.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з $\Delta_j \neq 0$, то система несумісна, тобто розв'язків не має.

Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = 0$, то система рівнянь або несумісна, або невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків.

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 7 \end{cases}.$$

Розв'язання. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -10 - 4 - 21 - 140 + 2 - 3 = -176;$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 25 - 20 - 21 - 140 - 5 - 15 = -176;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -10 + 28 - 35 - 140 - 14 - 5 = -176;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 5 & 5 \\ 7 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 70 + 5 - 105 + 175 + 10 + 21 = 176;$$

$$x_1 = \frac{-176}{-176} = 1, \quad x_2 = \frac{-176}{-176} = 1, \qquad x_3 = \frac{176}{-176} = -1.$$

Для перевірки підставляємо отримані значення невідомих в будь-яке рівняння системи.

Перевірка : $x_1 + 5x_2 + x_3 = 5,$

$$-1 + 5(-1) + 1 = 5.$$

Отримаємо $5 = 5$. Тотожність істинна – розв'язок знайдено вірно.

4.4 Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці

Теорема. Якщо основна матриця A квадратної системи $AX = B$ невироджена (тобто $detA \neq 0$), то система має єдиний розв’язок, який обчислюється за формулою

$$X = A^{-1}B.$$

Оскільки матриця A – невироджена, то існує матриця A^{-1}. Тоді

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B; \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B;$$

$$EX = A^{-1}B; \quad X = A^{-1}B.$$

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$.

Розв’язання. Виконаємо наступне:

1) випишемо окремо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix};$$

2) знайдемо значення головного визначника системи

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 8 + 27 - 12 - 12 + 15 = 20;$$

3) транспонуємо матрицю A

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix};$$

4) знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A^T

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(-15 + 8) = 7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(5+9) = -14,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-4) = 10,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4+9) = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5;$$

5) запишемо обернену матрицю та зробимо її перевірку:

$$A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -14 & -2 & 10 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -14 & -2 & 10 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -2+7+15 & 3+7-10 & -4-21+25 \\ -28-2+30 & 42-2-20 & -56+6+50 \\ -10-5+15 & 15-5-10 & -20+15+25 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

6) знайдемо матрицю X:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -14 & -2 & 10 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 4+56+0 \\ 56-16+0 \\ 20-40+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \qquad x_3 = -1;$$

7) зробимо перевірку отриманих результатів. Підставимо знайдені значення невідомих в будь-яке рівняння системи:

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4$$

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 4(-1) = -4$$

$$-4 = -4\,.$$

Отримана тотожність істинна, а отже рішення знайдено вірно.

4.5. Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Нехай A – основна матриця системи, а $\bar{A}$ – розширена матриця цієї системи:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Оскільки, кожному елементарному перетворенню системи відповідає елементарне перетворення розширеної матриці системи, то замість системи будемо розглядати розширену матрицю цієї системи.

Елементарним перетворенням рядків розширеної матриці $\bar{A}$ і перестановці стовпців тільки основної матриці A відповідають такі рівносильні перетворення лінійної системи:

1) перестановка будь-яких двох рівнянь (перенумеровування рівнянь);

2) множення обох частин будь-якого рівняння на довільне ненульове число;

3) додавання до обох частин будь-якого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;

4) перенумерування невідомих.

Приклад. Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}.$$

Розв'язання.

Запишемо розширену матрицю: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$.

Виконаємо наступні елементарні перетворення:

1) помножимо перший і другий рядки на такі числа, щоб отримати однакові перші елементи в рядках. В даному випадку помножимо перший рядок на 2 і з першого рядка віднімемо другий. Перший рядок переписуємо в тому ж вигляді, а результат елементарного перетворення записуємо у другий рядок: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$;

2) ті ж самі дії виконуємо з першим та третім рядками. Перший рядок помножимо на 4 і віднімемо третій рядок. Результат перетворення запишемо у третій рядок. Перший і другий рядки переписуємо такими, як ми їх одержали у пункті 1): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \end{array}\right)$;

3) працюємо тепер з другим та третім рядками. Необхідно отримати однакові другі елементи в цих рядках. В даному випадку вони вже рівні, тому виконаємо дію віднімання (з другого рядка віднімемо третій, а результат запишемо в третій рядок): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$.

Отримали матрицю, у якої всі елементи під головною діагоналлю дорівнюють нулю.

4) за виглядом отриманої матриці записуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 3x_2 + 2x_3 = -11 \, ; \\ -2x_3 = 2 \end{cases}$$

5) третє рівняння системи має одну невідому, тому почнемо рішення системи з цього рівняння: $-2x_3 = 2$, $x_3 = -1$; перейдемо до другого рівняння: $3x_2 + 2x_3 = -11$; підставимо в нього $x_3 = -1$ і отримаємо $x_2 = -3$; перейдемо до першого рівняння $x_1 + x_2 + 2x_3 = -4$; підставимо в нього $x_3 = -1$ та $x_2 = -3$ і отримаємо $x_1 = 1$.

Отже $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$.

5 ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

5.1 Короткі теоретичні відомості

Число A називається *границею функції* $f(x)$ при x, яке прямує до x_0, якщо для будь-якого малого наперед заданого додатного числа ε можна знайти таке додатне δ яке залежить від ε, що при всіх значеннях x, відмінних від x_0 має місце нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Розглянемо необхідні теоретичні дані з теорії границь.

1. *Нескінченно малі і нескінченно великі функції:*

а) функція $f(x)$ називається нескінченно малою при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0\,;$$

б) функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

2. *Властивості нескінченно малих функцій:*

а) якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ нескінченно малі, то їх сума, різниця та добуток є нескінченно малою;

б) якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ нескінченно мала, а функція $\varphi(x) -$ обмежена, то їх добуток $f(x)\varphi(x)$ нескінченно мала.

3. *Властивості нескінченно великих функцій:*

Якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ має скінчену границю ($\lim_{x \to x_0} f(x) = b$) , а функція $\varphi(x)$ $-$ нескінченно велика ($\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$) , то:

а) сума їх $-$ нескінченно велика, тобто $\lim_{x \to x_0}[f(x) + \varphi(x)] = \infty$, а границя відношення $f(x)$ до $\varphi(x)$ дорівнює нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0;$$

б) якщо $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ ($b > 0$), а $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, при цьому $\varphi(x)$ додатна в околі точки x_0 , то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$;

в) добуток двох нескінченно великих функцій є функція нескінченно велика, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ і $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\varphi(x) = \infty \ .$$

4. *Зв'язок між нескінченно великими і нескінченно малими функціями:*

а) якщо $f(x)$ при $x \to x_0$ нескінченно велика функція, то функція $\frac{1}{f(x)}$ нескінченно мала;

б) якщо при $x \to x_0$ функція $\varphi(x)$ нескінченно мала, то функція $\frac{1}{\varphi(x)}$ нескінченно велика, при цьому вважаємо, що в околиці точки x_0 функція $\varphi(x)$ в нуль не обертається.

