МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

НАВЧАЛЬНИЙ ДОВІДНИК

з дисципліни

«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА (ВИЩА МАТЕМАТИКА)»

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 073 – Менеджмент)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2022

Коваленко Л. Б. Навчальний довідник з дисципліни «Вища та прикладна математика (Вища математика)» (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 073 – Менеджмент) / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 64 с.

Автор канд. фіз.-мат. наук, доц. Л. Б. Коваленко

Рецензент

С. М. Ламтюгова, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 10 від 27.04.2022

Навчальний довідник розроблено відповідно до навчального плану та програми дисципліни «Вища та прикладна математика (Вища математика)» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 073 – Менеджмент і відображають навчальний матеріал першого семестру. У навчальному довіднику наведено теоретичний матеріал з прикладами його застосування відповідно до робочої програми з посиланням на використану літературу.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Навчальний довідник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 073 – Менеджмент для засвоєння основних математичних понять та методів розв'язання задач під час самостійної роботи студентів, що вивчають дисципліну «Вища та прикладна математика (Вища математика)». Навчальний довідник містить основні теоретичні відомості та приклади застосування формул, визначень, теорем при розв'язанні задач з лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії на площині та у просторі, теорії границь, диференціального числення функції однієї змінної.

Навчально-методичний комплекс дисципліни «Вища та прикладна математика (Вища математика)» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 073 – Менеджмент включає підручник, навчальний посібник, збірник тестових завдань з необхідним теоретичним матеріалом, довідниками та завданнями для практичних занять та самостійної роботи студентів, та розрахунково-графічного завдання, що містить задачі за фаховим спрямуванням та наочно ілюструють практичне застосування методів лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу у розв'язанні прикладних задач.

Тема «Визначники»

Основні визначення

Визначником n-го порядку називається число Δ_n, яке записано у вигляді квадратної таблиці чисел:

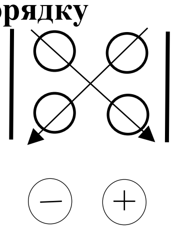
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$ порядку, який утворюється з початкового визначника закресленням i –того рядка і j-того стовпця

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Обчислення визначників

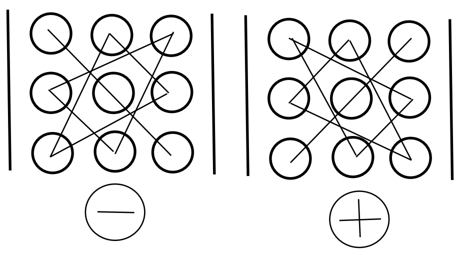
Обчислення **визначника другого порядку**



$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-5) \cdot 4 = 6 + 20 = \mathbf{26}$$

Обчислення **визначника третього порядку** за правилом **Саррюса** (правилом трикутників)



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

За правилом Саррюса маємо $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot (-5) \cdot 7 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot (-2) -$$
$$- 2 \cdot (-5) \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 7 - 1 \cdot 2 \cdot 1 =$$
$$= -35 + 6 - 16 - 20 - 84 - 2 = \mathbf{-151}$$

Мінором M_{ij} називається визначник, отриманий з початкового визначника, закресленням i-того рядка та j-того стовпця $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$	Дано визначник $\begin{vmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$, знайти M_{32} $M_{32} = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -2 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 = 2 - 15 = \mathbf{-13}$
Алгебраїчним доповненням називається число, що знаходиться за правилом $\boldsymbol{A_{ij}} = (-\mathbf{1})^{i+j} \cdot \boldsymbol{M_{ij}}$	Дано визначник $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ -6 & 2 & 8 \end{vmatrix}$, зайти A_{13} $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} =$ $= (-1)^4 \big(-2 \cdot 2 - 5 \cdot (-6)\big) =$ $= -4 + 30 = \mathbf{26}$
Обчислення визначників розкладанням **за елементами рядка** $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_{ik}} \cdot \boldsymbol{A_{ik}}$ ***Правило:*** визначник дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого рядка на їх алгебраїчні доповнення	Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ за елементами третього рядка $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} +$ $+(-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} +$ $+3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} +$ $+4 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot (-12 + 0 + 0 - 0 + 10 + 105) +$ $+1 \cdot (24 + 28 + 0 - 0 - 20 + 63) +$ $+3 \cdot (-30 - 4 + 0 - 0 - 9 - 0) -$ $-4 \cdot (50 + 8 + 0 - 70 + 15 - 0) = \mathbf{57}$

Обчислення визначників розкладанням **за елементами стовпця** $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_{kj}} \cdot \boldsymbol{A_{kj}}$ ***Правило:*** визначник дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого стовпця на їх алгебраїчні доповнення)	Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ за елементами другого стовпця $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$ $= -1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} +$ $+5 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} +$ $+(-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 0 =$ $= 1 \cdot (-27 - 32 + 10 - 12 - 12 - 60) +$ $+5 \cdot (-18 + 56 + 0 - 0 + 21 - 40) -$ $+1 \cdot (24 + 28 + 0 - 0 + 63 - 20) =$ $= -133 + 95 + 95 = \mathbf{57}$
Обчислення визначників розкладанням **за елементами рядка (стовпця)** з попереднім отриманням **нулів** ***Правило:*** за властивостями визначників, величина визначника не зміниться, якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) помножити на будь-яке число та додати до відповідних елементів іншого рядка (стовпця) ***Зауваження:*** при отриманні нулів у рядку, необхідно працювати із стовпцями, при отриманні нулів у стовпці – із рядками	Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$, попередньо отримав нулі у третьому рядку $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$ (1) (-3) (-4) $= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -8 \\ 3 & 8 & -13 & -10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -11 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 8 & -13 & -10 \\ 2 & -1 & -11 \end{vmatrix} =$ $= 143 - 20 + 64 - 208 + 88 - 10 = \mathbf{57.}$

Тема «Матриці»

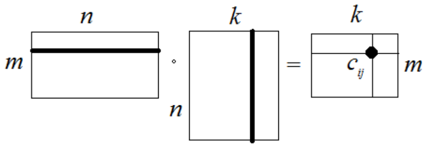
<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Основні визначення</td></tr>
<tr><td colspan="2">Матрицею $A = \left\| a_{ij} \right\|$ називається прямокутна таблиця чисел, яка містить m рядків та n стовпців:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Матриця, число рядків якої дорівнює числу стовпців, називається квадратною матрицею</td></tr>
<tr><td colspan="2">Квадратна матриця, всі елементи головної діагоналі якої, дорівнюють 1, а всі інші – 0, називається одиничною, та позначається як
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Операції над матрицями</td></tr>
<tr><td>Додавання (віднімання) матриць

Правило: Додавати (віднімати) можна лише матриці однакового розміру
$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \ \Rightarrow \ c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$</td><td>Знайти суму та різницю матриць
$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.
$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2+4 & 5+2 & 7-3 \\ 3+1 & 0+9 & -4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$;
$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2-4 & 5-2 & 7+3 \\ 3-1 & 0-9 & -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-6} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-9} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Множення матриці на число
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{A} \ \Rightarrow c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$</td><td>Знайти матрицю $4A$, якщо $A = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
$$4A = \begin{pmatrix} 4\cdot(-8) & 4\cdot 4 \\ 4\cdot 3 & 4\cdot 0 \\ 4\cdot 5 & 4\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-32} & \mathbf{16} \\ \mathbf{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{20} & \mathbf{-8} \end{pmatrix}$$</td></tr>
</table>

Множення матриць

Матриці-множники повинні задовольняти умові: кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. У результаті отримаємо матрицю, у якої стільки рядків, скільки у першої, і тільки стовпців, скільки у другої

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}:$$



Множимо рядок першої матриці на стовпець другої матриці:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots a_{in} \cdot b_{nj}$$

В загальному випадку

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$$

Знайти добуток матриць $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо це можливо:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 & 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 4 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \\ 0 \cdot 5 + 5 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & 0 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 - 1 & 8 - 1 & 16 - 3 \\ 10 + 3 & 4 + 3 & 8 + 9 \\ 0 + 5 & 0 + 5 & 0 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{19} & \mathbf{7} & \mathbf{13} \\ \mathbf{13} & \mathbf{7} & \mathbf{17} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{15} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 20 + 4 + 0 & -5 + 6 + 20 \\ 4 + 2 + 0 & -1 + 3 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{24} & \mathbf{21} \\ \mathbf{6} & \mathbf{17} \end{pmatrix}$$

Транспонування матриць

Транспонована матриця утворюється заміною рядків стовпцями (або навпаки)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Транспонувати матрицю $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^T = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця

Існує лише для квадратних невироджених матриць! Знаходимо обернену матрицю за алгоритмом:

1. Обчислюємо $detA$ ($detA \neq 0!$)
2. Транспонуємо матрицю (A^T)
3. Обчислюємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці
4. Складаємо обернену матрицю за правилом:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix}$$

5. Виконуємо перевірку

$$A^{-1} \cdot A = E$$

або $A \cdot A^{-1} = E$,

де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Знайти матрицю, обернену до $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 0 - 60 - 12 - 24 - 0 = -108 \neq 0;$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12;$$

$$A_{12}^T = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 - 10) = 14;$$

$$A_{13}^T = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6;$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -(24 - 0) = -24;$$

$$A_{22}^T = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8;$$

$$A_{23}^T = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 12) = -12;$$

$$A_{31}^T = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -30 - 6 = -36;$$

$$A_{32}^T = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(5 - 2) = -3;$$

$$A_{33}^T = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 6 = 9$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{-108}\begin{pmatrix} -12 & 14 & -6 \\ -24 & -8 & -12 \\ -36 & -3 & 9 \end{pmatrix}}$$

Перевірка:

$$\boldsymbol{A^{-1} \cdot A} = \frac{1}{-108}\begin{pmatrix} -12 & 14 & -6 \\ -24 & -8 & -12 \\ -36 & -3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{108}\begin{pmatrix} -12 - 84 - 12 & -12 + 42 - 30 & -24 + 0 + 24 \\ -24 + 48 - 24 & -24 - 24 - 60 & -48 + 0 + 48 \\ -36 + 18 + 18 & -36 - 9 + 45 & -72 + 0 - 36 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{108}\begin{pmatrix} -108 & 0 & 0 \\ 0 & -108 & 0 \\ 0 & 0 & -108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$$

Тема «Застосування матриць у розв'язанні економічних задач»

Якщо в деякій галузі n підприємств випускають m видів продукції. Матриця $A[n \times m]$ задає обсяги продукції на кожному підприємстві за перший період, а матриця $B[n \times m]$ - за другий. Тоді

а) ***обсяг продукції*** за весь час спостереження (обидва періоди)

$$C = A + B, \text{ де } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij};$$

б) ***приріст обсягів продукції*** за другий період порівняно з першим за видами та по підприємствах;

$$D = B - A, \text{ де } d_{ij} = b_{ij} - a_{ij}.$$

Нехай обсяг виробленої продукції трьома підприємствами чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задані матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 5 \\ 10 & 4 & 2 & 6 \\ 9 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 & 4 \\ 11 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 2 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

Знайти обсяг продукції за перше півріччя:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 14 & 9 \\ 21 & 7 & 7 & 13 \\ 19 & 4 & 19 & 15 \end{pmatrix};$$

та приріст обсягів продукції за другий квартал порівняно з першим

$$D = B - A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Нехай підприємство виробляє n типів продукції, обсяги виробництва задаються матрицею $A[1 \times n]$. Вартість реалізації одиниці i-го типа продукції в j-му регіоні задана матрицею $B[n \times k]$, де k − число регіонів, у яких реалізується продукція. C −***матриця виручки по регіонах*** знаходиться за формулою

$$C = A \cdot B,$$

де $c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{jk}$ − виручка i-підприємства в j-му регіоні

Підприємство виробляє чотири типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в п'яти регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} 420 & 350 & 780 & 205 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Знайти C − матрицю виручки по регіонах

Знайдемо матрицю виручки по регіонах як добуток матриць

$$C = A \cdot B =$$
$$\begin{pmatrix} 420 \cdot 4 + 350 \cdot 7 + 780 \cdot 3 + 205 \cdot 5 \\ 420 \cdot 3 + 350 \cdot 1 + 780 \cdot 2 + 205 \cdot 7 \\ 420 \cdot 5 + 350 \cdot 6 + 780 \cdot 1 + 205 \cdot 6 \\ 420 \cdot 1 + 350 \cdot 6 + 780 \cdot 9 + 205 \cdot 6 \\ 420 \cdot 4 + 350 \cdot 2 + 780 \cdot 8 + 205 \cdot 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7\,495 & 4\,605 & 6\,210 & 10\,770 & 10\,670 \end{pmatrix}$$

Підприємство виробляє m типів продукції, використовуючи n видів ресурсів. Норми затрат ресурсу i–го товару на виробництво одиниці продукції j–го типу задані матрицею $A[n \times m]$. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу x_{ij}, яка задана матрицею $X[m \times 1]$. Нехай вказана вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці $P[1 \times n]$, тоді S – ***матриця повних витрат ресурсів*** кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період знаходиться за формулою $$S = A \cdot X;$$ C – ***повна вартість*** усіх витрачених ресурсів за певний період знаходиться за формулою $C = P \cdot S$ або $C = P \cdot A \cdot X$	Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи п'ять видів ресурсів. Норми затрат ресурсу i–го товару на виробництво одиниці продукції j–го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P, де $$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 7 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 275 \\ 148 \\ 356 \end{pmatrix},$$ $$P = (25 \quad 40 \quad 76 \quad 100 \quad 95)$$ Знайти: а) S – матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період; $$S = A \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \cdot 275 + 6 \cdot 148 + 8 \cdot 356 \\ 3 \cdot 275 + 3 \cdot 148 + 7 \cdot 356 \\ 5 \cdot 275 + 1 \cdot 148 + 0 \cdot 356 \\ 2 \cdot 275 + 9 \cdot 148 + 7 \cdot 356 \\ 6 \cdot 275 + 8 \cdot 148 + 4 \cdot 356 \end{pmatrix} =$$ $$= \begin{pmatrix} 1100 + 888 + 2848 \\ 825 + 444 + 2492 \\ 1375 + 148 + 0 \\ 550 + 1332 + 2492 \\ 1650 + 1184 + 1424 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4836 \\ 3761 \\ 1523 \\ 4374 \\ 4258 \end{pmatrix}$$ б) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період; б) $C = P \cdot S = (25 \quad 40 \quad 76 \quad 100 \quad 95) \cdot \begin{pmatrix} 4836 \\ 3761 \\ 1523 \\ 4374 \\ 4258 \end{pmatrix} =$ $$= 25 \cdot 4836 + 40 \cdot 3761 + 76 \cdot 1523 + 100 \cdot 4374 +$$ $$+95 \cdot 4258 = 120900 + 150440 + 115748 +$$ $$+437400 + 404510 = 1228998$$ (грош. одиниць)

Тема «Розв’язання систем неоднорідних лінійних алгебраїчних рівнянь»

$$\begin{cases}\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1}\\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2}\\ \dots\\ \boldsymbol{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n}\end{cases}$$

Метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b_1} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \boldsymbol{b_2} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \boldsymbol{b_n} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \boldsymbol{b_1} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \boldsymbol{b_2} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \boldsymbol{b_n} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix};$$

…

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boldsymbol{b_1}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & \boldsymbol{b_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \boldsymbol{b_n}\end{vmatrix};$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{\boldsymbol{\Delta_1}}{\Delta};\ \ \boldsymbol{x_2} = \frac{\boldsymbol{\Delta_2}}{\Delta}; \dots,$$

$$\boldsymbol{x_n} = \frac{\boldsymbol{\Delta_n}}{\Delta}$$

Розв’язати методом Крамера систему

$$\begin{cases}3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 21,\\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 9,\\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -14\end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5\\ 4 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -7\end{vmatrix} = -21 + 2 + 60 - 5 - 56 + 9 = \boldsymbol{-11};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 5\\ 9 & 1 & -1\\ -14 & 3 & -7\end{vmatrix} = -147 - 28 + 135 + 70 - 126 + 63 =$$

$$= \boldsymbol{-33};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 5\\ 4 & 9 & -1\\ 1 & -14 & -7\end{vmatrix} = -189 - 21 - 280 - 45 + 588 - 42 =$$

$$= \boldsymbol{11};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21\\ 4 & 1 & 9\\ 1 & 3 & -14\end{vmatrix} = -42 - 18 + 252 - 21 - 112 - 81 =$$

$$= \boldsymbol{-22;}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = \boldsymbol{3};$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{11}{-11} = \boldsymbol{-1};$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = \boldsymbol{2}$$

Перевірка

Підставимо отримані значення в друге рівняння системи

$4 \cdot 3 + (-1) - 2 = 9$, отримали тотожність

Відповідь: $x_1 = \boldsymbol{3}$; $x_2 = \boldsymbol{-1}$; $x_3 = \boldsymbol{2}$

Матричний метод

$$\boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B,}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Розв'язати матричним методом систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 21, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -14 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -21 + 2 + 60 - 5 - 56 + 9 = -11;$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & -7 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -7 + 3 = -4;$$

$$A_{12}^T = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -(14 - 15) = 1;$$

$$A_{13}^T = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 5 = -3;$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -(-28 + 1) = 27;$$

$$A_{22}^T = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -21 - 5 = -26;$$

$$A_{23}^T = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 20) = 23;$$

$$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11;$$

$$A_{32}^T = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(9 + 2) = -11;$$

$$A_{33}^T = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 27 & -26 & 23 \\ 11 & -11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-11} \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 27 & -26 & 23 \\ 11 & -11 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -84 + 9 + 42 \\ 567 - 234 - 322 \\ 231 - 99 - 154 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -33 \\ 11 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $x_1 = \mathbf{3}$; $x_2 = \mathbf{-1}$; $x_3 = \mathbf{2}$

