

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**



**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**

до практичних занять  
з навчальних дисциплін

**«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ. ЧАСТИНИ 1, 2»,**

**«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ. ЧАСТИНА 3»**

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
усіх форм навчання зі спеціальності  
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)*

**Харків  
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова  
2022**

Методичні рекомендації до практичних занять з навчальних дисциплін «Теоретичні основи електротехніки. Частина 1, 2», «Теоретичні основи електротехніки. Частина 3» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти усіх форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : Я. Б. Форкун, М. Л. Глебова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 76 с.

Укладачі : канд. техн. наук, доц. Я. Б. Форкун,  
канд. техн. наук, доц. М. Л. Глебова

Рецензент

**Д. В. Тугай**, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри альтернативної електроенергетики та електротехніки Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

*Рекомендовано кафедрою альтернативної електроенергетики та електротехніки, протокол № 10 від 22 лютого 2022 р.*

## ЗМІСТ

|   |    |
|---|----|
| ВСТУП.....  | 4  |
| 1 ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ.....                   | 6  |
| 1.1 Загальні відомості.....   | 6  |
| 1.2 Приклади розв'язання задач.....                                   | 8  |
| 2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО<br>НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ.....  | 14 |
| 2.1 Загальні відомості.....   | 14 |
| 2.2 Приклади розв'язання задач.....                                   | 20 |
| 3 РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЛІНІЙНИХ<br>ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ..... | 41 |
| 3.1 Загальні відомості.....   | 41 |
| 3.2 Приклади розв'язання задач.....                                   | 45 |
| 4 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ І МАГНІТНІ КОЛА.....                           | 58 |
| 4.1 Загальні відомості.....   | 58 |
| 4.2 Приклади розв'язання задач.....                                   | 62 |
| СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ.....                                     | 75 |

## ВСТУП

Електротехнікою називають область техніки, що пов'язана з отриманням, розподілом, перетворенням і використанням електричної енергії, або, іншими словами – це широка галузь практичного застосування електромагнітних явищ. «Теоретичні основи електротехніки» (далі – ТОЕ) – дисципліна, яка займається питаннями розрахунку й вивчення явищ, що характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукції магнітного полів. Таким чином, ТОЕ є теоретичною базою для всіх електротехнічних спеціальностей.

Дисципліна складається з трьох частин, при чому першу та другу частину вивчають студенти всіх освітніх програм спеціальності 141 – «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», а третю частину – тільки студенти освітніх програм «Електротехнічні системи електроспоживання», «Нетрадиційні та відновлювальні джерела енергії».

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Завдання дисципліни:

- навчити основним законам електричних, магнітних і електромагнітних кіл та співвідношенням між електричними величинами в електричних та магнітних колах;
- ознайомити зі структурними елементами й фізичними величинами кіл;
- навчити теорії і методології аналізу електричних кіл постійного та змінного (синусоїдного і несинусоїдного) струмів;
- навчити теорії і методології аналізу симетричних і несиметричних трифазних кіл із синусоїдними й несинусоїдними джерелами енергії;
- навчити теорії і методології аналізу перехідних процесів в електричних колах із зосередженими параметрами;
- ознайомити з основними законами і методами розрахунку нелінійних кіл постійного та змінного струму;
- навчити теорії і методології аналізу електричних кіл з розподіленими параметрами;
- ознайомити з основами теорії електромагнітного поля, у якій розглядаються електромагнітні явища у нерухомих ізотропних середовищах.

Ці методичні рекомендації до практичних занять охоплюють матеріал другої частини дисципліни «Теоретичні основи електротехніки. Частина 1, 2»,

тобто теорію лінійних електричних кіл періодичного змінного струму, а саме – розділи «Трифазні електричні кола синусоїдного струму», «Лінійні електричні кола періодичного несинусоїдного струму», теорію розрахунку перехідних процесів в лінійних електричних колах класичним, операторним методами та за допомогою інтеграла Дюамеля (розділ «Розрахунок перехідних процесів в лінійних електричних колах»).

Для студентів освітніх програм «Електротехнічні системи електроспоживання», «Нетрадиційні та відновлювальні джерела енергії» також представлений матеріал, який традиційно відносять до першого змістового модуля дисципліни «Теоретичні основи електротехніки. Частина 3», а саме – розділ «Нелінійні електричні і магнітні кола».

Методичні рекомендації складено відповідно до робочих програм навчальних дисциплін «Теоретичні основи електротехніки. Частина 1 ,2» «Теоретичні основи електротехніки. Частина 3» і призначені для студентів усіх форм навчання, при чому назви розділів співпадають з назвами відповідних змістових модулів.

Вивчення курсу «Теоретичні основи електротехніки» потребує знання курсів фізики, а саме розділу «Електрика та магнетизм» і, особливо, математики, передусім розділів:

- системи лінійних алгебраїчних рівнянь;
- похідна і інтеграл;
- диференціальні рівняння,
- комплексні числа
- функціональні ряди,
- інтегральні перетворення Лапласа,
- векторна алгебра.

# 1 ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

## 1.1 Загальні відомості

Трифазна симетрична система електрорушійних сил (далі – ЕРС) – сукупність трьох синусоїдних ЕРС однієї частоти, що мають однакові амплітуди й зсунуті між собою на  $120^\circ$ .

Чергування фаз – послідовність проходження ЕРС через однакові значення (наприклад, через нуль). Таке чергування фаз, коли початкова фаза ЕРС  $e_A$  дорівнює нулю, початкова фаза ЕРС  $e_B$  дорівнює « $-120^\circ$ », а початкова фаза ЕРС  $e_C$  дорівнює « $+120^\circ$ », називається *прямим*; миттєві значення фазних ЕРС при цьому:

$$e_A = E_m \cdot \sin \omega t; e_B = E_m \cdot \sin\left(\omega t - 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right); e_C = E_m \cdot \sin\left(\omega t + 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right). \quad (1.1)$$

Трифазне коло – сукупність трифазної система ЕРС, трифазного навантаження чи навантажень і з'єднуючих провідів.

Фаза – ділянка трифазного кола, по якій тече один і той же струм.

Виводам фазних обмоток генераторів надають найменування «початок» і «кінець». Початки позначають буквами А, В, С, а кінці – х, у, z (якщо їх поєднують в одну точку, то її позначають на схемах «О»).

Напруги між початком і кінцем обмотки генератора ( $\underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$ ,  $\underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$ ,  $\underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$ ) або на фазних навантаженнях ( $\underline{U}_{aO_1}$ ,  $\underline{U}_{bO_1}$ ,  $\underline{U}_{cO_1}$  – рис. 1.1) – це фазні напруги.

Лінійні напруги дорівнюють різниці потенціалів між точками А, В, С або різниці фазних напруг:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AO} - \underline{U}_{BO}; \underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO}; \underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{AO}. \quad (1.2)$$

При прямому чергуванні фаз лінійні напруги в  $\sqrt{3}$  більші ніж фазні й випереджають їх на  $30^\circ$ , тобто співвідношення між комплексами лінійних і фазних напруг мають вигляд:

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{AO} \cdot e^{j \cdot 30^\circ}; \underline{U}_{BC} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{BO} \cdot e^{j \cdot 30^\circ}; \underline{U}_{CA} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{CO} \cdot e^{j \cdot 30^\circ}. \quad (1.3)$$

Основні схеми з'єднання у трифазних колах – це схеми з'єднання зіркою і трикутником. Трифазне електричне коло є різновидом кіл синусоїдного струму, тому його розрахунок здійснюють за допомогою усіх відомих методів з застосуванням комплексних чисел.

Розглянемо коротко розрахунок найбільш розповсюдженого електричного кола «зірка – зірка». Докладний розгляд інших питань розрахунку трифазних кіл наведено в [1].

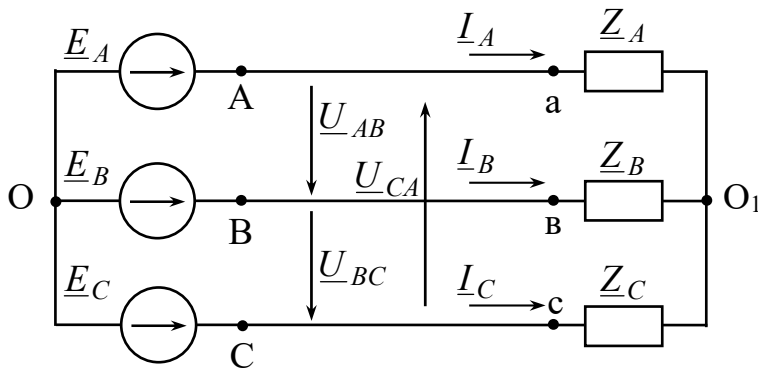


Рисунок 1.1 – Трипровідна трифазна система

Розрахунок трипровідного трифазного кола «зірка – зірка» (рис. 1.1) заснований на методі двох вузлів. Основні етапи цього розрахунку для несиметричного навантаження ( $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$ ):

– визначають напругу зміщення нейтралі  $\underline{U}_{O_1O}$ :

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \quad (1.4)$$

де  $\underline{Y}_A = \frac{1}{Z_A}$ ,  $\underline{Y}_B = \frac{1}{Z_B}$ ,  $\underline{Y}_C = \frac{1}{Z_C}$  – фазні провідності;

– визначають фазні напруги на навантаженні:

$$\underline{U}_{aO_1} = \underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}; \quad \underline{U}_{bO_1} = \underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}; \quad \underline{U}_{cO_1} = \underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}; \quad (1.5)$$

– визначають фазні струми:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{aO_1}}{Z_A}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{bO_1}}{Z_B}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{cO_1}}{Z_C}. \quad (1.6)$$

Якщо навантаження симетричне ( $Z_A = Z_B = Z_C$ ), то фазні струми визначають за виразами (1.6) з урахуванням того, що  $\underline{U}_{aO_1} = \underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$ ;  $\underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$ ;  $\underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$ . Вони однакові за модулем і зсунуті за фазою на кут  $120^\circ$ .

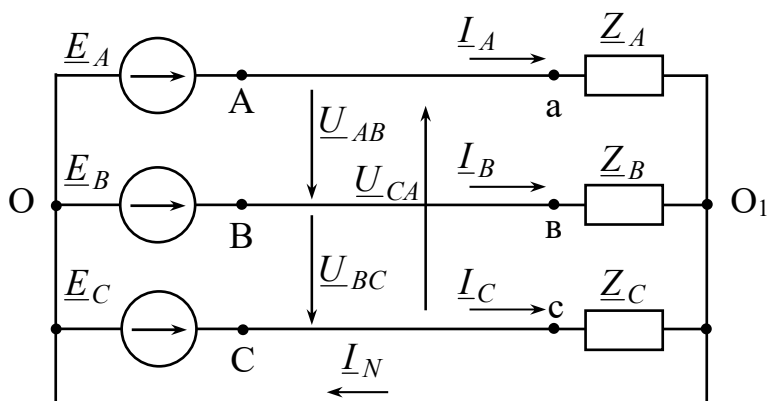


Рисунок 1.2 – Чотирипровідна трифазна система

Розрахунок чотирипровідного кола трифазного кола «зірка – зірка» (рис. 1.2) заснований на законі Ома та першому законі Кірхгофа:

– визначають за законом Ома струми:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{Z_A}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{Z_B}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{Z_C}; \quad (1.7)$$

– визначають за першим

законом Кірхгофа струм нульового проводу:  $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C \quad (1.8)$

Для симетричного навантаження  $\underline{I}_N$  дорівнює нулю.

## 1.2 Приклади розв'язання задач

### ЗАДАЧА 1

*Розрахунок несиметричних режимів трифазного електричного кола при з'єднанні навантаження зіркою*

Трифазне електричне коло «зірка – зірка» з нульовим проводом, зображене на рисунку 1.2, працює у несиметричному режимі. Фазні ЕРС –  $\underline{E}_A = 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$  В,  $\underline{E}_B = 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}$  В,  $\underline{E}_C = 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ}$  В. Параметри навантаження:  $\underline{Z}_A = 100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}$  Ом,  $\underline{Z}_B = 100 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$  Ом,  $\underline{Z}_C = 141 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}$  Ом.

Визначити:

- лінійні напруги кола;
- фазні струми кола;
- провести баланс потужностей;
- побудувати векторно-топографічну діаграму струмів і напруг.

Повторити розрахунки кола у випадку обриву нульового проводу.

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати методи розрахунку трифазних кіл;
- вміти будувати векторно-топографічні діаграми струмів і напруг.

#### *Розв'язок*

Схема «зірка – зірка» з нульовим проводом – рисунок 1.2.

1. Визначаємо лінійні напруги кола:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{AB} &= \underline{U}_{AO} - \underline{U}_{BO} = \underline{E}_A - \underline{E}_B = 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ} - 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} = \\ &= 155 + 77,5 + j \cdot 134,2 = 232,5 + j \cdot 134,2 = 268,5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} \text{ В,}\end{aligned}$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO} = \underline{E}_B - \underline{E}_C = 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} - 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} = 268,5 e^{-j \cdot 90^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{AO} = \underline{E}_C - \underline{E}_A = 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} - 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ} = 268,5 e^{j \cdot 150^\circ} \text{ В.}$$

2. Визначаємо фазні струми.

Завдяки нульовому проводу напруга  $\underline{U}_{O_1O} = 0$  В. Тоді:

$$\underline{U}_{aO_1} = \underline{U}_{AO} = \underline{E}_A; \quad \underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO} = \underline{E}_B; \quad \underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} = \underline{E}_C.$$

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{aO_1}}{\underline{Z}_A} = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}}{100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}} = 1,55 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} = j \cdot 1,55 \text{ А,}$$



$$\underline{I}_B = \frac{U_{bO_1}}{\underline{Z}_B} = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}}{100 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}} = 1,55 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} = -0,77 - j \cdot 1,34 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_C = \frac{U_{cO_1}}{\underline{Z}_C} = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ}}{141 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}} = 1,1 \cdot e^{j \cdot 75^\circ} = 0,28 + j \cdot 1,06 \text{ А.}$$

3. Визначаємо струм у нульовому проводі:

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = j \cdot 1,55 - 0,77 - j \cdot 1,34 + 0,28 + j \cdot 1,06 = -0,49 + j \cdot 1,27 = \\ &= 1,36 \cdot e^{j \cdot 111,1^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

4. Проводимо баланс потужностей у трифазному колі.

Потужність, що віддається джерелами живлення:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\text{дж}} &= \underline{E}_A \cdot \underline{I}_A^* + \underline{E}_B \cdot \underline{I}_B^* + \underline{E}_C \cdot \underline{I}_C^* = 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ} \cdot 1,55 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} + 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 1,55 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} + \\ &+ 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 1,1 \cdot e^{-j \cdot 75^\circ} = -j \cdot 240,25 + 240,25 + 120,56 + j \cdot 120,56 = \\ &= 360,81 - j \cdot 119,69 \text{ ВА} \Rightarrow P_{\text{дж}} = 360,81 \text{ Вт, } Q_{\text{дж}} = -119,69 \text{ ВАр.} \end{aligned}$$

Потужність, що споживає навантаження:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_H &= I_A^2 \cdot \underline{Z}_A + I_B^2 \cdot \underline{Z}_B + I_C^2 \cdot \underline{Z}_C = 1,55^2 \cdot (-j \cdot 100) + 1,55^2 \cdot 100 + \\ &+ 1,1^2 \cdot (99,7 + j \cdot 99,7) = 360,89 - j \cdot 119,61 \text{ Вт} \Rightarrow P_H = 360,89 \text{ Вт,} \end{aligned}$$

$Q_H = -119,69 \text{ ВАр. } \tilde{S}_{\text{дж}} \approx \tilde{S}_H$ , тобто баланс потужностей виконується.

5. Будуємо векторно-топографічну діаграму струмів і напруг (рис. 1.3, а).

Спочатку задаємося масштабами за напругою і струмом  $m_U = 50 \text{ В/см}$ ,  $m_I = 0,5 \text{ А/см}$ . У вибраному масштабі за напругою будуємо симетричну систему фазних напруг. З'єднуємо кінці векторів фазних напруг – точки  $A, B, C$ , – і отримуємо трикутник лінійних напруг  $U$  вибраному масштабі за струмом будуємо вектори фазних струмів.

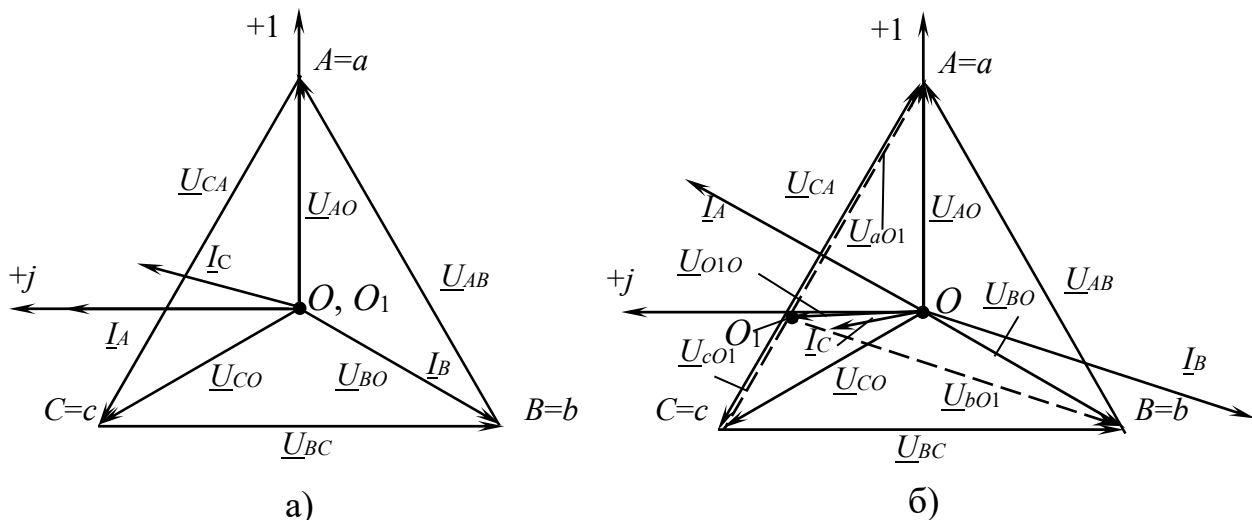


Рисунок 1.3 – Векторно-топографічні діаграми для трипровідної та чотирпровідної системи

Схема «зірка – зірка» без нульового проводу – рисунок 1.1.

1. У несиметричному режимі за відсутності нульового проводу (рис. 1.1) напруга  $\underline{U}_{O1O} \neq 0$ :

$$\underline{U}_{O1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\frac{155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}}{100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}} + \frac{155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}}{100 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}} + \frac{155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ}}{141 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}}}{\frac{1}{100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}} + \frac{1}{100 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}} + \frac{1}{141 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}}} =$$

$$= \frac{j \cdot 1,55 - 0,775 - j \cdot 1,342 + 0,284 + j \cdot 1,061}{j \cdot 0,01 + 0,01 + 0,005 - j \cdot 0,005} = 86,12 \cdot e^{j \cdot 92,7^\circ} = -4,06 + j \cdot 86,62 \text{ В.}$$

2. Визначаємо фазні струми за законом Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{aO1}}{\underline{Z}_A} = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_{O1O}}{\underline{Z}_A} = \frac{155 + 4,06 - j \cdot 86,62}{-j \cdot 100} = 1,8 \cdot e^{j \cdot 61,6^\circ} = 0,856 + j \cdot 1,583 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{bO1}}{\underline{Z}_B} = \frac{\underline{E}_B - \underline{U}_{O1O}}{\underline{Z}_B} = \frac{-77,5 - j \cdot 134,2 + 4,06 - j \cdot 86,62}{100} = 2,32 \cdot e^{-j \cdot 108,4^\circ} =$$

$$= -0,732 - j \cdot 2,2 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{cO1}}{\underline{Z}_C} = \frac{\underline{E}_C - \underline{U}_{O1O}}{\underline{Z}_C} = \frac{-77,5 + j \cdot 134,2 + 4,06 - j \cdot 86,62}{100 + j \cdot 100} = 0,623 \cdot e^{j \cdot 101,7^\circ} =$$

$$= -0,126 + j \cdot 0,61 \text{ А.}$$

3. Перевіряємо розрахунок за першим законом Кірхгофа:

$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0,856 + j \cdot 1,583 - 0,732 - j \cdot 2,2 - 0,126 + j \cdot 0,61 \approx 0$  – перший закон Кірхгофа виконується.

4. Проводимо баланс потужностей у трифазному колі.

Потужність, що віддається джерелами живлення:

$$\tilde{S}_{дж} = \underline{E}_A \cdot \underline{I}_A^* + \underline{E}_B \cdot \underline{I}_B^* + \underline{E}_C \cdot \underline{I}_C^* = 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ} \cdot 1,8 \cdot e^{-j \cdot 61,6^\circ} +$$

$$+ 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 2,32 \cdot e^{j \cdot 108,4^\circ} + 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 0,623 \cdot e^{-j \cdot 101,7^\circ} = 132,7 - j \cdot 245,42 +$$

$$+ 352,55 - j \cdot 72,37 + 91,67 + j \cdot 30,31 = 576,92 - j \cdot 287,47 \text{ ВА} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{дж} = 576,92 \text{ Вт, } Q_{дж} = -287,47 \text{ ВАр.}$$

Потужність, що споживає навантаження:

$$\tilde{S}_H = I_A^2 \cdot \underline{Z}_A + I_B^2 \cdot \underline{Z}_B + I_C^2 \cdot \underline{Z}_C = 1,8^2 \cdot (-j \cdot 100) + 3,32^2 \cdot 100 +$$

$$+ 0,632^2 \cdot (99,7 + j \cdot 99,7) = 577,2 - j \cdot 289,3 \text{ ВА} \Rightarrow P_H = 577,2 \text{ Вт, } Q_H = -287,47 \text{ ВАр.}$$

$\tilde{S}_{дж} \approx \tilde{S}_H$ , тобто баланс потужностей виконується.

5. Будуємо векторно-топографічну діаграму струмів і напруг, користуючись методикою, наведеною вище (рис. 1.3, б). У порівнянні з рисунком 1.3,а на діаграмі рисунку 1.3,б додатково з'являються вектори напруг  $\underline{U}_{O10}$ ,  $\underline{U}_{a01}$ ,  $\underline{U}_{b01}$ ,  $\underline{U}_{c01}$ .

### З А Д А Ч А 2

*Розрахунок симетричних режимів трифазного електричного кола при з'єднанні навантаження трикутником*

Трифазна система «зірка – трикутник», зображена на рисунку 1.4, працює у симетричному режимі. Діюче значення лінійної напруги  $U_l = 100$  В. Параметри навантаження  $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = 10 \cdot e^{j30^\circ} = 8,66 + j \cdot 5$  Ом.

Визначити:

- фазні напруги і струми кола  $\underline{U}_{ab}$ ,  $\underline{U}_{bc}$ ,  $\underline{U}_{ca}$ ,  $\underline{I}_{ab}$ ,  $\underline{I}_{bc}$ ,  $\underline{I}_{ca}$ ;
- лінійні струми кола  $\underline{I}_A$ ,  $\underline{I}_B$ ,  $\underline{I}_C$ .

Провести баланс потужностей. Побудувати векторно-топографічну діаграму струмів і напруг.

