МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

НАВЧАЛЬНИЙ ДОВІДНИК

з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Частина 2

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2022

Коваленко Л. Б. Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика» Частина 2 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології) / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 55 с.

Автор канд. фіз.-мат. наук, доц. Л. Б. Коваленко

Рецензент

Якунін А. В., кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 10 від 27.04.2022

Навчальний довідник розроблено відповідно до навчального плану та програми дисципліни «Вища математика» Частина 2 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології) і відображають навчальний матеріал другого семестру. У навчальному довіднику наведено теоретичний матеріал з прикладами його застосування відповідно до робочої програми з посиланням на використану літературу.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології призначений для засвоєння основних математичних понять та методів розв’язання задач під час самостійної роботи студентів, що вивчають курс «Вища математика». Навчальний довідник містить основні теоретичні відомості та приклади застосування формул, визначень, теорем при розв’язанні задач комплексних чисел, інтегрального числення функції однієї змінної, застосувань інтегрального числення, функції декількох змінних, диференціальних рівнянь.

Навчально-методичний комплекс дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія включає 6 навчальних посібників з необхідним теоретичним матеріалом, довідниками та завданнями для практичних занять та самостійної роботи студентів, та розрахунково-графічного завдання, що містить задачі за фаховим спрямуванням та наочно ілюструють практичне застосування методів лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу у розв’язанні прикладних задач.

Тема «КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА»

Алгебраїчна форма комплексного числа $\boldsymbol{z = a + ib}$ (a – дійсна частина, b – уявна частина)	$z = 5 + 3i$; (5 – дійсна частина, 3 – уявна частина)
Модуль комплексного числа $\boldsymbol{\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}}$	Знайти модуль числа $z = 5 + 3i$ $\lvert z\rvert = \sqrt{5^2 + 3^2} = \boldsymbol{\sqrt{34}}$
Операції над комплексними числами $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$: ***Додавання*** $\boldsymbol{z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}$; ***Віднімання*** $\boldsymbol{z = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i}$; ***Множення*** $\boldsymbol{z = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i}$; ***Ділення*** $\boldsymbol{z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} i}$	Знайти суму, різницю, добуток і частку комплексних чисел $z_1 = 4 + 5i$ і $z_2 = -3 + 2i$ $z_1 + z_2 = (4 - 3) + (5 + 2)i = \boldsymbol{1 + 7i}$; $z_1 - z_2 = (4 + 3) + (5 - 2)i = \boldsymbol{7 + 3i}$; $z_1 \cdot z_2 = (4 \cdot (-3) - 5 \cdot 2) +$ $+(4 \cdot 2 + (-3) \cdot 5)i = \boldsymbol{-22 - 7i}$; $z_1 : z_2 = \frac{4\cdot(-3)+5\cdot 2}{(-3)^2+2^2} + \frac{4\cdot 2-(-3)\cdot 5}{(-3)^2+2^2} i =$ $= \boldsymbol{-\frac{2}{13} + \frac{23}{13} i}$
Число $a - ib$ є **комплексно спряженим** до числа $a + ib$	Знайти число, комплексно спряжене до числа $z = -3 + 8i$ $\boldsymbol{z = -3 - 8i}$ – комплексно спряжене
Тригонометрична форма запису комплексного числа $\boldsymbol{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$, де $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $Arg z = \varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$	Представити комплексне число $z = 1 + \sqrt{3}i$ у тригонометричній формі $r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$; $\sin\varphi = \frac{1}{2}$; $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\boldsymbol{z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$
Показникова форма запису комплексного числа $\boldsymbol{z = re^{i\varphi}}$, де $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $Arg z = \varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$	Представити комплексне число $z = 1 + \sqrt{3}i$ у показниковій формі. $r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$; $\sin\varphi = \frac{1}{2}$; $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\boldsymbol{z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

Натуральний n-й степень комплексного числа z $$\boldsymbol{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$ в тригонометричній формі $$\boldsymbol{z^n = r^n e^{i\varphi n}}$$ в показниковій формі	Обчислити $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$ $$r = \lvert z\rvert = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2;$$ $$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6};$$ $$\left(\sqrt{3}+i\right)^6 = 2^6\left(\cos\frac{6\cdot\pi}{6} + i\sin\frac{6\cdot\pi}{6}\right) =$$ $$= \boldsymbol{64(\cos\pi + i\sin\pi)}$$ - в тригонометричній формі або $\left(\sqrt{3}+i\right)^6 = \boldsymbol{64e^{i\pi}}$ - в показниковій формі
Корені n-го степеню з комплексного числа z $$\boldsymbol{\sqrt[n]{z}} =$$ $$= \boldsymbol{\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right)},$$ де $k = 0,1,2,\dots,n-1$	Знайти корені рівняння $\boldsymbol{z^6 + 64 = 0}$ $$z^6 = -64;$$ $$r = \lvert z\rvert = 64\sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 2;$$ $$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{-1}\right) = \operatorname{arctg} 0 = \pi$$ Отже, число -64 в комплексній формі має вигляд $$-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi);$$ $$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\sqrt{3} + i};$$ $$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{2i};$$ $$z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\sqrt{3} + i};$$ $$z_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\sqrt{3} - i};$$ $$z_5 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \boldsymbol{-2i};$$ $$z_6 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\sqrt{3} - i}$$

Тема «НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»

Основна таблиця інтегралів			
1	$\int du = u + C$	6	$\int cosu = sinu + C$
2	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$	7	$\int sinu = -cosu + C$
2а	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$
2б	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	9	$\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$
3	$\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$	10	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$
4	$\int e^u du = e^u + C$	11	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\| \frac{u-a}{u+a} \right\| + C$
5	$\int \frac{du}{u} = ln\|u\| + C$	12	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln \left\| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\| + C$
		13	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C$
Додаткові формули			
$\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln\|\cos u\| + C$		$\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln\|\sin u\| + C$	
$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left\| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right\| + C$		$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left\| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\| + C$	

Основні властивості невизначених інтегралів	
$\int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx$	$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$
$\int C f(x) dx = C \int f(x) dx$	$\int f(x + b) dx = F(x + b) + C$
$\int (C_1 u + C_2 v) dx = C_1 \int u dx + C_2 \int v dx$	$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$

Метод заміни змінної	
$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = $ $= \int f(x)dx\Big\vert_{x=\varphi(t)}$	$\int \frac{xdx}{6x^2-5} = \begin{bmatrix} u = 6x^2-5 \\ du = 12xdx \\ xdx = \frac{1}{12}du \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{12}\ln\lvert u\rvert + C =$ (ф-ла 5) $= \boldsymbol{\frac{1}{12}\ln\lvert 6x^2-5\rvert + C}$
	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}arcsin^2 3x} = \begin{bmatrix} u = arcsin3x \\ du = \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \\ \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3}du \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{3u} + C =$ (ф-ла 2б) $= \boldsymbol{-\frac{1}{3arcsin3x} + C}$
	$\int \frac{e^{\operatorname{ctg} 7x}}{\sin^2 7x}dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{ctg} 7x \\ du = -\frac{7dx}{\sin^2 7x} \\ \frac{dx}{\sin^2 7x} = -\frac{1}{7}du \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\int e^u du = -\frac{1}{7}e^u + C =$ (ф-ла 4) $= \boldsymbol{-\frac{1}{7}e^{\operatorname{ctg} 7x} + C}$
	$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^2 x+5}} = \begin{bmatrix} u = \cos^2 x + 5 \\ du = 2\cos x \sin x\, dx = \sin 2x\, dx \\ \sin 2x\, dx = du \end{bmatrix} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} =$ (ф-ла 2а) $= 2\sqrt{u} + C = \boldsymbol{2\sqrt{\cos^2 x + 5} + C}$
	$\int \frac{dx}{(5x+3)\ln^4(5x+3)} = \begin{bmatrix} u = \ln(5x+3) \\ du = \frac{5dx}{5x+3} \\ \frac{dx}{5x+3} = \frac{1}{5}du \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u^4} = \frac{1}{5}\int u^{-4}du =$ (ф − ла 2) $= \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{-3}}{(-3)} + C = -\frac{1}{15u^3} + C = \boldsymbol{-\frac{1}{15\ln^3(5x+3)} + C}$
	$\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{16-e^{6x}}} = \begin{bmatrix} u = e^{3x} \\ du = 3e^{3x}dx \\ e^{3x}dx = \frac{1}{3}du \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} =$ (ф − ла 13) $= \frac{1}{3}\arcsin\frac{u}{4} + C = \boldsymbol{\frac{1}{3}\arcsin\frac{e^{3x}}{4} + C}$

Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен

Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ *або* $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Метод: виділення повного квадрату

Допоміжні формули: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Інтеграли зводяться до формул: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \to \left[\begin{matrix}(10)\\(11)\end{matrix}\right.$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$ $[\dot{x}^2 + 6\ddot{x} + 13 = (x^2+6x+9) - 9 + 13 = (x+3)^2 + 4;$ $\dot{a}^2 + 2\ddot{a}b + b^2 = (a+b)^2;$ $a^2 = x^2; \quad 2ab = 6x;$ $\boldsymbol{a = x}; \quad 2xb = 6x; \quad \boldsymbol{b = 3}]$ $\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = [10] = \boldsymbol{\frac{1}{2}\mathbf{arctg}\frac{x+3}{2} + C}$ Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+8x-20}$ $[\dot{x}^2 + 8\ddot{x} - 20 = (x^2+8x+16) - 16 - 20 = (x+4)^2 - 36;$ $\dot{a}^2 + 2\ddot{a}b + b^2 = (a+b)^2;$ $a^2 = x^2; \quad 2ab = 8x;$ $\boldsymbol{a = x}; \quad 2xb = 8x; \quad \boldsymbol{b = 4}]$ $\int \frac{dx}{x^2+8x-20} = \int \frac{dx}{(x+4)^2-36} = [11] = \frac{1}{2\cdot 6}\ln\left\lvert\frac{x+4-6}{x+4+6}\right\rvert + C =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{12}\mathbf{ln}\left\lvert\frac{x+2}{x+10}\right\rvert + C}$
Інтеграли зводяться до формул: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \to \left[\begin{matrix}(12)\\(13)\end{matrix}\right.$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+3}}$ $[\dot{x}^2 - 10\ddot{x} + 3 = (x^2-10x+25) - 25 + 3 = (x-5)^2 - 22;$ $\dot{a}^2 - 2\ddot{a}b + b^2 = (a-b)^2;$ $a^2 = x^2; \quad 2ab = 10x;$ $\boldsymbol{a = x}; \quad 2xb = 10x; \quad \boldsymbol{b = 5}]$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-5)^2-22}} = [12] =$ $= \boldsymbol{\mathbf{ln}\left\lvert x - 5 + \sqrt{(x-5)^2-22}\right\rvert + C}$ Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{7+2x-x^2}}$ $[7 + 2x - x^2 = -(x^2 - 2x - 7);$ $\dot{x}^2 - 2\ddot{x} + 7 = (x^2-2x+1) - 1 - 7 = (x-1)^2 - 8;$ $\dot{a}^2 - 2\ddot{a}b + b^2 = (a-b)^2;$ $a^2 = x^2; \quad 2ab = 2x;$ $\boldsymbol{a = x}; \quad 2xb = 2x;$ $\boldsymbol{b = 1}$ $7 + 2x - x^2 = 8 - (x-1)^2]$ $\int \frac{dx}{\sqrt{7+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(x-1)^2}} = [13] = \boldsymbol{\mathbf{arcsin}\frac{x-1}{2\sqrt{2}} + C}$

Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ *або* $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Метод: **виділення диференціала знаменника (або підкореневого виразу знаменника) та представлення інтегралу у вигляді суми двох інтегралів**

Інтеграли зводяться до формул: $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ ⇙ ⇘ $\int \frac{du}{u}$ (10)(11)	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{(x-5)dx}{x^2+12x-3}$ $[d(x^2+12x-3)=(2x+12)dx]$; $\frac{1}{2}\int \frac{2x-10}{x^2+12x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+12)-12-10}{x^2+12x-3}dx =$ $= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+12)dx}{x^2+12x-3} - \frac{22}{2}\int \frac{dx}{x^2+12x-3} = I_1 + I_2$ $I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+12)dx}{x^2+12x-3} = \begin{bmatrix} u = x^2+12x-3 \\ du = (2x+12)dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} =$ $= \frac{1}{2}\ln\|u\| + C = \boldsymbol{\frac{1}{2}\ln\left\|x^2+12x-3\right\| + C}$; $I_2 = -11\int \frac{dx}{x^2+12x-3} = -11\int \frac{dx}{(x+6)^2-39} =$ $= \boldsymbol{-\frac{11}{2\sqrt{39}}\ln\left\|\frac{x+6-\sqrt{39}}{x+6+\sqrt{39}}\right\| + C}$; $I = I_1 + I_2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\ln\left\|x^2+12x-3\right\| - \frac{11}{2\sqrt{39}}\ln\left\|\frac{x+6-\sqrt{39}}{x+6+\sqrt{39}}\right\| + C}$
Інтеграли зводяться до формул: $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ⇙ ⇘ $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$ (12)(13)	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ $[d(x^2-4x+5)=(2x-4)dx]$; $3\int \frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{2}{3}}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)+4+\frac{2}{3}}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx =$ $= \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{14}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = I_1 + I_2$ $I_1 = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \begin{bmatrix} u = x^2-4x+5 \\ du = (2x-4)dx \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$ $= \frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{u} + C = \boldsymbol{3\sqrt{x^2-4x+5} + C}$; $I_2 = 7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} =$ $= \boldsymbol{7\ln\left\|x+2+\sqrt{x^2-4x+5}\right\| + C}$; $I = I_1 + I_2 =$ $= \boldsymbol{3\sqrt{x^2-4x+5} + 7\ln\left\|x+2+\sqrt{x^2-4x+5}\right\| + C}$

<table>
<tr><td colspan="2">

Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{dx}{(x-d)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

</td></tr>
<tr><td>

За допомогою підстановки $\boldsymbol{x-d=\frac{1}{u}}$ інтеграл зводиться до інтегралу вигляду

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}}$$

</td><td>

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+5}}$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+5}} = \begin{bmatrix} x-1=\frac{1}{u} \\ x=\frac{1}{u}+1 \\ dx=-\frac{du}{u^2} \end{bmatrix} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\left(\frac{1}{u}+1\right)^2-4\left(\frac{1}{u}+1\right)+5}} =$$

$$= \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1+2u+u^2-4u-4u^2+5u^2}{u^2}}} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{\sqrt{2u^2-2u+1}}{u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} =$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|u-\frac{1}{2}+\sqrt{u^2+u+\frac{1}{2}}\right|+C}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Інтегрування раціональних дробів