Метод Гауса (метод послідовного виключення невідомих)

$\tilde{A} = (A|B) =$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)..\left(-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right) \dots \left(-\frac{a_{nn}^{(n-2)}}{a_{n-1,n}^{(n-2)}}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-11)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right)$$

Розв'язати методом Гауса систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 21, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -14 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 21 \\ 4 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 3 & -7 & -14 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & -14 \\ 4 & 1 & -1 & 9 \\ 3 & -2 & 5 & 21 \end{array}\right) (-4) \quad (-3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & -14 \\ 0 & -11 & 27 & 65 \\ 0 & -11 & 26 & 63 \end{array}\right) (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & -14 \\ 0 & -11 & 27 & 65 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Знаходимо невідомі:

$\Rightarrow x_3 = \mathbf{2};$

$\Rightarrow -11x_2 + 27x_3 = 65;$
$-11x_2 = 65 - 27 \cdot 2; \quad x_2 = -\mathbf{1};$

$\Rightarrow x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -14;$
$x_1 = -14 - 3 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 = \mathbf{3}$

Відповідь: $x_1 = \mathbf{3}; \ x_2 = -\mathbf{1}; \ x_3 = \mathbf{2}$

Тема «Розв'язання систем однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь»

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0} \\ \dots \\ \boldsymbol{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0} \end{cases};$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ - визначник системи

Якщо $\Delta \neq 0$ $\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$	Розв'язати однорідну систему $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -210 - 24 + 3 + 12 + 21 - 60 =$ $= -258 \neq 0$ $\Rightarrow$ система має лише тривіальне рішення $x_1 = x_2 = x_3 = 0$
Якщо $\Delta = 0$ $\Rightarrow rangA = rang\tilde{A} = m < n$ Система сумісна, але не визначена, тому має безліч розв'язків Закреслюємо $n - m$ рівнянь та виражаємо m базових невідомих через $n - m$ вільних	Розв'язати однорідну систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 6 + 1 + 3 - 16 = 0$ Візьмемо два перших рівняння і виразимо два перших невідомих через третє: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -x_3 \\ 3x_1 + x_2 = -4x_3 \end{cases}.$ Нехай $x_3 = k$: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -k \\ 3x_1 + x_2 = -4k \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5;$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -k & -1 \\ -4k & 1 \end{vmatrix} = -k - 4k = -5k;$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -k \\ 3 & -4k \end{vmatrix} = -8k + 3k = -5k;$ $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5k}{5} = -\boldsymbol{k};\ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5k}{5} = -\boldsymbol{k};\ \ x_3 = \boldsymbol{k};$ $k \in R$ ***Відповідь:*** $x_1 = -\boldsymbol{k};\ \ x_2 = -\boldsymbol{k};\ \ x_3 = \boldsymbol{k},\quad k \in R$

Тема «Власні вектори та власні числа матриці»

<table>
<tr><td colspan="2">

Ненульовий вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ називається ***власним вектором*** матриці

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, якщо існує таке ненульове число λ, що $AX = \lambda X$.

Число λ при цьому називається ***власним числом (власним значенням)*** вектора X відносно матриці A

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

</td></tr>
<tr><td>

Матриця $A - \lambda E$ називається ***характеристичною матрицею*** матриці A

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

</td><td>

Напишемо характеристичну матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>

Рівняння $|A - \lambda E| = 0$ називається ***характеристичним рівнянням*** матриці A

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

</td><td>

Та складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'яжемо його:

$$(1 - \lambda)^2 - 4 = 0;$$

звідси маємо $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ – власні числа матриці A

</td></tr>
<tr><td>

Координати власного вектора X, знаходяться з розв'язку однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

</td><td>

Координати власних векторів знайдемо з розв'язання відповідних систем рівнянь. Послідовно підставимо λ_1 та λ_2:

$\lambda_1 = -1$: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} x_1 = k; \\ x_2 = -k; \end{cases}$

маємо власний вектор $X^{(1)} = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}, \ k \in R;$

$\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = k; \\ x_2 = k; \end{cases}$

маємо власний вектор $X^{(2)} = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}, \ k \in R$

</td></tr>
</table>

Тема «Застосування систем лінійних алгебраїчних рівнянь для розв’язання економічних задач»

Кондитерська фабрика спеціалізується на випуску трьох видів виробів: тістечок, рулетів та кексів. Водночас на виробництві використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми затрат сировини на кожну одиницю виробів та об’єм затрат сировини на 1 день задані таблицею. Знайти щоденний об’єм випуску кожного виду кондитерських виробів

Таблиця. - Норми та об’єми затрат сировини

Вид сировини	Норми затрат на одну одиницю виробів			Затрати сировини за 1 день
	Тістечка	Рулети	Кекси	
S_1	5	3	4	3 800
S_2	2	2	1	1 500
S_3	3	3	2	2 400

Невідомими у задачі є шукана кількість кожного виду кондитерських виробів. Тому позначимо x_1 - об’єм випуску тістечок, x_2 – об’єм випуску рулетів, x_3 - об’єм випуску кексів. У відповідності до таблиці можна записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3800 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1500 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2400 \end{cases}$$

Розв’яжемо систему, наприклад, методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 9 + 24 - 24 - 12 - 15 = 2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3\,800 & 3 & 4 \\ 1\,500 & 2 & 1 \\ 2\,400 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 15\,200 + 7\,200 + 18\,000 -$$

$$-19\,200 - 9\,000 - 11\,400 = 800;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3\,800 & 4 \\ 2 & 1\,500 & 1 \\ 3 & 2\,400 & 2 \end{vmatrix} = 15\,000 + 11\,400 + 19\,200 -$$

$$-18\,000 - 15\,200 - 12\,000 = 400;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3\,800 \\ 2 & 2 & 1\,500 \\ 3 & 3 & 2\,400 \end{vmatrix} = 24\,000 + 13\,500 + 22\,800 -$$

$$-22\,800 - 14\,400 - 22\,500 = 600;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{800}{2} = 400;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{400}{2} = 200;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{600}{2} = 300$$

Отже, кондитерська фабрика щоденно випускає **400** тістечок, **200** рулетів і **300** кексів

Два заводи поставляють автомобілі для двох автогосподарств, потреби яких відповідно 350 та 250 машин. Перший завод випустив 400 машин, а другий - 200 машин. Відомі витрати на транспортування машин із заводів у кожне автогосподарство (см. табл.)

Таблиця – Витрати та транспортування машин із заводів в автогосподарства

Завод	Витрати на перевозку в автогосподарство, грош. од.	
	1	2
1	10	25
2	15	30

Мінімальні витрати на транспортування складають 10 750 грошових одиниць. Визначити оптимальний план перевозки машин

Поставимо у відповідність умовам задачі систему

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 400 \\ x_{21} + x_{22} = 200 \\ x_{11} + x_{21} = 350 \\ x_{12} + x_{22} = 250 \\ 10x_{11} + 25x_{12} + 15x_{21} + 20x_{22} = 9\,250, \end{cases}$$

де x_{11} і x_{12} – кількість машин, які потрібно перевезти з першого заводу в перше та друге автогосподарства відповідно, а x_{21} і x_{22} - кількість машин, які потрібно перевезти з другого заводу в перше та друге автогосподарства відповідно. Розв'яжемо систему методом Гауса. Для цього напишемо розширену матрицю та виконаємо елементарні перетворення:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 10 & 25 & 15 & 20 & 9\,250 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) & (-10) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 15 & 15 & 20 & 5\,250 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :(-1) \\ \\ :5 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 50 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 1\,050 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) & (-3) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \end{array}\right) \sim$$

Бачимо, що, поділивши третій рядок розширеної матриці на (-1), отримаємо рядок, який співпадає з п'ятим. Виключаємо його, отже, маємо

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 300 \end{array}\right) (-3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -300 \end{array}\right)$$

<table>
<tr><td></td><td>
Поділивши четверте рівняння на (-2) маємо

$$x_{22} = 150;$$

з третього рівняння отримаємо

$$x_{21} + x_{22} = 200;$$
$$x_{21} = 200 - x_{22} = 200 - 150 = 50;$$
$$x_{21} = 50;$$

підставивши результат у друге рівняння знаходимо

$$x_{12} + x_{22} = 250;$$
$$x_{12} = 250 - x_{22} = 250 - 150 = 100;$$
$$x_{12} = 100;$$

і, нарешті, з першого рівняння маємо

$$x_{11} + x_{12} = 400;$$
$$x_{11} = 400 - x_{12} = 400 - 100 = 300;$$
$$x_{11} = 300$$

Остаточно маємо оптимальний план транспортування машин:

$$\boldsymbol{x_{11} = 300};\ \ \boldsymbol{x_{12} = 100};\ \ \boldsymbol{x_{21} = 50};\ \ \boldsymbol{x_{22} = 150}$$
</td></tr>
<tr><td>
У кожному з трьох банків, між якими вибирає вкладник, нараховується свій щорічний відсоток на депозитний вклад. Вкладник має суму в 6 000 грошових одиниць. Якщо $\frac{1}{3}$ вкладу він розмістить у банку 1, $\frac{1}{2}$ - у банку 2, а решту – у банку 3, наприкінці року сума вкладу зросте до 7 250 грош. од. Якщо $\frac{1}{6}$ вкладу покласти у банк 1, $\frac{2}{3}$ - у банк 2, та $\frac{1}{6}$ - у банк 3, то сума, яку може отримати вкладник зросте до 7 200 грош. од. У випадку, коли схема розміщення вкладів: $\frac{1}{2}$ - у перший банк, $\frac{1}{6}$ - у другий банк, $\frac{1}{3}$ - у третій банк, то сума, отримана наприкінці року складала би 7 250 грош. од. Визначити ставку по депозитах кожного банку
</td><td>
Як невідомі оберемо ставку по депозитах в першому, другому та третьому банках відповідно. Частини вкладу знаходяться множенням числа на звичайний дріб, наприклад, $\frac{1}{3}$ вкладу знаходиться як $\frac{1}{3} \cdot 6\,000 = 2\,000$ грош. од. Тому система лінійних алгебраїчних рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} 2\,000x_1 + 3\,000x_2 + 1\,000x_3 = 7\,250 \\ 1\,000x_1 + 4\,000x_2 + 1\,000x_3 = 7\,200 \\ 3\,000x_1 + 1\,000x_2 + 2\,000x_3 = 7\,250 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера. Зауважимо, що обчислювати визначники, виконуючи множення чотиризначних чисел, у яких три знаки – нулі, не дуже зручно, тому скористаємося властивістю визначників і винесемо спільні множники кожного із стовпців за знак визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\,000 & 3\,000 & 1\,000 \\ 1\,000 & 4\,000 & 1\,000 \\ 3\,000 & 1\,000 & 2\,000 \end{vmatrix} = 10^9 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 10^9(16 + 9 + 1 - 12 - 6 - 2) = \boldsymbol{6 \cdot 10^9};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7\,250 & 3\,000 & 1\,000 \\ 7\,200 & 4\,000 & 1\,000 \\ 7\,250 & 1\,000 & 2\,000 \end{vmatrix} = 10^7 \begin{vmatrix} 725 & 3 & 1 \\ 720 & 4 & 1 \\ 725 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 10^7(5\,800 + 2\,175 + 720 - 2\,900 - 4320 - 725) =$$

$$= 750 \cdot 10^7 = \boldsymbol{7,5 \cdot 10^9};$$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2\,000 & 7\,250 & 1\,000 \\ 1\,000 & 7\,200 & 1\,000 \\ 3\,000 & 7\,250 & 2\,000 \end{vmatrix} = 10^7 \begin{vmatrix} 2 & 725 & 1 \\ 1 & 720 & 1 \\ 3 & 725 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 10^7(2\,880 + 2175 + 725 - 2\,160 - 1\,450 - 1\,450)$

$= 720 \cdot 10^7 = \mathbf{7,2 \cdot 10^9}$;

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2\,000 & 3\,000 & 7\,250 \\ 1\,000 & 4\,000 & 7\,200 \\ 3\,000 & 1\,000 & 7\,250 \end{vmatrix} = 10^7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 725 \\ 1 & 4 & 720 \\ 3 & 1 & 725 \end{vmatrix} =$

$= 10^7(5\,800 + 6\,480 + 725 - 8\,700 - 2\,175 - 1\,440)$

$= 690 \cdot 10^7 = \mathbf{6,9 \cdot 10^9}$;

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7,5 \cdot 10^9}{6 \cdot 10^9} = 1,25;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7,2 \cdot 10^9}{6 \cdot 10^9} = 1,2;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6,9 \cdot 10^9}{6 \cdot 10^9} = 1,15$$

З розв’язання системи робимо висновок, що перший банк відкриває депозити під 25 %, другий – під 20 %, а третій – під 15 %

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Рівняння вигляду $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$ $(i = 1,2, \dots n)$ називаються ***співвідношеннями балансу***, де x_i - об’єми валового продукту i-тої галузі для невиробничого споживання, x_{ij} - об’єм продукції i -тої галузі, що споживаються в процесі виробництва j-тою галуззю $(i = 1,2, \dots n)$

</td></tr>
<tr><td>

Співвідношення балансу можуть бути записані:

</td><td>

а) у вигляді $\boldsymbol{x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i}$ $(i = 1,2, \dots n)$

де $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ $(i, j = 1,2, \dots, n)$ - ***коефіцієнти прямих витрат***, які вказують на витрати продукції i-тої галузі на виробництво одиниці продукції j-тої галузі;

б) у матричному вигляді

$$\boldsymbol{X = AX + Y} \quad \text{або} \quad \boldsymbol{(E - A)X = Y}$$

$$\text{де } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

де X - вектор валового випуску; Y - вектор кінцевого продукту; A - матриця прямих витрат

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Головне завдання міжгалузевого балансу полягає у знаходженні такого вектору валового випуску X, який за відомої матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y</td></tr>
<tr><td>Вектор X валового випуску знаходиться за формулою:
$$X = (E - A)^{-1}Y = SY$$</td><td>де матриця $S = (E - A)^{-1}$ називається матрицею повних витрат, кожен елемент s_{ij} якої показує величину валового випуску продукції i-тої галузі, яка необхідна для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-тої галузі $y_j = 1 \quad (j = 1,2, \dots, n)$</td></tr>
<tr><td>Матриця $A \geq 0$ називається продуктивною, якщо для будь-якого вектора $Y \geq 0$ існує розв'язок $X \geq 0$ рівняння міжгалузевого балансу</td><td>Матриця A продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для будь-яких $i, j = 1,2, \dots, n$ та $\max\limits_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ існує номер j такий, що $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">В таблиці наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця – Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Галузь</td><td colspan="2">Споживання</td><td rowspan="2">Кінцева продукція</td></tr>
<tr><td>Галузь 1</td><td>Галузь 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>Галузь 1</td><td>0,3</td><td>0,25</td><td>400</td></tr>
<tr><td>Галузь 2</td><td>0,2</td><td>0,15</td><td>100</td></tr>
</table>

Знайти: плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей</td></tr>
<tr><td>Напишемо матрицю коефіцієнтів прямих витрат A і вектор кінцевої продукції Y</td><td>$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 \\ 0,2 & 0,15 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>Перевіримо, чи є матриця A продуктивною</td><td>Всі елементи матриці A додатні, сума елементів в кожному стовпці не перевищує одиниці. Отже, матриця продуктивна</td></tr>
<tr><td>Знайдемо матрицю повних витрат
$$S = (E - A)^{-1}$$</td><td>$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 \\ 0,2 & 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,25 \\ -0,2 & 0,85 \end{pmatrix}.$$
$$det(E - A) = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,25 \\ -0,2 & 0,85 \end{vmatrix} = 0,595 - 0,05 = 0,545;$$
$$(E - A)^T = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,25 & 0,85 \end{pmatrix};$$
$$A_{11}^T = 0,85; \quad A_{12}^T = 0,25; \quad A_{21}^T = 0,2; \quad A_{22}^T = 0,7$$</td></tr>
</table>

	Остаточно маємо матрицю повних витрат $S = \frac{1}{0{,}545}\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}25 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}56 & 0{,}46 \\ 0{,}37 & 1{,}28 \end{pmatrix}$
Вектор валового продукту X обчислимо за формулою: $X = S \cdot Y$	$X = \begin{pmatrix} 1{,}56 & 0{,}46 \\ 0{,}37 & 1{,}28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 + 46 \\ 148 + 128 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 670 \\ 176 \end{pmatrix},$ отже, валовий продукт першої галузі складає 670 одиниць, а другої – 176
Міжгалузеві поставки зможемо обчислити за формулою: $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$	$x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0{,}3 \cdot 670 = 201;$ $x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0{,}25 \cdot 176 = 44;$ $x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0{,}2 \cdot 670 = 134;$ $x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0{,}15 \cdot 176 = 26{,}4$
Витрати продукції всіх галузей на виробництво:	першої галузі $x_{11} + x_{21} = 201 + 134 = 335;$ другої галузі $x_{12} + x_{22} = 44 + 26{,}4 = 70{,}4$
Чиста продукція галузі дорівнює різниці між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі	першої галузі: $670 - 335 = 335;$ другої галузі: $176 - 70{,}4 = 105{,}6$