#### Розв'язок

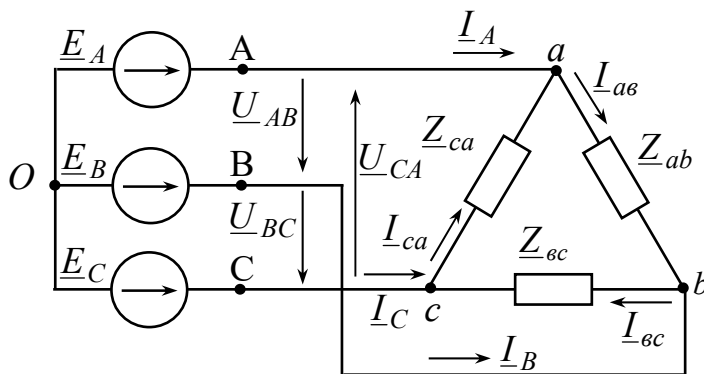


Рисунок 1.4 – Трифазне коло «зірка – трикутник»

1. Визначаємо фазні напруги кола:

$$\underline{U}_{AO} = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = \frac{100}{\sqrt{3}} = 57,73 \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{BO} = \frac{U_l}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j120^\circ} =$$

$$= 57,73 \cdot e^{-j120^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{CO} = \frac{U_l}{\sqrt{3}} \cdot e^{j120^\circ} =$$

$$= 57,73 \cdot e^{j120^\circ} \text{ В.}$$

2. Визначаємо лінійні напруги кола:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{ab} = U_l \cdot e^{j30^\circ} = 100 \cdot e^{j30^\circ},$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{bc} = U_l \cdot e^{-j90^\circ} = 100 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{ca} = U_l \cdot e^{j150^\circ} = 100 \cdot e^{j150^\circ} \text{ В.}$$

3. Визначаємо фазні струми:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}}{10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}} = 10 \text{ А},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}}{10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}} = 10 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} = -5 - j \cdot 8,66 \text{ А},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 150^\circ}}{10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}} = 10 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} = -5 + j \cdot 8,66 \text{ А}.$$

4. Визначаємо лінійні струми кола за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 10 - (-5 + j \cdot 8,66) = 15 - j \cdot 8,66 = 17,32 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = -5 - j \cdot 8,66 - 10 = -15 - j \cdot 8,66 = 17,32 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = -5 + j \cdot 8,66 + 5 + j \cdot 8,66 = j \cdot 17,32 = 17,32 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \text{ А}.$$

5. Визначаємо середню повну потужність, що віддається джерелами живлення:

$$S_{\text{дж}} = 3 \cdot U_{\phi} \cdot I_L = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L = \sqrt{3} \cdot 100 \cdot 17,32 = 3000 \text{ ВА}.$$

Активна потужність  $P_{\text{дж}} = S_{\text{дж}} \cdot \cos \varphi = 3000 \cdot \cos 30^\circ = 2598,07 \text{ Вт}.$

Реактивна потужність  $Q_{\text{дж}} = S_{\text{дж}} \cdot \sin \varphi = 3000 \cdot \sin 30^\circ = 1500 \text{ ВАр}.$

6. Визначаємо потужність, що споживає навантаження

$$\tilde{S}_H = 3 \cdot I_{ab}^2 \cdot \underline{Z}_{ab} = 3 \cdot 10^2 \cdot (8,66 + j \cdot 5) = 2598 + j \cdot 1500 \text{ ВА} \Rightarrow P_H = 2598 \text{ Вт},$$

$$Q_H = 1500 \text{ ВАр}. \tilde{S}_{\text{дж}} \approx \tilde{S}_H, \text{ тобто баланс потужностей виконується.}$$

7. Будуємо векторно-топографічну діаграму струмів і напруг (рис. 1.5).

У вибраному масштабі за напругою  $m_U = 20 \text{ В/см}$  будуємо симетричну систему фазних напруг. З'єднуємо кінці векторів фазних напруг, точки  $A, B, C$ , і отримуємо трикутник лінійних напруг. У вибраному масштабі струму  $m_I = 3 \text{ А/см}$  відносно точки  $A$  будуємо вектор лінійного струму  $\underline{I}_A$  як векторну суму векторів  $\underline{I}_{ab}$  та  $-\underline{I}_{ca}$ . Так само будуємо вектори струмів  $\underline{I}_B$  і  $\underline{I}_C$  відносно точок  $B$  і  $C$  відповідно.

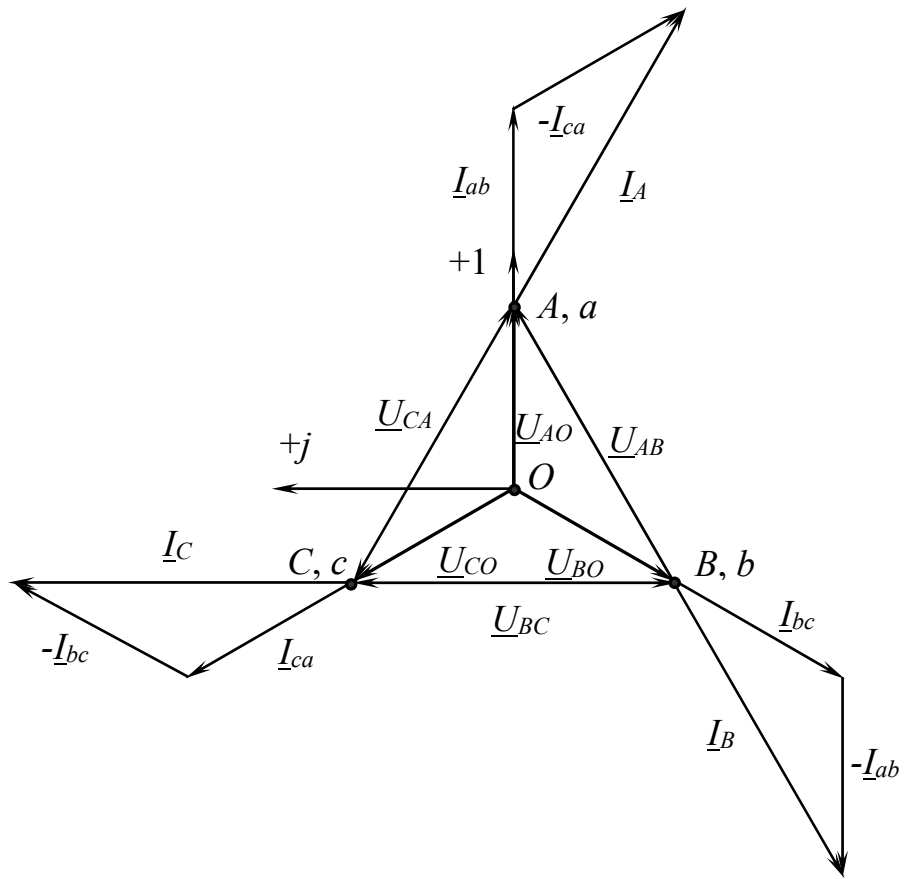


Рисунок 1.5 – Векторно-топографічна діаграма струмів та напруг схеми «зірка – трикутник»

## 2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

### 2.1 Загальні відомості

В електротехніці з різних причин можуть виникнути несинусоїдні періодичні струми і напруги (наявність в колі джерела, що виробляє несинусоїдну напругу; наявність в колі з джерелами синусоїдної напруги нелінійних елементів та ін.).

Основою розрахунку таких кіл є розкладання функцій напруги і струму в тригонометричні ряди Фур'є, а саме:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(1)''} \cdot \cos(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(2)''} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + \\ + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(3)''} \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \dots + A_m^{(k)'} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + A_m^{(k)''} \cdot \cos(k \cdot \omega t) + \dots, \quad (2.1)$$

де  $A^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) d\omega t$  – нульова гармоніка (постійна складова); (2.2)

$$A_1' = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \sin \omega t d\omega t \text{ – амплітуда синусної складової першої} \quad (2.3)$$

гармоніки;

$$A_1'' = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \cos \omega t d\omega t \text{ – амплітуда косинусної складової першої} \quad (2.4)$$

гармоніки;

$$A_m^{(k)'} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \sin(k \omega t) d\omega t \text{ – амплітуда синусної складової} \quad (2.5)$$

гармоніки з номером  $k$ ;

$$A_m^{(k)''} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \cos(k \omega t) d\omega t \text{ – амплітуда косинусної складової} \quad (2.6)$$

гармоніки з номером  $k$ .

Ряд Фур'є можна також записати у вигляді суми нульової гармоніки синусних складових з ненульовими початковими фазами:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + \sum_{k=1}^n A_m^{(k)} \cdot \sin(k \omega t + \varphi^{(k)}), \quad (2.7)$$

де  $A_m^{(k)} = \sqrt{A_m^{(k)'}^2 + A_m^{(k)''^2}}$  – амплітуда  $k$ -ї гармоніки; (2.8)

$$\varphi^{(k)} = \arctg \frac{A_m^{(k) //}}{A_m^{(k) /}} - \text{початкова фаза } k\text{-ї гармоніки.} \quad (2.9)$$

Діюче значення несинусоїдної періодичної функції:

$$A = \sqrt{A^{(0)2} + \frac{A_m^{(1)2}}{2} + \frac{A_m^{(2)2}}{2} + \frac{A_m^{(3)2}}{2} + \dots + \frac{A_m^{(k)2}}{2}}. \quad (2.10)$$

Середнє за модулем значення несинусоїдної періодичної функції:

$$A_{cp} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(\omega t)| d\omega t. \quad (2.11)$$

Несинусоїдні періодичні криві характеризуються коефіцієнтами:

– коефіцієнтом форми кривої (відношення діючого значення до середнього за модулем значення) –  $K_\phi = \frac{A}{A_{cp}}$ ;

– коефіцієнтом амплітуди (відношення амплітудного значення до діючого значення) –  $K_a = \frac{A_m}{A}$ ;

– коефіцієнт викривлення (відношення діючого значення першої гармоніки до діючого значення всієї кривої) –  $K_\epsilon = \frac{A^{(1)}}{A}$ , де  $A_1 = \frac{A_m^{(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{A_m^{(1)2/2} + A_m^{(1)2/2}}}{\sqrt{2}}$ .

Усі несинусоїдні періодичні криві, з якими мають справу в електротехніці, поділяються на дві групи: криві геометрично правильної форми й криві неправильної форми. Ряди Фур'є для несинусоїдних періодичних кривих геометрично правильної форми наведені в довідковій літературі (або в підручниках).

#### *Приклади рядів Фур'є для кривих геометрично правильної форми*

Ряд Фур'є для кривої  $e(\omega t)$ , що має прямокутну форму (рис. 2.1, а) –

$$e(\omega t) = \frac{4 \cdot E_m}{\pi} \cdot \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right], \text{ В;}$$

Ряд Фур'є для кривої  $e(\omega t)$ , що має форму трикутника (рис. 2.1, б) –

$$e(\omega t) = \frac{8 \cdot E_m}{\pi^2} \cdot \left[ \sin(\omega t) - \frac{1}{9} \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5\omega t) - \dots \right], \text{ В.}$$

Несинусоїдні періодичні криві неправильної форми розкладаються в ряд Фур'є графоаналітичним методом. Останній полягає в заміні інтегралів (2.2), (2.5), (2.6) сумою кінцевого числа доданків. Для цього період функції  $2\pi$  поділяють на  $n$  рівних інтервалів, кожен інтервал –  $\Delta\omega t = \frac{2\pi}{n}$  (звичайно  $n = 24$ ).

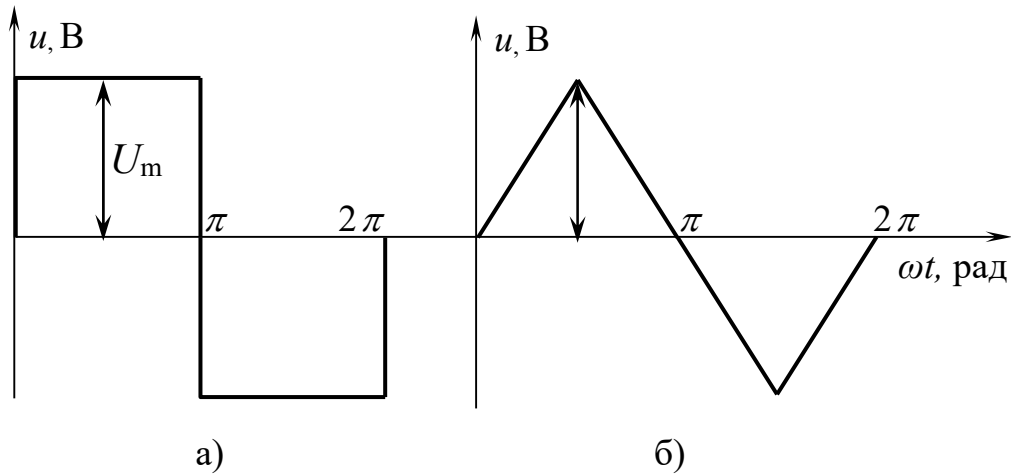


Рисунок 2.1 – Несинусоїдні криві геометрично правильної форми

Таким чином, амплітуда нульової гармоніки дорівнює:

$$A^{(0)} \approx \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} \left( f_p(\omega t) \cdot \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t), \quad (2.12)$$

де  $p$  – поточний індекс;  $p=1 \div n$ ;

$f_p(\omega t)$  – значення функції  $f(\omega t)$  у середині інтервалу з номером  $p$ , тобто коли  $\omega t = (p - 0,5) \cdot \Delta\omega t$ .

Амплітуди синусної та косинусної складових  $k$ -ї гармоніки відповідно:

$$A_m^{(k)'} \approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k\omega t) \cdot \Delta\omega t = \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k\omega t); \quad (2.13)$$

$$A_m^{(k)''} \approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k\omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k\omega t)), \quad (2.14)$$

де  $\sin_p(k\omega t)$  і  $\cos_p(k\omega t)$  – значення функцій  $\sin(k\omega t)$ ,  $\cos(k\omega t)$  у середині  $p$ -го інтервалу, тобто коли  $\omega t = (p - 0,5) \cdot \Delta\omega t$ .

Періодичні несинусоїдні криві можуть мати ті чи інші види симетрії, що спрощує їх розкладання в ряд Фур'є, бо ті чи інші гармоніки виключаються з ряду (табл. 2.1).

Слід відзначити, що кола з несинусоїдними джерелами енергії розраховують методом накладання. Порядок розрахунку наступний.

1. Представити несинусоїдні напругу чи струм джерела рядом Фур'є.
2. Розрахувати комплекси віток для окремих гармонік. Для гармоніки з номером  $k$ :

$$\underline{Z}^{(k)} = R + j \cdot \left( k \cdot \omega L - \frac{1}{k \cdot \omega C} \right) = R + j \cdot \left( k \cdot X_L^{(1)} - \frac{X_C^{(1)}}{k} \right), \quad (2.15)$$

де  $X_L^{(1)}$ ,  $X_C^{(1)}$  – індуктивний і ємнісний опори для першої гармоніки.



3. Розрахувати струми і напруги на ділянках кола від дії нульової гармоніки джерела, враховуючи, що фізичний сенс нульової гармоніки, скажімо, напруги – це постійна напруга. Тому падіння напруги на індуктивності від дії нульової гармоніки струму дорівнює нулю ( $X_L^{(0)} = 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot L = 0 \text{ Ом} \Rightarrow U_L^{(0)} = 0 \text{ В}$ ), а струм в вітці з ємністю для нульової гармоніки відсутній ( $X_C^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot C} = \infty \text{ Ом} \Rightarrow I_C^{(0)} = 0 \text{ А}$ ).

4. Розрахувати комплекси струмів і напруг на ділянках кола від дії першої гармоніки джерела, після цього – від дії другої гармоніки джерела та інших.

5. Записати миттєві значення струмів і напруг на ділянках кола для окремих гармонік.

6. Записати ряди Фур'є для струмів і напруг на ділянках кола у вигляді суми окремих гармонік.

Потужності в колах несинусоїдного струму поділяють на:

– активну потужність, яка дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік  $P = U^{(0)} \cdot I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)} \cdot I^{(k)} \cdot \cos \varphi^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)} = I^2 \cdot R \text{ (Вт)}; \quad (2.16)$

– реактивна потужність дорівнює сумі реактивних потужностей окремих гармонік  $Q = \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)} \cdot I^{(k)} \cdot \sin \varphi^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} I^{(k)2} \cdot X^{(k)} \text{ (ВАр)}; \quad (2.17)$

– повну потужність  $S = U \cdot I \text{ ВА}; \quad (2.18)$

– потужність спотворення  $T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \text{ (ВА)}. \quad (2.19)$

Таблиця 2.1 – Види симетрії несинусоїдних періодичних кривих

| № з/п | Симетрія відносно       | Математична умова   | Особливості розкладання (гармоніки, що відсутні) |
|-------|-------------------------|---|--|
| 1     | Осі ординат             | $f(\omega t) = f(-\omega t)$  | $A_m^{(k)}/$                                     |
| 2     | Початку координат       | $f(\omega t) = -f(-\omega t)$                                       | $A^{(0)} = A_m^{(k)}/$                           |
| 3     | Осі абсцис              | $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$                                  | $A^{(0)} = A_m^{(2k)}/ = A_m^{(2k)}/$            |
| 4     | Одночасно випадок 2 і 3 | $f(\omega t) = -f(-\omega t)$<br>$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$ | $A^{(0)} = A_m^{(2k)}/ = A_m^{(k)}/$             |
| 5     | Одночасно випадок 1 і 3 | $f(\omega t) = f(-\omega t)$<br>$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$  | $A^{(0)} = A_m^{(2k)}/ = A_m^{(k)}/$             |

Розглянемо особливості роботи трифазних систем, що викликані гармоніками кратними трьом.

ЕРС кожної фази трифазного трансформатора або трифазного генератора часто виявляється несинусоїдною. Кожна ЕРС ( $e_A, e_B, e_C$ ) повторює форму іншої із зсувом на одну третину періоду ( $T/3$ ) і може бути розкладена на окремі гармоніки. Постійна складова зазвичай відсутня.

$$\text{Нехай } k \text{ – номер гармоніки ЕРС фази } A: e_A^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin(k\omega t + \varphi^{(k)}). \quad (2.20)$$

Оскільки ЕРС фази  $B$  відстає від ЕРС фази  $A$  на  $T/3$ , а ЕРС фази  $C$  випереджає ЕРС фази  $A$  на  $T/3$ , то гармоніки з номером  $k$  ЕРС фаз  $B$  і  $C$

$$\text{відповідно: } e_B^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k\omega\left(t - \frac{T}{3}\right) + \varphi^{(k)}\right) = E_{km} \cdot \sin\left(k\omega t - \frac{2\pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right) \quad (2.21)$$

$$e_C^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k\omega t + \frac{2\pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right); \left(k\omega \frac{T}{3} = k \cdot \frac{2\pi \cdot T}{T \cdot 3} = k \cdot \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \cdot k\right). \quad (2.22)$$

Якщо  $k=1, 4, 7, 10, \dots$  то гармоніка з номером  $k$  ЕРС фази  $B$  відстає на  $120^\circ$  від гармоніки ЕРС фази  $A$ , а ЕРС фази  $C$  випереджає на  $120^\circ$  гармоніку ЕРС фази  $A$ . Отже ці гармоніки утворюють систему прямої послідовності фаз.

Якщо  $k=2, 5, 8, 11, \dots$  то гармоніка з номером  $k$  ЕРС фази  $B$  випереджає на  $120^\circ$  гармоніку ЕРС фази  $A$ , а ЕРС фази  $C$  відстає на  $120^\circ$  від гармоніки ЕРС фази  $A$ . Отже, ці гармоніки утворюють систему зворотної послідовності фаз.

Гармоніки, які кратні трьом ( $k=3, 6, 9, \dots$ ), утворюють систему нульової послідовності, тобто ці гармоніки ЕРС усіх трьох фаз співпадають за фазою:

$$e_A^{(3k)} = e_B^{(3k)} = e_C^{(3k)} = E_m^{(3k)} \cdot \sin(3k\omega t + \varphi^{(3k)}). \quad (2.23)$$

Векторні діаграми для прямої (а), зворотної (б) і нульової (в) послідовності чергування фаз подано на рисунку 2.2.

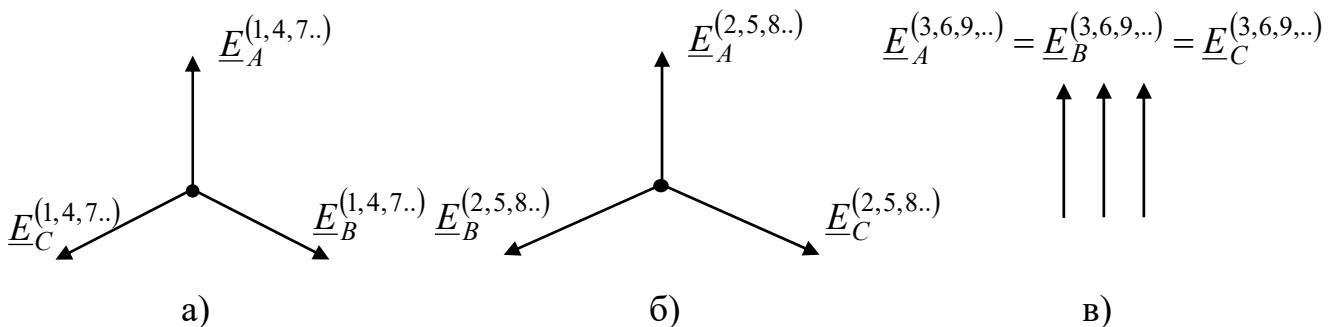


Рисунок 2.2 – Пряма, зворотна і нульова послідовності

Розглянемо деякі особливості роботи трифазних систем, що викликані гармоніками кратними трьом.

Нехай обмотки трифазного генератора з'єднанні відкритим трикутником (рис. 2.3). Якщо у фазних ЕРС присутні гармоніки, кратні трьом, то на затискачах «n – B» буде напруга, діюче й миттєве значення якої:

$$U_{nB} = 3 \cdot \sqrt{\frac{E_m^{(3)^2}}{2} + \frac{E_m^{(6)^2}}{2} + \frac{E_m^{(9)^2}}{2} \dots}, \quad (2.24)$$

$$u_{nB} = 3 \cdot E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t + \varphi^{(3)}) + 3 \cdot E_m^{(6)} \cdot \sin(6 \cdot \omega t + \varphi^{(6)}) + \dots \quad (2.25)$$

При з'єднанні обмоток генератора в закритий трикутник (рисунок 2.4) в них протікатимуть струми кратних трьом гармонік (проти годинникової стрілки):

$$\underline{I}^{(3k)} = \frac{3 \cdot \underline{E}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Z}_0^{(3k)}} = \frac{\underline{E}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)}}, \quad (2.26)$$

де  $\underline{Z}_0^{(3k)}$  – опір обмотки кожної фази для гармоніки, кратної трьом;

$\underline{E}^{(3k)}$  – комплекс діючого значення гармоніки фазної ЕРС, кратної трьом.

