МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

В. В. БІЗЮК

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МОДУЛЬ 1

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2022

УДК 517:621.3

Бізюк В. В. Вища математика. Модуль 1 : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / В. В. Бізюк ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. –122 с.

Автор
канд. техн. наук, доц. В. В. Бізюк

Рецензенти:

Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики (Харківський національний університет міського господарства ім. О. М. Бекетова);

Ю. Л. Геворкян, кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики (Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»).

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 10 від 24.04.2022

Конспект лекцій містить теоретичні відомості з розділів вищої математики, які вивчаються в першому семестрі (модуль 1).

Конспект складено за чинною програмою з курсу вищої математики для здобувачів спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка.

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій за модульною технологією містить розділи, що відповідають першому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів електротехнічних спеціальностей. Конспект максимально наближений до реальних лекцій, теоретичні відомості ілюструються на типових прикладах, довідковий матеріал, таблиці можуть бути використані на практичних заняттях.

Конспект лекцій є результатом багаторічного досвіду викладання курсу вищої математики в Навчально-науковому інституті енергетичної, інформаційної та транспортної інфраструктури Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Конспект лекцій розрахований на засвоєння матеріалу першого модуля. За програмою охоплені такі розділи вищої математики: «Аналітична геометрія на площині. Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної» та «Лінійна алгебра і аналітична геометрія»

Конспект призначений для здобувачів електротехнічних спеціальностей для безпосереднього використання, а також для впровадження в дистанційний курс навчання.

ЛЕКЦІЯ 1
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. ДЕКАРТОВА ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ. ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ. ПОДІЛ ВІДРІЗКА У ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

Дві взаємно перпендикулярні координатні прямі *Ox* і *Oy* зі спільним початком *O* утворюють декартову прямокутну систему координат на площині.

Ox називається віссю абсцис, а *Oy* – віссю ординат. Сукупність прямих, що перпендикулярні координатним осям, утворює координатну сітку на координатній площині *Oxy*. Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою парою чисел *(x;y)* – її координатами (*x* – абсциса, *y* – ордината).

1.1 Відстань між двома точками

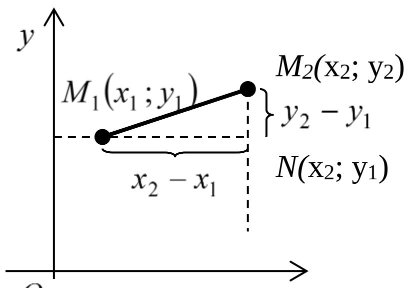


Рисунок 1.1

З прямокутного ΔM_1NM_2 (рис. 1.1) за теоремою Піфагора випливає, що відстань між довільними двома точками $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$ визначається формулою

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

1.2 Поділ відрізка у заданому відношенні

Нехай задані дві точки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ і відношення $\lambda=M_1M/MM_2$, у якому точка $M(x,y)$ ділить відрізок M_1M_2, починаючи від точки M_1 (рис. 1.2).

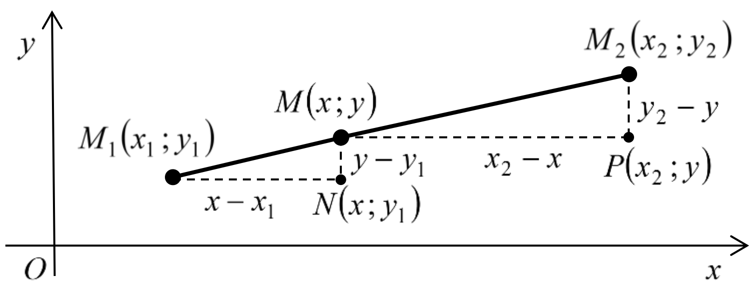


Рисунок 1.2

Координати точки $M(x,y)$, яка ділить заданий відрізок у заданому відношенні, обчислюються за формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Зауваження. Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 навпіл, то $\lambda=1$. Тоді координати середини відрізка визначаються за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Приклад. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(-3;4)$, $B(7;-2)$, $C(5;6)$. Побудувати ΔABC в системі координат. Знайти: а) довжину медіани AM; б) точку E перетину медіан.

M – середина сторони BC:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{7+5}{2}=6;\ y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-2+6}{2}=2;\ M(6;\,2).$$

$$AM=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(6-(-3))^2+(2-4)^2}=\sqrt{85}.$$

За властивістю точки перетину медіан трикутника

$$\lambda=\frac{AE}{EM}=\frac{2}{1}=2.$$

Тоді координати точки E: $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\dfrac{-3+2\cdot 6}{1+2}=3;$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{4+2\cdot 2}{1+2}=2\frac{2}{3};\ E\left(3;\,2\frac{2}{3}\right)$$

1.3 Пряма лінія на площині

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай похила пряма l утворює кут α з віссю Ox і перетинає вісь Oy у точці $B(0;\,b)$ (рис. 1.3). Тангенс кута нахилу α називають кутовим коефіцієнтом k прямої l: $k=tg\,\alpha$. Число b називають початковою ординатою прямої l.

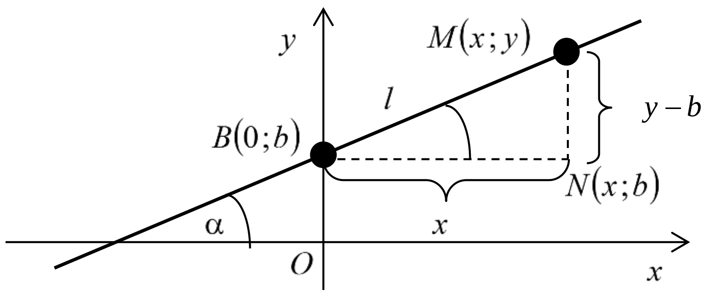


Рисунок 1.3

Нехай $M(x,y)$ – довільна точка прямої l. У прямокутному трикутнику ΔBNM $\angle MBN=\alpha$.

Тоді

$$\frac{NM}{BN}=tg\,\angle MBN;\ \frac{y-b}{x}=tg\,\alpha=k;$$

$$y-b=kx.$$

Звідси маємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y=kx+b.$$

Зауваження 1. Якщо $b=0$, то пряма $y=kx$ проходить через початок координат $O(0;0)$. Якщо $k=0$, то пряма $y=b$ паралельна осі Ox (горизонтальна).

Зауваження 2. Якщо пряма паралельна осі Oy $\left(\alpha=90^\circ\right)$, то її кутовий коефіцієнт $k=tg90^\circ=\infty$, отже її рівняння не можна подати у відповідному вигляді. Рівняння вертикальної прямої має вигляд $x=a$, де a – абсциса точки перетину $A(a;\,0)$ з віссю Ox.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку

Нехай пряма l проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k. Тоді для прямої l маємо

$$y = kx + b\ ;\ M_0(x_0, y_0) \in l \ \Rightarrow\ y_0 = kx_0 + b;$$

$$b = y_0 - kx_0;\ y = kx + y_0 - kx_0.$$

Звідси отримуємо рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма l проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Оскільки пряма l проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, то $y - y_1 = k(x - x_1)$. Тоді

$$M_2(x_2, y_2) \in l \ \Rightarrow\ y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1);$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ ;\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Звідси маємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Приклад. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(1;-2)$, $B(-5;1)$, $C(3;-1)$. Побудувати ΔABC в системі координат. Знайти рівняння бісектриси AL
.

$$AB = \sqrt{(-5-1)^2 + (1-(-2))^2} = 3\sqrt{5};$$

$$AC == \sqrt{(3-1)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{5}.$$

За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника

$$\lambda = \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3.$$

Тоді

$$L:\ x = \frac{-5 + 3\cdot 3}{1+3} = 1;\ y = \frac{1 + 3\cdot(-1)}{1+3} = -\frac{1}{2};\ L\left(1;-\frac{1}{2}\right);$$

$$AL:\ \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\ ;\ \frac{y-(-2)}{-\frac{1}{2}-(-2)} = \frac{x-1}{1-1};\ x = 1.$$

ЛЕКЦІЯ 2
ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ. КУТ МІЖ ПРЯМИМИ. УМОВИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ПРЯМИХ. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ

2.1 Загальне рівняння прямої

Кожна пряма описується деяким рівнянням першого степеню. Навпаки, кожне рівняння першого степеню є рівнянням деякої прямої.

Загальним рівнянням прямої називається рівняння першого степеню вигляду

$$Ax + By + C = 0 ,$$

де A, B і C – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел A, B відмінне від нуля, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$.

Зауваження. У залежності від значень сталих A, B і C можливі наступні окремі випадки:

$C = 0$, тоді пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат;

$A = 0$, тоді пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox. Її рівняння можна подати у вигляді $y = b$, де $b = -C/B$;

$B = 0$, тоді пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy. Її рівняння можна подати у вигляді $x = a$, де $a = -C/A$;

$A = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $y = 0$ співпадає з віссю Ox;

$B = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $x = 0$ співпадає з віссю Oy.

2.2 Кут між прямими

Умови паралельності
та перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2, що зображені на рисунку 2.1, мають задані кутові коефіцієнти відповідно k_1 і k_2. Тоді для кута φ між ними маємо $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$;

$$tg\ \varphi = \frac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_1 \cdot tg\ \alpha_2}$$

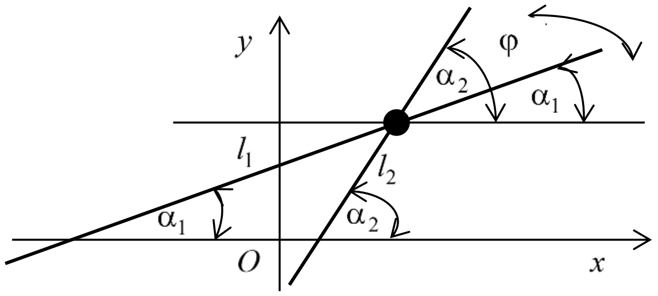


Рисунок 2.1

Оскільки $tg\ \alpha_1 = k_1$; $tg\ \alpha_2 = k_2$, то тангенс кута між прямими знаходиться за формулою

$$tg\ \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Для паралельних прямих $\varphi = 0$, $tg\ \varphi = 0$, а для перпендикулярних прямих $\varphi = 90^\circ$, $tg\ \varphi \to \infty$.

З одержаної формули випливає, що:

1)необхідною і достатньою умовою паралельності невертикальних прямих l_1 і l_2 є рівність $k_1 = k_2$;

2) необхідною і достатньою умовою перпендикулярності похилих прямих l_1 і l_2 є рівність $k_1 k_2 = -1$.

Зауваження. Кут між прямими φ розуміється як кут повороту. Гострий кут між прямими знаходиться за формулою

$$\varphi_г = arctg\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

2.3 Відстань від точки до прямої

Нехай задані точка $M_0(x_0, y_0)$ і пряма l своїм загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$ (рис. 2.2). Відстанню d від точки до прямої називається довжина перпендикуляра M_0N, опущеного з даної точки на дану пряму.

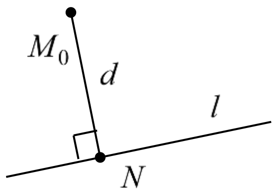


Рисунок 2.2

Скориставшись умовою перпендикулярності, знайдемо рівняння цього перпендикуляра $l_{\perp}$. Склавши і розв'язавши систему рівнянь прямих l і $l_{\perp}$, одержимо точку перетину N. Довжину перпендикуляра M_0N знайдемо як відстань між двома точками. В результаті (проробіть указані операції самостійно) одержимо формулу для відстані d від точки до прямої

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад. У трикутнику ABC задано рівняння сторони AB: $x/4 - y/3 = 1$ і координати вершини $C(-2; -5)$. Знайти довжину висоти CN.

Перетворимо рівняння прямої AB до загального вигляду:

$$x/4 - y/3 = 1;$$

$$3x - 4y = 12;$$

$$3x - 4y - 12 = 0.$$

Знайдемо довжину висоти CN як відстань від точки C до прямої AB:

$$CN = \frac{|3\cdot(-2) - 4\cdot(-5) - 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5}.$$

ЛЕКЦІЯ 3
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ КОЛА, ЕЛІПСА, ГІПЕРБОЛИ ТА ПАРАБОЛИ. ДОСЛІДЖЕННЯ ЇХ ФОРМИ

3.1 Коло

Означення. Коло – це геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки, яка зветься центром кола (рис. 3.1).

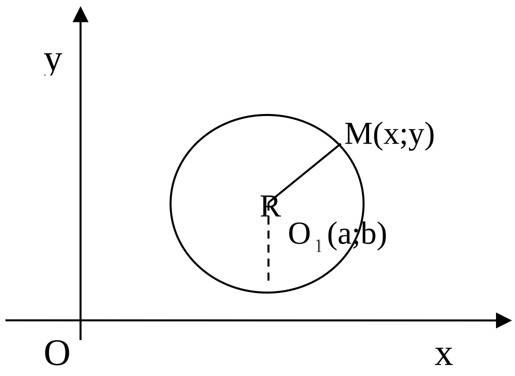


Рисунок 3.1

Рівняння кола одержимо, користуючись формулою відстані між центром O_1(a;b) та довільною точкою на колі M(x;y) :

$$d_{O_1M} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R,$$

звідки рівняння кола

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Якщо центр кола міститься в початку координат, його рівняння має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

3.2 Еліпс

Означення. Еліпс – це геометричне місце точок, сума відстаней яких від двох заданих точок, так званих фокусів, є величина стала і дорівнює $2a$ (рис. 3.2).

Для виведення рівняння еліпсу помістимо його в систему координат таким чином, щоб вісь Ox пройшла через фокуси $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$, а вісь Oy через середину міжфокусної відстані, яку позначимо $2c$:

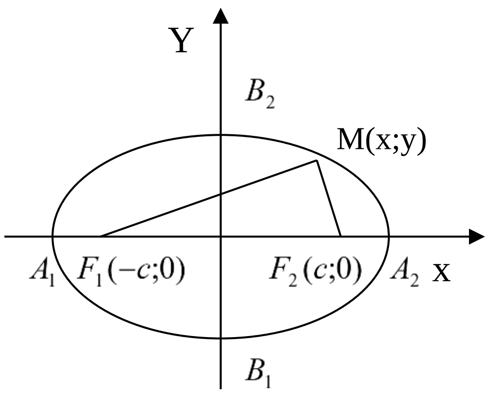


Рисунок 3.2

$$|F_1F_2| = 2c$$

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(a^2-cx\right)^2,$$

після очевидних перетворень

$$a^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Позначимо $a^2-c^2=b^2$, одержимо рівняння еліпсу у вигляді:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Означення. Відношення відстані між фокусами еліпсу до його великої осі зветься ексцентриситетом еліпсу

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Оскільки $c<a,$ то $\varepsilon<1$.

Приклад.

Визначити ексцентриситет еліпса, якщо його велика вісь втричі більша за малу.

Ексцентриситет еліпсу:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

За умовою $a=3b$. За означенням $a^2-c^2=b^2$. Звідки $c^2=a^2-b^2$.

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(3b)^2-b^2}=b\sqrt{8}. \quad \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{b\sqrt{8}}{3b}=\frac{\sqrt{8}}{3}.$$

3.3 Гіпербола

Означення. Гіпербола – це геометричне місце точок, різниця відстаней яких від двох заданих точок, так званих фокусів, є величина стала і дорівнює $2a$ (рис.3.3).

$$|MF_1|-|MF_2|=2a.$$

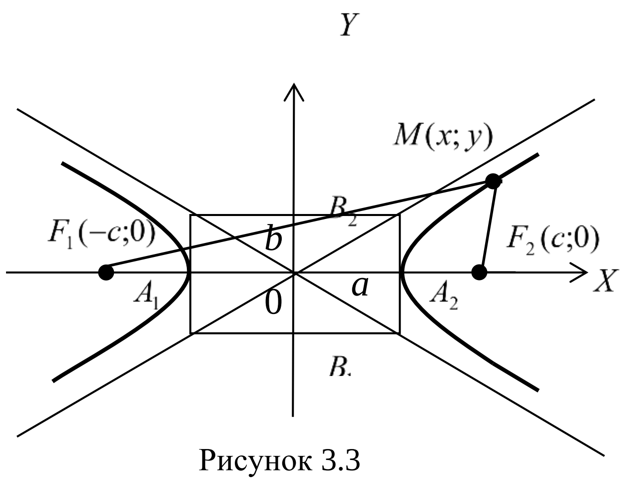


Рисунок 3.3

Як і для еліпсу $|F_1F_2|=2c$.

Відстань між вершинами $|A_1A_2|=2a$

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Підставивши ці вирази в означення і здійснивши перетворення, аналогічні для рівняння еліпсу, одержимо канонічне рівняння гіперболи у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В рівнянні гіперболи $b^2 = c^2 - a^2$.

Відповідно, ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$.

Зауваження. Якщо $a = b$, гіпербола зветься рівнобічною.

Асимптоти гіперболи

Розглянемо гілку гіперболи, яка лежить у першій координатній чверті (рис. 3.4):

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

і одночасно рівняння $y = +\frac{b}{a}x$, яке визначає пряму з кутовим коефіцієнтом $k = \frac{b}{a}$.

Покажемо, що точка гіперболи $M(x; y)$, прямуючи на нескінченість, необмежено наближається до прямої

$$y = +\frac{b}{a}x.$$

Візьмемо довільне значення x і розглянемо дві точки: $M(x; y)$ та $N(x; Y)$, де $y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, а $Y = +\frac{b}{a}x$.

Обчислимо довжину відрізка MN:

$$MN = Y - y = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

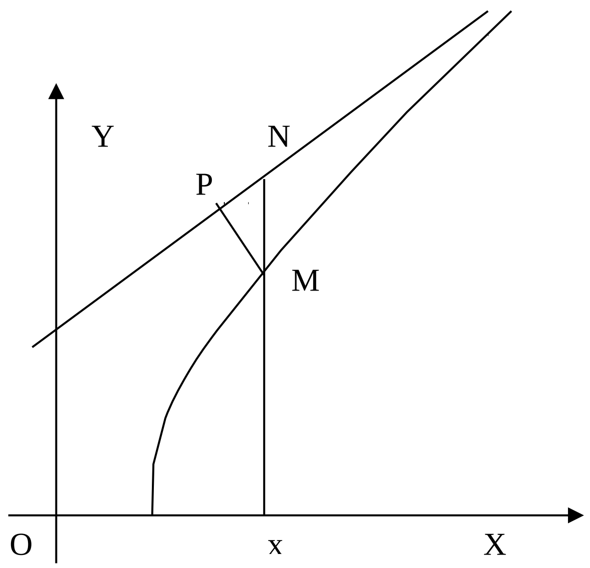


Рисунок 3.4

$$= \frac{b}{a}\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Якщо тепер $x \to \infty$, то $MN \to 0$. Далі позначимо через P основу перпендикуляру з точки M на пряму $y = +\frac{b}{a}x$. Очевидно $MP < MN$, а так як $MN \to 0$, то і $MP \to 0$, тобто точки гіперболи необмежено наближаються до прямої $y = +\frac{b}{a}x$, яка і являється асимптотою гіперболи. Зазначимо, що сказане стосується також лівої гілки гіперболи, тобто гіпербола має дві асимптоти:

$$y = \pm\frac{b}{a}x .$$

3.4 Парабола

Означення. Парабола – це геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки, так званого фокусу, і від заданої прямої, яка зветься директрисою (рис.3.5).

Виведемо канонічне рівняння параболи.

Позначимо відстань від фокуса параболи до початку координат $|FO| = \frac{p}{2}$,

де p - параметр параболи. Тоді координати фокуса $F(\frac{p}{2};0)$.

Візьмемо довільну точку на параболі $M(x;y)$. За означенням $|MF| = |MN|$, де $|MN|$ - відстань від $M(x;y)$ до директриси:

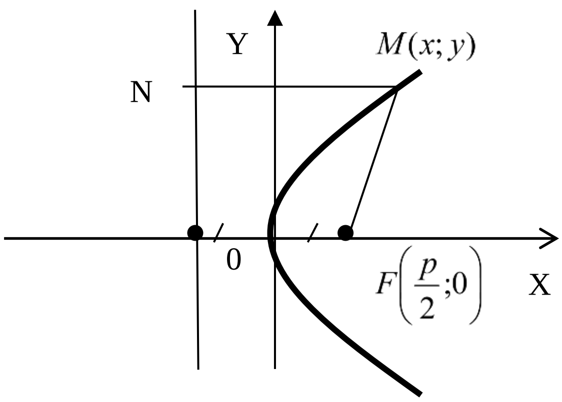


Рисунок 3.5

$$|MN| = x + \frac{p}{2}$$

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} .$$

Після очевидних перетворень одержимо рівняння параболи у вигляді:

$$y^2 = 2px .$$

Якщо вершина параболи зсунута по осі Ox на a одиниць, її рівняння має вигляд:

$$y^2 = 2p(x - a).$$

Рівняння параболи, симетричної відносно осі Oy має вигляд: $x^2 = 2py$.

Криві другого порядку як конічні перерізи

Перерізом будь-якого кругового конуса площиною, яка не проходить через його вершину, визначається крива, яка може бути лише еліпсом, гіперболою чи параболою. При цьому, якщо площина перетинає лише одну порожнину конуса і по замкненій кривій, то ця крива є еліпс; якщо площина перетинає тільки одну порожнину конуса по незамкненій кривій, то ця крива – парабола; якщо площина перетинає обидві порожнини конуса, то в перерізу маємо гіперболу (рис. 3.6).

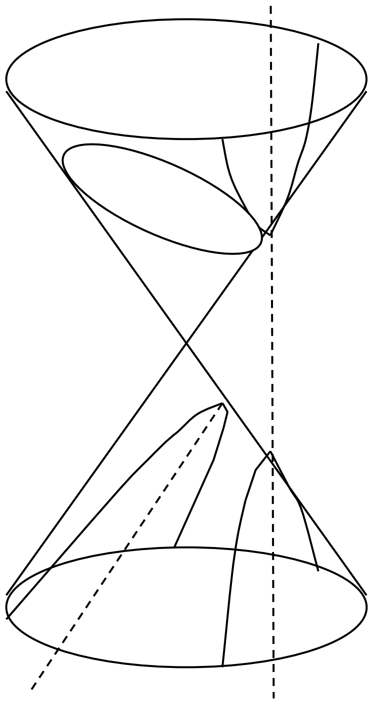


Рисунок 3.6

ЛЕКЦІЯ 4
ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМИ КООРДИНАТ. ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПРЯМОКУТНИМИ І ПОЛЯРНИМИ КООРДИНАТАМИ. ЛІНІЇ В ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ

4.1 Перетворення системи координат

Розглянемо прямокутну систему координат xOy. Змістимо осі координат паралельним зсувом так, що центр одержаної системи $x'Oy'$ розміститься в точці $O_1(p;q)$ (рис. 4.1).

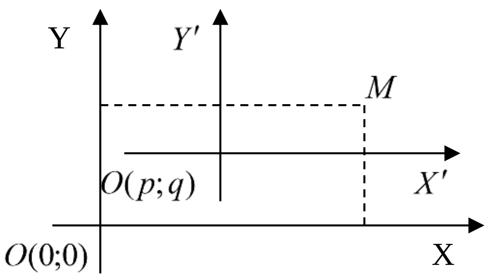


Рисунок 4.1

Таким чином координати точки $M(x;y)$ будуть виражені через нові координати так:

$$x = x' + p$$
$$y = y' + q.$$

Відповідно нові координати , виражені через задані записуються так:

$$x' = x - p$$
$$y' = y - q.$$

Поворот осей координат.

Розглянемо прямокутну систему координат xOy. Повернемо осі координат на кут α не зміщуючи центр (рис. 4.2). Виразимо координати точки $M(x;y)$ через нові координати

$$x = |OB| - |AB|.$$

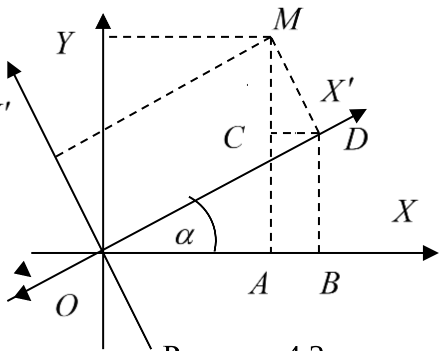


Рисунок 4.2

В ΔOBD $|OB| = |OD|\cos\alpha = x'\cos\alpha$;

в ΔMCD $|CD| = |MD|\sin\alpha = y'\sin\alpha = |AB|$.