Таблиця – Плановані об’єми валової продукції галузей, чиста продукцію галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція	Валова продукція
		Галузь 1	Галузь 2		
Виробництво	Галузь 1	201	44	400	670
	Галузь2	134	26,4	100	176
Чиста продукція		335	105,8		
Валова продукція		670	176		

Тема «Теорія границь»

«Дії» з нескінченно малими та нескінченно великими величинами	$a\cdot 0=0;\quad a\cdot\infty=\infty;$ $\dfrac{0}{a}=0;\quad \dfrac{\infty}{a}=\infty;$ $\dfrac{a}{0}=\infty;\quad \dfrac{a}{\infty}=0$
Невизначеність типу $\mathbf{\frac{0}{0}}$, що задана відношенням многочленів $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\cdots+C}{Dx^m+Ex^{m-1}+\cdots+F}$ Для розкриття невизначеності необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники з використання формул: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, (де x_1, x_2 – корені квадратного рівняння $D=b^2-4ac;\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$); $a^2-b^2=(a-b)(a+b);$ $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$ $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$ $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2);$ та скоротити на критичний множник	Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$ $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(x-1)}{\cancel{(x-4)}(x+4)}=$ $\displaystyle=\lim_{x\to 4}\frac{x-1}{x+4}=\frac{4-1}{4+4}=\mathbf{\frac{3}{8}}$
Невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, що задана відношенням многочленів $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\cdots+C}{Dx^m+Ex^{m-1}+\cdots+F}.$ Для розкриття невизначеності необхідно винести максимальний степінь x в чисельнику та знаменнику та скоротити. Обчислити такі границі можна усно за правилом: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\cdots+C}{Dx^m+Ex^{m-1}+\cdots+F}=\begin{cases}\frac{A}{B}, \text{при } n=m\\ \infty, \text{при } n>m\cdot\\ \mathbf{0}, \text{при } n<m\end{cases}$	1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-6x+5}{3x^2+8x+14}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(7-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{8}{x}+\frac{14}{x^2}\right)}=$ $\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{8}{x}+\frac{14}{x^2}}=\mathbf{\frac{7}{3}};$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-6x^3-15x^2}{2x^3-3x^2+9}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=$ $\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(4-\frac{6}{x^2}-\frac{15}{x^3}\right)}{x^5\left(\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{9}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{6}{x^2}-\frac{15}{x^3}}{\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{9}{x^5}}=$ $=\frac{4}{0}=\infty;$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x+3}{9x^3+8x^2-7x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(9+\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}$ $\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{9+\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}}=\frac{0}{9}=\mathbf{0}$

Невизначеності типу $\left\|\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right\|$ **або** $\|\infty-\infty\|$**,** **що задані ірраціональними виразами** Необхідно позбавитися ірраціональності за допомогою формул скороченого множення (не забути основну властивість дробі: величина дробі не змінюється, якщо чисельник та знаменник помножити або поділити на одну й ту ж величину!): $a^2-b^2=(a-b)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$; $a^3\pm b^3=(a\pm b)(\boldsymbol{a^2}\mp\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b^2})$; та при необхідності розкласти многочлени на множники	1) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-3x-10}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=$ $=\lim\limits_{x\to5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\boldsymbol{\sqrt{x-1}+2})}{(x-5)(x+2)(\boldsymbol{\sqrt{x-1}+2})}=$ $=\lim\limits_{x\to5}\frac{x-1-4}{(x-5)(x+2)(\sqrt{x-1}+2)}=$ $=\lim\limits_{x\to5}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{1}{7\cdot4}=\boldsymbol{\frac{1}{28}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)=\|\infty-\infty\|=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)\left(\sqrt[3]{\boldsymbol{(x+1)^2}}+\sqrt[3]{\boldsymbol{x+1}}\sqrt[3]{\boldsymbol{x-1}}+\sqrt[3]{\boldsymbol{(x+1)^2}}\right)}{\sqrt[3]{\boldsymbol{(x+1)^2}}+\sqrt[3]{\boldsymbol{x+1}}\sqrt[3]{\boldsymbol{x-1}}+\sqrt[3]{\boldsymbol{(x+1)^2}}}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1-(x-1)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\frac{2}{\infty}$ $=\boldsymbol{0}$
Перша важлива границя $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 3x-\cos^2 x}{5x^2}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\cos 3x-\cos x)(\cos 3x+\cos x)}{5x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin x\sin 2x\cdot2\cos 2x\cdot\cos x\cdot2}{5\cdot x\cdot x\cdot2}=\frac{-2\cdot1\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1\cdot2}{5}=-\boldsymbol{\frac{8}{5}}$
Наслідки першої важливої границі: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}=a$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$	1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\boldsymbol{3}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}=\boldsymbol{\frac{7}{5}}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}4x}{\sin 8x}=\frac{4}{8}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 6x}{2x}=\frac{6}{2}=\boldsymbol{3}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\mathrm{arctg}5x}{1-\cos 6x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\mathrm{arctg}5x}{2\sin^2 3x}=\frac{5}{2\cdot3\cdot3}=\boldsymbol{\frac{5}{18}}$
Друга важлива границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\|1^\infty\|=e$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-5}{2x+3}\right)^{5x+1}=\|1^\infty\|=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-5}{2x+3}-1\right)^{5x+1}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-5-2x-3}{2x+3}\right)^{5x+1}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-8}\cdot\frac{-8}{2x+3}\cdot(5x+1)}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-40x-8}{2x+3}}=e^{-\frac{40}{2}}=\boldsymbol{e^{-20}}$

Наслідки другої важливої границі: $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{kx}=e^{k};$$ $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{p}{x}\right)^{x}=e^{\frac{1}{p}};$$ $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$	1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{12x}=e^{\frac{12}{3}}=\boldsymbol{e^{4}};$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec}x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=\mathbf{1};$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(4x+7)[\ln(x+9)-\ln(x+7)]=$ $=\lvert\infty-\infty\rvert=\lim\limits_{x\to\infty}(4x+7)\ln\left(\frac{x+9}{x+7}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+9}{x+7}\right)^{(4x+7)}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+9}{x+7}\right)^{(4x+7)}$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+9}{x+7}-1\right)^{(4x+7)}=$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+9-x-7}{x+7}\right)^{(4x+7)}=$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+7}\right)^{\frac{x+7}{2}\cdot\frac{2}{x+7}\cdot(4x+7)}=$ $=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x+14}{x+7}}=\ln e^{8}=\mathbf{8}$
Три важливі границі 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a;$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{a}-1}{x}=a$	1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(5+x)-\ln 5}{4x}=\left\lvert\frac{0}{0}\right\rvert=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{5+x}{5}}{4x}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{4\cdot\frac{x}{5}\cdot 5}=\mathbf{\frac{1}{20}};$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{x}-7^{x}}{2x}=\left\lvert\frac{0}{0}\right\rvert=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{x}-1+1-7^{x}}{2x}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{x}-1}{2x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^{x}-1}{2x}=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 7=\mathbf{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{7}};$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{(1+3x)^{4}}-1}{8x}=\left\lvert\frac{0}{0}\right\rvert=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{\frac{4}{7}}-1}{8\cdot 3x\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{7}}{8\cdot\frac{1}{3}}=\mathbf{\frac{3}{14}}$

Тема «Диференціювання функції однієї змінної»

Таблиця похідних		
	$\boldsymbol{y = f(x)}$	$\boldsymbol{y = f\big(u(x)\big)}$
1.	$C' = 0$	
2.	$x' = 1$	
3.	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
3a.	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3b.	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
4.	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
5.	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
6.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
7.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
8.	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9.	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10.	$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{tg}u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
11.	$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{ctg}u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
12.	$(\mathrm{arcsin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\mathrm{arcsin}u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13.	$(\mathrm{arccos}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\mathrm{arccos}u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
14.	$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arctg}u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
15.	$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Основні правила диференціювання	
Похідна від алгебраїчної суми $(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \pm \boldsymbol{v}'$	1) $y = 5x^3 + 2\log_3 x - 8\cos x + 3\mathrm{arctg}x - \frac{4}{x} + 15;$ $\boldsymbol{y' = 15x^2 + \frac{2}{x\ln 3} + 8\sin x + \frac{3}{1+x^2} + \frac{4}{x^2}};$ 2) $y = 9^{\mathrm{tg}^2 x} + 2\arccos 4x^7;$ $y' = 9^{\mathrm{tg}^2 x} \cdot \ln 9 \cdot (\mathrm{tg}^2 x)' - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(4x^7)^2}} \cdot (4x^7)' =$ $= 9^{\mathrm{tg}^2 x} \cdot \ln 9 \cdot 2\mathrm{tg}x \cdot (\mathrm{tg}x)' - \frac{2}{\sqrt{1-16x^{14}}} \cdot 4 \cdot 7x^6 =$ $= \boldsymbol{\frac{2 \cdot 9^{\mathrm{tg}^2 x} \cdot \ln 9 \cdot \mathrm{tg}x}{\cos^2 x} - \frac{56x^6}{\sqrt{1-16x^{14}}}}$
Похідна від добутку двох функції $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}'$ **Наслідок:** $(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{u})' = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{u}'$	1) $y = (9x^3 - 7^x) \cdot \arccos x;$ $y' = (9x^3 - 7^x)' \arccos x + (9x^3 - 7^x)(\arccos x)' =$ $= \boldsymbol{(27x^2 - 7^x \ln 7) \cdot \arccos x - \frac{9x^3 - 7^x}{\sqrt{1-x^2}}};$ 2) $y = 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \sqrt[5]{(3x-7)^4};$ $u = 6^{\ln^8 \cos x};\quad v = \sqrt[5]{(3x-7)^4} = (3x-7)^{\frac{4}{5}};$ $u' = 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \ln 6 \cdot (\ln^8 \cos x)' =$ $= 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \ln 6 \cdot 8\ln^7 \cos x \cdot (\ln\cos x)' =$ $= 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \ln 6 \cdot 8\ln^7 \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' =$ $= 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \ln 6 \cdot 8\ln^7 \cos x \cdot \frac{1}{\cos x}(-\sin x) =$ $= 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \ln 6 \cdot 8\ln^7 \cos x \cdot \mathrm{tg}x;$ $v' = \frac{4}{5}(3x-7)^{-\frac{1}{5}} \cdot (3x-7)' = \frac{4 \cdot 3}{5\sqrt[5]{3x-7}};$ $\boldsymbol{y' = 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \ln 6 \cdot 8\ln^7 \cos x \cdot \mathrm{tg}x \cdot \sqrt[5]{(3x-7)^4} +}$ $\boldsymbol{+ \frac{12 \cdot 6^{\ln^8 \cos x}}{5\sqrt[5]{3x-7}}}.$
Похідна від частки двох функцій $\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2}$ **Наслідок:** $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C \cdot v'}{v^2}$	1) $y = \frac{e^x + \sqrt{x}}{5\sin x};$ $y' = \frac{(e^x+\sqrt{x})' \cdot 5\sin x - (e^x+\sqrt{x}) \cdot (5\sin x)'}{(5\sin x)^2} =$ $= \frac{\left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot 5\sin x - (e^x+\sqrt{x}) \cdot 5\cos x}{25\sin^2 x} =$ $= \boldsymbol{\frac{(2\sqrt{x}e^x + 1) \cdot 5\sin x - 2\sqrt{x}(e^x+\sqrt{x}) \cdot 5\cos x}{50\sqrt{x}\sin^2 x}};$ 2) $y = \frac{\mathrm{ctg}^5 7x}{\ln(\cos 3x)};$ $u = \mathrm{ctg}^5 7x;\quad v = \ln(\cos 3x);$ $u' = 5 \cdot \mathrm{ctg}^4 7x \cdot (\mathrm{ctg}7x)' = 5\mathrm{ctg}^4 7x\left(-\frac{1}{\sin^2 7x}\right) \cdot (7x)' =$ $= -\frac{35\mathrm{ctg}^4 7x}{\sin^2 7x};$ $v' = \frac{1}{\cos 3x}(\cos 3x)' = \frac{1}{\cos 3x}(-\sin 3x)(3x)' = -3\mathrm{tg}3x;$ $y' = \frac{-\frac{35\mathrm{ctg}^4 7x}{\sin^2 7x} \cdot \ln(\cos 3x) - \mathrm{ctg}^5 7x \cdot (-3\mathrm{tg}3x)}{(\ln(\cos 3x))^2} =$ $= \boldsymbol{\frac{-35\mathrm{ctg}^4 7x \cdot \ln(\cos 3x) + 3\mathrm{ctg}^5 7x \cdot \mathrm{tg}3x \cdot \sin^2 7x}{\sin^2 7x \cdot \ln^2(\cos 3x)}}$

<table>
<tr><td colspan="2">

Логарифмічне диференціювання

</td></tr>
<tr><td>

$$\boldsymbol{y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}}$$

</td><td>

$$\boldsymbol{y' = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}\left[\varphi'(x)\cdot \ln f(x) + \varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

За методом логарифмічного диференціювання задану функцію необхідно спочатку про логарифмувати, потім спростити її за властивостями логарифмів. Диференціювання проводиться за правилами диференціювання
Зауваження: за методом логарифмічного диференціювання знаходиться похідна не лише степенево-показникової функції, але й похідна від функцій, які містить більш ніж два множники

</td></tr>
<tr><td>

Нагадаємо необхідні для диференціювання властивості логарифмів:

$$\boldsymbol{\log_a x^c = c\cdot \log_a x;}$$
$$\boldsymbol{\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y;}$$
$$\boldsymbol{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$

</td><td>

1) $y = (\arcsin 2x^7)^{\sqrt[3]{4x+5}}$;

$$\ln y = \ln(\arcsin 2x^7)^{\sqrt[3]{4x+5}} =$$
$$= \sqrt[3]{4x+5}\cdot \ln(\arcsin 2x^7);$$
$$u = \sqrt[3]{4x+5} = (4x+5)^{\frac{1}{3}};\quad v = \ln(\arcsin 2x^7);$$
$$u' = \frac{1}{3}(4x+5)^{-\frac{2}{3}}\cdot(4x+5)' = \frac{4}{3\sqrt[3]{(4x+5)^2}};$$
$$v' = \frac{1}{\arcsin 2x^7}(\arcsin 2x^7)' =$$
$$= \frac{1}{\arcsin 2x^7}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(2x^7)^2}}\cdot(2x^7)' =$$
$$= \frac{1}{\arcsin 2x^7\sqrt{1-4x^{14}}}\cdot 14x^6;$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{4}{3\sqrt[3]{(4x+5)^2}}\cdot\ln(\arcsin 2x^7) + \frac{14x^6\sqrt[3]{4x+5}}{\arcsin 2x^7\sqrt{1-4x^{14}}};$$

$$\boldsymbol{y' = (\arcsin 2x^7)^{\sqrt[3]{4x+5}}\cdot}$$
$$\boldsymbol{\cdot\left[\frac{4\ln(\arcsin 2x^7)}{3\sqrt[3]{(4x+5)^2}} + \frac{14x^6\sqrt[3]{4x+5}}{\arcsin 2x^7\sqrt{1-4x^{14}}}\right]}$$

2) $y = \frac{(x-6)^5\sqrt[7]{2x+5}}{(x+1)^8}$;

$$\ln y = \ln\frac{(x-6)^5\sqrt[7]{2x+5}}{(x+1)^8};$$
$$\ln y = \ln(x-6)^5 + \ln(2x+5)^{\frac{1}{7}} - \ln(x+1)^8 =$$
$$= 5\ln(x-6) + \frac{1}{7}\ln(2x+5) - 8\ln(x+1);$$
$$\frac{y'}{y} = 5\cdot\frac{1}{x-6} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2x+5}\cdot 2 - 8\frac{1}{x+1};$$

$$\boldsymbol{y' = \frac{(x-6)^5\sqrt[7]{2x+5}}{(x+1)^8}\left[\frac{5}{x-6} + \frac{2}{7(2x+5)} - \frac{8}{x+1}\right]}$$

</td></tr>
</table>

Похідні вищих порядків

$$f''(x)=[f'(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

$$f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

Похідна n-го порядку $\boldsymbol{f^{(n)}(x)}$ знаходиться як похідна від похідної $(n-1)$–го порядку

Знайти третю похідну функції $y=x^3arctgx$ і обчислити її значення у точці $x_0=0$

$y'=3x^2\cdot arctgx+x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}=3x^2\cdot arctgx+\frac{x^3}{1+x^2}$;

$y''=(y')'=6x\cdot arctgx+\frac{3x^2}{1+x^2}+\frac{3x^2(1+x^2)-x^3\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=$

$=6x\cdot arctgx+\frac{3x^2}{1+x^2}+\frac{3x^2+3x^4-2x^4}{(1+x^2)^2}=$

$=6x\cdot arctgx+\frac{3x^2+3x^4+3x^2+x^4}{(1+x^2)^2}=6x\cdot arctgx+\frac{4x^4+6x^2}{(1+x^2)^2}$;

$y'''=(y'')'=6\cdot arctgx+6x\cdot\frac{1}{1+x^2}+$

$+\frac{(16x^3+12x)(1+x^2)^2-(4x^4+6x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=$

$=6\cdot arctgx+\frac{6x}{1+x^2}+\frac{4x(1+x^2)[(4x^2+3)(1+x^2)-(4x^4+6x^2)]}{(1+x^2)^4}=$

$=6arctgx+\frac{6x}{1+x^2}+\frac{4x(4x^2+3+4x^4+3x^2-4x^4-6x^2)}{(1+x^2)^3}=$

$=6arctgx+\frac{6x(1+x^2)^2+4x(x^2+3)}{(1+x^2)^3}=6arctgx+\frac{2x(3x^4+8x^2+9)}{(1+x^2)^3}$