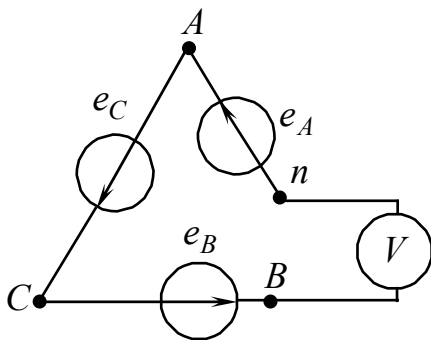


Рисунок 2.3 – Відкритий трикутник

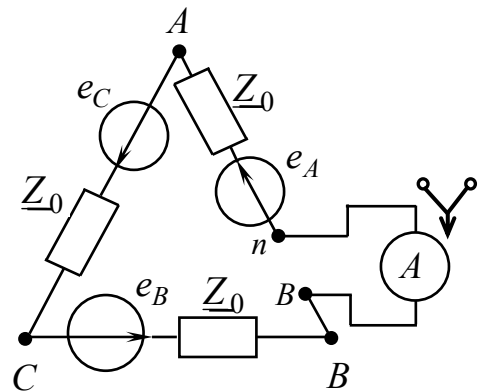


Рисунок 2.4 – Закритий трикутник

Таким чином, діюче значення струму –  $I = \sqrt{I^{(3)^2} + I^{(6)^2} + I^{(9)^2} + \dots}$  (2.27)

3. Незалежно від того, зіркою чи трикутником з'єднанні обмотки генератора або трансформатора, в лінійній напрузі гармоніки кратні трьом відсутні.

Якщо обмотки з'єднанні зіркою:

$$\underline{U}_{AB}^{(3k)} = \underline{E}_A^{(3k)} - \underline{E}_B^{(3k)} = 0 \text{ (аналогічно для } \underline{U}_{BC}^{(3k)} \text{ і } \underline{U}_{CA}^{(3k)} \text{)}.$$

Якщо обмотки з'єднанні трикутником (рис. 2.18):

$$\underline{U}_{AB}^{(3k)} = \underline{E}^{(3k)} - \underline{I}^{(3k)} \cdot \underline{Z}_0^{(3k)} = \underline{E}^{(3k)} - \frac{3 \cdot \underline{E}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Z}_0^{(3k)}} \cdot \underline{Z}_0^{(3k)} = 0.$$

Особливості розрахунку трифазних кіл «зірка – зірка» без нульового про- воду із останнім, що викликані гармоніками кратними трьом, розглянуті в [1].

## 2.2 Приклади розв'язання задач

### ЗАДАЧА 1

Побудова несинусоїдної кривої, що задана аналітично у вигляді ряду Фур'є

Побудувати криву струму, ряд Фур'є якого має вигляд:

$$i(\omega t) = 40 \cdot \sin\left(\omega t - 15^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 14,2 \cdot \sin\left(3\omega t + 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \text{ А.}$$

Визначити діюче і максимальне значення струму.

Для розв'язку задачі необхідно

– знати основні величини, що характеризують негармонійний струм і напругу; дві форми запису ряду Фур'є;

– вміти будувати за рядом Фур'є криву несинусоїдної функції, визначати графічно максимальне значення негармонійної функції.

#### Розв'язок

Довільно вибираємо масштаб струму, наприклад  $m_i = N \frac{A}{\text{см}}$ . Будуємо першу гармоніку струму, для чого довільно вибираємо масштаб по осі абсцис, наприклад  $m_{\omega t}^{(1)} = N_1 \frac{\text{рад}}{\text{см}}$ . Оскільки початкова фаза першої гармоніки струму

$\psi^{(1)} = -15^\circ$ , то синусоїда першої гармоніки зсунута на  $15^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \cdot 15^\circ, \text{рад}\right)$

вправо від початку координат відповідно до обраного масштабу.

Потім будуємо третю гармоніку струму. Частота третьої гармоніки в три рази більше, ніж частота першої гармоніки, тобто для третьої гармоніки

масштаб по осі абсцис –  $m_{\omega t}^{(3)} = \frac{m_{\omega t}^{(1)}}{3} = \frac{N_1}{3}$ . Оскільки початкова фаза третьої

гармоніки струму  $\psi^{(3)} = 60^\circ$ , то синусоїда третьої гармоніки зсунута на  $60^\circ$

вліво відповідно до масштабу  $m_{\omega t}^{(3)} = \frac{N_1}{3}$ .

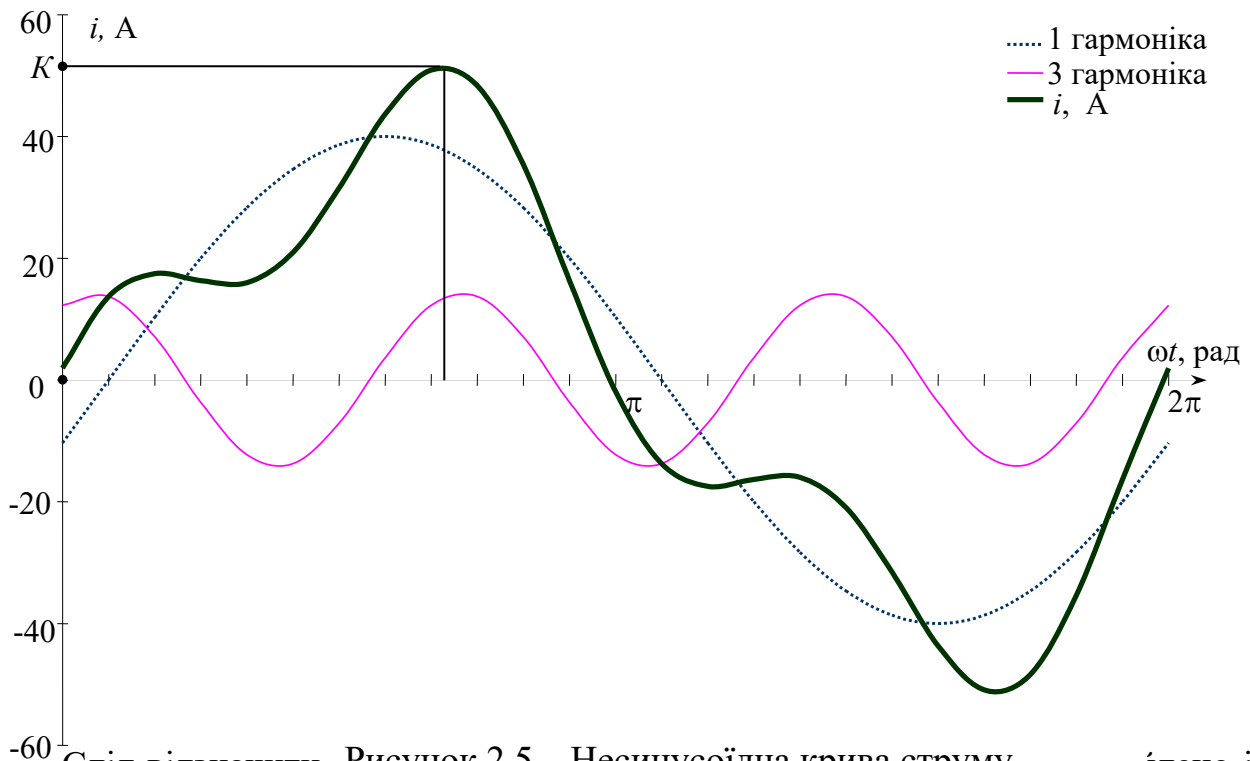
Таким чином у масштабі  $m_i = N \frac{A}{\text{см}}$  і  $m_{\omega t}^{(1)} = N_1 \frac{\text{рад}}{\text{см}}$  будуємо першу гармоніку струму; у  $m_i = N \frac{A}{\text{см}}$  і  $m_{\omega t}^{(3)} = \frac{N_1}{3}$  будуємо третю гармоніку струму.

Графічно складаємо ординати гармонік струму й отримуємо результуючу форму кривої несинусоїдного струму – рисунок 2.5.

З графіка знаходимо максимальне значення струму  $i_{\max} = |OK| = 51,8 \text{ А}$ .

Діюче значення несинусоїдного струму

$$I = \sqrt{\frac{I_m^{(1)2}}{2} + \frac{I_m^{(3)2}}{2}} = \sqrt{\frac{40^2}{2} + \frac{14,2^2}{2}} = 42,4 \text{ А.}$$



Слід відзначити, Рисунок 2.5 – Несинусоїдна крива струму ідено і аналітичним шляхом, що буде розглянуте в наступних задачах.

### ЗАДАЧА 2

*Побудова несинусоїдної кривої напруги  $u(\omega t)$  і визначення діючого й максимального значення несинусоїдної напруги*

Крива напруги задана аналітично у вигляді ряду Фур'є –

$$u(\omega t) = 120 + 40 \cdot \sin \omega t + 14 \cdot \sin 3\omega t, \text{ В.}$$

Побудувати криву напруги  $u(\omega t)$ , В.

Знайти:

- діюче значення напруги  $u(\omega t)$ ;
- максимальне значення напруги  $u(\omega t)$ .

Для розв'язку задачі необхідно:

- вміти будувати за рядом Фур'є криву несинусоїдної функції, визначати графічно максимальне значення негармонійної функції;
- вміти знаходити аналітично діюче значення несинусоїдної функції.

Розв'язок

1. Графік несинусоїдної напруги  $u(\omega t)$  – рисунок 2.6.

2. Діюче значення напруги:

$$U = \sqrt{U^{(0)2} + \frac{U_m^{(1)2}}{2} + \frac{U_m^{(3)2}}{2}} = \sqrt{120^2 + \frac{40^2}{2} + \frac{14^2}{2}} = 123,68 \text{ В.}$$

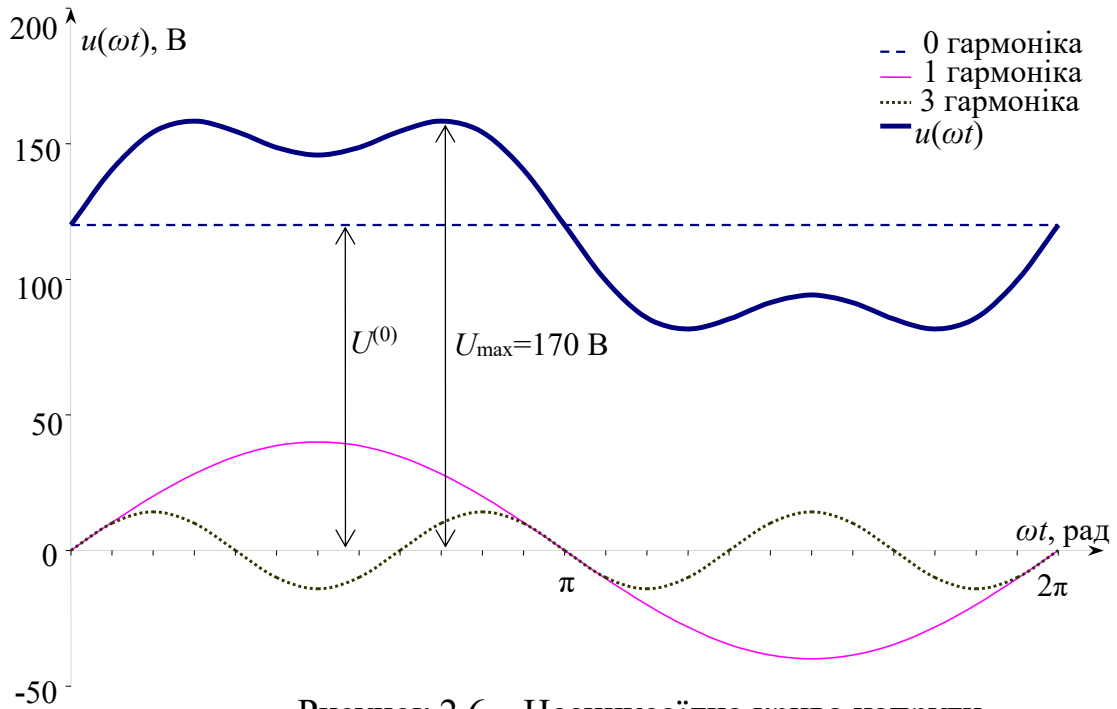


Рисунок 2.6 – Несинусоїдна крива напруги

*Визначення коефіцієнтів, що характеризують форму несинусоїдної кривої напруги*

Задана крива напруги у вигляді ряду Фур'є –  $u(\omega t) = 100 \cdot \sin \omega t + 30 \cdot \sin 2\omega t$ , В.  
Побудувати криву напруги  $u(\omega t)$ , В.

Визначити:

- діюче значення напруги  $u(\omega t)$ ;
- середнє значення напруги  $u(\omega t)$ ;
- максимальне значення напруги  $u(\omega t)$ ;
- коефіцієнт форми кривої напруги  $K_\Phi$ ,
- коефіцієнт амплітуди  $K_A$ ;
- коефіцієнт викривлення  $K_U$  за напругою.

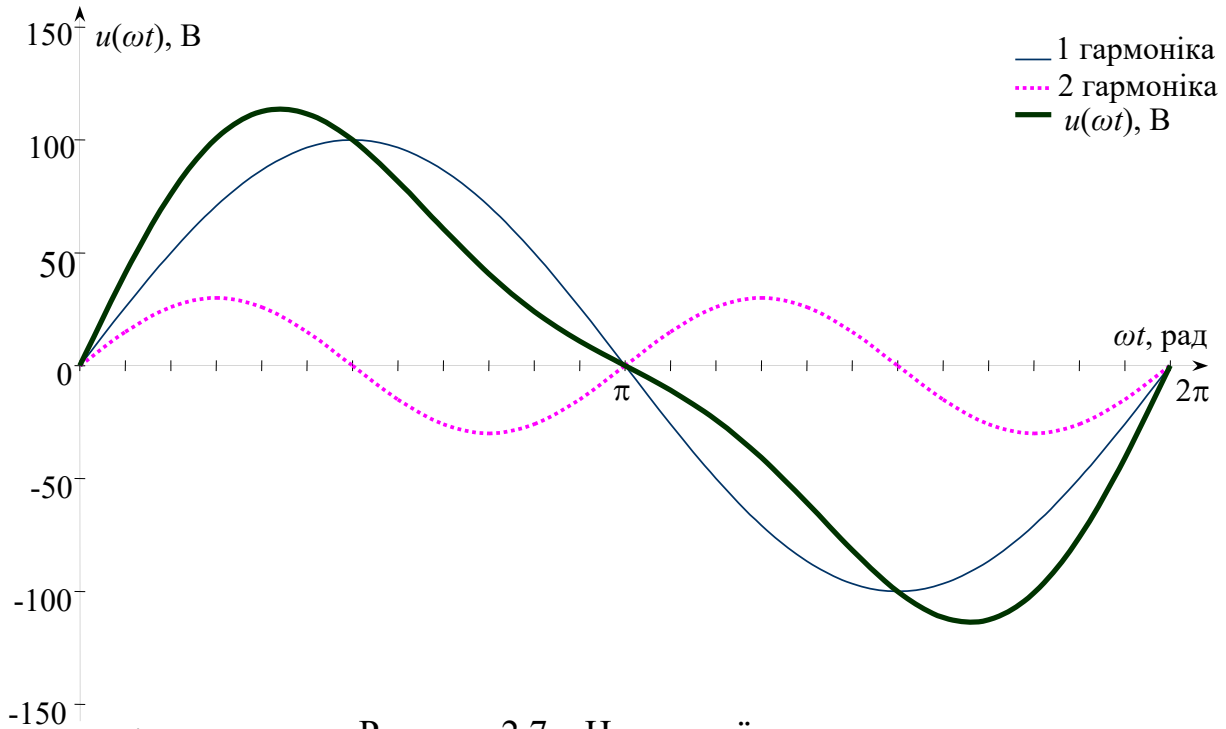
Для розв'язку задачі необхідно:

- знати основні величини й коефіцієнти негармонійних струму і напруги;

– вміти визначати аналітично максимальне та середнє значення несинусоїдної функції; будувати за рядом Фур’є криву несинусоїдної функції.

*Розв’язок*

1. Графік несинусоїдної напруги  $u(\omega t)$  – рисунок 2.7



2. Діюче значення  $U_{cp}$  Рисунок 2.7 – Несинусоїдна крива напруги  $U_{cp} = 73,8$  В.

3. Середнє за модулем значення напруги  $u(\omega t)$ .

Як бачимо з рисунку 2, крива напруги  $u(\omega t)$  має один вид симетрії – відносно початку координат, тому її середнє значення знаходимо за  $\frac{1}{2} \cdot T$  ( $T$  – період функції за часом):

$$U_{cp} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (100 \cdot \sin \omega t + 30 \cdot \sin 2\omega t) d\omega t = \frac{1}{\pi} \cdot \left[ 100 \cdot (-\cos \omega t) \Big|_0^{\pi} + 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2\omega t) \Big|_0^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[ 100 \cdot (-1) \cdot (-1 - 1) + 60 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1 - 1) \right] = \frac{2 \cdot 100}{\pi} = 63,7 \text{ В.}$$

4. Максимальне значення напруги  $u(\omega t)$ .

Беремо першу похідну функції  $u(\omega t)$ , прирівнюємо її до нуля та знаходимо значення  $\omega t$ , при якому функція  $u(\omega t)$  матиме екстремум:

$$\frac{du}{d\omega t} = (100 \cdot \cos \omega t + 30 \cdot 2 \cdot \cos 2\omega t) = 0 \Rightarrow 100 \cdot \cos \omega t + 60 \cdot \cos 2\omega t = 0.$$

Використовуємо тригонометричну формулу  $\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \Rightarrow$

$$\cos 2\omega t = 2 \cdot \cos^2 \omega t - 1 \Rightarrow 100 \cdot \cos \omega t + 60 \cdot (2 \cdot \cos^2 \omega t - 1) = 0.$$

Таким чином, отримуємо квадратне рівняння відносно  $x = \cos \omega t$ :

$$6 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 3 = 0. \text{ Корені цього рівняння: } x_1 = 0,404; x_2 = -1,237.$$

Враховуємо, що  $x = \cos \omega t$ , тому відкидаємо другий корінь. Тоді:

$$\cos \omega t = 0,404 \Rightarrow \omega t = \arccos 0,404 = \frac{\pi}{180} \cdot 66,17 = 1,1549 \text{ рад.}$$

Підставимо знайдене значення  $\omega t$  в рівняння функції  $u(\omega t)$ , отримуємо:

$$U_{\max} = 100 \cdot \sin 1,1549 + 30 \cdot \sin(2 \cdot 1,1549) = 113,65 \text{ В.}$$

5. Коефіцієнт форми кривої напруги:  $K_{\Phi} = \frac{U}{U_{cp}} = \frac{73,8}{63,7} = 1,16.$

6. Коефіцієнт амплітуди:  $K_A = \frac{U_{\max}}{U} = \frac{113,65}{73,8} = 1,54.$

7. Коефіцієнт викривлення за напругою:  $K_U = \frac{U^{(1)}}{U} = \frac{100/\sqrt{2}}{73,8} = 0,96.$

#### З А Д А Ч А 4

*Представлення несинусоїдної кривої ЕРС геометрично правильної форми у вигляді ряду Фур'є та складання схеми заміщення джерела*

Крива напруги  $e(\omega t)$  задана графічно на рисунку 2.8 ( $E_m = 6 \text{ В}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ).

Представити криву напруги  $e(\omega t)$  у вигляді ряду Фур'є, що містить три перших члени ряду.

Скласти схему заміщення джерела.

Визначити діюче значення напруги  $e(\omega t)$ .

Для розв'язку задачі треба скористатися довідковою літературою, в якій представлено розкладання в ряд Фур'є кривих геометрично правильної форми.



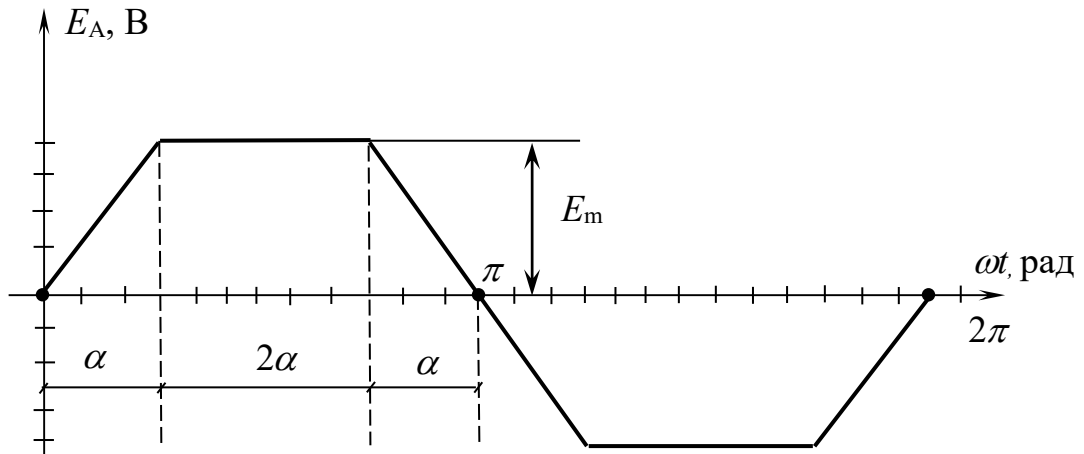


Рисунок 2.8 – Несинусоїдна крива ЕРС  $e(\omega t)$

*Розв'язок*

Крива  $e(\omega t)$  має трапецієподібну форму, тому її ряд Фур'є:

$$e(\omega t) = \frac{4 \cdot E_m}{\alpha \cdot \pi} \cdot \left[ \sin \alpha \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{9} \cdot \sin(3\alpha) \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5\alpha) \cdot \sin(5\omega t) + \dots \right] \text{ В.}$$

Після підстановки значень  $E_m = 6 \text{ В}$  і  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  отримуємо:

$$\begin{aligned} e(\omega t) &= e^{(1)} + e^{(3)} + e^{(5)} = \frac{4 \cdot 6}{\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \pi} \cdot \\ &\cdot \left[ \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{9} \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \cdot \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(5\omega t) \right] = \\ &= 6,878 \cdot \sin(\omega t) + 0,540 \cdot \sin(3\omega t) - 0,194 \cdot \sin(5\omega t) = \\ &= 6,878 \cdot \sin(\omega t) + 0,540 \cdot \sin(3\omega t) + 0,194 \cdot \sin(5\omega t + \pi), \text{ В.} \end{aligned}$$

Схема заміщення джерела  $e(\omega t)$  – рисунок 2.9.

Діюче значення:

$$E = \sqrt{\frac{E_m^{(1)2}}{2} + \frac{E_m^{(3)2}}{2} + \frac{E_m^{(5)2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{6,878^2}{2} + \frac{0,540^2}{2} + \frac{0,194^2}{2}} = 4,88 \text{ В.}$$

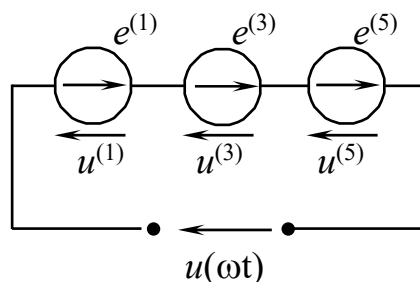


Рисунок 2.9 – Схема заміщення джерела  $e(\omega t)$

### З А Д А Ч А 5

*Представлення несинусоїдної кривої джерела струму, що задана графічно у вигляді ряду Фур'є і складання схеми заміщення*

Крива джерела струму  $i(\omega t)$  задана графічно – рисунок 2.10.