Отже: $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$;

$$y = |AC| + |MC|.$$

В ΔOBD $|BD| = |OD|\sin\alpha = x'\sin\alpha = |AC|$;

в ΔMCD $|MC| = |MD|\cos\alpha = y'\cos\alpha$,

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Таким чином, при повороті осей координат маємо формули:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Відповідно нові координати , виражені через задані записуються так:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Приклад. Відомо, що рівняння оберненої пропорціональної залежності $y = \frac{k}{x}$ описує гіперболу. Канонічне рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Зокрема, для рівнобічної гіперболи $a = b$ рівняння запишеться так:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Покажемо, що перше рівняння можна одержати з другого перетворенням координат, зокрема поворотом осей на кут $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

При повороті осей координат маємо формули:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Підставимо $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ враховуючи, що $cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а $sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$y = -x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y')\right)^2 = a^2.$$

Розкриємо дужки

$$x'^2 + 2x'y' + y'^2 - x'^2 + 2x'y' - y'^2 = a^2$$

Після спрощення $4x'y' = a^2$, або $y' = \frac{k}{x'}$, де $k = \frac{a^2}{4}$.

Нарешті при одночасному зсуву і повороту осей координат загальний випадок має вигляд:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + p$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + q.$$

4.2 Полярна система координат

Полярна система координат визначається заданням точки O, яка зветься полюсом, та променем, який виходить із цієї точки і зветься полярною віссю.

Розглянемо довільну точку M і позначимо через ρ відстань її від полюса, а через φ кут нахилу променя до полярної осі.

Числа ρ та φ звуться полярними координатами точки M.

Встановимо зв'язок між полярними та декартовими координатами точки.

Помістимо початок декартової системи координат в полюс, а полярну вісь направити вздовж осі Ox (рис. 4.3). Тоді координати в двох системах зв'язуються співвідношеннями

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

або $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = arctg\dfrac{y}{x}$.

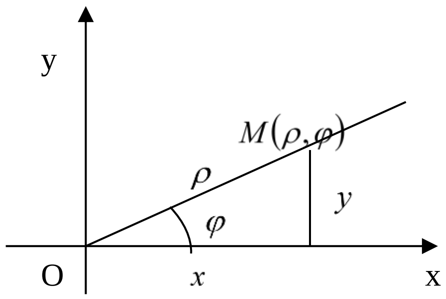


Рисунок 4.3

Приклад. Записати у полярній системі координат та побудувати графік функції

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right), \text{ де } a = const.$$

Підставимо співвідношення між декартовими та полярними координатами в рівняння лінії, одержимо:

$$\rho^4 = a^2\rho^2\cos 2\varphi,$$

або

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi} \text{ (будемо вважати, що } \rho \ge 0\text{)}.$$

Обчислимо значення функції і заповнимо у таблицю 4.1.

Таблиця 4.1. – Значення функції

φ	2φ	$\cos 2\varphi$	$\sqrt{\cos 2\varphi}$	ρ
0°	0°	1	1	a
15°	30°	0,87	0,93	0,93a
22,5°	45°	0,7	0,84	0,84a
30°	60°	0,5	0,7	J,7a
45°	90°	0	0	0
90°	180°	-1	не існує	

Побудована крива, зображена на рисунку 4.4, має назву лемніската Бернуллі.

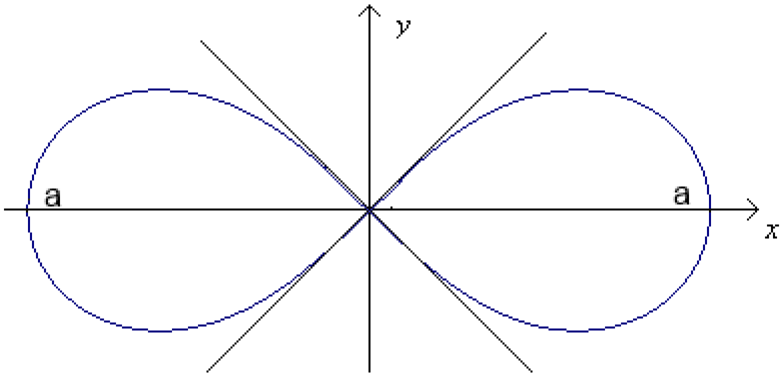


Рисунок 4.4

Приклад. Рівняння кривої в полярній системі координат має вигляд: $r = \dfrac{4}{3-\cos\varphi}$. Знайти рівняння кривої в декартовій прямокутній системі координат.

Скористаємось зв'язком між декартовими та полярними координатами точки: $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ і підставимо в рівняння:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{4}{3-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$3\sqrt{x^2+y^2} - x = 4$$

$$3\sqrt{x^2+y^2} = x + 4$$

$$9x^2 + 9y^2 = 16 + 8x + x^2$$

$$8x^2 - 8x + 9y^2 - 16 = 0$$

$$8(x^2 - x + 1/4) - 8\cdot 1/4 + 9y^2 - 16 = 0$$

$$8(x-1/2)^2 - 2 + 9y^2 - 16 = 0$$

$$8(x-1/2)^2 + 9y^2 = 18$$

$$\frac{(x-1/2)^2}{9/4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Одержали канонічне рівняння еліпса.

ЛЕКЦІЯ 5
СТАЛІ ТА ЗМІННІ ВЕЛИЧИНИ. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ. ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ І НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ ЗМІННІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

5.1 Сталі та змінні величини

Сталою величиною або константою називається величина, яка не змінює свого значення в умовах задачі, що розглядається. Звичайно сталі величини позначаються малими (інколи великими) буквами із початку латинського алфавіту $a, b, c, d, \ldots$.

Змінною величиною називається величина, яка може набувати різних значень в умовах задачі, що розглядається. Звичайно змінні величини позначаються малими (інколи великими) буквами із кінця латинського алфавіту $\ldots, w, x, y, z$.

Змінна величина може бути неперервною або дискретною.

Змінна x є упорядкована величина, якщо про кожне з двох будь-яких її значень можна сказати, яке з них попереднє і яке наступне.

Окремим випадком упорядкованої змінної величини є числова послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$. Тут при $i < k$ значення x_i попереднє, а x_k – наступне незалежно від того, яке з цих значень більше.

Змінна величина x називається обмеженою, якщо всі її значення за модулем не перевищують деякого додатного числа M протягом всього процесу змінювання:

$$\exists M > 0, \forall x: |x| \le M .$$

У противному випадку змінна величина називається необмеженою. Точніше, змінна величина x називається необмеженою, якщо для довільного додатного числа M знайдеться хоча б одне значення x, яке за модулем перевищує це число M:

$$\forall M > 0, \exists x: |x| > M .$$

5.2 Поняття функції

Означення. Числовою функцією з областю визначення x називається залежність, при якій кожному числовому значенню x з множини X ставиться у відповідність єдине деяке число y.

Позначають функцію $y = f(x)$. Змінну x називають незалежною змінною або аргументом, змінну y – залежною змінною або функцією.

Означення. Областю визначення функції називається множина значень, яких набуває незалежна змінна x. Позначається D(f).

Означення. Областю значень функції називається множина значень, яких набуває залежна змінна y при всіх значеннях x з області визначення функції.

Позначається E(f).

Означення. Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок $M(x,f(x))$ координатної площини, абсциси яких належать області визначення функції, а ординати є відповідними значеннями цієї функції.

5.3 Основні елементарні функції

Функції, задані аналітично, можуть бути утворені з невеликої кількості функцій, які називаються основними або простішими елементарними функціями. До основних елементарних функцій належать такі:

1. Степенева: $y = x^n$ (n – дійсне число).
2. Показникова: $y = a^x$ (a>0, $a \neq 1$).
3. Логарифмічна: $y = log_a x$ (a>0, $a \neq 1$).
4. Тригонометрична: $y = sin\, x$; $y = cos\, x$; $y = tg\, x$; $y = ctg\, x$.
5. Обернені тригонометричні: $y = arcsin\, x$; $y = arccos\, x$; $y = arctg\, x$; $y = arcctg\, x$.
6. Стала: y = C.

Решта функцій утворюється із основних елементарних функцій двома способами:

1. За допомогою арифметичних дій: додавання, віднімання, множення, ділення над основними функціями та числами, наприклад:
$$y = \frac{tgx+2^x-e^x}{arcsinx+5lgx+x^3};$$
$$y = ln\, x \cdot cos\, x + 7\, sin\, x.$$
2. За допомогою суперпозиції кількох основних функцій. При такому задаванні функції аргумент основної елементарної функції є, у свою чергу, основна елементарна функція, яку виражено через основні елементарні функції. Наприклад, $y = sin^2 x$; $y = 3^{sinx}$; $y = ln(cos\, x)$.

Функція, яку утворено за допомогою суперпозиції основних елементарних функцій, називається складною функцією, або функцією від функції. У загальному випадку функції записуються $y = f(u)$, $u = f(x)$? або $y = f\,(u(x))$.

Алгебраїчна функція — це функція, що задовольняє алгебраїчне рівняння.

Означення: Функція називається алгебраїчною функцією, якщо її значення можна отримати, виконуючи над незалежною змінною скінченну кількість алгебраїчних дій, таких як додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення у степінь з раціональним показником.

Трансцендентна функція — аналітична функція, що не є алгебраїчною. Простими прикладами трансцендентних функцій є показникова функція, тригонометрична функція, логарифмічна функція.

5.4 Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Змінна величина x називається нескінченно малою, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються меншими будь-якого фіксованого додатного числа ε.

Іншими словами, змінна величина x називається нескінченно малою, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий момент t_ε процесу змінювання, що у всі наступні моменти $t > t_\varepsilon$ значення змінної величини x за модулем менші цього числа ε:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon, \forall t > t_\varepsilon : |x| < \varepsilon.$$

Наприклад:

$\alpha = 10000/n^2 \to 0$. Зокрема, якщо $\varepsilon = 0{,}01$, то нерівність $|\alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow |10000/n^2| < 0{,}01$ виконується для всіх $n > n_\varepsilon = 1000$.

Основні властивості нескінченно малих величин

Нескінченно мала величина є обмеженою:

$$\alpha \to 0 \Rightarrow \exists M > 0:\ |\alpha| \le M.$$

Сума (різниця) двох нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною:

$$\left.\begin{matrix}\alpha \to 0\\ \beta \to 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \pm \beta \to 0.$$

Добуток нескінченно малої величини на обмежену є нескінченно малою величиною:

$$\left.\begin{matrix}|x| \le M\\ \alpha \to 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha x \to 0.$$

Наслідок. Добуток сталої величини на нескінченно малу є нескінченно малою величиною:

$$\left.\begin{matrix}\alpha \to 0\\ C = const\end{matrix}\right\} \Rightarrow C\alpha \to 0.$$

Добуток двох нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною:

$$\left.\begin{matrix}\alpha \to 0\\ \beta \to 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha\beta \to 0.$$

Змінна величина x називається нескінченно великою, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються більшими будь-якого фіксованого додатного числа M.

Величина, обернена до нескінченно великої величини, є нескінченно малою:

$$x \to \infty \Rightarrow \alpha = 1/x \to 0.$$

Величина, обернена до нескінченно малої, відмінної від нуля величини, є нескінченно великою:

$$\left.\begin{matrix}\alpha \to 0\\ \alpha \ne 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha} \to \infty.$$

ЛЕКЦІЯ 6
ГРАНИЦЯ ЗМІННОЇ ВЕЛИЧИНИ. ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЦЬ. РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ. ПЕРША ТА ДРУГА СТАНДАРТНІ ГРАНИЦІ

6.1 Границя змінної величини

Стала величина A називається границею змінної величини x, якщо їх різниця $x-A$ є нескінченно малою величиною:

$$x-A=\alpha\to 0\ .$$

Записується так: $x\to A$ або $\lim x=A$

Наприклад $\lim\frac{n+1}{n}=1$, оскільки $\alpha=\frac{n+1}{n}-1=\frac{1}{n}\to 0$.

Границя послідовності. Стале число A називається границею послідовності x_n, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon>0$ можна вказати таке число N, що для всіх $n>N$ виконується нерівність $|x-A|<\varepsilon$.

Записуємо так: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

Границя функції. Стале число A називається границею функції при $x\to x_0$, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon>0$ можна вказати таке $\delta>0$, що як тільки $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$ (рис. 6.1).

Записуємо так: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

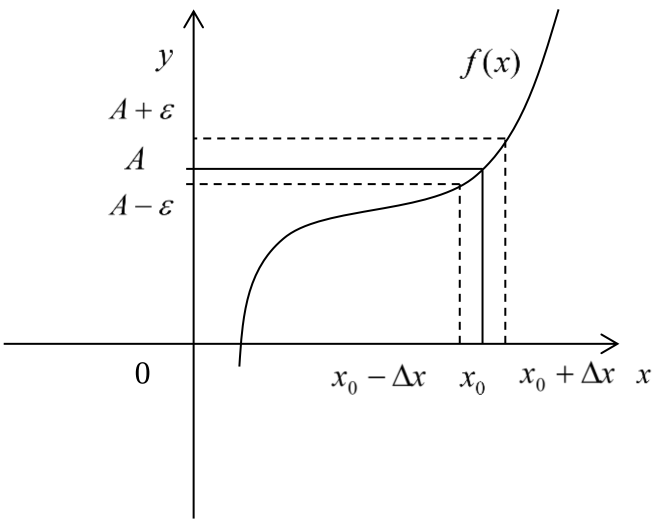


Рисунок 6.1

6.2 Властивості границь

Границя сталої величини дорівнює самій цій величині:

$$C = const \Rightarrow \lim C = C.$$

Границя скінченної алгебраїчної суми змінних величин дорівнює такій же сумі їх границь, якщо останні існують:

$$\lim(x + y - z) = \lim x + \lim y - \lim z.$$

Границя добутку двох змінних величин дорівнює добутку їх границь, якщо останні існують:

$$\lim(xy) = \lim x \cdot \lim y.$$

Наслідок 1. Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити за знак границі:

$$\lim(Cx) = C \cdot \lim x, \quad C = const.$$

Наслідок 2. Границя степеня з натуральним показником змінної величини дорівнює відповідному степеню її границі, якщо остання існує:

$$\lim x^n = (\lim x)^n, \quad n \in N.$$

Границя відношення двох змінних величин дорівнює такому ж відношенню їх границь, якщо останні існують, причому границя знаменника відмінна від нуля:

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

Обчислення границь

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 5x + 7}{3x^2 - 2}$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 5x + 7}{3x^2 - 2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3 - 5x + 7\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2 - 2\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 2} x^3 - \lim\limits_{x\to 2} 5x + \lim\limits_{x\to 2} 7}{\lim\limits_{x\to 2} 3x^2 - \lim\limits_{x\to 2} 2} = \frac{\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^3 - 5\lim\limits_{x\to 2} x + 7}{3\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^2 - 2} =$$

$$= \frac{(2)^3 - 5\cdot 2 + 7}{3\cdot 2^2 - 2} = \frac{1}{2}.$$

Спираючись на розв’язаний приклад, сформулюємо наступне правило:

Границю раціонального дробу $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени, можна обчислити шляхом прямої підстановки замість x його граничного значення, якщо при цьому не порушуються умови, вказані у властивостях границь.

6.3 Розкриття невизначеностей

Розкриття невизначеності виду $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ для многочленів

Правило: Для розкриття невизначеності виду $\left|\dfrac{0}{0}\right|$ для многочленів $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ розкласти на множники та скоротити дріб, а потім перейти до границі.

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+27}$.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}=\left|\dfrac{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}{1^3-1}=\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\left|\begin{matrix}3x^2-5x+2=0\\ x_1=1;\ x_2=2/3\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-2/3)}{(x-1)(x^2+x+1)}=3\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2/3}{x^2+x+1}=$$

$$=3\cdot\frac{1-2/3}{1^2+1+1}=\frac{1}{3};$$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-2}=\left|\dfrac{4}{0}\right|=\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+27}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)^2}{(x+3)(x^2-3x+9)}=$

$$=\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-3x+9}=\frac{-3+3}{(-3)^2-3\cdot(-3)+9}=\frac{0}{27}=0\,.$$

Розкриття невизначеності виду $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$ для многочленів

При розкритті невизначеності виду $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$ для нескінченно великих величин, зручно спочатку перейти до розгляду нескінченно малих величин, використовуючи наступне правило:

Для розкриття невизначеності виду $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$ для многочленів $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ поділити на найвищий степінь x, а потім перейти до границі.

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^3+4x-1}{5x^2-2x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{9x^3+4x}{2x^5+x^3+6}$.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^3+4x-1}{5x^2-2x+6}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-5/x+4/x^3-1/x^4}{5/x^2-2/x^3+6/x^4}=\left|\frac{3-0+0-0}{0-0+0}\right|=\infty;$$

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5-4/x-7/x^2}{8-3/x+6/x^2}=$

$=\frac{5-0-0}{8-0+0}=\frac{5}{8}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{9x^3+4x}{2x^5+x^3+6}=$

$$=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{9/x^2+4/x^4}{2+1/x^2+6/x^5}=\frac{0+0}{2+0+0}=0.$$

Розкриття невизначеності виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ для ірраціональних виразів

Правило: Для розкриття невизначеності виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ для ірраціональних виразів треба спочатку відповідним чином позбавитись ірраціональності, що дає нуль, потім скоротити дріб, і нарешті перейти до границі.

Приклад. Знайти границю:

$$\text{а) }\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6};\ \text{б) }\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}.$$

$$\text{а) }\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{5x-1}-3\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{\left(4x^2-5x-6\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{5x-1}+3}\cdot\lim_{x\to2}\frac{5x-1-9}{4x^2-5x-6}=\frac{1}{\sqrt{5\cdot2-1}+3}\times$$

$$\times\lim_{x\to2}\frac{5x-10}{4x^2-5x-6}=\left|\begin{matrix}4x^2-5x-6=0\\ x_1=2;\ x_2=-3/4\end{matrix}\right|=\frac{1}{6}\times$$

$$\times\lim_{x\to2}\frac{5(x-2)}{4(x-2)(x+3/4)}=\frac{5}{4}\lim_{x\to2}\frac{1}{x+3/4}=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to2}\frac{1}{2+3/4}=\frac{5}{11};$$

$$\text{б) }\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{\left(\sqrt[3]{4x+4}+2\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)}{\left(\sqrt{-3x}+x\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{-3x}-x}{\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4}\cdot\lim_{x\to-3}\frac{4x+4+8}{-3x-x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{-3\cdot(-3)}-(-3)}{\sqrt[3]{(4\cdot(-3)+4)^2}-2\sqrt[3]{4\cdot(-3)+4}+4}\cdot\lim_{x\to-3}\frac{4(x+3)}{-x(3+x)}=$$

$$=\frac{6}{12}\cdot(-4)\lim_{x\to-3}\frac{1}{x}=-2\cdot\frac{1}{-3}=\frac{2}{3}$$

Ознаки існування границі

Теорема 1. Обмежена монотонна величина має границю.

$$x \geq 0 \Rightarrow \lim x \geq 0 \;;\; x \leq 0 \Rightarrow \lim x \leq 0\,.$$

Теорема 2 (про стиснену змінну). Нехай задано три змінні величини x, y і z, для яких виконується подвійна нерівність $x \leq y \leq z$. Якщо при цьому крайні змінні x і z мають однакову границю $\lim x = \lim z = a$, то середня змінна y також має ту саму границю $\lim y = \lim x = \lim z = a$:

$$\left.\begin{aligned} x \leq y \leq z \\ \lim x = \lim z = a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim y = \lim x = \lim z = a\,.$$

6.4 Перша та друга стандартні границі

Перша стандартна границя

Теорема (перша стандартна границя). Границя відношення синуса нескінченно малої величини до самої цієї величини існує і дорівнює одиниці:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = 1\,.$$

Доведення:

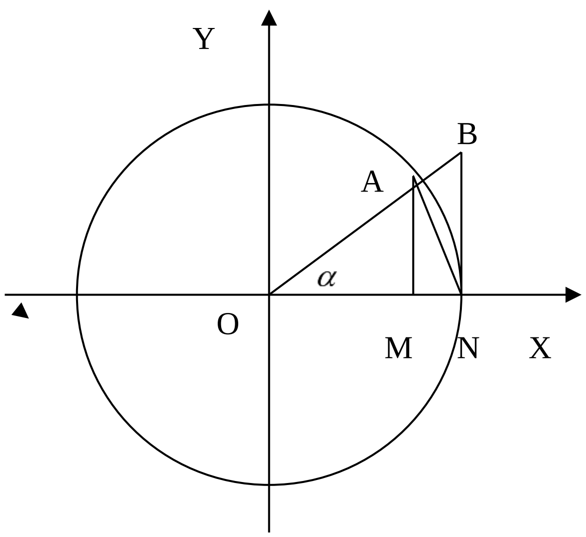


Рисунок 6.2

Розглянемо одиничний круг (рис. 6.2):

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad |OA| = |OM| = 1$$

$$|AM| = \sin \alpha; \qquad |BN| = tg\alpha\,.$$

Порівняємо площі фігур:

$$S_{\Delta OAN} < S_{сект.OAN} < S_{\Delta OBN}$$

$$\frac{1}{2}|ON||AM| < \frac{1}{2}|ON|\alpha < \frac{1}{2}|ON||BN|$$

$$\sin \alpha < \alpha < tg\alpha$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha\,.$$

Спрямуємо $\alpha \to 0$ і враховуючи, що $\lim\limits_{\alpha \to 0} \cos \alpha = 0$, одержимо:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Наслідок 1. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{tg\,\alpha}{\alpha} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = 1\,.$

Наслідок 2. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=1$.

Наслідок 3. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{arctg\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=1$.

Зауваження. Для розкриття невизначеності виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ з тригонометричними виразами треба розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити дріб або застосувати першу стандартну границю чи її наслідки.

Приклад. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{xtgx}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{xtgx}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cos x=1.$$

Приклад. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{ctg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{4x-\pi}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{ctg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{4x-\pi}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix} u=x-\frac{\pi}{4}; & x=\frac{\pi}{4}+u \\ x\to\frac{\pi}{4} \ \Rightarrow & u\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{ctg\left(\frac{\pi}{4}+u+\frac{\pi}{4}\right)}{4\left(\frac{\pi}{4}+u\right)-\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2}+u\right)}{4u}=-\frac{1}{4}\lim_{u\to 0}\frac{tgu}{u}=-\frac{1}{4}\cdot 1=-\frac{1}{4}.$$

Друга стандартна границя.
Розкриття невизначеності виду 1^∞

Теорема (друга стандартна границя). Змінна величина $(1+1/n)^n$ має границю при $n\to\infty$. Ця границя позначається буквою e і називається числом Ейлера:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left|1^\infty\right|=e.$$

Зауваження 1. Число Ейлера e=2,718 281 828 459 045... ~2,72. Можна показати, що число e – ірраціональне і навіть трансцендентне (воно не може бути коренем жодного алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами).

Зауваження 2. При обчисленнях границь використовують також наступні форми запису другої стандартної границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left|1^\infty\right|=e$,

де змінна x – дійсна неперервна (на відміну від дискретної змінної n). Графік функції $y=(1+1/x)^x$ подано на рисунку 6.3;

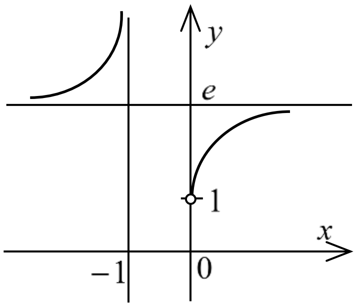


Рисунок 6.3

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=\left|1^{\infty}\right|=e$

$$\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}=M\ln x;\ \ln x=\frac{1}{M}\lg x,$$

де M=1/ln10=0,434 29… – модуль переходу.

Наведемо (без доведення) наступні наслідки з другої стандартної границі, корисні при обчисленнях:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$$

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x-1}-1}{arctg(x-1)}$.

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x+2}\right)^{2x+1}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x-5}{x+2}-1\right)\right)^{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-7}\cdot\frac{-7}{x+2}(2x+1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7(2x+1)}{x+2}}=e^{-7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+1/x}{1+2/x}}=e^{-7\cdot\frac{2+0}{1+0}}=e^{-14};$$

б) $$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{(1/\sin x)\cdot(\sin x/x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x)}=e^{1}=e\ ;$$

в) $$\lim_{x\to 1}\frac{2^{x-1}-1}{arctg(x-1)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix}u=x-1;\\ x\to 1\Rightarrow u\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{2^u-1}{arctg\,u}=\lim_{u\to 0}\frac{2^u-1}{u}:\lim_{u\to 0}\frac{arctg\,u}{u}=\ln 2:1=\ln 2.$$

ЛЕКЦІЯ 7
НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ. ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ. ТОЧКИ РОЗРИВУ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

7.1 Неперервність функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена при деякому значенні x_0 та в деякому околі з центром x_0. Нехай $y_0 = f(x_0)$. Надамо x приріст Δx, тоді x набуде значення $x = x_0 + \Delta x$, відповідно функція y одержить приріст

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення. Функція $y = f(x)$ зветься неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в деякому околі точки x_0, і якщо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

або, що теж саме,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0,$$

то цей вираз перепишемо так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

або

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

звідки маємо ще одне означення:

Функція $y = f(x)$ зветься неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в деякому околі точки x_0 і якщо границя функції при $x \to x_0$ дорівнює значенню функції в цій точці.

