МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Г. А. Кузнецова

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної і заочної форм навчання за спеціальністю 263 – Цивільна безпека)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2022

Кузнецова Г. А. Вища математика : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної і заочної форм навчання за спеціальністю 263 – Цивільна безпека / Г. А. Кузнецова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 96 с.

Автор
ст. викл. Г. А. Кузнецова

Рецензент
Л. П. Вороновська, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 9 від 10.02.2021

Конспект лекцій складено з метою допомогти студентам транспортних спеціальностей ЗВО під час підготовки до занять, заліків та іспитів з базових розділів вищої математики.

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій розроблено згідно з програмою нормативної навчальної дисципліни «Вища математика» та робочої навчальної програми щодо підготовки бакалавра за спеціальністю 263 – Цивільна безпека, який розраховано на студентів денної та заочної форм навчання.

Теоретичний матеріал структуровано та узгоджено з аудиторними лекційними заняттями, що проводяться під час вивчення модуля «Вища математика».

Конспект лекцій містить стислий теоретичний матеріал, необхідний студентам для засвоєння їх знань із вищої математики. У конспекті розміщено значну кількість прикладів розв'язання типових задач, а також задач прикладного спрямування для практичного застосування та закріплення отриманих знань стосовно вирішення професійно-зорієнтованих завдань.

ЛЕКЦІЯ 1
ВИЗНАЧНИКИ. ОБЧИСЛЕННЯ І ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ. МАТРИЦІ І ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1.1 Поняття визначника. Правила обчислення визначників

Визначником (детермінантом) n-го порядку називається число Δ_n, записане у вигляді квадратної таблиці чисел:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Позначають визначник ще як *det* від *determinate* – «визначати», або $\left| a_{ij} \right| \left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n} \right)$. Числа a_{ij} називаються ***елементами визначника***, де i – номер рядка ($i = \overline{1,n}$), а j – номер стовпця ($j = \overline{1,n}$). Елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ утворюють ***головну діагональ*** визначника, елементи $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n1}$ утворюють ***бічну діагональ*** визначника.

Для того щоб розглянути питання обчислення визначника будь-якого порядку, введемо такі поняття, як мінор та алгебраїчне доповнення.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$-го порядку, який утворюється з початкового визначника закресленням i-го рядка і j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток вигляду:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Визначник першого порядку містить лише один елемент і величина такого визначника дорівнює цьому елементу:

$$\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}.$$

Приклад 1. Визначник $\Delta_1 = |-123| = -123$.

Визначник другого порядку обчислюють за правилом: добуток елементів головної діагоналі мінус добуток елементів побічної діагоналі (рис. 1.1):

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

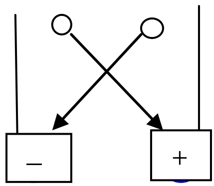


Рисунок 1.1 – Обчислення визначника другого порядку

Приклад 2. Обчислити визначник другого порядку $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = -7 - 6 = -13$.

Відповідь: $\Delta_2 = -13$.

Визначник третього порядку обчислюють за правилом Саррюса (правилом «трикутників»):

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32};$$

правило трикутників у вигляді схеми (рис. 1.2):

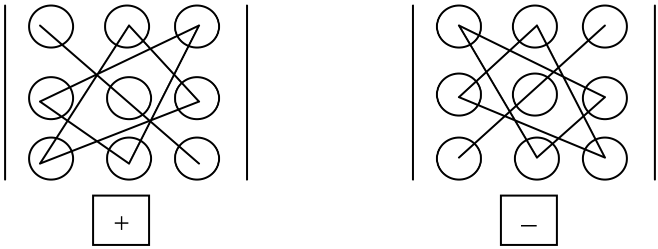


Рисунок 1.2 – Правило «трикутників» обчислення визначника третього порядку

Приклад 3. Обчислити визначник третього порядку

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0\cdot1\cdot(-1) + 2\cdot1\cdot(-2) + 1\cdot5\cdot(-2) -$$

$$-(-2)\cdot1\cdot(-2) - 1\cdot5\cdot0 - 1\cdot2\cdot(-1) = 0-4-10-4-0+2 = -16.$$

Відповідь: $\Delta_3 = -16$.

Обчислення визначника за елементами рядка (стовпця): визначник n -го порядку дорівнює сумі n добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення (***теорема Лапласа***):

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\cdot A_{kj}.$$

Приклад 4. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 4 \\ 7 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix},$$

розкладаючи його: а) за елементами 2-го рядка; б) за елементами 4-го стовпця.

Розв'язання.

а) Обчислимо визначник, розклавши його за елементами 2-го рядка:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 4 \\ 7 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + (-1) \cdot A_{22} +$$

$$+(-2) \cdot A_{23} + 5 \cdot A_{24} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot M_{21} + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot M_{22} +$$

$$+(-2) \cdot (-1)^{2+3} \cdot M_{23} + 5 \cdot (-1)^{2+4} M_{24} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 6 & 8 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -(0 + 0 + (-12) - 56 - 40 - 0) - (0 + (-84) + 210 - 392 - 0 - 0) +$$

$$+2 \cdot (0 + 56 + 42 - 0 - 0 - 0) + 5 \cdot (0 + 112 + (-18) - 0 - 0 - 60) =$$

$$= 108 + 266 + 196 + 170 = 740;$$

б) Обчислимо визначник, розклавши його за елементами 4-го стовпця:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 8 & 4 \\ 7 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot A_{14} + 5 \cdot A_{24} +$$

$$+4 \cdot A_{34} + 0 \cdot A_{44} = 7 \cdot (-1)^{1+4} \cdot M_{14} + 5 \cdot (-1)^{2+4} \cdot M_{24} +$$

$$+4 \cdot (-1)^{3+4} \cdot M_{34} + 0 \cdot (-1)^{4+4} M_{44} = -7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 6 & 0 & 8 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+5\cdot\begin{vmatrix}0 & 2 & -3\\ 6 & 0 & 8\\ 7 & 1 & 5\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}0 & 2 & -3\\ 1 & -1 & -2\\ 7 & 1 & 5\end{vmatrix}+0=$$

$$=-7\cdot(0+(-56)+(-12)-0-8-(-30))+5\cdot(0+112+(-18)-0-$$

$$-60-0)+(-4)\cdot(0+(-28)+(-3)-21-0-10)=$$

$$=322+170+248=740.$$

Відповідь: $\Delta_4=740$.

1.2 Властивості визначників

1. Величина визначника не зміниться, якщо елементи рядків та стовпців поміняти місцями

Приклад 5. Перевірити першу властивість для визначника $\Delta_2=\begin{vmatrix}-9 & 8\\ 1 & 5\end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо заданий визначник за правилом: $\Delta_2=\begin{vmatrix}-9 & 8\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-9\cdot 5-8\cdot 1=-45-8=-53$. Поміняємо елементи рядків та стовпців місцями і обчислимо отриманий визначник:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-9 & 1\\ 8 & 5\end{vmatrix}=-9\cdot 5-1\cdot 8=-45-8=-53.$$

Отримали два рівних результати.

Відповідь: $\Delta_2=-53$.

2. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на число $\lambda\neq 0$, то величина визначника зміниться у λ разів:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. \\ \lambda \cdot a_{i1} & \lambda \cdot a_{i2} & \dots & \lambda \cdot a_{ij} & \dots & \lambda \cdot a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Приклад 6. Перевірити другу властивість для визначника $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -9 & 12 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо заданий визначник за правилом: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -9 & 12 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 1 = 3 \cdot (-15 - 4) =$
$= 3 \cdot (-19) = -57$.

З іншого боку,

$$\Delta_2 = 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-15 - 4) = 3 \cdot (-19) = -57 .$$

Отримали два рівні результати.

Відповідь: $\Delta_2 = -57$.

3. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то такий визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Нуль є спільним множником рядка (стовпця), тобто спільним множником визначника (за другою властивістю визначників), значить визначник дорівнює нулю.

Приклад 7. Перевірити третю властивість для визначника

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & 6 & -5 \\ 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо заданий визначник за правилом:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & 6 & -5 \\ 4 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot 3 \cdot 0 + 6 \cdot 9 \cdot 0 + (-5) \cdot 4 \cdot 0 -$$

$$-(-5) \cdot 3 \cdot 0 - 6 \cdot 4 \cdot 0 + (-5) \cdot 9 \cdot 0 = 0,$$

отже, властивість виконується.

Відповідь: $\Delta_3 = 0$.

4. Якщо визначник має два однакові рядки (стовпця), то такий визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 8. Перевірити четверту властивість для визначника $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 57 & 11 \\ 57 & 11 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо заданий визначник за правилом:

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 57 & 11 \\ 57 & 11 \end{vmatrix} = 57 \cdot 11 - 11 \cdot 57 = 0$, властивість виконується.

Відповідь: $\Delta_2 = 0$.

5. Якщо два рядки (стовпця) визначника пропорційні, то такий визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{i1} & k \cdot a_{i2} & k \cdot a_{i3} & \dots & k \cdot a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. За другою властивістю визначників винесемо коефіцієнт пропорційності k за знак визначника, тоді отримаємо визначник з двома однаковими рядками, а за четвертою властивістю він дорівнює нулю.

6. Якщо два рядка (стовпця) визначника переставити місцями, то отримаємо визначник протилежного знаку:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Приклад 9. Перевірити шосту властивість для визначника $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо заданий визначник за правилом: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -4 - 6 = -10$, тепер переставимо місцями 1-й і 2-й стовпці, обчислимо новий визначник:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 6 + 4 = 10,$$

отримали протилежне число, отже, властивість виконується.

7. Якщо всі елементи k-того рядка (стовпця) визначника подати у вигляді суми двох доданків $a_k + b_k$ і $(k = \overline{1, n})$, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, у яких всі рядки (стовпці), крім k-того, такі самі, як у початковому визначнику, а k-тий рядок (стовпець) одного з визначників складається з елементів a_k, а другого – з елементів b_k:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & a_{k3}+b_{k3} & \dots & a_{kn}+b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Приклад 10. Перевірити сьому властивість для визначника $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5+8 & 1+3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо заданий визначник за правилом:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5+8 & 1+3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1+3) - 2 \cdot (5+8) = -4 - 26 = -30,$$

тепер представимо визначник у вигляді суми двох визначників і обчислимо цю суму:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5+8 & 1+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot 1 - 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 8 = -1 - 10 - 3 - 16 = -30,$$

отримали рівні значення, отже, властивість виконується.

8. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на одне й те саме число та додати до відповідних елементів іншого рядка (стовпця), то величина визначника не зміниться:

$$\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1}+\lambda a_{i1} & a_{k2}+\lambda a_{i2} & \ldots & \ldots & a_{kn}+\lambda a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Доведення. Визначник, який стоїть у правій частині рівності, можна представити у вигляді суми двох визначників, один з яких дорівнює даному, а другий має два пропорційні один одному рядка і, значить, дорівнює нулю (властивість п'ять). Таким чином, величина даного визначника не змінилась.

Зауваження. Восьма властивість дозволяє утворювати нульові елементи у визначнику, що потім робить його обчислення дуже простим

Обчислення визначників шляхом елементарних перетворень: під ***елементарними перетвореннями визначника*** розуміють наступні операції:

1) перестановка місцями двох рядків (стовпців), при цьому визначник змінює свій знак;

2) множення рядка (стовпця) на ненульове число, при цьому визначник множиться на це число;

3) додавання до елементів одного рядка (стовпця) визначника відповідних елементів другого рядка (стовпця), які помножені на одне й теж саме число.

Ідея методу така: за допомогою елементарних перетворень рядків і стовпців звести визначник до трикутного вигляду і обчислити його, знайшовши добуток елементів, які утворюють головну діагональ. Або за допомогою елементарних перетворень отримати рядок (стовпчик), який містить тільки один ненульовий елемент, а потім обчислити визначник, розклавши його за елементами цього рядка (стовпчика). Це дозволяє знизити порядок визначника на одиницю.

Зауваження. Якщо отримуємо нулі в рядку, то працюємо зі стовпцями, і навпаки – якщо отримуємо нулі у стовпчику, то працюємо з рядками.

Визначник, у якому всі елементи, що розміщується нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***визначником верхнього трикутного вигляду***:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Визначник, в якому всі елементи, які знаходяться вище головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***визначником нижнє трикутного вигляду***:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Зауваження. Будь-який визначник можна привести до трикутного вигляду, користуючись його основними властивостями

Теорема. Визначник трикутного вигляду дорівнює добутку елементів його головної діагоналі (без доведення).

Приклад 11. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$, звівши його до трикутного вигляду.

Розв'язання. Поміняємо місцями перший і другий рядки (знак визначника зміниться на протилежний за шостою властивістю); помножимо перший рядок на -2 і додамо до третього, потім на -3 і додамо до четвертого; помножимо другий рядок на -1 і додамо до третього, потім на -2 і додамо до четвертого; помножимо третій рядок на $-17/6$ і додаємо до четвертого:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&2&-3&7\\1&-1&-2&5\\2&0&-1&3\\3&1&5&0\end{vmatrix}\overset{r_1\rightleftarrows r_2}{=}-\begin{vmatrix}1&-1&-2&5\\0&2&-3&7\\2&0&-1&3\\3&1&5&0\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1\cdot(-2)+r_3\to r_3\\ r_1\cdot(-3)+r_4\to r_4}}{=}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&-1&-2&5\\0&2&-3&7\\0&2&3&-7\\0&4&11&-15\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2\cdot(-1)+r_3\to r_3\\ r_2\cdot(-2)+r_4\to r_4}}{=}-\begin{vmatrix}1&-1&-2&5\\0&2&-3&7\\0&0&6&-14\\0&0&17&-29\end{vmatrix}\overset{r_3\cdot(-17/6)+r_4\to r_4}{=}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&-1&-2&5\\0&2&-3&7\\0&0&6&-14\\0&0&0&32/3\end{vmatrix}=-1\cdot 2\cdot 6\cdot 32/3=-128.$$

Відповідь: $\Delta=-128$.