5. *Правила граничного переходу:*

а) якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають скінчені границі, то і їх алгебраїчна сума має границю , яка дорівнює сумі їх границь, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, а $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = b \pm c;$$

б) якщо при $x \to x_0$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають границі, то їх добуток також має границю, яка дорівнює добутку їх границь, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, а $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\varphi(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = bc\,;$$

в) якщо при $x \to x_0$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають границі і границя функції $\varphi(x)$ не дорівнює нулю, то границя їх відношення існує і дорівнює відношенню їх границь, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, а $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)} = \frac{b}{c}.$$

5.2 Методи обчислення границь

5.2.1 Знаходження границь від дробово-раціональної функції

Для того щоб знайти границю від дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x \to x_0$ чисельник і знаменник дробу мають границі, рівні нулю (невизначеність $\left|\frac{0}{0}\right|$), необхідно чисельник і знаменник дробу розкласти на множники.

Розглянемо приклади обчислення границі дробово-раціональної функції.

Приклад.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{3x^2-19x+28}=\frac{16-4-12}{48-76+28}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

За правилом, наведеним вище, розкладемоо чисельник і знаменник на множники.

$$x^2-x-12=(x-4)(x+3);$$

$$3x^2-19x+28=(x-4)(3x-7);$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(3x-7)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+3}{3x-7}=\frac{4+3}{12-7}=\frac{7}{5}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+2x^3-3x^2-x+10}{x^3+6x^2+x-14}=\frac{16-16-12+2+10}{-8+24-2-14}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$x^4+2x^3-3x^2-x+10=(x+2)(x^3-3x+5)$$

$$x^3+6x^2+x-14=(x+2)(x^2+4x-7)$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^3-3x+5)}{(x+2)(x^2+4x-7)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^3-3x+5}{x^2+4x-7}=\frac{-8+6+5}{4-8-7}=-\frac{3}{11}.$$

Розглянемо декілька задач на знаходження границь дробово-раціональної функції за умови, що $x\to\infty$.

Якщо $x\to\infty$ і чисельник, і знаменник дробу функції нескінченно великі. Отже, отримаємо відношення двох нескінченно великих функцій. У такому разі необхідно чисельник і знаменник дробу розділити на найвищий степінь x, що зустрічається у цій функції.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+6x}{7x^3-4x+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

(розділимо кожен елемент дробу на x^3)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{5x^2}{x^3}+\frac{6x}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{7-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}{7-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

Тут $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0, \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}=0, \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0, \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}=0$ (за властивостями нескінченно великих величин).

Приклад.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^3+3x^2-9}{4x^6-7x^5+2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{8x^3}{x^6}+\frac{3x^2}{x^6}-\frac{9}{x^6}}{\frac{4x^6}{x^6}-\frac{7x^5}{x^6}+\frac{2x}{x^6}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x^4}-\frac{9}{x^6}}{4-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8}{x^3}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^4}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9}{x^6}}{4-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^5}}=\frac{0}{4}=0.$$

5.2.2 Знаходження границі від функції, заданої ірраціональними виразами

Щоб знайти границю функції, яка містять ірраціональний вираз, і невизначеності типу $\left|\frac{0}{0}\right|$ необхідно помножити чисельник і знаменник на спряжене до ірраціонального виразу.

Приклад.

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9}=\frac{\sqrt{3+6}-3}{9-9}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

(спряженим до виразу $\sqrt{x+6}-3$ є $\sqrt{x+6}+3$, тому помножимо чисельник і знаменник на цей вираз)

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-9}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\frac{1}{12}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

(в даному випадку ірраціональні вирази і в чисельнику, і в знаменнику, тому необхідно помножити чисельник і знаменник на відповідні вирази їм спряжені)

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\left(\left(\sqrt{x^2+7}\right)^2-\left(\sqrt{7-3x}\right)^2\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(x^2+7-7+3x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{(x+3-x^2+9)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(x^2+3x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{-(x^2-x-12)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{x(x+3)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{-(x-4)(x+3)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=\frac{-3(0+0)}{7(4+4)}=0.$$

5.2.3 Перша важлива границя

Перша важлива границя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1.$$

Наслідки з першої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-sinx}{x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sinx}{cosx}-sinx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx-sinxcosx}{x^3cosx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sinx(1-cosx)}{x\cdot x^2cosx}=\begin{bmatrix}1-cos2\alpha=2sin^2\alpha\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2cosx}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{x\cdot x\cdot cosx}=\left(\text{помножимо і чисельник і знаменник на}\frac{1}{4}\right)=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\cdot cosx}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1;\lim_{x\to 0}cosx=1\right]=\frac{1}{2}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{sin^23x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{sin^23x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x\cdot 9x^2}{sin^23x\cdot 9x^2}=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2x}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{9x^2}{sin^23x}=1\end{bmatrix}=\frac{1}{9}.$$

5.2.4 Друга важлива границя

В цьому розділі ми розглянемо границі від показниково-степеневої функції $f(x)^{\varphi(x)}$, коли $f(x)\to 1$ і $\varphi(x)\to\infty$; тобто отримаємо невизначеність $|1^\infty|$. Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{kx}=|1^\infty|=e^k\quad\text{або}\quad\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{k}{x}}=|1^\infty|=e^k.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{4+3x}\right)^{5x-2} = \left[\begin{matrix}\dfrac{3x-1}{4+3x}\to 1, \text{коли } x\to\infty \\ 5x-2\to\infty, \text{коли } \ x\to\infty\end{matrix}\right] = |1^{\infty}| =$$

(до основи показниково-степеневої функції додамо та віднімемо одиницю)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1}{4+3x}-1\right)^{5x-2} =$$

(приведемо до єдиного знаменника другий та третій елементи основи)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1-4-3x}{4+3x}\right)^{5x-2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{5x-2} =$$

(помножимо степінь на дріб обернену до дробу, яку додаємо до одиниці у основі функції, а потім на таку ж, яка є в основі)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{\frac{4+3x}{-5}\cdot\frac{(-5)}{4+3x}\cdot(5x-2)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5(5x-2)}{4+3x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10-25x}{4+3x}} = e^{-\frac{25}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^{25}}}.$$

6 ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6.1 Похідна і диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$ і $x \epsilon (a; b)$. Надамо аргументу приріст Δx так, щоб нова точка $x + \Delta x \epsilon (a; b)$. Оскільки точка x фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, яке також буде функцєю від Δx.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називається швидкість змінювання функції y в цій точці відносно змінювання аргументу x. *Похідна дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Еквівалентні позначення похідної y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням функції.* Функція, що має похідну в точці x, називається *диференційованою* у цій точці.