Приклад. Доведемо, що функція $y = x^2$ є неперервною в точці x_0.

Дійсно,

$$y_0 = x_0^2,\ \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + \Delta x^2,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 \Delta x + \Delta x^2) = 0.$$

Доведемо далі наступну теорему:

Теорема. Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні в точці x_0, то їх сума $\psi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ також неперервна в точці x_0.

Доведення. Із неперервності $f_1(x)$ та $f_2(x)$ можемо записати:

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0) \text{ та } \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_2(x_0)$$

За властивостями границь

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \lim_{x \to x_0} \left[f_1(x) + f_2(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = \psi(x_0).$$

Аналогічно можна довести:

–добуток двох неперервних функцій є неперервна функція;

– частка двох неперервних функцій є неперервна функція, якщо знаменник в точці x_0 не дорівнює нулю;

– якщо $u=\varphi(x)$ неперервна при $x=x_0$ і $f(u)$ неперервна в точці $u_0=\varphi(x_0)$, то складна функція $f[\varphi(x)]$ неперервна в точці x_0.

Означення. Якщо функція $f(x)$. неперервна в кожній точці деякого інтервалу (a,b) , де $a<b$, то кажуть, що функція неперервна на цьому інтервалі.

Якщо функція визначена при $x=a$ і при цьому $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, то кажуть, що $f(x)$ в точці $x=a$ неперервна справа; якщо $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$, то кажуть, що $f(x)$ в точці $x=b$ неперервна зліва.

Якщо функція $f(x)$. неперервна в кожній точці деякого інтервалу (a,b) і неперервна на кінцях інтервалу відповідно зліва та справа, то кажуть, що функція $f(x)$ неперервна на замкненому інтервалі $[a,b]$.

7.2 Властивості неперервних функцій

Теорема. Неперервна на відрізку $a\le x\le b$ функція досягає на цьому відрізку по меншій мірі один раз свого найбільшого M та найменшого m значення.

Теорема. Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і на кінцях цього відрізку приймає значення різних знаків, тоді між точками a та b знайдеться принаймні одна точка $x=c$, в якій функція обертається на нуль (рис. 7.1):

$$f(c)=0, \qquad a<c<b.$$

Геометрична інтерпретація полягає в тому, що графік функції, який з’єднує точки M_1 та M_2 перетне вісь Ox хоча б один раз.

Теорема. Нехай функція $y=f(x)$ визначена та неперервна на відрізку $[a,b]$. Якщо на кінцях цього відрізку вона приймає нерівні значення $f(a)=A,\quad f(b)=B$, то яке б не було число μ, яке міститься між числами A та B, знайдеться така точка $x=c$, розміщена між a та b що $f(c)=\mu$.

Наслідок. Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на деякому інтервалі і приймає найбільше та найменше значення, то на цьому інтервалі вона прийме принаймні один раз будь-яке значення між її найбільшим та найменшим.

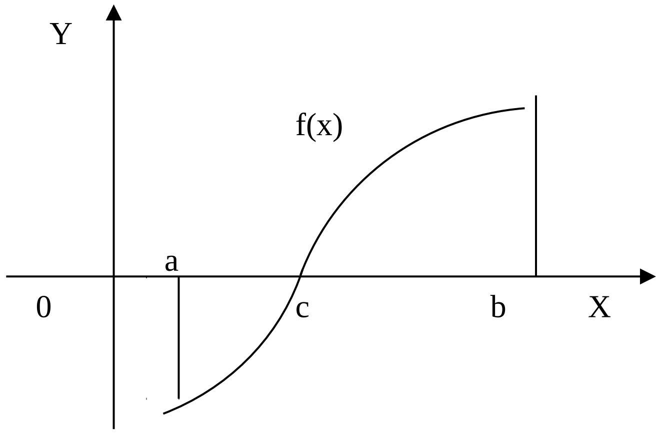


Рисунок 7.1

7.3 Точки розриву та їх класифікація

Якщо в деякій точці $x = x_0$ для функції $y = f(x)$ не виконується хоча б одна з умов неперервності, тобто якщо при $x = x_0$ функція не визначена, або не існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, чи $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то при $x = x_0$ функція $y = f(x)$ є розривна. Точка $x = x_0$ в цьому випадку зветься точкою розриву функції.

Приклад. Функція $y = 1/x$ на рисунку 7.2 розривна при $x = 0$.

Дійсно, при $x = 0$ функція не визначена:

$$\lim_{x \to 0+0} 1/x = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0-0} 1/x = -\infty .$$

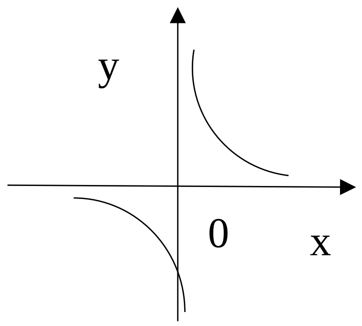


Рисунок 7.2

Означення. Якщо функція $f(x)$ така, що існують скінчені границі $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ та $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$, але $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, або значення $f(x)$ при $x = x_0$ не визначено, то $x = x_0$ зветься точкою розриву першого роду.

Приклад. Розглянемо функцію $f(x) = x/|x|$. При $x < 0$ буде $x/|x = -1|$, при $x > 0$ буде $x/|x = 1|$ (рис. 7.3). Тож

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} x/|x| = -1, \qquad \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} x/|x| = 1,$$

При x = 0 функція не визначена.

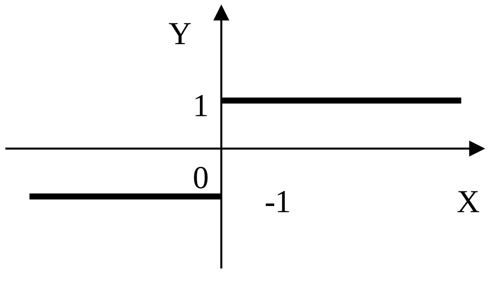


Рисунок 7.3

Означення. Якщо функція $f(x)$ в точці $x = x_0$ не має хоча б однієї з односторонніх границь, або одна з них нескінчена, то ця точка зветься точкою розриву другого роду.

Приклад. Розглянемо функцію $y = 2^{\frac{1}{x}}$ (рис. 7.4). Ця функція розривна при $x = 0$. Дійсно, $\lim\limits_{x \to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$.

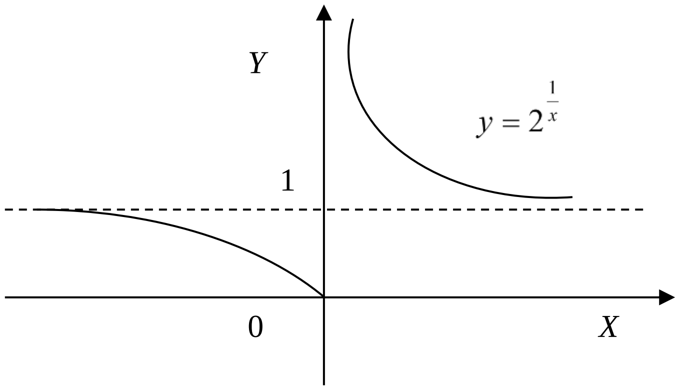


Рисунок 7.4

ЛЕКЦІЯ 8
ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. ДОТИЧНА І НОРМАЛЬ ДО ГРАФІКА ФУНКЦІЇ. ВЛАСТИВОСТІ ПОХІДНОЇ. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. ПОХІДНА ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

8.1 Похідна. Дотична і нормаль до графіка функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і $x_0 \in (a;b)$. Дамо аргументу приріст Δx так, щоб нова точка $x_0 + \Delta x \in (a;b)$. Оскільки точка x_0 фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, яке також буде функцією приросту аргументу Δx.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Приклад. Розглянемо функцію $f(x) = x^2$.

Дамо x приріст Δx. Тоді $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

Підставимо в означення похідної:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

Отже, $f'(x) = 2x$, або $(x^2)' = 2x$.

Еквівалентні позначення похідної y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$,. $f'(x)$.

Операція знаходження похідної називається диференціюванням функції. Функція, що має похідну у точці x_0, називається диференційованою у цій точці.

Коли функція $y = f(x)$ диференційована у кожній точці проміжку $(a;b)$, то кажуть, що вона диференційована на проміжку $(a;b)$. Похідна функції $y = f(x)$, диференційованої у проміжку $(a;b)$, сама є функцією x.

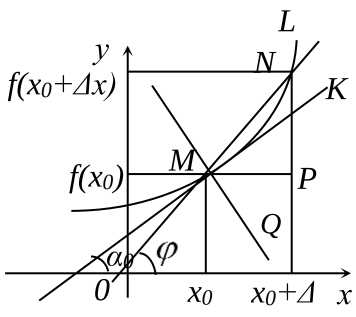


Рисунок 8.1

Геометричний зміст похідної. Дотична і нормаль. Нехай дано деяку лінію L і на ній точку M (рис.8.1). Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, графіком якої є лінія L, диференційована у точці x_0. Дотичною до лінії L у точці M називається граничне положення MK січної MN, якщо точка N прямує до точки M. При цьому $\Delta x \to 0$.

З іншого боку відношення $\frac{|NP|}{|MP|}$ дорівнює тангенсу кута нахилу січної MN до осі OX. Розглянемо границю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = y'.$$

Тож геометричний зміст похідної полягає в тому, що похідна функції дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції:

$$y' = tg\alpha$$

Оскільки $tg\alpha = k$, тобто є кутовим коефіцієнтом прямої, рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить через точку M з координатами $(x_0; y_0)$, можна записати у вигляді

$$y - y_0 = y'_0 \cdot (x - x_0).$$

Пряма MQ, яка проходить через точку дотику M і перпендикулярна до дотичної MK, називається нормальною прямою (нормаллю). Її рівняння

$$y - y_0 = \left(-1/y'_0\right) \cdot (x - x_0).$$

Приклад. Знайти кут нахилу дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці $M(1/2; 1/4)$. Скласти рівняння дотичної.

Візьмемо похідну від функції $y = x^2$: $y' = 2x$. Тоді: $tg\,\alpha = y'(x_0) = 2 \cdot (1/2) = 1$; $\alpha = arctg 1 = 45^\circ$ – кут нахилу дотичної; $y - 1/4 = 1 \cdot (x - 1/2)$; $y = x - 1/4$ – дотична.

8.2 Правила диференціювання

Нехай маємо деякі функції $u = u(x)$, $v = v(x)$, які диференційовані у проміжку $(a;b)$. Тоді:

1) Якщо $y = cu$, то $y' = (cu)' = cu'$, де $c = const$,

тобто сталий множник можна виносити з-під знаку похідної.

2) Якщо $y = u \pm v$, то $y' = (u \pm v)' = u' \pm v'$,

тобто похідна суми або різниці функцій дорівнює відповідно сумі або різниці їх похідних.

3) Якщо $y = uv$, то $y' = (uv)' = u'v + v'u$,

тобто похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію.

4) Якщо $y = \dfrac{u}{v}$, де $v \neq 0$, то $y' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$,

тобто похідна частки двох функцій дорівнює дробу, у якому знаменник є квадрат знаменника, а чисельник є різниця між добутками похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник.

8.3 Похідна тригонометричних функцій

Розглянемо $y = \sin x$.

Дамо x приріст Δx тоді y одержить приріст

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2}\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

За означенням похідної

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x.$$

Отже:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Розглянемо $y = \cos x$.

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x.$$

Отже

$$(\cos x)' = \sin x.$$

Розглянемо $y = tgx$.

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже:

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

ЛЕКЦІЯ 9
ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНА НЕЯВНОЇ ФУНКЦІЇ. ПРАВИЛО ЛОГАРИФМІЧНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. ПОХІДНІ СТЕПЕНЕВОЇ. ПОКАЗНИКОВОЇ ТА ГІПЕРБОЛІЧНИХ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНА ОБЕРНЕНОЇ ФУНКЦІЇ. ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ.

9.1 Похідна складеної функції

Якщо функція $u = u(x)$ має похідну у деякій точці $x \in (a;b)$, а функція $y = f(u)$ має похідну у відповідній точці $u = u(x)$, то й складена функція $y = f(u(x))$ має похідну у точці x, причому

$$y'_x = (f(u(x))' = y'_u(u) \cdot u'_x(x),$$

де індекси y і x біля похідних вказують, за яким аргументом обчислюють похідні.

9.2 Похідна неявно заданої функції

Правило диференціювання функції $y = y(x)$, що задана неявно рівнянням $F_1(x, y) = F_2(x, y)$:

1) продиференціювати ліву і праву частини рівняння, що задає функцію, розглядаючи y як функцію від x, тобто застосовуючи правило диференціювання складеної функції;

2) з одержаної рівності знайти y'.

$$\left(tg\,(2x + y) - 3x^2\right)' = \left(1 + xy^2\right)'; \quad \frac{1}{\cos^2(2x + y)}(2x + y)' -$$

$$-3 \cdot 2x = 0 + x' y^2 + x(y^2)';$$

$$\left(1/\cos^2(2x + y)\right)(2 + y') - 6x = y^2 + x \cdot 2yy';$$

$$2 + y' - 6x\cos^2(2x + y) = y^2\cos^2(2x + y) + 2xyy'\cos^2(2x + y);$$

$$y' = \left(y^2\cos^2(2x + y) - 2 + 6x\cos^2(2x + y)\right) / \left(1 -\right.$$

$$\left. - 2xy\cos^2(2x + y)\right);$$

$$y'\big|_{M(-1;2)} = \left(2^2\cos^2(2\cdot(-1) + 2) - 2 + 6\cdot(-1)\cos^2(2\cdot(-1) + 2)\right):$$

$$:\left(1 - 2\cdot(-1)\cdot 2\cos^2(2\cdot(-1) + 2)\right) = -4/5.$$

9.3 Правило логарифмічного диференціювання

1) логарифмуємо ліву і праву частини відповідного рівняння $y = f(x)$;

2) до результату логарифмування застосовуємо правило диференціювання неявної функції;

3) у співвідношення для похідної y' замість y підставимо вираз $f(x)$.

Приклад. Знайти похідну функції: $y = x^x$.

Логарифмуємо ліву і праву частини рівняння:

$$\ln y = x \ln x.$$

Візьмемо похідну від обох частин одержаної рівності:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x};$$

$$y' = y(\ln x + 1);$$

$$y' = x^x(\ln x + 1).$$

9.4 Похідні степеневої. показникової та гіперболічних функції

Похідна степеневої функції

Розглянемо $y = x^n$.

Логарифмуємо ліву і праву частини рівняння:

$$\ln y = \ln x^n$$

$$\ln y = n \ln x$$

$$\frac{1}{y} y' = n \frac{1}{x}$$

$$y' = yn \frac{1}{x}$$

$$y' = x^n n \frac{1}{x}$$

Отже:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Зокрема,

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Похідна показникової функції

Розглянемо $y = a^x$. Логарифмуємо ліву і праву частини рівняння:

$$\ln y = \ln a^x$$

$$(\ln y)' = (x)' \ln a$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a$$

$$y' = y \ln a.$$

Отже:

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a.$$

Зокрема,

$$\left(e^x\right)' = e^x.$$

Похідна гіперболічних функцій

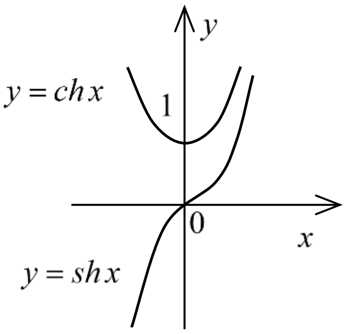
Гіперболічні функції:

$sh\,x = \left(e^x - e^{-x}\right)/2$ – гіперболічний синус (рис. 9.1);

$ch\,x = \left(e^x + e^{-x}\right)/2$ – гіперболічний косинус (рис. 9.1);

$th\,x = \dfrac{sh\,x}{ch\,x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ – гіперболічний тангенс (рис. 9.2);

$cth\,x = \dfrac{ch\,x}{sh\,x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ – гіперболічний котангенс (рис. 9.2);



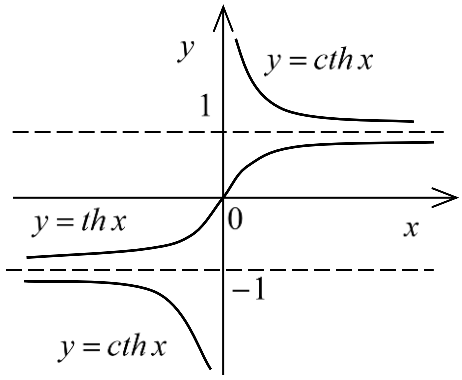


Рисунок 9.1 Рисунок 9.2

Для гіперболічних функцій основна гіперболічна тотожність $ch^2x - sh^2x = 1$.
Розглянемо $y = shx$.

$$\left(shx\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx.$$

Отже:

$$\left(shx\right)' = chx$$
$$\left(chx\right)' = shx \quad .$$
$$\left(thx\right)' = \frac{1}{ch^2x}$$

Розглянемо $y = u^v$, де $u = u(x)$ $\quad v = v(x)$.

$$\ln y = \ln u^v$$
$$\ln y = v \ln u$$
$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{1}{u}u'$$
$$y' = u^v\left(v' \ln u + vu^{-1}u'\right)$$
$$y' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'.$$

Отже:

$$\left(u^{v}\right)' = u^{v}\ln u\cdot v' + vu^{v-1}\cdot u'.$$

Приклад:

$$\left((\sin x)^{\cos x}\right)' = \sin x^{\cos x}\ln\sin x\cdot(\cos x)' + \cos x\cdot\sin x^{\cos x-1}(\sin x)' =$$
$$= -(\sin x)^{\cos x+1}\ln\sin x + \cos^{2} x\cdot(\sin x)\cos x - 1.$$

9.5 Похідна оберненої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умові існування оберненої функції і у точці $x \in (a;b)$ має скінчену і відмінну від нуля похідну. Тоді обернена функція $x = f^{-1}(y)$ у відповідній точці $y = f(x)$ також має похідну. Похідні цих взаємно обернених функцій зв'язані рівністю

$$(f^{-1}(y))'_{y} = 1/f'_{x}(x).$$

Похідна обернених тригонометричних функції

Розглянемо $y = \arcsin x$, обернена до цієї функції $x = \sin y$.

Тоді $y' = \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^{2} y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$.

Отже:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^{2}}.$$

Приклад. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y = x^{2}\sin 5x$; $y' = (x^{2}\sin 5x)' = (x^{2})'\sin 5x + x^{2}(\sin 5x)' =$

$$= 2x\sin 5x + 5x^{2}\cos 5x;$$

б) $y = x^{4}/\cos 3x$; $y' = (x^{4}/\cos 3x)' = \left((x^{4})'\cos 3x - (\cos 3x)'x^{4}\right):$

$$:\cos^{2} 3x = \left(4x^{3}\cos 3x + 3\sin 3x\cdot x^{4}\right)/\cos^{2} 3x =$$
$$= x^{3}(4\cos 3x + 3x\sin 3x)/\cos^{2} 3x;$$

в) $y = e^{arctg\,x} - \sqrt{\ln(1+x^{2})}$; $y' = \left(e^{arctg\,x} - \sqrt{\ln(1+x^{2})}\right)' = \left(e^{arctg\,x}\right)' - \left(\sqrt{\ln(1+x^{2})}\right)' =$

$$= e^{arctg\,x}\cdot(arctg\,x)' - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x^{2})}}\left(\ln(1+x^{2})\right)' =$$
$$= \left(1/(1+x^{2})\right)\left(e^{arctg\,x} - x/\sqrt{\ln(1+x^{2})}\right).$$

Результати досліджень зведено в таблицю 9.1.

Таблиця 9.1 – Основні формули похідних

№ п/п	Функція	Похідна
1	Стала функція	$C' = 0$
2	Степенева функція	$\left(u^a\right)' = a u^{a-1} \cdot u'$
2а	x	$x' = 1$
2б	$\sqrt{u}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
2в	$\frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
3	Показникова функція	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
3а	Експонента	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
4	Логарифмічна функція	$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
4а	Натуральний логарифм	$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5	Синус	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
6	Косинус	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
7	Тангенс	$\left(tg\ u\right)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
8	Котангенс	$\left(ctg\ u\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
9	Арксинус	$\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
10	Арккосинус	$\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11	Арктангенс	$\left(arctg\ u\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
12	Арккотангенс	$\left(arcctg\ u\right)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13	Показниково-степенева функція	$\left(u^v\right)' = v u^{v-1} \cdot u' + \ + u^v \ln u \cdot v'$

ЛЕКЦІЯ 10
ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ВЛАСТИВОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛУ. ІНВАРІАНТНІСТЬ ФОРМИ ДИФЕРЕНЦІАЛУ. ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ПОХІДНА ПАРАМЕТРИЧНО ЗАДАНОЇ ФУНКЦІЇ

10.1 Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

тоді можна записати:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \text{ де } \alpha\to 0, \text{ при } \Delta x\to 0,$$

або:

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x.$$

Величина $\alpha\Delta x$- нескінченно мала більш високого порядку, ніж $f'(x)\Delta x$, тобто $f'(x)\Delta x$ – головна частина приросту Δy.

Означення. Диференціалом функції $f(x)$ в точці x зветься головна лінійна частина приросту функції.

Позначається dy або $df(x)$:

$$dy = f'(x)dx.$$

З означення диференціалу одержимо наближену рівність:

$$\Delta y \approx dy,$$

яка використовується в наближених обчисленнях, якщо записати в розгорнутому вигляді:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

або

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt{17}$. Запишемо так:

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1}, \text{ тоді } x = 16, \quad \Delta x = 1$$

$$\sqrt{17} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}\cdot 1 = 4 + \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Геометричний зміст диференціалу

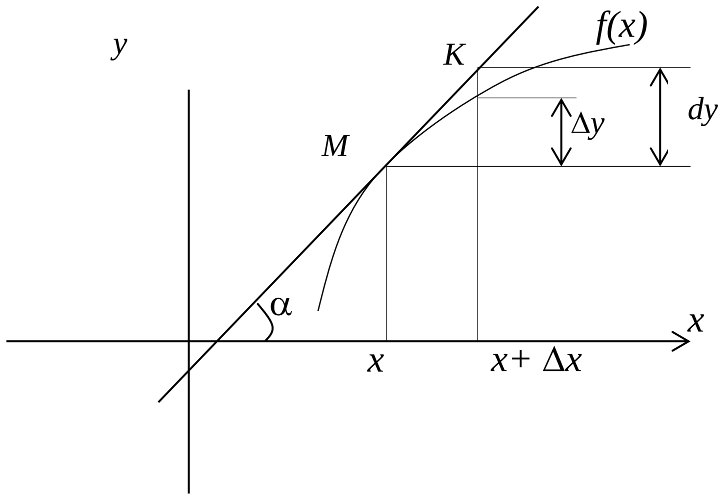


Рисунок 10.1

В трикутнику Δ*MKL*: *KL* = *dy* = *tg*α·Δ*x* = *y*′·Δ*x*.

Таким чином, диференціал функції *f*(*x*) в точці *x* дорівнює приросту ординати дотичної до графіка функції в заданій точці (рис. 10.1).

10.2 Властивості диференціалу

Якщо *u* = *f*(*x*) і *v* = *g*(*x*) – функції, диференційовані в точці *x,* то безпосередньо із означення диференціалу маємо:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$
2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$
3) $d(Cu) = Cdu$
4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

10.3 Інваріантність форми диференціалу

Нехай $y = f(x)$, $x = g(t)$, тобто *y* – складна функція.

Тоді $dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx$.

Видно, що форма диференціалу *dy* не залежить від того, буде *x* незалежною змінною чи функцією.

10.4 Похідна та диференціал вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на деякому інтервалі $[a,b]$.

Значення похідної $y = f'(x)$, взагалі кажучи, залежать від x, тобто похідна є функцією від x. Диференціюючи її, одержимо другу похідну від функції $y = f(x)$: $y'' = (y')' = f''(x)$.

Приклад. $y = x^5$, $y' = 5x^4$, $y'' = \left(5x^4\right)' = 20x^3$, $y''' = \left(20x^3\right)' = 60x^2$.