Представити криву джерела струму  $i(\omega t)$  у вигляді ряду Фур'є, що містить три перших члени розкладання.

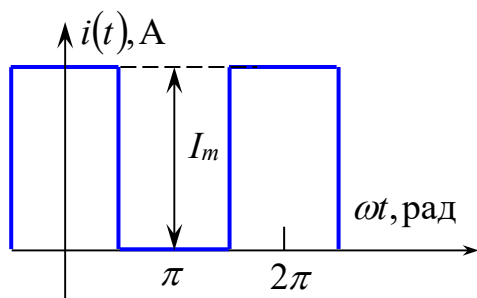


Рисунок 2.10 –  
Крива джерела  
струму  $i(\omega t)$

Скласти схему заміщення джерела струму.

Визначити діюче значення напруги  $e(\omega t)$ .

Для розв'язку задачі необхідно вміти привести задану криву до стандартного вигляду кривої геометрично правильної форми.

#### Розв'язок

Задана крива (рис. 2.10) має постійну складову  $\frac{I_m}{2}$  і початок її зсунуто відносно осі ординат на чверть періоду  $\pi/4$ . Для приведення заданої кривої до стандартного вигляду  $f(\omega t) = \frac{4 \cdot I_m}{\pi} \cdot \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$  (рис. 2.11) треба ось абсцис ( $\omega t$ ) підняти вгору на величину  $I_m/2$  й зсунути криву вліво на чверть періоду  $\pi/4$ .

Таким чином, ряд Фур'є для кривої на рисунку 2.10 має вигляд (маємо на увазі, що  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ):

$$\begin{aligned} i(\omega t) &= \frac{I_m}{2} + \frac{4 \cdot I_m / 2}{\pi} \cdot \left[ \sin\left(\omega \cdot \left(t + \frac{T}{4}\right)\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\omega \cdot \left(t + \frac{T}{4}\right)\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5\omega \cdot \left(t + \frac{T}{4}\right)\right) \right] = \\ &= \frac{I_m}{2} + \frac{2 \cdot I_m}{\pi} \cdot \left[ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\omega t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5\omega t + \frac{5 \cdot \pi}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{I_m}{2} + \frac{2 \cdot I_m}{\pi} \cdot \left[ \cos \omega t - \frac{1}{3} \cdot \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cdot \cos 5\omega t \right] = \\ &= 60 + 76,39 \cdot \cos \omega t - 25,46 \cdot \cos 3\omega t + 15,28 \cdot \cos 5\omega t, \text{ А.} \end{aligned}$$

Схема заміщення показана на рисунку 2.12.

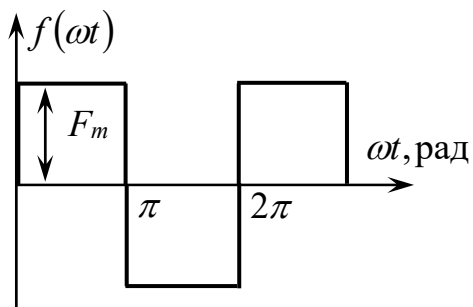


Рисунок 2.11 – Стандартний вигляд кривої прямокутної форми

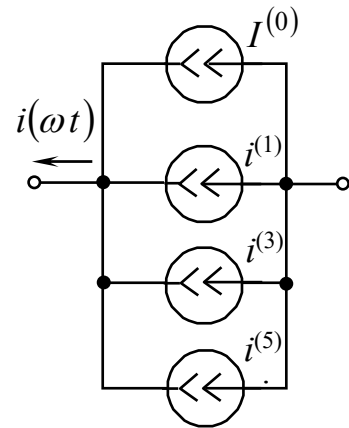


Рисунок 2.12 – Схема заміщення джерела струму  $i(\omega t)$

### З А Д А Ч А 6

*Графоаналітичне розкладання в ряд Фур'є несинусоїдної періодичної кривої геометрично неправильної форми, що задана графічно*

Задана крива напруги  $u(\omega t)$  – рисунок 2.13.

Розкласти криву напруги в ряд Фур'є, обмежувачись трьома першими членами ряду.

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати порядок графоаналітичного розкладання в ряд Фур'є;
- вміти враховувати види симетрії несинусоїдної функції, що пов'язано з гармонічним складом ряду Фур'є.

#### *Розв'язок*

Слід врахувати, що крива має два види симетрії (відносно початку координат та осі абсцис), отже можна обмежитися розкладанням чверті періоду. Такий ряд Фур'є повинен містити тільки непарні синусні складові, а саме:

$$u(\omega t) = U_m^{(1)} \cdot \sin \omega t + U_m^{(3)} \cdot \sin 3\omega t + U_m^{(5)} \cdot \sin 5\omega t + \dots$$

Розділимо чверть періоду функції  $u(\omega t)$  на шість рівних частин і виміряємо ординати функції  $u(\omega t)$  посередині кожної ділянки. При розкладанні кривої  $u(\omega t)$  в ряд Фур'є доцільно використовувати відповідні комп'ютерні програми (MathCad Professional, MS Excel та ін.).

Результати розкладання наведені в таблиці 2.2 (обмежуємося трьома членами ряду).

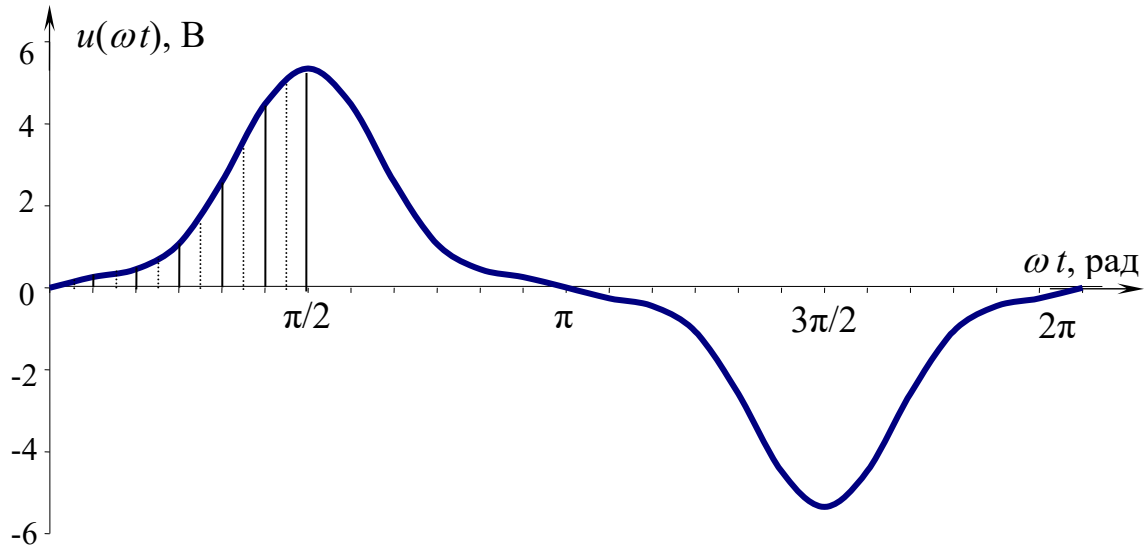


Рисунок 2.13 – Крива напруги  $u(\omega t)$

Таблиця 2.2 – Розкладання в ряд Фур'є функції  $u(\omega t)$

| $P$  | $u(\omega t)$ | $\kappa=1$            |                 |                         | $\kappa=3$            |                  |                          | $\kappa=5$           |                        |                          |
|------|---------------|-----------------------|-----------------|-------------------------|-----------------------|------------------|--------------------------|----------------------|------------------------|--------------------------|
|      |               | $\omega t$            | $\sin \omega t$ | $u \cdot \sin \omega t$ | $3\omega t$           | $\sin 3\omega t$ | $u \cdot \sin 3\omega t$ | $5 \cdot \omega t$   | $\sin \cdot 5\omega t$ | $u \cdot \sin 5\omega t$ |
| 1    | 0,2           | 7,5                   | 0,131           | 0,026                   | 22,5                  | 0,383            | 0,077                    | 37,5                 | 0,609                  | 0,122                    |
| 2    | 0,4           | 22,5                  | 0,383           | 0,153                   | 67,5                  | 0,924            | 0,370                    | 112,5                | 0,924                  | 0,370                    |
| 3    | 0,7           | 37,5                  | 0,609           | 0,426                   | 112,5                 | 0,924            | 0,647                    | 187,5                | -0,131                 | -0,091                   |
| 4    | 1,3           | 52,5                  | 0,793           | 1,031                   | 157,5                 | 0,383            | 0,498                    | 262,5                | -0,991                 | -1,289                   |
| 5    | 4,2           | 67,5                  | 0,924           | 3,880                   | 202,5                 | -0,383           | -1,607                   | 337,5                | -0,383                 | -1,607                   |
| 6    | 4,8           | 82,5                  | 0,991           | 4,759                   | 247,5                 | -0,924           | -4,434                   | 412,5                | 0,793                  | 3,808                    |
| сума |               | $\sum_1^6 1 = 10,276$ |                 |                         | $\sum_1^6 3 = -4,451$ |                  |                          | $\sum_1^6 5 = 1,312$ |                        |                          |

Знаходимо  $U_m^{(1)}$ ,  $U_m^{(3)}$ ;  $U_m^{(5)}$ .

Амплітуди дорівнюватимуть, В:  $U_m^{(1)} = \frac{2 \cdot 4}{24} \cdot \sum_1^6 1 = \frac{1}{3} \cdot 10,276 = 3,425$ ;

$U_m^{(3)} = \frac{2 \cdot 4}{24} \cdot \sum_1^6 3 = \frac{1}{3} \cdot (-4,451) = -1,484$ ;  $U_m^{(5)} = \frac{2 \cdot 4}{24} \cdot \sum_1^6 5 = \frac{1}{3} \cdot 1,312 = 0,437$ .

Таким чином, ряд Фур'є має вигляд

$$u(\omega t) = 3,425 \cdot \sin(\omega t) - 1,484 \cdot \sin(3\omega t) + 0,437 \cdot \sin(5\omega t), \text{ В.}$$

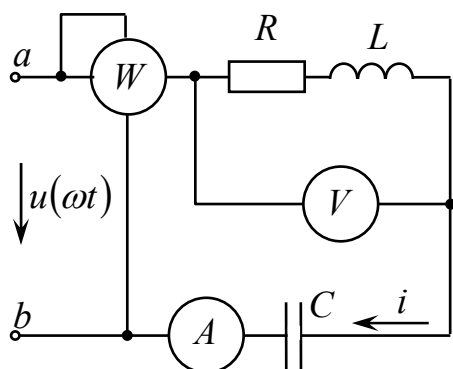
### ЗАДАЧА 7

Розрахунок нерозгалуженого  $R-L-C$  кола, що живиться несинусоїдним джерелом напруги

Задана крива напруги у вигляді ряду Фур'є:

$$u(\omega t) = 180 \cdot \sin\left(\omega t - 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 120 \cdot \sin(3\omega t) + 80 \cdot \sin\left(5\omega t + 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \text{ В.}$$

Параметри  $R-L-C$  кола (рис. 2.14):



$$R = 6 \text{ Ом}, X_L = \omega \cdot L = 2 \text{ Ом}, X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = 18 \text{ Ом.}$$

Визначити:

- миттєве значення струму  $i(\omega t)$ ;
- миттєве значення напруги  $u_{ab}$ ;
- покази приладів електродинамічної системи;
- значення повної, реактивної і потужності викривлення;
- коефіцієнт викривлення  $K_B$  за потужністю.

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати порядок розрахунку електричних кіл з періодичними несинусоїдними джерелами енергії;
- вміти визначати потужності в електричних колах з періодичними несинусоїдними джерелами енергії.

#### Розв'язок

1. Комплексні амплітуди напруги кожної гармоніки окремо, В.

$$\underline{U}_m^{(1)} = 180 \angle -30^\circ, \quad \underline{U}_m^{(3)} = 120, \quad \underline{U}_m^{(5)} = 80 \angle 30^\circ.$$

2. Комплексні опори кола й опори ділянки « $ab$ » для кожної гармоніки, Ом:

$$\underline{Z}^{(1)} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 6 + j \cdot (2 - 18) = 6 - j \cdot 16 = 17 \angle -69,4^\circ,$$

$$\underline{Z}^{(3)} = R + j\left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right) = 6 + j\left(3 \cdot 2 - \frac{18}{3}\right) = 6 + j \cdot (6 - 6) = 6,$$

$$\underline{Z}^{(5)} = R + j\left(5\omega L - \frac{1}{5\omega C}\right) = 6 + j \cdot \left(5 \cdot 2 - \frac{18}{5}\right) = 6 + j \cdot 6,4 = 8,8 \angle 46,8^\circ,$$

$$\underline{Z}_{ab}^{(1)} = R + j \cdot \omega \cdot L = 6 + j \cdot 2 = 6,3 \angle 18,4^\circ, \quad \underline{Z}_{ab}^{(3)} = R + j \cdot 3 \cdot \omega L = 6 + j \cdot 3 \cdot 2 = 8,5 \angle 45^\circ,$$

$$\underline{Z}_{ab}^{(5)} = R + j \cdot 5 \cdot \omega L = 6 + j \cdot 5 \cdot 2 = 11,7 \angle 59^\circ.$$

3. Комплекси амплітудних значень струму для окремих гармонік, А:

$$\underline{I}_m^{(1)} = \frac{\underline{U}_m^{(1)}}{\underline{Z}^{(1)}} = \frac{180 \angle -30^\circ}{17 \angle -69,4^\circ} = 10,6 \angle 39,4^\circ, \quad \underline{I}_m^{(3)} = \frac{\underline{U}_m^{(3)}}{\underline{Z}^{(3)}} = \frac{120}{6} = 20,$$

$$\underline{I}_m^{(5)} = \frac{\underline{U}_m^{(5)}}{\underline{Z}^{(5)}} = \frac{80 \angle 30^\circ}{8,8 \angle 46,8^\circ} = 9,1 \angle -16,8^\circ.$$

4. Миттєве значення струму кола для окремих гармонік, А:

$$i^{(1)} = 10,6 \cdot \sin\left(\omega t + 39,4^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right); \quad i^{(3)} = 20 \cdot \sin(3\omega t); \quad i^{(5)} = 9,1 \cdot \sin\left(5\omega t - 16,8^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

За методом накладання:

$$i(\omega t) = i^{(1)} + i^{(3)} + i^{(5)} = \left[ 10,6 \sin\left(\omega t + 39,4^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 20 \sin(3\omega t) + 9,1 \sin\left(5\omega t - 16,8^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) \right], \text{ А.}$$

5. Комплекси амплітудних значень напруги на ділянці «ab» для кожної гармоніки, В:  $\underline{U}_{mab}^{(1)} = \underline{I}_m^{(1)} \underline{Z}_{ab}^{(1)} = 10,6 \angle 39,4^\circ \cdot 6,3 \angle 18,4^\circ = 66,8 \angle 57,8^\circ$ ;

$$\underline{U}_{mab}^{(3)} = \underline{I}_m^{(3)} \underline{Z}_{ab}^{(3)} = ; \underline{U}_{mab}^{(3)} = \underline{I}_m^{(3)} \underline{Z}_{ab}^{(3)} = 20 \cdot 8,5 \angle 45^\circ = 170 \angle 45^\circ ;$$

$$\underline{U}_{mab}^{(5)} = \underline{I}_m^{(5)} \underline{Z}_{ab}^{(5)} = 9,1 \angle -16,8^\circ \cdot 11,7 \angle 59^\circ = 106,5 \angle 42,2^\circ .$$

6. Миттєве значення напруги на ділянці кола «ab»

Миттєві значення напруги для окремих гармонік, В:

$$u_{ab}^{(1)} = 66,8 \cdot \sin\left(\omega t + 57,8^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right); \quad u_{ab}^{(3)} = 170 \cdot \sin\left(3\omega t + 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right);$$

$$u_{ab}^{(5)} = 106,5 \cdot \sin\left(5\omega t + 42,2^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

За методом накладання:

$$u_{ab}(\omega t) = u_{ab}^{(1)} + u_{ab}^{(3)} + u_{ab}^{(5)} = 66,8 \cdot \sin\left(\omega t + 57,8^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 170 \cdot \sin\left(3\omega t + 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 106,5 \cdot \sin\left(5\omega t + 42,2^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \text{ В.}$$

7. Покази приладів електродинамічної системи дорівнюють діючим значенням відповідних величин:

$$I = \sqrt{\frac{I_m^{(1)2}}{2} + \frac{I_m^{(3)2}}{2} + \frac{I_m^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{10,6^2}{2} + \frac{20^2}{2} + \frac{9,1^2}{2}} = 17,2 \text{ А.}$$

$$U_{ab} = \sqrt{\frac{U_{mab}^{(1)2}}{2} + \frac{U_{mab}^{(3)2}}{2} + \frac{U_{mab}^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{66,8^2}{2} + \frac{170^2}{2} + \frac{106,5^2}{2}} = 149,5 \text{ В.}$$

Показ ватметра відповідає активній потужності всього кола:

$$P = I^2 \cdot R = 17,2^2 \cdot 6 = 1775 \text{ Вт.}$$

8. Повна, реактивна і потужність викривлення кола.

Повна потужність –  $S = U \cdot I$ ,

де  $U$  – діюче значення напруги на вході кола.

$$U = \sqrt{\frac{U_m^{(1)2}}{2} + \frac{U_m^{(3)2}}{2} + \frac{U_m^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{180^2}{2} + \frac{120^2}{2} + \frac{80^2}{2}} = 163,1 \text{ В.}$$

$$S = U \cdot I = 163,1 \cdot 17,2 = 2805,3 \text{ ВА.}$$

Реактивна потужність, ВАр:

$$Q = Q^{(1)} + Q^{(3)} + Q^{(5)} = \left(\frac{I_m^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \left(\frac{I_m^{(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right) + \left(\frac{I_m^{(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(5\omega L - \frac{1}{5\omega C}\right) = \frac{10,6^2}{2} \cdot (-16) + \frac{20^2}{2} \cdot 0 + \frac{9,1^2}{2} \cdot 6,4 = -633,9.$$

Потужність викривлення:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{2805,5^2 - 1775^2 - 633,9^2} = 2078,1 \text{ ВА.}$$

9. Коефіцієнт викривлення за потужністю:

$$K_B = \frac{T}{S} = \frac{2078,1}{2805,5} = 0,74.$$

### ЗАДАЧА 8

Розрахунок розгалуженого  $R$ – $L$ – $C$  кола, що живиться несинусоїдним джерелом напруги

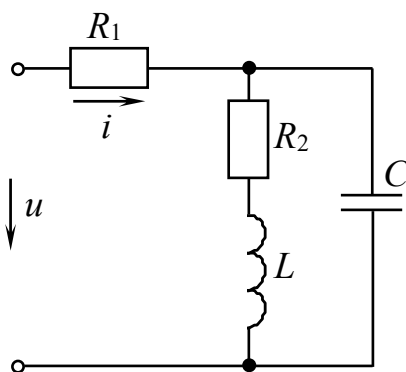


Рисунок 2.15 –  
Схема досліджуваного кола

Задана несинусоїдна напруга у вигляді ряду Фур'є  $u(\omega t) = 30 + 15 \cdot \sin \omega t + 20 \cdot \sin 3\omega t$ , В.

Параметри кола (рис. 2.15) дорівнюють:  
 $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 0,5$  Ом,  $X_L^{(1)} = 1$  Ом,  $X_C^{(1)} = 9$  Ом.

Визначити:

- миттєве значення струму кола  $i(\omega t)$ ;
- діючі значення вхідної напруги  $u(\omega t)$  і струму  $i_1(\omega t)$ ;
- активну, реактивну і повну потужності кола.

Для розв'язку задачі необхідно:

– знати порядок розрахунку складних електричних кіл, де діють періодичні несинусоїдні джерела енергії;

– вміти визначати потужності в електричних колах з періодичними несинусоїдними джерелами енергії.

### Розв'язок

1. Визначаємо струм нульової гармоніки (рис. 2.16):

$$X_L^{(0)} = 0 \text{ Ом}; X_C^{(0)} = \infty \text{ Ом};$$

$$I^{(0)} = \frac{U^{(0)}}{R_1 + R_2} = \frac{30}{1,5} = 20 \text{ А.}$$

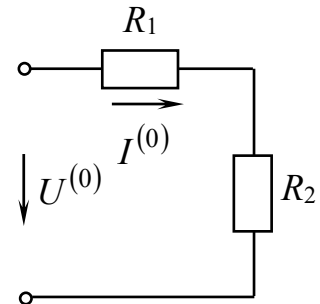


Рисунок 2.16 – Схема кола для нульової гармоніки

2. Розрахунок першої гармоніки.

Комплексний опір кола для першої гармоніки:

$$\underline{Z}^{(1)} = R_1 + \frac{(R_2 + j \cdot X_L^{(1)}) \cdot (-j \cdot X_C^{(1)})}{R_2 + j \cdot X_L^{(1)} - j \cdot X_C^{(1)}} = 1 + \frac{(0,5 + j \cdot 1) \cdot (-j \cdot 9)}{0,5 + j \cdot (1 - 9)} =$$

$$= 1 + \frac{1,118 \angle 63,43^\circ \cdot 9 \angle -90^\circ}{8,016 \angle -86,42^\circ} = 1 + 1,255 \angle 59,85^\circ = 1 + 0,63 + j \cdot 1,085 =$$

$$= 1,63 + j \cdot 1,085 = 1,96 \angle 33,65^\circ \text{ Ом.}$$

Комплекс і миттєве значення струму першої гармоніки, А:

$$\underline{I}_m^{(1)} = \frac{U_m^{(1)}}{\underline{Z}^{(1)}} = \frac{15 \angle 0^\circ}{1,96 \angle 33,65^\circ} = 7,65 \angle -33,65^\circ \Rightarrow i^{(1)} = 7,65 \cdot \sin\left(\omega t - 33,65^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

3. Розрахунок третьої гармоніки.

Комплексний опір кола для третьої гармоніки:

$$\underline{Z}^{(3)} = R_1 + \frac{(R_2 + j \cdot X_L^{(3)}) \cdot (-j \cdot X_C^{(3)})}{R_2 + j \cdot X_L^{(3)} - j \cdot X_C^{(3)}} = 1 + \frac{(0,5 + j \cdot 3) \cdot (-j \cdot 3)}{0,5 + j \cdot \left(1 \cdot 3 - \frac{9}{3}\right)} =$$

$$= 1 + \frac{3,04 \angle 80,54^\circ \cdot 3 \angle -90^\circ}{0,5} = 1 + 18,24 \angle -9,46^\circ = 1 + 17,99 - j \cdot 3 =$$

$$= 18,99 - j \cdot 3 = 19,22 \angle -8,98^\circ \text{ Ом.}$$



Комплекс і миттєве значення струму третьої гармоніки, А:

$$\underline{I}_m^{(3)} = \frac{U_m^{(3)}}{Z^{(3)}} = \frac{20 \angle 0^\circ}{19,22 \angle -8,98^\circ} = 1,0405 \angle 8,98^\circ \Rightarrow i^{(3)} = 1,0405 \cdot \sin\left(3\omega t - 8,98^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

4. Ряд Фур'є для струму  $i(\omega t)$ :

$$i(\omega t) = I^{(0)} + i^{(1)} + i^{(3)} = 20 + 7,65 \cdot \sin\left(\omega t - 33,65^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 1,04 \cdot \sin\left(3 \cdot \omega t + 8,98^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) \text{ А}$$

5. Діючі значення напруги і струму:

$$U = \sqrt{U^{(0)2} + U^{(1)2} + U^{(3)2}} = \sqrt{30^2 + \frac{15^2}{2} + \frac{20^2}{2}} = 34,8 \text{ В.}$$

$$I = \sqrt{I^{(0)2} + \frac{1}{2} \cdot (I_m^{(1)2} + I_m^{(3)2})} = \sqrt{20^2 + \frac{7,65^2}{2} + \frac{1,04^2}{2}} = 20,73 \text{ А.}$$

6. Повна, активна, реактивна і потужність викривлення.