Правила диференціювання

Нехай дано деякі функції $u = u(x)$, $v = v(x)$, які диференційовані у проміжку $(a; b)$.

Теорема 1. Похідна алгебраїчної суми (різниці) кінцевого числа функцій дорівнює сумі (різниці) їх похідних

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Теорема 2. Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Теорема 3. Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, у якому знаменник є квадратом знаменника, а чисельник є різницею між добутками похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Дії з константами. Сталий множник можна виносити з-під знака похідної:

$$y = cu, \qquad \text{то} \quad y' = (cu)' = cu';$$

$$y = \frac{u}{c}, \qquad \text{то} \quad y' = \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c};$$

$$y = \frac{c}{u}, \qquad \text{то} \quad y' = \left(\frac{c}{u}\right)' = \frac{-c}{u^2}u'.$$

Запишемо таблицю похідних для складних функцій:

1. $x' = 1;$
2. $c' = 0;$
3. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u';$
4. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$
5. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u';$
6. $(ln\, u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$
7. $(log_a u)' = \frac{1}{u \cdot ln\, a} \cdot u';$
8. $(e^u)' = e^u \cdot u';$
9. $(a^u)' = a^u \cdot ln\, a \cdot u';$
10. $(sin\, u)' = cos\, u \cdot u';$
11. $(cos\, u)' = -sin\, u \cdot u';$
12. $(tg\, u)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u';$
13. $(ctg\, u)' = \frac{-1}{sin^2 u} \cdot u';$
14. $(arcsin\, u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
15. $(arccos\, u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
16. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$
17. $(arcctg\, u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'.$

6.1.1 Приклади знаходження похідних

Приклад. Знайти похідні даних функцій:

а) $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30,$ б) $y = 3sin5x,$

в) $y = arccos\sqrt{5x^4 - 3},$ г) $y = cos2x^3 \cdot (5x-2)^{12},$ д) $y = \frac{(4x+2)^2}{e^{sinx}}.$

Розв'язання.

а) $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30$,

$$y' = (5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30)' =$$
$$= 40x^7 - 100x^{24} + 15x^4 - 60x^2 + 24x + 7.$$

б) $y = 3sin5x$,

$$y' = (3sin5x\ )' = 3 \cdot (sin5x)' = 3 \cdot cos5x \cdot (5x)' = 3 \cdot cos5x \cdot 5 = 15cos5x;$$

в) $y = arccos\sqrt{5x^4 - 3}$,

$$y' = \left(arccos\sqrt{5x^4 - 3}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{5x^4 - 3}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{5x^4 - 3}\right)' =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4 - 5x^4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^4 - 3}} \cdot (5x^4 - 3)' = \frac{-10x^3}{\sqrt{4 - 5x^4} \cdot \sqrt{5x^4 - 3}}.$$

г) $y = cos2x^3 \cdot (5x - 2)^{12}$,

$$y' = (cos2x^3)' \cdot (5x - 2)^{12} + cos2x^3 \cdot ((5x - 2)^{12})' =$$

$$= -sin2x^3 \cdot (2x^3)' \cdot (5x - 2)^{12} + cos2x^3 \cdot 12(5x - 2)^{11} \cdot (5x - 2)' =$$

$$= -6x^2 sin2x^3 \cdot (5x - 2)^{12} + 60cos2x^3 \cdot (5x - 2)^{11}.$$

д) $y = \dfrac{(4x + 2)^2}{e^{sinx}}$,

$$y' = \frac{((4x + 2)^2)' \cdot e^{sinx} - (4x + 2)^2 \cdot \left(e^{sinx}\right)'}{(e^{sinx})^2} =$$

$$= \frac{2(4x + 2)(4x + 2)' e^{sinx} - (4x + 2)^2 e^{sinx}(sinx)'}{e^{2sinx}} =$$

$$= \frac{e^{sinx}(8(4x + 2) - (4x + 2)^2 cosx)}{e^{2sinx}} = \frac{(4x + 2)(8 - (4x + 2)cosx)}{e^{sinx}}.$$

6.1.2 Диференціювання функції, заданої параметрично

Нехай задано функцію

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases};$$

де t – параметр, а $x(t)$ і $y(t)$ неперервні і диференційовані функції аргументу t у деякому інтервалі $t \epsilon (a, b)$.

Нехай функція $x = x(t)$ має обернену $t = t(x)$, яка також диференційована (це означає, що у деякій точці $t_0 \epsilon (\alpha; \beta)$ похідна $x'_t \neq 0$), тоді має місце формула

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$.

Розв'язання. Знаходимо $x'_t = (1 - t^2)' = -2t$ і $y'_t = (t - t^3)' =$

$= 1 - 3t^2$. Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t до формули $(*)$, дістанемо

$$y'_x = \frac{1 - 3t^2}{-2t} = \frac{3t^2 - 1}{2t}.$$

Приклад. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$.

Розв'язання.

$$x'_t = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t до формули $(*)$, дістанемо:

$$y'_x = \frac{\frac{t^2}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}.$$

6.1.3 Похідна неявно заданої функції

Якщо функція задана рівнянням $F(x,y) = 0$ (неявно), то для знаходження похідної від y по x необхідно: продиференціювати рівняння за x, вважаючи, що y є функцією від x (тобто $(x)' = 1$, $(y)' = y'$); отримане рівняння слід розв'язати відносно y'.

*Приклад***.** Знайти y'_x, якщо $y^2 - 3x^5 + 8x^2y^3 - 10 = 0$.

Розв'язання. Диференціюємо функцію по x, вважаючи, що y є функцією від x**:**

$$2yy' - 15x^4 + 16xy^3 + 24x^2y^2y' = 0.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно y':

$$2yy' + 24x^2y^2y' = 15x^4 - 16xy^3, \qquad y'(2y + 24x^2y^2) = 15x^4 - 16xy^3,$$

$$y' = \frac{15x^4 - 16xy^3}{2y + 24x^2y^2}.$$

Приклад. Знайти y'_x, якщо $sin2x + cos3y = sin^2y + 1$.