Розглянемо тепер диференціал

$$dy = f'(x)dx.$$

Диференціал від диференціалу зветься другим диференціалом:

$$d(dy) = d^2 y\ .$$

Знайдемо його вираз:

$$d^2 y = \left[f'(x)dx \right]' dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2\ .$$

10.5 Похідна від параметрично заданої функції

Нехай задано:

$$\begin{cases} x = \psi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta\,,$$

тоді:

$$y_x{}' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi'(t)dt} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}\,.$$

Для обчислення другої похідної диференціюємо одержану рівність, враховуючи, що t є функцією від x:

$$y_x{}'' = \frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3}\,.$$

Отже:

$$y_x{}'' = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}\,.$$

Приклад. Обчислити y' та y'' параметрично заданої функції

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 \\ y = \sin t \end{cases}\,.$$

Обчислимо $x' = t^2; \quad x'' = 2t; \quad y' = \cos t; \quad y'' = -\sin t$, тоді:

$$y_x{}' = \frac{\cos t}{t^2}; \quad y_x{}'' = \frac{t^2 \cdot (-\sin t) - \cos t \cdot 2t}{\left(t^2\right)^3} = -\frac{t^2 \sin t + 2t\cos t}{t^6}\,.$$

ЛЕКЦІЯ 11
ТЕОРЕМИ ПРО ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІ ФУНКЦІЇ: РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА, КОШІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ. ЗРОСТАННЯ ТА СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ

11.1 Теореми про диференційовані функції

Теорема Ролля (про корені похідної). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована в усіх внутрішніх точках відрізку і на кінцях $x=a$ та $x=b$ обертається в нуль $(f(a)=f(b)=0)$, то всередині відрізку $[a;b]$ знайдеться принаймні одна точка $x=c$, $a<c<b$, в якій похідна $f'(x)$ дорівнює нулю, тобто $f'(c)=0$.

Доведення. В силу неперервності $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ вона приймає своє найбільше M та найменше m значення. Якщо $M=m$, то $f(x)$ – стала, але тоді в будь-якій точці $f'(x)=0$.

Нехай для визначеності $M>0$ і це значення функція приймає в точці $x=c$, тобто $f(c)=M$. Тоді $f(c+\Delta x)-f(c)\le 0$ незалежно $\Delta x>0$ чи $\Delta x<0$.

Звідси виходить, що

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0 \text{ при } \Delta x>0$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0 \text{ при } \Delta x<0.$$

Перейдемо до границі якщо $\Delta x\to 0$ $\qquad (f(a)=f(b)=0)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\le 0 \text{ при } \Delta x>0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\ge 0 \text{ при } \Delta x<0.$$

Але нерівності $f'(c)\le 0$ та $f'(x)\ge 0$ сумісні лише у випадку $f'(c)=0$.

З геометричної точки зору теорема Ролля стверджує, що якщо неперервна крива перетинає вісь Ox в точках з абсцисами a та b, то на цій кривій знайдеться хоча б одна точка з абсцисою c, в якій дотична паралельна осі Ox (рис.11.1).

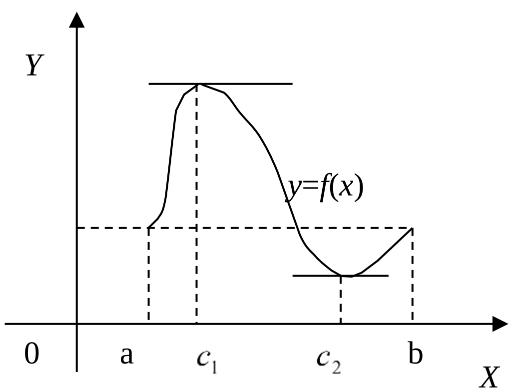


Рисунок 11.1

Зауваження. Доведена теорема лишається справедливою для функції, яка на кінцях інтервалу $[a;b]$ приймає рівні значення $f(a)=f(b)$.

Теорема Лагранжа. (теорема про скінчені прирости). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована в усіх внутрішніх точках відрізку, то всередині відрізку $[a;b]$

знайдеться принаймні одна точка $x = c$, $a < c < b$, в якій

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Доведення. Позначимо

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

і побудуємо функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a).$$

Відзначимо, що $F(a) = 0$, та $F(b) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$, тож функція $F(x)$ є неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована в усіх внутрішніх точках відрізку і на кінцях $x = a$ та $x = b$ обертається в нуль $[f(a) = f(b) = 0]$, значить задовольняє умовам теореми Ролля і тоді всередині відрізку $[a;b]$ знайдеться принаймні одна точка $x = c$, $a < c < b$, в якій $F'(c) = 0$:

$$F'(c) = f'(c) - \lambda = 0$$

$$f'(c) = \lambda$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

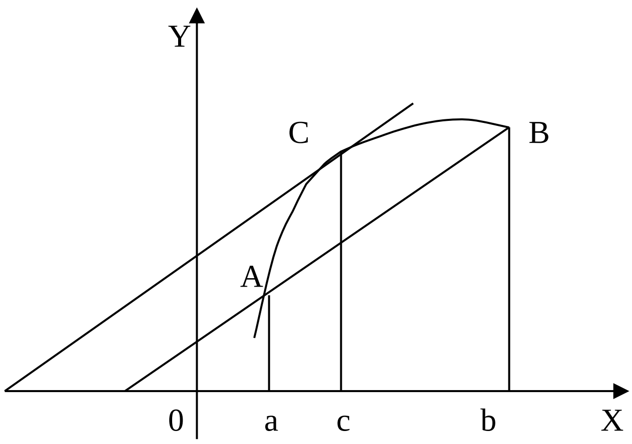


Рисунок 11.2

Геометрично теорема Лагранжа стверджує, що при виконанні умов теореми для $f(x)$ всередині відрізку $[a;b]$ знайдеться принаймні одна точка $x = c$, в якій дотична паралельна січній AB, яка проходить через кінці дуги з абсцисами a та b (рис.11.2).

Теорема Ролля випливає з теореми Лагранжа як окремий випадок при $f(a) = f(b)$, тобто коли хорда AB паралельна осі Ox.

Теорема Коші.(про відношення приростів двох функцій) Якщо дві функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, диференційовані в усіх внутрішніх точках, причому $\varphi'(x) \neq 0$, то всередині відрізку $[a;b]$ знайдеться принаймні одна точка $x = c$ ($a < c < b$), в якій виконується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Доведення. Позначимо

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

і побудуємо функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \lambda(\varphi(x) - \varphi(a)).$$

Очевидно, що $F(a)=0$ та $F(b)=0$, тож функція $F(x)$ є неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована в усіх внутрішніх точках відрізку і на кінцях $x=a$ та $x=b$ обертається в нуль $[f(a)=f(b)=0]$, значить, задовольняє умовам теореми Ролля і тоді всередині відрізку $[a;b]$ знайдеться принаймні одна точка $x=c$, $a<c<b$, в якій $F'(c)=0$:

$$F'(c)=f'(c)-\lambda\varphi'(c)=0$$

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lambda$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорема Коші є узагальненням теореми Лагранжа.

11.2 Правило Лопіталя розкриття невизначеностей

Теорема (правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ на деякому відрізку $[a;b]$ задовольняють умовам теореми Коши і перетворюються в нуль в точці $x=a$ тобто $f(a)=\varphi(a)=0$. Тоді якщо існує границя відношення $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x\to a$, то існує і $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доведення. Візьмемо на $[a;b]$ будь яку точку $x\neq a$. Застосуємо теорему Коші:

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \text{ де } a<c<b.$$

За умовою $f(a)=\varphi(a)=0$, тож маємо:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Оскільки $x\to a$, то і $c\to a$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Отже:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3}=\frac{5}{3}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e}.$$

Зауваження. Правило Лопіталя вживається і у випадку, коли

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \text{ та } \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0.$$

Дійсно, замінимо $x=1/z$, якщо $x\to\infty$, то $z\to 0$.

Застосуємо правило Лопіталя до відношення $\dfrac{f(1/z)}{\varphi(1/z)}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f(1/z)}{\varphi(1/z)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(1/z)(-1/z^2)}{\varphi'(1/z)(-1/z^2)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(1/z)}{\varphi'(1/z)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cos\frac{2}{x}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}2\cos\frac{2}{x}=2.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right]=\frac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)}=\frac{2}{3}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\pi-4arctgx}{\ln x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{(\pi-4arctgx)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-4\cdot 1/(1+x^2)}{1/x}=-2.$$

Зауваження. Правило Лопіталя вживається і у випадку, коли

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \text{ та } \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}}=0;$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{tg3x}{tg5x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(tg3x)'}{(tg5x)'}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\left(1/\cos^2 3x\right)\cdot 3}{\left(1/\cos^2 5x\right)\cdot 5}=\frac{3}{5}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\cos 5x)'}{(\cos 3x)'}\right)^2=\frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin 5x\cdot 5}{-\sin 3x\cdot 3}\right)^2=\frac{5}{3}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2=\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{-1}\right)^2=\frac{5}{3}.$$

11.3 Зростання та спадання функції

Теорема. Якщо функція $f(x)$ має похідну на відрізку $[a;b]$, зростає на цьому відрізку, то її похідна на відрізку $[a;b]$ невід'ємна, тобто $f'(x)\ge 0$.

Доведення. Нехай $f(x)$ зростає на відрізку $[a;b]$. Дамо аргументу x приріст Δx і розглянемо відношення

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Оскільки $f(x)$ зростає, то

$$f(x+\Delta x)>f(x) \text{ при } \Delta x>0$$

$$f(x+\Delta x)<f(x) \text{ при } \Delta x<0,$$

в обох випадках

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0,$$

Отже:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ge 0,$$

що й треба було довести.

Обернена теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована в усіх його внутрішніх точках, причому $f'(x)>0$, то $f(x)$ зростає на цьому відрізку.

Доведення. Розглянемо два будь які значення x_1 та x_2, $x_1<x_2$, що належать відрізку $[a;b]$. За теоремою Лагранжа

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1), \qquad x_1<c<x_2.$$

За умовою $f'(c)>0$, значить $f(x_2)-f(x_1)>0$, тобто $f(x)$ зростає.

Аналогічні теореми мають місце і для спадної функції.

Приклад. Визначити інтервали зростання і спадання функції: а) $y = x^4/4$; б) $y = arctg\,x$.

а) Похідна цієї функції $y'=x^3$. Коли $x>0$, то $y'>0$ – функція зростає; коли $x<0$, то $y'<0$ – функція спадає.

б) Похідна цієї функції $y'=1/(x^2+1)$ додатна при всіх $x\in(-\infty;+\infty)$. Отже, функція $y=arctg\,x$ всюди зростає.

ЛЕКЦІЯ 12
ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ. МАКСИМУМ І МІНІМУМ ФУНКЦІЇ. НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ. НАЙМЕНШЕ ТА НАЙБІЛЬШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ВІДРІЗКУ

12.1 Необхідні умови екстремуму

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = x_0$, тобто, x_0 – внутрішня точка області визначення $D(f)$.

Точка x_0 називається точкою мінімуму (відповідно точкою максимуму), якщо для всіх $x \neq x_0$ з деякого околу цієї точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (відповідно $f(x_0) > f(x)$). Точки обох типів – мінімуму $x_{\min}$ та максимуму $x_{\max}$ – називають точками екстремуму, а значення функції $y = f(x)$ в точках екстремуму – екстремальними значеннями (екстремумами) функції відповідного типу:

$$y_{\min} = f(x_{\min});\ y_{\max} = f(x_{\max}).$$

Теорема (необхідна умова екстремуму). Якщо неперервна функція $f(x)$ має в точці x_0 екстремум, то її похідна у цій точці дорівнює нулю $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Припустимо для визначеності, що в точці x_0 функція має максимум. Тоді для досить малих Δx має місце

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0),\ \text{тобто}$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0,$$

але в такому випадку знак відношення

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

визначається знаком Δx, а саме

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \ \text{при}\ \Delta x > 0$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \ \text{при}\ \Delta x < 0.$$

За означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

не залежить від знаку Δx, тому сумісне виконання нерівностей можливе лише за умови, якщо $f'(x_0) = 0$.

Аналогічно доводиться теорема у випадку мінімуму функції.

Зауваження. Зворотне твердження, взагалі кажучи, невірне, тобто якщо в точці x_0 $f'(x_0) = 0$, це ще не означає, що в цій точці буде максимум чи мінімум. В таких випадках необхідне додаткове дослідження.

12.2 Достатні умови екстремуму функції

Дослідження функції у критичних точках спирається на достатні умови екстремуму.

Теорема (достатня умова екстремуму за першою похідною). Нехай x_0 – критична точка похідної функції $f(x)$, яка диференційована в деякому околі цієї точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Якщо при переході зліва направо через цю точку:

1) похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то при $x = x_0$ функція має максимум;

2) похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, то при $x = x_0$ функція має мінімум;

3) похідна $f'(x)$ не змінює знаку, то при $x = x_0$ функція не має екстремуму.

Приклад. Дослідити функцію $y = \sqrt[3]{x^2} \big/ (x-4)$ на екстремум.

Область визначення функції:

$$D(y):\ x-4 \neq 0;\ x \neq 4;\ x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty).$$

Похідна цієї функції

$$y' = \frac{(2/3)\cdot x^{-1/3}(x-4) - \sqrt[3]{x^2}}{(x-4)^2} = -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2}.$$

Критичні точки:

а) стаціонарні точки:

$$y' = 0;\ -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2} = 0;\ \ x+8=0;\ x=-8 \in D(y);$$

б) точки розриву y': $3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0$;

$$\sqrt[3]{x} = 0 \text{ або } \sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0;\ \ x = 0 \in D(y);\ x = 4 \notin D(y).$$

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис.12.1). На кожному інтервалі визначаємо знак похідної:

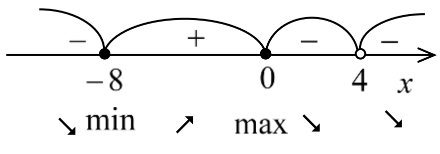


Рисунок 12.1

Функція зростає при $x \in (-8; 0)$, функція спадає при $x \in (-\infty; -8) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty)$.

Точка мінімуму $x_{\min} = -8$; точка максимуму $x_{\max} = 0$. Відповідні екстремальні значення функції:

$$y_{\min} = y(-8) = \sqrt[3]{(-8)^2} \big/ (-8-4) = -1/3;\ y_{\max} = y(0) = 0.$$

12.3 Найменше та найбільше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді за відповідною властивістю на цьому відрізку вона досягає найбільшого і найменшого значень, які відповідно називають глобальним (абсолютним) максимумом і мінімумом даної функції $f(x)$ на вказаному відрізку $[a;b]$. Ці значення можуть досягатися на кінцях відрізка або у внутрішніх точках, які є точками екстремуму функції. Звідси випливає:

Правило знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$:

1) знайти всі критичні точки першої похідної $f'(x)$, що лежать усередині відрізка $[a;b]$;

2) обчислити значення функції $f(x)$ в знайдених критичних точках і на кінцях відрізка;

3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше і найменше.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^3/3 - 4x^2$ на відрізку $[-3;3]$..

Похідна цієї функції $y' = x^2 - 8x$.

Критичні точки:

а) стаціонарні точки:

$$y' = 0;\quad x^2 - 8x = 0;\quad x(x-8) = 0;$$

$$x = 0 \in [-3;3] \text{ або } x - 8 = 0;\ x = 8 \notin [-3;3];$$

б) точки розриву y': немає.

Обчислимо значення функції: $y(0) = 0$;

$$y(-3) = (-3)^3/3 - 4\cdot(-3)^2 = -45;\ y(3) = 3^3/3 - 4\cdot 3^2 = -27.$$

Таким чином, найбільше значення $\max\limits_{x\in[-3;3]} y = y(0) = 0$ і найменше значення $\min\limits_{x\in[-3;3]} y = y(-3) = -45$.

ЛЕКЦІЯ 13
УМОВИ ОПУКЛОСТІ ТА УГНУТОСТІ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ ТА НАЯВНОСТІ ПЕРЕГИНУ. АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

13.1 Умови опуклості та угнутості графіка функції та наявності перегину

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $(a;b)$ і в точці $x_0 \in (a;b)$ має скінченну похідну. Тоді до графіка даної функції у точці $M_0(x_0\,; f(x_0))$ можна провести дотичну.

Крива (графік функції) називається опуклою в точці x_0, якщо в деякому околі цієї точки вона розташована нижче дотичної, проведеної в точці x_0 (рис. 13.1). Якщо крива розташована вище дотичної, то вона називається угнутою (рис. 13.2).

Точка $M_0(x_0\,; f(x_0))$ називається точкою перегину, якщо у досить малому її околі точки кривої з абсцисами $x < x_0$ лежать з одного боку від дотичної, а точки з абсцисами $x > x_0$ – з іншого (рис. 13.3). Тобто, у точці M_0 крива переходить а одного боку дотичної до іншого.

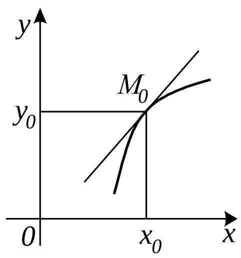


Рисунок 13.1

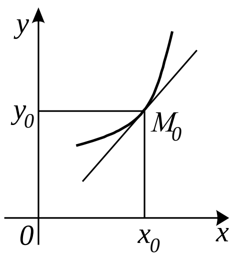


Рисунок 13.2

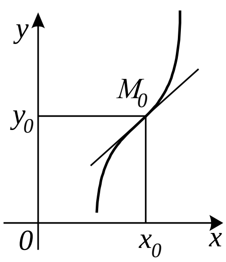


Рисунок 13.3

Крива (графік функції) називається опуклою на інтервалі $(a;b)$, якщо вона опукла в кожній його точці. Тобто, на цьому інтервалі крива лежить нижче кожної своєї дотичної.

Аналогічно, на інтервалі вгнутості крива лежить вище кожної своєї дотичної.

Точка перегину – це точка кривої, в якій сполучається ділянка опуклості з ділянкою вгнутості.

Теорема (достатні умови опуклості та вгнутості). Нехай на інтервалі $(a;b)$ задана двічі диференційована функція $f(x)$. Якщо для всіх $x \in (a;b)$ друга похідна $f''(x) < 0$, то графік функції опуклий.

Доведення. Візьмемо в інтервалі $(a;b)$ довільну точку $x = x_0$ і проведемо дотичну до кривої в цій точці. Теорема буде доведена, якщо ми покажемо, що на інтервалі $(a;b)$ всі точки кривої лежать нижче цієї дотичної.

Рівняння кривої

$$y = f(x),$$

Рівняння дотичної

$$\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

або

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Розглянемо різницю ординат кривої та дотичної:

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Застосуємо теорему Лагранжа до різниці $f(x) - f(x_0)$:

$$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \text{ де } x_0 < c < x,$$

або

$$y - \bar{y} = \left[f'(c) - f'(x_0)\right](x - x_0).$$

До виразу в квадратних дужках знову застосуємо теорему Лагранжа:

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \text{ де } x_0 < c_1 < c < x.$$

В правій частині рівності $x - x_0 > 0, \quad c - x_0 > 0$, та за умовою $f''(c_1) < 0$, тож маємо

$$y - \bar{y} < 0,$$

тобто графік функції опуклий.

Теорема (необхідні умови точки перегину). Якщо $M_0(x_0; y_0)$ – точка перегину графіка функції $f(x)$, то друга похідна $f''(x)$ в точці x_0 або існує і дорівнює нулю $f''(x_0) = 0$, або не існує.

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці друга похідна $f''(x)$ або існує і дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається критичною точкою другої похідної.

Теорема. (достатня умова точки перегину). Нехай x_0 – критична точка другої похідної функції $f(x)$, яка двічі диференційована в деякому околі цієї точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Якщо при переході через цю точку:

1) друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то при $x = x_0$ функція має перегин;

2) знак другої похідної $f'(x)$ не змінюється, то при $x = x_0$ функція перегину не має.

Приклад. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції $y = \ln(x^2 + 9)$.

Область визначення функції:

$$D(y): \ x^2 + 9 > 0; \ x \in (-\infty; +\infty).$$

Знаходимо другу похідну:

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 9}; \quad y'' = 2 \cdot \frac{x^2 + 9 - 2x \cdot x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{2(9 - x^2)}{(x^2 + 9)^2}.$$

Критичні точки другої похідної:

а) $y''=0$; $\dfrac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}=0$; $9-x^2=0$; $x=\pm 3\in D(y)$;

б) точки розриву y'': $(x^2+9)^2=0$; $x\in\varnothing$.

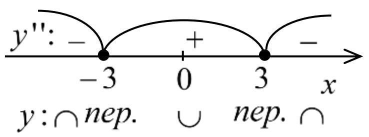


Рисунок 13.4

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 13.4). На кожному інтервалі, визначаємо знак другої похідної.

Функція опукла при $x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; функція вгнута при $x\in(-3;3)$.

Перегин при $x_1=-3$ і $x_2=3$. Тоді

$$y_1=\ln((-3)^2+9)=\ln 18;\ y_2=\ln(3^2+9)=\ln 18.$$

Отже, $M_1(-3;\ln 18)$ і $M_2(3;\ln 18)$ – точки перегину.

13.2 Асимптоти графіка функції

Асимптотою графіка функції $y=f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається гілка графіка, що йде в нескінченність. Тобто, відстань від змінної точки $M(x;f(x))$ до цієї прямої прямує до нуля, якщо вказана точка рухається вздовж графіка до нескінченності.

Зауваження. Крива може перетинати свою асимптоту, причому неодноразово.

Асимптоти бувають двох видів: вертикальні й похилі (зокрема, горизонтальні)

а) Вертикальна асимптота має рівняння $x=a$, де a – точка, в якій хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ нескінченна.

Приклад. Знайти вертикальні асимптоти графіка функції $y=\ln(x+3)/(x^2-16)$.

Область визначення функції:

$$D(y):\ \begin{cases} x+3>0 \\ x^2-16\neq 0; \end{cases} \begin{cases} x>-3 \\ x\neq\pm 4; \end{cases}\quad x\in(-3;4)\cup(4;+\infty).$$

$x_1=-3$ і $x_2=4$ – точки, що “підозрілі” на вертикальні асимптоти.

$$\Rightarrow x=-3\ \lim_{x\to -3+0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right)=\left|-\infty/(-7)\right|=+\infty$$

– вертикальна асимптота.

$$\lim_{x\to 4-0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right)=\left|\ln 7/(-0)\right|=-\infty \text{ і}$$

$$\lim_{x\to 4+0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right)=\left|\ln 7/(+0)\right|=+\infty\Rightarrow x=4$$

– вертикальна асимптота.

б) Похила (зокрема, горизонтальна) асимптота. Нехай функція $y=f(x)$ має при $x\to+\infty$ похилу асимптоту, рівняння якої $y=kx+b$ (рис. 13.5).

Нехай $M(x,y)$ - точка, яка лежить на кривій, а $N(x,\bar{y})$ - точка, яка лежить на асимптоті. MP - відстань від точки M до асимптоти. За умовою

$$\lim_{x\to+\infty} MP = 0.$$

В трикутнику ΔNMP знайдемо:

$$NM = \frac{MP}{\cos\varphi}.$$

Оскільки φ - сталий кут, то

$$\lim_{x\to+\infty} NM = 0.$$

Але $NM = |QM - QN| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx+b)|$, звідки

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - kx - b\right] = 0.$$

Визначимо тепер k та b. Винесемо x за дужки:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Оскільки $x \to +\infty$, то має виконуватися рівність

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0,$$

звідки

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0,$$

або

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Знаючи k знаходимо b :

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - kx\right].$$

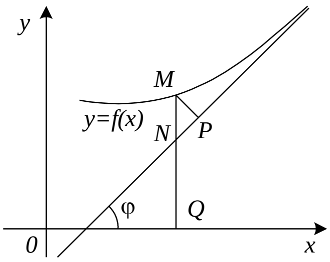


Рисунок 13.5

Отже, числа k і b знаходяться як границі:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)/x\right);\ b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right),$$

де спочатку обчислюється k, а потім b.

Навпаки, якщо існують указані границі для визначення k і b, то має місце рівність $\lim\limits_{x\to+\infty} MP = 0$ і пряма $y = kx + b$ є похила асимптота. Якщо хоча б одна з двох границь для k і b не існує, то відповідної похилої асимптоти крива не має.

Приклад. Знайти похилі асимптоти графіка функції $y = \ln\left(e^{2x} + e^{-3}\right)$.

Область визначення функції:

$$D(y):\ e^{2x} + e^{-3} > 0;\ \ x \in (-\infty; +\infty).$$

Оскільки крива має ліву при $x \to -\infty$ і праву при $x \to +\infty$ нескінченні гілки, то можуть існувати обидві – ліва і права – похилі асимптоти.

Шукаємо ліву похилу асимптоту:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)}{x}=\left|\frac{-3}{-\infty}\right|=0;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)=-3.$$

Отже, пряма $y=-3$ – ліва горизонтальна асимптота.