Обчислимо значення отриманої функції у точці x_0:

$$y'''(x_0)=y'''(0)=0$$

Диференціювання функцій, заданих параметрично $\begin{cases}\boldsymbol{x=x(t)}\\ \boldsymbol{y=y(t)}\end{cases}$

Похідна першого порядку

$$\boldsymbol{y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}}$$

$$\begin{cases}x=e^{5t}\sin 4t\\ y=e^{5t}\cos 4t\end{cases};$$

$x'_t=5e^{5t}\sin 4t+e^{5t}\cdot 4\cos 4t=e^{5t}(5\sin 4t+4\cos 4t)$;

$y'_t=5e^{5t}\cos 4t-e^{5t}\cdot 4\sin 4t=e^{5t}(5\cos 4t-4\sin 4t)$;

$$\boldsymbol{y'_x}=\frac{e^{5t}(5\cos 4t-4\sin 4t)}{e^{5t}(5\sin 4t+4\cos 4t)}=\boldsymbol{\frac{5\cos 4t-4\sin 4t}{5\sin 4t+4\cos 4t}}$$

Похідна другого порядку

$$\boldsymbol{y''_{xx}=\frac{y''_{tt}\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}}$$

$$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\mathrm{arctg}t\end{cases};$$

$x'_t=\frac{1}{1+t^2}\cdot(1+t^2)'=\frac{2t}{1+t^2}$;

$x''_{tt}=\frac{(2t)'(1+t^2)-2t(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2+2t^2-4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$;

$y'_t=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{1+t^2-1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}$;

$y''_{tt}=\frac{(t^2)'\cdot(1+t^2)-t^2\cdot(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}=\frac{2t(1+t^2)-t^2\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2t(1+t^2-t^2)}{(1+t^2)^2}=\frac{2t}{(1+t^2)^2}$;

$$\boldsymbol{y''_{xx}}=\frac{\frac{2t}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}-\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}=\frac{\frac{4t^2-2t^2+2t^4}{(1+t^2)^3}}{\frac{8t^3}{(1+t^2)^3}}=\frac{2t^2(1+t^2)}{8t^3}=\boldsymbol{\frac{1+t^2}{4t}}$$

<table>
<tr><td colspan="2">

Диференціювання неявної функції $\boldsymbol{F\big(x, y(x)\big) = 0}$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

При знаходженні похідної необхідно пам'ятати, що $\boldsymbol{y}$ **є функцією від** $\boldsymbol{x}$, тому диференціюємо її як **складну** функцію!
Знаходити похідну необхідно за правилами диференціювання та за допомогою таблиці похідних, а надалі розв'язати лінійне рівняння відносно шуканої похідної y'.
При повторному диференціюванні отримуємо вирази, які містять похідні менших порядків. Для запису відповіді необхідно підставити вже відомі вирази попередніх похідних

</td></tr>
<tr><td>

Похідна першого порядку

$$\boldsymbol{F'(x, y) = 0}$$

</td><td>

$$\cos(xy) = 3x^4 + 6y^3; \quad \Rightarrow \quad \cos(xy) - 3x^4 - 6y^3 = 0;$$
$$-\sin(xy) \cdot (1 \cdot y + x \cdot y') - 12x^3 - 18y^2 \cdot y' = 0;$$
$$-\sin(xy) \cdot y - \sin(xy) \cdot xy' - 12x^3 - 18y^2 \cdot y' = 0;$$
$$(x \sin(xy) + 18y^2) \cdot y' = -(y \sin(xy) + 12x^3);$$
$$\boldsymbol{y' = -\frac{y \sin(xy) + 12x^3}{x \sin(xy) + 18y^2}}$$

</td></tr>
<tr><td>

Похідна другого порядку

$$\boldsymbol{\big(F'(x, y)\big)' = 0}$$

</td><td>

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4xy; \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} - 4xy = 0;$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' - 4(y + x \cdot y') = 0;$$
$$y'\left(\frac{1}{2\sqrt{y}} - 4x\right) = 4y - \frac{1}{2\sqrt{x}};$$
$$\boldsymbol{y'} = \frac{4y - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}} - 4x} = \frac{\frac{4y-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1-4x}{2\sqrt{y}}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{y}(4y-1)}{\sqrt{x}(1-4x)}};$$

$$y'' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}y'(4y-1) + \sqrt{y} \cdot 4y'\right)\sqrt{x}(1-4x) - \sqrt{y}(4y-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-4x) - 4\sqrt{x}\right)}{x(1-4x)^2} =$$
$$= \frac{y'(4y-1+8y)x(1-4x) - y(4y-1)(1-4x-8x)}{x(1-4x)^2\sqrt{xy}} =$$
$$= \frac{y'x(12y-1)(1-4x) - y(4y-1)(1-12x)}{x(1-4x)^2\sqrt{xy}}$$

Підставимо замість y' вже відомий вираз:

$$\boldsymbol{y''} = \frac{\frac{\sqrt{y}(4y-1)}{\sqrt{x}(1-4x)}x(12y-1)(1-4x) - y(4y-1)(1-12x)}{x(1-4x)^2\sqrt{xy}} =$$
$$= \frac{x\sqrt{y}(4y-1)(12y-1)(1-4x) - y\sqrt{x}(1-4x)(4y-1)(1-12x)}{(1-4x)^3x^2\sqrt{y}} =$$
$$= \boldsymbol{\frac{x\sqrt{y}\big(48y^2-16y+1\big)(1-4x) - y\sqrt{x}\big(1-16x+28x^2\big)(4y-1)}{(1-4x)^3x^2\sqrt{y}}}$$

</td></tr>
</table>

Наближене обчислення за допомогою диференціалу	
Наближене обчислення функції $$\boldsymbol{f(x_0+dx)\approx f(x_0)+f'(x_0)dx}$$	Знайти наближене значення функції $y=x^2+x+\arcsin x$ при $x=0{,}51$ Маємо $x_0=0{,}5,\ \ dx=0{,}01$ Знайдемо похідну $y'=2x+1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $f(x_0)=f(0{,}5)=(0{,}5)^2+0{,}5+\arcsin 0{,}5=$ $=0{,}75+\frac{\pi}{2}=2{,}32;$ $f'(x_0)=f'(0{,}5)=2\cdot 0{,}5+1+\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}=3{,}15$ За формулою знаходимо $y(0{,}51)\approx 2{,}32+3{,}15\cdot 0{,}01=\mathbf{2,35}$

Тема «Обчислення границь за правилом Лопіталя»

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left|\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$ **Зауваження:** за необхідності правилом Лопіталя можна послідовно скористатися декілька разів (не забуваючи, якщо це можливо, спрощувати вираз) до зникнення невизначеності!	
Безпосереднє застосування правила Лопіталя	1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^5-32}{x^3-8}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x^4}{3x^2}=\frac{5\cdot 16}{3\cdot 4}=\mathbf{\frac{20}{3}};$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\frac{x^2}{2}-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{x^2}{2}-x-1}{-\sin x+x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{-\cos x+1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=\frac{1}{1}=\mathbf{1}$
Функція представлена у вигляді добутку. Перед застосуванням правила Лопіталя необхідно замінити множення діленням на обернене	1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{3}{x}\right)=\lvert\infty\cdot 0\rvert=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}=\left|\frac{0}{0}\right|=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{3}{x}\cdot 3\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=-3\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{3}{x}=-3\cdot 1=\mathbf{-3};$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}=\lvert 0\cdot\infty\rvert=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2}}=$ $=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\sin^2\frac{\pi x}{2}=\mathbf{\frac{2}{\pi}};$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\cdot e^{-5x})=\lvert\infty\cdot 0\rvert=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{5x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{5e^{5x}}=$ $=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{25e^{5x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\frac{2}{\infty}=\mathbf{0};$

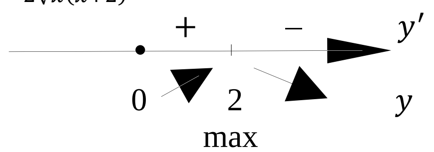
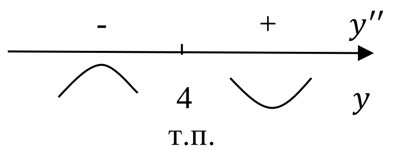
Функція представлена у вигляді різниці. Перед застосуванням правила Лопіталя необхідно привести дробі до спільного знаменника	1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lvert\infty-\infty\rvert=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{\infty}=\mathbf{0};$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lvert\infty-\infty\rvert=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\left\lvert\frac{0}{0}\right\rvert=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\left\lvert\frac{0}{0}\right\rvert=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x}=\left\lvert\frac{0}{0}\right\rvert=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{(2-x^2)\sin x+4x\cos x}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{-2x\sin x+(2-x^2)\cos x+4\cos x-4x\sin x}=\mathbf{\frac{1}{6}}$
Функція представлена у степенево-показниковому вигляді. Перед застосуванням правила Лопіталя необхідно про логарифмувати функцію. Не забувайте, що для запису відповіді, необхідно скористатися властивістю $\boldsymbol{e^{\ln A}=A}$**!**	1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\lvert\infty^0\rvert=A;$ $\ln A=\ln\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(\ln x)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}=\left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{\infty}=0;$ $\Rightarrow\quad A=e^{\ln A}=e^0=\mathbf{1};$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}x^x=\lvert 0^0\rvert=A;$ $\ln A=\ln\lim\limits_{x\to 0}x^x=\lim\limits_{x\to 0}\ln x^x=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\ln x=\lvert 0\cdot\infty\rvert=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0}x=0;$ $\Rightarrow\quad A=e^{\ln A}=e^0=\mathbf{1}$

Тема «Геометричний та механічний сенс похідної»

Рівняння дотичної $\boldsymbol{y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)}$	Записати рівняння дотичної до кривої $y=\frac{2}{3}\sqrt{x}-5$ в точці з абсцисою $x_0=9$ Знайдемо похідну $y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{3\sqrt{x}}$. Обчислимо: $y_0=y(x_0)=y(9)=\frac{2}{3}\sqrt{9}-5=-3;$ $y'(x_0)=y'(9)=\frac{1}{3\sqrt{9}}=\frac{1}{9}$ За формулою маємо $y+3=\frac{1}{9}(x-9);$ $\boldsymbol{y=\frac{1}{9}x-4}$
Рівняння нормалі $\boldsymbol{y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)}$	Записати рівняння нормалі до кривої $y=\mathrm{arctg}2x$ в точці з абсцисою $x_0=0$ Знайдемо похідну $y'=\frac{2}{1+4x^2}$ Обчислимо: $y_0=y(x_0)=y(0)=\mathrm{arctg}0=0;$ $y'(x_0)=y'(0)=\frac{2}{1+0}=2$ За формулою маємо $y-0=-\frac{1}{2}(x-0);$ $\boldsymbol{y=-\frac{x}{2}}$.

Закон руху матеріальної точки $s = s(t)$. **Швидкість:** $\boldsymbol{v = s'(t)}$; **прискорення:** $\boldsymbol{a = v' = s'(t)}$.	Закон руху матеріальної точки $$s = \frac{5}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + t - 9$$ Знайти швидкість та прискорення через $t = 5$ с $v = s' = 5t^3 + 2t^2 - 6t + 1$; $a = v' = s'' = 15t^2 + 4t - 6$; $v(5) = 5 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 - 6 \cdot 5 + 1 = \mathbf{646}$ (м/с); $a(5) = 15 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 - 6 = \mathbf{389}$ (м/с^2)

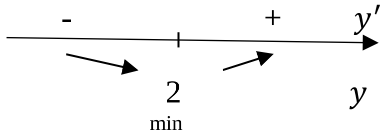
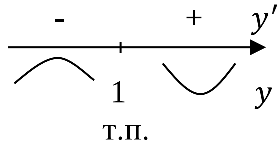
Тема «Дослідження функції»

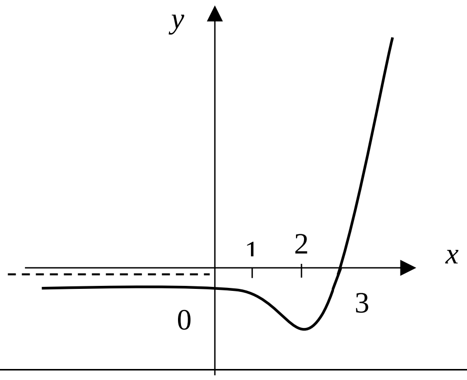
Дослідження функції на монотонність та екстремуми: 1) ОДЗ; 2) Знаходимо y'; 3) Дорівнюємо її до нуля: $y' = 0$, звідси знаходимо точки, в яких може бути екстремум (критичні точки першого порядку); 4) Наносимо на числову вісь критичні точки та точки, в яких функція не існує (ОДЗ); 5) Досліджуємо знак y' в кожному з отриманих інтервалів: «+» - функція зростає, «-» - функція спадає, якщо при переході через критичні точки y' змінює знак – це точки екстремум, причому, якщо знаки змінюються з «+» на «-» - це максимум, якщо з «-» на «+» - мінімум	Дослідити на монотонність на екстремуми функцію $y = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$ 1) ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x \in [0; \infty)$. 2) $y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+2) - \sqrt{x} \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-2x}{2\sqrt{x}(x+2)^2} = \frac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)^2}$; 3) $y' = 0$; $\frac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)^2} = 0$; $x = 2$; 4)  5) Функція зростає на інтервалі $x \in (0; 2)$, спадає $x \in (2; \infty)$ на інтервалі, в точці з абсцисою $x = 2$ – максимум
Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину: 1) ОДЗ; 2) Знаходимо y''; 3) Дорівнюємо її до нуля: $y'' = 0$, звідси знаходимо точки, в яких можуть бути точки перегину (критичні точки другого порядку); 4) Наносимо на числову вісь критичні точки та точки, в яких функція не існує (ОДЗ); 5) Досліджуємо знак y'' в кожному з отриманих інтервалів: «+» - функція угнута, «-» - функція опукла, якщо при переході через критичні точки y'' змінює знак – це точки перегину	Дослідити функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - 2x + 10$ на опуклість, угнутість та точки перегину 1) ОДЗ: $x \in R$; 2) $y' = x^2 - 8x - 2$; $y'' = 2x - 8$; 3) $y'' = 0$; $2x - 8 = 0$; $x = 4$; 4)  5) Функція угнута на інтервалі $x \in (0; 4)$, опукла - $x \in (4; \infty)$, в точці з абсцисою $x = 4$ - точка перегину функції

Асимптоти функції 1) **Вертикальні** $\boldsymbol{x = a}$ (a беремо з ОДЗ), якщо $$\lim_{x\to a} y(x) = \pm\infty.$$ 2) **Похилі** $\boldsymbol{y = kx + b}$, де $$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x};$$ $$b = \lim_{x\to\pm\infty} [y(x) - kx],$$ якщо існують скінчені границі, то існує похила асимптота 3) **Горизонтальні** $\boldsymbol{y = b}$, де $$b = \lim_{x\to\pm\infty} y(x).$$ Горизонтальна асимптота – частинний випадок похилої асимптоти, якщо $k = 0$!	Знайти асимптоти функції $y = \frac{3x^3+5x^2-2}{x^2-9}$. ОДЗ: $x^2 - 9 \neq 0$; $x \neq \pm 3$; $x = 3$: $\lim_{x\to 3} \frac{3x^3+5x^2-2}{x^2-9} = \frac{124}{0} = \infty$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x = 3}$ **– вертикальна асимптота;** $x = -3$: $\lim_{x\to -3} \frac{3x^3+5x^2-2}{x^2-9} = \frac{-38}{0} = -\infty$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x = -3}$ **– вертикальна асимптота;** Знайдемо похилу асимптоту $y = kx + b$: $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3x^3+5x^2-2}{x^2-9}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3+5x^2-2}{x^3-9x} = \mathbf{3};$ $b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{3x^3+5x^2-2}{x^2-9} - 3x\right] =$ $= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3+5x^2-2-3x^3+27x}{x^2-9} =$ $= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2+27x-2}{x^2-9} = \mathbf{5};$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{y = 3x + 5}$ **– похила асимптота**

Повна схема дослідження функції

1) **ОДЗ** 2) **Точки перетину з осями координат** (з Ox перетинається, якщо $y = 0$, а з Oy - якщо $x = 0$ 3) **Інтервали знакосталості.** Наносимо на числову вісь точки перетину з віссю Ox та точки, в яких функція не існує, та з'ясовуємо знак в кожному інтервалі 4) **Парність функції.** Якщо $y(-x) = y(x)$, то функція **парна** і її графік симетричний відносно осі Oy, а якщо $y(-x) = -y(x)$, то функція **непарна** і її графік симетричний відносно початку координат. Якщо не виконується не одна з умов, то функція **загального положення**	Провести повне дослідження функції $y = (x-3)e^{x+1}$ та побудувати графік 1) ОДЗ: $\boldsymbol{x \in R}$. 2) Ox: $y = 0$; $(x-3)e^{x+1} = 0$; $\Rightarrow$ $x = 3$; Oy: $x = 0$; $y = (0-3)e^{0+1} = -3e$ **Точки перетину** $\boldsymbol{K_1(3, 0)}$; $\boldsymbol{K_2(0, -3e)}$ 3) $-$ 3 $+$ x Функція **додатна** при $\boldsymbol{x \in (3, \infty)}$**, від'ємна** при $\boldsymbol{x \in (-\infty, 3)}$ 4) $y(-x) = (-x-3)e^{-x+1} \neq \pm y(x) \Rightarrow$ функція **загального положення**