Розв'язання. Диференцюємо функцію по x, вважаючи, що y є функцією від x**:**

$$2cos2x - 3sin3y \cdot y' - 2siny \cdot cosy \cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо рівняння відносно y':

$$y' \cdot (3sin3y + 2siny \cdot cosy) = 2cos2x,$$

$$y' = \frac{2cos2x}{3sin3y + 2siny \cdot cosy}.$$

6.1.4 Логарифмічне диференціювання

Якщо функція $y = f(x)$ являє собою добуток кількох множників, то перш ніж диференціювати її, можна прологарифмувати цю функцію.

Приклад. Знайти y', якщо $y = \sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2x \cdot \sqrt[4]{cosx}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння:

$$lny = ln\left(\sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2x \cdot \sqrt[4]{cosx}\right),$$

$$lny = \frac{1}{5}lnsinx + 2lnarctgx + \frac{1}{4}lncosx,$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності, пам’ятаючи, що $(x)' = 1$, $(y)' = y'$:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5} \cdot \frac{cosx}{sinx} + \frac{2}{arctgx} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{-sinx}{cosx},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1+x^2)} - \frac{tgx}{4},$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1+x^2)} - \frac{tgx}{4}\right),$$

$$y' = \sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2x \cdot \sqrt[4]{cosx} \cdot \left(\frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1+x^2)} - \frac{tgx}{4}\right).$$

Похідна показниково-степеневої функції.

Функція $y = (u(x))^{v(x)}$ називається *показниково-степеневою* функцією. Похідна від неї знаходиться за допомогою логарифмічного диференціювання.

Приклад. Знайти у′, якщо $y = (x^2+1)^{sinx}$.

Розв’язання. Прологарифмуємо задану функцію:

$$lny = ln(x^2+1)^{sinx}, \qquad lny = sinx \cdot ln(x^2+1) \quad ,$$

Диференціюємо обидві частини останнього рівняння:

$$\frac{y'}{y} = cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}.$$

Знаходимо y': $\qquad y' = y \cdot \left(cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right).$

На місце y записуємо вихідну функцію:

$$y' = (x^2+1)^{sinx} \cdot \left(cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right).$$

6.1.6 Правило Лопіталя

(розкриття невизначеностей виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ *та* $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ *)*

Теорема (Правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні і диференційовні в околі точки $x_0 = a$, тобто $0 < |x - a| < \varepsilon$, причому $\varphi'(x) \neq 0$, тоді якщо існує скінчена або нескінчена границя відношення похідних $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ при $x \to a$, то відношення функцій має ту ж саму границю, тобто:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left|\frac{0}{0}\right| \text{ або } \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження 1. Твердження теореми залишається в силі, якщо $a = \infty$, тобто: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left|\frac{0}{0}\right|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауваження 2. Існування границі відношення похідних гарантує існування границі відношення функцій. Обернене твердження невірно, оскільки границя відношення функцій може існувати при відсутності границі відношення похідних.

Зауваження 3. Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ будуть відповідати сформульованій теоремі, то можна брати границю відношень других похідних і т.д.. Тобто, правило Лопіталя можна застосовувати послідовно декілька разів.

Зауваження 4. Інші невизначенності треба тотожнє перетворювати до розглянутих: $\left|\frac{0}{0}\right|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, щоб застосувати правило Лопіталя.

Приклад. Знайти границі функцій.

Розв'язання. $a)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(5+3x)}{2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{5+3x}}{2} = \frac{3}{10};$

б) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot lnx = |0\cdot\infty| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{lnx}{1/x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3} = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0;$

(Виконали тотожнє перетворення $|0\cdot\infty|$ до $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$)

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg2x}{8x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2/_{1+4x^2}}{8} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4(1+4x^2)} = \frac{1}{4}.$

Приклад. Знайти границі функції $\lim\limits_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx}$

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = |0^0| = A$,

функція є показниково-степеневою, тому позначимо границю функції як A , та прологарифмуємо її:

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = \lim_{x\to 0}ln(arcsinx)^{tgx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}tgx \cdot lnarcsinx = \lim_{x\to 0}\frac{lnarcsinx}{ctgx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

Отримали границю відношення функцій, до якої можна застосувати правило Лопіталя. Після його застосування отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{(lnarcsinx)'}{(ctgx)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-sin^2x}{\sqrt{1-x^2}\cdot arcsinx} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Далі скористалися еквеквівалентністю нескінченно мали.

Отже, $lnA = 0$ і тоді $A = e^0 = 1$.

6.2 Дослідження функції за допомогою похідної

Визначимо загальні правила дослідження функції, які дозволять зробити ескіз графіка функції.

6.2.1 Зростання і спадання функції

Теорема. Для того, щоб диференційована на проміжку $(a; b)$ функція $f(x)$ зростала (спадала) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ при будь – якому $x \in (a; b)$.

Приклад. Знайти проміжки зростання і спадання функції

$$y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}.$$

Розв'язання. Знайдемо область визначення функції: $x \neq 4,$ тобто $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$. Знайдемо похідну цієї функції

$$y' = \frac{(2x-4)(x-4)-(x^2-4x+1)}{(x-4)^2} = \frac{2x^2-8x-4x+16-x^2+4x-1}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{x^2-8x+15}{(x-4)^2} = \frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)^2}; y' = 0;\ \frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)^2} = 0.$$

$(x-5)(x-3)=0$; $x=5$ і $x=3$. На рис. 3 зображено інтервали зростання і спадання даної функції.

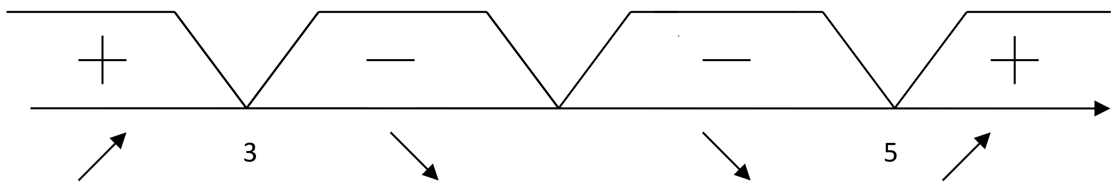

Рисунок 3

Зробимо висновок, що функція зростає при $x \epsilon (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$, функція спадає при $x \epsilon (3; 4) \cup (4; 5)$.

6.2.2 Максимум і мінімум функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і її околі. Точка x_0 називається *точкою максимуму (мінімуму) функції* $f(x)$, якщо значення функції у точці x_0 більше (менше) за її значення в усіх точках деякого околу точки x_0 : $f(x_0+\Delta x) < f(x_0)$ $\big($або $f(x_0+\Delta x) > f(x_0)\big)$, коли $\Delta x > 0$ або $\Delta x < 0$.