Шукаємо праву похилу асимптоту:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln(e^{2x}+e^{-3})\right)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}+e^{-3}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)'}{\left(e^{2x}+e^{-3}\right)'}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}\cdot 2}=2;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)-2x\right)=|\infty-\infty|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)-\ln e^{2x}\right)=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+e^{-3}}{e^{2x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}+e^{-3}\right)'}{\left(e^{2x}\right)'}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}\cdot 2}=\ln 1=0.$$

Отже, пряма $y=2x$ – права похила асимптота.

Приклад. Знайти асимптоти функції $y=(x^2+3x-1)/x$.

Область визначення функції:

$$D(y):\ x\neq 0;\ \ x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

$x=0$ – точка, що “підозріла” на вертикальну асимптоту.

$$\lim_{x\to-0}\left((x^2+3x-1)/x\right)=\left|-1/(-\infty)\right|=+\infty \text{ і}$$

$$\lim_{x\to+0}\left((x^2+3x-1)/x\right)=\left|-1/(+\infty)\right|=-\infty\ \Rightarrow\ x=0 \text{ – вертикальна асимптота.}$$

Шукаємо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x-1}{x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left((x^2+3x-1)/x-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(3-1/x)=3\ \Rightarrow\ y=x+3$$

– похила асимптота.

ЛЕКЦІЯ 14
ЗАГАЛЬНА СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВИ ГРАФІКА

Нехай функція задана явно рівнянням $y = f(x)$. Повне дослідження цієї функції та побудову графіка можна здійснювати за наступною схемою:

– знаходження області визначення $D(f)$ функції;

– знаходження точок перетину графіка з осями координат;

– дослідження функції на парність і непарність;

– дослідження функції на періодичність;

– дослідження точок розриву функції; знаходження вертикальних асимптот;

– знаходження інтервалів зростання та спадання функції;

– знаходження точок екстремуму та відповідних екстремальних значень функції;

– знаходження інтервалів опуклості та вгнутості функції;

– побудова похилих асимптот;

– побудова графіка.

Приклад. Дослідити функцію $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ і побудувати графік.

Область визначення функції $D(f): x \in R$.

Точки перетину графіка функції:

з віссю Oy: $y(0) = (6 \cdot 0 - 0)^{1/3} = 0$;

з віссю Ox: $y = 0$; $\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3} = 0$; $6x^2 - x^3 = 0$; $x^2(6 - x) = 0$; $x = 0$; $x = 6$; маємо дві точки $(0;0)$ і $(6;0)$.

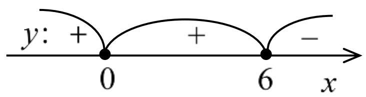


Рисунок 14.1

Інтервали знакосталості, де функція додатна чи від'ємна (рис. 14.1): функція від'ємна при $x \in (6;+\infty)$; функція додатна при $x \in (-\infty;0) \cup (0;6)$.

$y(-x) \neq y(x)$; $y(-x) \neq -y(x)$ – функція не є ані парною, ані непарною.

Функція неперіодична.

Точок розриву функція не має, тому вертикальні асимптоти відсутні.

Досліджуємо поведінку функції при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} (6x^2 - x^3)^{1/3} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} (6x^2 - x^3)^{1/3} = -\infty.$$

Область значень функції $E(f): y \in R$.

Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} (6/x - 1)^{1/3} = -1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3} + x\right) = \left|\infty - \infty\right| =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2 - x^3 + x^3}{\left(6x^2 - x^3\right)^{2/3} - x\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3} + x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= 6 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\left(6/x - 1\right)^{2/3} - \left(6/x - 1\right)^{1/3} + 1} == 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 .$$

Отже, пряма $y = -x + 2$ є похила асимптота.

Обчислимо похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y' = (\sqrt[3]{6x^2 - x^3})' = (4 - x)\Big/\sqrt[3]{x(6 - x)^2} ;$$

стаціонарні точки: $y' = 0$; $(4 - x)\Big/\sqrt[3]{x(6 - x)^2} = 0$; $x = 4$;

похідна не існує у точках: $\sqrt[3]{x(6 - x)^2} = 0$; $x = 0$ і $x = 6$.

Інтервали монотонності та екстремуми (рис. 14.2): функція спадає при $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; функція зростає при $x \in (0; 4)$; точка мінімуму $x_{\min} = 0$; точка максимуму $x_{\max} = 4$; відповідні екстремальні значення функції

$$y_{\min} = y(0) = 0; \quad y_{\max} = y(4) = \sqrt[3]{6 \cdot 4^2 - 4^3} = 2\sqrt[3]{4} .$$

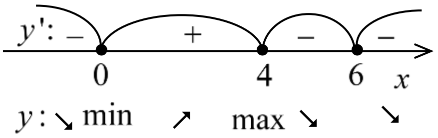


Рисунок 14.2

Обчислимо другу похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y'' = -8\Big/\left(x^{4/3}(6 - x)^{5/3}\right);$$

точки, де $y'' = 0$, відсутні; друга похідна не існує у точках: $x^{4/3}(6 - x)^{5/3} = 0$; $x = 0$ і $x = 6$.

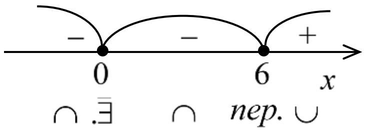


Рисунок 14.3

Інтервали опуклості й угнутості та точки перегину (рис. 14.3): функція опукла при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$; функція вгнута при $x \in (6; +\infty)$;

$x_{пер} = 6$; $y_{пер} = y(6) = \; = \sqrt[3]{6 \cdot 6^2 - 6^3} = 0$. Отже, (6; 0) – точка перегину.

Графік дослідженої функції побудовано на рисунку 14.4.

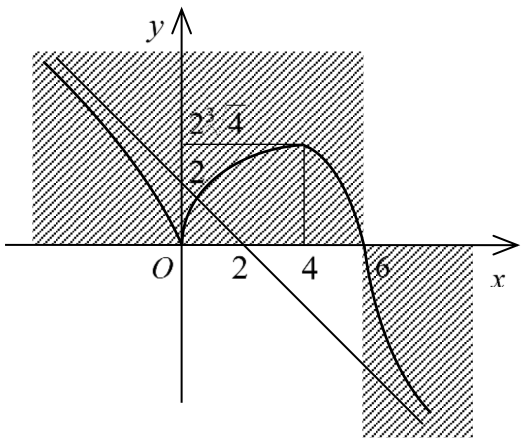


Рисунок 14.4

ЛЕКЦІЯ 15
ПОНЯТТЯ ВИЗНАЧНИКА. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКА. ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКА

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x+2y=4 \end{cases}.$$

Помножимо перше рівняння на 2, а друге – на (-3) і складемо, чим виключимо невідому y:

$$\begin{cases} 2x+3y=7 & \vert\, 2 \\ x+2y=4 & \vert -3 \end{cases}$$

$$(2\cdot 2+1\cdot(-3))x = 7\cdot 2+4\cdot(-3).$$

Звідки знайдемо невідому x:

$$x=\frac{7\cdot 2-4\cdot 3}{2\cdot 2-1\cdot 3}=\frac{2}{1}=2.$$

Вирази в чисельнику чи знаменнику можна записати у вигляді таблиці:

$$2\cdot 2-1\cdot 3=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ця таблиця і являє собою визначник.

15.1 Поняття визначника

Визначником (детермінантом) n-го порядку називається число Δ_n, яке записується у вигляді квадратної таблиці

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

що має n рядків і n стовпців.

Числа a_{ij} $\left(i, j=\overline{1, n}\right)$ називаються елементами визначника. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ називається головною діагоналлю, а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$ – побічною діагоналлю визначника.

15.2 Обчислення визначника

Визначник першого порядку Δ_1 $(n=1)$ дорівнює самому елементу a_{11}:

$$\Delta_1=a_{11}.$$

Визначник n-го порядку Δ_n $(n\geq 2)$ дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

(розклад визначника за елементами першого рядка).

Із загального правила можна одержати спрощені співвідношення для визначників другого та третього порядків:
визначник другого порядку Δ_2 обчислюється за формулою:

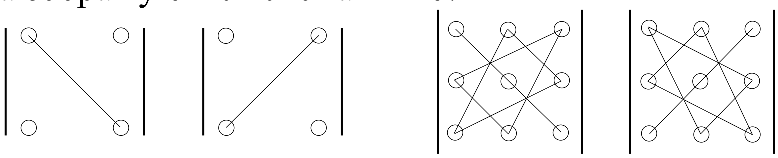
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

визначник третього порядку Δ_3 обчислюється за формулою:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} -$$

$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}\, a_{11}$$

Ці правила зображуються схематично:



"+" "-" "+" "-"

Приклад. Обчислити визначник другого порядку $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - (-4) \cdot 3 = 2 \ .$$

Приклад. Обчислити визначник третього порядку за правилом “трикутників”.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 9 + 3 \cdot 3 \cdot 2 +$$

$$+ (-1) \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 9 - 3 \cdot 4 \cdot 2 =$$

$$= -36 + 18 - 20 + 20 + 27 - 24 = -15 \ .$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку Δ_n називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержується з визначника Δ_n видаленням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$.

Приклад. Знайти мінор M_{23} і алгебраїчне доповнення A_{23} елемента a_{23} даного визначника:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$a_{23} = -1 \ ; \ M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 0 - (-4)\cdot 6 = 24;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)\cdot 24 = -24 .$$

Приклад. Обчислити визначник третього порядку за правилом “трикутників”.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 9 + 3\cdot 3\cdot 2 +$$

$$+ (-1)\cdot 4\cdot 5 - 5\cdot(-2)\cdot 2 - 3\cdot(-1)\cdot 9 - 3\cdot 4\cdot 2 =$$

$$= -36 + 18 - 20 + 20 + 27 - 24 = -15 .$$

Повернемось до обчислення визначника. Розглянемо визначник третього порядку:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} .$$

Узагальнюючи, стверджуємо, що визначник n-го порядку Δ_n $(n \ge 2)$ дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

(розклад визначника за елементами першого рядка).

Приклад. Обчислити визначник третього порядку, розклавши його за елементами першого рядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} .$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(2-0) - 2(-1-0) - 4(-3+10) = -32 .$$

15.3 Властивості визначника

Сума добутків елементів будь-якого рядка на їх алгебраїчні доповнення не залежить від номера рядка і дорівнює значенню визначника:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

– розклад визначника за i -м рядком;

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

– розклад визначника за j -м стовпцем.

Наслідок. Визначник з нульовим рядком дорівнює нулю.

Значення визначника не зміниться після заміни всіх його рядків відповідними стовпцями і навпаки.

Операція заміни всіх рядків визначника Δ_n відповідними стовпцями і навпаки називається транспонуванням визначника. Отриманий визначник Δ_n^T називається транспонованим,

Якщо поміняти місцями два паралельних рядки, то визначник змінить знак на протилежний, не змінившись за абсолютною величиною.

Спільний множник елементів будь-якого рядка можна виносити за знак визначника.

Іншими словами, щоб помножити визначник на деяке число, треба на це число помножити всі елементи одного довільно вибраного рядка.

Визначник, у якого елементи двох паралельних рядків відповідно пропорційні (або рівні), дорівнює нулю.

Значення визначника не зміниться, якщо до всіх елементів якого-небудь рядка додати відповідні елементи іншого паралельного йому рядка, помножені на одне і те саме число.

ЛЕКЦІЯ 16
СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ КРАМЕРА

16.1 Система лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Якщо в правих частинах стоять нулі ($b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$), система зветься однорідною.

16.2 Розв'язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

Повернемось до системи

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}.$$

Ми з'ясували, що

$$x = \frac{7 \cdot 2 - 4 \cdot 3}{2 \cdot 2 - 1 \cdot 3} = \frac{2}{1} = 2,$$

а за допомогою визначників

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7 \cdot 2 - 4 \cdot 3}{2 \cdot 2 - 1 \cdot 3} = \frac{2}{1} = 2.$$

Аналогічно

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 7}{2 \cdot 2 - 1 \cdot 3} = \frac{1}{1} = 1.$$

Узагальнимо.

Теорема (правило Крамера). Якщо визначник квадратної системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою

$$x_j = \Delta_n^{(j)} / \Delta_n \quad , \qquad j = \overline{1,n} \quad ,$$

де $\Delta_n^{(j)}$ – допоміжний визначник, одержаний з основного визначника Δ_n заміною j-го стовпця стовпцем вільних членів

$$\Delta_n^{(j)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} \dots a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Приклад. Розв'язати квадратну систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = -3 \\ 2x - y + 3z = -4 \end{cases} .$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 ; \; \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0 ; \; \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 8 ;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1 ; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{-4} = 0 ; \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{8}{-4} = -2 .$$

ЛЕКЦІЯ 17
СКАЛЯРНІ ТА ВЕКТОРНІ ВЕЛИЧИНИ. ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. ВЛАСТИВОСТІ ВЕКТОРІВ. РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА ЗА БАЗИСОМ КООРДИНАТНИХ ОРТІВ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ, ЗАДАНИМИ СВОЇМИ КООРДИНАТАМИ

17.1 Скалярні та векторні величини. Поняття вектора

Для характеристики ряду фізичних величин, які описуються не лише числовим значенням, а й напрямом застосовуються вектори.

Означення. Вектором будемо називати направлений відрізок. До векторів відноситься і нульовий вектор, у якого початок і кінець співпадають.

Означення. Вектори звуться колінеарними, якщо вони розміщені на одній або на паралельних прямих.

Означення. Вектори звуться компланарними, якщо існує площина, до якої вони паралельні.

Означення. Вектори звуться рівними, якщо вони колінеарні, однаково направлені і мають однакову довжину.

Вектори задаються з точністю до паралельного переносу.

17.2 Лінійні операції над векторами

Добуток вектора на число (рис.17.1).

Рисунок 17.1

Сума векторів (рис.17.2).

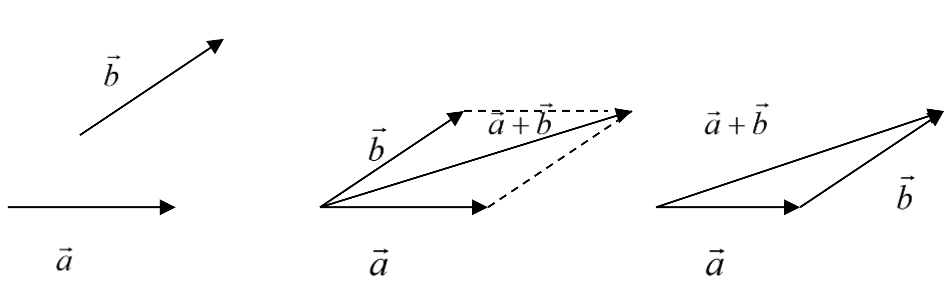


Рисунок 17.2

17.3 Властивості векторів

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - комутативність;

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$;

5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – асоціативність;

6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ – дистрибутивність;

7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.

Означення.

Базисом у просторі звуться будь-які три некомпланарні вектори, взяті в певному порядку.

Базисом на площині звуться будь-які два неколінеарні вектори, взяті в певному порядку.

Базисом на прямій буде будь-який ненульовий вектор.

Означення. Якщо $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ – базис у просторі і $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}$, то числа α, β і γ – звуться компонентами або координатами вектора $\vec{a}$ в цьому базису.

В зв'язку з цим можна записати наступні властивості:

– рівні вектори мають однакові координати;

при множенні вектора на число його координати також перемножуються на це число:

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}) = (\lambda\alpha)\overrightarrow{e_1} + (\lambda\beta)\,\overrightarrow{e_2} + (\lambda\gamma)\,\overrightarrow{e_3} ;$$

– при додаванні векторів додаються їх відповідні координати:

$$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3} ;\ \vec{b} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3} ;$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overrightarrow{e_3} .$$

17.4 Розкладання вектора за базисом координатних ортів

Лінійна незалежність векторів

Означення. Вектори $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ звуться лінійно залежними, якщо існує така лінійна комбінація $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, при не рівних нулю одночасно α_i , тобто $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Якщо ж тільки при $\alpha_i = 0$ виконується $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, то вектори звуться лінійно незалежними.

Властивості:

Якщо серед векторів $\overrightarrow{a_i}$ є нульовий вектор, то ці вектори лінійно залежні.

Якщо до системи лінійно залежних векторів додати один або декілька векторів, то одержана система буде лінійно залежна.

Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли один з векторів розкладається в лінійну комбінацію решти векторів.

Будь-які два колінеарні вектори лінійно залежні і, навпаки, будь-які два лінійно залежні вектори колінеарні.

Будь-які три компланарні вектори лінійно залежні і, навпаки, будь-які три лінійно залежні вектори компланарні

Будь-які чотири вектори лінійно залежні.

Приклад. Задано вектори $\vec{a}$(1; 2; 3), $\vec{b}$(-1; 0; 3), $\vec{c}$(2; 1; -1) і $\vec{d}$(3; 2; 2) в деякому базису. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базису.

Вектори утворюють базис, якщо вони, лінійно незалежні. Інакше кажучи, якщо рівняння, які входять до системи

$$\begin{cases}\alpha-\beta+2\gamma=0\\ 2\alpha+0\cdot\beta+\gamma=0\\ 3\alpha+3\beta-\gamma=0\end{cases}$$ лінійно незалежні.

Тоді $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$.

Ця умова виконується, якщо визначник системи відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&0&1\\3&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&0\\3&3\end{vmatrix}=-3+(-2-3)+12=4\neq 0.$$

$$\begin{cases}\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1=d_1\\ \alpha a_2+\beta b_2+\gamma c_2=d_2\\ \alpha a_3+\beta b_3+\gamma c_3=d_3\end{cases}$$

Для розв'язування системи скористуємось методом Крамера.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&2\\2&0&1\\2&3&-1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&1\\3&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\2&-1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&0\\2&3\end{vmatrix}=3(-3)+(-2-2)+12=-1.$$

$$\alpha=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-1/4;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&2&1\\3&2&-1\end{vmatrix}=(-2-2)-3(-2-3)+2(4-6)=-4+15-4=7;$$

$$\beta=\frac{\Delta_2}{\Delta}=7/4;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&3\\2&0&2\\3&3&2\end{vmatrix}=-6+(4-6)+18=10;$$

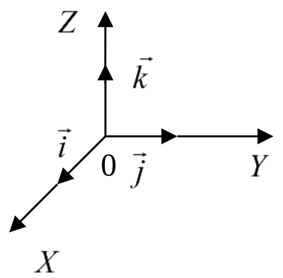
$$\gamma=\frac{\Delta_3}{\Delta}=5/2;$$

отже, координати вектора $\vec{d}$ в базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{d}$ { -1/4, 7/4, 5/2}.

Координати вектора. Одиничні орти.
Розкладання вектора за одиничними ортами.

Означення. Базис зветься ортонормованим, якщо його вектори попарно ортогональні і дорівнюють одиниці.

Одиничні орти – це вектори одиничної довжини і направлені вздовж координатних осей (рис.17.3).



$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

Рисунок 17.3

Координати вектора на площині.

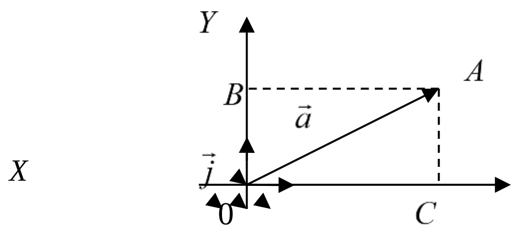


Рисунок 17.4

Позначимо $\begin{array}{l} |OC| = np_x\vec{a} = a_x \\ |OB| = np_y\vec{a} = a_y \end{array}$

Тоді вектори $\vec{OC} = a_x\vec{i}, \quad \vec{OB} = a_y\vec{j}$,

а їх сума $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ (рис. 17.4)

Координати вектора у просторі (рис. 17.5).

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

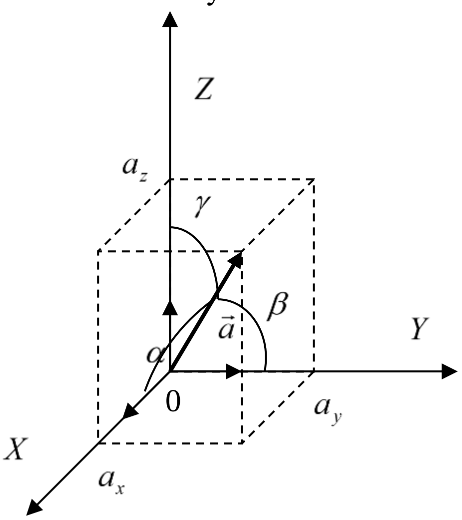


Рисунок 17.5

Довжина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Довжина вектора в координатах визначається як відстань між точками початку і кінця вектора. Якщо задано дві точки у просторі

$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$,

то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Направляючі косинуси вектора

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

17.5 Дії над векторами, заданими своїми координатами

Лінійні операції:
сума векторів $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ та $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + \left(a_y + b_y\right)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k};$$

добуток вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ на число λ:

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}$$

ЛЕКЦІЯ 18
СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ. ОБЧИСЛЕННЯ СКАЛЯРНОГО ДОБУТКУ ВЕКТОРІВ, ЗАДАНИХ СВОЇМИ КООРДИНАТАМИ. ВЛАСТИВОСТІ ТА ОБЧИСЛЕННЯ ВЕКТОРНОГО ДОБУТКУ ВЕКТОРІВ

18.1 Скалярний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

$$(\vec{a}\,.\,\vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$

Властивості скалярного добутку:

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$;

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$ чи $\vec{a}=0$, або $\vec{b} = 0$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;

$(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

18.2 Обчислення скалярного добутку векторів, заданих своїми координатами

Нехай задано $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ та $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Користуючись означенням скалярного добутку обчислимо попарні добутки одиничних ортів, наприклад

$$\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right) = \left|\vec{i}\right|\cdot\left|\vec{i}\right|\cos 0 = 1$$

$$\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right) = \left|\vec{i}\right|\cdot\left|\vec{j}\right|\cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

тоді

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) &= \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = \\ &= a_xb_x\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right) + a_xb_y\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right) + a_xb_z\left(\vec{i}\cdot\vec{k}\right) + \\ &+ a_yb_x\left(\vec{j}\cdot\vec{i}\right) + a_yb_y\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right) + a_yb_z\left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right) + \\ &+ a_zb_x\left(\vec{k}\cdot\vec{i}\right) + a_zb_y\left(\vec{k}\cdot\vec{j}\right) + a_zb_z\left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right) = \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\end{aligned},$$

Отже:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Як наслідок одержимо формулу обчислення кута між векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Зокрема, якщо вектори перпендикулярні $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

і одержуємо умову перпендикулярності векторів

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 .$$

Якщо ж вектори паралельні, то їх координати пропорціональні і умова паралельності векторів запишеться так:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} .$$

Приклад Знайти (5$\vec{a}$ + 3$\vec{b}$)(2$\vec{a}$ - $\vec{b}$), якщо $|\vec{a}|=2,\quad \left|\vec{b}\right|=3,\quad \vec{a}\perp\vec{b}.$

$$10(\vec{a}\cdot\vec{a})-5(\vec{a}\cdot\vec{b})+6(\vec{a}\cdot\vec{b})-3(\vec{b}\cdot\vec{b}) = 10|\vec{a}|^2-3\left|\vec{b}\right|^2=40-27=13 ,$$

оскільки $(\vec{a}\cdot\vec{a})=|\vec{a}|^2=4,\quad (\vec{b}\cdot\vec{b})=\left|\vec{b}\right|^2=9,\quad (\vec{a}\cdot\vec{b})=0$.

Приклад Знайти кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$.