</td></tr>
<tr><td>

Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та різні

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \cdots + \frac{C}{x-a_n}$

</td><td>

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{6x^2-15x-6}{(x-1)(x^2+2x-8)}dx$

Розкладемо знаменник на множники

$Q(x) = (x-1)(x^2+2x-8) = (x-1)(x+4)(x-2);$

$\frac{6x^2-15x-6}{(x+1)(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-2};$

приведемо дробі до спільного знаменника

$$6x^2-15x-6 = A(x+4)(x-2) + B(x-1)(x-2) + \\ = C(x-1)(x+4);$$

$x = \ \ 1|\quad 6-15-6=-5A;\quad \Rightarrow\ \boldsymbol{A=3;}$

$x = -4|\quad 96+60-6=30B;\quad \Rightarrow\ \boldsymbol{B=5;}$

$x = \ \ 2|\quad 24-30-6=6C;\quad \Rightarrow\ \boldsymbol{C=-2;}$

$\int \frac{6x^2-15x-6}{(x-1)(x+4)(x-2)}dx = 3\int\frac{dx}{x-1} + 5\int\frac{dx}{x+4} - 2\int\frac{dx}{x-2} =$

$\boldsymbol{= 3\ln|x-1| + 5\ln|x+4| - 2\ln|x-2| + C}$

</td></tr>
<tr><td>

Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та серед яких є кратні

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{B}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} +$
$+ \frac{C}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}} + \cdots + \frac{D}{x-a_1} + \cdots +$
$+ \frac{E}{x-a_n}$

</td><td>

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{2x^2-6x+12}{x^3-4x^2+4x}dx$

Розкладемо знаменник на множники

$Q(x) = x^3-4x^2+4x = x(x-2)^2;$

$\frac{2x^2-6x+12}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2};$

приведемо дробі до спільного знаменника

$2x^2-6x+12 = A(x-2)^2 + Bx + Cx(x-2);$

$x=0|\quad 12=4A;\qquad \Rightarrow\ \boldsymbol{A=3;}$

$x=2|\quad 8-12+12=2B;\quad \Rightarrow\ \boldsymbol{B=4}$

Підставимо в отриману рівність будь-яке значення x, наприклад $x=1$:

$2-6+12 = A+B-C$; нам вже відомі значення A і B:

$8 = 3+4-\mathrm{C};\quad \Rightarrow\quad \boldsymbol{C=-1.}$

$\int \frac{2x^2-6x+12}{x(x-2)^2}dx = 3\int\frac{dx}{x} + 4\int\frac{dx}{(x-2)^2} - \int\frac{dx}{x-2} =$

$\boldsymbol{= 3\ln|x| - \frac{4}{x-2} - \ln|x-2| + C}$

</td></tr>
</table>

Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника якого є комплексні $Q(x) = (x - x_1) \dots (x^2 + a^2)$ $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \dots + \frac{Bx+C}{(x^2+a^2)}$ або $Q(x) = (x - x_1) \dots (ax^2 + bx + c)$ $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \dots +$ $+ \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{6x^2+x+6}{(x-2)(x^2+4)} dx$ $\frac{6x^2+x+6}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$, приведемо дробі до спільного знаменника $6x^2 + x + 6 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x - 2)$ Підставимо єдиний відомий нам корінь $x = 2$: $6 \cdot 2^2 + 2 + 6 = A(2^2 + 4) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A = 4;}$ інші коефіцієнти знайдемо, якщо розкриємо дужки, порівняємо коефіцієнти при однакових степенях x та підставимо відоме нам значення коефіцієнта A $6x^2 + x + 6 = Ax^2 + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C;$ $\begin{array}{l\|l} x^2 & 6 = A + B \qquad \qquad \boldsymbol{B = 2} \\ x^1 & 1 = -2B + C \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C = 5} \\ x^0 & 6 = 4A - 2C \end{array}$ $\int \frac{6x^2+x+6}{(x-2)(x^2+4)} dx = 4\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{2x+5}{x^2+4} dx = 4\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{2xdx}{x^2+4} +$ $+5\int \frac{dx}{x^2+4} = \boldsymbol{4\ln\|x-2\| + \ln\|x^2+4\| + \frac{5}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2} + C}$ Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{5x^2+x+4}{x^3-1} dx$ Розкладемо знаменник на множники $Q(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ $\frac{5x^2+x+4}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$; приведемо дробі до спільного знаменника $5x^2 + x + 4 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1);$ Підставимо єдиний відомий нам корінь $x = 1$: $5 + 1 + 4 = A(1 + 1 + 1); \quad \Rightarrow \quad A = 3;$ інші коефіцієнти знайдемо, якщо розкриємо дужки, порівняємо коефіцієнти при однакових степенях x та підставимо відоме нам значення коефіцієнта A $5x^2 + x + 4 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C;$ $\begin{array}{l\|l} x^2 & 5 = A + B \qquad \qquad \boldsymbol{B = 2} \\ x^1 & 1 = -B + C \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C = -1} \\ x^0 & 4 = A - C \end{array}$ $\int \frac{5x^2+x+4}{(x-1)(x^2+x+1)} dx = 3\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2x-1}{x^2+x+1} dx = 3\int \frac{dx}{x-1} +$ $\int \frac{(2x+1)-1-1}{x^2+x+1} dx = 3\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - 2\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$ $= \boldsymbol{3\ln\|x-1\| + \ln\|x^2+x+1\| - \frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C}$

Інтегрування частинами $\boxed{\boldsymbol{\int udv = uv - \int vdu}}$	
$\int P_n(x)\cdot\begin{matrix} sin(ax+b)\\ cos(ax+b)\\ tg(ax+b)\\ ctg(ax+b)\end{matrix}\cdot dx$ $\big(u = P_n(x)\big)$	Знайти невизначений інтеграл $\int(3x-5)\sin 7x\,dx$ $\int(3x-5)\sin 7x\,dx = \begin{bmatrix} u = 3x-5 & du = 3\,dx \\ dv = \sin 7x\,dx & v = -\frac{1}{7}\cos 7x\end{bmatrix} =$ $= -\frac{1}{7}(3x-5)\cos 7x + \frac{1}{7}\cdot 3\int\cos 7x\,dx =$ $= \boldsymbol{-\frac{1}{7}(3x-5)\cos 7x + \frac{3}{49}\sin 7x + C}$
$\int P_n(x)a^x dx$ $\big(u = P_n(x)\big)$	Знайти невизначений інтеграл $\int(3x^2-11)e^{6x}dx$ $\int(3x^2-11)e^{5x}dx = \begin{bmatrix} u = 3x^2-11 & du = 6xdx \\ dv = e^{5x}dx & v = \frac{1}{5}e^{5x}dx\end{bmatrix} =$ $= \frac{1}{5}(3x^2-11)e^{5x} - \frac{6}{5}\int x\,e^{6x}dx =$ $= \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{5x}dx & v = \frac{1}{5}e^{5x}dx\end{bmatrix} =$ $= \frac{1}{5}(3x^2-11)e^{5x} - \frac{6}{5}\left(\frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{6x}dx\right) =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{5}(3x^2-11)e^{5x} - \frac{6}{25}xe^{5x} + \frac{6}{125}e^{5x} + C}$
$\int \log_a(ax+b)\,dx$ $(u = \log_a(ax+b))$	Знайти невизначений інтеграл $\int\ln(4x+3)\,dx$ $\int\ln(4x+3)\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln(4x+3) & du = \frac{4}{4x+3}dx \\ dv = dx & v = x\end{bmatrix} =$ $= x\ln(4x+3) - \int\frac{4x}{4x+3}dx = x\ln(4x+3) -$ $-\int\frac{(4x+3)-3}{4x+3}dx = x\ln(4x+3) - \int dx + 3\int\frac{dx}{4x+3} =$ $= \boldsymbol{x\ln(4x+3) - x + \frac{3}{4}\ln(4x+3) + C}$
$\int P_n(x)\log_a(ax+b)dx$ $(u = \log_a(ax+b))$	Знайти невизначений інтеграл $\int x^3\ln x\,dx$ $\int x^3\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^3dx & v = \frac{1}{4}x^4\end{bmatrix} =$ $= \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^4\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C}$
$\int\begin{matrix} arcsin(ax+b)\\ arccos(ax+b)\\ arctg(ax+b)\\ arcctg(ax+b)\end{matrix}\cdot dx$ $\left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b)\\ arccos(ax+b)\\ arctg(ax+b)\\ arcctg(ax+b)\end{matrix}\right)$	Знайти невизначений інтеграл $\int\arcsin 6x\,dx$ $\int\arcsin 6x\,dx = \begin{bmatrix} u = \arcsin 6x & du = \frac{6}{\sqrt{36-x^2}}dx \\ dv = dx & v = x\end{bmatrix} =$ $= x\arcsin 6x - \frac{6}{(-2)}\int\frac{-2\cdot x\,dx}{\sqrt{36-x^2}} = x\arcsin 6x + 3\int\frac{d(36-x^2)}{\sqrt{36-x^2}} =$ $= \boldsymbol{x\arcsin 6x + 6\sqrt{36-x^2} + C}$

<table>
<tr>
<td>

$$\int P_n(x)\cdot \begin{matrix} arcsin(ax+b)\\ arccos(ax+b)\\ arctg(ax+b)\\ arcctg(ax+b)\end{matrix}\cdot dx$$

$$\left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b)\\ arccos(ax+b)\\ arctg(ax+b)\\ arcctg(ax+b)\end{matrix}\right)$$

</td>
<td>

Знайти невизначений інтеграл $\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx$

$$\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} 2x & du = \frac{2dx}{x^2+4} \\ dv = xdx & v = \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 2x - 2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 2x -$$
$$-\int\frac{(x^2+4)-4}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 2x - \int dx + 4\int\frac{dx}{x^2+4} =$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} 2x - x + 2 \operatorname{arctg} 2x + C}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

та багато інших…

</td>
<td>

Знайти невизначений інтеграл $\int e^{5x}\cos 3x\, dx$

$$\int e^{5x}\cos 3x\, dx = \begin{bmatrix} u = e^{5x} & du = 5e^{5x}dx \\ dv = \cos 3x\, dx & v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x - \frac{5}{3}\int e^{5x}\sin 3x\, dx =$$
$$= \begin{bmatrix} u = e^{5x} & du = 5e^{5x}dx \\ dv = \sin 3x\, dx & v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x - \ -\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{5x}\cos 3x + \frac{5}{3}\int e^{5x}\cos 3x\, dx\right)$$

Позначимо $I = \int e^{5x}\cos 3x\, dx$, отримаємо лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу. Розв’яжемо його, та дістанемо відповідь:

$$I = \frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x + \frac{5}{9}e^{5x}\cos 3x - \frac{5}{9}I;$$
$$I + \frac{5}{9}I = \frac{1}{9}(3\,e^{5x}\sin 3x + 5\,e^{5x}\cos 3x);$$
$$I = \boldsymbol{\frac{1}{14}\left(3\,e^{5x}\sin 3x + 5\,e^{5x}\cos 3x\right) + C}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Інтегрування деяких класів тригонометричних функцій

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Інтеграли типу
$\boldsymbol{\int R(sinx, cosx)dx}$

знаходяться за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$\boldsymbol{u = tg\frac{x}{2}}$; $\quad sinx = \frac{2u}{1+u^2}$;
$cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2}$; $\quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$

</td>
<td>

Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{3\cos x + 4\sin x - 7}$

$$\int\frac{dx}{3\cos x+4\sin x-7} = \begin{bmatrix} u = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} & dx = \frac{2du}{1+u^2} \end{bmatrix} =$$
$$= \int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}+4\cdot\frac{2u}{1+u^2}-7} = 2\int\frac{du}{3-3u^2+8u-7-7u^2} = 2\int\frac{du}{-10u^2+8u-4}$$
$$= -\frac{1}{5}\int\frac{du}{u^2-\frac{4}{5}u-\frac{2}{5}} = -\frac{1}{5}\int\frac{du}{\left(u-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{14}{25}} =$$
$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{14}}{5}}\ln\left|\frac{u-\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{14}}{5}}{u-\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{14}}{5}}\right| + C = \boldsymbol{-\frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2-\sqrt{14}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2+\sqrt{14}}\right| + C}$$

</td>
</tr>
</table>

Інтеграли типу $\int \boldsymbol{R(sinx)cosxdx}$ знаходяться за допомогою підстановки $u = sinx \quad du = cosxdx$	Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^3 4x \cos 4x\, dx$ $\int \sin^3 4x \cos 4x\, dx = \begin{bmatrix} u = \sin 4x \\ du = 4\cos 4x\, dx \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int u^3 du =$ $= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^4}{4} + C = \boldsymbol{\frac{1}{16}\sin^4 4x + C}$
Інтеграли типу $\int \boldsymbol{R(cosx)sinxdx}$ знаходяться за допомогою підстановки $u = cosx \quad du = -sinxdx$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sin 5x\, dx}{\cos^2 5x - 9}$ $\int \frac{\sin 5x\, dx}{\cos^2 5x - 9} = \begin{bmatrix} u = \cos 5x \\ du = -5\sin 5x\, dx \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\int \frac{du}{u^2-9} =$ $= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left\lvert\frac{u-3}{u+3}\right\rvert + C = \boldsymbol{-\frac{1}{30}\ln\left\lvert\frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3}\right\rvert + C}$
Інтеграли типу $\int \boldsymbol{R(tgx)dx}$ знаходяться за допомогою підстановки $u = tgx \qquad dx = \frac{du}{1+u^2}$ (якщо підінтегральна функція типу $R(sinx, cosx)$, але і $sinx$ і $cosx$ знаходяться у парних степенях використовують ту ж саму підстановку) $sin^2x = \frac{u^2}{1+u^2} \quad cos^2x = \frac{1}{1+u^2}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \mathrm{tg}^4\, 7x\, dx$ $\int \mathrm{tg}^4\, 7x\, dx = \begin{bmatrix} u = \mathrm{tg}\, 7x \\ dx = \frac{1}{7}\frac{du}{u^2+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\int\frac{u^4 du}{u^2+1} =$ $= \frac{1}{7}\int\left(u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1}\right)du = \frac{1}{7}\left(\frac{u^3}{3} - u + \mathrm{arctg}\, u\right) + C =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{21}\mathrm{tg}^3\, 7x - \frac{1}{7}\mathrm{tg}\, 7x + x + C}$ Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\sin 2x - 2\cos^2 x}$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\sin 2x - 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cdot 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x} =$ $= \begin{bmatrix} u = \mathrm{tg}\, x & dx = \frac{du}{u^2+1} \\ \sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} & \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{bmatrix} =$ $= \int \frac{\frac{du}{u^2+1}}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 + 10\cdot\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2} =$ $= \int\frac{du}{u^2+10u-2} = \int\frac{du}{(u+5)^2-27} = \frac{1}{2\cdot 3\sqrt{3}}\ln\left\lvert\frac{u+5-3\sqrt{3}}{u+5+3\sqrt{3}}\right\rvert + C =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left\lvert\frac{\mathrm{tg}\, x + 5 - 3\sqrt{3}}{\mathrm{tg}\, x + 5 + 3\sqrt{3}}\right\rvert + C}$
Інтегралі типу $\int \boldsymbol{sin^m x\, cos^n x dx}$ 1) m або n – непарне число: - якщо m непарне число, використовуємо заміну $\boldsymbol{u = cosx}$ $\boldsymbol{1 - u^2 = sin^2 x}$ $\boldsymbol{du = -sinxdx}$ - якщо n непарне число, використовуємо заміну $\boldsymbol{u = sinx}$ $\boldsymbol{1 - u^2 = cos^2 x}$ $\boldsymbol{du = cosxdx}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^7 2x\cos^4 2x\, dx$ $\int \sin^7 2x \cos^4 2x\, dx = \int \cos^4 2x \sin^6 2x \sin 2x\, dx =$ $= \begin{bmatrix} u = \cos 2x \\ du = -2\sin 2x dx \\ \sin^6 2x = (\sin^2 2x)^3 = (1-u^2)^3 \end{bmatrix} =$ $= -\frac{1}{2}\int u^4(1-u^2)^3 du =$ $= -\frac{1}{2}\int(u^4 - 3u^6 + 3u^8 - u^{10})du =$ $= -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^5}{5} + \frac{3}{2}\cdot\frac{u^7}{7} - \frac{3}{2}\cdot\frac{u^9}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{11}}{11} + C =$ $= \boldsymbol{-\frac{1}{10}\cos^5 2x + \frac{3}{14}\cos^7 2x - \frac{1}{6}\cos^9 2x + \frac{1}{22}\cos^{11} 2x + C}$