Максимум і мінімум функції називають *екстремумами* або *екстремальними значеннями функції.*

Теорема (необхідна умова існування екстремуму). Якщо диференційована функція $f(x)$ має у точці x_0 максимум або мінімум, то необхідно,щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю або не існувала.

Геометрично рівність $f'(x_0)=0$ означає, що в точці екстремуму функції $f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі *Ox*, а якщо $f'(x_0)=\infty$, то дотична паралельна осі Оу.

Зауважимо, що умова $f'(x_0)=0$ не є достатньою умовою існування екстремуму. Наприклад, для функції $y=x^3$ її похідна $y'=3x^2$ дорівнює нулю при $x=0$, але $x=0$ не є точкою екстремуму.

Значення аргументу, при яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними.*

Теорема (достатня умова існування екстремуму). Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку x_0 диференційованої в деякому околі цієї точки функції $f(x)$ її похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то x_0 – є точкою максимуму; якщо з мінуса на плюс, то x_0 – є точкою мінімуму.

Приклад. Знайти критичні точки та проміжки зростання і спадання функції: $y = x^3 - 3x$.

Розв'язання. Нагадуємо, що будь – яке дослідження функції необхідно розпочинати з находження її області визначення. Тут $D(y) = R$.

Похідна цієї функції: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$.

При переході через точку $x_0 = -1$ похідна функції змінює знак з «+» на «$-$», тобто при $x_0 = -1$ максимум функції. При переході через точку $x_0 = 1$ похідна функції змінює знак з «$-$» на «+», тобто при $x_0 = 1$ мінімум функції.

Отже, функція $y = x^3 - 3x$ зростає на проміжках $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-1; 1)$. Максимум її знаходиться в точці $x_0 = -1$, мінімум-в точці $x_0 = 1$.

6.2.3 Опуклість графіка функції. Точки перегину

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a; b)$.

Графік функції $f(x)$ називається *опуклим (угнутим)* на проміжку $(a; b)$, якщо усі точки кривої $f(x)$ розташовані нижче (вище) точок дотичної, проведеної у будь – якій точці графіка на цьому проміжку.

Часто опуклі і угнуті функції називають *опуклими вгору і опуклими вниз* відповідно.

Точку графіка функції $f(x)$, у якій змінюється напрямок опуклості, називають *точкою перегину.*

У подальшому вважаємо, що функція $f(x)$ має другу похідну на проміжку $(a; b)$.

Теорема (достатня умова опуклості графіка функції). Якщо друга похідна функції $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) в усіх точках проміжку $(a; b)$, то графік функції опуклий вгору (опуклий вниз) на цьому проміжку.

Теорема (достатня умова існування точок перегину). Якщо друга похідна $f''(x)$ при переході через точку x_0, в якій вона дорівнює нулю або не існує, змінює знак, то ця точка є точкою перегину.

Приклад. Дослідити функцію $y = x^5 - 2x + 5$ на опуклість і знайти точки перегину.

Розв'язання. Область визначення $D(y) = R$. Знайдемо першу і другу похідні даної функції: $y' = 5x^4 - 2$, $y" = 20x^3$. Друга похідна дорівнює нулю $y" = 0$ при $x = 0$. Тому $y" > 0$ при $x > 0$; $y" < 0$ при $x < 0$.

Отже, графік функції $y = x^5 - 2x + 5$ є опуклим вгору на проміжку $(-\infty; 0)$ і опуклим вниз на проміжку $(0; \infty)$. Точка (0; 5) є точкою перегину.

6.2.4 Асимптоти графіка функції

Асимптоти дозволяють створити уявлення про поведінку графіка функції при віддалені його точок на нескінченність

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називають пряму, відстань до якої від точки, яка лежить на кривій, прямує нуля, якщо ця точка рухається вздовж графіка функції до нескінченності.

Асимптоти поділяють на два види: вертикальні й похилі (зокрема, горизонтальні).

Пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$**,** якщо :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Рівняння *похилої асимптоти* будемо шукати у вигляді

$$y = kx + b,$$

$$\text{де} \quad k = lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx).$$

Таким чином, якщо існує похила асимптота $y = kx + b$, то k і b знаходять за отриманими формулами. І навпаки: якщо існують скінченні границі в формулах для k і b, то пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою.

Зокрема, якщо $k = 0$, то $b = \lim_{x \to \infty} f(x)$. Тому $y = b -$ рівняння *горизонтальної асимптоти*.

Зауваження. Асимптоти графіка функції можуть бути різними при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$.

Якщо хоча б одна з границь при знаходженні k і b не існує або дорівнює ∞, то похилих асимптот неіснує.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функцій $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Розв'язання. Область визначення $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Вертикальні асимптоти графіка функції :

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0} = -\infty\,; \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty\,;$$

тому $x = -1$ і $x = 1$ є вертикальними асимптотами.

Похила асимптота:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 1\,,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$$

Підставляючи $k = 1$ і $b = 0$ в рівняння $y = kx + b$, отримаємо: y = x, це шукана похила асимптота.

6.2.5 Дослідження функції в цілому

При дослідженні графіка функції в цілому, рекомендується, наприклад, загальна схема, за яко. Слід:

1. знайти область визначення функції, її точки розриву й проміжки неперервності;
2. дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
3. знайти точки перетину графіка фунції з осями координат;
4. дослідити поведінку функції на нескінченності;
5. знайти інтервали монотонності та екстремуми функції;
6. знайти інтервали опуклості (угнутості) та точки перегину функції;
7. знайти асимптоти графіка функції;
8. побудувати ескіз графіка функції.

Порядок дослідження доцільно обирати згідно з особливостями даної функції.

Приклад. Дослідити функцію $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ та побудувати ескіз її графіка.

1. Область визначення: $x \neq \pm 1$; тобто

$$D(y)\ \epsilon\ (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty).$$

Прямі $x =\pm 1$ є вертикальними асимптотами, тому що

$$\lim_{x\to -1\pm 0}\frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty;\quad \lim_{x\to 1\pm 0}\frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

2. Обчислимо $y(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = y(x)$, тобто виконується рівність $y(-x) = y(x)$, одже, функція парна і її графік симетричний відносно осі Oy.

3. Точка перетину з віссю Oy: $x = 0; y(0) = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$. Отримаємо точку $A(0;1)$. Точок перетину з віссю Ox нема. При $y = 0$, рівняння $\frac{1+x^2}{1-x^2} = 0$ не має рішень.