Запишемо: $\vec{a}$ = (1, 2, 3), $\vec{b}$ = (6, 4, -2), ($\vec{a}\cdot\vec{b}$)= 6 + 8 – 6 = 8.

$$|\vec{a}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14};\qquad \left|\vec{b}\right|=\sqrt{36+16+4}=\sqrt{56} .$$

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}}=\frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7};\qquad \varphi=\arccos\frac{2}{7}.$$

Приклад. Знайти скалярний добуток (3$\vec{a}$ - 2$\vec{b}$)·(5$\vec{a}$ - 6$\vec{b}$), якщо $|\vec{a}|=4,\quad \left|\vec{b}\right|=6,\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=\pi/3.$

$$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b})=15(\vec{a}\cdot\vec{a})-18(\vec{a}\cdot\vec{b})-10(\vec{a}\cdot\vec{b})+12(\vec{b}\cdot\vec{b}) =$$

$$15|\vec{a}|^2-28|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{3}+12\left|\vec{b}\right|^2=15\cdot16-28\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2}+$$

$$+ 12\cdot36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

Приклад. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

Запишемо: $\vec{a}$ = (3, 4, 5), $\vec{b}$ = (4, 5, -3), ($\vec{a}\cdot\vec{b}$)= 12 + 20 - 15 =17 ;

$$|\vec{a}|=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50};\qquad \left|\vec{b}\right|=\sqrt{16+25+9}=\sqrt{50} .$$

$$\cos\varphi = \frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}}=\frac{17}{50};\qquad \varphi=\arccos\frac{17}{50}.$$

Приклад. При якому λ вектори $\vec{a}=\lambda\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ перпендикулярні?

$$\vec{a} = (\lambda, 1, 0),\ \vec{b} = (3, -3, -4),$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})=3\lambda-3=0;\quad \Rightarrow \lambda=1 .$$

Приклад. Знайти скалярний добуток векторів $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ та $5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}$, якщо $|\vec{a}|=1,\quad \left|\vec{b}\right|=2,\quad |\vec{c}|=3,\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}\wedge\vec{c}=\frac{\pi}{3}.$

$$(2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c})(5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}) =$$

$$10(\vec{a}\cdot\vec{a})+12(\vec{a}\cdot\vec{b})+14(\vec{a}\cdot\vec{c})+15(\vec{a}\cdot\vec{b})+18(\vec{b}\cdot\vec{b})+21(\vec{b}\cdot\vec{c})+$$

$$+20(\vec{c}\cdot\vec{a})+24(\vec{b}\cdot\vec{c})+28(\vec{c}\cdot\vec{c})=$$

$$10(\vec{a}\cdot\vec{a})+27(\vec{a}\cdot\vec{b})+34(\vec{a}\cdot\vec{c})+45(\vec{b}\cdot\vec{c})+18(\vec{b}\cdot\vec{b})+28(\vec{c}\cdot\vec{c}) = 10 + 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.$$

18.3 Векторний добуток векторів

Означення. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ зветься вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, де φ - кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$,

$\sin\varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогональний векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Позначається: $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$ або $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, (рис.18.1).

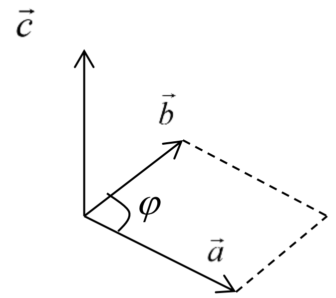


Рисунок 18.1

18.4 Властивості та обчислення векторного добутку векторів

1) $[\vec{b} \times \vec{a}] = -[\vec{a} \times \vec{b}]$;

2) $[\vec{a} \times \vec{b}] = 0$, якщо $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ чи $\vec{a} = 0$ або $\vec{b} = 0$;

3) $[(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}]$=$[\vec{a} \times (\lambda\vec{b})] = [\lambda\overrightarrow{(a \times b)}]$;

4) $[\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})]$=$[\vec{a} \times \vec{b}]$+$[\vec{a} \times \vec{c}]$;

5) Якщо задані вектори $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ та $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, то

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix};$$

6) Чисельно векторний добуток дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Приклад Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ та $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

.

Запишемо $\vec{a}$ = (2, 5, 1); $\vec{b}$ = (1, 2, -3)

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$$

Приклад. Обчислити площу трикутника з вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC} = (0-2;1-2;0-2) = (-2;-1;-2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4-2;0-2;3-2) = (2;-2;1)$$

$$[\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) +$$

$$+\vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$$\left|[\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}]\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}.\ S_{\Delta} = \frac{\sqrt{65}}{2}\ (\text{од}^2).$$

Приклад Знайти площу паралелограму, побудованого на векторах $\vec{a}+3\vec{b};\quad 3\vec{a}+\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1;\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = 30^0.$

$$[(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})] = 3[\vec{a}\times\vec{a}] + [\vec{a}\times\vec{b}] + 9[\vec{b}\times\vec{a}] + 3[\vec{b}\times\vec{b}] = -[\vec{b}\times\vec{a}] + 9[\vec{b}\times\vec{a}] = 8[\vec{b}\times\vec{a}]$$

$$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0 = 4\ (\text{од}^2).$$

ЛЕКЦІЯ 19
МІШАНИЙ ДОБУТОК ТРЬОХ ВЕКТОРІВ. ВЛАСТИВОСТІ МІШАНОГО ДОБУТКУ, УМОВА КОМПЛАНАРНОСТІ ТРЬОХ ВЕКТОРІВ

19.1 Мішаний добуток векторів

Означення. Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ зветься число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на вектор, який дорівнює векторному добутку векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Позначається $(\vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{c}])$ або $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Мішаний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ за модулем дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис.19.1).

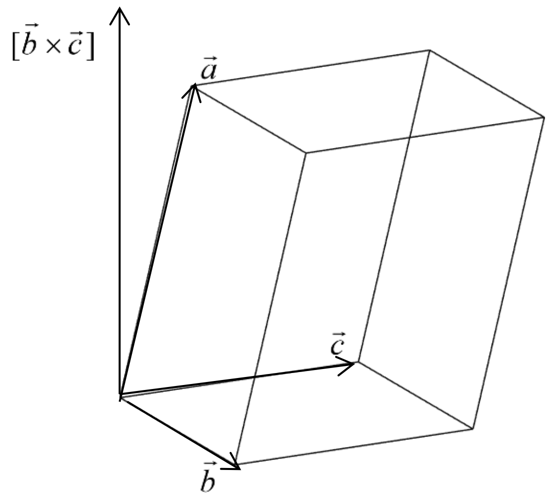


Рисунок 19.1

19.2 Властивості мішаного добутку, умова компланарності трьох векторів

1) Мішаний добуток векторів дорівнює нулю, якщо
а) хоча б один з векторів дорівнює нулю;
б) два з векторів колінеарні;
в) вектори компланарні.

2) $[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{c}]$;

3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;

4) $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$;

5) Об'єм трикутної піраміди, утвореної векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, дорівнює

$$\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|;$$

6) Якщо $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Приклад. Довести, що точки A(5; 7; -2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежать в одній площині.

Знайдемо координати векторів:
$$\overrightarrow{AB}=(-2;-6;1)$$
$$\overrightarrow{AC}=(4;-3;-2)$$
$$\overrightarrow{AD}=(-4;-2;2)$$

Обчислимо мішаний добуток одержаних векторів:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ -4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=0,$$

Таким чином, одержані вектори компланарні, а значить точки A, B, C і D лежать в одній площині.

Приклад Знайти об'єм піраміди і довжину висоти, опущеної на грань BCD, якщо вершини мають координати A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Знайдемо координати векторів
$$\overrightarrow{BA}=(-2;-3;-4)$$
$$\overrightarrow{BD}=(1;4;-3)$$
$$\overrightarrow{BC}=(4;-1;-2)$$
.

Об'єм піраміди
$$V=\frac{1}{6}=\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-2(-8-3)+3(-2+12)-4(-1-16))=$$
.
$$=\frac{1}{6}(22+30+68)=20(од^3)$$

Для обчислення довжини висоти піраміди знайдемо спочатку площу основи BCD.

$$[\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-8-3)-\vec{j}(-2+12)+\vec{k}(-1-16)=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

$$\left|[\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}]\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}$$

$S_{осн}$ = $\sqrt{510}/2$ (од^2).

Так як V = $\frac{S_{осн}\cdot h}{3}$, то $h=\frac{3V}{S_{осн}}=\frac{120}{\sqrt{510}}=\frac{4\sqrt{510}}{17}$.(од).

ЛЕКЦІЯ 20
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ. ОСНОВНІ ТИПИ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ. ПРЯМА ЛІНІЯ У ПРОСТОРІ

20.1 Площина. Основні типи рівняння площини

Виведемо рівняння площини.

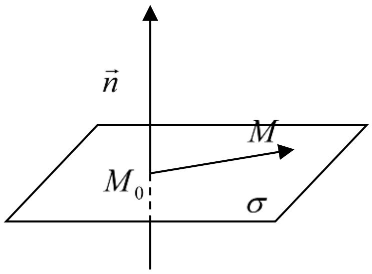


Рисунок 20.1

Позначимо $\vec{n}$ – нормаль (рис.20.1), $\vec{n} \perp \sigma$:

$$\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}.$$

Нормаль проходить через задану точку

$$M_0(x_0; y_0; z_0).$$

Візьмемо на площині довільну точку

$$M(x; y; z)$$

і розглянемо вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}.$$

Оскільки $\vec{n} \perp \sigma$, то $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, а це означає, що скалярний добуток $(\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}) = 0$ і ми одержуємо рівняння прямої у просторі, яка проходить через задану точку:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Розкриємо дужки:

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0.$$

Позначивши за D вираз в дужках, одержимо загальне рівняння прямої у просторі:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Коефіцієнти A,B,C,D, взагалі кажучи, відмінні від нуля. Можливі окремі випадки, коли якийсь з коефіцієнтів обертається на нуль, наприклад:

– якщо D=0, площина проходить через початок координат;
– якщо A=0, площина паралельна осі Ox;
– якщо A=0 і B=0 площина паралельна координатній площині xOy.

Рівняння площини у відрізках на осях координат

Якщо в загальному рівнянні $Ax + By + Cz + D = 0$ поділити обидві частини на $-D$

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0$$

і замінити $-\frac{D}{A} = a,\quad -\frac{D}{B} = b,\quad -\frac{D}{C} = c$, одержимо рівняння:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Числа a, b, c являються точками перетину площини з осями координат.

Кут між двома площинами.

Розглянемо дві площини

$$\sigma_1: \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\sigma_2: \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

які визначаються своїми нормальними векторами

$$n_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$$

$$n_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$$

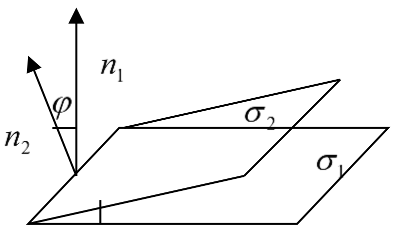


Рисунок 20.2

кут між площинами визначається кутом між їх нормальними векторами (рис.20.2):

$$\cos\varphi = \frac{(n_1 \cdot n_2)}{|n_1| \cdot |n_2|}$$

Тобто

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Звідси випливають умови паралельності

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{B_2}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

та перпендикулярності площин

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-2;1;3)$ паралельно площині $2x - 4y + 5z - 3 = 0$

Розв’язок. Скористаємось рівнянням площини, яка проходить через задану точку

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

в нашому випадку

$$A(x - (-2)) + B(y - 1) + C(z - 3) = 0,$$

коефіцієнти $A;B;C$ знайдемо з умови паралельності площин

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{-4} = \frac{C}{5},$$

тоді

$$2(x + 2) + (-4)(y - 1) + 5(z - 3) = 0,$$

або

$$2x - 4y + 5z - 7 = 0.$$

20.2 Пряма лінія у просторі

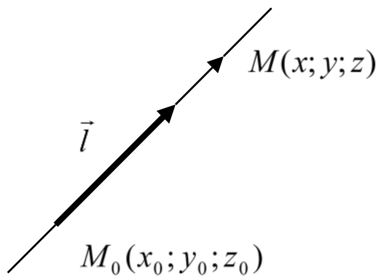


Рисунок 20.3

Виведемо рівняння прямої.

Задамо на прямій точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і направляючий вектор (Рис.20.3)

$$\vec{l} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$$

Візьмемо на прямій довільну точку $M(x;y;z)$

і розглянемо вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k},$$

оскільки $\overrightarrow{M_0M} \mid\mid \vec{l}$, то рівняння прямої одержимо у вигляді:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

За аналогічних міркувань складемо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки. Нехай це будуть точки $M_1(x_{1;} y_{1;} z_1)$, та $M_2(x_2; y_2; z_2)$ (рис.20.4).

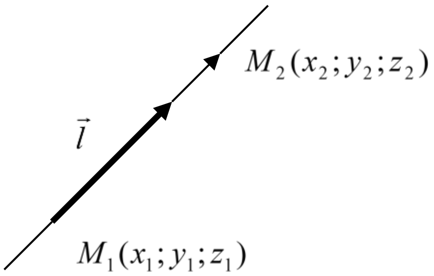


Рисунок 20.4

Запишемо вектори

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

Ці вектори лежать на одній прямій, тобто

$$\overrightarrow{M_{10}M} \mid\mid \overrightarrow{M_1M_2}$$

З умови паралельності векторів одержимо шукане рівняння:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Кут між прямими у просторі.

Розглянемо дві прямі у просторі

$$\frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1} = \frac{z - z_0}{p_1}$$

$$\frac{x - x_0}{m_2} = \frac{y - y_0}{n_2} = \frac{z - z_0}{p_2},$$

які визначаються своїми направляючими векторами відповідно

$$\vec{l}_1 = m_1\vec{i} + n_1\vec{j} + p_1\vec{k}$$

$$\vec{l}_2 = m_2\vec{i} + n_2\vec{j} + p_2\vec{k},$$

тож і кут між прямими визначається кутом між векторами

$$\cos\varphi = \pm\frac{\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2}{\left|\vec{l}_1\right|\left|\vec{l}_2\right|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

З чого випливає умова паралельності прямих

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

та умова перпендикулярності прямих

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

Пряма у просторі може бути задана як перетин двох площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Приклад. Привести до канонічного виду рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}.$$

Візьмемо довільну точку на прямій, прийнявши її координату $x = 0$, а інші координати обчислимо із системи

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3z - 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$, тобто $M(0, 2, 1)$.

Знайдемо компоненти направляючого вектора

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11; \quad n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 17; \quad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

тоді канонічне рівняння прямої:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y - 2}{17} = \frac{z - 1}{13}.$$

Рівняння прямої у параметричному вигляді.

В канонічному рівнянні прямої введемо параметр t:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

Тоді

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}.$$

ЛЕКЦІЯ 21
ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ. ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПЛОЩИНАМИ. ВІДСТАНЬ МІЖ СХРЕЩУВАНИМИ ПРЯМИМИ. РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ, ЯКА ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ТРИ ЗАДАНІ ТОЧКИ

21.1 Взаємне положення прямої та площини у просторі

Розглянемо у просторі пряму $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, яка визначається направляючим вектором $\vec{l}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$, та площину $Ax+By+Cz+D=0$, яка визначається нормальним вектором $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ (рис.21.1).

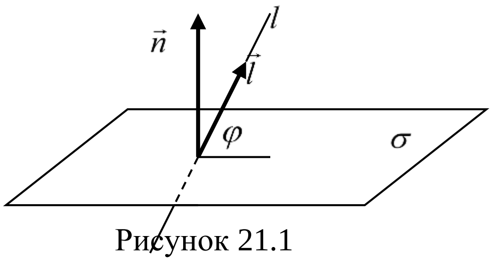


Рисунок 21.1

Тоді кут між прямою l та площиною σ - це кут φ між прямою та її проекцією на площину, а кут між нормаллю $\vec{n}$ та направляючим вектором $\vec{l}$ буде $\frac{\pi}{2}-\varphi$,

$$\text{тобто } \sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{\left(\vec{n}\cdot\vec{l}\right)}{|\vec{n}|\cdot\left|\vec{l}\right|}, \text{ отже,}$$

$$\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Як наслідок, якщо пряма паралельна до площини, то

$$\vec{n}\perp\vec{l},\quad (\vec{n}\cdot\vec{l})=0,\quad \sin\varphi=0,\qquad Am+Bn+Cp=0.$$

А якщо перепендикулярна, то

$$\vec{n}\times\vec{l}=0;\qquad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

21.2 Відстань від точки до площини

Розв'яжемо задачу: Знайти відстань від точки $M(3;7;1)$ до площини

$$\sigma:\ 3x+4y-12z+1=0.$$

Розв'язок. 1). Напишемо рівняння перпендикуляра, опущеного із заданої точки до площини (рис.21.2)

$$MN:\ \frac{x-3}{3}=\frac{y-7}{4}=\frac{z-1}{-12}.$$

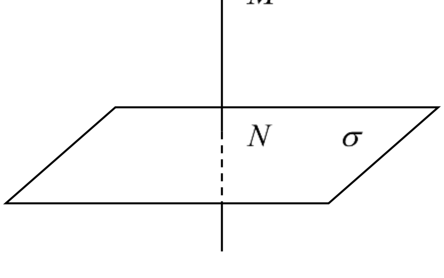


Рисунок 21.2

2). Обчислимо координати точки N перетину перпендикуляра з площиною. Для цього запишемо рівняння перпендикуляра в параметричній формі:

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-7}{4}=\frac{z-1}{-12}=t$$

$$\begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = 4t + 7 \\ z = -12t + 1 \end{cases}.$$

Підставимо в рівняння площини:

$$3(3t + 3) + 4(4t + 7) - 12(-12t + 1) + 1 = 0$$

$$169t + 26 = 0$$

$$t = -\frac{2}{13}.$$

Підставимо в параметричне рівняння і одержимо:

$$x_N = 3\left(-\frac{2}{13}\right) + 3 = \frac{33}{13}$$

$$y_N = 4\left(-\frac{2}{13}\right) + 7 = \frac{83}{13} \quad .$$

$$z_N = -12\left(-\frac{2}{13}\right) + 1 = \frac{37}{13}$$

Отже, $N\left(\frac{33}{13}; \frac{83}{13}; \frac{37}{13}\right)$.

3). Нарешті, знайдемо відстань

$$|MN| = \sqrt{\left(\frac{33}{13} - 3\right)^2 + \left(\frac{83}{13} - 7\right)^2 + \left(\frac{37}{13} - 1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{13}\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2 + (24)^2} = \frac{2 \cdot 13}{13} = 2 \quad .$$

Розв’яжемо задачу в загальному вигляді. Нехай задано точку $M(x_0; y_0; z_0)$ і площину $Ax + By + Cz + D = 0$.

1). Напишемо рівняння перпендикуляра MN:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

2). Перейдемо до параметричного виду і знайдемо координати точки N:

$$\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$$

$$A(At + x_0) + B(Bt + y_0) + C(Ct + z_0) + D = 0$$

$$(A^2 + B^2 + C^2)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Позначимо одержане значення $t = t^*$ і підставивши його в рівняння прямої, одержимо координати точки N:

$$\begin{cases} x_N = x_0 + At^* \\ y_N = y_0 + Bt^* \\ z_N = z_0 + Ct^* \end{cases}.$$

3). Обчислюємо відстань

$$|MN| = \sqrt{(x_0 - x_N)^2 + (y_0 - y_N)^2 + (z_0 - z_N)^2} =$$
$$= |t^*|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} =$$
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Отже, відстань від точки до площини обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

21.3 Відстань між двома паралельними площинами

Нехай задано дві паралельні площини:

σ : $Ax + By + Cz + D = 0$

σ^*: $Ax + By + Cz + D^* = 0$.

Візьмемо на площині σ^* точку $M(x_0; y_0; z_0)$:

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D^* = 0$, звідки $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D^*$.

Тоді:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D - D^*|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Зауваження. Якщо відстань від точки до площини можна відшукати, користуючись формулою, то відстань від точки до прямої у просторі необхідно шукати в кожному окремому випадку.

Приклад. Знайти відстань від точки $M(2;3;4)$ до прямої

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-7}{0}.$$

Складемо рівняння площини, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданої прямої:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
$$(x - x_0) + 3(y - y_0) + 0 \cdot (z - z_0) = 0$$
$$x + 3y - 11 = 0.$$

Знайдемо координати точки перетину прямої з площиною:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-7}{0} = t$$
$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t + 2 \\ z = 7 \end{cases}.$$

Підставивши рівняння площини $t + 9t + 6 - 11 = 0$, знайдемо $t = \dfrac{1}{2}$.

Обчислюємо координати точки: $x_N = \dfrac{1}{2}$; $y_N = \dfrac{7}{2}$; $z_N = 7$.

Знаходимо відстань:

$$|MN| = \sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{7}{2}\right)^2 + (4-7)^2} = \frac{\sqrt{46}}{2}.$$

21.4 Відстань між схрещуваними прямими

Нехай треба знайти відстань між прямими

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Запишемо рівняння площини σ , яка проходить через пряму l_2 паралельно прямій l_1. Скористаємось тим, що в даному випадку площина σ проходить через точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$ перпендикулярно до вектора $\bar{n} = \left[\bar{l}_1 \times \bar{l}_2\right] = n_x\bar{i} + n_y\bar{j} + n_z\bar{k}$:

$$n_x(x-x_2) + n_y(y-y_2) + n_z(z-z_2) = 0,$$

або $n_x x + n_y y + n_z z + (-n_x x_2 - n_y y_2 - n_z z_2) = 0$,

тоді $\rho(l_1;l_2) = \rho(M_1;\sigma) = \left|\dfrac{n_x x_1 + n_y y_1 + n_z z_1 + (-n_x x_2 - n_y y_2 - n_z z_2)}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}\right|$.

Приклад. Задано дві прямі у просторі:

$$l_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$$

$$l_2: \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

а) довести, що ці прямі не лежать в одній площині, тобто є схрещувані;

б) скласти рівняння площини. Яка проходить через l_2 паралельно l_1;

в) обчислити відстань між прямими;

г) скласти рівняння спільного перпендикуляру.

Розв'язок.

а) Візьмемо направляючі вектори прямих:

$$l_1 = 3\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$$

$$l_2 = 6\bar{i} - 4\bar{j} - \bar{k},$$

додамо вектор, який з'єднує точку M_1 (-7; -4; -3), яка належить першій прямій, та точку M_2 (21; -5; 2), яка належить другій прямій,

$$\overline{M_1M_2} = (x_2-x_1)\bar{i} + (y_2-y_1)\bar{j} + (z_2-z_1)\bar{k} = 28\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$$

і дослідимо на компланарність ці три вектори, для чого обчислимо визначник

$$\begin{vmatrix} 28 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Це означає, що вектори не компланарні, тобто прямі не лежать в одній площині.

б) Запишемо рівняння площини σ, яка проходить через пряму паралельно l_1. Ця площина проходить через точку M_2 (21; -5; 2) перпендикулярно вектору $\bar{n} = [l_1 \times l_2]$:

$$[l_1 \times l_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -12\bar{i} - 9\bar{j} - 36\bar{k}.$$

Рівняння площини σ:

$$-12(x-21) - 9(y+5) - 36(z-2) = 0$$

$$\text{або } 4x + 3y + 12z - 93 = 0.$$

в) Відстань між схрещуваними прямими визначимо як відстань від точки $M_1(-7;-4;-3)$ до площини σ:

$$\rho(M_1;\sigma) = \left| \frac{4(-7) + 3(-4) + 12(-3)}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} \right| = \frac{76}{13}.$$

г) Знайдемо рівняння площин σ_1 та σ_2, які проходять через прямі l_1 та l_2 перпендикулярно σ.

Маємо: $M_1(-7;-4;-3) \in \sigma_1$,

$$\bar{n}_1 = [l_1 \times n] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 54\bar{i} - 44\bar{j} - 7\bar{k}, \text{ отже,}$$

$$\sigma_1: \; 54(x+7) - 44(y+4) - 7(z+3) = 0$$

$$\text{або } 54x - 44y - 7z + 181 = 0.$$

Аналогічно: $M_2(21;-5;2) \in \sigma_2$

$$\bar{n}_2 = [l_2 \times n] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & -4 & -1 \\ 4 & 3 & 12 \end{vmatrix} = -45\bar{i} - 76\bar{j} + 34\bar{k}, \text{ отже,}$$

$$\sigma_2: \; -45(x-21) - 76(y+5) + 34(z-2) = 0$$

$$\text{або } -45x - 76y + 34z + 497 = 0.$$

Тож рівняння спільного перпендикуляру запишеться у вигляді перетину двох площин:

$$\begin{cases} 54x - 44y - 7z + 181 = 0 \\ -45x - 76y + 34z + 497 = 0 \end{cases}.$$

Умова того, що пряма лінія лежить на площині.

Пряма лінія

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

лежить на площині

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

якщо вона паралельна площині і має з нею спільну точку:

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}.$$

Приклад. Перевірити, чи лежить пряма $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{4}$ на площині $2x+2y+z+2=0$.

Розв'язок:

$$\begin{aligned} &2\cdot 1+2\cdot(-3)+1\cdot 4=0 \\ &2\cdot 1+2\cdot(-2)+1\cdot 0+2=0 \end{aligned}.$$

Відповідь: так, лежить.

21.5 Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

Для того, щоб через три точки у просторі можна було провести єдину площину, необхідно, щоб ці точки не лежали на одній прямій.

Розглянемо точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Для того, щоб довільна точка $M(x, y, z)$ лежала в одній площині з точками M_1, M_2, M_3 необхідно, щоб вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ були компланарні.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0.$$

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1; y-y_1; z-z_1\}$$

Таким чином, $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1\}$$

і рівняння площини, яка проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Приклад. Провести площину через точки $M_1(1;0;-1)$, $M_2(3;2;4)$, $M_3(2;-1;2)$.