1.3 Поняття матриці. Типи матриць

Матриця – це прямокутна таблиця чисел (або алгебраїчних символів чи математичних функцій), яка складається з m рядків та n стовпців:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Приклад 1. $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\3&7&1\end{pmatrix}$ – матриця складається з двох рядків і трьох стовпців.

Позначають матрицю символом $A=\left\|a_{ij}\right\|$, де $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Числа a_{ij} називаються ***елементами матриці***, де i – номер рядка ($i=\overline{1,m}$), а j – номер стовпця ($j=\overline{1,n}$).

Розмір матриці визначається кількістю її рядків і кількістю стовпців. Позначають символом $m\times n$, де m – кількість рядків, n – кількість стовпців.

Приклад 2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ – задана матриця складається з двох рядків і семи стовпців, тобто її розмір 2×7.

Типи матриць

Квадратна матриця – це матриця, число рядків якої дорівнює числу стовпців, тобто її розмір $m\times m$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -9 \\ 0 & 8 & 5 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ – задана матриця складається з трьох рядків і трьох стовпців, тобто її розмір 3×3.

Головна діагональ матриці складається з елементів, розташованих з лівого верхнього кута до правого нижнього кута $A=\left(\searrow\right)$.

Бічна діагональ матриці складається з елементів, розташованих з правого верхнього кута до лівого нижнього кута.

Матриця, всі діагональні елементи якої не дорівнюють нулю, називається ***діагональною:***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, а всі інші – нулі, називається ***одиничною***

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нульова матриця – це матриця, елементи якої дорівнюють нулю

$$O \equiv \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В системі матриць нульова матриця має властивості звичайного нуля

$$A \cdot O = O \text{ і } O \cdot A = O.$$

Матриця розміру $1 \times n$ називається ***вектор-рядком*** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$.

Матриця розміру $m \times 1$ називається ***вектор-стовпчиком***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Дві матриці A і B називаються ***рівними***, якщо вони однакового розміру та відповідні елементи $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ цих матриць рівні.

Приклад 4. Матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ є рівними, оскільки їхні розміри однакові – 2×2, а відповідні елементи рівні. Отже, $A=B$.

Приклад 5. Матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ не рівні, оскільки їхні розміри однакові – 2×2, а відповідні елементи не рівні. Тобто, $A\neq B$.

Матриця називається ***трикутною,*** якщо всі її елементи, які розташовані вище або нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ або } A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця, що утворюється з матриці A $(m\times n)$ заміною рядків стовпцями (або навпаки), називається ***транспонованою матрицею*** відносно матриці A і позначається A^T $(n\times m)$:

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 6. Знайти транспоновану матрицю A^T відносно матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Щоб отримати транспоновану матрицю A^T, замінимо перший рядок матриці A на перший стовпчик матриці

A^T, а другий рядок матриці A на другий стовпчик матриці A^T, отримаємо: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Матриця A називається ***симетричною***, якщо $A^T = A$, отже, $a_{ji} = a_{ij}$. Наприклад:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ЛЕКЦІЯ 2
ДІЇ З МАТРИЦЯМИ.
СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Операції над матрицями

Додавання (віднімання) матриць: додавати можна лише матриці однакового розміру.

Сумою (різницею)двох матриць A і B розміру $m \times n$ називається матриця того ж розміру, кожен елемент якої є сумою (різницею) елементів відповідних матриць A і B:

$$A + B = C,\, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij};$$

$$A - B = C,\, c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Приклад 7. Знайти суму та різницю матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} -9 & -7 & -5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знайдемо суму матриць:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+(-9) & -2+(-7) & 0+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -9 & -5 \end{pmatrix},$$

тепер знайдемо різницю матриць:

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 1-(-9) & -2-(-7) & 0-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць на число: добутком матриці A ***на число*** λ називається матриця B, кожен елемент якої є добутком числа λ на відповідний елемент матриці A:

$$B = \lambda \cdot A, b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}.$$

Приклад 8. Знайти добуток матриці $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = -3$.

Розв'язання.

$$B = -3 \cdot A = \begin{pmatrix} -3 \cdot 6 & -3 \cdot 7 \\ -3 \cdot (-2) & -3 \cdot (-3) \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -21 \\ 6 & 9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць: множити можна матриці лише тоді, коли число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої. В добутку отримаємо матрицю, у якої стільки рядків, скільки у першої матриці, і стільки стовпців, скільки у другої

Добутком матриць $A = \left\| a_{is} \right\|$ (розміру $m \times n$) і $B = \left\| b_{sj} \right\|$ (розміру $n \times k$), називається матриця $C = \left\| c_{ij} \right\|$ (розміру $m \times k$), елементи якої обчислюються за правилом:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj},$$

де $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, k}$.

Зауваження 1. Загалом, операція множення матриць не комутативна, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$, навіть коли це можливо.

Приклад 9. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і

$B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти добуток матриць $A\cdot B$ і $B\cdot A$, якщо це можливо.

Розв'язання.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 0+2\cdot 1 & 1\cdot(-1)+2\cdot 3 & 1\cdot(-2)+2\cdot 4 \\ -2\cdot 0+(-3)\cdot 1 & -2\cdot(-1)+(-3)\cdot 3 & -2\cdot(-2)+(-3)\cdot 4 \\ 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot(-1)+1\cdot 3 & 0\cdot(-2)+1\cdot 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0+2 & -1+6 & -2+8 \\ 0-3 & 2-9 & 4-12 \\ 0+1 & 0+3 & 0+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -3 & -7 & -8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+(-2)\cdot 0 & 0\cdot 2+(-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot 1 \\ 1\cdot 1+3\cdot(-2)+4\cdot 0 & 1\cdot 2+3\cdot(-3)+4\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0+2+0 & 0+3-2 \\ 1-6+0 & 2-9+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

У розглянутому прикладі можливо було виконати множення $A\cdot B$ і $B\cdot A$. В результаті ми отримали матриці з різними елементами та різного розміру. У першому випадку отримали матрицю розміром 3×3, а в другому – 2×2.

Зауваження 2. Операція множення можлива завжди для квадратних матриць однакового розміру.

Рангом матриці A ($rangA$ або $r(A)$) розміру $m\times n$ називається таке ціле число r, яке дорівнює найбільшому порядку мінору, відмінного від нуля, цієї матриці. Таких мінорів може бути декілька.

Теорема. Ранг матриці не змінюється від елементарних перетворень матриці:

1) перестановка місцями рядків (стовпців);

2) множення рядка (стовпця) на ненульове число;

3) додавання до елементів одного рядка (стовпця) матриці відповідних елементів другого рядка (стовпця), що помножені на одне й теж саме число;

4) викреслювання рядка (стовпця), всі елементи якого дорівнюють нулю;

5) заміна рядків відповідними стовпцями, заміна рядків відповідними стовпцями, і навпаки.

Приклад 10. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Викреслюємо з матриці A другий рядок, другий, третій і четвертий стовпці, отримаємо матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$, яка є еквівалентною до A. Так як $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11-10=1\neq 0$, то $r(A)=2$.

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E,$$

де E – одинична матриця.

Квадратна матриця A $n-$го порядку називається ***невиродженою (несингулярною)***, якщо її визначник $\det A$ не дорівнює нулю. В протилежному випадку матриця називається ***виродженою (сингулярною).***

Теорема. Будь-яка невироджена матриця A має єдину обернену матрицю A^{-1}.

Алгоритм знаходження оберненої матриці:

1) обчислити визначник матриці $\det A$;

2) знайти транспоновану матрицю A^{T};

3) обчислити алгебраїчні доповнення для кожного елемента транспонованої матриці;

4) записати обернену матрицю за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix};$$

5) виконати перевірку – обчислити $A^{-1} \cdot A = E$ або $A \cdot A^{-1} = E$

Приклад 11. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знайдемо визначник матриці $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 4 - 0 - 56 - 1 = -59 \neq 0,$$

отже, матриця A є невиродженою, тобто має обернену.

Знайдемо транспоновану матрицю $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Обчислимо алгебраїчні доповнення для кожного елемента транспонованої матриці:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 28 = -31,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 0) = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(1 - 4) = 3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 0) = -8,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 3 = -10,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -(14 - 1) = -13,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7.$$

Отже, $A^{-1} = \dfrac{1}{-59} \begin{pmatrix} -31 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -8 \\ -10 & -13 & 7 \end{pmatrix}$.

Зробимо перевірку:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{-59} \begin{pmatrix} -31 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -8 \\ -10 & -13 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-59} \begin{pmatrix} -62 - 1 + 4 & -31 + 3 + 28 & 0 + 4 - 4 \\ 6 + 2 - 8 & 3 - 6 - 56 & 0 - 8 + 8 \\ -20 + 13 + 7 & -10 - 39 + 49 & 0 - 52 - 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-59} \begin{pmatrix} -59 & 0 & 0 \\ 0 & -59 & 0 \\ 0 & 0 & -59 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

отже, обернена матриця знайдена правильно.

Відповідь: $A^{-1} = -\dfrac{1}{59} \begin{pmatrix} -31 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -8 \\ -10 & -13 & 7 \end{pmatrix}$.

2.2 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яка складається з m рівнянь з n невідомими, називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де x_j – ***невідомі***, a_{ij} – ***коефіцієнти системи***, b_i – ***вільні члени*** ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

Такі системи зручно записувати у ***матричній формі*** $A \cdot X = B$.

A – матриця коефіцієнтів, яка називається ***основною матрицею***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

X – вектор-стовпчик невідомих x_j:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},$$

B – вектор-стовпчик вільних членів b_i,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Система називається ***однорідною,*** якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю $(b_i = 0 \ \ (i = \overline{1,m}))$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Система називається ***неоднорідною,*** якщо хоча б один вільний член не дорівнює нулю

Розширеною матрицею системи називається матриця $\overline{A}$, яка доповнена стовпцем вільних членів

$$\overline{A} = \left(A \middle| B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Розв'язком системи називається сукупність n чисел, які при підстановці замість невідомих в систему рівнянь обертають всі рівняння у тотожності

Система рівнянь називається ***сумісною,*** якщо вона має хоча б один розв'язок; ***несумісною,*** якщо вона не має жодного розв'язку

Система рівнянь називається ***визначеною,*** якщо вона має тільки один розв'язок; ***невизначеною,*** якщо вона має більш, ніж один розв'язок

Теорема Кронекера – Капеллі. Система лінійних алгебраїчних рівнянь є сумісною, якщо ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці системи.

Якщо ранг сумісної системи дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранг сумісної системи менший за число невідомих, то система має нескінченну множину розв'язків

Приклад 12. Переконатися, що система

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

сумісна і невизначена.

Розв'язання. Для знаходження рангу основної матриці знайдемо мінор найбільшого порядку, відмінний від нуля:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \; M_1 = 3 \neq 0, \; M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-6+1) - 1 \cdot (-18+3) + 2 \cdot (6-6) = 0,$$

отже найбільшим мінором, відмінним від нуля, є мінор M_2, значить $rang\, A = 2$.

Тепер знайдемо ранг розширеної матриці $\overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Для визначення рангу, зведемо матрицю $\overline{A}$ до ступінчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень, які не змінюють рангу матриці. Помножимо перший рядок на -2 і додамо до другого, потім на -1 і додамо до третього, отримаємо:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

тепер помножимо другий рядок на -1 і додамо до третього рядка, отримаємо:

$$\sim\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -5 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\ rang\,\tilde{A}=2\ .$$

Оскільки $rang\,A = rang\,\tilde{A} = r = 2 < n = 3,$ то система сумісна і невизначена.

2.3 Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

Для СЛАР, яка має n рівнянь і n невідомих, основна матриця виглядає так:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці називається *визначником системи*:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Якщо визначник системи не дорівнює нулю $\Delta \neq 0$, тоді СЛАР має єдиний розв’язок, який знаходять за *формулами Крамера*:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\dots,x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ_j ($j=\overline{1,n}$) – визначник, отриманий з визначника системи Δ, заміною j-го стовпчика стовпчиком вільних членів B.

Якщо визначник системи дорівнює нулю $(\Delta = 0)$, тоді маємо два випадки:

1) система несумісна, тобто не має розв’язків, якщо хоча

б один з $\Delta_j \neq 0$;

2) система невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків, якщо всі $\Delta_j = 0$.

Зауваження. Однорідна система рівнянь завжди сумісна, тому що завжди існує тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Тобто, якщо визначник однорідної системи $\Delta \neq 0$, тоді система має єдиний нульовий розв'язок. А якщо $\Delta = 0$, тоді однорідна система має нескінченну множину розв'язків.