5) **Періодичність**. Якщо виконується умова $y(x+T)=y(x)$ (де T - період функції), то функція **періодична**, якщо ні – **неперіодична**	5) $y(x+T)\neq y(x) \Rightarrow$ функція **неперіодична**
6) **Дослідження на монотонність та екстремуми**	6) $y' = 1\cdot e^{x+1} + (x-3)e^{x+1} = (x-2)e^{x+1}$; $y' = 0;\quad (x-2)e^{x+1} = 0;\quad \Rightarrow\quad x = 2$  $y(2) = (2-3)e^{2+1} = -e^{3}$ Функція **зростає** при $x\in(2,\infty)$, **спадає** при $x\in(-\infty,2)$. В точці $M(2,-e^{3})$ - **мінімум** функції
7) **Дослідження на опуклість, угнутість та точки перегину**	7) $y'' = 1\cdot e^{x+1} + (x-2)e^{x+1} = (x-1)e^{x+1}$; $y'' = 0;\quad (x-1)e^{x+1} = 0;\quad \Rightarrow\quad x = 1;$  $y(1) = (1-3)e^{1+1} = -2e^{2}$ Функція **опукла** при $x\in(1,\infty)$, **угнута** при $x\in(-\infty,1)$, в точці - **точка перегину** функції
8) **Асимптоти**	8) З того, що ОДЗ $x\in R$ прямує, що вертикальних асимптот немає. Знайдемо похилі $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-3)e^{x+1}}{x} = \left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x+1}+(x-3)e^{x+1}}{1} = \infty;$ $k = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x-3)e^{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-3}{x\cdot e^{-x-1}} = \left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert =$ $= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1\cdot e^{-x-1} - x\cdot e^{-x-1}} = \mathbf{0};$ $b = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-3)e^{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-3}{e^{-x-1}} =$ $= \left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x-1}} = \mathbf{0};$ $\boldsymbol{y=0}\quad(\boldsymbol{x\to-\infty})$ **- горизонтальна асимптота**

<table>
<tr>
<td>9) Графік функції</td>
<td>9) Побудуємо графік функції

</td>
</tr>
</table>

Тема «Граничний аналіз економічних процесів»

<table>
<tr>
<td>Граничні витрати виробництва, які характеризують приріст змінних затрат на виробництво додаткової одиниці продукції – це похідна від функції продукції, що випускається:
$$y' = C'(x)$$
Середні витрати є витратами на випуск одиниці продукції:
$$y_1 = \frac{C(x)}{x}$$</td>
<td>Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд
$y = 1{,}1x^3 + 0{,}3x^2 - 6x + 150$ (грош. одиниць).
Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їхнє значення при $x = 20$
Середні витрати:
$y_1(x) = \frac{C(x)}{x} = 1{,}1x^2 + 0{,}3x - 6 + \frac{150}{x}$;
$y_1(20) = 1{,}1 \cdot 400 + 0{,}3 \cdot 20 - 6 + \frac{150}{20} = 447{,}5$
Граничні витрати:
$y'(x) = C'(x) = 3{,}3x^2 + 0{,}6x - 6$;
$y'(20) = 3{,}3 \cdot 400 + 0{,}6 \cdot 20 - 6 = 1\,326$</td>
</tr>
<tr>
<td>Продуктивність праці – похідна від об’єму виробництва:
$$z(t) = u'(t)$$
Швидкість зміни продуктивності праці – похідна від продуктивності праці:
$$v_z = z'(t)$$
Темп зміни продуктивності праці – логарифмічна похідна від продуктивності праці:
$$T_z = \frac{z'(t)}{z(t)}$$</td>
<td>Об’єм виробництва побутової техніки деякою фірмою виражається формулою:
$u(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 5t + 1270$ (одиниць),
де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: у першому кварталі $(t = 3)$
Продуктивність праці:
$z(t) = u'(t) = 5t^2 - 3t + 5;\ z(3) = 41$ (од./міс.).
Швидкість зміни продуктивності праці:
$v_z = z'(t) = 10t - 3;\ v_z(3) = 27$ (од./міс.^{2})
Темп зміни продуктивності праці:
$T_z = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{10t-5}{5t^2-3t+5};\quad T_z(3) = \frac{27}{41}$(од./міс.)</td>
</tr>
</table>

Нехай x - національний доход, $C(x)$ - ***функція споживання*** (частина доходу, що споживається), а $S(x)$ - ***функція збереження*** (частина доходу, що зберігається), тоді $$x = C(x) + S(x)$$ $\frac{dC}{dx}$ -***гранична прихильність*** до споживання; $\frac{dS}{dx}$ - ***гранична прихильність*** до збереження: $$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1$$	Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 40 + 0{,}5x + 0{,}54x\sqrt{x}$, де x - сукупний національний доход (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 81 млрд грош. од. Національний доход складає $x = C(x) + S(x)$. Звідси функція збереження є $$S(x) = x - C(x)$$ Знайдемо граничну прихильність до споживання $$C'(x) = 0{,}5 + 0{,}54 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0{,}5 + 0{,}81\sqrt{x}$$ та її значення $C'(81) = 0{,}5 + 0{,}81 \cdot \sqrt{81} = 7{,}79$ (млрд грош. од.) Гранична прихильність до збереження $$S'(x) = 1 - C'(x) = 1 - 0{,}5 - 0{,}81\sqrt{x} = = 0{,}5 - 0{,}81\sqrt{x},$$ а її значення $S'(81) = 0{,}5 - 0{,}81\sqrt{81} = -6{,}79$ (млрд грош. од.)
Еластичність – це міра реагування однієї змінної величини на зміну другої. Еластичність функції наближено вказує, на скільки відсотків зміниться одна змінна величина в результаті зміни іншої на 1 % Еластичність функції визначають за формулою: $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'_x$ або $E_x(y) = x \cdot T_y$, де $T_y = (lny)' = \frac{1}{y} \cdot y'_x$ - ***відносна швидкість зміни (темп)*** функції	Відомі функції попиту $q = \frac{9p+15}{p+1}$ і пропозиції $s = p + 5$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якої попит та пропозиція врівноважуються; б) еластичність попиту та пропозиції а) Рівноважна ціна визначається з умови $q = s$, тобто $$\frac{9p+15}{p+1} = p + 5;$$ $$9p + 15 = p^2 + 6p + 5; \quad p^2 - 3p - 10 = 0;$$ $p_1 = -2$ (не має сенсу); $p_2 = 5$. Отже, рівноважна ціна $p = 5$ (грош.од.) б) Знайдемо еластичність за попитом $$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q'_p = \frac{p(p+1)}{9p+15} \cdot \frac{9(p+1)-(9p+15)\cdot 1}{(p+1)^2} = -\frac{6p}{(9p+15)(p+1)}$$ і за пропозицією $E_p(s) = \frac{p}{s} \cdot s'_p = \frac{p}{p+5} \cdot 1 = \frac{p}{p+5}$ Для рівноважної ціни $p = 5$: $E_p(q)\big\|_{p=5} = -\frac{30}{60\cdot 6} = -\frac{1}{12} = -0{,}08;$ $$E_p(s)\big\|_{p=5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Нехай відома ***функція витрат*** $\boldsymbol{C(x)}$, яка визначає необхідні витрати для виробництва x одиниць певного продукту ***Прибуток виробництва*** $\boldsymbol{P(x)}$ визначається як різниця між ***доходом*** $D(x)$ ***від виробництва*** x одиниць продукту і функцією витрат: $$P(x) = D(x) - C(x)$$ ***Середні витрати*** $\boldsymbol{A(x)}$ під час виробництва x одиниць продукції визначаються як $$A(x) = \frac{C(x)}{x}$$ ***Граничні витрати*** $\boldsymbol{M(x)}$ на виробництво x одиниць продукції згідно з поняттям похідної визначаються як $$M(x) = C'(x)$$ ***Оптимальним значенням*** виробництва для виробника є те значення x одиниць продукції, за якого прибуток $P(x)$ є найбільшим. Тому для визначення величини оптимального значення виробництва, необхідно розв'язати задачу про найбільше значення функції	Доход від виробництва продукції з використанням x одиниць ресурсів дорівнює $D(x) = 80\sqrt{x}$. Вартість одиниці ресурсів складає 4 умовних одиниці. Яку кількість ресурсів потрібно придбати, щоб прибуток був найбільшим? За визначенням прибуток знаходиться як $$P(x) = D(x) - C(x) = 80\sqrt{x} - 4x$$ Розв'яжемо задачу про найбільше значення функції. Для цього обчислимо похідну: $$P'(x) = \frac{40}{\sqrt{x}} - 4$$ Розв'яжемо рівняння $P'(x) = 0$, тобто, $$\frac{40}{\sqrt{x}} - 4 = \frac{40 - 4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0, \sqrt{x} = 10$$ Критична точка: $x = 100$. Після з'ясування знаків похідної в кожному з часткових інтервалів, встановимо, що в цій точці функція набуває максимуму. Отже необхідно придбати 100 одиниць ресурсів, щоб прибуток був найбільшим
	Під час виробництва монополією x одиниць товару, ціна за одиницю $p(x) = 2 + \frac{5}{3}\sqrt{x}$. Визначити оптимальне для монополії значення випуску x_0 (за умови, що весь вироблений товар реалізується), якщо функція витрат має вигляд: $C(x) = 17 - 4x + \frac{x^2}{2}$ За визначенням прибуток знаходиться як $$P(x) = D(x) - C(x) =$$ $$= 2x + \frac{5}{3}x\sqrt{x} - 17 + 4x - \frac{x^2}{2} =$$ $$6x + \frac{5}{3}x\sqrt{x} - 17 - \frac{x^2}{2}$$ Розв'яжемо задачу про найбільше значення функції. Для цього обчислимо похідну: $$P'(x) = 6 + \frac{5}{2}\sqrt{x} - x$$ Розв'яжемо рівняння $P'(x) = 0$: $6 + \frac{5}{2}\sqrt{x} - x = 0$. Щоб розв'язати це рівняння, зробимо заміну: $$\sqrt{x} = t; \quad 2t^2 - 5t - 12 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$ Зрозуміло, що нас цікавлять лише додатні значення t, тому $x = t^2 = 16$. Отже оптимальне значення випуску $\boldsymbol{x_0 = 16}$

	На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, водночас функція витрат має вигляд $C(x) = 10 + 2x + \frac{5}{2}x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p = 37$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки збільшиться величина середніх витрат? Функція середніх витрат виробництва має вигляд $$A(x) = \frac{10}{x} + 2 + \frac{5}{2}x$$ Знайдемо мінімальне значення цієї функції: $A'(x) = -\frac{10}{x^2} + \frac{5}{2}$; $A'(x) = 0$; $\frac{-20x^2+5}{2x^2} = 0$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$ Отже, $x_0 = 2$. Граничні витрати знайдемо за формулою: $$M(x) = C'(x) = 2 + 5x$$ Прибуток визначається як: $$P(x) = D(x) - C(x) = 37x - C(x)$$ Продиференціюємо цей вираз: $$P'(x) = 37 - C'(x) = 37 - M(x) = = 37 - 2 - 5x = 35 - 5x$$ Знайдемо критичну точку: $$P'(x) = 0; \quad 35 - 5x = 0; \quad x = 7$$ Отже, оптимальне значення кількості товару $x_{\text{опт.}} = 7$ З цього виходить, що необхідно збільшити виробництво на 5 одиниць ($\Delta x = x_{\text{опт.}} - x_0$) З'ясуємо середні витрати виробництво $A(2) = \frac{10+4+10}{2} = 12$; $A(7) = \frac{10+14+\frac{5}{2}\cdot 49}{7} = \frac{293}{14}$; $\Delta A = \frac{293}{14} - 12 = \frac{125}{14}$ Отже, середні витрати зміняться на $\frac{125}{14}$

Тема «Невизначений інтеграл»

Основна таблиця інтегралів			
1	$\int du = u + C$	6	$\int cosu = sinu + C$
2	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$	7	$\int sinu = -cosu + C$
2а	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$
2б	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	9	$\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$
3	$\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$	10	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$
4	$\int e^u du = e^u + C$	11	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\lvert \frac{u-a}{u+a} \right\rvert + C$
5	$\int \frac{du}{u} = ln\lvert u\rvert + C$	12	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln \left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\rvert + C$
		13	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C$
Додаткові формули			
$\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$		$\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$	
$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left\lvert \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right\rvert + C$		$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left\lvert \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$	

Основні властивості невизначених інтегралів	
$\int (u + v)dx = \int udx + \int vdx$	$\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$
$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx$	$\int f(x + b)dx = F(x + b) + C$
$\int (C_1 u + C_2 v)dx = C_1 \int udx + C_2 \int vdx$	$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$

Метод заміни змінної	
$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt =$ $= \int f(x)dx\Big\vert_{x=\varphi(t)}$	$\int \frac{xdx}{6x^2-5} = \begin{bmatrix} u = 6x^2-5 \\ du = 12xdx \\ xdx = \frac{1}{12}du \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{12}\ln\lvert u\rvert + C =$ (ф-ла 5) $= \boldsymbol{\frac{1}{12}\ln\lvert 6x^2-5\rvert + C}$
	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}arcsin^2 3x} = \begin{bmatrix} u = arcsin3x \\ du = \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \\ \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3}du \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{3u} + C =$ (ф-ла 2б) $= \boldsymbol{-\frac{1}{3arcsin3x} + C}$
	$\int \frac{e^{\operatorname{ctg} 7x}}{\sin^2 7x}dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{ctg} 7x \\ du = -\frac{7dx}{\sin^2 7x} \\ \frac{dx}{\sin^2 7x} = -\frac{1}{7}du \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\int e^u du = -\frac{1}{7}e^u + C =$ (ф-ла 4) $= \boldsymbol{-\frac{1}{7}e^{\operatorname{ctg} 7x} + C}$
	$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^2 x+5}} = \begin{bmatrix} u = \cos^2 x + 5 \\ du = 2\cos x \sin x\, dx = \sin 2x\, dx \\ \sin 2x\, dx = du \end{bmatrix} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} =$ (ф-ла 2а) $= 2\sqrt{u} + C = \boldsymbol{2\sqrt{\cos^2 x + 5} + C}$
	$\int \frac{dx}{(5x+3)\ln^4(5x+3)} = \begin{bmatrix} u = \ln(5x+3) \\ du = \frac{5dx}{5x+3} \\ \frac{dx}{5x+3} = \frac{1}{5}du \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u^4} = \frac{1}{5}\int u^{-4}du =$ (ф − ла 2) $= \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{-3}}{(-3)} + C = -\frac{1}{15u^3} + C = \boldsymbol{-\frac{1}{15\ln^3(5x+3)} + C}$
	$\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{16-e^{6x}}} = \begin{bmatrix} u = e^{3x} \\ du = 3e^{3x}dx \\ e^{3x}dx = \frac{1}{3}du \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} =$ (ф − ла 13) $= \frac{1}{3}\arcsin\frac{u}{4} + C = \boldsymbol{\frac{1}{3}\arcsin\frac{e^{3x}}{4} + C}$

Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен

Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Метод: виділення повного квадрату

Допоміжні формули: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Інтеграли зводяться до формул: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \to \left[\begin{matrix}(10)\\(11)\end{matrix}\right.$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$ $[x^2 + 6x + 13 = (x^2 + 6x + 9) - 9 + 13 = (x+3)^2 + 4;$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2;$ $a^2 = x^2; \quad 2ab = 6x;$ $\boldsymbol{a = x}; \quad 2xb = 6x; \quad \boldsymbol{b = 3}]$ $\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = [10] = \boldsymbol{\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{2} + C}$ Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+8x-20}$ $[x^2 + 8x - 20 = (x^2 + 8x + 16) - 16 - 20 = (x+4)^2 - 36;$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2;$ $a^2 = x^2; \quad 2ab = 8x;$ $\boldsymbol{a = x}; \quad 2xb = 8x; \quad \boldsymbol{b = 4}]$ $\int \frac{dx}{x^2+8x-20} = \int \frac{dx}{(x+4)^2-36} = [11] = \frac{1}{2\cdot 6}\ln\left\|\frac{x+4-6}{x+4+6}\right\| + C =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{12}\ln\left\|\frac{x+2}{x+10}\right\| + C}$
Інтеграли зводяться до формул: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \to \left[\begin{matrix}(12)\\(13)\end{matrix}\right.$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+3}}$ $[x^2 - 10x + 3 = (x^2 - 10x + 25) - 25 + 3 = (x-5)^2 - 22;$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2;$ $a^2 = x^2; \quad 2ab = 10x;$ $\boldsymbol{a = x}; \quad 2xb = 10x; \quad \boldsymbol{b = 5}]$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-5)^2-22}} = [12] =$ $= \boldsymbol{\ln\left\|x - 5 + \sqrt{(x-5)^2 - 22}\right\| + C}$ Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{7+2x-x^2}}$ $[7 + 2x - x^2 = -(x^2 - 2x - 7);$ $x^2 - 2x + 7 = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 7 = (x-1)^2 - 8;$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2;$ $a^2 = x^2; \quad 2ab = 2x;$ $\boldsymbol{a = x}; \quad 2xb = 2x;$ $\boldsymbol{b = 1}$ $7 + 2x - x^2 = 8 - (x-1)^2]$ $\int \frac{dx}{\sqrt{7+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(x-1)^2}} = [13] = \boldsymbol{\arcsin\frac{x-1}{2\sqrt{2}} + C}$

Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ *або* $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Метод: **виділення диференціала знаменника (або підкореневого виразу знаменника) та представлення інтегралу у вигляді суми двох інтегралів**