Розв'язок: скористуємось рівнянням площини, яка проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 3-1 & 2-0 & 4-(-1) \\ 2-1 & -1-0 & 2-(-1) \end{vmatrix}=0.$$

Або

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\cdot 11 - y + (z+1)(-4) = 0$$

$$11x - y - 4z - 15 = 0 .$$

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки може бути записане і в такому вигляді:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

ЛЕКЦІЯ 22
МАТРИЦІ. ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ. КВАДРАТНА МАТРИЦЯ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. МНОГОЧЛЕНИ ВІД МАТРИЦІ

22.1 Означення матриці

Матрицею розміру $m\times n$ називається прямокутна таблиця чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з m рядків і n стовпців.

Числа a_{ij} називаються елементами матриці. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij} .

Матриці A і B називаються рівними, якщо вони мають однаковий розмір $m\times n$ і їх відповідні елементи рівні

$$A_{m\times n}=B_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij}=b_{ij},\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n} \ .$$

Матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, називається нульовою і позначається 0 .

Матриця, у якої число стовпців дорівнює числу рядків $m=n$, називається квадратною n-го порядку.

Якщо $m\neq n$, то матриця називається прямокутною.

Матриця, яка складається тільки з одного рядка $m = 1$, називається матрицею-рядком (вектором-рядком).

Матриця, яка складається тільки з одного стовпця $n = 1$, називається матрицею-стовпцем (вектором-стовпцем).

22.2 Операції над матрицями

Сумою матриць A і B однакового розміру $m\times n$ називається така матриця $C=A+B$ того ж розміру, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів вихідних матриць

$$C=A+B \ \Leftrightarrow \ c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \ , \ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n} \ .$$

Аналогічно вводиться різниця матриць

$$C=A-B \ \Leftrightarrow \ c_{ij}=a_{ij}-b_{ij} \ , \ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n} \ .$$

Добутком матриці A розміру $m\times n$ на число α називається така матриця $C=\alpha A$ того ж розміру, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента вихідної матриці на це число

$$C=\alpha A \ \Leftrightarrow \ c_{ij}=\alpha a_{ij} \ , \ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n} \ .$$

Приклад . Для заданих матриць A і B знайти їх вказану лінійну комбінацію

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 6 & -4\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\\ -3 & -4 & 2\end{pmatrix};\ C=2A-3B.$$

$$2A=\begin{pmatrix}-4 & 12 & -8\\ 6 & 0 & -2\end{pmatrix};\ 3B=\begin{pmatrix}15 & -6 & 9\\ -9 & -12 & 6\end{pmatrix};$$

$$C=2A-3B=\begin{pmatrix}-19 & 18 & -17\\ 15 & 12 & -8\end{pmatrix}$$

Добутком матриці A розміру $m\times p$ на матрицю B розміру $p\times n$ називається така матриця $C=AB$ розміру $m\times n$, кожний елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка першого співмножника A та j-го стовпця другого співмножника B

$$C_{m\times n}=A_{m\times p}B_{p\times n}\ \Leftrightarrow\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\,b_{kj}\ ,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\ .$$

Приклад. Для заданих матриць A і B знайти добутки AB і BA.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -4\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

$$C_{2\times2}=A_{2\times3}\,B_{3\times2}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot3+3\cdot2+(-4)\cdot4 & -2\cdot(-1)+3\cdot0+(-4)\cdot1\\ 3\cdot3+2\cdot2+(-5)\cdot4 & 3\cdot(-1)+2\cdot0+(-5)\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-16 & -2\\ -7 & -8\end{pmatrix};$$

$$D_{3\times3}=B_{3\times2}\,A_{2\times3}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot(-2)+(-1)\cdot3 & 3\cdot3+(-1)\cdot2 & 3\cdot(-4)+(-1)\cdot(-5)\\ 2\cdot(-2)+0\cdot3 & 2\cdot3+0\cdot2 & 2\cdot(-4)+0\cdot(-5)\\ 4\cdot(-2)+1\cdot3 & 4\cdot3+1\cdot2 & 4\cdot(-4)+1\cdot(-5)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-9 & 7 & -7\\ -4 & 6 & -8\\ -5 & 14 & -21\end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці A поміняти місцями відповідні рядки і стовпці, то одержимо транспоновану матрицю A^T.

Приклад 3.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -5 & -4\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix};\ A^T=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -5 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$$

22.3 Квадратна матриця

Матриця, у якої число стовпців дорівнює числу рядків $m = n$, називається квадратною n-го порядку.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця D, у якої всі елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається діагональною

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається одиничною і позначається E

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Кожній квадратній матриці A n-го порядку ставиться у відповідність визначник

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

який називається визначником (детермінантом) матриці A.

Якщо визначник матриці A дорівнює нулю $\det A = 0$, то матриця називається виродженою (особливою).

22.4 Обернена матриця та її обчислення

Матриця A^{-1} називається оберненою до невиродженої квадратної матриці A, якщо виконується умова

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E.$$

Для будь-якої невиродженої квадратної матриці A n-го порядку існує єдина обернена матриця A^{-1}, яка обчислюється за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A.

Приклад. Упевнитися, що задана матриця A невироджена, та знайти обернену матрицю A^{-1}. Перевірити рівності $AA^{-1-}=E$ і $A^{-1}A^{-}=E$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$ – матриця A невироджена.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3;\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4;\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

Запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо рівність $AA^{-1} = E$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$=$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1)+1\cdot 0+1\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+1\cdot(-2)+1\cdot 1 & (-1)\cdot 3+1\cdot 4+1\cdot(-1) \\ 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 0+2\cdot 1 & 2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)+2\cdot 1 & 2\cdot 3+(-1)\cdot 4+2\cdot(-1) \\ 1\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1 & 1\cdot(-1)+0\cdot(-2)+1\cdot 1 & 1\cdot 3+0\cdot 4+1\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Рівність $A^{-1}A = E$ перевірте самостійно.

ЛЕКЦІЯ 23
МАТРИЧНИЙ ЗАПИС СИСТЕМИ РІВНЯНЬ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ. МЕТОД ГАУССА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ СИСТЕМ

23.1 Матричний запис системи рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими x_j $(j=\overline{1,n})$ має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

де a_{ij} $(i=\overline{1,m}\,;\ j=\overline{1,n})$ і b_i $(i=\overline{1,m})$ – задані числа:

a_{ij} $(i=\overline{1,m}\,;\ j=\overline{1,n})$ – коефіцієнти при невідомих;

b_i $(i=\overline{1,m})$ – вільні члени (праві частини).

Система, у якій число рівнянь дорівнює числу невідомих n, називається квадратною n-го порядку.

Для квадратної системи визначник Δ_n, складений з коефіцієнтів при невідомих, називається визначником системи

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Система називається однорідною, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю $b_i = 0$ $(i=\overline{1,m})$, і – неоднорідною, якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля.

Система називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною, якщо вона не має жодного розв'язку.

Однорідна система завжди сумісна, бо має тривіальний (нульовий) розв'язок $x_j = 0$ $(j=\overline{1,n})$.

Сумісна система називається визначеною, якщо її розв'язок єдиний, і невизначеною – в противному разі.

Введемо матричні позначення

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$C=\left(A \mid B\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ {}_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix},$$

де X – матриця-стовпець невідомих розміру $n\times 1$; A – основна матриця системи, складена з коефіцієнтів при невідомих розміру $m\times n$; B – матриця-стовпець вільних членів (правих частин) розміру $m\times 1$; C – розширена матриця системи розміру $m\times(n+1)$.

Тоді систему можна записати в матричній формі $AX = B$.

23.2 Розв'язування квадратних систем за допомогою оберненої матриці

Якщо основна матриця A квадратної системи $AX = B$ невироджена (тобто, $\det A \neq 0$), то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою

$$X = A^{-1}B.$$

Приклад. Розв'язати квадратну систему

$$\begin{cases} 3x-2y-5z=-7 \\ 2x+y+2z=0 \\ 2x-y-3z=-4 \end{cases}$$

за допомогою оберненої матриці (матричним методом).

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix};\ AX=B,$$

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$ – матриця A невироджена.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-1;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=10;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-1;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-16;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7.$$

Запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -16 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B; \; X = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -16 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7+0-4 \\ -70+0+64 \\ 28+0-28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \; \begin{matrix} x=-1 \\ y=2 \\ z=0 \end{matrix}.$$

23.3 Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

Розглянемо систему рівнянь в матричній формі $AX = B$.

Метод Гаусса полягає в тому, щоб задану матрицю коефіцієнтів A за допомогою еквівалентних перетворень привести до трикутного виду, в якому елементи під головною діагоналлю дорівнюють нулю. Після цього в зворотному порядку обчислюємо значення невідомих.

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}.$$

Складемо розширену матрицю системи:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, задана система може бути представлена у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$,звідки одержуємо : $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

ЛЕКЦІЯ 24
СИСТЕМИ *m* ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ З *n* НЕВІДОМИМИ. ПОНЯТТЯ ПРО РАНГ МАТРИЦІ. ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ МАТРИЦЬ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛІ. СИСТЕМИ ОДНОРІДНИХ РІВНЯНЬ

24.1 Системи *m* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими

Повернемось до системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими x_j $(j=\overline{1,n})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

Або в матричній формі

$$AX = B.$$

24.2 Ранг матриці. Еквівалентні перетворення матриць

Виділимо в матриці A розміру $m\times n$ будь-які k рядків і k стовпців $\left(1\le k\le \min\{m,n\}\right)$. Визначник, складений з елементів, які стоять на перетині виділених рядів, називається мінором M_k k-го порядку матриці A.

Рангом $r(A)$ матриці A розміру $m\times n$ називається найбільший порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці.

Базисним мінором матриці A називається довільний відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці.

Еквівалентні матриці.

Дві матриці A та B будуть еквівалентні $A\sim B$, якщо $r(A)=r(B)$.

Елементарні перетворення еквівалентних матриць:

а) заміна рядків стовпцями і навпаки;

б) перестановка рядків;

в) викреслювання рядків, всі елементи яких дорівнюють нулю;

г) множення елементів рядка на число, не рівне нулю;

д) додавання до елементів рядка відповідні елементи іншого рядка.

Приклад. Визначити ранг матриці:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ $r(A)=1$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ $r(A)=2$

в) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $r(A) = 2$

г) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $r(A) = 3$

24.3 Теорема Кронекера-Капеллі

Теорема Кронекера – Капеллі. Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $AX = B$ сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці $C = (A \mid B)$ дорівнює рангу основної матриці A: $r(A) = r(C)$. У випадку сумісності: 1) якщо ранг цих матриць дорівнює числу невідомих $r = n$, то система має єдиний розв'язок (є визначеною); 2) якщо цей спільний ранг менше числа невідомих $r < n$, то система є невизначеною і має безліч розв'язків, які залежать від $n - r$ довільних сталих (параметрів.

Якщо сумісна система є невизначеною $r(A) = r(C) = r < n$, то ті r невідомі x_j, коефіцієнти при яких входять у вибраний базисний мінор M_r, називаються базисними, а решта $n - r$ невідомі x_j називаються вільними.

Приклад. Дослідити сумісність системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}. \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 6 = 5 \neq 0 \quad r(A) = 2.$$

$$\text{A*} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \quad r(A^*) = 3.$$

Система несумісна.

Приклад. Дослідити сумісність системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases} \quad \text{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \; r(A) = 2;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$ $r(A) = 2.$

Система сумісна. Розв'язок: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Приклад. Дослідити сумісність систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad r(A) = r(A^*) = 3.$$

Система сумісна. Розв'яжемо систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, система рівнянь набуде вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 6 \\ x_2 + 2x_3 + 8 \\ x_3 = 3 \end{cases} \text{звідки: } x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$$

Приклад. Дослідити сумісність системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r(A) = r(A^*) = 2.$$

Система сумісна. А оскільки $r < n$ система є невизначеною. Така система має безліч розв'язків. Оберемо базисні невідомі.

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ базисні невідомі x_1; x_2; вільні невідомі x_3; x_4.

Відповідно систему рівнянь запишемо так:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -4x_3 - 3x_4 + 1 \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4 \end{cases}.$$

Розв'яжемо одержану систему методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -4x_3 - 3x_4 + 1 & 5 \\ -2x_3 + x_4 & -1 \end{vmatrix} = 14x_3 - 2x_4 - 1$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 - 3x_4 + 1 \\ 2 & -2x_3 + x_4 \end{vmatrix} = 6x_3 + 7x_4 - 2$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = -\frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4 + \frac{1}{11}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}.$$

Одержаний розв'язок слід розуміти так, що невідомим вільним надамо довільні значення, відповідно до яких обчислимо значення базисних невідомих:

$$\begin{cases} x_3 = m \\ x_4 = n \\ x_1 = -\frac{14}{11}m + \frac{2}{11}n + \frac{1}{11} \\ x_2 = -\frac{6}{11}m - \frac{7}{11}n + \frac{2}{11} \end{cases}.$$

24.4 Системи однорідних рівнянь

Приклад. Розв'язати систему однорідних рівнянь.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 36 - 5 + 8 + 8 - 6 - 30 = 11.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$ система має лише тривіальний розв'язок:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Приклад. Розв'язати систему однорідних рівнянь.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -36 + 80 - 1 - 12 - 16 - 15 = 0$$

Оскільки $\Delta = 0$, система сумісна, але невизначена. Ранг системи дорівнює двом. Як базисні невідомі візьмемо x_1 та x_2, а x_3 буде вільною невідомою:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = x_3 \\ x_1 - 3x_2 = -5x_3 \end{cases}.$$

Розв'яжемо цю систему методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3 + 20x_3 = 17x_3$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -15x_3 - x_3 = -16x_3.$$

Звідки знаходимо:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = -\frac{17}{13}x_3$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{16}{13}x_3.$$

Візьмемо $x_3 = 13k$, тоді $x_1 = -17k, \quad x_2 = 16k$.

ЛЕКЦІЯ 25
ОЗНАЧЕННЯ *n*-ВИМІРНОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТОРУ. МАТРИЦЯ ЛІНІЙНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ. ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСНІ ВЕКТОРИ ЛІНІЙНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

25.1 Поняття *n*-вимірного векторного простору

Будемо вважати, що у лінійному просторі L задано деяке лінійне перетворення A, якщо будь-якому елементу $\bar{x} \in$ L за певним правилом поставлено у відповідність елемент A$\bar{x} \in$ L.

Перетворення A зветься лінійним, якщо для довільних $\bar{x} \in$ L та $\bar{y} \in$ L будь-якого α справедливо

$$A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y}$$

$$A(\alpha\bar{x}) = \alpha A\bar{x}.$$

Лінійне перетворення зветься тотожним, якщо воно перетворює елемент лінійного простору сам на себе:

$$E\bar{x} = \bar{x}.$$

Нехай у просторі L задано вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n}$, тоді вектор $\bar{b} = \alpha\overline{a_1} + \beta\overline{a_2} + ... + \lambda\overline{a_n}$ являється лінійною комбінацією векторів $\overline{a_i}$.

Якщо $\alpha\overline{a_1} + \beta\overline{a_2} + ... + \lambda\overline{a_n} = 0$ тільки при $\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 0$, то вектори $\overline{a_i}$ звуться лінійно незалежними.

Означення. Якщо у лінійному просторі L задано n лінійно незалежних векторів, а будь-які n + 1 вектори лінійно залежні, то простір L зветься **n**-вимірним, а сукупність лінійно незалежних векторів зветься базисом лінійного простору L .

Наслідок. Будь-який вектор лінійного простору може бути представлений як лінійна комбінація векторів базису.

25.2 Матриця лінійного перетворення

Нехай у *n*- вимірному лінійному просторі з базисом $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ задано лінійне перетворення A. Тоді вектори $A\overline{e_1}, A\overline{e_2}, \ldots, A\overline{e_n}$ - також будуть векторами цього простору і їх можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів базису:

$$A\overline{e_1} = a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + \ldots + a_{n1}\overline{e_n}$$

$$A\overline{e_2} = a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \ldots + a_{n2}\overline{e_n}$$

………………………………

$$A\overline{e_n} = a_{n1}\overline{e_1} + a_{n2}\overline{e_2} + \ldots + a_{nn}\overline{e_n}.$$

Тоді матриця A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ зветься матрицею лінійного перетворення A.

Якщо у просторі L взяти вектор $\bar{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \ldots + x_n\overline{e_n}$, то $A\bar{x} \in L$.

$$A\bar{x} = x_1'\overline{e_1} + x_2'\overline{e_2} + \ldots + x_n'\overline{e_n}, \text{ де}$$

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$$

……………………………..

$$x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n.$$

Ці рівності можна назвати лінійним перетворенням у базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$.

В матричному вигляді:

$$\bar{x} = \left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}, \ A \cdot \bar{x} = \bar{x}'.$$

Для прикладу розглянемо перетворення системи координат у випадку повороту осей. Позначимо задану систему x_1Ox_2, а нову систему y_1Oy_2. За відомими формулами перетворення

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha \\ y_2 &= -x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \end{aligned}.$$

Тобто координати точки $(x_1; x_2)$ перетворюються в координати точки $(y_1; y_2)$. Запишемо систему в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

і буде матрицею лінійного перетворення.

Можна розглядати координати точки як координати вектора:
$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Тоді $\bar{y} = A\bar{x}$.

25.3 Власні значення та власні вектори лінійного перетворення

Означення. Нехай L – заданий n-вимірний лінійний простір. Ненульовий вектор $\bar{x} \in$ L зветься власним вектором лінійного перетворення А, якщо існує таке число λ, що виконується рівність

$$\mathrm{A}\,\bar{x} = \lambda\bar{x}.$$

При цьому число λ зветься власним значенням (характеристичним числом) лінійного перетворення А, відповідного вектору $\bar{x}$.

Означення. Якщо лінійне перетворення А в деякому базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ має матрицю А = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то власні значення лінійного перетворення А можна знайти як корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння зветься характеристичним рівнянням**,** а його ліва частина – характеристичним многочленом лінійного перетворення А.

Характеристичний многочлен лінійного перетворення А не залежить від вибору базису.

Розглянемо окремий випадок. Нехай А – деяке лінійне перетворення площини , матриця якого дорівнює $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тоді перетворення А може бути задано формулами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

в деякому базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.

Якщо перетворення А має власний вектор з власним значенням λ, то А $\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}.$$

Оскільки система однорідна, то для того, аби вона мала нетривіальний розв'язок, визначник системи повинен дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Одержане рівняння являється характеристичним рівнянням лінійного перетворення А.

Таким чином, можна знайти власний вектор $\bar{x}$ (x_1, x_2) лінійного перетворення А з власним значенням λ, де λ - корінь характеристичного рівняння, а x_1 та x_2 – корені системи рівнянь при підстановці в неї значення λ.

Приклад. Знайти власні значення та власні вектори матриці А = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Запишемо лінійне перетворення у вигляді : $\begin{matrix} x_1' = \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{matrix}$.

Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_2 = 1$;

Для кореня $\lambda_1 = 7$: $\begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$.

Із системи одержимо: $x_1 - 2x_2 = 0$. Власні вектори для першого кореня характеристичного рівняння мають координати: *(t; 0,5t),* де *t*- параметр.

Для кореня $\lambda_2 = 1$: $\begin{cases} (5-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$.

Із системи одержимо $x_1 + x_2 = 0$. Власні вектори для другого кореня характеристичного рівняння мають координати: *(t; -t)* де *t*- параметр.

Одержані власні вектори можна записати у вигляді

$$\overrightarrow{u_1} = t(\overrightarrow{e_1} + 0{,}5\overrightarrow{e_2}); \quad \overrightarrow{u_2} = t(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}).$$

Приклад. Знайти власні значення та власні вектори матриці

$$А = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Запишемо лінійне перетворення у вигляді

$$x_1' = \lambda x_1 = 6x_1 - 4x_2$$
$$x_2' = \lambda x_2 = 4x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} (6-\lambda)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - (2+\lambda)x_2 = 0 \end{cases}.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(6-\lambda)(2+\lambda)+16 = -12-6\lambda+2\lambda+\lambda^2+16 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Одержимо $\begin{cases} (6-2)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$.

Із системи одержимо : $x_1 - x_2 = 0$. Власні вектори для першого кореня характеристичного рівняння мають координати: ***(t; t)*** де *t*- параметр.

Власний вектор можна записати: $\vec{u} = (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})t$.

Приклад. Знайти власні значення та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Обчисливши визначник, одержимо:

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0 .$$

Корені рівняння будуть власними значеннями $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6$.

Обчислимо власні вектори, які відповідають одержаним власним значенням.

1) $\lambda_1 = 2$. Підставимо в систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Обчислимо визначник системи

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3+1+1-3-1-1 = 0 .$$

Оскільки $\Delta = 0$, система сумісна, але невизначена. Ранг системи дорівнює двом. В якості базисних невідомих візьмемо x_1 та x_2, а x_3 буде вільною невідомою:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 \\ -x_1 + 3x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Якщо скласти рівняння, одержимо $2x_2 = 0$, далі $x_1 = -x_3$. Покладемо $x_3 = m$, тоді $x_1 = -m, \quad x_2 = 0$ і вектор запишеться у вигляді $\bar{r} = -m\bar{i} + m\bar{k}$.

2) $\lambda_2 = 3$. Підставимо в систему рівнянь:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Обравши як базисні невідомі x_1 та x_2, а x_3 вільною невідомою, одержимо:

$$\begin{cases} x_2 = x_3 \\ -x_1 + 2x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Звідки $x_1 = x_3; \quad x_2 = x_3$ і маємо вектор $\bar{r} = m\bar{i} + m\bar{j} + m\bar{k}$.

3) $\lambda_3 = 6$. Підставимо в систему рівнянь:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Обравши як базисні невідомі x_1 та x_2, а x_3 вільною невідомою, одержимо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 \\ x_1 - 2x_2 = 3x_3 \end{cases}.$$

Звідки $x_1 = x_3; \quad x_2 = -x_3 - x_1 = -2x_3$ і маємо вектор $\bar{r} = m\bar{i} - 2m\bar{j} + m\bar{k}$.

Приклад. Дано лінійне перетворення:

$$\begin{cases} x = x_1 + 2y_1 \\ y = 3x_1 + 4y_1 \end{cases}.$$

В яких точках це лінійне перетворення не змінює координат?

Треба знайти x та y, щоб $x = x_1$ а $y = y_1$. або:

$$\begin{cases} x = x + 2y \\ y = 3x + 4y \end{cases}.$$

Це можливо, якщо $x = x_1 = 0; \quad y = y_1 = 0$.

Приклад. В яких точках лінійне перетворення

$$\begin{cases} x = 3x_1 - 2y_1 \\ y = 5x_1 - 4y_1 \end{cases}$$

не змінює координат?

Ця умова означає, що

$$\begin{cases} x = 3x - 2y \\ y = 5x - 4y \end{cases}.$$

Що можливо, якщо $x = y = x_1 = y_1$, тобто задане лінійне перетворення не змінює координат у точок $(t;t)$ з однаковими координатами.

ЛЕКЦІЯ 26
ВЕКТОРНА ФУНКЦІЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТУ. ДОТИЧНА ПРЯМА І НОРМАЛЬНА ПЛОЩИНА ДО ПРОСТОРОВОЇ ЛІНІЇ. ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ТА НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ

26.1 Поняття векторної функція скалярного аргументу

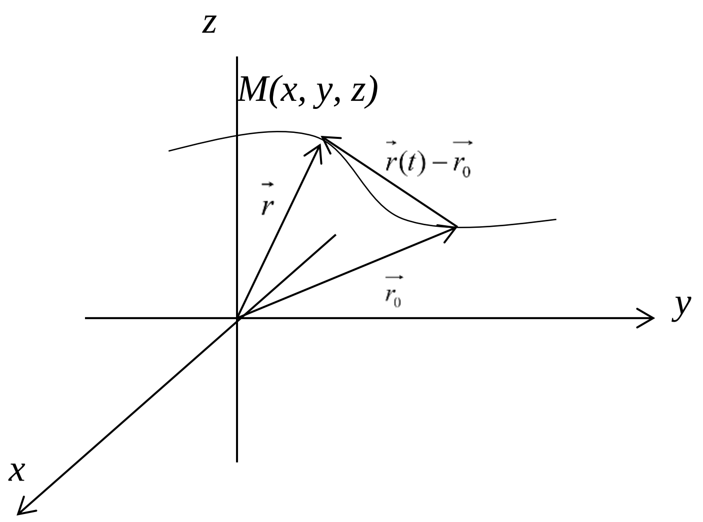


Рисунок 26.1

Нехай у просторі задано криву в параметричній формі:

$$x = x\,(t);\ y = y(t);\ z = z(t).$$

Тоді радіус-вектор $\bar{r} = \overline{OM}$ довільної точки $M(x, y, z)$ кривої l запишеться так:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x(t)\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\bar{k}\ .$$

Таким чином, радіус-вектор точки просторової кривої можна розглядати як векторну функцію скалярного аргументу *t.* При зміні параметра t змінюється довжина і напрям вектора $\bar{r}$.