2) m і n – парні числа користуємося формулами зниження степені для тригонометричних функцій $$\boldsymbol{sin^2x=\frac{1}{2}(1-cos2x);}$$ $$\boldsymbol{cos^2x=\frac{1}{2}(1+cos2x)}$$	Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^4 3x\cos^2 3x\,dx$ $\int \sin^4 3x\cos^2 3x\,dx=\begin{bmatrix}\cos^2 3x=\frac{1}{2}(1+\cos 6x)\\ \sin^4 3x=\left(\frac{1}{2}(1-\cos 6x)\right)^2\end{bmatrix}=$ $=\frac{1}{8}\int(1-2\cos 6x+\cos^2 6x)\,(1+\cos 6x)dx=$ $=\frac{1}{8}\int(1-2\cos 6x+\cos^2 6x+\cos 6x-2\cos^2 6x+$ $+\cos^3 6x)dx=$ $=\frac{1}{8}\int(1-\cos 6x-\cos^2 6x+\cos^3 6x)dx=$ $=\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{8}\int\cos 6x\,dx-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int(1+\cos 12x)dx+$ $+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}\int(1-\sin^2 6x)\,d(\sin 6x)=\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x-$ $-\frac{1}{16}x-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{12}\sin 12x+\frac{1}{48}\sin 6x-\frac{1}{48}\cdot\frac{\sin^3 6x}{3}+C=$ $=\boldsymbol{\frac{1}{16}x-\frac{1}{192}\sin 12x-\frac{1}{144}\sin^3 6x+C}$
Інтеграли типу $$\boldsymbol{\int sin\alpha x\ \ cos\beta x\ \ dx,}$$ $$\boldsymbol{\int sin\alpha x\ \ sin\beta x\ \ dx,}$$ $$\boldsymbol{\int cos\alpha x\ \ cos\beta x\ \ dx}$$ обчислюються за формулами перетворення добутку у суму: $sin\alpha x\ cos\beta x=$ $=\frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta)x+sin(\alpha-\beta)x];$ $sin\alpha x\ sin\beta x=$ $=\frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta)x-cos(\alpha+\beta)x];$ $cos\alpha x\ cos\beta x=$ $=\frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta)x+cos(\alpha+\beta)x]$	Знайти невизначений інтеграл $\int \sin 7x\cos 3x\,dx$ $\int \sin 7x\cos 3x\,dx=$ $=\frac{1}{2}\int(\sin(7x+3x)+\sin(7x-3x))\,dx=$ $=\frac{1}{2}\int(\sin 10x+\sin 4x)\,dx=$ $=\boldsymbol{-\frac{1}{20}\cos 10x-\frac{1}{8}\cos 4x+C}$

Інтегрування деяких ірраціональних виразів

Інтеграли типу $\int \boldsymbol{R\left(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}, \dots, \sqrt[k]{ax+b}\right)dx}$ необхідна підстановка $ax+b=u^p$, де p – найменше спільне кратне чисел $m, n, \dots k$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}+4}$ $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}+4} = \begin{bmatrix} x+3=u^2 \\ dx=2udu \end{bmatrix} = \int \frac{(u^2-3)2udu}{u+4} = 2\int \frac{u^3-6u}{u+4}du =$ $= 2\int \left(u^2-4u+10-\frac{30}{u+4}\right)du = 2\frac{u^3}{3} - 8\frac{u^2}{2} + 20u -$ $-60\ln\lvert u+4\rvert + C = \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} - 4(x+3)} +$ $\boldsymbol{+20\sqrt{x+3} - 60\ln\left\lvert\sqrt{x+3}+4\right\rvert + C}$ Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-5}+3\sqrt[4]{2x-5}}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-5}+3\sqrt[4]{2x-5}} = \begin{bmatrix} 2x-5=u^4 \\ 2dx=4u^3du \\ dx=2u^3du \end{bmatrix} = \int \frac{2u^3du}{u^2+3u} =$ $= 2\int \frac{u^2du}{u+3} = 2\int \left(u-3+\frac{9}{u+3}\right)du =$ $= 2\frac{u^2}{2} - 6u + 18\ln\lvert u+3\rvert + C =$ $\boldsymbol{= \sqrt{2x-5} - 6\sqrt[4]{2x-5} + 18\ln\left\lvert\sqrt[4]{2x-5}+3\right\rvert + C}$
Інтеграли типу а) $\int \boldsymbol{R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx}$ Підстановка $x = a\,sint;$ $\sqrt{a^2-x^2} = a\,cost;$ $dx = a\,costdt$	Знайти невизначений інтеграл $\int x^4\sqrt{4-x^2}dx$ $\int x^4\sqrt{4-x^2}dx = \begin{bmatrix} x=2\sin t \\ \sqrt{4-x^2}=2\cos t \\ dx=2\cos t\,dt \end{bmatrix} =$ $= \int(2\sin t)^4\, 2\cos t\, 2\cos t\, dt = 64\int \sin^4 t\cos^2 t\, dt =$ $= 64\int\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\right)^2 \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt =$ $= 8\int(1-2\cos 2t+\cos^2 2t)(1+\cos 2t)dt =$ $= 8\int(1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t)\,dt =$ $= 8\int dt - 8\int\cos 2t\,dt - 4\int(1+\cos 4t)dt +$ $+4\int(1-\sin^2 2t)\,d(\sin 2t) = 8t - 4\sin 2t - 4t -$ $-\sin 4t + 4\sin 2t - 4\frac{\sin^3 2t}{3} + C =$ $\boldsymbol{= 4t - \sin 4t - \frac{4}{3}\sin^3 2t + C,}$ **де** $\boldsymbol{t = \arcsin\frac{x}{2}}$ Або перепишемо остаточний вираз як $4t - 4\sin t\cos t(1-2\sin^2 t) - \frac{4}{3}(2\sin t\cos t)^3 + C =$ $= 4\arcsin\frac{x}{2} - 4\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\left(1-2\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) - \frac{4}{3}\left(2\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^3 + C$ $\boldsymbol{= 4\arcsin\frac{x}{2} - x\sqrt{4-x^2}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{6}x^3\sqrt{(4-x^2)^3} + C}$

б) $\int \boldsymbol{R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx}$ Підстановка $x=\frac{a}{sint};$ $\sqrt{x^2-a^2}=a\,tgt;$ $dx=-\frac{acost}{sin^2t}dt$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$ $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \left[\begin{array}{c} x=\frac{3}{\sin t} \\ \sqrt{x^2-9}=3\frac{\sin t}{\cos t}=3\operatorname{tg} t \\ dx=-\frac{3\cos t}{\sin^2 t}dt \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{3\cos t}{\sin^2 t}dt}{\left(\frac{3}{\sin t}\right)^2 \cdot 3\frac{\sin t}{\cos t}} =$ $= -\frac{1}{9}\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = -\frac{1}{9}\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt = -\frac{1}{9}\int \frac{dt}{\sin t} +$ $+\frac{1}{9}\int \sin t\,dt = \boldsymbol{-\frac{1}{9}\ln\left\|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right\| - \frac{1}{9}\cos t + C},$ **де** $\boldsymbol{t=\arcsin\frac{3}{x}}$
в) $\int \boldsymbol{R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx}$ Підстановка $x=a\,tgt;$ $\sqrt{x^2+a^2}=\frac{a}{cost};$ $dx=\frac{a\,dt}{cos^2t}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^3}dx$ $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^3}dx = \left[\begin{array}{c} x=4\operatorname{tg} t=4\frac{\sin t}{\cos t} \\ \sqrt{x^2+16}=\frac{4}{\cos t} \\ dx=\frac{4dt}{\cos^2 t} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{4}{\cos t}\cdot\frac{4dt}{\cos^2 t}}{\left(4\frac{\sin t}{\cos t}\right)^3} =$ $= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^3 t} = \left[\begin{array}{c} z=\operatorname{tg}\frac{t}{2} \\ \sin t=\frac{2z}{1+z^2} \\ dt=\frac{2dz}{1+z^2} \end{array}\right] = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^3} = \frac{1}{16}\int \frac{\left(1+z^2\right)^2}{z^3}dz =$ $= \frac{1}{16}\int \frac{1+2z^2+z^4}{z^3}dz = \frac{1}{16}\int \frac{dz}{z^3} + \frac{1}{8}\int \frac{dz}{z} + \frac{1}{16}\int zdz =$ $= -\frac{1}{32z^2} + \frac{1}{8}\ln\|z\| + \frac{z^2}{32} + C =$ $= \boldsymbol{-\frac{1}{32\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)^2} + \frac{1}{8}\ln\left\|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right\| + \frac{\left(z\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)^2}{32} + C}$, **де** $\boldsymbol{t=\operatorname{arctg}\frac{x}{4}}$

Тема «ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»

Основні властивості визначеного інтегралу	
Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі інтегралів	$\int_a^b \big(u(x)+v(x)+\dots+w(x)\big)dx =$ $= \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx + \dots + \int_a^b w(x)dx$
Постійний множник можна виносити за знак визначеного інтегралу	$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$
При перестановці границь інтегрування визначеного інтегралу знак визначеного інтегралу змінюється на протилежний	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
При розбитті інтервалу інтегрування на частини, визначений інтеграл дорівнює сумі інтегралів по кожній з частин	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Якщо підінтегральна функція в інтервалі інтегрування не змінює знак, то визначений інтеграл є числом того ж знаку, що й підінтегральна функція	Якщо $f(x) \ge 0$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$, і, навпаки, якщо $f(x) \le 0$, то $\int_a^b f(x)dx \le 0$.
Оцінити величину визначеного інтегралу можна за формулою	$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$
Обчислення визначених інтегралів	
Формула **Ньютона - Лейбниця**	$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$
Безпосереднє обчислення визначених інтегралів	Обчислити визначений інтеграл $\int_{-1}^0 (4x^3 + 5e^x - 7)dx = \left(4\frac{x^4}{4} + 5e^x - 7x\right)\Big|_{-1}^{0} =$ $= 5 - \left(1 + \frac{5}{e} + 7\right) = \boldsymbol{\frac{5}{e} - 3}$
	Обчислити визначений інтеграл $\int_2^5 \frac{dx}{x^2-4x+5} = \int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \mathrm{arctg}(x-2)\Big|_2^5 =$ $= \mathrm{arctg}3 - \mathrm{arctg}0 = \boldsymbol{\mathrm{arctg}3}$

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Заміна змінної у визначеному інтегралі

$$\int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{f(\varphi(u))\, \varphi'(u) dt} =$$
$$= \boldsymbol{F(\varphi(\alpha)) - F(\varphi(\beta))} =$$
$$= \boldsymbol{F(b) - F(a)}$$</td>
<td>Обчислити визначений інтеграл

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 1}} = \begin{bmatrix} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ u_{\text{н}} = \ln e = 1 \\ u_{\text{в}} = \ln e^2 = 2 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} =$$
$$= \ln\left|u + \sqrt{u^2 - 1}\right| \Big|_1^2 = \ln\left|2 - \sqrt{3}\right| - \ln 1 = \mathbf{ln}\left|\mathbf{2 - \sqrt{3}}\right|$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \begin{bmatrix} z = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \\ dx = \frac{2dz}{1+z^2} \\ u_{\text{н}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \\ u_{\text{в}} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{bmatrix} = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}} =$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2+1-z^2}{1+z^2}} = \int_{-1}^{1} dz = z \Big|_{-1}^{1} = 1 + 1 = \mathbf{2}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Обчислити визначений інтеграл

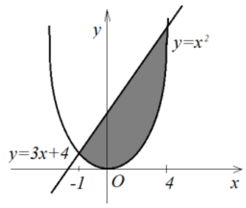
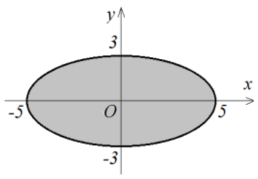
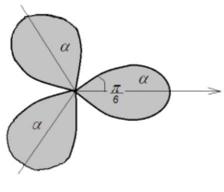
$$\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx = \begin{bmatrix} 1 - x = u^3 \\ x = 1 - u^3 \\ dx = -3u^2 du \\ \text{н:}\ 1 - 1 = u^3;\ u_{\text{н}} = 0 \\ \text{в:}\ 1 - 9 = u^3;\ u_{\text{в}} = -2 \end{bmatrix} =$$
$$= -3\int_0^{-2} (1 - u^3)\, u \cdot u^2 du = 3\int_{-2}^{0} (u^3 - u^6) du =$$
$$= 3\left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^7}{7}\right)\Big|_{-2}^{0} = 0 - 3\left(4 - \frac{128}{7}\right) = \mathbf{\frac{300}{7}}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Інтегрування частинами визначених інтегралів

$$\int_a^b \boldsymbol{u \cdot dv = uv}\Big|_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} - \int_a^b \boldsymbol{v\, du}$$</td>
<td>Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + 4)\sin 3x\, dx = \begin{bmatrix} u = x + 4 & du = dx \\ dv = \sin 3x\, dx & v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{3}(x + 4)\cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3x\, dx =$$
$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 4\right)\cos\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3}(0 + 4)\cos 0 + \frac{1}{9}\sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{\pi}{4} + 4\right) + \frac{4}{3} + \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{9}\sin 0 =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{24} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}\pi}{24} + \frac{11\sqrt{2}}{18} + \frac{4}{3} = \mathbf{\frac{3\sqrt{2}\pi + 44\sqrt{2} + 96}{72}}$$</td>
</tr>
</table>

	Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} x \operatorname{arctg} 2x\, dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} 2x & du = \frac{2dx}{1+4x^2} \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} =$ $= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} 2x \Big\vert_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} 1 - 0 -$ $- \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1+4x^2)-1}{1+4x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+4x^2} =$ $= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} x \Big\vert_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} 2x \Big\vert_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \operatorname{arctg} 1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$
	Обчислити визначений інтеграл $\int_{e^2}^{e^3} \ln^2 x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln^2 x & du = 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} =$ $= x \cdot \ln^2 x \Big\vert_{e^2}^{e^3} - 2 \int_{e^2}^{e^3} x \cdot \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & x \end{bmatrix} =$ $= e^3 \ln^2 e^3 - e^2 \ln^2 e^2 - 2x \cdot \ln x \Big\vert_{e^2}^{e^3} + 2 \int_{e^2}^{e^3} x \cdot \frac{dx}{x} =$ $= 9e^3 - 4e^2 - 2e^3 \ln e^3 + 2e^2 \ln e^2 + 2x \Big\vert_{e^2}^{e^3} =$ $= 9e^3 - 4e^2 - 6e^3 + 4e^2 + 2e^3 - 2e^2 = \mathbf{5e^3 - 2e^2}$
Невласні інтеграли	
Невласні інтеграли з ***нескінченими границями*** $$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\eta \to \infty} \int_a^{\eta} f(x)dx = \lim_{\eta \to \infty} F(\eta) - F(a)$$	Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $$\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{2xdx}{x^4+9} = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+3^2} = \frac{1}{3} \lim_{\eta \to \infty} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{3} \Big\vert_{\sqrt{3}}^{\eta} =$$ $$= \frac{1}{3}\left(\lim_{\eta \to \infty} \operatorname{arctg} \frac{\eta^2}{3} - \operatorname{arctg} 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}.$$ Ми отримали скінчене значення, отже невласний інтеграл **збігається**
Невласні інтеграли ***від розривних функцій*** $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$ або $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$	Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_{-3}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2}$ Підінтегральна функція потерпає розрив на нижній границі $$\int_{-3}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x+3} \Big\vert_{-3+\varepsilon}^{0} = -\frac{1}{3} + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{-3+\varepsilon+3}$$ $$= -\frac{1}{3} + \infty = \infty$$ Ми отримали нескінченність, отже невласний інтеграл **розбігається**

Тема «ДЕЯКІ ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ»

Обчислення площі плоскої фігури	
Фігура обмежена **лініями, заданими в декартовій системі координат**: кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$ і $x = b$, і віссю Ox $$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)dx},$$ або лініями $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ $$\boldsymbol{S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}$$	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2, \ \ y = 3x + 4$  Знайдемо точки перетину ліній $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x + 4 \end{cases} \Rightarrow$ $x^2 = 3x + 4;$ $x^2 - 3x - 4 = 0; \Rightarrow$ $x_1 = -1, x_2 = 4$ Обчислимо площу: $$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_{-1}^4 (3x + 4 - x^2)dx =$$ $$= \left(3\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg\vert_{-1}^{4} = 24 + 16 - \frac{64}{3} - \left(\frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{3}\right)$$ $$= \boldsymbol{21\frac{1}{6}} \ (\text{од}^2)$$
Фігура обмежена **лініями, заданими параметрично**: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $$\boldsymbol{S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'_t \cdot dt}$$	Обчислити площу еліпса $x = 5\cos t, \ \ y = 3\sin t$ Обчислимо похідну  $x'_t = -5\sin t$ та підставимо у формулу: $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'_t \cdot dt =$ $= \int_0^{2\pi} 3\sin t \cdot (-5\sin t)\,dt =$ $= -15\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt =$ $$= -\frac{15}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 2t)dt = -\frac{15}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg\vert_0^{2\pi} =$$ $= -15\pi;$ $$S = \lvert -15\pi \rvert = \boldsymbol{15\pi} \ (\text{од}^2)$$
Фігура обмежена **лініями, заданими в полярній системі координат** $\rho = f(\varphi)$: $$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,d\varphi}$$	Обчислити площу трипелюсткової троянди $\rho = a\cos 3\varphi$  Фігура симетрична, тому обчислимо площу шостої частини фігури: $\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi\,d\varphi =$ $$= \frac{1}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1 + \cos 6\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg\vert_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\pi}{6}$$ $$S = \boldsymbol{\frac{a^2}{4} \cdot \pi} \ (\text{од}^2)$$

<table>
<tr><th colspan="2">Обчислення довжини дуги</th></tr>
<tr><td>
Лінія задана в декартовій системі координат
кривою $y = f(x)$, між точками $x = a$ і $x = b$, і

$$\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx}$$
</td><td>
Обчислити довжину дуги $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ між точками $1 \le x \le 9$
Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення:

$$y' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x-1};$$
$$1 + (y')^2 = 1 + (x-1) = x.$$

Підставимо у формулу:

$$l = \int_1^9 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^9 = \frac{2}{3}(27-1) = \mathbf{17\frac{1}{3}}\,(\text{од.})$$
</td></tr>
<tr><td>
Лінія задана параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

$$\boldsymbol{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt}$$
</td><td>
Обчислити довжину дуги астроїди

$$x = 3\cos^3 t\,, \qquad y = 3\sin^3 t$$

Знайдемо похідні та виконаємо необхідні перетворення:

$$x'_t = -3\cdot 3\cos^2 t\cdot\sin t;\;\; y'_t = 3\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t;$$
$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = 81\cos^4 t\cdot\sin^2 t + 81\cos^2 t\cdot\sin^4 t =$$
$$= 81\cos^2 t\cdot\sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) = 81\cos^2 t\cdot\sin^2 t$$

Підставимо у формулу. В силу симетрії лінії, достатньо обчислити чверть лінії, а потім помножити отримане значення на 4

$$\frac{1}{4}l = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\, dt = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt =$$
$$= -\frac{9}{4}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{9}{4}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{9}{4}(-1-1) = \frac{9}{2}$$
$$l = 4\cdot\frac{9}{2} = \mathbf{18}\;(\text{од.})$$
</td></tr>
<tr><td>
Лінія задана в полярній системі координат

$$\rho = f(\varphi):$$

$$\boldsymbol{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi}$$
</td><td>
Обчислити довжину дуги $\rho = 5\sin^3\frac{\varphi}{3}$ при $0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$
Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення:

$$\rho' = 5\cdot 3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3};$$
$$(\rho')^2 + \rho^2 = 25\sin^6\frac{\varphi}{3} + 25\sin^4\frac{\varphi}{3}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3} =$$
$$= 25\sin^4\frac{\varphi}{3}\left(\sin^2\frac{\varphi}{3} + \cos^2\frac{\varphi}{3}\right) = 25\sin^4\frac{\varphi}{3}$$

Підставимо у формулу:

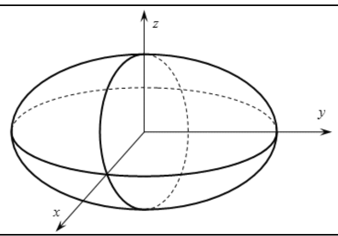
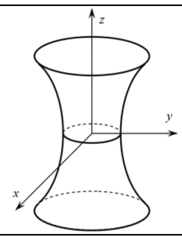
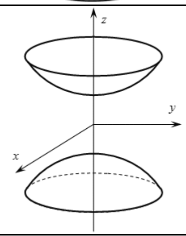
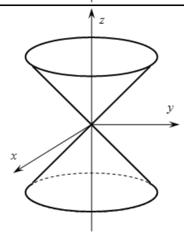
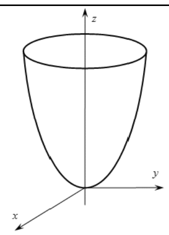
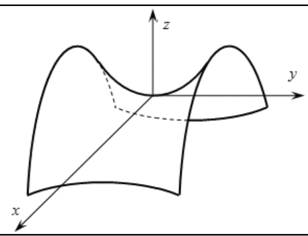
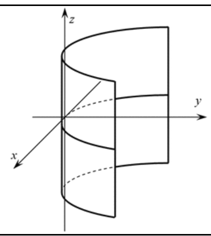
$$l = 5\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = \frac{5}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(1 + \cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi =$$
$$= \frac{5}{2}\left(\varphi + \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{3\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{15\pi}{4}}\,(\text{од.})$$
</td></tr>
</table>

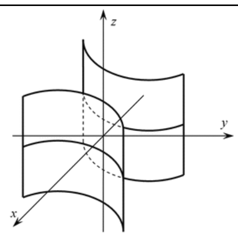
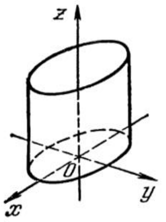
Обчислення об'єму тіла обертання

Об'єм тіла обертання навколо осі абсцис: $$\boldsymbol{V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx}$$	Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $x^2 = 4 + y,\ y = 0$ навколо осі абсцис Перепишемо рівняння лінії у вигляді $y = x^2 - 4$ Знайдемо границі інтегрування, розв'язавши рівняння $$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow\ x^2 - 4 = 0\ \Rightarrow x = \pm 2$$ Обчислимо об'єм за формулою $$V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)^2\, dx =$$ $$= \pi \int_{-2}^{2} (x^4 - 8x^2 + 16)\, dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} + 16x \right) \Big\|_{-2}^{2}$$ $$= 2\pi \left(\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} + 16x \right) \Big\|_{0}^{2} = 2\pi \left(\frac{2^5}{5} - 8\frac{2^3}{3} + 16 \cdot 2 \right) =$$ $$= \boldsymbol{\frac{128}{5}\pi = 25{,}6\pi}\ (\text{од}^3)$$
Об'єм тіла обертання навколо осі ординат: $$\boldsymbol{V_y = \pi \int_c^d x^2\, dy}$$	Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x,\ x^2 = 4y$ навколо осі ординат Знайдемо границі інтегрування, розв'язавши рівняння $$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^4 = 16x^2 \\ x^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow\ y^4 = 16 \cdot 4y$$ $$y^4 - 64y = 0;\ \ y(y^3 - 64) = 0;\ \ y_1 = 0;\ y_2 = 4$$ Об'єм шуканої фігури є різниця об'ємів двох фігур, утворених обертанням парабол навколо осі ординат: $$V_y = V_{y_2} - V_{y_1}$$ Обчислимо об'єми за формулою $$V_{y_1} = \pi \int_0^4 \left(\frac{y^2}{4} \right)^2 dy = \frac{\pi}{16} \int_0^4 y^4\, dy = \frac{\pi}{16} \frac{y^5}{5} \Big\|_0^4 = \frac{64}{5}\pi;$$ $$V_{y_2} = \pi \int_0^4 4y\, dy = 4\pi \frac{y^2}{2} \Big\|_0^4 = 32\pi$$ Остаточно маємо $$V_y = V_{y_2} - V_{y_1} = 32\pi - \frac{64}{5}\pi = \boldsymbol{\frac{96}{5}\pi = 19{,}2\pi}\ (\text{од}^3)$$

Обчислення площі поверхні тіла обертання	
Площа поверхні тіла обертання навколо осі Ox: $$\boldsymbol{Q_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx}$$	Обчислити площу катеноїди – поверхні, утвореної обертанням цепної лінії $y=\frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)$ навколо осі Ox $(0\le x\le 3)$ Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення: $$y'=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}-\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{3}}\right);$$ $$1+(y')^2=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{3}}\right)^2=$$ $$=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{3}}-2e^{\frac{x}{3}}e^{-\frac{x}{3}}+e^{-\frac{2x}{3}}\right)=$$ $$=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{3}}-2+e^{-\frac{2x}{3}}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{3}}+2+e^{-\frac{2x}{3}}\right)=$$ $$=\left(\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)\right)^2;$$ підставимо у формулу $Q_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx=$ $$=2\pi\int_0^3 \frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)dx=$$ $$=\frac{3\pi}{2}\int_0^3\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)^2dx=\frac{3\pi}{2}\int_0^3\left(e^{\frac{2x}{3}}+2+e^{-\frac{2x}{3}}\right)dx$$ $$=\frac{3\pi}{2}\left(\frac{3}{2}e^{\frac{2x}{3}}+2x-\frac{3}{2}e^{-\frac{2x}{3}}\right)\Big\|_0^3=$$ $$=\frac{3\pi}{2}\left(\frac{3}{2}e^2+6-\frac{3}{2}e^{-2}\right)-\frac{3\pi}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)=$$ $$=\boldsymbol{\frac{9\pi}{4}\left(e^2-e^{-2}+2\right)}\ (\text{од}^2)$$
Площа поверхні тіла обертання навколо осі Oy: $$\boldsymbol{Q_y = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}dy}$$	Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $3x-y^3=0$ навколо осі Oy $(0\le y\le 3)$ Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення: $$x=\frac{1}{3}y^3;\quad x'=y^2;\quad 1+(x')^2=1+y^4;$$ підставимо у формулу $Q_y=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}dy=$ $$=2\pi\int_0^3\frac{1}{3}y^3\sqrt{1+y^4}dy=\begin{bmatrix} u=1+y^4\\ du=4y^3dy\\ y^3dy=\frac{1}{4}du\\ u_\text{н}=1+0=1\\ u_\text{в}=1+3^4=82\end{bmatrix}=$$ $$=\frac{2\pi}{3\cdot 4}\int_1^{82}\sqrt{u}\,du=\frac{\pi}{9}u\sqrt{u}\Big\|_1^{82}=\boldsymbol{\frac{\pi}{9}\left(82\sqrt{82}-1\right)}$$

Тема «ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ»

Поверхні другого порядку	
Еліпсоїд $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	
Однопорожниний гіперболоїд $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	
Двопорожниний гіперболоїд $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$	
Конус $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$	
Еліптичний параболоїд $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$	
Гіперболічний параболоїд $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$	
Параболічний циліндр $y^2=2px$	