Приклад 13. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера і зробити перевірку:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 1; \\ x + 2y - 3z = 1; \\ 2x - y - z = 2. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 3 + 12 + 12 - 2 - 9 = 10 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 + 12 + 12 - 2 - 3 = 20,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 6 - 6 + 6 + 1 + 18 = 10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 1 - 4 - 4 + 3 + 4 = 10,$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{10} = 1, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{10}{10} = 1.$$

Виконаємо перевірку:

$$\begin{cases} 3\cdot 2-2\cdot 1-3\cdot 1=6-2-3=1; \\ 2+2\cdot 1-3\cdot 1=2+2-3=1; \\ 2\cdot 2-1-1=4-1-1=2. \end{cases}$$

Відповідь: $x=2$, $y=1$, $z=1$.

2.4 Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці

Розглянемо СЛАР, яка має n рівнянь і n невідомих, яка записана у матричній формі:

$$A\cdot X=B$$

Якщо матриця A – невироджена ($\det A\neq 0$), то вона має обернену матрицю A^{-1}, тоді

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B,$$

$$E\cdot X=A^{-1}\cdot B,$$

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

Приклад 14. Розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці:

$$\begin{cases} 3x-2y-3z=1; \\ x+2y-3z=1; \\ 2x-y-z=2. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник системи:

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-6+3+12+12-2-9=10\neq 0.$$

Транспонуємо основну матрицю: $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3&1&2\\-2&2&-1\\-3&-3&-1\end{pmatrix}$,

знайдемо її алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}2&-1\\-3&-1\end{vmatrix}=-2-3=-5,$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}-2&-1\\-3&-1\end{vmatrix}=-(2-3)=1,$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}-2&2\\-3&-3\end{vmatrix}=6+6=12,$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&2\\-3&-1\end{vmatrix}=-(-1+6)=-5,$$

$$A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}3&2\\-3&-1\end{vmatrix}=-3+6=3,$$

$$A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&1\\-3&-3\end{vmatrix}=-(-9+3)=6,$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-1-4=-5,$$

$$A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&2\\-2&-1\end{vmatrix}=-(-3+4)=-1,$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}3&1\\-2&2\end{vmatrix}=6+2=8,\ A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-5&1&12\\-5&3&6\\-5&-1&8\end{pmatrix},$$

$$X=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-5&1&12\\-5&3&6\\-5&-1&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-5\cdot1+1\cdot1+12\cdot2\\-5\cdot1+3\cdot1+6\cdot2\\-5\cdot1-1\cdot1+8\cdot2\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}20\\10\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$x=2,\ y=1,\ z=1.$$

Відповідь: $x=2$, $y=1$, $z=1$.

2.5 Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса

Розглянемо СЛАР, яка має m рівнянь і n невідомих

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Нехай A – основна матриця, $\overline{A}$ – розширена матриця системи. Метод Гауса складається з двох етапів:

1) на першому етапі (прямий хід) послідовно виключають невідомі за допомогою рівносильних перетворень системи (елементарних перетворень розширеної матриці системи). В результаті система (розширена матриця системи) зводиться до ступінчатої форми (трикутного вигляду);

2) на другому етапі (обернений хід) розв'язують отриману еквівалентну систему (знаходять невідомі) знизу-догори.

Приклад 15. Розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 1; \\ x + 2y - 3z = 1; \\ 2x - y - z = 2. \end{cases}$$

Розв'язання.

1. Прямий хід. Запишемо систему у вигляді розширеної

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Поміняємо місцями перший і другий рядки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Помножимо перший рядок на -3 і додамо до другого, потім на -2 і додамо до третього, отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & 6 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Помножимо другий рядок на 5, третій на -8 і додамо, отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right).$$

2. Обернений хід. Тепер систему можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x+2y-3z=1; \\ \quad -8y+6z=-2; \\ \qquad -10z=-10. \end{cases}$$

З третього рівняння знаходимо: $z=1$, підставляємо в друге рівняння: $-8y+6\cdot 1=-2$, звідки $y=1$. Підставляємо все в перше рівняння $x+2\cdot 1-3\cdot 1=1$, тоді $x=2$.

Відповідь: $x=2$, $y=1$, $z=1$.

Приклад 16. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0; \\ 2x_1-x_2+3x_3=0; \\ 3x_1-5x_2+4x_3=0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Запишемо систему у вигляді розширеної матриці:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -5 & 4\end{pmatrix}.$$

Помножимо перший рядок на (-2) і додамо до другого, потім на (-3) і додамо до третього, отримаємо:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -7 & -1\\ 0 & -14 & -2\end{pmatrix}.$$

Помножимо другий рядок на (-2) і додамо до третього:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -7 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Тоді систему можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=0;\\ \quad -7x_2-x_3=0;\\ \qquad\quad 0\cdot x_3=0.\end{cases}$$

З третього рівняння маємо, що x_3 може бути довільним дійсним числом. Нехай $x_3=t$. Підставимо в друге рівняння $-7x_2-t=0$, звідки $x_2=-\dfrac{t}{7}$. Підставимо все в перше рівняння:

$$x_1+3\cdot\left(-\frac{t}{7}\right)+2t=0,\quad x_1-\frac{3t}{7}+2t=0,\quad x_1=\frac{3t}{7}-2t,$$

$$x_1=\frac{3t-14t}{7},\quad x_1=\frac{-11t}{7}.$$

Відповідь: $x_1=-\dfrac{11t}{7}$, $x_2=-\dfrac{t}{7}$, $x_3=t$, $x\in R$.

ЛЕКЦІЯ 3
ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

3.1 Вектори: основні визначення

Вектор – це спрямований відрізок, який позначають однією малою латинською буквою $\vec{a}$, або двома великими латинськими $\overline{AB}$, де перша A – це ***початок вектора***, B – ***кінець вектора***, $\overline{AB} = \vec{a}$ (рис. 3.1).

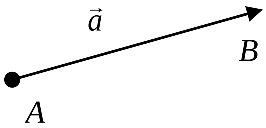


Рисунок 3.1 – Зображення довільного вектора

Довжина вектора, або ***модуль*** вектора, – це скалярна величина вектора (величина додатна):

$$|\vec{a}| = |\overline{AB}|.$$

Нуль-вектор $\left(\vec{0}\right)$ – це вектор, у якого початок і кінець співпадають $\overrightarrow{AA}$ (рис. 3.2)

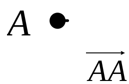


Рисунок 3.2 – Зображення нуль-вектора

Колінеарні вектори – це вектори, які лежать на одній прямій або розташовані на паралельних (рис. 3.3).

$$\vec{a} \,||\, \vec{b}\,,\ \vec{a} \,||\, \vec{c}\,,\ \vec{c} \,||\, \vec{b}$$

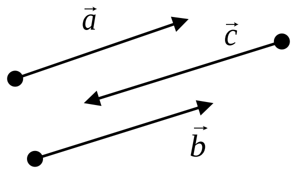


Рисунок 3.3 – Зображення колінеарних векторів

Рівними векторами називають вектори, які однаково спрямовані та мають однакову довжину.

Зауваження. Два вектори рівні тільки тоді, коли їх можна сумістити без повороту.

Одиничним вектором (або ***ортом***) називають вектор, довжина якого дорівнює одиниці:

$$|\vec{a}| = 1.$$

Протилежні вектори – це два вектори, які мають протилежні напрями та рівні модулі (рис. 3.4)

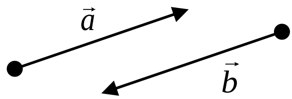


Рисунок 3.4 – Зображення протилежних векторів

3.2 Дії над векторами

1. ***Додавання***

Правило трикутника (рис. 3.5): сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають третій вектор $\vec{c}$, початок якого співпадає з початком першого вектора $\vec{a}$, а кінець з кінцем другого вектора $\vec{b}$.

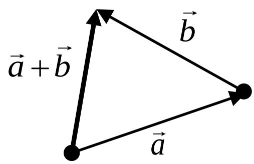


Рисунок 3.5 – Правило трикутника для суми векторів

Правило паралелограма (рис. 3.6): якщо доданки $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, то суму $\vec{a}+\vec{b}$ знаходять завдяки таким побудовам: на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуємо паралелограм. Діагональ цього паралелограма й буде сумою $\vec{a}+\vec{b}$.

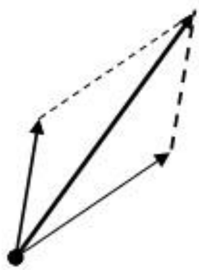


Рисунок 3.6 – Правило паралелограма для суми векторів

Сумою декількох векторів є вектор, отриманий унаслідок численних послідовних додавань векторів. Тобто, такий вектор, початок якого співпадає з початком першого вектора-доданка, а кінець – з кінцем останнього вектора-доданка.

Таке правило називають ***правилом многокутника*** або *правилом ланцюжка* (рис. 3.7):

$$\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{f}$$

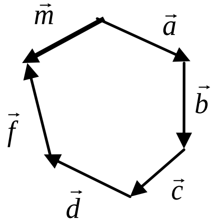


Рисунок 3.7 – Правило многокутника для суми векторів

Зауваження. Сума протилежних векторів дорівнює нуль-вектору: $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$.

Додавання векторів є комутативним: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Додавання векторів є асоціативним:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right); \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}.$$

2. ***Віднімання.***

Правило трикутника (рис. 3.8): щоб отримати різницю $\vec{a} - \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ достатньо привести вектори до спільного початку, а потім побудувати вектор, який має початком кінець першого вектора $\vec{a}$ та кінець у кінцевій точці вектора $\vec{b}$.

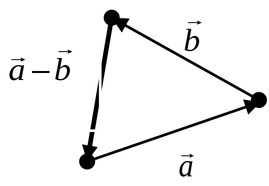


Рисунок 3.8 – Правило трикутника для різниці векторів

Зауваження. Модуль різниці може бути меншим за модуль зменшувального (довжини вектора $\vec{a}$), але й може бути більшим або ж рівним.

Правило паралелограма (рис. 3.9): щоб отримати різницю $\vec{a}-\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ достатньо привести вектори до спільного початку та побудувати паралелограм. Діагональ отриманого паралелограма, яка з'єднуватиме кінцеву точку вектора $\vec{a}$ з кінцевою точкою вектора $\vec{b}$, і буде вектором різниці $\vec{a}-\vec{b}$.

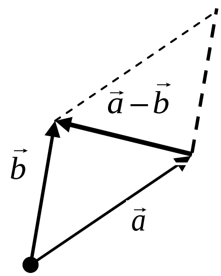


Рисунок 3.9 – Правило паралелограма для різниці векторів

3. ***Множення вектора на число.***

Щоб помножити вектор $\vec{a}$ на число λ (яке не дорівнює нулю), необхідно побудувати новий вектор, довжина якого помножена на λ, а його напрям співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda>0$, або має протилежний напрям, якщо $\lambda<0$.

Властивості множення на число (аналогічні основним властивостям множення чисел):

$$\mu(\lambda\vec{a})=(\mu\lambda)\vec{a};$$

$$(\mu+\lambda)\vec{a}=\mu\vec{a}+\lambda\vec{a};$$

$$\mu\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)=\mu\vec{a}+\mu\vec{b}-\mu\vec{c};\ \lambda\vec{a}=0,$$

якщо $\lambda=0$ або $\vec{a}=0$.

Будь-який вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді

$$\vec{a}=\vec{a}_0\cdot|\vec{a}|,$$

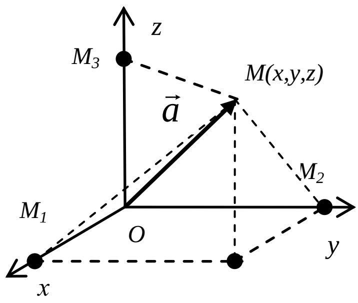
де $\vec{a}_0$ – орт, спрямований однаково з вектором $\vec{a}$.

Лінійною комбінацією векторів називають вираз

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\ldots+\lambda_n\vec{c},$$

де λ_1, λ_2, …, λ_n – довільні числа.

3.3 Координати вектора. Скалярний добуток



Будь-який вектор можна розкласти на три доданки, які лежать на осях координат:

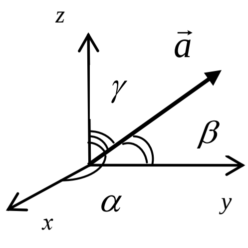
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

Якщо на кожній координатній осі (Ox , Oy , Oz відповідно) відкласти одиничні вектори (орти) та позначити їх $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, то вектор $\vec{a}$ матиме таке розкладання:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де x , y , z – координати вектора $\vec{a}$. Записують: $\vec{a} = \left(\overline{x, y, z}\right)$.

Напрямні косинуси вектора (рис. 3.10) $\vec{a} = (x, y, z)$ – це косинуси кутів α , β , γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з додатним напрямом відповідної осі Ox , Oy , Oz та які можна знайти за формулами:



$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Рисунок 3.10 – Напрямні косинуси вектора у просторі

Скалярним добутком векторів називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Позначають: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $(\vec{a},\vec{b})$.

Зауваження. Знак скалярного добутку залежить від кута між векторами. Так, якщо кут φ – тупий, то скалярний добуток буде від'ємним, оскільки косинус тупого кута має від'ємне значення; якщо кут φ – гострий, то скалярний добуток буде додатним, тому що косинус гострого кута – додатний.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ ***у координатній формі***:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Скалярний добуток у ***проекціях векторів*** $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}$.

Фізичний зміст скалярного добутку $A=\vec{F}\cdot\vec{s}$, де A – це робота сили $\vec{F}$ при переміщенні $\vec{s}$.

Обчислення косинуса кута між векторами

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

де $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$, $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}$, $|\vec{b}|=\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}$.