Якщо кожному значенню змінної t з деякого проміжку $(a;b)$ поставлено у відповідність один і тільки один радіус-вектор $\bar{r} = \bar{r}(t)$, то кажуть, що на проміжку $(a;b)$ визначено вектор-функцію $\bar{r} = \bar{r}(t)$ скалярного аргументу t

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\bar{k}\ .$$

Просторову криву l, утворену рухом кінця радіус-вектора $\bar{r} = \bar{r}(t)$ при зміні t на проміжку $(a;b)$ називають графіком вектор-функції або годографом (рис. 26.1).

Неперервність функції. Границя функції

Сталий вектор $\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\,\bar{j} + z_0\bar{k}$ називається границею вектор-функції $\bar{r} = \bar{r}(t)$ у точці t_0 , якщо:

$\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$; $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0$; $\lim\limits_{t\to t_0} z(t) = z_0$.

Дійсно, $\lim\limits_{t\to t_0} \bar{r}(t) = \lim\limits_{t\to t_0}(x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}) =$

$= \lim\limits_{t\to t_0} x(t)\bar{i} + \lim\limits_{t\to t_0} y(t)\bar{j} + \lim\limits_{t\to t_0} z(t)\bar{k} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k} = \bar{r}_0$.

Позначається $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$.

Вектор-функцію $\bar{r} = \bar{r}(t)$ називають неперервною у точці t, якщо $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta\bar{r}(t) = 0$.

Похідна векторної функції.

Щоб знайти похідну векторної функції скалярного аргументу, розглянемо приріст радіуса-вектора при деякому прирості параметру t (рис.26.2).

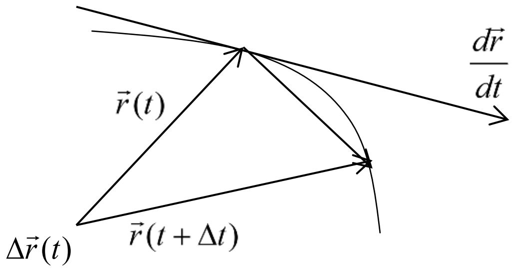


Рисунок 26.2

Границя відношення $\Delta\bar{r}(t)/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$ називається похідною вектор-функції $\bar{r} = \bar{r}(t)$ у точці t і позначається $\bar{r}'(t)$ або $\frac{d\bar{r}(t)}{dt}$:

$$\bar{r}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t}.$$

Властивості похідної векторної функції скалярного аргументу:

1) $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} - \frac{d\vec{r}_3}{dt}$

2) $\frac{d(\lambda\vec{r})}{dt} = \lambda\frac{d\vec{r}}{dt}$, де $\lambda = \lambda(t)$ – скалярна функція

3) $\frac{d(\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2)}{dt} = \left(\frac{d\bar{r}_1}{dt}\bar{r}_2\right) + \left(\bar{r}_1\frac{d\bar{r}_2}{dt}\right)$

4) $\frac{d[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2]}{dt} = \left[\frac{d\bar{r}_1}{dt} \times \bar{r}_2\right] + \left[\bar{r}_1 \times \frac{d\bar{r}_2}{dt}\right]$.

26.2 Дотична пряма і нормальна площина до просторової лінії

Вектор $\Delta\bar{r}(t_0)/\Delta t$ паралельний вектору $\Delta\bar{r}(t_0)$ і направлений вздовж січної M_0M_1 до годографа. Коли $\Delta t \to 0$, точка M_1 необмежено наближається до точки M_0, а січна M_0M_1 переходить у дотичну до кривої у точці M_0. Звідси випливає,що напрям похідної $\bar{r}'(t_0)$ вектор-функції $\bar{r} = \bar{r}(t)$ збігається з напрямом дотичної до годографа у відповідній точці M_0. Це становить геометричний зміст похідної вектор-функції. Таким чином, вектор $\bar{r}'(t_0)$ можна взяти за напрямний вектор дотичної. Тоді канонічне рівняння дотичної прямої до просторової кривої

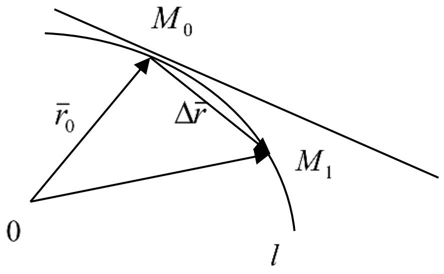


Рисунок 26.3

(рис. 26.3) запишеться у вигляді:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$ де

$$x_0 = x(t_0); \quad y_0 = y(t_0); \quad z_0 = z(t_0).$$

Площина σ, що перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику M_0, називається нормальною площиною до просторової лінії. Вектор $\bar{r}'(t_0)$ можна взяти за вектор нормалі цієї площини. Тож отримуємо рівняння нормальної площини:

$$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0.$$

Приклад. Записати рівняння дотичної прямої та рівняння нормальної площини, якщо $\bar{r}(t) = (3t - t^3)\bar{i} + 3t^2\bar{j} + (3t + t^3)\bar{k}$, в точці $t_0 = 1$.

Розв'язок.

Обчислимо похідну $\dfrac{d\bar{r}}{dt} = \left(3 - 3t^2\right)\bar{i} + 6t\bar{j} + \left(3 + 3t^2\right)\bar{k}$.

Далі знайдемо $\bar{r}(t)\big|_{t_0=1} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}; \quad \dfrac{d\bar{r}(t)}{dt}\Big|_{t_0=1} = 6\bar{j} + 6\bar{k}$,

звідки $x_0 = 2; \quad y_0 = 3; \quad z_0 = 4$ та $\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t_0=1} = 0; \quad \dfrac{dy}{dt}\Big|_{t_0=1} = 6; \quad \dfrac{dz}{dt}\Big|_{t_0=1} = 6$.

Отже, рівняння дотичної:

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-4}{6},$$

або $$\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1}.$$

Рівняння можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

як перетин двох площин.

Рівняння нормальної площини запишеться у вигляді

$$0\cdot(x-2) + 1\cdot(y-3) + 1\cdot(z-4) = 0,$$ або $y + z - 7 = 0$.

26.3 Дотична площина та нормаль до поверхні

На поверхні $F(x;y;z)=0$ розглянемо лінію $x=x(t);\ y=y(t);\ z=z(t)$,яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Дотична до лінії в заданій точці має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{\frac{dx_0}{dt}}=\frac{y-y_0}{\frac{dy_0}{dt}}=\frac{z-z_0}{\frac{dz_0}{dt}}.$$

Для різних ліній на поверхні будуть різні лінії, множина яких утворює площину, дотичну до поверхні. Підставимо рівняння лінії у рівняння поверхні:

$$F(x(t);y(t);z(t))=0.$$

Продиференціюємо цю рівність:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx(t)}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy(t)}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz(t)}{dt}=0.$$

Згадаємо вирази $\frac{d\bar r}{dt}=\frac{dx}{dt}\bar i+\frac{dy}{dt}\bar j+\frac{dz}{dt}\bar k$ та $\bar n=\frac{\partial F}{\partial x}\bar i+\frac{\partial F}{\partial y}\bar j+\frac{\partial F}{\partial z}\bar k$,

тоді рівняння означає, що скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$\left(\frac{d\bar r(t)}{dt}\cdot\bar n\right)=0,$$

а значить вектори перпендикулярні.

Висновок: рівняння дотичної площини запишеться у вигляді:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}(z-z_0)=0.$$

Відповідно рівняння нормальної прямої має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{(y-y_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{(z-z_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

Якщо поверхня задана рівнянням $z=f(x;y)$, тоді $F(x;y;z)=z-f(x;y)$, відповідно $\frac{\partial F}{\partial x}=-f'_x;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-f'_y;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=1$

і рівняння дотичної площини запишеться у вигляді:

$$z-z_0=\left.f'_x\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.f'_y\right|_{M_0}(y-y_0),$$

а рівняння нормальної прямої у вигляді:

$$\frac{x-x_0}{-\left.f'_x\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{-\left.f'_y\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{1}.$$

Приклад. Задана поверхня $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$ і на ній точка $M(1;1;1)$. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі.

Розв’язок. Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

та їх значення в заданій точці $M(1;1;1)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2.$$

Рівняння дотичної площини

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1) \qquad .$$

Рівняння нормальної прямої

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

ЛЕКЦІЯ 27
КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ФУНКЦІЇ. ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАЇЧНІЙ ФОРМІ. МОДУЛЬ І АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ТРИГОНОМЕТРИЧНА І ПОКАЗНИКОВА ФОРМИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

27.1 Поняття комплексного числа

Комплексним числом (в алгебраїчній формі) називається вираз

$$z = x + iy,$$

де x, y – дійсні числа; i – уявна одиниця, $i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$.

Числа x і y називаються відповідно дійсною і уявною частинами комплексного числа z. Позначаються

$$x = \operatorname{Re} z; \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Множина всіх комплексних чисел позначається C.

Будь-яке дійсне число x можна розглядати як комплексне число $z = x + i0 = x$, у якого уявна частина дорівнює нулю: $y = 0$. Таким чином, множина дійсних чисел R є підмножиною множини комплексних чисел C: $R \subset C$.

Комплексне число $z = iy = 0 + iy$, $y \neq 0$, у якого дійсна частина дорівнює нулю, а уявна частина відмінна від нуля, називається чисто уявним.

Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються рівними, якщо відповідно рівні їх дійсні та уявні частини:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

Комплексне число рівне нулю $z = 0$, якщо рівні нулю його дійсна та уявна частини:

$$z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Зауваження. Для комплексних чисел не існують поняття «більше», «менше».

Комплексне число $-z = -x - iy$ називається протилежним до числа $z = x + iy$.

Два комплексних числа $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$, у яких дійсні частини однакові, а уявні відрізняються тільки знаком, називаються комплексно спряженими. Очевидно, що $\bar{\bar{z}} = z$.

27.2 Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Операції додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня здійснюються за правилами дій над многочленами з врахуванням умови $i^2=-1$ і зведенням подібних.

Зокрема, додавання і віднімання комплексних чисел $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ здійснюються покомпонентно:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2);\ z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

Множення комплексних чисел $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ здійснюється за правилом множення двочленів з урахуванням умови $i^2=-1$ і зведенням подібних:

$$z_1\,z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Зауваження 1. Для множення комплексного числа $z=x+iy$ на дійсне число a досить кожну його компоненту помножити на це число a: $az=ax+iay$.

Зауваження 2. Знайдемо натуральні степені уявної одиниці: $i^2=-1$, $i^3=i^2\cdot i=-i$, $i^4=i^3\cdot i=-i^2=1$. Отже, $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$.

Ділення комплексних чисел $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$, $z_2\neq 0$ виконується так:

1) треба чисельник і знаменник дробу z_1/z_2 домножити на число $\bar{z}_2$, спряжене до знаменника z_2;

2) врахувати, що $i^2=-1$, і звести подібні;

3) почленно розділити чисельник на знаменник і одержати частку в алгебраїчній формі:

$$z_1:z_2=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\,.$$

Приклад. Виконати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі:

$$z=3(2-3i)(2-i)-(3-i)^3+5(4-5i):(3+4i)\,.$$

Розв'язання.

Виконуємо дії як над многочленами:

$$z=3(2-3i)(2-i)-(3-i)^3+5(4-5i):(3+4i)=3(4-2i-$$

$$-6i+3i^2)-27+27i-9i^2+i^3+5\cdot\frac{(4-5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=$$

$$=3(4-2i-6i-3)-27+27i+9-i+5\cdot\frac{12-16i-15i+20i^2}{9-16i^2}=$$

$$=3(1-8i)-18+26i+5\cdot\frac{12-16i-15i-20}{9+16}=$$

$$=3-24i-18+26i+\frac{-8-31i}{5}=-15+2i+\frac{-8-31i}{5}=$$

$$=(-75+10i-8-31i)/5=(-83-21i)/5=-83/5-i\cdot(21/5)\,.$$

27.3 Модуль і аргумент комплексного числа

Якщо на площині введено прямокутну декартову систему координат Oxy, то між множиною всіх точок цієї площини і множиною комплексних чисел C можна встановити взаємно однозначну відповідність: кожному комплексному числу $z = x + iy$ відповідає єдина точка $M(x; y)$ і навпаки (рис. 27.1). Дійсні числа зображуються точками осі абсцис Ox, тому вісь Ox називається дійсною віссю. Чисто уявні числа зображуються точками осі ординат Oy, тому вісь Oy називається уявною віссю. Числу $z = 0$ відповідає початок координат $O(0;0)$.

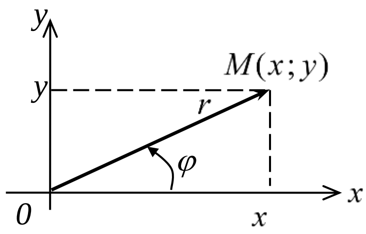


Рисунок 27.1

Координатна площина Oxy, яка зображає множину всіх комплексних чисел C, називається комплексною площиною.

Зауваження 1. Комплексне число $z = x + iy$ можна також зобразити радіус-вектором $\overrightarrow{OM}(x; y)$, що виходить із початку координат $O(0;0)$ і закінчується в точці $M(x; y)$ (рис. 27.2).

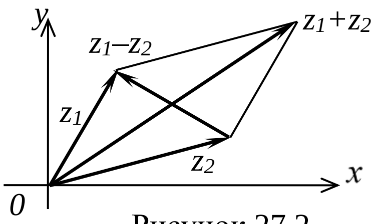


Рисунок 27.2

Зауваження 2. Додавання і віднімання комплексних чисел можна здійснювати за правилами (трикутника і паралелограма) відповідних операцій над векторами (рис. 27.2). Множення комплексних чисел можна розглядати як ще один вид (поряд зі скалярним і векторним) добутку плоских векторів.

Якщо на комплексній площині ввести також полярну систему координат $Or\varphi$ з полюсом у початку декартової системи координат і полярною віссю, суміщеною з віссю Ox, то точку $M(x; y)$, що зображає комплексне число $z = x + iy$ можна задати полярними координатами $M(r; \varphi)$.

Полярний радіус r (довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$) називається модулем комплексного числа z і позначається $|z| = r$.

Очевидно, що $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Полярний кут φ (кут між радіус-вектором $\overrightarrow{OM}$ і полярною віссю Ox) називається аргументом комплексного числа z і позначається $Arg\, z = \varphi$.

Аргумент φ, як кут повороту, визначається з точністю до сталого доданку вигляду $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ (довільного числа повних обертів).

Єдине значення φ, що задовольняє умову $-\pi < \varphi \le \pi$, називається головним значенням аргументу і позначається $\arg z$.

Отже, $Arg\, z = \arg z + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Зауваження 3. Для числа $z = 0$ модуль дорівнює нулю $r = |0| = 0$, а аргумент φ довільний.

Зауваження 4. У рівних комплексних чисел $z_1 = z_2$ модулі також рівні

$r_1 = r_2$, а аргументи зв'язані співвідношенням $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, тобто відрізняються на доданок $2\pi k$.

27.4 Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Використовуючи зв'язок декартових і полярних координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, комплексне число $z = x + iy$ можна подати у вигляді:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Вираз $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ називається тригонометричною формою комплексного числа $z = x + iy$. Модуль $r = |z|$, аргумент $\varphi = \arg z$.

Перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми задається співвідношеннями:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \varphi = arctg\frac{y}{x}.$$

Якщо звернутись до основної формули Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

то від тригонометричної форми можна перейти до показникової форми комплексного числа $z = re^{i\varphi}$.

Зауваження. З основної формули Ейлера випливають допоміжні формули Ейлера:

$$\cos\varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi};\ \sin\varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi};$$

$$\cos\varphi = \left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)/2;\ \sin\varphi = \left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)/(2i).$$

Приклад. Зобразити на комплексній площині і подати в тригонометричній та показниковій формах наступні комплексні числа, що задані в алгебраїчній формі:

$$z_1 = -\sqrt{3} + i;\ z_2 = 2 - 2i;\ z_3 = 2i;\ z_4 = -2;\ z_5 = -2 - i.$$

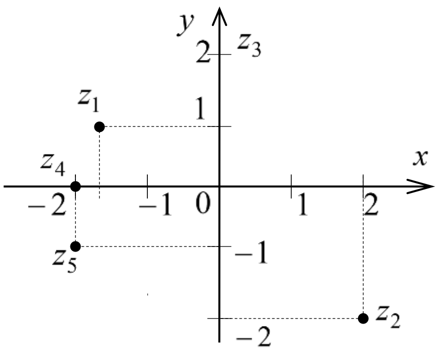


Рисунок 27.3

Розв'язання. Побудуємо задані числа на комплексній площині (рис. 27.3). Знайдемо модуль і головне значення аргументу кожного з даних чисел та запишемо їх у тригонометричній та показниковій формах:

$$z_1 = -\sqrt{3} + i:$$

$$x_1 = -\sqrt{3};\quad y_1 = 1;$$

$$|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2;$$

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\left(y_1/x_1\right) + \pi,\ \ x_1 < 0, y_1 \geq 0;$$

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\left(-1/\sqrt{3}\right) + \pi = -\pi/6 + \pi = 5\pi/6;$$

$$z_1 = 2\left(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)\right);\quad z_1 = 2\,e^{i(5\pi/6)}.$$

$$z_2 = 2 - 2i;\ x_2 = 2;\quad y_2 = -2;\ |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 2\sqrt{2};$$

$$\arg z_2 = \operatorname{arctg}(y_2/x_2),\ x_2 > 0;\ \arg z_2 = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4;$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right);\quad z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{-i(-\pi/4)}.$$

$$z_3 = 2i;\ x_3 = 0;\quad y_3 = 2;\ |z_3| = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = 2;$$

$$\arg z_3 = \pi/2,\ x = 0;\ y > 0;$$

$$z_3 = 2\left(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\right);\quad z_3 = 2\,e^{i(\pi/2)}.$$

$$z_4 = -2;\ x_4 = -2;\quad y_4 = 0;\ |z_4| = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} = 2;$$

$$\arg z_4 = \operatorname{arctg}(y_4/x_4) + \pi,\ x_4 < 0, y_4 \ge 0;$$

$$\arg z_4 = \operatorname{arctg} 0 + \pi = \pi;\ z_4 = 2(\cos\pi + i\sin\pi);\quad z_4 = 2\,e^{i\pi}.$$

$$z_5 = -2 - i;\ x_5 = -2;\quad y_5 = -1;\ |z_5| = \sqrt{x_5^2 + y_5^2} = \sqrt{5};$$

$$\arg z_5 = \operatorname{arctg}(y_5/x_5) - \pi,\ x_5 < 0, y_5 < 0;$$

$$\arg z_5 = \operatorname{arctg}(1/2) - \pi;\ z_5 = \sqrt{5}\,e^{i(\operatorname{arctg}(1/2) - \pi)};$$

$$z_5 = \sqrt{5}\left(\cos(\operatorname{arctg}(1/2) - \pi) + i\sin(\operatorname{arctg}(1/2) - \pi)\right).$$

Дії над комплексними числами в тригонометричній і показниковій формах

Якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ – два комплексні числа в тригонометричній формі, то їх добуток:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 \big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 +$$
$$+ i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\big) = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

Добутком двох комплексних чисел z_1 і z_2 є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів, а аргумент – сумі аргументів співмножників.

Отже, $z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$;

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{(\varphi_1 + \varphi_2)i};$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;\ Arg(z_1 z_2) = Arg\ z_1 + Arg\ z_2.$$

Якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ – два комплексні числа в тригонометричній формі, причому z_2 відмінне від нуля $z_2 \ne 0$, то їх частк

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= (r_1/r_2) \cdot \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

Часткою z_1/z_2 двох комплексних чисел z_1 і z_2, де дільник $z_2 \ne 0$, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого z_1 і дільника

z_2, а аргумент – різниці аргументів діленого z_1 і дільника z_2.

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

Отже,

$$\frac{z_1}{z_2}==\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right);\ \frac{z_1}{z_2}==\frac{r_1}{r_2}e^{(\varphi_1-\varphi_2)i};$$

$$|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|;\ Arg\,(z_1/z_2)=Arg\,z_1-Arg\,z_2.$$

Натуральним степенем z^n комплексного числа z називається комплексне число, отримане множенням числа z самого на себе n раз, де n – натуральне число.

Із правила множення комплексних чисел в тригонометричній формі випливає перша формула Муавра:

$$z^n=\left(r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Коренем n-го степеню $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа z називається таке комплексне число, n-й степінь якого дорівнює z.

Очевидно, що корінь n-го степеню з нуля дорівнює нулю.

Якщо комплексне число z відмінне від нуля $z\neq 0$, то корінь n-го степеню $\sqrt[n]{z}$ має рівно n різних значень, що визначаються за другою формулою Муавра:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

де $k=0,1,2,\ldots,n-1$; $\sqrt[n]{r}$ – арифметичне значення кореня з додатного числа.

На комплексній площині всі корені n-го степеню $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа $z\neq 0$ зображуються вершинами правильного n-кутника, вписаного в коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{r}$.

Приклад. Знайти всі значення кубічного кореня з одиниці.

Представимо одиницю в тригонометричній формі:

$$1=\cos 0+i\sin 0.$$

За формулою одержимо:

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{0+2k\pi}{3},$$

де k приймає значення 1 , 2 , 3 :

$$x_1=cos\,0+i\,sin\,0=1;\ x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Приклад. Піднести до степеня: $\left(\sqrt{3}-i\right)^{40}$.

Розв’язання. Запишемо число $\sqrt{3}-i$ в тригонометричній формі

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6)\right).$$

За першою формулою Муавра

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^{40}=\left(2\left(\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6)\right)\right)^{40}=$$

$$= 2^{40}\left(\cos(-20\pi/3) + i\sin(-20\pi/3)\right) = 2^{40}\left(\cos(-6\pi - 2\pi/3) +\right.$$
$$\left.+ i\sin(-6\pi - 2\pi/3)\right) = 2^{40}\left(\cos(-2\pi/3) + i\sin(-2\pi/3)\right) =$$
$$= 2^{40}\left(-1/2 + i\cdot\sqrt{3}/2\right) = -2^{39} + i\cdot 2^{39}\sqrt{3}.$$

Приклад. Знайти всі значення кореня:

а) $\sqrt{-9i}$; б) $\sqrt[3]{i-1}$.

Розв'язання.

а) Запишемо підкореневе число -9i в тригонометричній формі $-9i = 9\left(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)\right)$.

За другою формулою Муавра

$$\sqrt{-9i} = \sqrt{9\left(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)\right)} =$$
$$= \sqrt{9}\left(\cos\frac{-\pi/2 + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{-\pi/2 + 2\pi k}{2}\right) =$$
$$= 3\left(\cos(-\pi/4 + \pi k) + i\sin(-\pi/4 + \pi k)\right) \text{, де } k = 0{,}1.$$

При $k = 0$: $\sqrt{-9i} = 3\left(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right) = 3\sqrt{2}/2 - i\cdot 3\sqrt{2}/2$.

При $k = 1$: $\sqrt{-9i} = 3\left(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\right) = -3\sqrt{2}/2 + i\cdot 3\sqrt{2}/2$.

б) Запишемо підкореневе число i-1 в тригонометричній формі

$$i - 1 = \sqrt{2}\left(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\right).$$

За другою формулою Муавра

$$\sqrt[3]{i-1} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\right)} =$$
$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3}\right)$$
$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos(\pi/4 + 2\pi k/3) + i\sin(\pi/4 + 2\pi k/3)\right)$$

де k=0,1,2.:

$$k = 0:\ \sqrt[3]{i-1} = \sqrt[6]{2}\left(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i).$$
$$k = 1:\ \sqrt[3]{i-1} = \sqrt[6]{2}\left(\cos(11\pi/12) + i\sin(11\pi/12)\right).$$
$$k = 2:\ \sqrt[3]{i-1} = \sqrt[6]{2}\left(\cos(19\pi/12) + i\sin(19\pi/12)\right) =$$
$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos(-5\pi/12) + i\sin(-5\pi/12)\right).$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бермант А. Ф., Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2006. – 736 с.

2. Вища математика для електротехніків: у 3-х модулях / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова та ін. ; Харків : нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2009. – Модуль 1: Аналітична геометрія на площині. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра. Площина та пряма у просторі. Комплексні числа та функції / С .О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова. – 308 с.

3. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. – М. : Наука, 1975. – 272 с.

4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т./ Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – 416 с.

Навчальне видання

БІЗЮК Валерій Васильович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МОДУЛЬ 1

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *В. В. Бізюк*

План 2022, поз. 31Л

Підп. до друку 17.08.2022. Формат 60 × 84/16.
Електронне видання. Ум. друк. арк. 7,0.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017