Гіперболічний циліндр $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$	
Еліптичний циліндр $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$	
Частинні похідні та диференціали. Повний диференціал функції	
$$z=f(x,y)$$ ***Частинною похідною*** по x від функції $z=f(x,y)$ називається функція змінних x і y, отримана при диференціюванні $f(x,y)$ по x, при припущенні, що y є сталою величиною: $$f'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$ ***Частинною похідною*** по y від функції $z=f(x,y)$ називається функція змінних x і y, отримана при диференціюванні $f(x,y)$ по x, при припущенні, що x є сталою величиною. $$f'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$	Знайти частинні похідні функції $$z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$ $z'_x=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=$ $=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=$ $=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$ $z'_y=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y=$ $=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$
Частинні диференціали $$d_xz=\frac{\partial z}{\partial x}dx;$$ $$d_yz=\frac{\partial z}{\partial y}dy$$	Знайти частинні диференціали функції $$z=\mathrm{arctg}\frac{x}{y}$$ Обчислимо частинні похідні $z'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2};$ $z'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2};$ та підставимо у формули $d_xz=\frac{\partial z}{\partial x}dx=\frac{y\cdot dx}{x^2+y^2};\ d_yz=\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{x\cdot dy}{x^2+y^2}$

Повний диференціал функції $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$	Знайти повний диференціал функції $$z = (1+4x^2)^{y^3}$$ Для цього знайдемо частинні похідні $z'_x = y^3(1+4x^2)^{y^3-1} \cdot (1+4x^2)'_x =$ $= 8xy^3(1+4x^2)^{y^3-1};$ $z'_y = (1+4x^2)^{y^3} \cdot \ln(1+4x^2) \cdot (y^3)'_y =$ $= 3y^2(1+4x^2)^{y^3} \cdot \ln(1+4x^2)$ та підставимо у формулу $$\boldsymbol{dz = 8xy^3(1+4x^2)^{y^3-1}dx +}$$ $$\boldsymbol{+3y^2(1+4x^2)^{y^3} \cdot \ln(1+4x^2)\, dy}$$

Частинні похідні складних функцій

Частинні похідні складних функцій $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$ $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$	Знайти частинні похідні складної функції $z = u^2v - uv^2$, де $u = x\cos y$, $v = y\sin x$ та обчислити їх значення в точці $M\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ Знайдемо необхідні частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv - v^2;$ $\quad \frac{\partial z}{\partial v} = u^2 - 2uv;$ $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y;$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin y;$ $\frac{\partial v}{\partial x} = y\cos x;$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x;$ та скористаємося формулами $\frac{\partial z}{\partial x} = (2uv - v^2)\cdot\cos y + (u^2 - 2uv)\cdot y\cos x =$ $\boldsymbol{= (2xy\sin x\cos y - y^2\sin^2 x)\cdot\cos y +}$ $\boldsymbol{+(x^2\cos^2 y - 2xy\sin x\cos y)\cdot y\cos x};$ $\frac{\partial z}{\partial y} = (2uv - v^2)\cdot(-x\sin y) + (u^2 - 2uv)\cdot\sin x$ $\boldsymbol{= -(2xy\sin x\cos y - y^2\sin^2 x)\cdot x\sin y +}$ $\boldsymbol{+(x^2\cos^2 y - 2xy\sin x\cos y)\cdot\sin x}$ Обчислимо значення частинних похідних в точці $M\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_M = \left(2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin^2\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{2} +$ $+\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = \mathbf{0};$ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_M = -\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin^2\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} +$ $+\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos^2\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi^3}{8}}$

Похідні функції, заданої неявно

Для функції $F(x, y, z) = 0$
частинні похідні обчислюються за формулами

$$\boldsymbol{z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}};$$
$$\boldsymbol{z'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}}$$

Знайти частинні похідні функції $xe^y + ye^x - (x + y)z^2 = 0$ та обчислити їх значення в точці $M(0; 1; 2)$

Знайдемо F'_x, F'_y, F'_z:

$$F'_x = e^y + ye^x - z^2;$$
$$F'_y = xe^y + e^x - z^2;$$
$$F'_z = -2(x + y)z;$$

та підставимо в формули

$$z'_x = \frac{\boldsymbol{e^y + ye^x - z^2}}{\boldsymbol{2(x+y)z}};$$
$$z'_y = \frac{\boldsymbol{xe^y + e^x - z^2}}{\boldsymbol{2(x+y)z}}$$

Обчислимо частинні похідні в точці $M(0; 1; 2)$:

$$z'_x\Big|_M = \frac{e+1-4}{2\cdot1\cdot2} = \frac{\boldsymbol{e-3}}{\boldsymbol{4}};$$
$$z'_y\Big|_M = \frac{0+1-4}{2\cdot1\cdot2} = -\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{4}}$$

Частинні похідні вищих порядків

Частинні похідні другого порядку для функції двох змінних обчислюються за формулами

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}};$$
$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}};$$
$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}};$$
$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}};$$

при цьому мішані похідні не залежать від порядку диференціювання, тобто

$$\boldsymbol{z''_{xy} = z''_{yx}}$$

Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \frac{x+y}{x-y}$. Переконатися, що $z''_{xy} = z''_{yx}$

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = \frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot1}{(x-y)^2} = -\frac{2y}{(x-y)^2};$$
$$z'_y = \frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}$$

За формулами знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = -2\cdot\frac{(-2y)}{(x-y)^3} = \frac{\boldsymbol{4y}}{\boldsymbol{(x-y)^3}};$$
$$z''_{xy} = -\frac{2\cdot(x-y)^2 - 2y\cdot2(x-y)\cdot(-1)}{(x-y)^4} =$$
$$= -\frac{2(x-y)(x-y+2y)}{(x-y)^4} = -\frac{\boldsymbol{2(x+y)}}{\boldsymbol{(x-y)^3}};$$
$$z''_{yx} = \frac{2\cdot(x-y)^2 - 2x\cdot2(x-y)}{(x-y)^4} =$$
$$= \frac{2(x-y)(x-y-2x)}{(x-y)^4} = -\frac{\boldsymbol{2(x+y)}}{\boldsymbol{(x-y)^3}};$$
$$z''_{yy} = -2\cdot\frac{2x}{(x-y)^3} = -\frac{\boldsymbol{4x}}{\boldsymbol{(x-y)^3}}$$

Дійсно, $\boldsymbol{z''_{xy} = z''_{yx}}$

Знаходження функції по її повному диференціалу	
$\boldsymbol{du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy}$ є повним диференціалом, якщо $\boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$ $\boldsymbol{\varphi(y) = \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]dy}$ або $\boldsymbol{\varphi(x) = \int \left[P(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int Q(x,y)dx\right]dx}$	Перевірити, чи є даний вираз $\frac{x+2y}{(x+y)^2}dx + \frac{y}{(x+y)^2}dy$ повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію по її повному диференціалу Маємо $P(x,y) = \frac{x+2y}{(x+y)^2}$, $Q(x,y) = \frac{y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2(x+y)^2-(x+2y)2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2(x+y)(x+y-x-2y)}{(x+y)^4} =$ $= -\frac{2y}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$, тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, а тому заданий вираз **є повним диференціалом функції**. Знайдемо її Маємо 1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+2y}{(x+y)^2}$; 2) $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2}$ З першої умови інтеруванням по x знаходимо $u = \int \frac{x+2y}{(x+y)^2}dx + \varphi(y) = \int \frac{(x+y)+y}{(x+y)^2}dx + \varphi(y) =$ $= \int \frac{dx}{x+y} + y\int \frac{dx}{(x+y)^2} + \varphi(y) =$ $= \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + \varphi(y)$ Продиференцюємо отриманий вираз по змінній y та виконаємо умову 2: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x+y} - \frac{x+y-y}{(x+y)^2} + \varphi'(y) = \frac{x+y-x}{(x+y)^2} + \varphi'(y) =$ $= \frac{y}{(x+y)^2} + \varphi'(y)$; звідси $\varphi'(y) = \frac{y}{(x+y)^2} - \frac{y}{(x+y)^2} = 0$ Отже, доданки, що містять змінну x, зникли, $\varphi'(y) = 0$. Відомо, що похідна від константи дорівнює нулю, тому $\varphi(y) = C$ Остаточно маємо $\boldsymbol{u = \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + C}$

Екстремум функції двох змінних

$$z = f(x, y)$$

Необхідні умови екстремуму:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x = x_0, y = y_0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x = x_0, y = y_0} = 0$$

Достатні умови екстремуму:

позначивши

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M(x_o, y_o)};$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M(x_o, y_o)};$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M(x_o, y_o)},$$

маємо умови існування

1) **максимуму**, якщо $\boldsymbol{A \cdot C - B^2} > 0$ і $\boldsymbol{A} < 0$;
2) **мінімуму**, якщо $\boldsymbol{A \cdot C - B^2} > 0$ і $\boldsymbol{A} > 0$;
3) **ні максимуму, ні мінімуму**, якщо $\boldsymbol{A \cdot C - B^2} < 0$;
4) **невизначеності** (потрібні додаткові дослідження), якщо $\boldsymbol{A \cdot C - B^2 = 0}$

Дослідити функцію$z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ на екстремум

Знайдемо стаціонарні точки, виконав необхідні умови існування екстремуму

$$z'_x = 4 - 2x$$

$$z'_y = -4 - 2y$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - 2x = 0 \\ -4 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Отже, стаціонарна точка має координати $M(2; -2)$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = -2; \quad z''_{xy} = 0; \quad z''_{yy} = -2$$

Отримані вирази для частинних похідних другого порядку не залежать від x та y, тому

$A = -2$; $B = 0$; $C = -2$.

Обчислимо квадратичну форму, маємо

$A \cdot C - B^2 = -2 \cdot (-2) - 0^2 = 4 > 0$; $\quad A < 0$.

В точці M виконується умова існування максимуму

Обчислимо значення функції в точці максимуму:

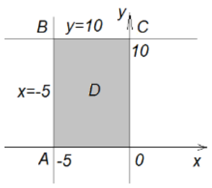
$$\boldsymbol{z_{max}} = z\Big|_M = 4\big(2 - (-2)\big) - 2^2 - (-2)^2 = \mathbf{8}$$

Найбільше та найменше значення функції

Для того, щоб знайти найбільше або найменше значення функції $z = f(x, y)$ в замкненій області, необхідно знайти всі **екстремуми** функції **всередині області**, а також **найбільші та найменші значення** функції **на межі області**.

Найбільше зі всіх цих значень й буде шуканим найбільшим значенням функції в замкненій області, а, відповідно, найменше – найменшим

Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в області D, обмеженої лініями $x = 0$; $y = 0$; $x = -5$; $y = 10$



Побудуємо область D.

Область визначення функції – вся координатна площина, тобто $x, y \in R$

Розв’яжемо задачу на екстремум всередині області D

Знайдемо частинні похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{matrix} z'_x = 2x + 2y - 4 \\ z'_y = 2x + 8 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \\ 2x + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = -4 \end{cases}$$

	Звідси отримаємо стаціонарну точку $M_1(-4;6)$;. Ця точка належать області D. Знайдемо стаціонарні точки на межі області D Розглянемо лінію $x=0$ $(0 \le y \le 10)$:$z=0,\ z'_y=0$. На цій лінії стаціонарних точок немає Розглянемо лінію $y=0$ $(-5 \le x \le 0)$: $z=0, z'_x=0$. На цій лінії стаціонарних точок теж немає Розглянемо лінію $x=-5$ $(0 \le y \le 10)$: $z=(-5)^2+2(-5)y-4(-5)+8y=-2y+45$; $z'_y=-2; \quad z'_x \ne 0 \quad \Rightarrow$ Отже на цій лінії стаціонарних точок теж немає. Розглянемо лінію $y=10$ $(-5 \le y \le 0)$: $z=x^2+2x\cdot 10-4x+8\cdot 10=x^2+16x+80$; $z'_x=2x+16; \quad z'_x=0; \quad x=-8 \quad \Rightarrow$ Точка $M_2(-8;5)$ не належить області D Обчислимо значення функції в стаціонарній точці та в кутових точках області D: $z\Big\|_{M_1}=(-4)^2+2(-4)6-4(-4)+8\cdot 6=32$; $z\Big\|_{O(0;0)}=0$; $z\Big\|_{A}=(-5)^2+2(-5)0-4(-5)+8\cdot 0=45$; $z\Big\|_{B}=0^2+2\cdot 0\cdot 10-4\cdot 0+8\cdot 10=80$ Обираємо серед обчислених значень найбільше та найменше. Отже **найбільше** значення функція набуває в точці $B(0;10)$: $\boldsymbol{z\Big\|_{B}=80}$, а **найменше** – в точці $O(0;0)$: $\boldsymbol{z\Big\|_{0}=0}$
Дотична площина та нормаль до поверхні	
Рівняння дотичної площини $$\boldsymbol{F'_x(M_0)(x-x_0)+}$$ $$\boldsymbol{+F'_y(M_0)(y-y_0)+}$$ $$\boldsymbol{+F'_z(M_0)(z-z_0)=0}$$	Записати рівняння дотичної площини до поверхні $x^2+y^2+z^2-2x+10z-13=0$ у точці $M(2;1;3)$ Знайдемо частинні похідні $$F'_x=2x-2; \qquad F'_y=2y; \qquad F'_z=2z+10;$$ та обчислимо їх значення у точці $$F'_x(M_0)=2\cdot 2-2=2;$$ $$F'_y(M_0)=2\cdot 1=2;$$ $$F'_z(M_0)=2\cdot 3+10=16;$$ за формулою маємо рівняння **дотичної площини** $$2(x-2)+2(y-1)+16(z-3)=0 \quad \text{або}$$ $$\boldsymbol{2x+2y+16z-54=0}$$

Рівняння нормалі до поверхні $$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$$	Записати рівняння нормалі до поверхні $3x^2-2xy+4xz-5y+16=0$ в точці $M(1;-1;4)$ Знайдемо частинні похідні $F'_x=6x-2y+4z;\quad F'_y=-2y-5;\quad F'_z=4x;$ та обчислимо їх значення у точці $F'_x(M_0)=6\cdot 1-2\cdot(-1)+4\cdot 4=24;$ $F'_y(M_0)=-2\cdot(-1)-5=-3;$ $F'_z(M_0)=4\cdot 1=4;$ за формулою маємо рівняння **нормалі до поверхні** $$\boldsymbol{\frac{x-1}{24}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{4}}$$