Властивості скалярного добутку:

1. Властивість *комутативності:* $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. Властивість *розподілення:*

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

3. Властивість *асоціативності:*

$$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\cdot(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}).$$

4. *Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів* (тобто кут між ними становить 90^0). Якщо вектори

перпендикулярні то їх скалярний добуток векторів дорівнює нулю.

5. Скалярний добуток вектора на самого себе називають *скалярним квадратом:*

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2, \vec{a}^2=x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}.$$

Приклад 1. Перевірити на ортогональність вектори $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ та $\vec{b}=-7\vec{i}-2\vec{j}+8\vec{k}$.

Розв'язання. Знайдемо скалярний добуток векторів

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-7)-3\cdot(-2)+1\cdot 8=-14+6+8=0.$$

Отже, задані вектори перпендикулярні, тому що скалярний добуток заданих векторів дорівнює нулю.

Приклад 2. Визначити роботу сили $\overrightarrow{F}(-2,4,3)$ під час руху з точки $A(-2,3,-4)$ до точки $B(2,-3,4)$.

Розв'язання. Знайдемо вектор $\vec{s}$:

$$\vec{s}=\overrightarrow{AB}=(2+2,-3-3,4+4)=(4,-6,8).$$

Обчислимо роботу сили

$$A=\overrightarrow{F}\cdot\vec{s}=-2\cdot 4+4\cdot(-6)+3\cdot 8=-8-24+24=-8.$$

Відповідь:–8.

3.4 Векторний добуток

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ та $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ називається третій вектор $\vec{c}$, який задовольняє такі умови:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний кожному з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) модуль вектору $\vec{c}$ дорівнює добутку модулів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними: $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$;

3) трійка векторів та вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ мають однакову орієнтацію.

Позначають: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ або $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

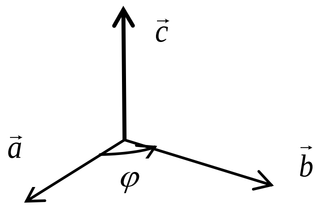


Рисунок 3.11 – Векторний добуток векторів

Зауваження. Кут φ відкладається проти ходу годинникової стрілки.

Векторний добуток векторів $\vec{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ і $\vec{b} = \left(x_2, y_2, z_2\right)$ ***у координатній формі***

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Векторний добуток вектора на самого себе– $\vec{0} = \vec{a} \times \vec{a}$.

Геометричний зміст векторного добутку: модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограму, побудованого на цих векторах

$$S_{паралелограма} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|; \; S_{трикутника} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

Фізичний зміст векторного добутку: момент $\vec{M}$ сили $\vec{F}$ відносно точки A дорівнює векторному добутку сила $\vec{F}$, прикладеної у точці B, а вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$ (плече сили $\vec{F}$) спрямований від точки A до точки B:

$$\overrightarrow{M} = \vec{F} \times \vec{s}.$$

Умова колінеарності векторів (паралельність векторів):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}, \text{ якщо } \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Властивості векторного добутку:

1. При перестановці множників векторний добуток набуває протилежного знаку $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

2. Властивість *розподілення* $\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{b}$.

3. Властивість *сполучення* відносно числового множнику $\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\lambda\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

Приклад 3. Задано вектори $\vec{a}=(2;7;3)$, $\vec{b}=(-4;-1;2)$, $\vec{c}=(-3;-4;0)$. Знайти площу паралелограму, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. Знайдемо площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, за формулою:

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|,$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 7 & 3\\ -4 & -1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}7 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 3\\ -4 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 7\\ -4 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot(14+3)-\vec{j}\cdot(4+12)+\vec{k}\cdot(-2+28)=17\vec{i}-16\vec{j}+26\vec{k},$$

$$S=\sqrt{17^2+(-16)^2+26^2}=\sqrt{289+256+676}=\sqrt{1221}\ \text{(кв. од.)}$$

3.5 Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох векторів або ***векторно-скалярним добутком*** називається число, абсолютна величина якого виражає об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, як на ребрах. Знак добутку буде додатним, якщо репери векторів та одиничних векторів мають однакову орієнтацію, або від'ємним у протилежному випадку:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c},$$

$$V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

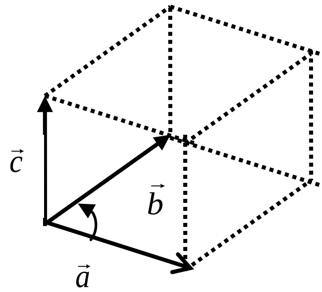


Рисунок 3.12 – Мішаний добуток векторів

Мішаний добуток векторів $\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$ та $\vec{c}=\left(x_3,y_3,z_3\right)$ ***у координатній формі:***

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Геометричний зміст мішаного добутку: абсолютне значення мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих трьох векторах:

$$V_{паралелепіпеда}=\pm\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix};\, V_{піраміди}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Умова компланарності (або умова приналежності трьох векторів до однієї площини) у координатній формі:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \text{ або } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Властивості мішаного добутку

1. Кругова перестановка множників мішаного добутку не змінює його величини:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}.$$

2. Перестановка двох сусідніх множників змінює знак:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c} \text{ або } \vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

3. Властивість *розподілення:* $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{d}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{d}\vec{c}$.

4. Властивість *сполучення* відносно числового множника:

$$\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\vec{a}\left(\lambda\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\left(\lambda\vec{c}\right).$$

5. Мішаний добуток *дорівнює нулю*, якщо: серед множників є нуль-вектор $\vec{a}\vec{0}\vec{b}=0$; два вектори колінеарні $\vec{a}\vec{a}\vec{b}=\vec{a}\vec{b}\vec{a}=\vec{a}\vec{b}\vec{b}=0$.

Приклад 4. Задано координати точок $A(2;2;1)$, $B(3;0;3)$, $C(13;4;11)$, $D(0;2;5)$. Знайти: величину кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; площу трикутника ABC ; об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання.

Знайдемо кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|},$$

$$\overrightarrow{AB}=(3-2;0-2;3-1)=(1;-2;2),$$

$$\overrightarrow{AC}=(13-2;4-2;11-1)=(11;2;10),$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{9}=3,$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{11^2+2^2+10^2}=\sqrt{225}=15,$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot11-2\cdot2+2\cdot10=27,$$

$$\cos\varphi=\frac{27}{3\cdot15}=\frac{3}{5},$$

$$\varphi=\arccos\left(\frac{3}{5}\right).$$

Знайдемо площу трикутника ABC за формулою:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|,$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 2\\ 11 & 2 & 10\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & 10\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 11 & 10\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 11 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=(-20-4)\vec{i}-(10-22)\vec{j}+(2+22)\vec{k}=-24\vec{i}+12\vec{j}+24\vec{k},$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-24)^2+12^2+24^2}=\sqrt{1296}=36,$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 36=18 \text{ (кв. од.).}$$

Знайдемо об’єм піраміди $ABCD$ за формулою:

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|,$$

$$\overrightarrow{AD}=(0-2;2-2;5-1)=(-2;0;4),$$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 11 & 2 & 10\\ -2 & 0 & 4\end{vmatrix}=8+0+40-(-8)-$$

$$-(-88)-0=144,\, V=\frac{1}{6}|144|=24 \text{ (куб. од).}$$

ЛЕКЦІЯ 4
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ

4.1 Змінні та сталі величини. Нескінченно малі і нескінченно великі величини. Границя змінної величини

Сталою величиною або ***константою*** (від латинського слова «constans» – «сталий») називається величина, яка не змінює свого значення в умовах задачі, що розглядається. Звичайно, сталі величини позначаються малими (інколи великими) буквами із початку латинського алфавіту a, b, c, d, ...

Змінною величиною називається величина, яка може набувати різних значень в умовах задачі, що розглядається.

Звичайно змінні величини позначаються малими (інколи великими) буквами із кінця латинського алфавіту ..., w, x , y , z .

Сукупність всіх числових значень змінної величини утворює її ***область значень***.

Змінна величина x називається ***нескінченно малою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються меншими будь-якого фіксованого додатного числа ε. Нескінченно малі величини позначаються звичайно малими буквами грецького алфавіту $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$.

Те, що змінна величина α є нескінченно малою, позначається так: $\alpha \to 0$ (читається « α прямує до 0») або $lim\,\alpha = 0$ (від латинського слова «limes» – «границя», читається «границя α дорівнює 0»).

Змінна величина x називається **нескінченно великою**, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються більшими будь-якого фіксованого додатного числа M.

Те, що змінна величина x є нескінченно великою, позначається так: $x \to \infty$ (читається «x прямує до ∞ ») або $\lim x = \infty$ (читається «границя x дорівнює ∞»).

Стала величина a називається ***границею змінної величини*** x, якщо їх різниця $x - a$ є нескінченно малою величиною: $x - a = \alpha \to 0$.

Записується так: $x \to a$ (читається «x прямує до a») або $\lim x = a$ (читається «границя x дорівнює a»).

Зауваження 1. Означення границі дано через поняття нескінченно малої величини («мовою нескінченно малих»). Існують інші еквівалентні означення границі.

Властивості границь

Теорема 1. Змінна величина в фіксованому процесі змінювання має не більше однієї границі.

Теорема 2. Змінна величина, що має скінченну границю, є обмеженою у відповідному процесі змінювання:

$$\lim x = a \Rightarrow \exists M > 0,\ \forall x : |x| \le M .$$

Теорема 3. Границя сталої величини дорівнює самій цій величині:

$$C = const \Rightarrow \lim C = C.$$

Теорема 4. Границя скінченної алгебраїчної суми змінних величин дорівнює такій же сумі їх границь, якщо останні існують:

$$\lim (x + y - z) = \lim x + \lim y - \lim z.$$

Теорема 5. Границя добутку двох змінних величин дорівнює добутку їх границь, якщо останні існують:

$$\lim (xy) = \lim x \cdot \lim y.$$

Наслідок 1. Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити за знак границі:

$$\lim (\mathrm{C}x) = \mathrm{C} \cdot \lim x\ , C = const.$$

Наслідок 2. Границя степеня з натуральним показником змінної величини дорівнює відповідному степеню її границі, якщо остання існує:

$$\lim x^n = (\lim x)^n,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Теорема 6. Границя відношення двох змінних величин дорівнює такому ж відношенню їх границь, якщо останні існують, до того ж границя знаменника відмінна від нуля:

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

Теорема 7. Границя невід*'*ємної змінної величини також невід*'*ємна. Аналогічно, границя недодатної змінної величини також недодатна:

$$\mathrm{x} \geq 0 \Rightarrow \lim \mathrm{x} \geq 0; \mathrm{x} \leq 0 \Rightarrow \lim \mathrm{x} \leq 0.$$

Приклад 1. Знайти границю.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x + 7}{3x^2 - 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} \left(x^3 - 5x + 7 \right)}{\lim\limits_{x \to 2} \left(3x^2 - 2 \right)} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} x^3 - \lim\limits_{x \to 2} 5x + \lim\limits_{x \to 2} 7}{\lim\limits_{x \to 2} 3x^2 - \lim\limits_{x \to 2} 2} =$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x \to 2} x \right)^3 - 5 \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 7}{3 \left(\lim\limits_{x \to 2} x \right)^2 - \lim\limits_{x \to 2} 2} = \frac{(2)^3 - 5 \cdot 2 + 7}{3(2)^2 - 2} = \frac{1}{2}.$$

4.2 Розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$ для многочленів

Правило: для розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$ для многочленів $\frac{P(x)}{Q(x)}$ чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ розкласти на множники та скоротити дріб, а потім перейти до границі.

Приклад 2. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\frac{0}{0}=\left|\begin{array}{l} x^2-5x+6=0;\ x_1=3;\ x_2=2; \\ (x-3)(x-2); \\ x^2-9=(x-3)(x+3) \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

4.3 Розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$ для многочленів

Правило: для розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$ для многочленів $\frac{P(x)}{Q(x)}$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ поділити на найвищий степінь x, а потім перейти до границі.

Приклад 3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x^3+6}{x^4-9x+1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x^3+6}{x^4-9x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x^2-5/x+6/x^4}{1-9/x^3+1/x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{0}{1}=0.$$

Зауваження. Очевидно, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{\infty}{\infty}=\begin{cases}0,\ m\prec n,\\ p_0/q_0\,,\ m=n,\\ \infty,\ m\succ n,\end{cases}$$

де p_0, q_0 – коефіцієнти при найвищих степенях відповідних многочленів.

4.4 Розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$ для ірраціональних виразів

Правило: для розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$ для ірраціональних виразів треба спочатку відповідним чином позбавитись ірраціональності, що дає нуль, потім скоротити дріб, і нарешті перейти до границі.

Приклад 4. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}\right)}{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+x^2-1+x-x^2\right)}{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(x-1\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}\right)}=2/-2=-1.$$

4.5 Перша стандартна границя. Розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$ для тригонометричних виразів

При обчисленні границь конкретних змінних величин часто використовуються уже відомі стандартні границі.

Теорема 1 ***(перша стандартна границя).*** Границя відношення синуса нескінченно малої величини до самої цієї величини існує і дорівнює одиниці:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}=1.$$

Наслідок 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\frac{0}{0}=1$.

Наслідок 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\frac{0}{0}=1$.

Наслідок 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=\frac{0}{0}=1$.

Зауваження. Для розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$ з тригонометричними виразами треба розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити дріб або застосувати першу стандартну границю чи її наслідки.