Повна потужність:

$$S = U \cdot I = 34,8 \cdot 20,73 = 721,46 \text{ ВА.}$$

Активна потужність:

$$\begin{aligned} P &= U^{(0)} \cdot I^{(0)} + \frac{1}{2} \cdot (U_m^{(1)} \cdot I_m^{(1)} \cdot \cos \varphi^{(1)} + U_m^{(3)} \cdot I_m^{(3)} \cdot \cos \varphi^{(3)}) = \\ &= 30 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot (15 \cdot 7,65 \cdot \cos 33,65^\circ + 20 \cdot 1,04 \cdot \cos(-8,98^\circ)) = 658 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \cdot (U_m^{(1)} \cdot I_m^{(1)} \cdot \sin \varphi^{(1)} + U_m^{(3)} \cdot I_m^{(3)} \cdot \sin \varphi^{(3)}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (15 \cdot 7,6 \cdot \sin 33,65^\circ + 20 \cdot 1,04 \cdot \sin(-8,98^\circ)) = 29,96 \text{ ВАр.} \end{aligned}$$

Потужність викривлення:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{721,46^2 - 658^2 - 29,96^2} = 294,3 \text{ ВА.}$$

Коефіцієнт викривлення потужності:

$$K_T = \frac{T}{S} = \frac{294,3}{721,46} = 0,408.$$

### З А Д А Ч А 9

*Розрахунок трифазного кола «зірка-зірка» при симетричному навантаженні з опором в нульовому проводі, що живиться негармонійними джерелами напруги*

Задана крива напруги фаза «А» у вигляді ряду Фур'є:

$$e_A(\omega t) = 75 \cdot \sin\left(\omega t + 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) - 35 \cdot \sin\left(3\omega t - 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 25 \cdot \sin(5\omega t), \text{ В.}$$

Комплексні опори фаз і нульового проводу для першої гармоніки дорівнюють:  $\underline{Z}_\phi^{(1)} = (5 - j \cdot 8), \text{ Ом}; \underline{Z}_0^{(1)} = 8,94 \angle 63,4^\circ \text{ Ом.}$

Розрахункова схема – рисунок 2.17.

Визначити:

- миттєві значення лінійних напруг;
- миттєві значення лінійних (фазних) струмів;
- миттєве значення струму у нульовому проводі;
- покази приладів електромагнітної системи.

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати методику розрахунку трифазних кіл, що живляться негармонійними джерелами напруги;
- вміти визначати діючі значення несинусоїдних періодичних струмів і напруг.

*Розв'язок*

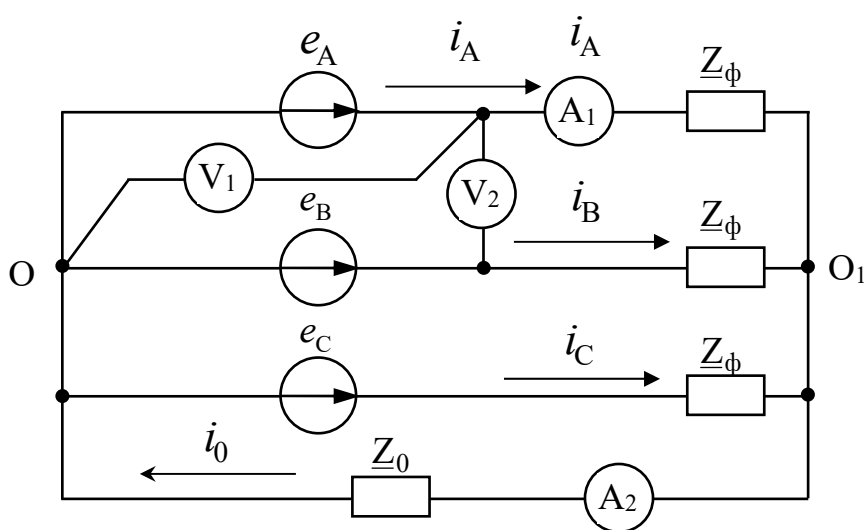


Рисунок 2.17 – Схема досліджуваного кола

1. Комплекси амплітудних значень фазних ЕРС для всіх гармонік, В:

$$\underline{E}_{mA}^{(1)} = 75 \angle 30^\circ, \underline{E}_{mB}^{(1)} = 75 \angle (30^\circ - 120^\circ) = 75 \angle -90^\circ, \underline{E}_{mC}^{(1)} = 75 \angle (30^\circ + 120^\circ) = 75 \angle 150^\circ.$$

$$\underline{E}_{mA}^{(3)} = \underline{E}_{mB}^{(3)} = \underline{E}_{mC}^{(3)} = -35 \angle -30^\circ = 35 \angle 150^\circ.$$

$$\underline{E}_{mA}^{(5)} = 25 \angle 0^\circ, \underline{E}_{mB}^{(5)} = 25 \angle (0^\circ + 120^\circ) = 25 \angle 120^\circ, \underline{E}_{mC}^{(5)} = 25 \angle (0^\circ - 120^\circ) = 25 \angle -120^\circ.$$

2. Комплекси амплітудних значень лінійних напруг для усіх гармонік, В:

$$\underline{U}_{mAB}^{(1)} = \underline{E}_{mA}^{(1)} \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 75 \angle 30^\circ \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 129,9 \angle 60^\circ,$$

$$\underline{U}_{mBC}^{(1)} = \underline{E}_{mB}^{(1)} \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 75 \angle -90^\circ \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 129,9 \angle -60^\circ,$$

$$\underline{U}_{mCA}^{(1)} = \underline{E}_{mC}^{(1)} \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 75 \angle 150^\circ \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 129,9 \angle 180^\circ.$$

$$\underline{U}_{mAB}^{(3)} = \underline{U}_{mBC}^{(3)} = \underline{U}_{mCA}^{(3)} = 0.$$

$$\underline{U}_{mAB}^{(5)} = \underline{E}_{mA}^{(5)} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 25 \angle 0^\circ \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 43,3 \angle -30^\circ.$$

$$\underline{U}_{mBC}^{(5)} = \underline{E}_{mB}^{(5)} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 25 \angle 120^\circ \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 43,3 \angle 90^\circ.$$

$$\underline{U}_{mCA}^{(5)} = \underline{E}_{mC}^{(5)} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 25 \angle -120^\circ \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 43,3 \angle -150^\circ.$$

3. Розрахунок першої гармоніки:

$$\underline{Z}_\phi^{(1)} = 5 - j \cdot 8 = 9,43 \angle -58^\circ, \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_0^{(1)} = 8,94 \angle 63,4^\circ = 4 + j \cdot 8 \text{ Ом}.$$

Оскільки навантаження симетричне, то  $\underline{U}_{m010}^{(1)} = 0$  В.

Струми фаз, А:

$$\underline{I}_{mA}^{(1)} = \frac{\underline{E}_{mA}^{(1)}}{\underline{Z}_\phi^{(1)}} = \frac{75 \angle 30^\circ}{9,43 \angle -58^\circ} = 7,95 \angle 88^\circ = 0,28 + j \cdot 7,945,$$

$$\underline{I}_{mB}^{(1)} = \frac{\underline{E}_{mB}^{(1)}}{\underline{Z}_\phi^{(1)}} = \frac{75 \angle -90^\circ}{9,43 \angle -58^\circ} = 7,95 \angle -32^\circ = 6,74 - j \cdot 4,21,$$

$$\underline{I}_{mC}^{(1)} = \frac{\underline{E}_{mC}^{(1)}}{\underline{Z}_\phi^{(1)}} = \frac{75 \angle 150^\circ}{9,43 \angle -58^\circ} = 7,95 \angle 208^\circ = 7,95 \angle -152^\circ = -7,02 - j \cdot 3,73.$$

Струм в нульовому проводі (за першим законом Кірхгофа):

$$\underline{I}_{m0}^{(1)} = \underline{I}_{mA}^{(1)} + \underline{I}_{mB}^{(1)} + \underline{I}_{mC}^{(1)} = 0,28 + j \cdot 7,945 + 6,74 - j \cdot 4,21 - 7,02 - j \cdot 3,73 \approx 0 \text{ А}.$$

4. Розрахунок третьої гармоніки:

$$\underline{Z}_{\phi}^{(3)} = 5 - j \cdot \frac{8}{3} = 5 - j \cdot 2,67 = 5,67 \angle -28,1^\circ \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_0^{(3)} = 4 + j \cdot 8 \cdot 3 = 4 + j \cdot 24 = 24,33 \angle 80,5^\circ \text{ Ом}.$$

Напряга зміщення нейтралі при симетричному навантаженні:

$$\underline{U}_{m010}^{(3k)} = \frac{E_{\phi m}^{(3k)} \cdot 3 Y_{-\phi}^{(3k)}}{3 \cdot Y_{-\phi}^{(3k)} + Y_{-0}^{(3k)}} = \frac{E_{mA}^{(3)} \cdot \underline{Z}_0^{(3)}}{\underline{Z}_0^{(3)} + \frac{\underline{Z}_{\phi}^{(3)}}{3}}.$$

Струм у нульовому проводі, А:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{m0}^{(3)} &= \frac{\underline{U}_{m010}^{(3)}}{\underline{Z}_0^{(3)}} = \frac{E_{mA}^{(3)}}{\underline{Z}_0^{(3)} + \frac{\underline{Z}_{\phi}^{(3)}}{3}} = \frac{35 \angle 150^\circ}{4 + j \cdot 24 + \frac{(5 - j \cdot 2,67)}{3}} = \frac{35 \angle 150^\circ}{4 + j \cdot 24 + 1,67 - j \cdot 0,89} = \\ &= \frac{35 \angle 150^\circ}{5,67 + j \cdot 23,11} = \frac{35 \angle 150^\circ}{23,8 \angle 76,2^\circ} = 1,47 \angle 73,8^\circ = 0,41 + j \cdot 1,41. \end{aligned}$$

Струми фаз, А:

$$\underline{I}_{mA}^{(3)} = \underline{I}_{mB}^{(3)} = \underline{I}_{mC}^{(3)} = \frac{\underline{I}_{m0}^{(3)}}{3} = \frac{1,47 \angle 73,8^\circ}{3} = 0,49 \angle 73,8^\circ.$$

5. Розрахунок п'ятої гармоніки:

$$\underline{Z}_{\phi}^{(5)} = 5 - j \cdot \frac{8}{5} = 5 - j \cdot 1,6 = 5,25 \angle -17,7^\circ \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_0^{(5)} = 4 + j \cdot 8 \cdot 5 = 4 + j \cdot 40 = 40,2 \angle 84,3^\circ \text{ Ом}.$$

Навантаження симетричне, то  $\underline{U}_{m010}^{(5)} = 0 \text{ В}$ .

Струми фаз, А:

$$\underline{I}_{mA}^{(5)} = \frac{E_{mA}^{(5)}}{\underline{Z}_{\phi}^{(5)}} = \frac{25 \angle 0^\circ}{5,25 \angle -17,7^\circ} = 4,76 \angle 17,7^\circ = 4,53 + j \cdot 1,45,$$

$$\underline{I}_{mB}^{(5)} = \frac{E_{mB}^{(5)}}{\underline{Z}_{\phi}^{(5)}} = \frac{25 \angle 120^\circ}{5,25 \angle -17,7^\circ} = 4,76 \angle 137,7^\circ = -3,52 + j \cdot 3,2,$$

$$\underline{I}_{mC}^{(5)} = \frac{E_{mC}^{(5)}}{\underline{Z}_{\phi}^{(5)}} = \frac{25 \angle -120^\circ}{5,25 \angle -17,7^\circ} = 4,76 \angle -102,3^\circ = -1,01 - j \cdot 4,65.$$

Струм в нульовому проводі (за першим законом Кірхгофа):

$$\underline{I}_{m0}^{(5)} = \underline{I}_{mA}^{(5)} + \underline{I}_{mB}^{(5)} + \underline{I}_{mC}^{(5)} = 4,53 + j \cdot 1,45 - 3,52 + j \cdot 3,2 - 1,01 - j \cdot 4,65 \approx 0 \text{ А}.$$

6. Миттєві значення струмів, А:

$$i_A = i_A^{(1)} + i_A^{(3)} + i_A^{(5)} = 7,95 \cdot \sin\left(\omega t + 88^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 0,49 \cdot \sin\left(3\omega t + 73,8^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 4,76 \cdot \sin\left(5\omega t + 17,7^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right);$$

$$i_B = i_B^{(1)} + i_B^{(3)} + i_B^{(5)} = 7,95 \cdot \sin\left(\omega t - 32^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 0,49 \cdot \sin\left(3\omega t + 73,8^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 4,76 \cdot \sin\left(5\omega t + 137,7^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right);$$

$$i_C = i_C^{(1)} + i_C^{(3)} + i_C^{(5)} = 7,95 \cdot \sin\left(\omega t - 152^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 0,49 \cdot \sin\left(3\omega t + 73,8^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 4,76 \cdot \sin\left(5\omega t - 102,3^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right); \quad i_0 = i_0^{(3)} = 1,47 \cdot \sin\left(3\omega t + 73,8^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

7. Миттєві значення фазних та лінійних напруг, В.

$$e_B(\omega t) = 75 \cdot \sin\left(\omega t - 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 35 \cdot \sin\left(3\omega t + 150^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 25 \cdot \sin\left(5\omega t + 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right)$$

,

$$e_C(\omega t) = 75 \cdot \sin\left(\omega t + 150^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 35 \cdot \sin\left(3\omega t + 150^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 25 \cdot \sin\left(5\omega t - 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right)$$

,

$$u_{AB} = u_{AB}^{(1)} + u_{AB}^{(5)} = 129,9 \cdot \sin\left(\omega t + 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 43,3 \cdot \sin\left(5\omega t - 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right),$$

$$u_{BC} = u_{BC}^{(1)} + u_{BC}^{(5)} = 129,9 \cdot \sin\left(\omega t - 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 43,3 \cdot \sin\left(5\omega t + 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right),$$

$$u_{CA} = u_{CA}^{(1)} + u_{CA}^{(5)} = 129,9 \cdot \sin\left(\omega t + 180^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 43,3 \cdot \sin\left(5\omega t - 150^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

8. Діючі значення струмів (покази амперметрів).

Показ амперметра  $A_1$  дорівнює діючому значенню фазного струму:

$$I_A = I_B = I_C = \sqrt{\left(\frac{I_{mA}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{mA}^{(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{mA}^{(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7,95}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,49}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4,76}{\sqrt{2}}\right)^2} = 6,56 \text{ А.}$$

Показ амперметра  $A_2$  дорівнює діючому значенню струму в нульовому проводі:

$$I_0 = \sqrt{\left(\frac{I_{m0}^{(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{I_{m0}^{(3)}}{\sqrt{2}} = \frac{1,47}{\sqrt{2}} = 1,04 \text{ А.}$$

9. Діючі значення напруг (та відповідно показники вольтметрів).

Показ вольтметра  $V_1$  дорівнює діючому значенню фазної напруги:

$$E_A = E_B = E_C = \sqrt{\left(\frac{E_{mC}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{E_{mC}^{(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{E_{mC}^{(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{75}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{35}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right)^2} = 61,1 \text{ В.}$$

Показ вольтметра  $V_2$  дорівнює діючому значенню лінійної напруги:

$$U_{AB} = \sqrt{\left(\frac{U_{mAB}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{mAB}^{(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{129,9}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{43,3}{\sqrt{2}}\right)^2} = 96,8 \text{ В.}$$

### ЗАДАЧА 10

*Розрахунок трифазного кола «зірка-зірка»,  
що живиться негармонійними джерелами напруги, при несиметричному  
навантаженні за відсутності нульового проводу*

Крива напруги фази «А» задана у вигляді ряду Фур'є:

$$e_A = 220 \cdot \sin \omega t + 80 \cdot \sin\left(3\omega t - 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \text{ В.}$$

Опори фаз дорівнюють:  $Z_A = 40 \text{ Ом}$ ;  $Z_B^{(1)} = -j \cdot 40, \text{ Ом}$ ;  $Z_C^{(1)} = j \cdot 40 \text{ Ом}$ .

Розрахункова схема має вигляд – рисунок 1.1.

Визначити:

- миттєві значення лінійних (фазних) струмів;
- покази приладів електромагнітної системи.

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати методику розрахунку трифазних кіл, що живляться негармонійними джерелами напруги;
- вміти визначати діючі значення несинусоїдних періодичних струмів і напруг.

#### *Розв'язок*

1. Розрахунок для першої гармоніки.

Комплексні амплітуди фазних ЕРС, В:

$$\underline{E}_{mA}^{(1)} = 220 \angle 0^\circ; \underline{E}_{mB}^{(1)} = 220 \angle -120^\circ; \underline{E}_{mC}^{(1)} = 220 \angle 120^\circ.$$

Провідності фаз, См:

$$\underline{Y}_A^{(1)} = \frac{1}{R} = 0,025; \underline{Y}_B^{(1)} = \frac{1}{-j \cdot x_C^{(1)}} = j \cdot 0,025; \underline{Y}_C^{(1)} = \frac{1}{j \cdot x_L^{(1)}} = -j \cdot 0,025.$$

$$\begin{aligned} \text{Напряга зміщення нейтралі} - \underline{U}_{m010}^{(1)} &= \frac{\underline{E}_{mA}^{(1)} \cdot \underline{Y}_A^{(1)} + \underline{E}_{mB}^{(1)} \cdot \underline{Y}_B^{(1)} + \underline{E}_{mC}^{(1)} \cdot \underline{Y}_C^{(1)}}{\underline{Y}_A^{(1)} + \underline{Y}_B^{(1)} + \underline{Y}_C^{(1)}} = \\ &= \frac{220 \cdot 0,025 + 220 \angle -120^\circ \cdot 0,025 \angle 90^\circ + 220 \angle 120^\circ \cdot 0,025 \angle -90^\circ}{0,025 + j \cdot 0,025 - j \cdot 0,025} = 600 \text{ В.} \end{aligned}$$

Напряги на фазних навантаженнях, В:

$$\underline{U}_{ma01}^{(1)} = \underline{E}_{mA}^{(1)} - \underline{U}_{m010}^{(1)} = 220 - 600 = -380 = 380 \angle 180^\circ,$$

$$\underline{U}_{mb01}^{(1)} = \underline{E}_{mB}^{(1)} - \underline{U}_{m010}^{(1)} = 220 \angle -120^\circ - 600 = -110 - j \cdot 190 - 600 = 735 \angle -165^\circ,$$

$$\underline{U}_{mc01}^{(1)} = \underline{E}_{mC}^{(1)} - \underline{U}_{m010}^{(1)} = 220 \angle 120^\circ - 600 = -710 + j \cdot 190 = 735 \angle 165^\circ.$$

Лінійні (фазні) струми, А:

$$\underline{I}_{mA}^{(1)} = \underline{U}_{ma01}^{(1)} \cdot \underline{Y}_A^{(1)} = 380 \angle 180^\circ \cdot 0,025 = 9,5 \angle 180^\circ,$$

$$\underline{I}_{mB}^{(1)} = \underline{U}_{mb01}^{(1)} \cdot \underline{Y}_B^{(1)} = 735 \angle -165^\circ \cdot 0,025 \angle 90^\circ = 18,375 \angle -75^\circ,$$

$$\underline{I}_{mC}^{(1)} = \underline{U}_{mc01}^{(1)} \cdot \underline{Y}_C^{(1)} = 734 \angle 165^\circ \cdot 0,025 \angle -90^\circ = 18,375 \angle 75^\circ.$$

## 2. Розрахунок для третьої гармоніки.

При з'єднанні генератора й симетричного навантаження зіркою за відсутності нульового проводу струми третіх та інших гармонік нульової послідовності не можуть протікати по лінійних проводах ( $\underline{I}_{mA}^{(3)} = \underline{U}_{ma01}^{(3)} \cdot \underline{Y}_A^{(3)} = 0$ , так як  $\underline{U}_{m010}^{(3)} = \underline{E}_{mA}^{(3)}$ ;  $\underline{U}_{ma01}^{(3)} = \underline{E}_{mA}^{(3)} - \underline{U}_{m010}^{(3)} = 0$ ).

Між точками О і О<sub>1</sub> буде напруга зміщення нейтралі, В:

$$\underline{U}_{m001}^{(3)} = \frac{\underline{E}_{mA}^{(3)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3)} + \underline{Y}_B^{(3)} + \underline{Y}_C^{(3)})}{\underline{Y}_A^{(3)} + \underline{Y}_B^{(3)} + \underline{Y}_C^{(3)}} = \underline{E}_{mA}^{(3)} = 80 \angle -30^\circ.$$

## 3. Миттєві значення струмів, А:

$$i_A = i_A^{(1)} = 9,5 \cdot \sin\left(\omega t + 180^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), i_B = i_B^{(1)} = 18,35 \cdot \sin\left(\omega t - 75^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right),$$

$$i_C = i_C^{(1)} = 18,35 \cdot \sin\left(\omega t + 75^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

4. Миттєві значення напруг, В:

$$u_{a01} = u_{a01}^{(1)} = 380 \cdot \sin\left(\omega t + 180^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \quad u_{b01} = u_{b01}^{(1)} = 735 \cdot \sin\left(\omega t - 165^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right),$$

$$u_{c01} = u_{c01}^{(1)} = 735 \cdot \sin\left(\omega t + 165^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right),$$

$$u_{010} = u_{010}^{(1)} + u_{010}^{(3)} = 600 \cdot \sin(\omega t) + 80 \cdot \sin\left(3\omega t - 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

5. Покази амперметрів і вольтметрів електромагнітної системи (діючі значення струмів і напруг).