Похідна за напрямком. Градієнт

Похідна за напрямком $$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$ Градієнт $$\mathbf{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\vec{k}$$	Для функції $u=3x^2yz-2xy^2z+yz^2$ знайти модуль градієнта у точці $M_0(2,1,2)$ та похідну в точці M_0 за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M_1}$, якщо $M_1(3;-4;1)$ Знайдемо частинні похідні функції u: $\frac{\partial u}{\partial x}=6xyz-2y^2z;$ $\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2z-3xyz+z^2;$ $\frac{\partial u}{\partial z}=3x^2y-2xy^2+2yz$ Обчислимо їх значення в точці M_0: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{M_0}=20;$ $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{M_0}=16;$ $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{M_0}=24$ Отже **градієнт** у точці M_0 $\mathbf{grad}\,u=\mathbf{20}\cdot\vec{i}+\mathbf{16}\cdot\vec{j}+\mathbf{24}\cdot\vec{k},$ а його модуль $\|\mathbf{grad}\,u\|=\sqrt{20^2+16^2+24^2}=\mathbf{4\sqrt{77}.}$ Координати вектора $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M_1}=(1;-5;-1)$, його модуль $\|\vec{l}\|=\sqrt{1^2+(-5)^2+(-1)^2}=\sqrt{27},$ звідси напрямні косинуси приймають значення $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{27}};\quad\cos\beta=\frac{-5}{\sqrt{27}};\quad\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{27}}$ Отже, **похідна за напрямом вектора** дорівнює $\frac{\partial u}{\partial l}=20\cdot\frac{1}{\sqrt{27}}+16\cdot\left(\frac{-5}{\sqrt{27}}\right)+24\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{27}}\right)=-\boldsymbol{\frac{84}{\sqrt{27}}}$

Тема «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Якщо рівняння має диференціальний вигляд

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0,$$

і може бути записано як добуток

$\boldsymbol{f_1(x)\cdot f_2(y)dx + g_1(x)\cdot g_2(y)dy = 0}$,

поділивши його на $g_1(x)\cdot f_2(y)$, отримаємо

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = 0$$

Проінтегрував його, отримаємо загальний розв'язок

$$\boldsymbol{\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = C}$$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

Відокремлимо змінні
$x(y^2+1)dx + y(1-x^2)dy = 0;$
$x(y^2+1)dx = -y(1-x^2)dy;$ або
$x(y^2+1)dx = y(x^2-1)dy \quad |:(y^2+1); \ (x^2-1)$

Маємо рівняння $\frac{x}{x^2-1}dx = \frac{y}{y^2+1}$,

проінтегруємо його

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \int \frac{y}{y^2+1}dy; \quad \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(y^2+1)}{y^2+1};$$

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + C; \quad \text{або}$$

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + \frac{1}{2}\ln C;$$

$$\ln(y^2+1) = \ln C(x^2-1);$$

$$\boldsymbol{y^2 + 1 = C(x^2 - 1)}$$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y\cdot y' = e^{x+y}$

Перепишемо рівняння у вигляді

$$y\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y \quad |\cdot dx$$

і розділимо змінні

$$y\cdot dy = e^x\cdot e^y\cdot dx \quad |:e^y$$

$$\frac{y}{e^y}\cdot dy = e^x\cdot dx$$

або

$$ye^{-y}\cdot dy = e^x\cdot dx;$$

проінтегруємо й отримаємо:

$$\int ye^{-y}\cdot dy = \int e^x\cdot dx;$$

$$-y\cdot e^{-y} - e^{-y} = e^x + C$$

або

$$e^x + (y+1)e^y + C = 0$$

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння першого порядку називається **однорідним**, якщо воно може бути представлено у вигляді $\boldsymbol{y' = g\left(\frac{y}{x}\right)}$

Рівняння $y' = f(x, y)$
називається **однорідним**, якщо при заміні

$$x \to kx; \quad y \to ky;$$
$$dx \to kdx; \quad dy \to kdy;$$
$$y' \to y'$$

рівняння не змінюється

Однорідне зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою **підстановки**

$$\boldsymbol{y = u \cdot x}; \quad \boldsymbol{y' = u' \cdot x + u}$$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{x+y}{x-y}$

Перевіримо, чи буде це рівняння однорідним рівнянням першого порядку. Для цього замінимо

$$x \to kx; \quad y \to ky; \quad y' \to y',$$

маємо $\quad y' = \frac{kx+ky}{kx-ky}; \qquad y' = \frac{k(x+y)}{k(x-y)}.$

Виконаємо підстановку

$$y = ux; \quad y' = u'x + u: \ \Rightarrow \ \boldsymbol{u'x + u = \frac{x+ux}{x-ux}}$$

Скоротимо та виконаємо необхідні перетворення:

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u}; \qquad u'x = \frac{1+u}{1-u} - u; \quad u'x = \frac{1+u^2}{1-u}$$

Ми отримали рівняння з відокремлюваними змінними: $\quad \frac{1-u}{(1+u^2)}du = \frac{dx}{x}$

Проінтегруємо даний вираз, маємо

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \ln Cx$$

Повернемося до початкових змінних. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\boldsymbol{\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = \ln Cx}$$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$

Перевіримо, чи буде це рівняння однорідним рівнянням першого порядку, для цього замінимо

$$x \to kx; \quad y \to ky; \quad dx \to kdx; \quad dy \to kdy$$
$$kxk^2y^2kdy = (k^3x^3 + k^3y^3)kdx$$

Скоротивши ліву та праву частину рівняння на k^4, отримаємо початкове рівняння. Поділимо ліву та праву частину на dx, замінивши $\frac{dy}{dx} = y'$:

$$xy^2y' = x^3 + y^3;$$
$$y = ux; \quad y' = u'x + u;$$
$$xu^2x^2(u'x + u) = x^3 + u^3x^3 \quad |:x^3;$$
$$u^2(u'x + u) = 1 + u^3$$

Це вже рівняння з відокремлюваними змінними.

$$u^2u'x = 1 + u^3 - u^3;$$
$$u^2x\frac{du}{dx} = 1 \quad |\cdot dx; \qquad u^2xdu = dx \quad |:x;$$
$$u^2du = \frac{dx}{x}$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння, маємо

$$\int u^2du = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{u^3}{3} = \ln x + \ln C;$$

Повернемося до початкових змінних:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \ln(Cx)$$

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння називається **лінійним**, якщо воно лінійно відносно шуканої функції та її похідної:

$$\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$\boldsymbol{y = uv}; \quad \boldsymbol{y' = u'v + uv'}$$

Після підстановки маємо:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$$

Дорівняємо вираз у дужках до нуля:

$$\boldsymbol{v' + p(x)v = 0},$$

а звідси

$$\boldsymbol{u'v = q(x)}$$

Отже лінійне рівняння зводиться до **двох** диференціальних рівнянь **з відокремлюваними змінними**

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $xy' - \frac{y}{x+1} = x$, яке задовольняє умові $y(1) = 0$

Задане рівняння є лінійним, тому що шукана функція та її похідна входять у рівняння в першій степені. Перепишемо рівняння у зручному вигляді. Для цього поділимо рівняння на x:

$$y' - \frac{y}{x(x+1)} = 1$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$y = uv; \quad y' = u'v + uv':$$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x(x+1)} = 1;$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x(x+1)}\right) = 1$$

Дорівняємо вираз у дужках до нуля, і розв'яжемо диференціальне з відокремлюваними змінними відносно v:

$$v' - \frac{v}{x(x+1)} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x(x+1)} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x^2+x};$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x^2+x} \quad \Rightarrow \quad \ln v = \ln \frac{x}{x+1}$$

Отже, функція v є вигляд: $\quad \boldsymbol{v = \frac{x}{x+1}}$

Повернемося до рівняння. З урахуванням рівності нулю виразу в дужках, маємо:

$$u'v = 1$$

Підставимо знайдену функцію v, розв'яжемо отримане рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції u:

$$u' \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x+1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{x+1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow$$

$$du = \frac{x+1}{x} dx; \qquad \int du = \int \frac{x+1}{x} dx$$

Отже, функція u є вигляд: $u = x + \ln x + C$

Загальний розв'язок диференціального рівняння знаходимо як добуток функцій u і v:

$$\boldsymbol{y = uv = (x + \ln x + C) \cdot \frac{x}{x+1}};$$

Знайдемо частинний розв'язок, для цього скористаємося початковими умовами та визначимо коефіцієнт C:

$$y(1) = 0 \ \Rightarrow \ 0 = (0 + \ln 1 + C) \cdot \frac{1}{1+1} \ \Rightarrow \boldsymbol{C = 0}$$

Підставимо значення коефіцієнта C, маємо:

$$\boldsymbol{y = \frac{x(x + \ln x)}{x + 1}}$$

Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

називається **рівнянням Бернуллі**
За допомогою підстановки

$$\boldsymbol{z = y^{1-n}}$$

воно зводиться до **лінійного** диференціального рівняння першого порядку

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$

Перепишемо рівняння у вигляді $y' + \frac{y}{x+1} = -y^2$

Задане рівняння – це рівняння **Бернуллі** з $n = 2$
Поділимо рівняння на y^2 і введемо нову змінну

$$z = y^{1-2} = y^{-1}:$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y(x+1)} = -1 \quad \text{або} \quad y' \cdot y^{-2} + \frac{1}{(x+1)} y^{-1} = -1;$$

$$z = y^{-1} \quad \Rightarrow \quad z' = -y^{-2} \cdot y$$

Маємо **лінійне** рівняння:

$$-z' + \frac{1}{(x+1)} z = -1 \qquad \text{або} \qquad z' - \frac{1}{(x+1)} z = 1$$

Розв'яжемо його за допомогою підстановки:

$$z = uv; \quad z' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' - \frac{1}{(x+1)} uv = 1;$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{(x+1)} v\right) = 1$$

Рівняння розпадається на два рівняння з відокремленими змінними. Знайдемо функцію v:

$$v' - \frac{1}{(x+1)} v = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = \frac{1}{(x+1)} v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x+1};$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x+1} \;\Rightarrow\; \ln v = \ln(x+1) \;\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{v = x + 1}$$

Повернемося до початкового рівняння та знайдемо функцію u:

$$u'v = 1\,; \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{v}; \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x+1}$$

Проінтегруємо отриманий вираз:

$$\boldsymbol{u = \int \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1) + C}$$

Отже, проміжна функція z має вигляд:

$$z = (\ln(x+1) + C) \cdot (x+1) =$$

$$= (x+1)\ln(x+1) + C(x+1)$$

Повернемося до шуканої функції, отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\frac{1}{y} = (x+1)\ln(x+1) + C(x+1) \quad \text{або}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1) + C(x+1)}}$$

Рівняння у повних диференціалах	
$$\boldsymbol{P(x,y)dx+Q(x,y)dy}$$ є повним диференціалом, якщо виконується умова $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ інтегрування рівняння $$\boldsymbol{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0}$$ зводиться до знаходження первісної від лівої частини рівняння у вигляді: $$\boldsymbol{\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy=C}$$	Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$ Перевіримо, чи є задане рівняння рівнянням у повних диференціалах. Для цього випишемо функції P і Q та продиференцюємо їх: $$P(x,y)=e^y; \qquad Q(x,y)=xe^y-2y;$$ $$\frac{\partial P}{\partial y}=e^y; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ Перевірка показала, що рівняння є **рівнянням у повних диференціалах**. Проінтегруємо його. У якості довільної точки (x_0,y_0) оберемо точку $(0,0)$ (область визначення функції це дозволяє: $$\int_0^x e^y dx+\int_0^y 2ydy=C; \qquad e^y \Big\|_0^x+y^2\Big\|_0^y=C$$ Остаточно маємо: $\boldsymbol{e^y+y^2=C}$
Диференціальні рівняння вищих порядків	
Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку	
Рівняння **не містить шуканої функції**, та її похідної: $$\boldsymbol{y''=f(x,y')}$$ або $\boldsymbol{y^{(n)}=f\left(x,y^{(n-1)}\right)}$ За допомогою підстановок $$\boldsymbol{y'=z,\quad y''=z'} \quad \text{або}$$ $$\boldsymbol{y^{(n-1)}=z,\quad y^{(n)}=z'}$$ зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку відносно нової шуканої функції z	Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $2xy'y''=(y')^2+1$ Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить шуканої функції. Для розв'язання скористаємося підстановкою: $$y'=z,\quad y''=z';$$ $$2xzz'=z^2+1$$ Отримали диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, розв'яжемо його: $$2xz\frac{dz}{dx}=z^2+1 \quad \Big\|\cdot dx;$$ $$2xzdz=(z^2+1)dx \quad \Big\|\begin{matrix}:x\\:(z^2+1)\end{matrix};$$ $$\int\frac{2zdz}{z^2+1}=\int\frac{dx}{x}; \qquad \ln(z^2+1)=\ln x+\ln C_1$$ $$\Rightarrow \ln(z^2+1)=\ln(C_1x);$$ $$z^2+1=C_1x;$$ $z=\pm\sqrt{C_1x-1}$. Пригадаємо, що $y'=z$; проінтегруємо, отримаємо загальний розв'язок $$\boldsymbol{y=\pm\int\sqrt{C_1x-1}dx=\pm\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3}+C_2}$$

Рівняння **не містить незалежної змінної**: $$y'' = f(y, y')$$ За допомогою підстановок $$\boldsymbol{y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}}$$ зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку відносно нової шуканої функції p	Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2(y')^2 = y''(y-1)$, що задовольняє умовам $y(1) = 2,\ y'(1) = -1$ Для розв'язання скористаємося підстановкою: $$y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}$$ $$2p^2 = p\frac{dp}{dy}(y-1)$$ Отримали диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними Винесемо за дужки p, звідси перший розв'язок: $$p = 0; \quad \Rightarrow \quad y' = 0; \quad \Rightarrow \quad y = C$$ Скористаємося початковою умовою $y(1) = 2$, маємо $\boldsymbol{y = 2}$ Рівняння, яке залишилося – з відокремлюваними змінними: $$\frac{dp}{dy}(y-1) = 2p \quad \vert \cdot dy;$$ $$(y-1)dp = 2pdy \quad \left\vert \begin{matrix} :(y-1) \\ :p \end{matrix} \right.;$$ $$\int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{dy}{y-1};$$ $$\ln p = 2\ln(y-1) + \ln C_1;$$ або $\quad \ln p = \ln(C_1(y-1)^2);$ $p = C_1(y-1)^2$; пригадаємо, що $y' = p$ $$y' = C_1(y-1)^2$$ Скористаємося початковими умовами: $$-1 = C_1(2-1)^2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1$$ Маємо диференціальне рівняння першого порядку. Проінтегруємо його: $$y' = -(y-1)^2;$$ $$\frac{dy}{dx} = -(y-1)^2;$$ $$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = -\int dx;$$ $-\frac{1}{y-1} = -x - C_2$ або $\frac{1}{y-1} = x + C_2$ Скористаємося початковими умовами: $$\frac{1}{2-1} = 1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$ Частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд $\frac{1}{y-1} = x + 1$ або $y - 1 = \frac{1}{x+1};$ $y = \frac{1}{x+1} + 1; \qquad \boldsymbol{y = \frac{x+2}{x+1}}$

Тема «ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩІХ ПОРЯДКІВ ІЗ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ»

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР)

$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$	Для отримання характеристичного рівняння виконаємо заміну $y \to 1; \quad y' \to k; \quad y'' \to k^2$

Загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами

Дискримінант характеристичного рівняння	Корені характеристичного рівняння	Загальний розв'язок ЛОДР
$D > 0$	$k_1 \neq 0;\ k_2 \neq 0$	$y_o = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
	$k_1 = -k_2 = k$	$y_o = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx}$
	$k_1 = 0;\ k_2 \neq 0$	$y_o = C_1 + C_2e^{k_2x}$
$D = 0$	$k_1 = k_2 = k$	$y_o = (C_1 + C_2x)e^{kx}$
$D < 0$	$k_{1,2} = \pm\beta i$	$y_o = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y_o = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого зі сталими коефіцієнтами

$\boldsymbol{D > 0}; \quad \boldsymbol{k_1 \neq 0};\ \boldsymbol{k_2 \neq 0}$	$y'' + 4y' + 3y = 0;$ Замінимо $y \to 1; \quad y' \to k; \quad y'' \to k^2$ Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 4k + 3 = 0.$ Розв'яжемо його $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0;$ $k_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2 \cdot 1} = \left[\begin{matrix}\mathbf{-1} \\ \mathbf{-3}\end{matrix}\right.$ за таблицею маємо загальний розв'язок ЛОДР $\boldsymbol{y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}}$

$\boldsymbol{D > 0}$; $\boldsymbol{k_1 = -k_2 = k}$	$y'' - 25y = 0;$ Замінимо $y \to 1$; $y'' \to k^2$ Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 25 = 0$ Розв'яжемо його: $k^2 = 25$; $k_{1,2} = \pm\mathbf{5}$; за таблицею маємо загальний розв'язок ЛОДР $\boldsymbol{y_o = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}}$
$\boldsymbol{D > 0}$; $\boldsymbol{k_1 = 0}$; $\boldsymbol{k_2 \neq 0}$	$y'' + 8y' = 0;$ Замінимо $y' \to k$; $y'' \to k^2$ Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 8k = 0$ Розв'яжемо його $k(k+8) = 0$; $k_1 = \mathbf{0}$; $k_2 = \mathbf{-8}$; за таблицею маємо загальний розв'язок ЛОДР $\boldsymbol{y_o = C_1 + C_2 e^{-8x}}$
$\boldsymbol{D = 0}$; $\boldsymbol{k_1 = k_2}$	$y'' + 10y' + 25y = 0;$ Замінимо $y \to 1$; $y' \to k$; $y'' \to k^2$ Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 10k + 25 = 0$ Розв'яжемо його $D = 10 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = \mathbf{0}$; $k_{1,2} = \frac{-10}{2\cdot 1} = \mathbf{-5}$; за таблицею маємо загальний розв'язок ЛОДР $\boldsymbol{y_o = (C_1 + C_2 x) e^{-5x}}$
$\boldsymbol{D < 0}$; $\boldsymbol{k_{1,2} = \pm \beta i}$	$y'' + 9y = 0;$ Замінимо $y \to 1$; $y'' \to k^2$ Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 9 = 0.$ Розв'яжемо його: $k^2 = -9$; $k_{1,2} = \pm\boldsymbol{3i;}$ за таблицею маємо загальний розв'язок ЛОДР $\boldsymbol{y_o = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x}$
$\boldsymbol{D < 0}$; $\boldsymbol{k_{1,2} = \alpha \pm \beta i}$	$y'' + 6y' + 13y = 0;$ Замінимо $y \to 1$; $y' \to k$; $y'' \to k^2$ Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 6k + 13 = 0$ Розв'яжемо його $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 < 0;$ $k_{1,2} = \dfrac{-6 \pm 4i}{2 \cdot 1} = \boldsymbol{-3 \pm 2i}$ за таблицею маємо загальний розв'язок ЛОДР $\boldsymbol{y_o = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)}$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР)	
$\boldsymbol{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)}$	Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді суми загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння $\boldsymbol{y = y_\text{о} + y_\text{н}}$

Частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами		
Вид правої частини $f(x)$	Перевірка відповідності коренів характеристичного рівняння кореням правої частини	Вид частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y_\text{н}$
$\boldsymbol{Ae^{\alpha x}}$	$k_1 \neq \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{A}e^{\alpha x}$
	$k_1 = \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{A}e^{\alpha x} \cdot x$
	$k_1 = k_2 = \alpha$	$\tilde{A}e^{\alpha x} \cdot x^2$
$\boldsymbol{P_n(x)}$	$k_1 \neq 0;\ \ k_2 \neq 0$	$\tilde{P}_n(x)$
	$k_1 = 0;\ \ k_2 \neq 0$	$\tilde{P}_n(x) \cdot x$
$\boldsymbol{P_n(x) \cdot e^{\alpha x}}$	$k_1 \neq \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{P}_n(x) \cdot e^{\alpha x}$
	$k_1 = \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{P}_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x$
	$k_1 = k_2 = \alpha$	$\tilde{P}_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^2$
$\boldsymbol{A\cos\beta x + B\sin\beta x}$	$k_{1,2} \neq \pm\beta i$	$\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x$
	$k_{1,2} = \pm\beta i$	$(\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x)x$
$\boldsymbol{e^{\alpha x}[A\cos\beta x + B\sin\beta x]}$	$k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x]$
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x]x$
$\boldsymbol{e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x +}$	$k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\,cos\,\beta x + \tilde{Q}_k(x)\,sin\,\beta x]$
$\boldsymbol{+Q_m(x)\sin\beta x]}$	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\,cos\,\beta x + \tilde{Q}_k(x)\,sin\,\beta x]x$

Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого зі сталими коефіцієнтами	
$\boldsymbol{f(x) = Ae^{\alpha x}}$ $\boldsymbol{k_1 \neq \alpha}$; $\boldsymbol{k_2 \neq \alpha}$	$$y'' - 5y' = 7e^{3x}$$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 5k = 0;\quad k(k-5) = 0;\quad \boldsymbol{k_1 = 0; k_2 = 5}$; отже загальний розв'язок однорідного рівняння $$\boldsymbol{y_о = C_1 + C_2e^{5x}}$$ В правій частині $\alpha = 3$, тобто $k_1 \neq \alpha$; $k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_н = Ae^{3x}$; знайдемо коефіцієнт за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_н$ $y_н' = 3Ae^{3x};\quad y_н'' = 9Ae^{3x}$ та підставимо у рівняння: $9Ae^{3x} - 5 \cdot 3Ae^{3x} = 7e^{3x};\quad -6A = 7;\quad \boldsymbol{A = -\frac{7}{6}}$ Частинний розв'язок має вигляд $$\boldsymbol{y_н = -\frac{7}{6}e^{3x}}$$ Остаточно маємо $$\boldsymbol{y = C_1 + C_2e^{5x} - \frac{7}{6}e^{3x}}$$
$\boldsymbol{f(x) = Ae^{\alpha x}}$ $\boldsymbol{k_1 = \alpha}$; $\boldsymbol{k_2 \neq \alpha}$	$$y'' - 4y = 6e^{-2x}$$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 4 = 0;\quad k^2 = 4;\quad k_{1,2} = \pm\boldsymbol{2}$, отже загальний розв'язок однорідного рівняння $$\boldsymbol{y_о = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}}$$ В правій частині $\alpha = -2$, $k_1 = \alpha$; $k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_н = Ae^{-2x} \cdot x$; знайдемо коефіцієнт за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_н$ $y_н' = -2Ae^{-2x} \cdot x + Ae^{-2x} = Ae^{-2x}(1 - 2x)$; $y_н'' = -2Ae^{-2x}(1 - 2x) - 2Ae^{-2x} = Ae^{-2x}(4x - 4)$ та підставимо у рівняння: $Ae^{-2x}(4x - 4 - 4x) = 6e^{-2x};\ -4A = 6;\ A = -\boldsymbol{\frac{3}{2}}$ Частинний розв'язок має вигляд $$\boldsymbol{y_н = -\frac{3}{2}e^{-2x} \cdot x}$$ Остаточно маємо $$\boldsymbol{y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - \frac{3}{2}e^{-2x} \cdot x}$$

$\boldsymbol{f(x) = Ae^{\alpha x}}$ $\boldsymbol{k_1 = k_2 = \alpha}$	$y'' - 12y' + 36y = 4e^{6x}$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 12k + 36 = 0$; $D = 0$; $k_{1,2} = \mathbf{6}$, отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_\text{о} = (C_1 + C_2x)e^{6x}}$ В правій частині $\alpha = 6$, $k_1 = k_2 = \alpha$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_\text{н} = Ae^{6x} \cdot x^2$; знайдемо коефіцієнт за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_\text{н}$ $y_\text{н}' = 6Ae^{6x} \cdot x^2 + Ae^{6x} \cdot 2x = Ae^{6x}(6x^2 + 2x)$; $y_\text{н}'' = 6Ae^{6x}(6x^2 + 2x) + Ae^{6x}(12x + 2) =$ $= Ae^{6x}(36x^2 + 24x + 2)$ та підставимо у рівняння: $Ae^{6x}(36x^2 + 24x + 2 - 72x^2 - 24x + 36x^2) = 4e^{6x}$; $2A = 4$; $\boldsymbol{A = 2}$ Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_\text{н} = 2e^{6x} \cdot x^2}$ Остаточно маємо $\boldsymbol{y = (C_1 + C_2x)e^{6x} + 2e^{6x} \cdot x^2}$
$\boldsymbol{f(x) = P_n(x)}$ $\boldsymbol{k_1 \neq 0}$; $\boldsymbol{k_2 \neq 0}$	$y'' - 16y = 32x^2 + 16x - 18$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 16 = 0$; $k^2 = 16$; $k_{1,2} = \pm\mathbf{4}$, отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_\text{о} = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x}}$ В правій частині многочлен другої степені, $k_1 \neq 0$; $k_2 \neq 0$, тому частинний розв'язок: $y_\text{н} = Ax^2 + Bx + C$; знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_\text{н}$ $y_\text{н}' = 2Ax + B$; $y_\text{н}'' = 2A$ та підставимо у рівняння: $2A - 16(Ax^2 + Bx + C) = 32x^2 + 16x - 18$; $\begin{array}{c\|lc} x^2 & -16A = 32 & A = -2 \\ x^1 & -16B = 16 & B = -1 \\ x^0 & 2A - 16C = -18 & C = 1 \end{array}$ Частинний розв'язок $\boldsymbol{y_\text{н} = -2x^2 - x + 1}$. Остаточно маємо $\boldsymbol{y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x} - 2x^2 - x + 1}$

$\boldsymbol{f(x) = P_n(x)}$ $\boldsymbol{k_1 = 0;\ \ k_2 \neq 0}$	$$y'' + 3y' = 12x + 1$$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 3k = 0; \quad k(k+3) = 0; \quad \boldsymbol{k_1 = 0; k_2 = -3}$ отже загальний розв'язок однорідного рівняння $$\boldsymbol{y_о = C_1 + C_2 e^{-3x}}$$ В правій частині многочлен першої степені, $k_1 = 0;\ \ k_2 \neq 0$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_н = (Ax + B) \cdot x = Ax^2 + Bx$, знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_н$ $y'_н = 2Ax + B; \quad y''_н = 2A$ та підставимо у рівняння $2A + 3(2Ax + B) = 12x + 1$; $\begin{array}{l\|ll} x^1 & 6A = 12 & A = 2 \\ x^0 & 2A + 3B = 1 & B = -1 \end{array}$ Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_н = 2x^2 - x}$ Остаточно маємо $\boldsymbol{y = C_1 + C_2 e^{-3x} + 2x^2 - x}$
$\boldsymbol{f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}}$ $\boldsymbol{k_1 \neq \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha}$	$$y'' - 2y' + 10y = e^{-x}(18x - 15)$$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння: $k^2 - 2k + 10 = 0$; $D = 4 - 40 = -36; \quad k_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = \boldsymbol{1 \pm 3i;}$ отже загальний розв'язок однорідного рівняння $$\boldsymbol{y_о = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)}$$ В правій частині $\alpha = -1$, тобто $k_1 \neq \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_н = e^{-x}(Ax + B)$, знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_н$ $y'_н = -e^{-x}(Ax + B) + Ae^{-x} = e^{-x}(-Ax + B + A)$; $y''_н = -e^{-x}(-Ax + B + A) - Ae^{-x} = e^{-x}(Ax - B - 2A)$; та підставимо у рівняння: $e^{-x}(Ax - B - 2A) - 2e^{-x}(-Ax + B + A) +$ $+10e^{-x}(Ax + B) = e^{-x}(x + 5)$; $e^{-x}(9Ax - 4A + 7B) = e^{-x}(18x - 15)$; $\begin{array}{l\|ll} x^1 & 9A = 18 & A = 2 \\ x^0 & -4A + 7B = -15 & B = -1 \end{array}$ Частинний розв'язок: $\boldsymbol{y_н = e^{-x}(2x - 1).}$ Остаточно маємо $$\boldsymbol{y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-x}(2x - 1)}$$

$\boldsymbol{f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}}$ $\boldsymbol{k_1 = \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha}$	$$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}(4x - 1)$$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 4k + 3 = 0;$ $D = 16 - 12 = 4;$ $k_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left[\begin{matrix}\mathbf{1} \\ \mathbf{3}\end{matrix}\right.$ отже загальний розв'язок однорідного рівняння $$\boldsymbol{y_{\text{о}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}}$$ В правій частині $\alpha = 3$, тобто $k_1 = \alpha;\ \ k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{\text{н}} = e^{3x}(Ax + B) \cdot x = e^{3x}(Ax^2 + Bx),$ знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_{\text{н}}$ $y'_{\text{н}} = 3e^{3x}(Ax^2 + Bx) + e^{3x}(2Ax + B) =$ $\quad = e^{3x}(3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B);$ $y''_{\text{н}} = 3e^{3x}(3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B) +$ $\quad + e^{3x}(6Ax + 3B + 2A) =$ $\quad = e^{3x}(9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A)$ та підставимо у рівняння $e^{3x}(9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A) -$ $-4e^{3x}(3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B) +$ $+3e^{3x}(Ax^2 + Bx) = e^{3x}(4x - 1);$ прирівняємо вирази при експоненті $9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A - 12Ax^2 -$ $-12Bx - 8Ax - 4B + 3Ax^2 + 3Bx = 4x - 1;$ спростимо отриманий вираз $4Ax + 2A + 2B = 4x - 1;$ та дорівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему $\begin{array}{l} x^1 \\ x^0 \end{array}\left\lvert \begin{array}{l} 4A = 4 \\ 2A + 2B = -1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -\frac{3}{2} \end{array}$ Частинний розв'язок має вигляд $$\boldsymbol{y_{\text{н}} = e^{3x}\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right)}$$ Остаточно маємо $$y = \boldsymbol{C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} + e^{3x}\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right)}$$