Приклад 5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1/\cos x-1)}{x\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{\cos x\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x}=2.$$

Приклад 6. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{ctg(\pi/4-x)}{4x-\pi}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{ctg(\pi/4-x)}{4x-\pi}=\frac{0}{0}=\left|\begin{array}{l}4x-\pi=t;\ t\to 0\\ x=\dfrac{t+\pi}{4}\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{ctg(-t/4)}{t}=\infty.$$

4.6 Друга стандартна границя. Розкриття невизначеності виду 1^∞

Теорема 1 ***(друга стандартна границя).*** Змінна величина $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ має границю при $n\to\infty$. Ця границя позначається буквою e і називається числом Ейлера:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1^\infty=e.$$

Зауваження 1. Число e – ірраціональне і навіть трансцендентне (воно не може бути коренем жодного алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами), $e=2,718281828...$.

Зауваження 2. При обчисленнях границь використовують також наступні форми запису другої стандартної границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1^\infty=e \text{ або } \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=1^\infty=e.$$

Границя виразу – одиниця плюс нескінченно мала в степені,оберненому до цієї нескінченно малої – дорівнює числу Ейлера е .

Наслідки з другої стандартної границі, корисні при обчисленнях:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.$$

Приклад 7.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^x = 1^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-4}{x+4}-1\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-4-x-4}{x+4}\right)^x =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{x+4}\right)^{\frac{x+4}{-8}\cdot\frac{-8}{x+4}\cdot x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-8x}{x+4}} = e^{-8}.$$

Приклад 8.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x} = 1^\infty = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{1}x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{x+4}\right)^{\frac{x+4}{-8}\cdot\frac{-8}{x+4}\cdot x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-8x}{x+4}} = e^{-8}.$$

Приклад 9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-5^x}{\arcsin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-(5^x-1)}{x}}{\frac{\arcsin x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\ln 5}{1} = -\ln 5.$$

Основні еквівалентності при $x \to 0$, що використовуються при обчисленнях границь, поданих у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Еквівалентні нескінченно малі величини

$\sin x \sim x$	$arctgx \sim x$	$a^x - 1 \sim x\ln a$
$tgx \sim x$	$1-\cos x \sim x^2/2$	$\ln(1+x) \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$	$(1+x)^m - 1 \sim mx$

Зауваження 1. Якщо в чисельнику чи знаменнику невизначеності $\frac{0}{0}$ розміщується алгебраїчна сума, то в загальному випадку неможна заміняти еквівалентними величинами окремі доданки, а лише весь чисельник чи знаменник в цілому.

Зауваження 2. Нескінченно великі величини порівнюють між собою так само, як і нескінченно малі.

ЛЕКЦІЯ 5
ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

5.1 Визначення похідної функції, її геометричний зміст

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a,b) і $x \in (a,b)$. Надамо аргументу x приріст Δx так, щоб нова точка $x + \Delta x \in (a,b)$. Оскільки точка x фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, яке також буде функцією приросту аргументу Δx.

Похідною функції $y = f(x)$ за незалежною змінною x називається границя, до якої прямує відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідна позначається одним із символів: y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням***.

Історично поняття похідної виникло з потреб геометрії і механіки. В геометрії поняття похідної виникає в задачі про проведення дотичної до гладкої кривої в заданій точці.

Геометричний зміст похідної. Значення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 дорівнює тангенсу кута, утвореного додатнім напрямком осі Ox і додатнім напрямком дотичної, проведеної до графіка цієї функції в точці з абсцисою x_0 (рис.5.1):

$$tg\alpha = f'(x_0).$$

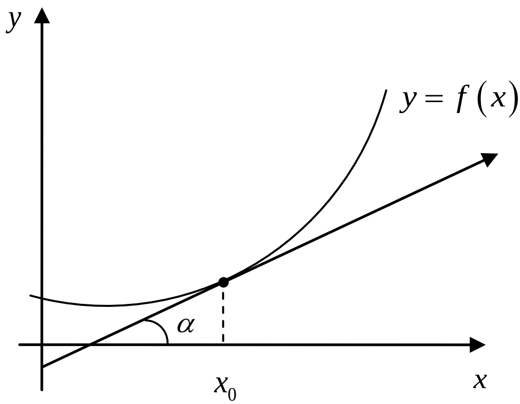


Рисунок 5.1 – Геометричний зміст похідної

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$ виглядає так:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0),$$

де y_0' – значення похідної y' при $x = x_0$.

Нормаллю до кривої в точці M називається пряма, яка проходить через точку M перпендикулярно до дотичної.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$ виглядає так:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0).$$

У механіці при одновимірному русі матеріальної точки вздовж прямої за законом $y = f(t)$, де y – координата точки, а

t – час, похідна $f'(t)$ інтерпретується як миттєва швидкість руху (***фізичний зміст похідної***).

Питання про те, з якою швидкістю змінюються функції при зміні визначальних параметрів, важливе при дослідженні різних фізичних, біологічних, економічних та інших процесів. За допомогою похідної можна знайти швидкість, з якою рухається літак або автомобіль, швидкість приросту населення тієї чи іншої держави, швидкість зміни кількості електрики (тобто силу струму), швидкість зміни чисельності мікроорганізмів, швидкість протікання хімічної реакції і т.п.

Окрім цього, за допомогою похідної можна знаходити екстремуми, тобто найбільші і найменші значення, найкращі, найбільш вигідні, найбільш економні. З такими задачами доводиться мати справу представникам різних спеціальностей: інженери-технологи намагаються так організувати виробництво, щоб вийшло якомога більше продукції, конструктори хочуть так спланувати прилад, щоб його вага була найменшою і т.п.

Прогнозування якості навколишнього середовища і оцінка можливого впливу на нього викидів від промислових підприємств, автомобільного транспорту та інших видів людської діяльності ґрунтується, як правило, на математичному моделюванні процесів переносу забруднень в повітряному і водному середовищі.

5.2 Основні правила і формули диференціювання

Нехай C – стала, $u=u(x)$, $v=v(x)$ – функції, що мають похідні. Тоді,

1) $C'=0$, 2) $x'=1$, 3) $(u\pm v)'=u'\pm v'$,

4) $(Cu)'=Cu'$, 5) $(uv)'=u'v+uv'$,

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$,

7) якщо $y = f(u)$, $u = u(x)$, тобто $y = f\left[u(x)\right]$, де функції $f(u)$ і $u(x)$ мають похідні, то $y'_x = f'_u \cdot u'_x$ (правило диференціювання складної функції),

8) $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{x'_y}$ (правило диференціювання оберненої функції),

9) якщо $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$ – показниково-степенева функція, то задану рівність необхідно спочатку прологарифмувати:

$$\ln y = \ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)},$$

$$\ln y = \varphi(x)\cdot\ln\left(f(x)\right),$$

а потім продиференціювати обидві частини отриманої рівності:

$$\left(\ln y\right)' = \left(\varphi(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)\right)'.$$

Таблиця похідних для функції $u = u(x)$

1) $C' = 0$,

2) $\left(u^a\right)' = a u^{a-1}\cdot u'$,

2а) $x' = 1$,

2б) $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$,

2в) $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}\cdot u'$,

3) $\left(a^u\right)' = a^u \ln a\cdot u'$,

3а) $\left(e^u\right)' = e^u\cdot u'$,

4) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$,

4а) $\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u}\cdot u'$,

5) $\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u'$,

6) $\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u'$,

7) $\left(tg\ u\right)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$,

8) $\left(ctg\ u\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$,

9) $\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$,

10) $\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$,

11) $\left(arctg\ u\right)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$,

12) $\left(arcctg\ u\right)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$,

13) $\left(u^v\right)' = v u^{v-1}\cdot u' + u^v \ln u\cdot v'$,

14) $\left(sh\ u\right)' = ch\ u\cdot u'$,

15) $\left(ch\ u\right)' = sh\ u\cdot u'$,

16) $\left(th\ u\right)' = \frac{1}{ch^2 u}\cdot u'$,

17) $\left(cth\ u\right)' = -\frac{1}{sh^2 u}\cdot u'$.

Приклад 1. Знайти похідні функцій:

а) $y = \ln\sin x^2$, б) $y = x^3\cdot\sin 3x$, в) $y = \frac{arctg^2 x}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання.

а) $y' = \left(\ln\sin x^2\right)' = \dfrac{1}{\sin x^2}\cdot\left(\sin x^2\right)' = \dfrac{1}{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot\left(x^2\right)' =$

$$= \frac{\cos x^2}{\sin x^2}\cdot 2x = ctgx^2\cdot 2x = 2xctgx^2,$$

б) $y' = \left(x^3\cdot\sin 3x\right)' = \left(x^3\right)'\cdot\sin 3x + x^3\cdot\left(\sin 3x\right)' =$

$$= 3x^2\cdot\sin 3x + x^3\cdot\cos 3x\cdot\left(3x\right)' = 3x^2\sin 3x + x^3\cos 3x\cdot 3 =$$

$$= 3x^2\sin 3x + 3x^3\cos 3x = 3x^2\left(\sin 3x + x\cos 3x\right),$$

в) $y' = \left(\dfrac{arctg^2 x}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{\left(arctg^2 x\right)'\cdot\sqrt{x} - arctg^2 x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} =$

$$= \frac{2arctgx\cdot\left(arctgx\right)'\cdot\sqrt{x} - arctg^2 x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{2arctgx\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\sqrt{x} - arctg^2 x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{\dfrac{2\sqrt{x}arctgx}{1+x^2} - \dfrac{arctg^2 x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{arctgx}{x}\cdot\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x^2} - \frac{arctgx}{2\sqrt{x}}\right).$$

Приклад 2. Знайти похідну функції

$$y = \left(\cos x\right)^{x^2}.$$

Розв'язання.

$$\ln y = \ln\left(\cos x\right)^{x^2},$$

$$\ln y = x^2\ln\left(\cos x\right),$$

$$\left(\ln y\right)' = \left(x^2\ln\left(\cos x\right)\right)',$$

$$\frac{1}{y}y' = \left(x^2\right)' \ln\left(\cos x\right) + x^2 \left(\ln\left(\cos x\right)\right)',$$

$$\frac{1}{y}y' = 2x\ln\left(\cos x\right) + x^2 \frac{-\sin x}{\cos x},$$

$$y' = y\left(2x\ln\left(\cos x\right) - x^2 \mathrm{tg} x\right),$$

$$y' = \left(\cos x\right)^{x^2} \left(2x\ln\left(\cos x\right) - x^2 \mathrm{tg} x\right).$$

Приклад 3. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^2 - 4x + 3$ в точці з абсцисою $x_0 = 4$.

Розв'язання.

Обчислимо значення функції в точці $x_0 = 4$:

$$y_0 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3.$$

Далі знайдемо похідну від функції $y = x^2 - 4x + 3$:

$$y' = \left(x^2 - 4x + 3\right)' = 2x - 4.$$

Обчислимо значення похідної в точці $x_0 = 4$:

$$y_0' = 2 \cdot 4 - 4 = 8 - 4 = 4.$$

Тоді рівняння дотичної буде виглядати так:

$$y - y_0 = y_0'\left(x - x_0\right),$$

$$y - 3 = 4\left(x - 4\right), \quad y = 4x - 16 + 3,$$

$$y = 4x - 13,$$

а рівняння нормалі

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}\left(x - x_0\right),$$

$$y - 3 = -\frac{1}{4}\left(x - 4\right), \quad y = -\frac{1}{4}x + 1 + 3,$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 4.$$

5.3 Правило Лопіталя

Правило Лопіталя. *Нехай функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$*, коли* $x \to x_0$ *одночасно прямують до нуля або до нескінченності. Якщо відношення їх похідних має границю, то відношення самих функцій також має границю, яка дорівнює границі відношення похідних, тобто*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Розглянемо випадки застосування правила Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right),\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x)=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$,

де $f(x)$ – складніша за $\varphi(x)$,

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\left(0^0\right),\left(\infty^0\right),\left(1^\infty\right)=A$,

$$\ln A=\ln\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)=\ldots=B,$$

$$\ln A=B,$$

$$A=e^B.$$

Приклад 4. Обчислити границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\mathrm{arctg}x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\ln x$, в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\mathrm{arctg}x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(5x)'}{(\mathrm{arctg}x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{\dfrac{1}{1+x^2}}=$

$$=\lim_{x\to 0}5\left(1+x^2\right)=5\cdot(1+0)=5;$$

б) $$\lim_{x\to 0}x^2\cdot\ln x=0^2\cdot\ln 0=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\frac{\ln 0}{\frac{1}{0^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-2}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2}=\frac{0^2}{-2}=0;$$

в) $$\lim_{x\to +\infty}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=\left(e^{+\infty}+\infty\right)^{\frac{1}{+\infty}}=\left(\infty^0\right)=A,$$

$$\ln A=\lim_{x\to +\infty}\ln\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(e^x+x\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}=$$

$$=\frac{\ln\left(e^{+\infty}+\infty\right)}{+\infty}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)==\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\ln\left(e^x+x\right)\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{e^x+x}\cdot\left(e^x+x\right)'}{1}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x}=\frac{e^{+\infty}+1}{e^{+\infty}+\infty}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^{+\infty}}{e^{+\infty}+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(e^x+1\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{e^x}=1,$$

$$\ln A=1,$$
$$A=e.$$

ЛЕКЦІЯ 6
ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВА ЇХ ГРАФІКІВ

1. Область визначення функції.

2. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy знаходимо із умови $x=0$, а з віссю Ox – із умови $y=0$.