Показ амперметра  $A_1$  дорівнює діючому значенню струму у фазі  $A$  –

$$I_A = \frac{9,5}{\sqrt{2}} = 6,74 \text{ А.}$$

Показ амперметра  $A_2$  дорівнює діючому значенню струму у фазі  $B$  –

$$I_B = \frac{18,375}{\sqrt{2}} = 13 \text{ А.}$$

Показ амперметра  $A_3$  дорівнює діючому значенню струму у фазі  $C$  –

$$I_C = \frac{18,375}{\sqrt{2}} = 13 \text{ А.}$$

Показ вольтметра  $V_1$  дорівнює діючому значенню напруги на навантаженні у фазі  $A$  –  $I_A^{(1)} \cdot R = U_{a01} = \frac{380}{\sqrt{2}} = 268,7 \text{ В.}$

Показ вольтметра  $V_2$  дорівнює діючому значенню напруги на навантаженні у фазі  $B$  –  $I_B^{(1)} \cdot X_C^{(1)} = U_{b01} = \frac{735}{\sqrt{2}} = 519,72 \text{ В.}$

Показ вольтметра  $V_3$  дорівнює діючому значенню напруги на навантаженні у фазі  $C$  –  $I_C^{(1)} \cdot X_L^{(1)} = U_{c01} = \frac{735}{\sqrt{2}} = 519,72 \text{ В.}$

Показ вольтметра  $V$  дорівнює діючому значенню напруги зміщення

$$\text{нейтралі} - U_{010} = \sqrt{\left(\frac{U_{m010}^{(1)}}{2}\right)^2 + \left(\frac{U_{m010}^{(3)}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{600^2}{2} + \frac{80^2}{2}} = 428 \text{ В.}$$



## 3 РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ.

### 3.1 Загальні відомості

Перехідний процес – це процес переходу від одного до іншого режиму роботи кола, який будь-чим відрізняється від попереднього (амплітудою, фазою, частотою діючих у колі ЕРС, значеннями параметрів схеми). Перехідні процеси виникають в результаті різних комутацій.

Комутація – це розмикання або замикання ключів. На схемах ключі, що працюють на замикання і розмикання, позначають так, як показано на рисунку 3.1.

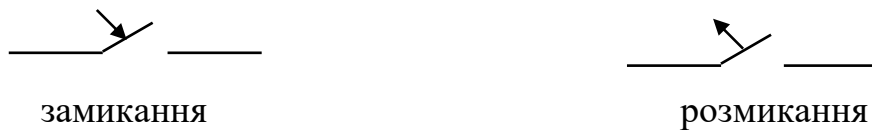


Рисунок 3.1 – Умовні позначення ключів на електричних схемах

Якщо в колі є котушки індуктивності та (або) ємності, то такий перехід не може відбутися миттєво, оскільки миттєво не може змінитися енергія електричного і магнітного полів.

Розв'язати задачу з перехідного процесу – це знайти закон зміни  $i(t)$  або  $u(t)$  на окремих ділянках кола. Так для схем рисунку 2.2 та рисунку 2.3 другий закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі при замиканні ключа має вигляд відповідно:

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) \cdot R = E. \quad (3.1)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E \quad (3.2)$$

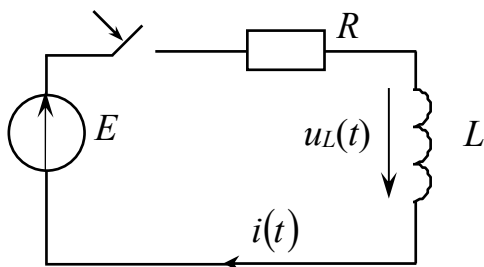


Рисунок 3.2 – Підімкнення постійної ЕРС до R-L кола

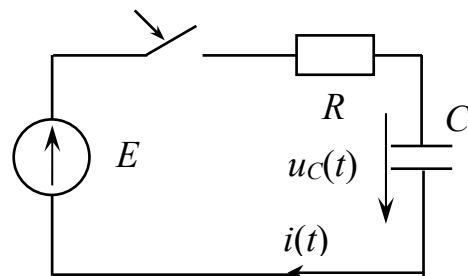


Рисунок 3.3 – Підімкнення постійної ЕРС до R-C кола

Способи розв'язку цих рівнянь, тобто знаходження таких функцій, які задовольняють рівнянням (3.1) й (3.2), є наступними:

- класичний;
- операторний;
- за допомогою інтеграла Дюамеля.

Теоретично перехідний процес вважається нескінченним; момент комутації – це момент « $t = 0$ ».

Електричні схеми під час перехідного процесу підпорядковуються двом законам комутації.

### *Перший закон комутації*

В індуктивному елементі струм (і магнітний потік) безпосередньо після комутації, тобто у момент « $t = 0+$ », зберігає значення, яке він мав безпосередньо перед комутацією, тобто у момент « $t = 0-$ », а далі починає змінюватися саме з цього значення.

### *Другий закон комутації*

На ємнісному елементі напруга (і заряд) зберігає у момент комутації те значення, яким воно було безпосередньо перед комутацією і надалі починає змінюватися саме з цього значення:

З енергетичної точки зору неможливість миттєвої зміни струму  $i_L(t)$  і напруги  $u_C(t)$  пояснюється неможливістю стрибкоподібної зміни накопиченої енергії магнітного поля  $\frac{L \cdot i^2}{2}$  в індуктивному елементі й енергії електричного поля  $\frac{C \cdot u_C^2}{2}$  в ємності.

### *Класичний метод розрахунку перехідних процесів*

Відповідно до цього методу закон зміни струму (або напруги) розглядають як суму вимушеного  $i_{вим}$  і вільного  $i_в$  струму (або напруги), тобто

$$i(t) = i_{вим} + i_в; \quad u(t) = u_{вим} + u_в. \quad (3.3)$$

Вимушена складова – це частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння, або це значення струму чи напруги в сталому режимі, тобто в припущенні, що перехідний процес повністю закінчився ( $t \rightarrow \infty$ ) і його можна не приймати до уваги.

Вільна складова – це загальний розв’язок однорідного рівняння (термін «вільна» означає, що ця складова є рішенням рівняння, «вільного» від вимушеної сили, тобто джерела). Її вигляд залежить від коренів характеристичного рівняння.

Повний струм – це той струм, який насправді тече у вітці при перехідному процесі, а вимушена і вільна складові дають дійсну величину струму.

### Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом

1. Довільно вибирають напрями струмів (напруг) у вітках кола.

2. Записують розв'язок для струмів і напруг у загальному вигляді, тобто у вигляді суми вимушених і вільних складових.

3. Визначають незалежні і залежні початкові умови.

Незалежні початкові умови (Н.П.У.) – це значення перехідних струмів в індуктивних елементах і напруг на ємнісних елементах, які відомі з режиму до комутації і стрибком змінюватися не можуть відповідно до законів комутації. Н.П.У. знаходять шляхом розрахунку схеми до комутації. Для схеми рисунку 3.2 Н.П.У. –  $i(0) = 0$ , для схеми рисунку 3.3 Н.П.У. –  $u_C(0) = 0$ .

Значення інших струмів і напруг в момент  $t = 0$  називають залежними початковими умовами (З.П.У.). Їх знаходять шляхом складання рівнянь за законами Кірхгофа для кола після комутації в момент часу  $t = 0$ .

$$\text{Для схеми рисунку 3.3} - u_C(0) + i(0) \cdot R = E \Rightarrow i(0) = \frac{E - u_C(0)}{R} = \frac{E}{R}.$$

4. Вважаючи, що перехідний процес повністю закінчився, для схеми після комутації визначають вимушені складові струмів і напруг.

$$\text{Для схеми рисунку 3.3} - u_{Cnp} = E, i_{вим} = 0.$$

5. Для визначення вигляду вільних складових струмів і напруг складають характеристичне рівняння і знаходять його корені.

Для схеми рисунку 2.3 складене за методом вхідного опору характеристичне рівняння має вигляд:  $Z_{вх}(p) = R + \frac{1}{p \cdot C} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{R \cdot C}$ .

$$\text{Тоді вільна складова} - u_{Cв} = A \cdot e^{pt} = A \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}.$$

6. За допомогою незалежних і залежних початкових умов визначають постійні інтегрування. Для схеми рисунку 3.3 –  $u_C = E + A \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$ .

$$\text{Для } t = 0: 0 = E + A \Rightarrow A = -E.$$

7. Остаточо записують закони напруги  $u(t)$  і струму  $i(t)$  при перехідному процесі.

$$\text{Для схеми рисунку 3.3: } u_C = E - E \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}; i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

## Операторний метод розрахунку перехідних процесів

Метод заснований на використанні поняття про зображення функцій часу. В операторному методі кожній функції  $f(t)$  часу відповідає функція нової змінної  $p - F(p)$  (і навпаки). Перехід від функції часу  $t$  до функції змінної  $p$  здійснюють за допомогою прямого перетворення Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt, \quad (3.4)$$

де  $p$  – комплексне число;  $p = a + j \cdot b$ .

Таким чином, операторний метод розрахунку перехідних процесів є методом, заснованим на перетворенні Лапласа. Він дозволяє звести операцію диференціювання до множення, а операцію інтегрування – до ділення на оператор  $p$ .

Відповідність між функціями  $F(p)$  і  $f(t)$  записують так:  $F(p) \doteq f(t)$ . Знак « $\doteq$ » називають знаком відповідності.

### Послідовність розрахунку операторним методом

1. Складають рівняння для кола після комутації за законами Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі.

$$\text{Для схеми рисунку 3.3} - i \cdot R + u_C(t) = E, \text{ або } i \cdot R + u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt = E.$$

2. Здійснюють заміну оригіналів відповідними зображеннями ( $I(p) \doteq i(t)$ ).

$$\text{Для схеми рисунку 3.3} - I(p) \cdot R + I(p) \cdot \frac{1}{p \cdot C} + \frac{u_C(0)}{p} = \frac{E}{p}. \text{ З урахуванням того, що } u_C(0) = 0 \text{ маємо } I(p) \cdot \left( R + \frac{1}{p \cdot C} \right) = \frac{E}{p}.$$

3. Складають операторну схему заміщення – рисунок 3.4.

4. Використовують будь-який метод розрахунку і визначають операторні струми і напруги. Для схеми рисунку 3.4 за законом Ома:

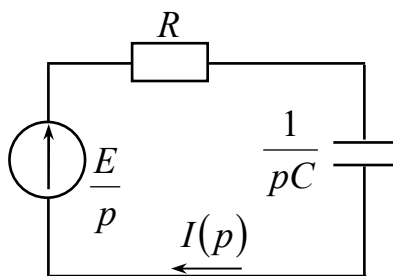


Рисунок 3.4 – Операторна схема заміщення для схеми рисунку 3.3.

$$I(p) = \frac{E}{p \cdot \left( R + \frac{1}{p \cdot C} \right)} = \frac{E \cdot C}{R \cdot C \cdot p + 1} = \frac{E/R}{p + 1/(R \cdot C)}.$$

5. Здійснюють перехід від операторних струмів і напруг до струмів і напруг функції часу (перехід від зображень до оригіналів) за допомогою формул відповідності або за допомогою формули розкладання.

Оскільки  $e^{\alpha \cdot t} \doteq \frac{1}{p - \alpha}$ , то в цьому випадку маємо оригінал струму:

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}, \text{ А.}$$

### 3.2 Приклади розв'язання задач

#### ЗАДАЧА 1

*Розрахунок перехідних процесів в нерозгалуженому електричному колі постійного струму з індуктивністю класичним методом*

В електричній схемі з джерелом постійної напруги, зображеній на рисунку 3.2, при замиканні ключа  $K$  відбувається перехідний процес. Параметри схеми:  $R = 10$  Ом,  $L = 100$  мГн,  $E = 110$  В.

Визначити:

- струм  $i(t)$  при перехідному процесі, й побудувати його криву;
- енергію магнітного поля для моменту часу  $t = 0,01$  с після замикання ключа.

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів;
- вміти складати рівняння стану електричного кола після комутації;
- вміти складати характеристичні рівняння.

*Розв'язок*

Складаємо рівняння електричного стану кола після замикання ключа:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + i(t) \cdot R = E.$$

Розв'язок рівняння знаходимо як суму вимушеної та вільної складових:

$$i(t) = i_{\text{вим}} + i_{\text{в}}.$$

Н.П.У.:  $i(0) = 0$  А.

Значення вимушеної складової струму визначаємо при розрахунку схеми після комутації ( $t \rightarrow \infty$ ):  $i_{\text{вим}} = \frac{E}{R} = \frac{110}{10} = 11$  А.

Складаємо характеристичне рівняння методом вхідного опору:

$$Z(p) = R + p \cdot L = 0.$$

З характеристичного рівняння знаходимо корінь  $p$ :

$$p = -\frac{R}{L} = -\frac{10}{100 \cdot 10^{-3}} = -100 \text{ с}^{-1}. \text{ Тоді характер вільного струму } - i_g = A \cdot e^{-100 \cdot t}.$$

Визначаємо постійну інтегрування  $A$ :

$$i(t) = 11 + A \cdot e^{-100 \cdot t}$$

При  $t = 0$ :  $i(0) = 0 = 11 + A \Rightarrow A = -11$ .

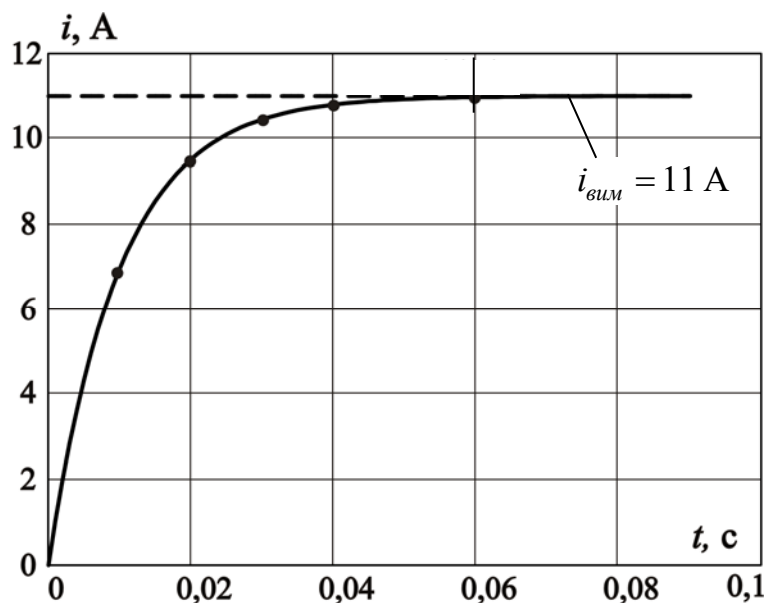
Струм в колі –  $i(t) = 11 - 11 \cdot e^{-100t} = 11 \cdot (1 - e^{-100t})$ , А.

Напруга на індуктивності  $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 110 \cdot e^{-100t}$ , В.

Для побудови графіка струму складаємо таблицю.

Таблиця 3.1 – Дані для побудови графіку  $i(t)$

|               |   |      |      |      |      |      |
|---------------|---|------|------|------|------|------|
| $t, \text{с}$ | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,06 |
| $i, \text{А}$ | 0 | 6,95 | 9,5  | 10,5 | 10,8 | 10,9 |



Рисунк 3.5 – Графік струму  $i(t)$  схеми рисунку 3.2.

Енергія магнітного поля котушки в момент часу  $t = 0,01$  с:

$$W_M(t) = \frac{L \cdot [i(t)]^2}{2} \Rightarrow W_M(0,01) = \frac{L \cdot i(0,01)^2}{2} = \frac{0,1 \cdot 6,95^2}{2} = 2,41 \text{ Дж.}$$

## ЗАДАЧА 2

*Розрахунок перехідних процесів в нерозгалуженому електричному колі постійного струму з індуктивністю операторним методом*

В електричній схемі з джерелом постійної напруги, зображеній на рисунку 3.6, при замиканні ключа  $K$  відбувається перехідний процес. Параметри елементів кола:  $E = 220$  В,  $L = 0,6$  Гн,  $R_1 = 8$  Ом,  $R_2 = 12$  Ом.

Визначити операторним методом при перехідному процесі:

- струм  $i(t)$ ;
- напругу на індуктивності  $u_L(t)$ .

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати порядок розрахунку перехідних процесів операторним методом в колах постійного струму;
- вміти складати операторну схему заміщення;
- вміти застосовувати формулу розкладання для знаходження оригіналів.

*Розв'язок*

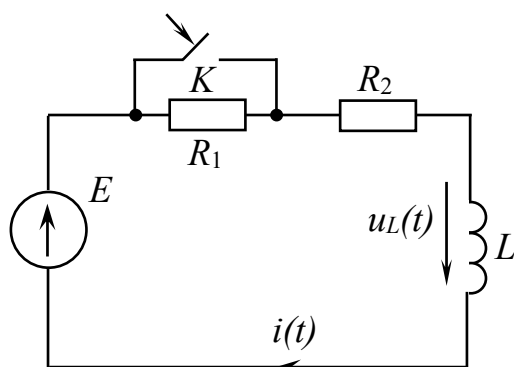


Рисунок 3.6 – Схема досліджуваного кола

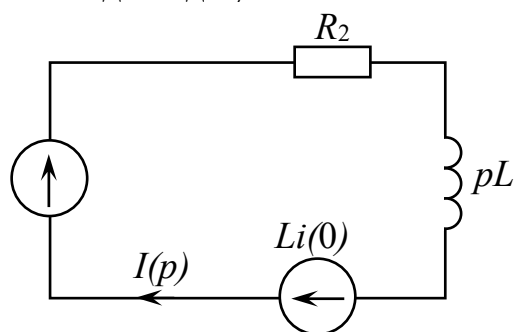


Рисунок 3.7 – Операторна схема заміщення

1. Для схеми, що розглядається, початкові умови не є нульовими, а саме:

$$i(0) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{220}{8 + 12} = 11 \text{ А.}$$

Складаємо операторну схему заміщення (для ненульових початкових умов) – рисунок 3.7. На схемі внутрішня ЕРС –  $L \cdot i(0) = 0,6 \cdot 11 = 6,6$  В.

2. За законом Ома для цієї схеми:

$$I(p) = \frac{E/p + L \cdot i(0)}{R_2 + p \cdot L} = \frac{220/p + 6,6}{12 + 0,6 \cdot p} = \frac{220 + 6,6 \cdot p}{p \cdot (12 + 0,6 \cdot p)} = \frac{N(p)}{M(p)} \Rightarrow \text{з формули}$$

розкладення:  $i(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}$ .

3. Знаходимо корені рівняння

$M(p) = 0$  та підставляємо їх у вираз  $N(p)$ :

$$p \cdot (12 + 0,6 \cdot p) = 0 \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = -20.$$

Таким чином,  $N(0)=220$ ;  $N(-20)=88$ .

4. Знайдемо похідну знаменника та підставимо в отриману формулу корені рівняння  $p_1=0$ ,  $p_2=-20$ :

$$M'(p)=2 \cdot 0,6 \cdot p + 12, \quad M'(0)=12; \quad M'(-20)=-12.$$

5. Тоді  $i(t)=\frac{220}{12} \cdot e^{0t} - \frac{88}{12} \cdot e^{-20t} = 18,3333 - 7,3333 \cdot e^{-20t}$ , А.

6. Визначимо операторну напругу на індуктивності:

$$U_L(p)=I(p) \cdot p \cdot L - L \cdot i(0) = \frac{220 + 6,6 \cdot p}{p \cdot (0,6 \cdot p + 12)} \cdot p \cdot L - 6,6 = \frac{132 + 3,96 \cdot p - 3,96 \cdot p - 79,2}{0,6 \cdot p + 12} =$$
$$= \frac{52,8}{0,6 \cdot p + 12} = \frac{88}{p + 20}.$$

Скористаємося формулою відповідності  $\frac{1}{p+a} \doteq e^{-at}$ , де  $a=20 \Rightarrow$

$$u_L(t) = 88 \cdot e^{-20t}, \text{ В.}$$

### З А Д А Ч А 3

*Розрахунок перехідних процесів у нерозгалуженому електричному колі постійного струму з ємністю*

У нерозгалуженому електричному колі, зображеному на рисунку 3.3, з параметрами  $R=10^5$  Ом,  $C=100$  мкФ,  $E=110$  В, при замиканні ключа  $K$  відбувається перехідний процес.

Визначити при перехідному процесі:

- струм  $i(t)$ ;
- напругу на ємності  $u_C(t)$ .

Для розв'язку задачі треба знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів в колах постійного струму.

#### *Розв'язок*

Задачу можна розв'язати двома способами: через напругу на ємності  $u_C(t)$  та через струм  $i(t)$ .

1. Перший спосіб.

Рівняння напруги на ємності в загальному вигляді:

$$u_C(t) = u_{C_{вим}} + u_{C_в}.$$

Незалежна початкова умова (Н.П.У.) –  $u_C(0) = 0$  В.

Вимушена складова напруги буде дорівнювати напрузі джерела живлення  $u_{C_{вим}} = E = 110$  В.



Складаємо характеристичне рівняння і знаходимо його корінь  $p$ :

$$Z(p) = R + \frac{1}{p \cdot C} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{R \cdot C} = -\frac{1}{10^5 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = -0,1 \text{ с}^{-1}.$$

Тоді вільна складова напруги має вигляд:  $u_{C\delta} = A \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ .

Визначаємо постійну інтегрування  $A$ .

$$u_C(t) = 110 + A \cdot e^{-100 \cdot t}, \text{ при } t = 0: u_C(0) = 0 = 110 + A \Rightarrow A = -110.$$

Напруга на ємності  $u_C(t) = 110 - 110 \cdot e^{-0,1 \cdot t} = 110 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot t})$ , В.

Струм кола при перехідному процесі:

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = 11 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-0,1 \cdot t}, \text{ А.}$$

## 2. Другий спосіб

Рівняння струму кола як сума вимушеної та вільної складових –  
 $i(t) = i_{\text{вим}} + i_{\delta}$ .

Знаходимо залежну початкову умову, тобто значення  $i(0)$ .

Якщо  $u_C(0) = 0$ , то за другим законом Кірхгофа:

$$i(0) = \frac{E - u_C(0)}{R} = \frac{110 - 0}{10^5} = 11 \cdot 10^{-4} \text{ А.}$$

Вимушена складова струму –  $i_{\text{вим}} = 0$ .

Характеристичне рівняння і загальне співвідношення для вільної складової струму має такий самий вигляд, як і у першому способі, тобто  
 $i_{\delta} = B \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ .

Визначаємо постійну інтегрування  $B$ :

$$i(t) = B \cdot e^{-0,1 \cdot t} \Rightarrow B = i(0) = 11 \cdot 10^{-4}.$$

Струм кола –  $i(t) = 11 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ , А.

Визначаємо напругу на ємності в момент комутації:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt = \frac{11 \cdot 10^{-4}}{100 \cdot 10^{-6}} \cdot \int_0^t e^{-0,1 \cdot t} dt = -110 \cdot e^{-0,1 \cdot t} \Big|_0^t = 110 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot t}), \text{ В.}$$

## ЗАДАЧА 4

*Розрахунок перехідних процесів в нерозгалуженому електричному колі  
 синусоїдного струму з індуктивністю*

В електричній схемі з джерелом синусоїдної напруги, зображеній на рисунку 3.8, при замиканні ключа  $K$  відбувається перехідний процес.

Параметри елементів кола:  $e(t) = 100 \cdot \sin\left(314 \cdot t + 91,3^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right)$ , В;  $R = 30$  Ом,  
 $L = 0,1$  Гн.

Визначити при перехідному процесі:

- струм кола  $i(t)$ ;
- напругу на індуктивності  $u_L(t)$ .

Для розв'язку задачі необхідно знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів у колах синусоїдного струму.