4. Обчислюємо: $\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$, тобто пряма $y =-1$ є горизонтальною асимптотою графіка функції.

Знайдемо похилі асимптоти, які визначаються рівнянням

$$y = kx + b.$$

Знайдемо параметри k та b:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1-3x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{-6x} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{-2x} = -1.$$

Таким чином, отримали горизонтальну асимптототу $y = -1$.

5. Інтервали монотонності та екстремуми.

Знайдемо $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2};$$

$y'(x) = 0$, якщо $x = 0$ та $y'(x)$ не існує, якщо $x = \pm 1$ тобто критичною є тільки точка $x = 0$, оскільки точки $x = \pm 1$ не належать області визначення функції.

Поведінку функції на інтервалах монотонності згідно знаку похідної показано на рис. 4.

Визначимо знак $y'(x)$:

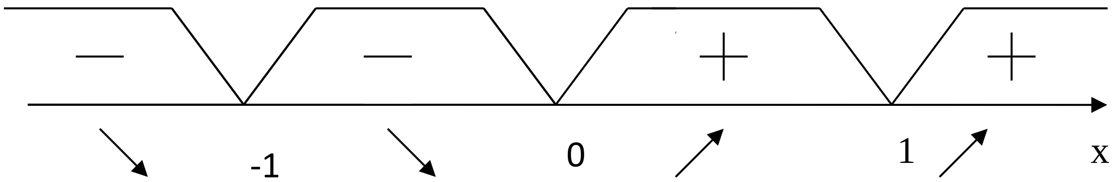

Рисунок 4

На інтервалах $(-\infty,-1)$ та $(-1,\ 0)$ функція спадає, оскільки тут $y'(x) < 0$.

На інтервалах $(\ 0,1)$ та $(1,\infty)$ функція зростає, оскільки тут $y'(x) > 0$.

Зміна знаку похідної при переході через точку $x = 0$, вказує на те, що точка $B(0;1)$ є точкою екстремуму. Це точка мінімуму функції: $y_{min} = y(0) = 1$.

6. Інтервали опуклості і угнутості та точки перегину графіка функції знайдемо за другою похідною даної функції

$$y''(x) = \left(y'(x)\right)' = \left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2 \cdot (1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Знак другої похідної і характер графіка функції на відповідних інтервалах приведені на рис. 5.

Визначимо знак $y''(x)$.

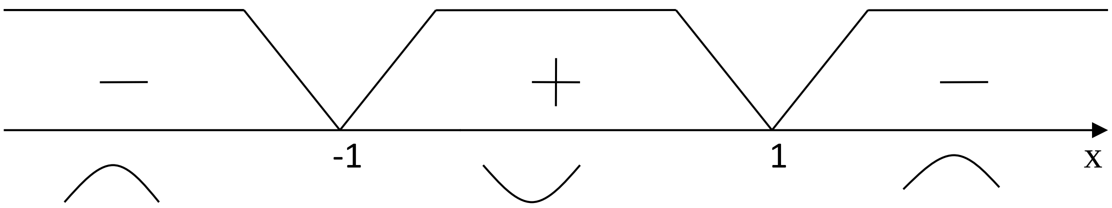

Рисунок 5

На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(1, \infty)$ графік функції опуклий, так як $y''(x) < 0$. На інтервалі $(-1, 1)$ графік функції угнутий, так як $y''(x) > 0$. Точок перегину немає.

7. Асимптоти графіка функції знайдені у п.1 і п.4.

8. Побудуємо ескіз графіка, використовуючи отриману вище інформацію (рис. 6) функції.

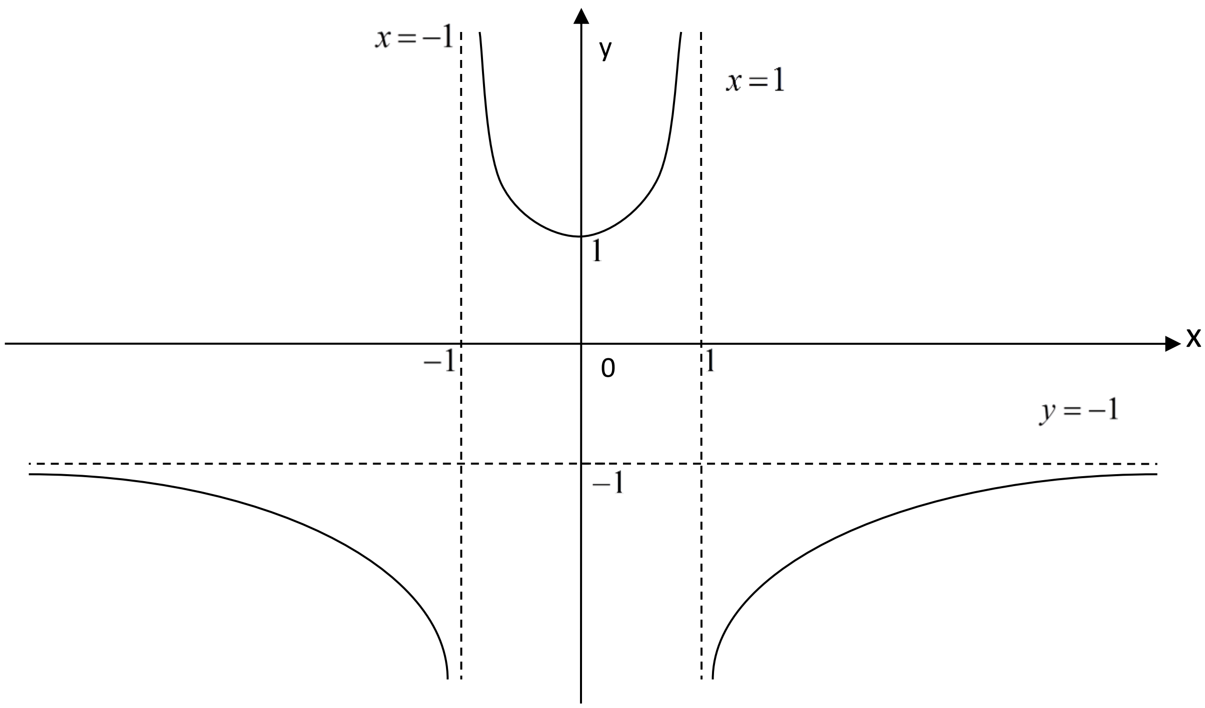

Рисунок 6

ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Варіант 1

1. Дано ΔABC: $A(-6;-2)$; $B(-3;-5)$; $C(-2;-2)$. Знайти:

а) довжину медіани CP;

б) рівняння перпендикуляра до сторони BC, проведеного з точки $M(1;-3)$;

в) кут трикутника $\angle ABC$.