3. Парність (непарність) функції, періодичність.

Функція парна, якщо виконується умова $y(-x)=y(x)$, непарна, якщо $y(-x)=-y(x)$ і загального вигляду, якщо обидві умови не виконуються. Функція періодична, якщо $y(x+T)=y(x)$, де T – період функції.

4. Дослідження функції на монотонність та екстремуми за допомогою першої похідної.

5. Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину за допомогою другої похідної.

6. Асимптоти функції.

7. Побудова графіка функції.

Приклад 1. Дослідити функцію і побудувати її графік

$$y=\frac{x^2}{x-1}.$$

Розв'язання.

1. Область визначення функції:

$$x-1\neq 0,\ x\neq 1,\ x\in(-\infty;1)\cup(1,+\infty).$$

2. Точки перетину графіка з осями координат:

$$Ox:\ y=0,\ \frac{x^2}{x-1}=0,\ x^2=0,\ x=0,\ O(0,0),$$

$$Oy:\ x=0,\ y=\frac{0^2}{0-1}=0,\ O(0,0).$$

3. Функція загального вигляду, тому що

$$y(-x)=\frac{(-x)^2}{-x-1}=\frac{x^2}{-x-1}=-\frac{x^2}{x+1}\neq \pm y(x);$$

неперіодична.

4. Для дослідження функції на монотонність та екстремуми знайдемо першу похідну функції і прирівняємо її до нуля:

$$y'=\left(\frac{x^2}{x-1}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\cdot(x-1)-x^2\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=,$$

$$=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0,\quad x^2-2x=0,\quad x(x-2)=0,$$

$x=0$, $x=2$ – критичні точки (рис. 6.1).

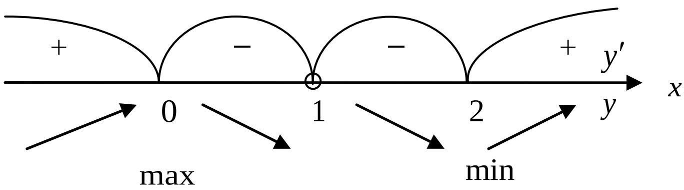


Рисунок 6.1 – Монотонність та екстремуми функції

Інтервали зростання функції: $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$,

інтервали спадання функції: $x\in(0,1)\cup(1,2)$,

$$x_{\max}=0,\quad y_{\max}(0)=\frac{0^2}{0-1}=0,$$

$$x_{\min}=2,\quad y_{\min}(2)=\frac{2^2}{2-1}=\frac{4}{1}=4,$$

$O(0;0)$ – точка графіка, що відповідає максимуму,

$M_1(2;4)$ – точка графіка, що відповідає мінімуму.

5. Для дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину знайдемо другу похідну функції і прирівняємо її до нуля:

$$y''=\left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{\left(x^2-2x\right)'\cdot(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)\cdot\left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2(x-1)\cdot\left((x-1)^2-\left(x^2-2x\right)\right)}{(x-1)^4}=\frac{2\left(x^2-2x+1-x^2+2x\right)}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3},$$

$\frac{2}{(x-1)^3}\neq 0$, точок перегину немає (рис. 6.2).

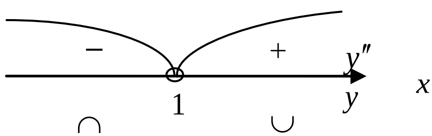


Рисунок 6.2 – Опуклість та увігнутість, точки перегину функції

Інтервали опуклості: $x\in(-\infty;1)$, інтервали увігнутості: $x\in(1;+\infty)$.

6. $x=1$ – вертикальна асимптота:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1}=\frac{(1-0)^2}{1-0-1}=\frac{1}{-0}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1}=\frac{(1+0)^2}{1+0-1}=\frac{1}{+0}=+\infty.$$

Для визначення похилих асимптот $y=kx+b$ необхідно знайти коефіцієнти k і b:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(x-1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y\left(x\right)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x\cdot\left(x-1\right)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1,$$

$y=x+1$ – похила асимптота.

7. Побудуємо графік функції (рис. 6.3)

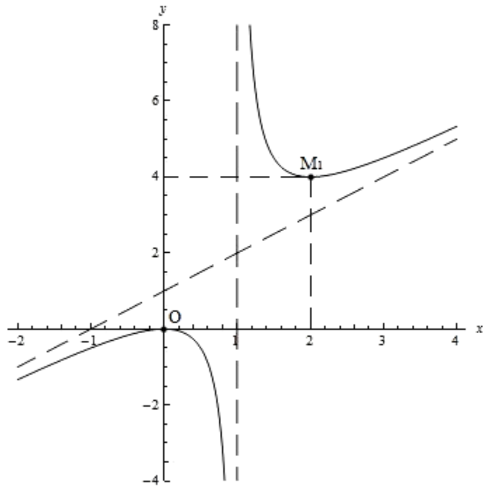


Рисунок 6.3 – Графік функції

Приклад 2. Дослідити функцію і побудувати її графік

$$y=\left(x+1\right)e^{-2x}.$$

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $x\in(-\infty;+\infty)$.

2. Точки перетину графіка з осями координат:

Oy: $x=0$, $y=\left(0+1\right)e^{-2\cdot 0}=1$, $A\left(0,1\right)$,

Ox: $y=0$, $\left(x+1\right)e^{-2x}=0$, $x=-1$, $B\left(-1,0\right)$.

3. Функція загального вигляду, тому що

$$y(-x)=(-x+1)e^{-2\cdot(-x)}=-(x-1)e^{2x}\neq\pm y(x),$$

неперіодична.

4. Для дослідження функції на монотонність та екстремуми знайдемо першу похідну функції і прирівняємо її до нуля (рис. 6.1):

$$y' = \left(\left(x+1\right)\cdot e^{-2x}\right)' = \left(x+1\right)'\cdot e^{-2x} + \left(x+1\right)\cdot\left(e^{-2x}\right)' =$$

$$= e^{-2x} + \left(x+1\right)\cdot\left(-2e^{-2x}\right) =$$

$$= e^{-2x}\left(1+\left(x+1\right)\cdot\left(-2\right)\right) = e^{-2x}\left(1-2x-2\right) = e^{-2x}\left(-2x-1\right),$$

$$e^{-2x}\left(-2x-1\right) = 0,$$

$x = -\dfrac{1}{2}$ – критична точка.

Таблиця 6.1 – Монотонність та екстремуми функції

x	$\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$	$-\dfrac{1}{2}$	$\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\uparrow$ зростає	$\dfrac{e}{2}$ max	$\downarrow$ спадає

Інтервали зростання функції: $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$,

інтервали спадання функції: $x\in\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$,

$$x_{\max} = -\frac{1}{2},\quad y_{\max}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}+1\right)e^{-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}e = \frac{e}{2},$$

$M_1\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{e}{2}\right)$ – точка графіка, що відповідає максимуму.

5. Для дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину знайдемо другу похідну функції і прирівняємо її до нуля (рис. 6.2):

$$y''=\left(e^{-2x}(-2x-1)\right)'=\left(e^{-2x}\right)'\cdot(-2x-1)+e^{-2x}\cdot(-2x-1)'=$$
$$=-2e^{-2x}\cdot(-2x-1)+e^{-2x}\cdot(-2)=$$
$$=-2e^{-2x}\cdot(-2x-1+1)=-2e^{-2x}\cdot(-2x)=4xe^{-2x},$$
$$4xe^{-2x}=0,\quad x=0,\quad e^{-2x}\neq 0,$$

$x=0$ – критична точка.

Таблиця 6.2 – Опуклість та увігнутість, точки перегину функції

	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	1	$\cup$

Інтервали опуклості: $x\in(-\infty;0)$,

інтервали угнутості: $x\in(0;+\infty)$,

$x=0$, $y(0)=(0+1)e^{-2\cdot 0}=1$, $A(0,1)$ – точка перегину.

6. Функція визначена і неперервна на всій числовій осі, тобто вертикальних асимптот не має.

Для визначення похилих асимптот $y=kx+b$ необхідно знайти коефіцієнти k і b:

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)e^{-2x}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-2x}}{x}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-2x}=\left(1+\frac{1}{-\infty}\right)\cdot e^{-2\cdot(-\infty)}=(1+0)\cdot e^{\infty}=e^{\infty}=\infty.$$

Отже, коли $x\to-\infty$, похилих асимптот немає.

$$k_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)e^{-2x}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-2x}}{x}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{e^{2x}} = \left(1+\frac{1}{+\infty}\right)\cdot\frac{1}{e^{2\cdot(+\infty)}} = (1+0)\cdot\frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(y(x)-kx\right) = \lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)'}{(e^{2x})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отже, коли $x\to+\infty$, $y=0$ – горизонтальна асимптота.

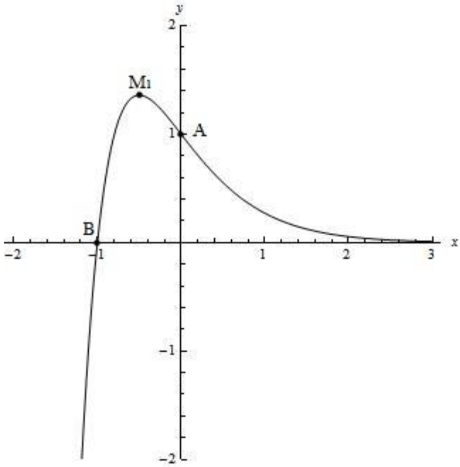


Рисунок 6.4 – Графік функції

ЛЕКЦІЯ 7
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

7.1 Декартова прямокутна система координат на площині. Відстань між двома точками. Ділення відрізка у заданому відношенні

Аналітична геометрія це розділ вищої математики, який вивчає геометричні об’єкти засобами алгебри на основі методу координат.

Декартова прямокутна система координат є найпоширенішою, розглянемо її будову.

Нехай на площині задано дві взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox і Oy зі спільним початком точкою $O(0;0)$. Вісь Ox називають ***віссю абсцис***, вісь Oy – ***віссю ординат***, точку O називають ***початком координат.***

Положення довільної точки M у декартовій системі координат на площині визначають таким чином (рис. 7.1): опустимо перпендикуляри MM_1 і MM_2 на вісі Ox і Oy відповідно, довжина відрізка $|OM_1| = |x-0| = x$ і називається ***абсцисою*** точки M, а довжина відрізка $|OM_2| = |y-0| = y$ – ***ординатою*** точки M. Записують координати точки так: $M(x;y)$.

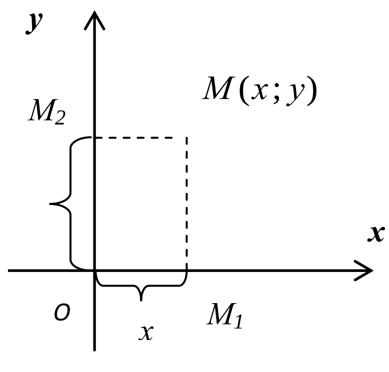


Рисунок 7.1 – Координати довільної точки на площині

Знайдемо ***відстань між двома*** довільними ***точками*** $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$ ***на площині*** (рис. 7.2), розглянемо прямокутний трикутник ΔABC $(\angle C = 90°)$.

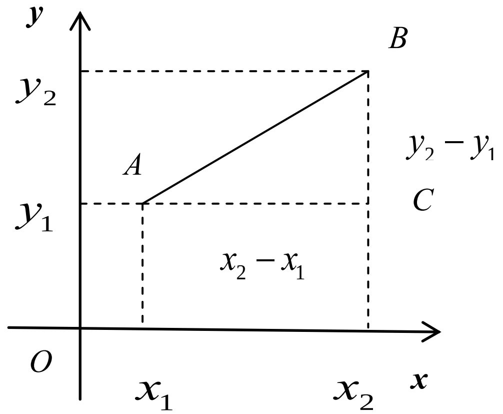


Рисунок 7.2 – Відстань між двома точками на площині

За теоремою Піфагора квадрат гіпотенузи *AB* дорівнює сумі квадратів катетів *CA* і *CB*, отже:

$$|AB| = \sqrt{CA^2 + CB^2}.$$

Координати точки $C(x_2;y_1)$, довжини катетів $|CA| = |x_2 - x_1|$ і $|CB| = |y_2 - y_1|$, тоді отримаємо ***формулу відстані між двома точками***:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Нехай задані дві точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$, і відношення $\lambda = AM/MB$, у якому точка $M(x;y)$ ділить відрізок *AB*, починаючи від точки *A* до точки *B* (рис. 7.3).

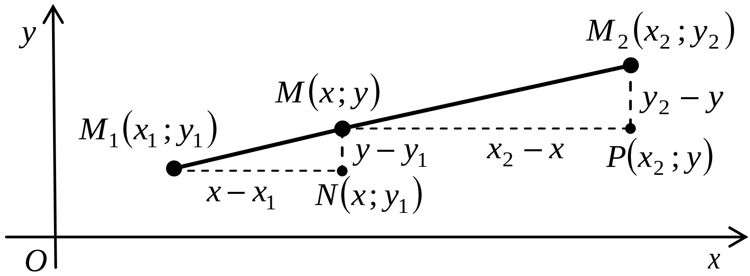


Рисунок 7.3 – Ділення відрізка у заданому відношенні

Трикутники ΔANM і ΔMPB подібні, отже,

$$\frac{NM}{PB}=\frac{AN}{MP}=\frac{AM}{MB}=\lambda,\ \frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

Виразимо *x* за отриманими рівняннями:

$$x=\lambda(x_2-x)+x_1,\ x(1+\lambda)=x_1+\lambda x_2,$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

аналогічно міркуючи, знаходимо *y*:

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Ми отримали ***формули координат точки*** $M\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$***, яка ділить відрізок*** *AB* ***у заданому відношенні*** λ.