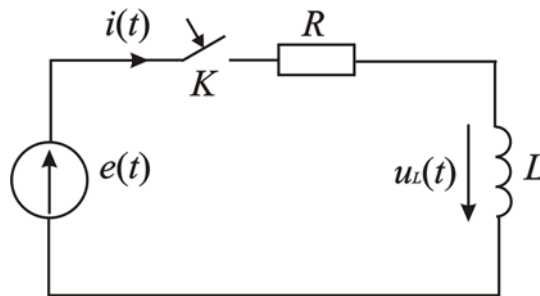


Рисунок 3.8 – Схема досліджуваного кола

#### Розв'язок

Загальний розв'язок –  $i(t) = i_{\text{вим}} + i_{\text{в}}$ .

Н.П.У. –  $i(0) = 0$ .

Знаходимо вимушену складову струму.

Розраховуємо комплексну амплітуду вимушеної складової струму:

$$\underline{I}_{\text{вим}} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 91,3^\circ}}{30 + j \cdot 31,4} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 91,3^\circ}}{43,42 \cdot e^{j \cdot 46,3^\circ}} = 2,3 \cdot e^{j \cdot 45^\circ} \text{ А.}$$

Миттєве значення вимушеного струму –  $i_{\text{вим}} = 2,3 \cdot \sin\left(314 \cdot t + 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right)$ , А.

Складаємо характеристичне рівняння і визначимо його корінь:

$$p \cdot L + R = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L} = -\frac{30}{0,1} = -300 \text{ с}^{-1}.$$

Таким чином вільна складова струму –  $i_{\text{в}} = A \cdot e^{-300 \cdot t}$ .

Визначаємо постійну інтегрування  $A$ .

$$i(t) = 2,3 \cdot \sin\left(314 \cdot t + 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + A \cdot e^{-300 \cdot t}.$$

При  $t = 0$ :  $i(0) = 0 \Rightarrow 0 = 2,3 \cdot \sin 45^\circ + A \Rightarrow A = -2,3 \cdot \sin 45^\circ = -1,6$  А.

Струм кола при перехідному процесі:

$$i(t) = 2,3 \cdot \sin\left(314 \cdot t + 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) - 1,6 \cdot e^{-300t}, \text{ А.}$$

Визначаємо напругу на індуктивності в перехідному процесі:

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 72,2 \cdot \cos\left(314 \cdot t + 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 48 \cdot e^{-300t} = \\ &= 72,2 \cdot \sin\left(314 \cdot t + 135^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 48 \cdot e^{-300t}, \text{ В.} \end{aligned}$$

### З А Д А Ч А 5

*Розрахунок перехідних процесів у розгалуженому електричному колі постійного струму з індуктивністю класичним і операторним методами*

В розгалуженій електричній схемі, що зображена на рисунку 3.9, з параметрами  $R = 4 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $E = 12 \text{ В}$ , при замиканні ключа  $K$  відбувається перехідний процес.

Визначити:

- струми  $i(t)$ ,  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  класичним методом;
- струм  $i(t)$  операторним методом.

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати основи класичного й операторного методів розрахунку перехідних процесів;
- знати метод контурних струмів.

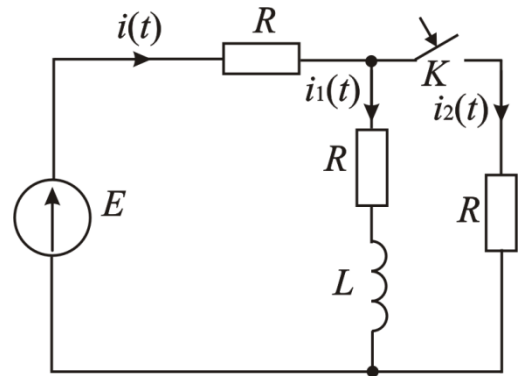


Рисунок 3.9 – Схема досліджуваного кола

### Розв'язок

1. Знаходимо струми кола класичним методом.

Загальні рішення струмів кола при перехідному процесі:

$$\begin{cases} i = i_{\text{вим}} + i_{\text{в}} \\ i_1 = i_{\text{вим1}} + i_{\text{в1}} \\ i_2 = i_{\text{вим2}} + i_{\text{в2}} \end{cases} .$$

Визначаємо початкові умови:

$$\text{Н.П.У.: } i_1(0) = \frac{E}{R + R} = \frac{12}{8} = 1,5 \text{ А.}$$

Залежні початкові умови (З.П.У.) знаходимо з системи рівнянь за законами Кірхгофа для  $t = 0$ :

$$\begin{cases} i(0) = i_1(0) + i_2(0) \\ i(0) \cdot R + i_2(0) \cdot R = E \\ i(0) \cdot R + i_1(0) \cdot R + u_L(0) = E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i(0) = 2,25 \text{ A} \\ i_2(0) = 0,75 \text{ A} \\ u_L(0) = -3 \text{ В} \end{cases}$$

Визначаємо вимушені складові струмів кола:

$$i_{\text{вум}} = \frac{E}{R + \frac{R \cdot R}{R + R}} = \frac{12}{4 + 2} = 2 \text{ A}, \quad i_{\text{вум1}} = i_{\text{вум}} \cdot \frac{R}{R + R} = 1 \text{ A},$$

$$i_{\text{вум2}} = i_{\text{вум}} \cdot \frac{R}{R + R} = 1 \text{ A}.$$

Складаємо й розв'язуємо характеристичне рівняння методом вхідного опору:  $Z(p) = R + \frac{(R + p \cdot L) \cdot R}{R + p \cdot L + R} = 0$ .

Корінь характеристичного рівняння:  $p = -\frac{\left(R + \frac{R \cdot R}{R + R}\right)}{L} = -60 \text{ с}^{-1}$ .

Таким чином, вільні складові струмів:  $\begin{cases} i_g = A \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_{g1} = A_1 \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_{g2} = A_2 \cdot e^{-60 \cdot t} \end{cases}$ .

Визначаємо постійні інтегрування  $A, A_1, A_2$  за допомогою Н.П.У. та З.П.У.:

$$\begin{cases} i(t) = 2 + A \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_1(t) = 1 + A_1 \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_2(t) = 1 + A_2 \cdot e^{-60 \cdot t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2,25 = 2 + A \\ 1,5 = 1 + A_1 \\ 0,75 = 1 + A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0,25 \\ A_1 = 0,5 \\ A_2 = -0,25 \end{cases}.$$

Струми кола,  $A$ :

$$\begin{cases} i(t) = 2 + 0,25 \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_1(t) = 1 + 0,5 \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_2(t) = 1 - 0,25 \cdot e^{-60 \cdot t} \end{cases}.$$

Визначаємо напругу на індуктивності при перехідному процесі:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_1(t)}{dt} = 0,1 \cdot 0,5 \cdot (-60) \cdot e^{-60 \cdot t} = -3 \cdot e^{-60 \cdot t}, \text{ В.}$$

2. Знаходимо струм  $i(t)$  операторним методом.

Складаємо операторну схему заміщення (рис. 3.10), де внутрішня ЕРС –  $L \cdot i_1(0) = 0,1 \cdot 1,5 = 0,15$  В.

Операторні струми визначаємо методом контурних струмів.

У загальному вигляді система рівнянь за методом має вигляд:

$$\begin{cases} I_{11}(p) \cdot Z_{11}(p) + I_{22}(p) \cdot Z_{12}(p) = E_{11}(p) \\ I_{11}(p) \cdot Z_{21}(p) + I_{22}(p) \cdot Z_{22}(p) = E_{22}(p) \end{cases}$$

де  $Z_{11}(p) = R + R + pL$  – власний опір першого контуру;

$Z_{22}(p) = R + R + pL$  – власний опір другого контуру;

$Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = -(R + p \cdot L)$  – взаємний опір першого та другого контурів;

$E_{11}(p) = \frac{E}{p} + L \cdot i_1(0)$  – власна ЕРС першого контуру;

$E_{22}(p) = -L \cdot i_1(0)$  – власна ЕРС другого контуру.

Після підстановки система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} I_{11}(p) \cdot (R + R + p \cdot L) - I_{22}(p) \cdot (R + p \cdot L) = \frac{E}{p} + L \cdot i_1(0) \\ -I_{11}(p) \cdot (R + p \cdot L) + I_{22}(p) \cdot (R + R + p \cdot L) = -L \cdot i_1(0) \end{cases}$$

Визначаємо струм  $I_{11}(p)$  за методом Крамера:  $I_{11}(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R + R + p \cdot L) & -(R + p \cdot L) \\ -(R + p \cdot L) & (R + R + p \cdot L) \end{vmatrix} = (R + R + p \cdot L) \cdot (R + R + p \cdot L) - (R + p \cdot L)^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \left( \frac{E}{p} + L \cdot i_1(0) \right) & -(R + p \cdot L) \\ -L \cdot i_1(0) & (R + R + p \cdot L) \end{vmatrix} = \left( \frac{E}{p} + L \cdot i_1(0) \right) \cdot (R + R + p \cdot L) - (R + p \cdot L) \cdot L \cdot i_1(0).$$

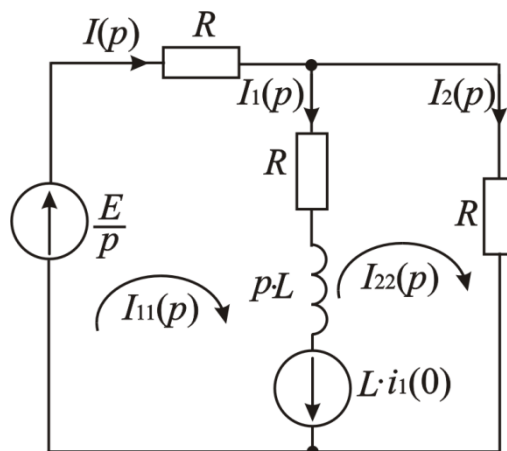


Рисунок 3.10 – Операторна схема заміщення

Для заданих вихідних даних операторний струм:

$$I(p) = I_{11}(p) = \frac{1,8 \cdot p + 96}{p \cdot (0,8 \cdot p + 48)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Для переходу від операторного струму  $I(p)$  до струму функції часу  $i(t)$  скористаємося формулою розкладання.

Знаходимо корені рівняння  $M(p)=0$ :  $p \cdot (0,8 \cdot p + 48) = 0 \Rightarrow p_1 = 0; p_2 = -60$ .

При отриманих коренях формула розкладання буде мати вигляд:

$$i(t) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot e^{p_1 \cdot t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} \cdot e^{p_2 \cdot t}.$$

Знаходимо похідну –  $M'(p) = 1,6 \cdot p + 48$ .

Знаходимо значення  $N(p)$  і значення похідної  $M'(p)$  при  $p_1$  та  $p_2$ :

$$N(p_1) = 96, N(p_2) = -12; M'(p_1) = 48, M'(p_2) = -48.$$

Отримані значення підставимо до формули розкладання:

$$i(t) = \frac{96}{48} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{-12}{-48} \cdot e^{-60 \cdot t} = 2 + 0,25 \cdot e^{-60 \cdot t}, \text{ А.}$$

### З А Д А Ч А 6

*Розрахунок перехідних процесів у розгалуженому електричному колі з джерелом постійного струму*

В електричній схемі з джерелом постійного струму  $J$ , зображеній на рисунку 3.11, при розмиканні ключа  $K$  відбувається перехідний процес.

Визначити струм в індуктивності після ввімкнення джерела постійного струму  $J$ .

Для розв'язку задачі необхідно знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів.

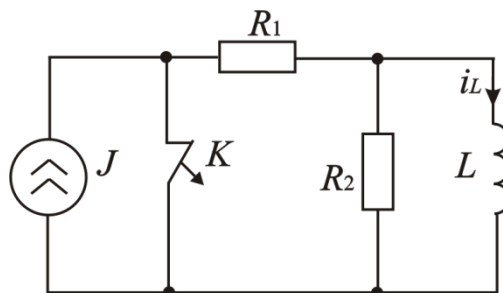


Рисунок 3.11 – Схема досліджуваного кола

## Розв'язок

Струм  $i_L(t)$  записуємо у вигляді суми вимушеної та вільної складових струму:  $i_L(t) = i_{L_{\text{вим}}} + i_{L_6}$ .

Знаходимо Н.П.У.  $i_L(0) = 0$  А.

З наведеної схеми в вимушеному режимі – струм  $i_{L_{\text{вим}}} = J$ .

Для визначення вигляду вільної складової струму складаємо характеристичне рівняння методом вхідного опору відносно вітки з індуктивністю, при цьому вітка з джерелом струму має бути розімкнена (рис. 2.12):

$$Z(p) = R_2 + p \cdot L = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_2}{L}.$$

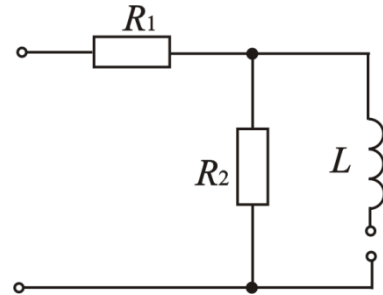


Рисунок 3.12 – Схема для характеристичного рівня

Таким чином, вільна складова струму має вигляд  $i_{L_6} = A \cdot e^{p \cdot t} = A \cdot e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t}$ .

Струм індуктивності має вигляд:

$$i_L(t) = J + A \cdot e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t}, \text{ А.}$$

Постійну інтегрування  $A$  знаходимо з початкової умови  $i_L(0) = 0 \Rightarrow$

$$0 = J + A \Rightarrow A = -J.$$

Остаточно отримуємо:

$$i_L(t) = J - J \cdot e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t} = J \cdot \left( 1 - e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t} \right), \text{ А.}$$

### З А Д А Ч А 7

*Розрахунок перехідних процесів у розгалуженому електричному колі з джерелом постійного струму та взаємною індуктивністю*

В електричній схемі з джерелом постійного струму  $J$ , зображеній на рисунку 3.13, при розмиканні ключа  $K$  відбувається перехідний процес. Параметри кола:  $J = 10$  мА,  $R = 1000$  Ом,  $L_1 = L_2 = 10$  мГн,  $M = 0,5$  мГн.

Визначити:

- струм через опір  $i_R(t)$  в перехідному режимі;
- струм через індуктивність  $L_1$  в перехідному режимі  $i_{L1}(t)$ ;

- напругу на індуктивності  $L_2$  в перехідному режимі  $u_2(t)$ .
- Для розв'язку задачі необхідно:
- знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів;
  - вміти складати рівняння за законами Кірхгофа для кіл зі взаємною індуктивністю;
  - вміти складати рівняння стану електричного кола після комутації.

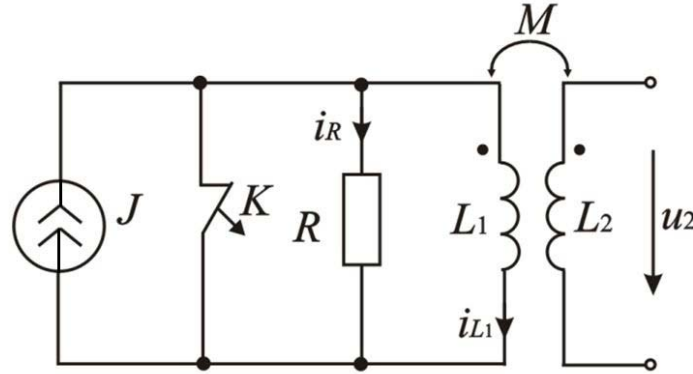


Рисунок 3.13 – Схема досліджуваного кола

*Розв'язок*

Загальний розв'язок струмів кола при перехідному процесі:

$$i_R(t) = i_{R_{вум}} + i_{R_г}; \quad i_{L_1}(t) = i_{L_{1вум}} + i_{L_{1г}}$$

Системи рівнянь за законами Кірхгофа для кола після комутації:

$$\begin{cases} i_R(t) + i_{L_1}(t) = J \\ i_R(t) \cdot R - L_1 \cdot \frac{di_{L_1}(t)}{dt} - M \cdot \frac{di_{L_2}(t)}{dt} = 0. \end{cases}$$

Вторинна обмотка розімкнена, тому  $i_{L_2}(t) = 0 \Rightarrow M \cdot \frac{di_{L_2}(t)}{dt} = 0$ .

Знаходимо початкові умови.

Н.П.У.:  $i_{L_1}(0) = 0$  А.

З.П.У. знаходимо з системи рівнянь за законами Кірхгофа для  $t = 0$ :

$$\begin{cases} i_R(0) + i_{L_1}(0) = J \\ R \cdot i_R(0) - L_1 \cdot \frac{di_{L_1}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_R(0) = J = 10^{-2} \text{ А} \\ u_{L_1}(0) = R \cdot i_R(0) = 10 \text{ В} \end{cases}$$

Визначаємо вимушені складові струмів:  $i_{R_{np}} = 0$ ;  $i_{L_{1вум}} = J = 10^{-2}$  А.



Складаємо й розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$Z(p) = R + p \cdot L_1 = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L_1} = -\frac{1000}{10 \cdot 10^{-3}} = -10^5 \text{ с}^{-1}.$$

Таким чином, вільні складові струмів мають вигляд:

$$i_{R_e} = A \cdot e^{-10^5 \cdot t}; i_{L_1_e} = B \cdot e^{-10^5 \cdot t}.$$

Постійні інтегрування  $A$  і  $B$  знаходимо з початкових умов.

$$i_R(t) = A \cdot e^{-10^5 t}; i_{L_1}(t) = 10^{-2} + B \cdot e^{-10^5 \cdot t}.$$

При  $t=0$  –  $i_R(0) = 10^{-2} = A \Rightarrow \underline{i_R(t) = 10^{-2} \cdot e^{-10^5 \cdot t}}$ , А.

При  $t=0$  –  $\underline{i_{L_1}(t) = 10^{-2} - 10^{-2} \cdot e^{-10^5 \cdot t}}$ , А.

7. Визначаємо напругу на індуктивності  $L_2$ :

$$u_{L_2}(t) = M \cdot \frac{di_{L_1}(t)}{dt} = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-10^5 \cdot t} = 0,5 \cdot e^{-10^5 \cdot t} \text{ В.}$$

Таким чином,  $u_{L_2}(0) = 0,5$  В. Перевіримо це.

Продиференціюємо рівняння  $i_R(t) + i_{L_1}(t) = J$  та помножимо праву та ліву частину отриманого результату на  $M$ :

$$M \cdot \frac{di_R(t)}{dt} + \overbrace{M \cdot \frac{di_{L_1}(t)}{dt}}^{u_{L_2}(t)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{L_2}(0) = M \cdot \left. \frac{di_{L_1}(t)}{dt} \right|_{t=0} = -M \cdot \left. \frac{di_R(t)}{dt} \right|_{t=0} = -0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} \cdot (-10^5) = 0,5 \text{ В.}$$

## 4 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ І МАГНІТНІ КОЛА

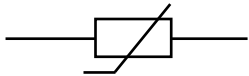
### 4.1 Загальні відомості

Нелінійні електричні кола – це такі кола, що містять хоча б один нелінійний елемент (далі – НЕ), який не може бути описаний за допомогою постійних коефіцієнтів. У цьому випадку залежності між напругами, струмами, зарядами, магнітними потоками (потокозчепленнями) мають вигляд:

$$u = f\left(i, \frac{di}{dt}\right), \quad \psi = f\left(i, \frac{di}{dt}\right), \quad q = f\left(u, \frac{du}{dt}\right), \quad (4.1)$$

тобто в загальному випадку спостерігається залежність не тільки від змінної, але й від швидкості її зміни. Якщо ж ми розглядаємо кола постійного струму, то залежності (4.1) – це нелінійні вольт-амперна характеристика (далі – ВАХ), тобто  $u = f(i)$ , вебер-амперна характеристика, тобто  $\psi = f(i)$  і кулон-вольтна характеристика, тобто  $q = f(u)$ .

Нелінійні елементи поділяють на нелінійні опори, нелінійні індуктивності і ємності. При постійних струмах як нелінійні можуть розглядатися лише кола з резистивними елементами, ВАХ яких не є прямою.

Узагальнене позначення нелінійного елемента на схемах – 

Для розрахунку нелінійних кіл постійного струму застосовують:

- метод двох вузлів;
- заміну декількох паралельно з'єднаних віток однією еквівалентною;
- метод еквівалентного генератора.

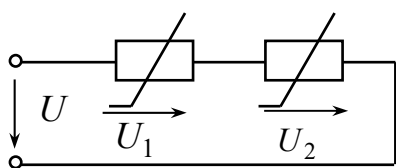


Рисунок 4.1 – Послідовне з'єднання НЕ

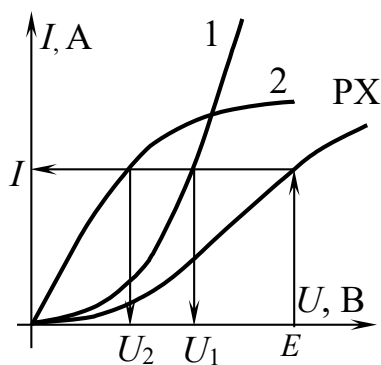


Рисунок 4.2 – Побудова РХ для послідовно з'єднаних НЕ

Для проведення розрахунку, як правило, графічного, повинні бути відомі ВАХ нелінійних елементів, що входять у схему.

Графічний метод вимагає великої точності виконання побудов.

При послідовному з'єднанні (схема на рисунку 4.1) розрахунок базується на другому законі Кірхгофа:  $U = U_1 + U_2$ . Один з параметрів, а саме напруга на вході кола  $U$  або струм  $I$ , повинен бути заданим для визначення струму (або напруги  $U$ ), а також напруг на елементах  $U_1$  і  $U_2$ . Оскільки з'єднання послідовне, то загальним параметром є струм. Довільно задаємося різними значеннями струму і додаємо напру-

ги на нелінійних елементах при кожному конкретному значенні струму, тобто будемо результиуючу ВАХ (далі – РХ) – рисунок 4.2.

При паралельному з'єднанні елементів (рис. 4.3) загальним параметром є напруга. Тому результиуючу ВАХ будують за першим законом Кірхгофа:  $I = I_1 + I_2$  (рис. 4.4).

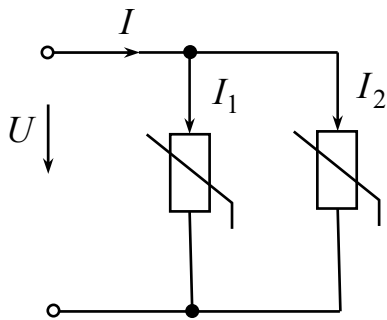


Рисунок 4.3 – Паралельне з'єднання НЕ

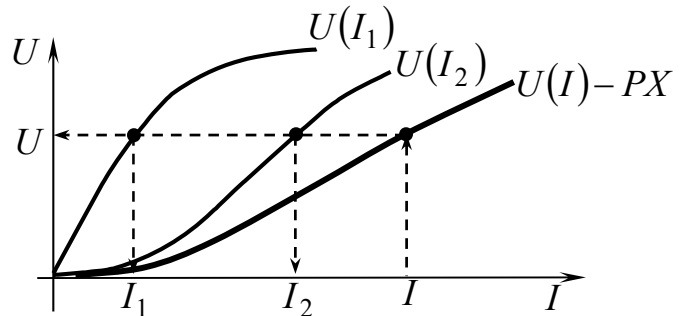


Рисунок 4.4 – Побудова РХ для паралельно з'єднаних НЕ

Якщо була задана напруга  $U$ , а струми в паралельних вітках невідомі, то за напругою на вході кола  $U$  за ВАХ нелінійних елементів визначають струми  $I_1, I_2$ , а потім за першим законом Кірхгофа – загальний струм  $I = I_1 + I_2$ . Якщо ж був заданий струм  $I$ , то необхідно будувати результиуючу характеристику –  $U = f(I_1 + I_2)$ .