Інтеграли зводяться до формул: $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ $\swarrow \searrow$ $\int \frac{du}{u}$ $(10)(11)$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{(x-5)dx}{x^2+12x-3}$. $[d(x^2+12x-3)=(2x+12)dx]$; $\frac{1}{2}\int \frac{2x-10}{x^2+12x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+12)-12-10}{x^2+12x-3}dx =$ $= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+12)dx}{x^2+12x-3} - \frac{22}{2}\int \frac{dx}{x^2+12x-3} = I_1 + I_2$. $I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+12)dx}{x^2+12x-3} = \begin{bmatrix} u = x^2+12x-3 \\ du=(2x+12)dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} =$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert u \rvert + C = \boldsymbol{\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+12x-3 \rvert + C}$; $I_2 = -11\int \frac{dx}{x^2+12x-3} = -11\int \frac{dx}{(x+6)^2-39} =$ $\boldsymbol{= -\frac{11}{2\sqrt{39}}\ln\left\lvert \frac{x+6-\sqrt{39}}{x+6+\sqrt{39}} \right\rvert + C}$; $I = I_1 + I_2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\ln\lvert x^2+12x-3 \rvert - \frac{11}{2\sqrt{39}}\ln\left\lvert \frac{x+6-\sqrt{39}}{x+6+\sqrt{39}} \right\rvert + C}$
Інтеграли зводяться до формул: $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $\swarrow \searrow$ $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$ $(12)(13)$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ $[d(x^2-4x+5)=(2x-4)dx]$; $3\int \frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{2}{3}}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)+4+\frac{2}{3}}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx =$ $= \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{14}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = I_1 + I_2$ $I_1 = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \begin{bmatrix} u = x^2-4x+5 \\ du=(2x-4)dx \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$ $= \frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{u} + C = \boldsymbol{3\sqrt{x^2-4x+5} + C}$; $I_2 = 7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} =$ $\boldsymbol{= 7\ln\lvert x+2+\sqrt{x^2-4x+5} \rvert + C}$; $I = I_1 + I_2 =$ $\boldsymbol{= 3\sqrt{x^2-4x+5} + 7\ln\lvert x+2+\sqrt{x^2-4x+5} \rvert + C}$

Інтегрування раціональних дробів

Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та різні $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \cdots + \frac{C}{x-a_n}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{6x^2-15x-6}{(x-1)(x^2+2x-8)} dx$ Розкладемо знаменник на множники $Q(x) = (x-1)(x^2+2x-8) = (x-1)(x+4)(x-2);$ $\frac{6x^2-15x-6}{(x+1)(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-2};$ приведемо дробі до спільного знаменника $6x^2 - 15x - 6 = A(x+4)(x-2) + B(x-1)(x-2) + = C(x-1)(x+4);$ $x = 1 \|\quad 6 - 15 - 6 = -5A; \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{A = 3;}$ $x = -4 \|\quad 96 + 60 - 6 = 30B; \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{B = 5;}$ $x = 2 \|\quad 24 - 30 - 6 = 6C; \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{C = -2;}$ $\int \frac{6x^2-15x-6}{(x-1)(x+4)(x-2)} dx = 3\int \frac{dx}{x-1} + 5\int \frac{dx}{x+4} - 2\int \frac{dx}{x-2} =$ $\boldsymbol{= 3\ln\|x-1\| + 5\ln\|x+4\| - 2\ln\|x-2\| + C}$
Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та серед яких є кратні $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{B}{(x-a_1)^{\alpha_1 - 1}} +$ $+ \frac{C}{(x-a_1)^{\alpha_1 - 2}} + \cdots + \frac{D}{x-a_1} + \cdots +$ $+ \frac{E}{x-a_n}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{2x^2-6x+12}{x^3-4x^2+4x} dx$ Розкладемо знаменник на множники $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2;$ $\frac{2x^2-6x+12}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2};$ приведемо дробі до спільного знаменника $2x^2 - 6x + 12 = A(x-2)^2 + Bx + Cx(x-2);$ $x = 0 \|\quad 12 = 4A; \qquad \Rightarrow \ \boldsymbol{A = 3;}$ $x = 2 \|\quad 8 - 12 + 12 = 2B; \ \Rightarrow \ \boldsymbol{B = 4}$ Підставимо в отриману рівність будь-яке значення x, наприклад $x = 1$: $2 - 6 + 12 = A + B - C$; нам вже відомі значення A і B: $8 = 3 + 4 - C; \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C = -1}$ $\int \frac{2x^2-6x+12}{x(x-2)^2} dx = 3\int \frac{dx}{x} + 4\int \frac{dx}{(x-2)^2} - \int \frac{dx}{x-2} =$ $\boldsymbol{= 3\ln\|x\| - \frac{4}{x-2} - \ln\|x-2\| + C}$
Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника якого є комплексні $Q(x) = (x-x_1) \ldots (x^2 + a^2)$ $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{Bx+C}{(x^2+a^2)}$ або $Q(x) = (x-x_1) \ldots (ax^2 + bx + c)$ $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \cdots +$ $+ \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{6x^2+x+6}{(x-2)(x^2+4)} dx.$ $\frac{6x^2+x+6}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4},$ приведемо дробі до спільного знаменника $6x^2 + x + 6 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-2)$ Підставимо єдиний відомий нам корінь $x = 2$: $6 \cdot 2^2 + 2 + 6 = A(2^2 + 4) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A = 4;}$ інші коефіцієнти знайдемо, якщо розкриємо дужки, порівняємо коефіцієнти при однакових степенях x та підставимо відоме нам значення коефіцієнта A $6x^2 + x + 6 = Ax^2 + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C;$ $\begin{array}{l\|l} x^2 & 6 = A + B \qquad\qquad \boldsymbol{B = 2} \\ x^1 & 1 = -2B + C \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C = 5} \\ x^0 & 6 = 4A - 2C \end{array}$ $\int \frac{6x^2+x+6}{(x-2)(x^2+4)} dx = 4\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{2x+5}{x^2+4} dx = 4\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{2x dx}{x^2+4} +$ $+5\int \frac{dx}{x^2+4} = \boldsymbol{4\ln\|x-2\| + \ln\|x^2+4\| + \frac{5}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2} + C}$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{5x^2+x+4}{x^3-1}dx$

Розкладемо знаменник на множники
$Q(x) = (x-1)(x^2+x+1)$.
$\frac{5x^2+x+4}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$;
приведемо дробі до спільного знаменника
$5x^2+x+4 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$;
Підставимо єдиний відомий нам корінь $x = 1$:
$5+1+4 = A(1+1+1); \quad \Rightarrow \quad A = 3$;
інші коефіцієнти знайдемо, якщо розкриємо дужки, порівняємо коефіцієнти при однакових степенях x та підставимо відоме нам значення коефіцієнта A
$5x^2+x+4 = Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C$;
$\begin{array}{l|l} x^2 & 5 = A+B \\ x^1 & 1 = -B+C \\ x^0 & 4 = A-C \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{B = 2} \\ \boldsymbol{C = -1} \end{array}$

$\int \frac{5x^2+x+4}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = 3\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{2x-1}{x^2+x+1}dx = 3\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{(2x+1)-1-1}{x^2+x+1}dx = 3\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - 2\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$
$\boldsymbol{= 3\ln|x-1| + \ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C}$
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Інтегрування частинами $\boxed{\boldsymbol{\int udv = uv - \int vdu}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
$\int P_n(x)\cdot \begin{matrix} sin(ax+b) \\ cos(ax+b) \\ tg(ax+b) \\ ctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx$

$\left(u = P_n(x)\right)$
</td>
<td>
Знайти невизначений інтеграл $\int(3x-5)\sin 7x\, dx$

$\int(3x-5)\sin 7x\, dx = \begin{bmatrix} u = 3x-5 & du = 3\,dx \\ dv = \sin 7x\, dx & v = -\frac{1}{7}\cos 7x \end{bmatrix} =$
$= -\frac{1}{7}(3x-5)\cos 7x + \frac{1}{7}\cdot 3\int\cos 7x\, dx =$
$\boldsymbol{= -\frac{1}{7}(3x-5)\cos 7x + \frac{3}{49}\sin 7x + C}$
</td>
</tr>
<tr>
<td>
$\int P_n(x)a^x dx$

$\left(u = P_n(x)\right)$
</td>
<td>
Знайти невизначений інтеграл $\int(3x^2-11)e^{6x}dx$

$\int(3x^2-11)e^{5x}dx = \begin{bmatrix} u = 3x^2-11 & du = 6xdx \\ dv = e^{5x}dx & v = \frac{1}{5}e^{5x}dx \end{bmatrix} =$
$= \frac{1}{5}(3x^2-11)e^{5x} - \frac{6}{5}\int x\, e^{6x}dx =$
$= \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{5x}dx & v = \frac{1}{5}e^{5x}dx \end{bmatrix} = \frac{1}{5}(3x^2-11)e^{5x} -$
$-\frac{6}{5}\left(\frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{6x}dx\right) = \boldsymbol{\frac{1}{5}(3x^2-11)e^{5x} - \frac{6}{25}xe^{5x}} +$
$\boldsymbol{+ \frac{6}{125}e^{5x} + C}$
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>$$\int \log_a(ax+b)\,dx$$ $$(u=\log_a(ax+b))$$</td><td>Знайти невизначений інтеграл $\int \ln(4x+3)\,dx$
$\int \ln(4x+3)\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln(4x+3) & du=\frac{4}{4x+3}dx \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix} =$
$= x\ln(4x+3) - \int \frac{4x}{4x+3}dx = x\ln(4x+3) -$
$- \int \frac{(4x+3)-3}{4x+3}dx = \ x\ln(4x+3) - \int dx + 3\int \frac{dx}{4x+3} =$
$= \ \boldsymbol{x\ln(4x+3) - x + \frac{3}{4}\ln(4x+3) + C}$</td></tr>
<tr><td>$$\int P_n(x)\log_a(ax+b)dx$$ $$(u=\log_a(ax+b))$$</td><td>Знайти невизначений інтеграл $\int x^3 \ln x\,dx$
$\int x^3 \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x^3dx & v=\frac{1}{4}x^4 \end{bmatrix} =$
$= \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^4 \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx =$
$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C}$</td></tr>
<tr><td>$$\int \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx$$ $$\left(u=\begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix}\right)$$</td><td>Знайти невизначений інтеграл $\int \arcsin 6x\,dx$
$\int \arcsin 6x\,dx = \begin{bmatrix} u=\arcsin 6x & du=\frac{6}{\sqrt{36-x^2}}dx \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix} =$
$= x\arcsin 6x - \frac{6}{(-2)}\int \frac{-2\cdot x\,dx}{\sqrt{36-x^2}} = x\arcsin 6x + 3\int \frac{d(36-x^2)}{\sqrt{36-x^2}} =$
$= \boldsymbol{x\arcsin 6x + 6\sqrt{36-x^2} + C}$</td></tr>
<tr><td>$$\int P_n(x)\cdot \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx$$ $$\left(u=\begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix}\right)$$</td><td>Знайти невизначений інтеграл $\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx$
$\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx = \begin{bmatrix} u=\mathrm{arctg}\,2x & du=\frac{2dx}{x^2+4} \\ dv=xdx & v=\frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} =$
$= \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\,2x - 2\cdot\frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\,2x -$
$- \int \frac{(x^2+4)-4}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\,2x - \int dx + 4\int \frac{dx}{x^2+4} =$
$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\,2x - x + 2\,\mathrm{arctg}\,2x + C}$</td></tr>
<tr><td>та багато інших…</td><td>Знайти невизначений інтеграл $\int e^{5x}\cos 3x\,dx$
$\int e^{5x}\cos 3x\,dx = \begin{bmatrix} u=e^{5x} & du=5e^{5x}dx \\ dv=\cos 3x\,dx & v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{bmatrix} =$
$= \frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x - \frac{5}{3}\int e^{5x}\sin 3x\,dx =$
$= \begin{bmatrix} u=e^{5x} & du=5e^{5x}dx \\ dv=\sin 3x\,dx & v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix} = \frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x -$
$- \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{5x}\cos 3x + \frac{5}{3}\int e^{5x}\cos 3x\,dx\right)$</td></tr>
</table>

	Позначимо $I=\int e^{5x}\cos 3x\,dx$, отримаємо лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу. Розв'яжемо його, та дістанемо відповідь: $I=\frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x+\frac{5}{9}e^{5x}\cos 3x-\frac{5}{9}I;$ $I+\frac{5}{9}I=\frac{1}{9}(3\,e^{5x}\sin 3x+5\,e^{5x}\cos 3x);$ $I=\boldsymbol{\frac{1}{14}\left(3\,e^{5x}\sin 3x+5\,e^{5x}\cos 3x\right)+C}$
Інтегрування деяких класів тригонометричних функцій	
Інтеграли типу $\int \boldsymbol{R(sinx,cosx)dx}$ знаходяться за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $\boldsymbol{u=tg\frac{x}{2}};\quad sinx=\frac{2u}{1+u^2};$ $cosx=\frac{1-u^2}{1+u^2};\quad dx=\frac{2du}{1+u^2}$	Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{3\cos x+4\sin x-7}$ $\int\frac{dx}{3\cos x+4\sin x-7}=\begin{bmatrix} u=\mathrm{tg}\frac{x}{2} & \sin x=\frac{2u}{1+u^2}\\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2} & dx=\frac{2du}{1+u^2}\end{bmatrix}=$ $=\int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}+4\cdot\frac{2u}{1+u^2}-7}=2\int\frac{du}{3-3u^2+8u-7-7u^2}$ $=2\int\frac{du}{-10u^2+8u-4}=-\frac{1}{5}\int\frac{du}{u^2-\frac{4}{5}u-\frac{2}{5}}=$ $=-\frac{1}{5}\int\frac{du}{\left(u-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{14}{25}}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{14}}{5}}\ln\left\|\frac{u-\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{14}}{5}}{u-\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{14}}{5}}\right\|+C=$ $=\boldsymbol{-\frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\left\|\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2-\sqrt{14}}{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2+\sqrt{14}}\right\|+C}$
Інтеграли типу $\int \boldsymbol{R(sinx)cosxdx}$ знаходяться за допомогою підстановки $u=sinx\quad du=cosxdx$	Знайти невизначений інтеграл $\int\sin^3 4x\cos 4x\,dx$ $\int\sin^3 4x\cos 4x\,dx=\begin{bmatrix} u=\sin 4x\\ du=4\cos 4x\,dx\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\int u^3du=$ $=\frac{1}{4}\cdot\frac{u^4}{4}+C=\boldsymbol{\frac{1}{16}\sin^4 4x+C}$
Інтеграли типу $\int \boldsymbol{R(cosx)sinxdx}$ знаходяться за допомогою підстановки $u=cosx\quad du=-sinxdx$	Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{\sin 5x\,dx}{\cos^2 5x-9}$ $\int\frac{\sin 5x\,dx}{\cos^2 5x-9}=\begin{bmatrix} u=\cos 5x\\ du=-5\sin 5x\,dx\end{bmatrix}=-\frac{1}{5}\int\frac{du}{u^2-9}=$ $=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left\|\frac{u-3}{u+3}\right\|+C=\boldsymbol{-\frac{1}{30}\ln\left\|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right\|+C}$

Інтеграли типу $\int R(tgx)dx$ знаходяться за допомогою підстановки $u = tgx \qquad dx = \frac{du}{1+u^2}$ (якщо підінтегральна функція типу $R(sinx, cosx)$, але і $sinx$ і $cosx$ знаходяться у парних степенях використовують ту ж саму підстановку) $sin^2x = \frac{u^2}{1+u^2} \quad cos^2x = \frac{1}{1+u^2}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \operatorname{tg}^4 7x\,dx$ $\int \operatorname{tg}^4 7x\,dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{tg} 7x \\ dx = \frac{1}{7}\frac{du}{u^2+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\int \frac{u^4du}{u^2+1} =$ $= \frac{1}{7}\int \left(u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1}\right)du = \frac{1}{7}\left(\frac{u^3}{3} - u + \operatorname{arctg} u\right) + C =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{21}\operatorname{tg}^3 7x - \frac{1}{7}\operatorname{tg} 7x + x + C}$ Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\sin 2x - 2\cos^2 x}$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\sin 2x - 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cdot 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x} =$ $= \begin{bmatrix} u = \operatorname{tg} x & dx = \frac{du}{u^2+1} \\ \sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} & \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{bmatrix} =$ $= \int \frac{\frac{du}{u^2+1}}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2 + 10\cdot\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} - 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2} =$ $= \int \frac{du}{u^2+10u-2} = \int \frac{du}{(u+5)^2-27} = \frac{1}{2\cdot 3\sqrt{3}}\ln\left\|\frac{u+5-3\sqrt{3}}{u+5+3\sqrt{3}}\right\| + C =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left\|\frac{\operatorname{tg} x+5-3\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x+5+3\sqrt{3}}\right\| + C}$
Інтегралі типу $\int sin^m x\, cos^n x dx$ 1) m або n - непарне число: - якщо m непарне число, використовуємо заміну $\boldsymbol{u = cosx}$ $\boldsymbol{1 - u^2 = sin^2x}$ $\boldsymbol{du = -sinxdx}$ - якщо n непарне число, використовуємо заміну $\boldsymbol{u = sinx}$ $\boldsymbol{1 - u^2 = cos^2x}$ $\boldsymbol{du = cosxdx}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^7 2x\cos^4 2x\,dx$ $\int \sin^7 2x\cos^4 2x\,dx = \int \cos^4 2x\sin^6 2x\sin 2x\,dx =$ $= \begin{bmatrix} u = \cos 2x \\ du = -2\sin 2x dx \\ \sin^6 2x = (\sin^2 2x)^3 = (1-u^2)^3 \end{bmatrix} =$ $= -\frac{1}{2}\int u^4(1-u^2)^3du =$ $= -\frac{1}{2}\int (u^4 - 3u^6 + 3u^8 - u^{10})du =$ $= -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^5}{5} + \frac{3}{2}\cdot\frac{u^7}{7} - \frac{3}{2}\cdot\frac{u^9}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{11}}{11} + C =$ $= \boldsymbol{-\frac{1}{10}\cos^5 2x + \frac{3}{14}\cos^7 2x - \frac{1}{6}\cos^9 2x + \frac{1}{22}\cos^{11} 2x + C}$
2) m і n - парні числа користуємося формулами зниження степені для тригонометричних функцій $\boldsymbol{sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)};$ $\boldsymbol{cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)}$	Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^4 3x\cos^2 3x\,dx$. $\int \sin^4 3x\cos^2 3x\,dx = \begin{bmatrix} \cos^2 3x = \frac{1}{2}(1+\cos 6x) \\ \sin^4 3x = \left(\frac{1}{2}(1-\cos 6x)\right)^2 \end{bmatrix} =$ $= \frac{1}{8}\int(1 - 2\cos 6x + \cos^2 6x)\,(1+\cos 6x)dx =$ $= \frac{1}{8}\int(1 - 2\cos 6x + \cos^2 6x + \cos 6x - 2\cos^2 6x +$ $+ \cos^3 6x)dx =$ $= \frac{1}{8}\int(1 - \cos 6x - \cos^2 6x + \cos^3 6x)dx =$ $= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int\cos 6x\,dx - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int(1+\cos 12x)dx +$ $+ \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}\int(1-\sin^2 6x)\,d(\sin 6x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x -$ $- \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{12}\sin 12x + \frac{1}{48}\sin 6x - \frac{1}{48}\cdot\frac{\sin^3 6x}{3} + C =$ $= \boldsymbol{\frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\sin 12x - \frac{1}{144}\sin^3 6x + C}$