2. Знайти гострий кут між прямою $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$ і площиною $2x+y-z=0$.

3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1+6x_2-\ x_3=-29 \\ 2x_1+4x_2+2x_3=10 \\ -4x_1+2x_2-3x_3=-11 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

4. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to -7}\frac{x^2-49}{x^2+2x-35}$; б) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-49x+3}{7x^2+x+15}$;

в) $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt{x-4}-2}$; г) $\lim_{x\to 0}\frac{sin7x-sin5x}{arcsinx}$.

5. Знайти похідні:

а) $y=(8x^2-15x^7)\cdot arctg^4 6x$; б) $y=\frac{5arccos4x^9}{x^3+2x^7}$.

6. Дослідити функцію $y=\frac{2x}{1+x^2}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y=8x^3-3x^4$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Виконати повне дослідження функції та побудувати графік функції

$$y=\frac{x^3}{4-x^2}.$$

Варіант 2

1. Дано ΔABC: $A(1;-3)$; $B(-4;5)$; $C(4;2)$. Знайти:

а) довжину медіани CP;

б) рівняння перпендикуляра до сторони BC, проведеного з точки $M(2;-3)$;

в) кут трикутника $\angle ABC$.

2. Знайти гострий кут між прямою $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x-y+4z+5=0 \end{cases}$ і площиною $x+y+3z-1=0$.

3. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 4\,x_3 = 5 \\ 7x_1 + 3x_2 - x_3 = 26 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

4. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to 1}\frac{6x^2-x-5}{x^2-6x+5}$; б) $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^4+6x^3+5}{2x^2-11x-1}$;

в) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{7}}{x^2+x-20}$; г) $\lim_{x\to 0}\frac{cos^2x-cos^2 3x}{4x^2}$.

5. Знайти похідні:

а) $y = (7x^9 - 11x^3)\cdot arcsin^4 9x$; б) $y = \frac{11cos8x^7}{x^8-3x^4}$.

6. Дослідити функцію $y = x + \frac{1}{x}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Виконати повне дослідження функції та побудувати графік функції

$$y = x^2 - 2lnx.$$

Варіант 3

1. Дано ΔABC: $A(3;6)$; $B(-4;-1)$; $C(4;-2)$. Знайти:

а) довжину медіани CP;

б) рівняння перпендикуляра до сторони BC, проведеного з точки $M(-2;3)$;

в) кут трикутника $\angle ABC$.

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $P(1;2;-1)$ перпендикулярно прямій $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}$.

3. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 4\,x_3 = -2 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

4. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x-10}{x^2+9x+14}$; б) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2+6x-7}{9x^3+8x^2+14}$;

в) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2+5x}$; г) $\lim_{x\to 0}\frac{arcsin4x}{x^2-8x}$.

5. Знайти похідні:

а) $y = (2x^{14} - 5x^4)\cdot arccos^2 4x$; б) $y = \frac{8tg13x^2}{x^3+3x^5}$.

6. Дослідити функцію $y = \frac{3x^2-6}{3-2x}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y = x^4 - 24x^2 + 12x$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Виконати повне дослідження функції та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^2}{5-x}.$$

Варіант 4

1. Дано ΔABC: $A(4;3)$; $B(-1;-5)$; $C(4;-2)$. Знайти:

а) довжину медіани CP;

б) рівняння перпендикуляра до сторони BC, проведеного з точки $M(-4;4)$;

в) кут трикутника $\angle ABC$.

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $P(2;-4;-2)$ перпендикулярно прямій $\begin{cases} x-4y+5z-1=0 \\ 2x+y+3=0 \end{cases}$.

3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -9 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

4. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to-4} \frac{x^2+5x+4}{x^2-16}$; б) $\lim_{x\to-\infty} \frac{9x^2+8x+1}{4x^2-10x+3}$;

в) $\lim_{x\to-2} \frac{x^3+8}{\sqrt{4x+9}-1}$; г) $\lim_{x\to0} \frac{arctg3x}{sin2x-sin4x}$.

5. Знайти похідні:

а) $y = (5x^8 + 4x^3) \cdot ctg^{11}3x$; б) $y = \frac{9sin7x^3}{x^6-2x^4}$.

6. Дослідити функцію $y = \frac{x^2}{\ln x}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - 2x + 10$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Виконати повне дослідження функції та побудувати графік функції

$$y = ln\frac{x}{x+5} - 4.$$

Варіант 5

1. Дано ΔABC: $A(2;5)$; $B(-3;2)$; $C(4;-6)$. Знайти:

а) довжину медіани CP;

б) рівняння перпендикуляра до сторони BC, проведеного з точки $M(2;8)$;

в) кут трикутника $\angle ABC$.

2. Знайти рівняння перпендикуляра до площини $3x-y-5z-8=0$ і його направляючи косинуси.

3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-9x_3=-4 \\ x_1-6x_2-5x_3=-26 \\ 3x_1+8x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом.

4. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to-5}\frac{125+x^3}{x^2-6x+5}$;

б) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x^2-9}{4-2x+7x^3}$;

в) $\lim_{x\to-3}\frac{x^2+5x+6}{\sqrt{3x+10}-1}$;

г) $\lim_{x\to0}\frac{sin4x+sin5x}{6x}$.

5. Знайти похідні:

а) $y=(3x^9-9x^7)\cdot tg^3 8x$;

б) $y=\frac{8ctg3x^5}{x^7-14x^5}$.

6. Дослідити функцію $y=\frac{x^2+2x-1}{2x+1}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y=x^4-96x^2+315$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Виконати повне дослідження функції та побудувати графік функції

$$y=\frac{x^3}{9-x^2}.$$

Варіант 6

1. Дано ΔABC: $A(1;-3)$; $B(5;1)$; $C(-4;-2)$. Знайти:

а) довжину медіани CP;

б) рівняння перпендикуляра до сторони BC, проведеного з точки $M(4;5)$;

в) кут трикутника $\angle ABC$.

2. Знайти гострий кут між прямою $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x-y+4z+5=0 \end{cases}$ і площиною $x+y+3z-1=0$.

3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -10 \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 35 \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = -3 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

4. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to-4} \frac{x^3+64}{x^2+3x-4}$; б) $\lim_{x\to\infty} \frac{11x^2+6x+20}{4x^3+7x^2+25x}$;

в) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+15}-2}{\sqrt{x+8}-3}$; г) $\lim_{x\to0} \frac{tg3x}{sin5x}$.