Зауваження 1. Якщо точка *M* ділить відрізок *AB* навпіл, то $\lambda=1$. Тоді маємо формули для визначення ***координат середини відрізка***:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Зауваження 2. Якщо точка M лежить між точками A і B, то $\lambda > 0$; якщо точка M не належить відрізку AB, то $\lambda < 0$.

Приклад 1. Задано вершини ΔABC: $A(-3;4)$, $B(7;-2)$, $C(5;6)$. Знайти довжину медіани AM і координати точки E перетину медіан трикутника.

Розв'язання. Оскільки AM – медіана ΔABC, то точка M – середина сторони BC. Знайдемо координати точки M за формулами координат середини відрізка:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2},\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Тоді

$$x_M = \frac{7+5}{2} = 6,\ y_M = \frac{-2+6}{2} = 2,\ M(6;2).$$

Тепер знайдемо довжину медіани AM за формулою відстані між двома точками:

$$|AM| = \sqrt{\left(x_M - x_A\right)^2 + \left(y_M - y_A\right)^2},$$

отримаємо:

$$|AM| = \sqrt{\left(6+3\right)^2 + \left(2-4\right)^2} = \sqrt{85}.$$

За властивістю точки перетину медіан трикутника

$$\lambda = \frac{AE}{EM} = \frac{2}{1} = 2.$$

Тоді, застосовуючи формули ділення відрізка у заданому відношенні, знайдемо координати точки E:

$$x_E = \frac{x_A + \lambda x_M}{1+\lambda} = \frac{-3+12}{3} = 3,$$

$$y_E = \frac{y_A + \lambda y_M}{1+\lambda} = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3},\ E(3;2\frac{2}{3}).$$

7.2 Пряма на площині. Основні типи рівняння прямої

Лінією (кривою) на площині називається сукупність точок (геометричне місце точок), які мають певну спільну властивість. Нехай на площині введена прямокутна система координат Oxy. ***Рівнянням кривої на площині*** називається рівняння з двома змінними $F(x, y) = 0$, яке задовольняють всі точки $M(x, y)$ кривої, і не задовольняє жодна точка, що не належать цій кривій.

В аналітичній геометрії на площині виникають два головні завдання: 1) за геометричними властивостями кривої знайти її рівняння; 2) за відомим рівнянням кривої $F(x, y) = 0$ вивчити її властивості та форму.

Найпростішою лінією на площині є пряма. Вона задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних x і y. Розглянемо різні види її рівняння.

Нехай на площині Oxy задана пряма, не паралельна осі Oy (рис. 4). Її положення на площині однозначно визначається двома параметрами: ординатою точки $N(0;b)$ перетину з віссю Oy та кутом α між віссю Ox та прямою. Розглянемо на прямій довільну точку $M(x;y)$. Проведемо через точку N вісь Nx', паралельну та співнапрямлену з віссю Ox. Зрозуміло, що кут між прямою та віссю Nx' дорівнює α. У системі координат $Nx'y$ точка M має координати x та $y - b$.

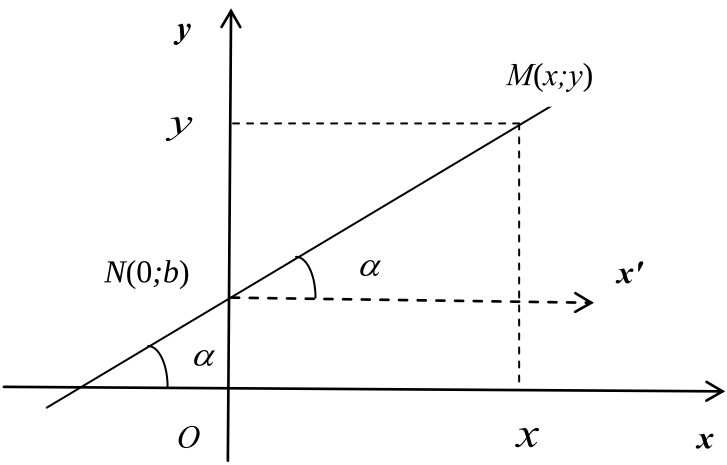


Рисунок 7.4 – Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

З означення тангенса кута випливає, що $tg\alpha = \dfrac{y-b}{x}$, тобто $y = tg\alpha \cdot x + b$. Позначимо $tg\alpha = k$. Таким чином, ми отримали ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом***

$$y = kx + b,$$

яке задовольняють усі точки $M(x,\ y)$ прямої. Число $tg\alpha = k$ називають ***кутовим коефіцієнтом прямої***.

Частинні випадки рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

1. Якщо $b = 0$, то пряма $y = kx$ проходить через початок координат $O(0;0)$.

2. Якщо $k = 0$, то пряма $y = b$ паралельна осі Ox (***горизонтальна пряма***).

3. Якщо пряма паралельна осі Oy ($\alpha = 90°$), то її кутовий коефіцієнт не існує ($k = \mathrm{tg}90° = \infty$), отже її рівняння не можна подати у відповідному вигляді. ***Рівняння вертикальної прямої*** має вигляд $x = a$, де a – абсциса точки перетину $A(a;\ 0)$ з віссю Ox .

Приклад 2. Написати рівняння прямої, яка утворює з віссю Ox кут $\alpha = 30°$ і відтинає на осі Oy відрізок $b = -1$.

Розв'язання. По-перше, оскільки пряма утворює з віссю Ox кут $\alpha = 30°$, то за формулою $k = \mathrm{tg}\alpha$ отримаємо:

$$k = \mathrm{tg}30° = \sqrt{3}/3.$$

По-друге, пряма відтинає на осі Oy відрізок $b = -1$, тоді

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 -$$

рівняння шуканої прямої.

Нехай пряма l проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k . Тоді для прямої l отримаємо

$$y = kx + b;\quad M_0(x_0, y_0) \in l \Rightarrow y_0 = kx_0 + b;$$

$$b = y_0 - kx_0;\qquad y = kx + y_0 - kx_0.$$

Звідси отримуємо ***рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямі:***

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right).$$

Приклад 3. Написати рівняння і побудувати пряму, що належить пучку з центром у точці $M_1(-3;1)$, якщо: пряма паралельна осі Ox; пряма паралельна осі Oy; пряма нахилена до осі Ox під кутом $\alpha = 60^\circ$. (Розв'язати самостійно).

Нехай пряма l проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Оскільки пряма l проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, то $y - y_1 = k\left(x - x_1\right)$. Тоді

$$M_2(x_2, y_2) \in l \;\Rightarrow\; y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1);$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \;; \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right).$$

Звідси отримаємо ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Приклад 4. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(1;-2)$, $B(-5;1)$, $C(3;-1)$. Побудувати ΔABC в системі координат. Знайти рівняння бісектриси AL.

Розв'язання: $AB = \sqrt{(-5-1)^2 + (1-(-2))^2} = 3\sqrt{5}$;

$$AC == \sqrt{(3-1)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{5}.$$

За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника

$$\lambda = \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3.$$

Тоді

$$L\!: \; x = \frac{-5 + 3 \cdot 3}{1+3} = 1; \quad y = \frac{1 + 3\cdot(-1)}{1+3} = -\frac{1}{2}; \quad L\left(1; -\frac{1}{2}\right);$$

$$AL: \; \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \quad \frac{y - (-1)}{-1/2 - (-1)} = \frac{x - 1}{1 - 1}; \quad x = 1.$$

Кожна пряма описується деяким рівнянням першого степеня. Навпаки, кожне рівняння першого степеня є рівнянням деякої прямої.

Загальним рівнянням прямої називається рівняння першого степеня вигляду $Ax + By + C = 0$, де A, B і C – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел A, B відмінне від нуля, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$.

Зауваження. У залежності від значень сталих A, B і C можливі наступні окремі випадки:

$C = 0$, тоді пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат;

$A = 0$, тоді пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox. Її рівняння можна подати у вигляді $y = b$, де $b = -C/B$;

$B = 0$, тоді пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy. Її рівняння можна подати у вигляді $x = a$, де $a = -C/A$;

$A = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $y = 0$ співпадає з віссю Ox;

$B = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $x = 0$ співпадає з віссю Oy.

7.3 Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2, що зображені на рисунку 1.10, мають задані кутові коефіцієнти відповідно k_1 і k_2. Тоді для кута φ між ними маємо $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$; $tg\ \varphi = \dfrac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_1 \cdot tg\ \alpha_2}$.

Оскільки $tg\ \alpha_1 = k_1$; $tg\ \alpha_2 = k_2$, то ***тангенс кута між прямими*** знаходиться за формулою $tg\ \varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Для паралельних прямих $\varphi = 0$, $tg\ \varphi = 0$, а для перпендикулярних прямих $\varphi = 90^\circ$, $tg\ \varphi \to \infty$. З одержаної формули випливає:

1) ***необхідною і достатньою умовою паралельності*** невертикальних прямих l_1 і l_2 є рівність $k_1 = k_2$;

2) ***необхідною і достатньою умовою перпендикулярності*** похилих прямих l_1 і l_2 є рівність $k_1 k_2 = -1$.

Зауваження. ***Гострий кут*** між прямими знаходять за формулою $\varphi_г = arctg\left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$.

Приклад 5. У тупокутному ΔABC ($\angle A$ – тупий) задано рівняння сторін AB: $y = -3x + 5$, AC: $y = 2x - 10$ і координати вершини $C(2; 3)$. Знайти: а) $\angle A$; б) рівняння висоти CN; в) рівняння середньої лінії ML, що паралельна AB, де M – середина сторони AC.

Розв'язання.

а) знайдемо гострий кут між прямими AB і AC:

$$k_{AB} = -3;\ k_{AC} = 2;\ \varphi_г = arctg\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = arctg\left|\frac{2-(-3)}{1 + 2\cdot(-3)}\right| =$$

$$= arctg 1 = \pi/4.\ \text{Тоді}\ \angle A = \pi - \varphi_г = \pi - \pi/4 = 3\pi/4;$$

б) $CN \perp AB \iff k_1 k_2 = -1$; $k_{AB} = -3$;

$k_{CN} = -1/k_{AB} = 1/3$; $C \in CN$; CN: $y - y_0 = k(x - x_0)$;

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 2);\ y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3};$$

в) $A = AB \cap AC$: $\begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = 2x - 10 \end{cases}$; $A(3; -4)$.

M – середина сторони AC: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{3+2}{2} = \dfrac{5}{2}$;

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2};\ M(5/2; -1/2).$$

$ML \parallel AB$: $k_{ML} = k_{AB} = -3$; $M \in ML$; ML:

$$y - y_0 = k(x - x_0);\ y + 1/2 = -3(x - 5/2);\ y = -3x + 7.$$

7.4 Відстань від точки до прямої

Нехай задані точка $M_0(x_0, y_0)$ і пряма l своїм загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$ (рис. 7.5). ***Відстанню*** d ***від точки до прямої*** називається довжина перпендикуляра M_0N, опущеного з даної точки на дану пряму.

Скориставшись умовою перпендикулярності, знайдемо рівняння цього перпендикуляра $l_{\perp}$. Склавши і розв'язавши систему рівнянь прямих l і $l_{\perp}$, одержимо точку перетину N.

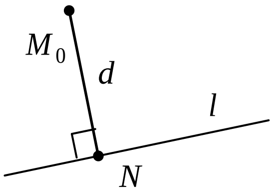


Рисунок 7.5

Довжину перпендикуляра M_0N знайдемо як відстань між двома точками. В результаті (проробіть указані операції самостійно) одержимо формулу для ***відстані*** d ***від точки до прямої:***

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад 6. У трикутнику ABC задано рівняння сторони AB: $x/4 - y/3 = 1$ і координати вершини $C(-2; -5)$. Знайти довжину висоти CN.

Розв'язання. Перетворимо рівняння прямої AB до загального вигляду: $x/4 - y/3 = 1$; $3x - 4y = 12$; $3x - 4y - 12 = 0$.

Знайдемо довжину висоти CN як відстань від точки C до прямої AB:

$$CN = |3 \cdot (-2) - 4 \cdot (-5) - 12| \Big/ \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 2/5.$$

ЛЕКЦІЯ 8
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

8.1 Основні типи рівняння площини

Нехай на площині α задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і відомий ***вектор нормалі*** $\vec{n}=(A;B;C)\neq\vec{0}$, $\vec{n}\perp\alpha$ (рис. 8.1). Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій площині та побудуємо вектор:

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$$

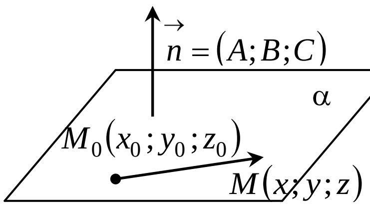


Рисунок 8.1

Точка M належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до нормалі $\vec{n}$ (рис. 8.1). Використовуючи умову перпендикулярності векторів, маємо $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$ або в координатній формі:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ –$$

рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}=(A;B;C)$.

Приклад 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1;1;1)$ і перпендикулярна до площин $5x+2y-z+3=0$ і $x-y+3z+7=0$.