Інтеграли типу $$\int \boldsymbol{sin\alpha x\ cos\beta x\ dx},$$ $$\int \boldsymbol{sin\alpha x\ sin\beta x\ dx},$$ $$\int \boldsymbol{cos\alpha x\ cos\beta x\ dx}$$ обчислюються за формулами перетворення добутку у суму: $sin\alpha x\ cos\beta x =$ $= \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta)x + sin(\alpha-\beta)x];$ $sin\alpha x\ sin\beta x =$ $= \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta)x - cos(\alpha+\beta)x];$ $cos\alpha x\ cos\beta x =$ $= \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta)x + cos(\alpha+\beta)x]$	Знайти невизначений інтеграл $\int \sin 7x \cos 3x\, dx$ $\int \sin 7x \cos 3x\, dx =$ $= \frac{1}{2}\int (\sin(7x+3x) + \sin(7x-3x))\, dx =$ $= \frac{1}{2}\int (\sin 10x + \sin 4x)\, dx =$ $= \boldsymbol{-\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{8}\cos 4x + C}$
Інтегрування деяких ірраціональних виразів	
Інтеграли типу $\boldsymbol{\int R\left(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}, \dots, \sqrt[k]{ax+b}\right) dx}$ необхідна підстановка $ax+b = u^p$, де p - найменше спільне кратне чисел $m, n, \dots k$	Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}+4}$ $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}+4} = \begin{bmatrix} x+3 = u^2 \\ dx = 2udu \end{bmatrix} = \int \frac{(u^2-3)2udu}{u+4} = 2\int \frac{u^3-6u}{u+4} du =$ $= 2\int \left(u^2 - 4u + 10 - \frac{30}{u+4}\right) du = 2\frac{u^3}{3} - 8\frac{u^2}{2} + 20u -$ $-60\ln\lvert u+4\rvert + C = \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} - 4(x+3) +}$ $\boldsymbol{+20\sqrt{x+3} - 60\ln\left\lvert\sqrt{x+3}+4\right\rvert + C}$ Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-5}+3\sqrt[4]{2x-5}}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-5}+3\sqrt[4]{2x-5}} = \begin{bmatrix} 2x-5 = u^4 \\ 2dx = 4u^3du \\ dx = 2u^3du \end{bmatrix} = \int \frac{2u^3du}{u^2+3u} =$ $= 2\int \frac{u^2du}{u+3} = 2\int \left(u - 3 + \frac{9}{u+3}\right) du =$ $= 2\frac{u^2}{2} - 6u + 18\ln\lvert u+3\rvert + C =$ $= \boldsymbol{\sqrt{2x-5} - 6\sqrt[4]{2x-5} + 18\ln\left\lvert\sqrt[4]{2x-5}+3\right\rvert + C}$
Інтеграли типу а) $\boldsymbol{\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx}$ Підстановка $x = a\ sint;$ $\sqrt{a^2-x^2} = a\ cost;$ $dx = a\ costdt.$	Знайти невизначений інтеграл $\int x^4\sqrt{4-x^2}dx$ $\int x^4\sqrt{4-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = 2\sin t \\ \sqrt{4-x^2} = 2\cos t \\ dx = 2\cos t\, dt \end{bmatrix} =$ $= \int (2\sin t)^4\, 2\cos t\, 2\cos t\, dt = 64\int \sin^4 t \cos^2 t\, dt =$ $= 64\int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\right)^2 \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt =$

	$= 8\int(1-2\cos 2t+\cos^2 2t)\,(1+\cos 2t)dt =$ $= 8\int(1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t)\,dt =$ $= 8\int dt - 8\int \cos 2t\,dt - 4\int(1+\cos 4t)dt +$ $+4\int(1-\sin^2 2t)\,d(\sin 2t) = 8t - 4\sin 2t - 4t -$ $-\sin 4t + 4\sin 2t - 4\frac{\sin^3 2t}{3} + C =$ $= \boldsymbol{4t - \sin 4t - \frac{4}{3}\sin^3 2t + C,}$ **де** $\boldsymbol{t = \arcsin\frac{x}{2}}$ Або перепишемо остаточний вираз як $4t - 4\sin t\cos t(1-2\sin^2 t) - \frac{4}{3}(2\sin t\cos t)^3 + C =$ $= 4\arcsin\frac{x}{2} - 4\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\left(1-2\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) - \frac{4}{3}\left(2\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^3 + C$ $= \boldsymbol{4\arcsin\frac{x}{2} - x\sqrt{4-x^2}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{6}x^3\sqrt{(4-x^2)^3} + C}$
б) $\int \boldsymbol{R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx}$ Підстановка $x = \frac{a}{sint};$ $\sqrt{x^2-a^2} = a\ tgt;$ $dx = -\frac{acost}{sin^2t}dt$	Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$ $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \left[\begin{array}{c} x = \frac{3}{\sin t} \\ \sqrt{x^2-9} = 3\frac{\sin t}{\cos t} = 3\,\mathrm{tg}\,t \\ dx = -\frac{3\cos t}{\sin^2 t}dt \end{array}\right] = \int\frac{-\frac{3\cos t}{\sin^2 t}dt}{\left(\frac{3}{\sin t}\right)^2\cdot 3\frac{\sin t}{\cos t}} =$ $= -\frac{1}{9}\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = -\frac{1}{9}\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt = -\frac{1}{9}\int\frac{dt}{\sin t} +$ $+\frac{1}{9}\int\sin t\,dt = \boldsymbol{-\frac{1}{9}\ln\left\|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right\| - \frac{1}{9}\cos t + C},$ **де** $\boldsymbol{t = \arcsin\frac{3}{x}}$
в) $\int \boldsymbol{R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx}$ Підстановка $x = a\ tgt;$ $\sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{cost};$ $dx = \frac{a\ dt}{cos^2t}$	Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{\sqrt{x^2+16}}{x^3}dx$ $\int\frac{\sqrt{x^2+16}}{x^3}dx = \left[\begin{array}{c} x = 4\,\mathrm{tg}\,t = 4\frac{\sin t}{\cos t} \\ \sqrt{x^2+16} = \frac{4}{\cos t} \\ dx = \frac{4dt}{\cos^2 t} \end{array}\right] = \int\frac{\frac{4}{\cos t}\cdot\frac{4dt}{\cos^2 t}}{\left(4\frac{\sin t}{\cos t}\right)^3} =$ $= \frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sin^3 t} = \left[\begin{array}{c} z = \mathrm{tg}\frac{t}{2} \\ \sin t = \frac{2z}{1+z^2} \\ dt = \frac{2dz}{1+z^2} \end{array}\right] = \frac{1}{4}\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^3} = \frac{1}{16}\int\frac{\left(1+z^2\right)^2}{z^3}dz =$ $= \frac{1}{16}\int\frac{1+2z^2+z^4}{z^3}dz = \frac{1}{16}\int\frac{dz}{z^3} + \frac{1}{8}\int\frac{dz}{z} + \frac{1}{16}\int z dz =$ $= -\frac{1}{32z^2} + \frac{1}{8}\ln\|z\| + \frac{z^2}{32} + C =$ $= \boldsymbol{-\frac{1}{32\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right)^2} + \frac{1}{8}\ln\left\|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right\| + \frac{\left(z\,\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right)^2}{32} + C}$, **де** $\boldsymbol{t = \mathrm{arctg}\frac{x}{4}}$

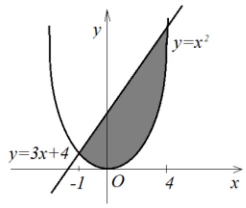
Тема «Визначений інтеграл»

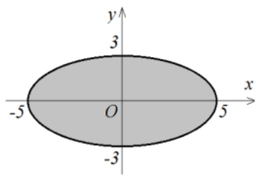
<table>
<tr><th colspan="2">Основні властивості визначеного інтегралу</th></tr>
<tr><td>Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі інтегралів</td><td>$\int_a^b \big(u(x)+v(x)+\cdots+w(x)\big)dx =$
$= \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx + \cdots + \int_a^b w(x)dx$</td></tr>
<tr><td>Постійний множник можна виносити за знак визначеного інтегралу</td><td>$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>При перестановці границь інтегрування визначеного інтегралу знак визначеного інтегралу змінюється на протилежний</td><td>$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>При розбитті інтервалу інтегрування на частини, визначений інтеграл дорівнює сумі інтегралів по кожній з частин</td><td>$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>Якщо підінтегральна функція в інтервалі інтегрування не змінює знак, то визначений інтеграл є числом того ж знаку, що й підінтегральна функція</td><td>Якщо $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$,
і, навпаки,
якщо $f(x) \leq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.</td></tr>
<tr><td>Оцінити величину визначеного інтегралу можна за формулою</td><td>$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Обчислення визначених інтегралів</th></tr>
<tr><td>Формула Ньютона - Лейбниця</td><td>$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Безпосереднє обчислення визначених інтегралів</td><td>Обчислити визначений інтеграл
$\int_{-1}^0 (4x^3+5e^x-7)dx = \left(4\frac{x^4}{4}+5e^x-7x\right)\Big|_{-1}^0 =$
$= 5 - \left(1+\frac{5}{e}+7\right) = \boldsymbol{\frac{5}{e}-3}$</td></tr>
<tr><td>Обчислити визначений інтеграл
$\int_2^5 \frac{dx}{x^2-4x+5} = \int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \mathrm{arctg}(x-2)\Big|_2^5 =$
$= \mathrm{arctg}3 - \mathrm{arctg}0 = \boldsymbol{\mathrm{arctg}3}$</td></tr>
</table>

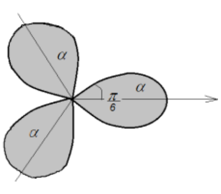
Заміна змінної у визначеному інтегралі $$\int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{f(\varphi(u))\,\varphi'(u)dt} =$$ $$= \boldsymbol{F(\varphi(\alpha)) - F(\varphi(\beta))} =$$ $$= \boldsymbol{F(b) - F(a)}$$	Обчислити визначений інтеграл $$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 1}} = \begin{bmatrix} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ u_{\text{н}} = \ln e = 1 \\ u_{\text{в}} = \ln e^2 = 2 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} =$$ $$= \ln\left\|u + \sqrt{u^2-1}\right\|\Big|_1^2 = \ln\|2-\sqrt{3}\| - \ln 1 = \mathbf{ln\|2-\sqrt{3}\|}$$
	Обчислити визначений інтеграл $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \begin{bmatrix} z = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \\ dx = \frac{2dz}{1+z^2} \\ u_{\text{н}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \\ u_{\text{в}} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{bmatrix} = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}} =$$ $$= \int_{-1}^{1} \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2+1-z^2}{1+z^2}} = \int_{-1}^{1} dz = z\Big|_{-1}^{1} = 1 + 1 = \mathbf{2}$$
	Обчислити визначений інтеграл $$\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx = \begin{bmatrix} 1 - x = u^3 \\ x = 1 - u^3 \\ dx = -3u^2du \\ \text{н:}\ 1 - 1 = u^3;\ u_{\text{н}} = 0 \\ \text{в:}\ 1 - 9 = u^3;\ u_{\text{в}} = -2 \end{bmatrix} =$$ $$= -3\int_0^{-2} (1-u^3)\,u \cdot u^2du = 3\int_{-2}^{0} (u^3 - u^6)du =$$ $$= 3\left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^7}{7}\right)\Big|_{-2}^{0} = 0 - 3\left(4 - \frac{128}{7}\right) = \mathbf{\frac{300}{7}}$$
Інтегрування частинами визначених інтегралів $$\int_a^b \boldsymbol{u \cdot dv = uv}\Big|_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} - \int_a^b \boldsymbol{v\,du}$$	Обчислити визначений інтеграл $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+4)\sin 3x\,dx = \begin{bmatrix} u = x + 4 & du = dx \\ dv = \sin 3x\,dx & v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix} =$$ $$= -\frac{1}{3}(x+4)\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3x\,dx =$$ $$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}+4\right)\cos\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3}(0+4)\cos 0 + \frac{1}{9}\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$ $$= \frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{\pi}{4}+4\right) + \frac{4}{3} + \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{9}\sin 0 =$$ $$= \frac{\sqrt{2}\pi}{24} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}\pi}{24} + \frac{11\sqrt{2}}{18} + \frac{4}{3} = \mathbf{\frac{3\sqrt{2}\pi + 44\sqrt{2} + 96}{72}}$$

	Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx = \begin{bmatrix} u=\mathrm{arctg}\,2x & du=\frac{2dx}{1+4x^2} \\ dv=xdx & v=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix} =$ $= \frac{x^2}{2}\cdot\mathrm{arctg}\,2x\,\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{arctg}\,1 - 0 -$ $-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1+4x^2)-1}{1+4x^2}dx = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+4x^2} =$ $= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}x\,\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}\mathrm{arctg}\,2x\,\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\mathrm{arctg}\,1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$
	Обчислити визначений інтеграл $\int_{e^2}^{e^3}\ln^2 x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln^2 x & du=2\ln x\cdot\frac{dx}{x} \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix} =$ $= x\cdot\ln^2 x\,\Big|_{e^2}^{e^3} - 2\int_{e^2}^{e^3} x\cdot\ln x\cdot\frac{dx}{x} = \begin{bmatrix} u=\ln x & du=\frac{dx}{x} \\ dv=dx & x \end{bmatrix} =$ $= e^3\ln^2 e^3 - e^2\ln^2 e^2 - 2x\cdot\ln x\,\Big|_{e^2}^{e^3} + 2\int_{e^2}^{e^3} x\cdot\frac{dx}{x} =$ $= 9e^3-4e^2-2e^3\ln e^3+2e^2\ln e^2+2x\,\Big|_{e^2}^{e^3} =$ $= 9e^3-4e^2-6e^3+4e^2+2e^3-2e^2 = \boldsymbol{5e^3-2e^2}$
Невласні інтеграли	
Невласні інтеграли з ***нескінченими границями*** $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\eta\to\infty}\int_a^\eta f(x)dx =$ $= \lim_{\eta\to\infty}F(\eta)-F(a)$	Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{2xdx}{x^4+9} = \int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{d(x^2)}{(x^2)^2+3^2} = \frac{1}{3}\lim_{\eta\to\infty}\mathrm{arctg}\frac{x^2}{3}\Big|_{\sqrt{3}}^{\eta} =$ $= \frac{1}{3}\left(\lim_{\eta\to\infty}\mathrm{arctg}\frac{\eta^2}{3}-\mathrm{arctg}\,1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$ Ми отримали кінцеве значення, отже невласний інтеграл **збігається**
Невласні інтеграли ***від розривних функцій*** $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ або $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$	Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_{-3}^{0}\frac{dx}{(x+3)^2}$ Підінтегральна функція потерпає розрив на нижній границі $\int_{-3}^{0}\frac{dx}{(x+3)^2} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+3}\Big|_{-3+\varepsilon}^{0} = -\frac{1}{3}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{-3+\varepsilon+3}$ $= -\frac{1}{3}+\infty = \infty$ Ми отримали нескінченність, отже невласний інтеграл **розбігається**

Тема «Деякі геометричні застосування визначених інтегралів»

<table>
<tr><th colspan="2">Обчислення площі плоскої фігури</th></tr>
<tr><td>
Фігура обмежена лініями, заданими в декартовій системі координат:
кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$ і $x = b$, і віссю Ox
$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)dx},$$
або лініями
$y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$
$$\boldsymbol{S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}$$
</td><td>
Обчислити площу фігури, обмеженої лініями
$y = x^2,\ \ y = 3x + 4$