$\boldsymbol{f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}}$ $\boldsymbol{k_1 = k_2 = \alpha}$	$y'' + 2y' + y = e^{-x} \cdot (36x^2 - 12x + 8)$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 2k + 1 = 0;$ $D = 4 - 4 = 0; \quad k_{1,2} = \mathbf{-1}$ отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_{\text{о}} = (C_1 + C_2 x)e^{-x}}$ В правій частині $\alpha = -1$, тобто $k_1 = k_2 = \alpha$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{\text{н}} = e^{-x}(Ax^2 + Bx + C) \cdot x^2 =$ $= e^{-x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2),$ знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_{\text{н}}$ $y'_{\text{н}} = -e^{-x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2) +$ $+e^{-x}(4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx) =$ $= e^{-x}(-Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 + 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx)$ $y''_{\text{н}} = -e^{-x}(-Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 + 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx) +$ $+e^{-x}(-4Ax^3 - 3Bx^2 - 2Cx + 12Ax^2 + 6Bx + 2C) +$ $= e^{-x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 - 8Ax^3 - 6Bx^2 - 4Cx +$ $+12Ax^2 + 6Bx + 2C)$ та підставимо у рівняння $e^{-x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 - 8Ax^3 - 6Bx^2 - 4Cx + 12Ax^2 +$ $+6Bx + 2C) + 2e^{-x}(-Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 + 4Ax^3 +$ $+3Bx^2 + 2Cx) + e^{-x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2) =$ $= 36e^{-x} \cdot (36x^2 - 12x + 8);$ прирівняємо вирази при експоненті та спростимо отриманий вираз $12Ax^2 + 6Bx + 2C = 36x^2 - 12x + 8;$ дорівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему $\begin{array}{l\|ll} x^2 & 12A = 36 & A = 3 \\ x^1 & 6B = -12 & B = -2 \\ x^0 & 2C = 8 & C = 4 \end{array}$ Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_{\text{н}} = e^{-x}(3x^4 - 2x^3 + 4x^2)}$ Остаточно маємо $\boldsymbol{y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + (3x^4 - 2x^3 + 4x^2)e^{-x}}$

$\boldsymbol{f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x}$ $\boldsymbol{k_{1,2} \neq \pm\beta i}$	$y'' + 2y' + 5y = 3\sin 2x$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 2k + 5 = 0,$ $D = 4 - 20 = -16;\quad k_{1,2} = \frac{-2\pm 4i}{2} = \boldsymbol{-1 \pm 2i},$ отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_о = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)}$ В правій частині $\beta = 2$, тобто $k_{1,2} \neq \pm\beta i$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_н = A\cos 2x + B\sin 2x,$ знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_н$ $y_н' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x;$ $y_н'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$ та підставимо у рівняння. $-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 2(-2A\,sin\,2x + 2B\,cos\,2x) +$ $+5(A\cos 2x + B\sin 2x) = 3\sin 2x$ або $A\cos 2x + B\sin 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 3\sin 2x$ Дорівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$: $\begin{array}{r\|l} \cos 2x & A + 4B = 0 \\ \sin 2x & -4A + B = 3 \end{array}$ Розв'яжемо отриману систему за правилами Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 16 = 17;$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12;$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3;$ $A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\boldsymbol{\frac{12}{17}};\quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \boldsymbol{\frac{3}{17}}.$ Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_н = -\frac{12}{17}\cos 2x + \frac{3}{17}\sin 2x}$ Остаточно маємо $\boldsymbol{y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - \frac{12}{17}\cos 2x + \frac{3}{17}\sin 2x}$

$\boldsymbol{f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x}$ $\boldsymbol{k_{1,2} = \pm\beta i}$	$y'' + 25y = 4\cos 5x - 3\sin 5x$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 25 = 0;\quad k^2 = -25;\quad k_{1,2} = \pm\boldsymbol{5i}$, отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_{\text{о}} = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x}$ В правій частині $\beta = 5$, тобто $k_{1,2} = \pm\beta i$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{\text{н}} = (A\cos 5x + B\sin 5x)\cdot x$; знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_{\text{н}}$: $y'_{\text{н}} = (-5A\sin 5x + 5B\cos 5x)\cdot x + A\cos 5x + B\sin 5x$; $y''_{\text{н}} = (-25A\cos 5x - 25B\sin 5x)x - 5A\sin 5x +$ $+5B\cos 5x - 5A\sin 5x + 5B\cos 5x$; та підставимо у рівняння. $(-25A\cos 5x - 25B\sin 5x)x - 10A\sin 5x +$ $+10B\cos 5x + 25(A\cos 5x + B\sin 5x)\cdot x =$ $= 4\cos 5x - 3\sin 5x$ Спростимо отриманий вираз та дорівняємо коефіцієнти при $\cos 5x$ та $\sin 5x$: $\begin{array}{l\|l} \cos 5x & 10B = 4 \\ \sin 5x & -10A = -3 \end{array}$. $\boldsymbol{B = \frac{2}{5}}$ $\boldsymbol{A = -\frac{3}{10}}$ Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_{\text{н}} = \left(-\frac{3}{10}\cos 5x + \frac{2}{5}\sin 5x\right)\cdot x}$ Остаточно маємо $\boldsymbol{y = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x + \left(-\frac{3}{10}\cos 5x + \frac{2}{5}\sin 5x\right)\cdot x}$

$\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x}[A\cos\beta x + B\sin\beta x]}$ $\boldsymbol{k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i}$	$y'' + 10y' + 21y = 5e^{-2x}\sin x$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 + 10k + 21 = 0;$ $D = 100 - 84 = 16; \quad k_{1,2} = \frac{-10\pm4}{2} = \left[\begin{matrix}\boldsymbol{-3}\\ \boldsymbol{-7}\end{matrix}\right.;$ отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_о = C_1e^{-3x} + C_2e^{-7x}}$ В правій частині $\alpha = -2;\ \beta = 1$, тобто $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_н = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x),$ знайдемо коефіцієнти за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_н$ $y'_н = -2e^{-2x}(A\cos x + B\sin x) +$ $+e^{-2x}(-A\sin x + B\cos x) =$ $= e^{-2x}(-2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x + B\cos x);$ $y''_н = -2e^{-2x}(-2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x +$ $+B\cos x) + e^{-2x}(2A\sin x - 2B\cos x - A\cos x -$ $-B\sin x) =$ $= e^{-2x}(3A\cos x + 3B\sin x + 4A\sin x - 4B\cos x);$ та підставимо у рівняння $e^{-2x}(3A\cos x + 3B\sin x + 4A\sin x - 4B\cos x) +$ $10e^{-2x}(-2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x + B\cos x)$ $+21e^{-2x}(A\cos x + B\sin x) = 5e^{-2x}\sin x$ Спростимо отриманий вираз $e^{-2x}(4A\cos x + 4B\sin x - 6A\sin x + 6B\cos x) =$ $= 5e^{-2x}\sin x$ та дорівняємо коефіцієнти при $e^{-2x}\cos x$ та $e^{-2x}\sin x$: $\begin{matrix}e^{-2x}\cos x \\ e^{-2x}\sin x\end{matrix}\left\vert\begin{matrix}4A + 6B = 0\\ -6A + 4B = 5\end{matrix}\right.$ Розв'яжемо отриману систему за правилами Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix}4 & 6\\ -6 & 4\end{vmatrix} = 16 + 36 = 52;$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix}0 & 6\\ 5 & 4\end{vmatrix} = 0 - 30 = -30; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix}4 & 0\\ -6 & 5\end{vmatrix} = 20 - 0 = 20;$ $A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{30}{52} = -\boldsymbol{\frac{15}{26}}; \quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20}{52} = \boldsymbol{\frac{5}{13}}$ Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_н = e^{-2x}\left(-\frac{15}{26}\cos x + \frac{5}{13}\sin x\right).}$ Остаточно маємо $\boldsymbol{y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-7x} + e^{-2x}\left(-\frac{15}{26}\cos x + \frac{5}{13}\sin x\right)}$

$\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x}[A\cos\beta x + B\sin\beta x]}$ $\boldsymbol{k_{1,2} = \alpha \pm \beta i}$	$y'' - 4y' + 29y = e^{2x}(4\cos 5x - \sin 5x)$ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 4k + 29 = 0;$ $D = 16 - 116 = -100;\quad k_{1,2} = \frac{4\pm 10i}{2} = \mathbf{2 \pm 5i}$ отже загальний розв'язок однорідного рівняння $\boldsymbol{y_{\text{о}} = e^{2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)}$ В правій частині $\alpha = 2;\ \beta = 5$, тобто $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{\text{н}} = e^{2x}(A\cos 5x + B\sin 5x)\cdot x,$ знайдемо коефіцієнт за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього продиференцюємо $y_{\text{н}}$ $y_{\text{н}}' = 2e^{2x}(A\cos 5x + B\sin 5x)\cdot x +$ $+e^{2x}(-5A\sin 5x + 5B\cos 5x)\cdot x +$ $+e^{2x}(A\cos 5x + B\sin 5x) =$ $= e^{2x}(2A\cos 5x + 2B\sin 5x - 5A\sin 5x +$ $+5B\cos 5x)\cdot x + e^{2x}(A\cos 5x + B\sin 5x);$ $y_{\text{н}}'' = 2e^{2x}(2A\cos 5x + 2B\sin 5x -$ $-5A\sin 5x + 5B\cos 5x)x + e^{2x}(-10A\sin 5x +$ $+10B\cos 5x - 25A\cos 5x - 25B\sin 5x)\cdot x +$ $+e^{2x}(2A\cos 5x + 2B\sin 5x - 5A\sin 5x +$ $+5B\cos 5x) + 2e^{2x}(A\cos 5x + B\sin 5x) +$ $+e^{2x}(-5A\sin 5x + 5B\cos 5x) =$ $= e^{2x}(-21A\cos 5x - 21B\sin 5x - 20A\sin 5x +$ $+20B\cos 5x)\cdot x + e^{2x}(4A\cos 5x + 4B\sin 5x -$ $-10A\sin 5x + 10B\cos 5x)$ та підставимо у рівняння: $e^{2x}(-21A\cos 5x - 21B\sin 5x - 20A\sin 5x +$ $+20B\cos 5x)\cdot x + e^{2x}(4A\cos 5x + 4B\sin 5x -$ $-10A\sin 5x + 10B\cos 5x) - 4e^{2x}(2A\cos 5x +$ $+2B\sin 5x - 5A\sin 5x + 5B\cos 5x)\cdot x -$ $-4e^{2x}(A\cos 5x + B\sin 5x) + 29e^{2x}\cdot$ $\cdot(A\cos 5x + B\sin 5x)\cdot x = e^{2x}(4\cos 5x - \sin 5x)$ Спростимо отриманий вираз $e^{2x}(-10A\sin 5x + 10B\cos 5x) =$ $= e^{2x}(4\cos 5x - \sin 5x)$ та прирівняємо коефіцієнти при $e^{2x}\cos 5x$ та $e^{2x}\sin 5x$: $e^{2x}\cos 5x \,\vert\; 10B = 4;\quad B = 0{,}4$ $e^{2x}\sin 5x \,\vert\; -10A = -1;\quad A = 0{,}1$ Частинний розв'язок має вигляд $\boldsymbol{y_{\text{н}} = e^{2x}(0{,}1\cos 5x + 0{,}4\sin 5x)\cdot x}$ Остаточно маємо $\boldsymbol{y = e^{2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x) +}$ $\boldsymbol{+e^{2x}(0{,}1\cos 5x + 0{,}4\sin 5x)\cdot x}$

Тема «СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ»

<table>
<tr><td colspan="2">

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

</td></tr>
<tr><td>

Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь **методом виключення змінної**

</td><td>

Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = x - 3y & (1) \\ y' = 3x + y & (2) \end{cases}$$

Продиференцюємо (1): $x'' = x' - 3y'$,
підставимо у отримане y' з (2):

$$x'' = x' - 9x - 3y$$

Виразимо з (1) $y = -\frac{1}{3}(x' - x)$ та підставимо в останнє

$$x'' = x' - 9x - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}(x' - x)\right) \quad \text{або}$$

$$x'' - 2x' + 10x = 0$$

Характеристичне рівняння, йому відповідне:

$$k^2 - 2k + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 1 \pm 3i;$$

маємо загальний розв'язок для шуканої функції x:

$$x = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$$

Щоб знайти функцію y, продиференцюємо x:

$$x' = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t - 3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t);$$

$$y = -\frac{1}{3}(x' - x) = -\frac{1}{3}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t -$$

$$-3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t - C_1 \cos 3t - C_2 \sin 3t)$$

$$y = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)$$

Остаточно маємо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)} \\ \boldsymbol{y = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)} \end{cases}$$

</td></tr>
<tr><td>

Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь **за допомогою характеристичного рівняння**

Розв'язки системи шукаємо у вигляді

$$x = r_1 e^{kt}, \quad y = r_2 e^{kt}$$

Характеристичне рівняння системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & b_1 \\ a_2 & b_2 - k \end{vmatrix} = 0$$

</td><td>

Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

Характеристичне рівняння системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} 2 - k & 1 \\ 3 & 4 - k \end{vmatrix} = (2 - k)(4 - k) - 1 \cdot 3 =$$

$$= k^2 - 6k + 5 = 0$$

звідси $k_1 = 1;\ k_2 = 5$
При $k_1 = 1$ перший розв'язок системи
$x = e^t; \quad \Rightarrow \quad y = x' - 2x = e^t - 2e^t = -e^t$
при $k_2 = 5$ другий розв'язок системи
$x = e^{5t}; \Rightarrow y = y = x' - 2x = 5e^{5t} - 2e^{5t} = 3e^{5t}$
Звідси загальний розв'язок системи має вигляд

$$\boldsymbol{x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}};$$

$$\boldsymbol{y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}}$$

</td></tr>
</table>

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 256 с.

2. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 250 с.

3. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 2 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 221 с.

4. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 192 с.

5. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 3 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 233 с.

6. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005.–270 с.

7. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 1) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський – Харків : ХНАМГ, 2010. – 88 с.

8. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 2) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський – Харків : ХНАМГ, 2010. – 125 с.

9. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 3) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський – Харків : ХНАМГ, 2010. – 110 с.

10. Коваленко Л. Б. Розрахунково-графічне завдання з вищої математики (для студентів-бакалаврів денної форми навчання спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) / Л. Б. Коваленко, А. А. Кузнецова, О. П. Довгаль. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 57 с.

11. Коваленко Л. Б. Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика» (для студентів першого бакалаврського рівня денної форми навчання спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія). Частина 1 / Л. Б. Коваленко, А. А. Кузнецова, О. П. Довгаль. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 44 с.

Довідкове видання

КОВАЛЕНКО Людмила Борисівна

НАВЧАЛЬНИЙ ДОВІДНИК

з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Частина 2

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології)

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*

План 2022, поз. 1Д

Підп. до друку 18.07.2022. Формат 60 × 84/16.
Електронне видання. Ум. друк. арк. 3,2

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.