Розв'язання. Оскільки нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(5;2;-1)$ і $\vec{n}_2=(1;-1;-3)$, то як нормальний вектор шуканої площини можна обрати вектор

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=-7\vec{i}+14\vec{j}-7\vec{k}.$$

Оскільки вектор $\vec{n}_0=(1;-2;1)$ колінеарний до вектора $\vec{n}=(7;-14;7)$, то за нормальний вектор шуканої площини можна взяти вектор $\vec{n}_0$. Отримаємо рівняння площини, яка проходить через точку M_0 і перпендикулярна двом заданим площинам:

$$x+1-2(y-1)+z-1=0 \Rightarrow x-2y+z+2=0.$$

Розкриємо дужки в рівнянні

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

і отримаємо $Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0$. Згрупуємо сталі величини та позначимо $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, одержимо:

$$Ax+By+Cz+D=0 \; -$$

загальне рівняння площини, що є лінійним відносно координат x, y, z, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, тобто $A^2+B^2+C^2 \neq 0$.

Зауваження 1. Загальне рівняння площини визначається з точністю до сталого множника.

Теорема. *Будь-яка площина визначається лінійним рівнянням відносно координат x, y, z. Кожному лінійному рівнянню зі змінними x, y, z відповідає деяка площина.*

Приклад 2. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{NP}$.

Розв'язання. $M \in \alpha$; $\vec{n}=\overrightarrow{NP} \perp \alpha$;

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

$$\vec{n}=\overrightarrow{NP}=(1-5;\ -3-(-6);\ -1-0\ )=(-4;\ 3;\ -1);$$

$$-4(x-1)+3(y-(-1))+(-1)(z-2)=0;$$

$$-4x+4+3y+3-z+2=0; \quad -4x+3y-z+9=0;$$

$$4x-3y+z-9=0.$$

Нехай на площині α (рис. 8.1) задано три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ і $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій.

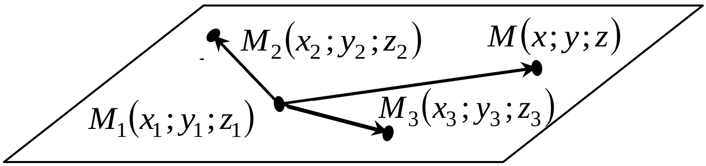


Рисунок 8.2 – Компланарні вектори

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій площині та побудуємо три вектори $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ і $\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$, що виходять з однієї точки M_1. Точка $M(x;y;z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні (рис. 8.1).

Використовуючи умову компланарності трьох векторів, маємо

$(\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$ або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \;-$$

рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Приклад 3. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через ці точки. Знайти одиничний вектор нормалі.

Розв’язання.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-2 \\ 5-1 & -6-(-1) & 0-2 \\ 1-1 & -3-(-1) & -1-2 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0;$$

$$11x+12y-8z+17=0\,; \quad \vec{n}=(A;B;C)=(11;12;-8)\,;$$

$$\left|\vec{n}\right|=\sqrt{11^2+12^2+(-8)^2}=\sqrt{329}\,; \quad \vec{n}_0=\left(\frac{11}{\sqrt{329}};\frac{12}{\sqrt{329}};-\frac{8}{\sqrt{329}}\right).$$

Нехай площина α (рис. 8.3) перетинає всі три координатні вісі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$ і $M_3(0;0;c)$.

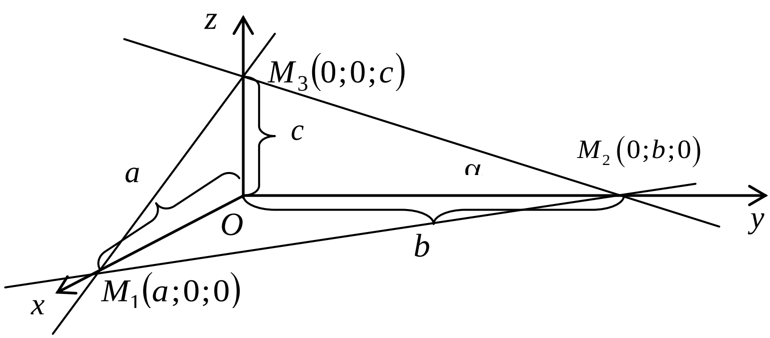


Рисунок 8.3

Використовуючи рівняння площини, що проходить через три точки, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix}=0, \qquad bcx+acy+abz-abc=0\,;$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ -$$

рівняння площини у відрізках на осях**.**

Приклад 4. Звести загальне рівняння площини

$$3x-6y+8z+12=0$$

до вигляду рівняння у відрізках на осях.

Розв'язання. $3x-6y+8z=-12 \quad \big|:(-12)\,;$

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-2/3}=1\,.$$

8.2 Кут між площинами. Відстань від точки до площини

Нехай задано дві площини α_1 і α_2 своїми загальними рівняннями: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Кут φ між площинами α_1 і α_2 дорівнює куту між їх векторами нормалей $\vec{n_1} = \left(A_1; B_1; C_1\right)$ і $\vec{n_2} = \left(A_2; B_2; C_2\right)$ (рис. 8.4). Отже,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

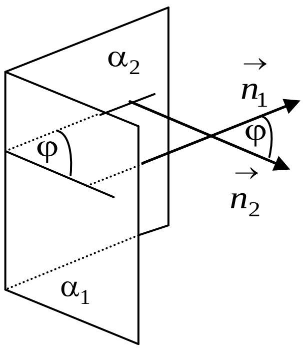


Рисунок 8.4

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для площин.

Умова перпендикулярності двох площин: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Дві площини збігаються, якщо

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Приклад 5. Знайти косинус кута між заданою площиною $\alpha_1:\ 2x - y - 2z + 6 = 0$ і координатною площиною Oxy.

Розв'язання. $\vec{n_1} = \left(2; -1; -2\right)$; $\alpha_2:\ z = 0$; $\vec{n_2} = \vec{k} = \left(0;0;1\right)$;

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = -\frac{2}{3}.$$

Нехай у просторі задані площина α своїм загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і деяка точка $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ (рис. 8.5).

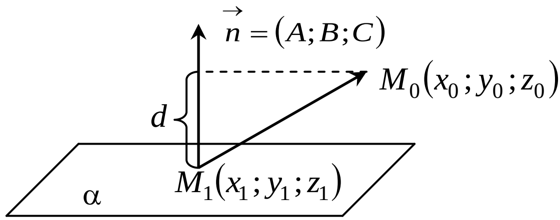


Рисунок 8.5

Оберемо на цій площині довільну точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1;y_0-y_1;z_0-z_1)$. Тоді відстань d від точки M_0 до площини α дорівнює модулю проєкції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормалі $\vec{n}=(A;B;C)$:

$$d=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Оскільки $-Ax_1-By_1-Cz_1=D$, то

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Приклад 6. Знайти відстань d від точки $M_0(2;-4;3)$ до площини α: $3x-2y-6z-1=0$ (Розв'язати самостійно).

8.3 Основні типи рівняння прямої у просторі

Нехай на прямій l задана деяка точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і відомий ***напрямний вектор*** $\vec{s}=(m;n;p)$ цієї прямої – довільний ненульовий вектор, що їй паралельний (рис. 8.6).

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій прямій та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0\,;y-y_0\,;z-z_0)$. Точка M належить прямій тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{s}$. Використовуючи умову паралельності векторів, маємо ***канонічні рівняння прямої***:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

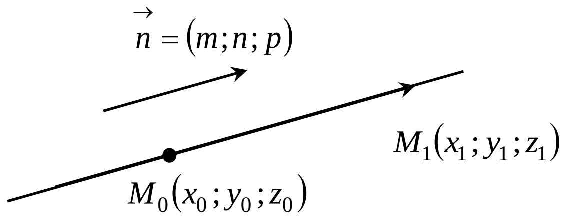


Рисунок 8.6

Якщо у канонічні рівняння прямої ввести коефіцієнт пропорційності $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$ і розв’язати їх відносно x, y та z, то отримаємо:

$$\frac{x-x_0}{m}=t\,;\quad \frac{y-y_0}{n}=t\,;\quad \frac{z-z_0}{p}=t\,;\quad \begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases} -$$

параметричні рівняння прямої***, де змінна*** t ***слугує параметром.***

Приклад 7. Пряма задана своїми канонічними рівняннями. Записати її параметричні рівняння:

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+4}{0}=\frac{z}{-2}\quad \text{(Розв’язати самостійно).}$$

Нехай на прямій l задано дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$. За напрямний вектор можна взяти

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тоді з канонічних рівнянь маємо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} -$$

рівняння прямої, що проходить через дві задані точки**.**

Приклад 8. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-2;0;3)$ і $M_2(4;-2;3)$. (Розв'язати самостійно).

Просторова лінія може задаватися як перетин двох поверхонь. Зокрема, пряма l є лінією перетину деяких двох площин α_1 і α_2. Якщо ці площини задані своїми загальними рівняннями

$$\alpha_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ і } \alpha_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то система $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ називається ***загальними рівняннями прямої***.

Приклад 9. Пряма l задана своїми загальними рівняннями

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 10 = 0 \\ 3x + 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases}.$$

Знайти її канонічні рівняння; параметричні рівняння.

Розв'язання.

Знайдемо напрямний вектор прямої

$$\vec{s} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x = 0$, тоді

$$\begin{cases} -2y + 4z - 10 = 0 \\ 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases}; \quad y = -1; \quad z = 2; \quad M_0(0;-1;2).$$

Канонічні рівняння:

$$\frac{x-0}{-4}=\frac{y-(-1)}{14}=\frac{z-2}{8};\quad \frac{x}{-2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-2}{4}.$$

(Параметричні рівняння знайти самостійно).

Зауваження. Загальні рівняння прямої визначаються неоднозначно.

8.4 Кут між прямими. Кут між прямою та площиною

Нехай задано дві прямі своїми канонічними рівняннями

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ \text{ і }\ l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут φ між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їх напрямними векторами $\vec{s_1}=(m_1;n_1;p_1)$ і $\vec{s_2}=(m_2;n_2;p_2)$. Отже,

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для прямих.

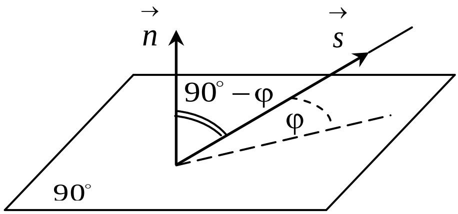
Умова перпендикулярності двох прямих:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Умова паралельності двох прямих: $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

Нехай задано пряму l канонічними рівняннями і площину α загальним рівнянням:

Рисунок 8.7 – Кут між двома прямими у просторі



$$l:\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p};$$

$$\alpha:\ Ax+By+Cz+D=0.$$

Кут φ між ними (рис. 8.7) доповнює кут між напрямним вектором прямої $\vec{s}=(m;n;p)$ і вектором нормалі площини $\vec{n}=(A;B;C)$ до 90°.

Тоді $\cos(90^\circ-\varphi)=\dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

Звідки $\sin\varphi=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для взаємного розміщення прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої та площини: $\dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}$.

Умова паралельності прямої та площини:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Приклад 10. Знайти кут між прямою l і площиною α:

$$l:\ \begin{cases}x+4y-2z-8=0\\ 2x+3y-z+6=0\end{cases}\ \text{і}\ \ \alpha:\ \frac{x}{-4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$$

(Розв’язати самостійно).

Приклад 11. Перевірити, що пряма $\dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+4}{3}$

перпендикулярна до площини $10x-4y-6z+3=0$. (Розв'язати самостійно).

Приклад 12. Перевірити, що пряма $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-2}$ паралельна площині $2x+2z-1=0$. (Розв'язати самостійно).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – СПб. : Профессия, 2001. – 432 с.

2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2006. – 736 с.

3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі : у 2 кн. / За ред. Г. Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с. – Кн. 2 : Спеціальні розділи. – 368 с.

4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: у 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : АСТ, 2014. – Ч. 1: 303 с., Ч. 2: 415 с.

5. Колосов А. І. Вища математика. У 3 ч. [Електронний ресурс] : конспект лекцій для студ. усіх форм навч. освіт. рівня «бакалавр» за всіма спец. / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – Ч. 1. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. – 74 с. − Електронні текстові дані. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/52637/, вільний (дата звернення : 01.09.2020). – Назва з екрана.

6. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях [Електронний ресурс] : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 – Будівництво, 6.050702 – Електромеханіка, 6.050701 – Електротехніка та електротехнології) / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – Ч. 2. – 141 с. – Електронні текстові дані. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/42486/, вільний (дата звернення : 01.09.2020). – Назва з екрана.

7. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях [Електронний ресурс] : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2018. – 141 с. − Електронні текстові дані. – Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/48450/, вільний (дата звернення : 01.09.2020). – Назва з екрана.

8. Ситникова Ю. В. Лінійна та векторна алгебра у схемах і таблицях [Електронний ресурс] : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання) / Ю. В. Ситникова, С. М. Ламтюгова, Г. А. Кузнецова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 109 с. – Електронні текстові дані. – Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/49932/, вільний (дата звернення : 01.09.2020). – Назва з екрана.

Навчальне видання

КУЗНЕЦОВА Ганна Анатоліївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної і заочної форм навчання за спеціальністю 263 – Цивільна безпека)

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп’ютерне верстання *Г. А. Кузнецова*

План 2019, поз. 72Л

Підп. до друку 05.08.2022. Формат 60 × 84/16.
Електронне видання. Ум. друк. арк. 5,6.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.