Знайдемо точки перетину ліній
$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x + 4 \end{cases} \Rightarrow$
$x^2 = 3x + 4;$
$x^2 - 3x - 4 = 0; \Rightarrow$
$x_1 = -1, x_2 = 4$
Обчислимо площу:
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_{-1}^{4} (3x + 4 - x^2)dx =$$
$$= \left(3\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{4} = 24 + 16 - \frac{64}{3} - \left(\frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{3}\right)$$
$$= \boldsymbol{21\frac{1}{6}}\ (\text{од}^2)$$
</td></tr>
<tr><td>
Фігура обмежена лініями, заданими параметрично:
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$
$$\boldsymbol{S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'_t \cdot dt}$$
</td><td>
Обчислити площу еліпса $x = 5\cos t\,,\ \ y = 3\sin t$
Обчислимо похідну


$x'_t = -5\sin t$
та підставимо у формулу:
$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'_t \cdot dt =$
$= \int_0^{2\pi} 3\sin t \cdot (-5\sin t)\,dt =$
$= -15\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt =$
$$= -\frac{15}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 2t)dt = -\frac{15}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} =$$
$= -15\pi;$
$$S = |-15\pi| = \boldsymbol{15\pi}\ (\text{од}^2)$$
</td></tr>
<tr><td>
Фігура обмежена лініями, заданими в полярній системі координат
$$\rho = f(\varphi):$$
$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,d\varphi}$$
</td><td>
Обчислити площу трипелюсткової троянди
$\rho = a\cos 3\varphi$


Фігура симетрична, тому обчислимо площу шостої частини фігури:
$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi\,d\varphi =$
$$= \frac{1}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1 + \cos 6\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\pi}{6}$$
$$S = \boldsymbol{\frac{a^2}{4} \cdot \pi}\ (\text{од}^2)$$
</td></tr>
</table>

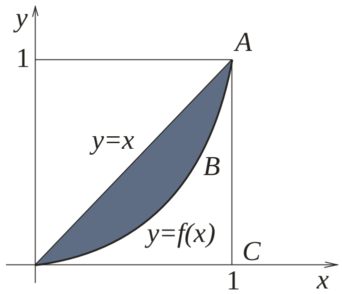
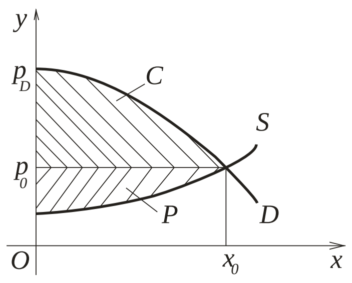
Обчислення довжини дуги	
Лінія задана в **декартовій системі координат** кривою $y = f(x)$, між точками $x = a$ і $x = b$, і $$\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx}$$	Обчислити довжину дуги $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ між точками $1 \le x \le 9$ Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення: $$y' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x-1};$$ $$1 + (y')^2 = 1 + (x-1) = x$$ Підставимо у формулу: $$l = \int_1^9 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big\|_1^9 = \frac{2}{3}(27-1) = \mathbf{17\frac{1}{3}}\,(\text{од.})$$
Лінія задана **параметрично**: $$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$ $$\boldsymbol{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt}$$	Обчислити довжину дуги астроїди $$x = 3\cos^3 t, \qquad y = 3\sin^3 t$$ Знайдемо похідні та виконаємо необхідні перетворення: $$x'_t = -3\cdot 3\cos^2 t\cdot\sin t;\;\; y'_t = 3\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t;$$ $$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = 81\cos^4 t\cdot\sin^2 t + 81\cos^2 t\cdot\sin^4 t =$$ $$= 81\cos^2 t\cdot\sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) = 81\cos^2 t\cdot\sin^2 t$$ Підставимо у формулу. В силу симетрії лінії, достатньо обчислити чверть лінії, а потім помножити отримане значення на 4 $$\frac{1}{4}l = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\, dt = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt =$$ $$= -\frac{9}{4}\cos 2t\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{9}{4}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{9}{4}(-1-1) = \frac{9}{2}$$ $$l = 4\cdot\frac{9}{2} = \mathbf{18}\,(\text{од.})$$
Лінія задана в **полярній системі координат** $$\rho = f(\varphi):$$ $$\boldsymbol{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi}$$	Обчислити довжину дуги $\rho = 5\sin^3\frac{\varphi}{3}$ при $0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$. Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення: $$\rho' = 5\cdot 3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3};$$ $$(\rho')^2 + \rho^2 = 25\sin^6\frac{\varphi}{3} + 25\sin^4\frac{\varphi}{3}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3} =$$ $$= 25\sin^4\frac{\varphi}{3}\left(\sin^2\frac{\varphi}{3} + \cos^2\frac{\varphi}{3}\right) = 25\sin^4\frac{\varphi}{3}$$ Підставимо у формулу: $$l = 5\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = \frac{5}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(1 + \cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi =$$ $$= \frac{5}{2}\left(\varphi + \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Big\|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{3\pi}{2} = \mathbf{\frac{15\pi}{4}}\,(\text{од.})$$

Обчислення об'єму тіла обертання	
Об'єм тіла обертання навколо осі абсцис: $$\boldsymbol{V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx}$$	Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $x^2 = 4 + y,\ y = 0$ навколо осі абсцис Перепишемо рівняння лінії у вигляді $y = x^2 - 4$ Знайдемо границі інтегрування, розв'язавши рівняння $$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow\ x^2 - 4 = 0\ \Rightarrow x = \pm 2$$ Обчислимо об'єм за формулою $$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)^2\,dx =$$ $$= \pi \int_{-2}^{2} (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} + 16x \right) \Big|_{-2}^{2}$$ $$= 2\pi \left(\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} + 16x \right) \Big|_0^2 = 2\pi \left(\frac{2^5}{5} - 8\frac{2^3}{3} + 16 \cdot 2 \right) =$$ $$= \frac{\mathbf{128}}{\mathbf{5}} \boldsymbol{\pi} = \mathbf{25{,}6}\boldsymbol{\pi}\ (\text{од}^3)$$
Об'єм тіла обертання навколо осі ординат: $$\boldsymbol{V_y = \pi \int_c^d x^2\,dy}$$	Обчислити об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x,\ x^2 = 4y$ навколо осі ординат Знайдемо границі інтегрування, розв'язавши рівняння $$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^4 = 16x^2 \\ x^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow\ y^4 = 16 \cdot 4y$$ $$y^4 - 64y = 0;\ \ y(y^3 - 64) = 0;\ \ y_1 = 0;\ y_2 = 4.$$ Об'єм шуканої фігури є різниця об'ємів двох фігур, утворених обертанням парабол навколо осі ординат: $$V_y = V_{y_2} - V_{y_1}$$ Обчислимо об'єми за формулою $$V_{y_1} = \pi \int_0^4 \left(\frac{y^2}{4} \right)^2 dy = \frac{\pi}{16} \int_0^4 y^4\,dy = \frac{\pi}{16} \frac{y^5}{5} \Big|_0^4 = \frac{64}{5}\pi;$$ $$V_{y_2} = \pi \int_0^4 4y\,dy = 4\pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = 32\pi$$ Остаточно маємо $$V_y = V_{y_2} - V_{y_1} = 32\pi - \frac{64}{5}\pi = \frac{\mathbf{96}}{\mathbf{5}} \boldsymbol{\pi} = \mathbf{19{,}2}\boldsymbol{\pi}\ (\text{од}^3)$$

Обчислення площі поверхні тіла обертання	
Площа поверхні тіла обертання навколо осі Ox: $$\boldsymbol{Q_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx}$$	Обчислити площу катеноїди – поверхні, утвореної обертанням цепної лінії $y = \frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right)$ навколо осі Ox $(0 \le x \le 3)$ Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення: $$y' = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}} - \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}}\right);$$ $$1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}}\right)^2 =$$ $$= 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{3}} - 2e^{\frac{x}{3}}e^{-\frac{x}{3}} + e^{-\frac{2x}{3}}\right) =$$ $$= 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{3}} - 2 + e^{-\frac{2x}{3}}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{3}} + 2 + e^{-\frac{2x}{3}}\right) =$$ $$= \left(\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right)\right)^2;$$ підставимо у формулу $Q_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx =$ $$= 2\pi\int_0^3 \frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right)dx =$$ $$= \frac{3\pi}{2}\int_0^3 \left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right)^2 dx = \frac{3\pi}{2}\int_0^3 \left(e^{\frac{2x}{3}} + 2 + e^{-\frac{2x}{3}}\right)dx$$ $$= \frac{3\pi}{2}\left(\frac{3}{2}e^{\frac{2x}{3}} + 2x - \frac{3}{2}e^{-\frac{2x}{3}}\right)\Big\|_0^3 =$$ $$= \frac{3\pi}{2}\left(\frac{3}{2}e^2 + 6 - \frac{3}{2}e^{-2}\right) - \frac{3\pi}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) =$$ $$= \boldsymbol{\frac{9\pi}{4}(e^2 - e^{-2} + 2)}\ (\text{од}^2)$$
Площа поверхні тіла обертання навколо осі Oy: $$\boldsymbol{Q_y = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}dy}$$	Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $3x - y^3 = 0$ навколо осі Oy $(0 \le y \le 3)$ Знайдемо похідну та виконаємо необхідні перетворення: $$x = \frac{1}{3}y^3; \quad x' = y^2; \quad 1 + (x')^2 = 1 + y^4;$$ підставимо у формулу $Q_y = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}dy =$ $$= 2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}y^3\sqrt{1+y^4}dy = \begin{bmatrix} u = 1 + y^4 \\ du = 4y^3dy \\ y^3dy = \frac{1}{4}du \\ u_\text{н} = 1 + 0 = 1 \\ u_\text{в} = 1 + 3^4 = 82 \end{bmatrix} =$$ $$= \frac{2\pi}{3\cdot 4}\int_1^{82}\sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{9}u\sqrt{u}\Big\|_1^{82} = \boldsymbol{\frac{\pi}{9}\left(82\sqrt{82} - 1\right)}$$

Тема «Застосування визначних інтегралів для розв'язання задач економіки»

Об'єм продукції $Q(t_1,t_2)$, яка вироблена за проміжок часу $[t_1,t_2]$, обчислюється за формулою: $$\boldsymbol{Q(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt,}$$ де $\boldsymbol{f(t)}$ – продуктивність праці	Визначити об'єм випуску продукції за перші чотири години праці при продуктивності $f(t)=14{,}28e^{-0{,}25t}$, де t - час у годинах Скористаємося формулою: $$Q(0{,}4)=14{,}28\int_0^4 e^{-0{,}25t}dt=\frac{14{,}28}{-0{,}25}e^{-0{,}25t}\Big\|_0^4=$$ $$=-57{,}12(e^{-1}-e^0)\approx-57{,}12(0{,}37-1)=35{,}96$$
На продуктивність виробництва продукції може впливати багато різних факторів. Можливість урахування цих факторів пов'язана з використанням функцій ***Кобба - Дугласа***. У такому випадку функція продуктивності праці $f(t)$ виражається добутком трьох множників $$f(t)=a_0A^\alpha(t)L^\beta(t)K^\gamma(t),$$ де $A(t),\ L(t),\ K(t)$ - величини затрат природних ресурсів, праці і капіталу (відповідно), $a_0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ - деякі коефіцієнти	Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 10 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t)=e^{0{,}2t}$, $L(t)=(t-2)^3$, $K(t)=(t+4)^5$, $a_0=3,\ \alpha=5,\ \beta=\frac{1}{3},\ \gamma=\frac{1}{5}$ Об'єм продукції $Q(t_1,t_2)$, яка вироблена за проміжок часу $[t_1,t_2]$, обчислюється за формулою: $$Q(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$ Підставимо $A(t),\ L(t),\ K(t)$, коефіцієнти $a_0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ в формулу, що описує функцію ***Кобба-Дугласа***, маємо: $Q(0;10)=3\int_0^{10}e^t(t-2)(t+4)dt=$ $$=3\int_0^{10}e^t(t^2+2t-8)dt=\begin{bmatrix}u=t^2+2t-8\\ dv=e^tdt\\ du=(2t+2)dt\\ v=e^t\end{bmatrix}=$$ $$=3\left(e^t(t^2+2t-8)\Big\|_0^{10}-\int_0^{10}e^t(2t+2)dt\right)=$$ $$=\begin{bmatrix}u=2t+2\\ dv=e^tdt\\ du=2dt\\ v=e^t\end{bmatrix}=3(e^5(100+20-8)+8-$$ $$-e^t(2t+2)\Big\|_0^{10}+2\int_0^{10}e^tdt\Big)=3(112e^{10}+8-$$ $$-e^{10}(20+2)+2+2e^t\Big\|_0^{10}\Big)=\boldsymbol{3\left(92e^{10}+8\right)}$$

Нехай дано функцію $y = f(x)$, яка характеризує нерівномірність розподілу доходів серед населення, де y - частинка сукупного доходу, яку отримує частинка x найбіднішого населення. Графік цієї функції називається ***кривою Лоренца*** Для кількісного аналізу нерівномірності розподілу доходів використовують ***коефіцієнт Джині*** k, який дорівнює відношенню площі фігури OAB і площі трикутника OAC: $k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}$ 	За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{2x}{6-4x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k Коефіцієнт Джині k дорівнює відношенню площі фігури OAB і площі трикутника OAC: $k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}$ Площа трикутника дорівнює $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5 \text{ (од}^2\text{)}$ а площу фігури OAB знайдемо за формулою: $S_{OAB} = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]dx = \int_0^1 \left(x - \frac{2x}{6-4x}\right) dx =$ $= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\frac{(6-4x)-6}{6-4x}\right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - 3\frac{1}{6-4x}\right) dx =$ $= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\ln\|6-4x\|\right)\Big\|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\ln 2 - \frac{3}{4}\ln 6 =$ $= 1 - \frac{3}{4}\ln 3 \approx 0{,}18 \text{ (од}^2\text{)}$ Отже, коефіцієнт Джині дорівнює $k = \frac{0{,}18}{0{,}5} = 0{,}36$
Нехай крива $p = f(x)$ - крива попиту D на деякий товар і $p = g(x)$ - крива пропозиції S, де p ціна на товар, а x - величина попиту (пропозиції). Точка перетину цих ліній (x_0, p_0) має назву ***точка ринкової рівноваги***  Прибуток від реалізації товару x_0 за рівноважною ціною p_0 дорівнює добутку $x_0 p_0$. Якщо ціна буде неперервно знижуватися від максимальної $p_D = f(0)$ до рівноважної p_0 (якщо задовольняється попит), то прибуток складає величину $\int_0^{x_0} f(x)dx$	Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд: $p = 210 - x^2, \qquad p = 12x + 50$ Знайдемо точку ринкової рівноваги (x_0, p_0) з розв'язання системи рівнянь $\begin{cases} p = 210 - x^2 \\ p = 12x + 50 \end{cases};$ $\quad 210 - x^2 = 12x + 50;$ $\quad x^2 + 12x - 160 = 0;$ $\quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 8 \\ x_2 = -20 \text{ (не має сенсу)} \end{array}\right.$ $\Rightarrow \quad x_0 = 8; \quad p_0 = 210 - 8^2 = 210 - 64 = 136$ Отже, точка ринкової рівноваги $x_0 = 8,\ p_0 = 136$

Величина коштів $$C=\int_0^{x_0} f(x)dx - x_0p_0,$$ яка зберігається користувачем, якщо товар продається за рівноважною ціною p_0, називається ***виграшем користувачів*** Аналогічно, величина $$P=x_0p_0-\int_0^{x_0} f(x)dx,$$ називається ***виграшем постачальників***	Знайдемо виграш користувачів: $C=\int_0^8 (210-x^2)dx-8\cdot 136=\left(210x-\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_0^8-1088=$ $=1680-170{,}67-1088=421{,}33\ (\text{грош. од.})$ Знайдемо виграш постачальників: $P=8\cdot 136-\int_0^8 (12x+50)dx=1088-(6x^2+50x)\Big\vert_0^8=$ $=1088-384-400=304\ (\text{грош. од.})$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 341 с.

2. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 291 с.

3. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 424 с.

4. Коваленко Л. Б. Методичні рекомендації та контрольні роботи з дисципліни «Вища математика» [для студентів 1 курсу заочної форми навчання спеціальностей 073 – Менеджмент, 241 – Готельно-ресторанна справа, 242 – Туризм] / Л. Б. Коваленко, Г. А. Кузнецова, С. М. Мордовцев, А. В. Якунін – Харків : ХНУМГ імені О. М. Бекетова, 2019. – 155 с.

5. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів : навч. посібник, видання 2-ге, доповнене, перероблене / Л. Б. Коваленко – Харків : ХНУМГ імені О. М. Бекетова, 2020. – 471 с.

6. Коваленко Л. Б. Розрахунково-графічне завдання з дисципліни «Вища та прикладна математика (Вища математика)» (для студентів-бакалаврів денної форми навчання спеціальності 073 - Менеджмент. / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова / Л. Б. Коваленко. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 34 с.

7. Высшая математика для экономистов / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2007. – 479 с.

8. Ганич Д. І. Російсько-український, українсько-російський словник / Д. І. Ганич, И. С. Олійник. – Київ : А.С.К., 1996. – 550 с.

Довідкове видання

КОВАЛЕНКО Людмила Борисівна

НАВЧАЛЬНИЙ ДОВІДНИК
з дисципліни
« ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА (ВИЩА МАТЕМАТИКА)»

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 073 –Менеджмент)

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп’ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*

План 2022, поз. 2Д

Підп. до друку 11.07.2022. Формат 60 × 84/16.
Електронне видання. Ум. друк. арк. 3,7

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.