5. Знайти похідні:

а) $y = (4x^6 + 9x^5) \cdot cos^{10}4x$; б) $y = \frac{9^{arccosx^5}}{x^4-4x^5}$.

6. Дослідити функцію $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + 2x^2 - 2$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Виконати повне дослідження функції та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^2-5}{4-x}.$$

Варіант 7

1. Дано $\Delta ABC: A(-1;2);\ B(-4;-3);\ C(4;5)$. Знайти:

а) довжину медіани CP;

б) рівняння перпендикуляра до сторони BC, проведеного з точки $M(2;-6)$;

в) кут трикутника $\angle ABC$.

2. Знайти рівняння перпендикуляра до площини $5x + y - 5z + 8 = 0$ і його направляючи косинуси.

3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - x_3 = 43 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

4. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to6} \frac{x^2-8x+12}{x^2-36}$; б) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-9x^2+5}{5x^2+9x-12}$;

в) $\lim_{x\to-6} \frac{\sqrt{x+9}-\sqrt{3}}{x^2+4x-12}$; г) $\lim_{x\to0} \frac{cos^2 5x-cos^2 x}{x\cdot tg4x}$.

5. Знайти похідні:

а) $y = (5x^6 - 9x^3) \cdot sin^7 6x$; б) $y = \frac{3\cdot e^{sin^5 3x}}{x^{14}-14x^8}$.

6. Дослідити функцію $y = \frac{e^{5-x}}{5-x}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Виконати повне дослідження функції та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}.$$

Варіант 8

1. Дано ΔABC: $A(1;3)$; $B(-4;5)$; $C(4;-2)$. Знайти:

а) довжину медіани CP;

б) рівняння перпендикуляра до сторони BC, проведеного з точки $M(-2;-3)$;

в) кут трикутника $\angle ABC$.

2. Знайти гострий кут між прямою $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x-y+4z+5=0 \end{cases}$ і площиною $x+y+3z-1=0$.

3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 30 \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 19 \\ 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 17 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом.

4. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to 1} \frac{5x^2-4x-1}{x^2-3x+2}$;

б) $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^5+2x^2-9x}{3x^4-5x^2+16}$;

в) $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

г) $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos5x}{sin^2 4x}$.

5. Знайти похідні:

а) $y = (9x^7 - 6x^4) \cdot arcctg^5 3x$;

б) $y = \frac{4cos8x^{10}}{x^3-4x}$.

6. Дослідити функцію $y = \ln(1 - x^2)$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Виконати повне дослідження функції та побудувати графік функції

$$y = \frac{x^2 - 3}{4 + x}.$$

Варіант 9

1. Дано ΔABC: $A(1;-3)$; $B(-4;5)$; $C(4;2)$. Знайти:

а) довжину медіани BP;

б) рівняння перпендикуляра до сторони AC, проведеного з точки $M(2;-3)$;

в) кут трикутника $\angle ABC$.

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $P(1;2;-1)$ перпендикулярно прямій $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}$.

3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1-7x_2-5x_3=29 \\ 4x_1+2x_2-6x_3=28 \\ x_1+5x_2-9x_3=-5 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;

б) матричним методом.

4. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-11x+18}{x^2+3x-10}$;

б) $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-x-11}{2x^5+x^4+9x}$;

в) $\lim_{x\to -7}\frac{\sqrt{x+11}-2}{x^2+6x-7}$;

г) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot tg5x}{1-cos^2 3x}$.

5. Знайти похідні:

а) $y=(7x^8-19x^4)\cdot 2^{tgx^5}$;

б) $y=\frac{6arctg4x^7}{x^7-4x^5}$.

6. Дослідити функцію $y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y=4x^4-8x^2+5x$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Виконати повне дослідження функції та побудувати графік функції

$$y=\frac{x^3-8}{x}.$$

Варіант 10

1. Дано ΔABC: $A(6;2)$; $B(3;-5)$; $C(-2;-2)$. Знайти:

а) довжину медіани AP;

б) рівняння перпендикуляра до сторони BC, проведеного з точки $M(1;-3)$;

в) кут трикутника $\angle ABC$.

2. Знайти гострий кут між прямою $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$ і площиною $2x+y-z=0$.

3. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 17 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -33 \end{cases}$$

а) за правилами Крамера;
б) матричним методом.

4. Обчислити границі:

а) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-5x-14}{x^2-4}$; б) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-5x^3+9x}{4x^3+6x^2-15}$;

в) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt{x+1}-2}$; г) $\lim_{x\to 0} \frac{cos4x-cos6x}{x\cdot arcsinx}$.

5. Знайти похідні:

а) $y = (13x^6 - 8x)\cdot e^{arccosx^5}$; б) $y = \frac{4ctg8x^{21}}{x^8-5x^3}$.

6. Дослідити функцію $y = \ln(9 - x^2)$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y = \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{7}x^7$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Виконати повне дослідження функції та побудувати графік функції

$$y = ln(x^2 - 9).$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вороновська Л. П. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика». Модуль 1 (для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології) / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 162 с.

2. Вороновська Л. П. Вища математика. Модуль 1 : конспект лекцій для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 169 с.

3. Коваленко Л. Б. Вища математика (модуль 1) : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 256 с.

4. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2015. – 250 с.

5. Міхайленко В. М. Збірник прикладних задач з вищої математики / В. М. Міхайленко, Н. Д. Федоренко. – Київ : Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 121 с.

6. Кузнецова Г. А. Навчальний довідник в схемах і таблицях для самостійного вивчення теми «Аналітична геометрія» з курсу вищої математики / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. : Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ, 2013. – 77 с.

7. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях : навч. довід. для самост. вивч. курсу вищої математики у 2 ч. / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – Ч. 1 – 106 с.

8. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2013. – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с.; Кн. 2 : Спеціальні розділи. – 368 с.

ДОДАТОК А

Зразок оформлення першої сторінки контрольної роботи

Контрольна робота №1
з вищої математики
студента ______________________________
прізвище та ім'я
групи________________________________
шифр студента ______________________
Підпис ______________
Дата ______________

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації
до організації самостійної
і виконання контрольної робіт
із навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Модуль 1

(*для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти заочної форми навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології*)

Укладач **ВОРОНОВСЬКА** Лариса Петрівна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2020, поз. 124М

Підп. до друку 14.09.2022. Формат $60 \times 84/16$.
Електронне видання. Ум. друк арк. 3,8.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.