Розрахунок змішаного з'єднання нелінійних елементів містить етапи

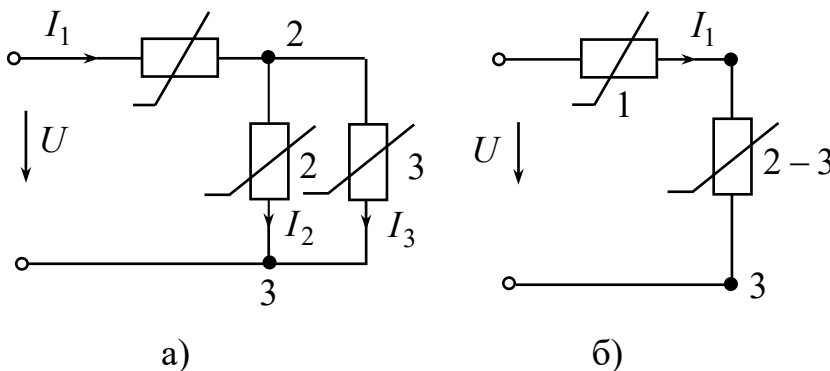


Рисунок 4.5 – Схеми для розрахунку, змішане з'єднання НЕ

розрахунку кіл з паралельним і послідовним з'єднанням елементів. Для схеми на рисунку 4.5,а після заміни двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів «2» і «3» одним еквівалентним нелінійним опором «2-3» одержуємо послідовне з'єднання

елементів «1» і «2-3» – схема на рисунку 4.5,б. При цьому треба побудувати результиуючу ВАХ умовного нелінійного елемента «2-3».

Подальший розрахунок схеми на рисунку 4.5,б (припустимо, що задана напруга  $U$ ), проводять так:

– будують результиуючу ВАХ послідовно з'єднаних елементів «1» і «2-3»;

– визначають струм  $I_1$ , а також напруги на першому нелінійному елементі  $U_1$  і на паралельних вітках  $U_{23}$ ;

– за напругою  $U_{23}$  і заданим вольт-амперними характеристиками елементів «2» і «3» визначають струми в паралельних вітках  $I_2$  і  $I_3$ .

Якщо в складному електричному колі (рис. 4.6, а) є тільки одна вітка, що містить НЕ з відомою ВАХ, то визначення струму в ній зручно виконувати методом еквівалентного генератора. З цією метою решта схеми відносно вітки з НЕ розглядається як активний двополюсник (рис. 4.6, б; рис. 4.6, в).

Для еквівалентної схеми рисунку 4.6 знаходимо напругу холостого ходу:

$$U_{abxx} = E_1 - I_{xx} \cdot R_1, \quad (4.2)$$

де  $I_{xx} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2}$  – струм холостого ходу, якщо в схемі рисунку 4.6, а розімкнути вітку з  $R_{не}$ .

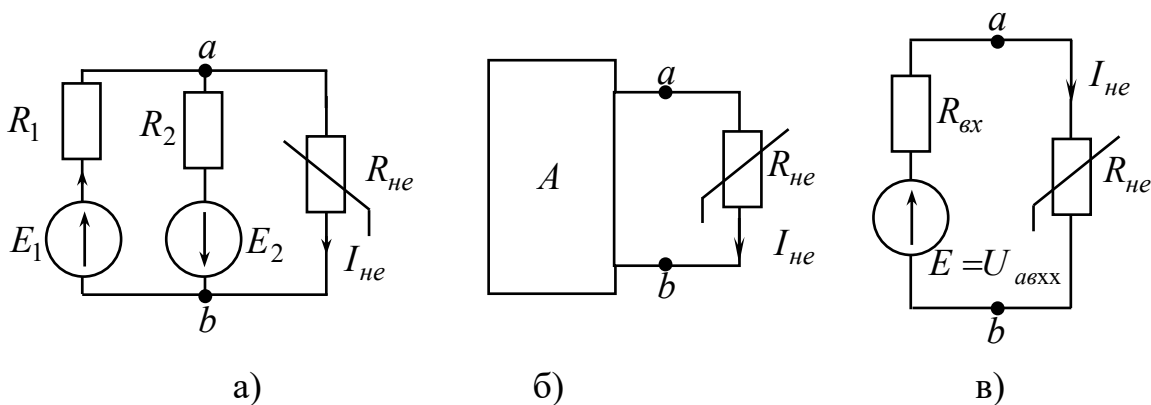


Рисунок 4.6 – Розрахунок схеми з НЕ методом еквівалентного генератора

Далі знаходимо  $R_{вх} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$  – так званий вхідний опір двополюсника.

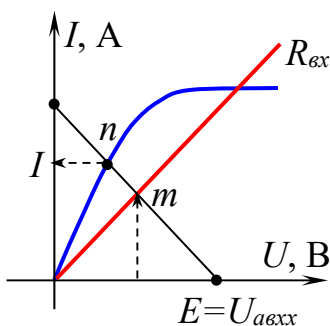


Рисунок 4.7 – Визначення струму вітки з нелінійним НЕ

За значенням  $R_{вх}$  будуємо лінійну характеристику цього опору, а струм НЕ визначаємо графічним способом – рисунок 4.7.

Властивості НЕ характеризуються його ВАХ, а також статичним й диференціальним опором.

Під статичним опором нелінійного елемента розуміють відношення напруги на нелінійному елементі до струму в ньому в будь-якій точці ВАХ цього елемента (рис. 4.8):

$$R_{cm} = \frac{U}{I} = m_R \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.3)$$

де  $m_R = \frac{m_U}{m_I}$  – масштаб за опором,

$m_U, m_I$  – відповідно масштаби за напругою, струмом.

Статичний опір ( $R_{cm}$ ) характеризує поведінку НЕ в режимі постійного струму. При переході від однієї точки ВАХ до іншої величина  $R_{cm}$  змінюється.

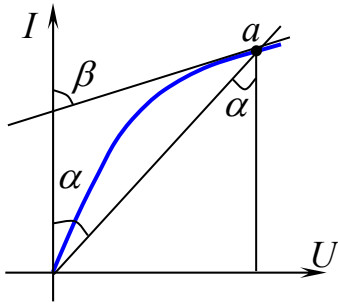


Рисунок 4.8 – Визначення  $R_{cm}$  та  $R_D$  за ВАХ НЕ

Під диференціальним опором ( $R_D$ ) розуміють величину, яка характеризує нелінійний елемент при малих відхиленнях від даної точки нелінійної характеристики (рис. 4.8):

$$R_D = \frac{dU}{dI} = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (4.4)$$

Таким чином, величина  $R_D$  пропорційна тангенсу кута, який утворений дотичною

до ВАХ в даній точці й віссю струму  $I$ .

При послідовному з'єднанні декількох НЕ диференціальний опір результуючої характеристики при будь-якому струмі дорівнює сумі диференціальних опорів нелінійних елементів при цьому ж струмі.

#### *Властивості нелінійних елементів при змінному струмі*

1. При переході від однієї ділянки ВАХ до іншої статичні й диференціальні опори не залишаються постійними і в загальному випадку не дорівнюють один одному, але можуть співпадати в окремих точках і на окремих ділянках ВАХ.

2. Нелінійний елемент може мати несиметричну ВАХ, отже, опір нелінійного елемента залежить від знака прикладеної напруги (нелінійний елемент має вентиляльні властивості).

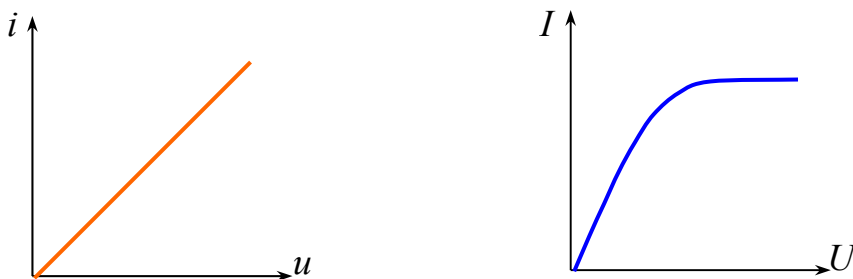


Рисунок 4.9 – ВАХ для миттєвих та діючих значень струму та напруги інерційних НЕ

3. Нелінійні елементи бувають інерційними і безінерційними.

Якщо залежність між миттєвими значеннями напруги і

струму лінійна, а залежність між діючими струмом і напругою нелінійна, то це

– інерційний нелінійний елемент (лампа розжарювання, баретер, напівпровідникові термоопори). Теплові процеси, як відомо, інерційні, тому залежність  $i(u)$  лінійна, а нелінійність характеристик  $I(U)$  деяких нелінійних опорів обумовлена зміною їх опору внаслідок нагріву струмом (рис. 4.9).

Якщо обидві залежності  $i(u)$  і  $I(U)$  нелінійні – то це безінерційний елемент. Безінерційний НЕ має здатність перетворювати спектр коливань, що впливають на нього. Тобто, якщо до НЕ підвести синусоїдну напругу, то струм через нього буде несинусоїдний, і навпаки, при проходженні через НЕ синусоїдного струму напруга на ньому буде несинусоїдною.

При розрахунку нелінійних кіл при змінному струмі (напрузі) застосовують методи апроксимації нелінійних вольт-амперних характеристик.

Апроксимація, як відомо, це заміна заданої нелінійної характеристики аналітичною функцією, яка з певною точністю виражає задану залежність. Ця процедура дозволяє досліджувати процеси у нелінійному елементі аналітично. Оскільки нелінійні елементи не є абсолютно стабільними і залежать від різних зовнішніх чинників, то на практиці не прагнуть до особливо точної апроксимації характеристик. Існують наступні види апроксимації:

- апроксимація ступеневим поліномом;
- апроксимація графоаналітичним методом трьох ординат;
- кусково-лінійна апроксимація.

## 4.2 Приклади розв'язання задач

### ЗАДАЧА 1

*Розрахунок диференціального опору нелінійного елемента  
в електричному колі постійного струму*

Нелінійний елемент має вольт-амперну характеристику, що задана аналітично  $I = 0,25 \cdot U + 0,5 \cdot U^3$ .

Визначити диференціальний опір елемента при  $U = 0$  В.

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати визначення нелінійного елемента і диференціального опору;
- вміти знаходити диференціальний опір нелінійного елемента.

*Розв'язок*

Запишемо співвідношення для розрахунку диференціального опору нелінійного елемента –  $R_D = \frac{dU}{dI}$ .

Визначаємо похідну  $\frac{dI}{dU}$ :

$$\frac{dI}{dU} = \frac{d(0,25 \cdot U + 0,5 \cdot U^3)}{dU} = 0,25 + 3 \cdot 0,5 \cdot U^2 = 0,25 + 1,5 \cdot U^2.$$

$R_D = \frac{dU}{dI} = \frac{1}{0,25 + 1,5 \cdot U^2} \Rightarrow$  при  $U = 0$  диференціальний опір  $R_D$  дорівнює –  $R_D = \frac{1}{0,25} = 4$  Ом.

## ЗАДАЧА 2

*Розрахунок струмів і напруг у схемі з нелінійним елементом аналітичним і графічним методами*

Нелінійний елемент  $R_1$ , з'єднаний послідовно з лінійним опором  $R_2 = 12$  Ом (рис. 4.10). На вхід кола подається постійна напруга  $U = 4$  В. ВАХ нелінійного елемента задана законом  $I = f(U_1): I = a \cdot U_1^2$ , де  $a = 0,02 \frac{1}{\text{В} \cdot \text{Ом}}$ .

Визначити значення струму кола  $I$ , а також напруг на елементах  $U_1, U_2$  аналітично і за допомогою графічного методу.

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати графічний метод розрахунку електричних кіл з нелінійними елементами;
- вміти користуватися основними законами електричного кола для знаходження струму і напруг.

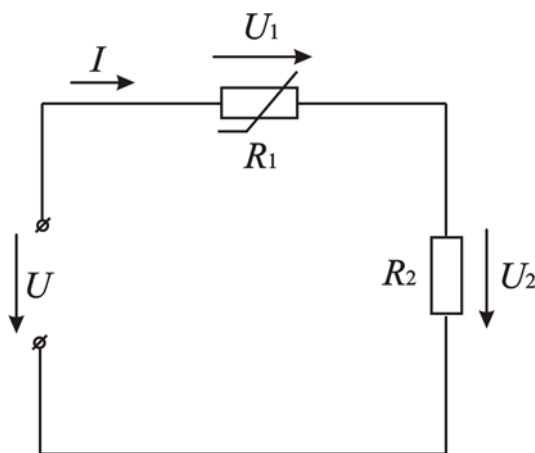


Рисунок 4.10 – Схема досліджуваного кола

## Розв'язок

### 1. Аналітичний метод.

За другим законом Кірхгофа напруга на вході схеми:  $U = U_1 + U_2$ , де  $U_1$  – напруга на нелінійному елементі,  $U_2$  – напруга на лінійному елементі.

За законом Ома напруга на лінійному елементі  $U_2 = I \cdot R_2$ . При послідовному з'єднанні елементів струм через усі елементи однаковий:

$$U = U_1 + U_2 = U_1 + I \cdot R_2 = U_1 + a \cdot U_1^2 \cdot R_2.$$

Маємо квадратне рівняння –  $a \cdot R_2 \cdot U_1^2 + U_1 - U = 0$ .

Підставивши коефіцієнти отримуємо –  $0,24 \cdot U_1^2 + U_1 - 4 = 0$ .

Знаходимо корені квадратного рівняння:

$$U_{1(1)} = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0,24 \cdot (-4)}}{2 \cdot 0,24} = 2,5 \text{ В}, \quad U_{1(2)} = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0,24 \cdot (-4)}}{2 \cdot 0,24} = -6,67 \text{ В}.$$

Другий корінь відкидаємо, так як він не відповідає напрямку, вказаному на рисунку 4.10. Таким чином,  $U_1 = 2,5 \text{ В}$ .

Знаходимо струм кола і напругу на лінійному елементі:

$$I = a \cdot U_1^2 = 0,02 \cdot 2,5^2 = 0,125 \text{ А}; \quad U_2 = I \cdot R_2 = 0,125 \cdot 12 = 1,5 \text{ В}.$$

### 2. Графічний метод.

Складаємо таблицю ВАХ нелінійного елемента  $I = a \cdot U_1^2 = 0,02 \cdot U_1^2$ :

Таблиця 4.1 – Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента  $R_1$

|                  |   |      |      |      |      |     |
|------------------|---|------|------|------|------|-----|
| $U_1, \text{ В}$ | 0 | 1    | 2    | 3    | 4    | 5   |
| $I, \text{ А}$   | 0 | 0,02 | 0,08 | 0,18 | 0,32 | 0,5 |

За таблицею будуємо ВАХ нелінійного елемента, яка є віткою параболи (рис. 4.11). За двома точками  $U_2 = 0, I = 0$ ;  $U_2 = 3, I = 0,25$  будуємо ВАХ лінійного елемента –  $I = \frac{U_2}{R_2} = \frac{1}{12} \cdot U_2$ .

За другим законом Кірхгофа –  $U = U_1 + U_2 = U_1 + I \cdot R_2 \Rightarrow \Rightarrow I = \frac{U - U_1}{R_2} = \frac{4 - U_1}{12}$ . Отримане рівняння є допоміжною прямою. Будуємо відрізок допоміжної прямої  $[AB]$  за двома точками  $U_1 = 0, I = 0,333$ ;  $U_1 = 4, I = 0$ .

Відрізок  $[AB]$  перетне криву  $I = a \cdot U_1^2$  у точці  $n$ .

Координати точки  $n$  визначають струм і напругу на нелінійному



елементі –  $I = 0,125 \text{ A}$ ,  $U_1 = 2,5 \text{ В}$ .

У зв'язку з тим, що елементи кола з'єднані послідовно, у колі протікає один струм. Тому значенню струму  $I = 0,125 \text{ A}$  відповідає напруга на лінійному елементі –  $U_2 = 2,5 \text{ В}$  (точка  $n$  на рисунку 4.11).

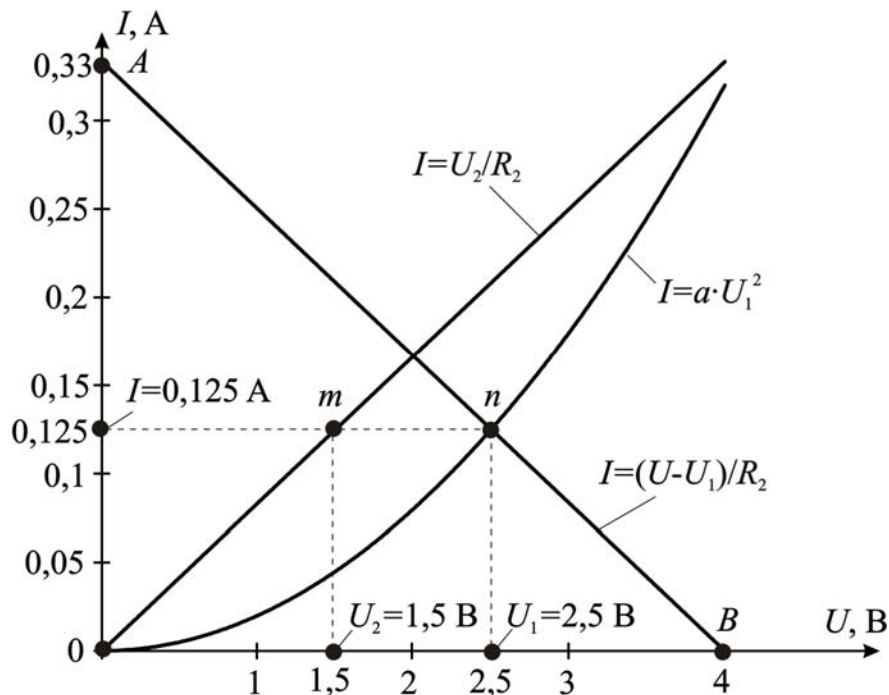


Рисунок 4.11 – Графічне визначення струму кола  $I$  та напруг  $U_1$ ,  $U_2$

Результати аналітичного і графічного розв'язку задачі співпадають.

### ЗАДАЧА 3

*Розрахунок електричного кола постійного струму з нелінійними елементами графічним методом*

Електричне коло постійного струму, що зображене на рисунку 3.12,а, містить два нелінійних елемента  $R_1$  і  $R_2$ , вольт-амперні характеристики яких задані в таблицях 4.2 і 4.3 відповідно. Параметри інших елементів кола:  $E_1 = 7 \text{ В}$ ,  $E_3 = 13 \text{ В}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$  (лінійний елемент).

Таблиця 4.2 – Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента  $R_1$

|                  |   |      |      |      |      |       |       |      |
|------------------|---|------|------|------|------|-------|-------|------|
| $U_1, \text{ В}$ | 0 | 2    | 4    | 6    | 8    | 10    | 12    | 14   |
| $I_1, \text{ А}$ | 0 | 0,26 | 0,37 | 0,41 | 0,43 | 0,435 | 0,435 | 0,44 |

Таблиця 4.3 – Вольт-амперна характеристика елемента  $R_2$

|                  |   |      |      |     |      |      |     |      |
|------------------|---|------|------|-----|------|------|-----|------|
| $U_2, \text{ В}$ | 0 | 2    | 4    | 6   | 8    | 10   | 12  | 14   |
| $I_2, \text{ А}$ | 0 | 0,21 | 0,26 | 0,3 | 0,34 | 0,37 | 0,4 | 0,43 |

Визначити:

- струми у вітках електричного кола;
- напругу між вузлами  $U_{ab}$ .

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати визначення нелінійного елемента і динамічного опору;
- знати, які методи використовуються для розрахунку нелінійних кіл;
- вміти розраховувати нелінійні кола графічним методом.

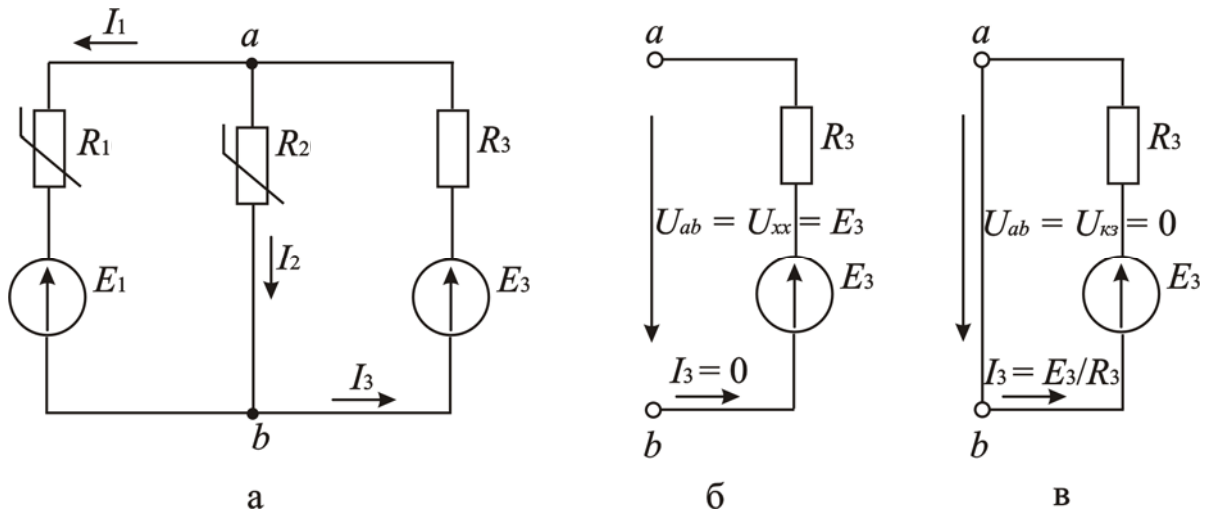


Рисунок 4.12 – Схеми для графічного визначення струмів у вітках кола

### Розв'язок

Довільно вибираємо додатні напрямки струмів у вітках (рис. 4.12,а).

Система рівнянь за законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ U_2 - U_1 = U_{ab} - U_1 = E_1 \\ U_3 + U_2 = U_3 + U_{ab} = E_3 \end{cases}$$

де  $U_{ab} = U_2$ ,

$U_3 = I_3 \cdot R_3$  – лінійна функція.

Виразимо струми  $I_1, I_2, I_3$  в функції однієї змінної, а саме – напруги  $U_{ab}$ .

$$E_1 + U_1 = U_{ab} = E_1 + I_1(U_{ab}) \cdot R_1(I_1) \Rightarrow I_1(U_{ab}) = \frac{U_{ab} - E_1}{R_1(I_1)} = \frac{U_{ab} - 7}{R_1(I_1)};$$

$$U_2 = U_{ab} \Rightarrow I_2(U_{ab}) = I_2(U_2);$$

$$E_3 - U_3 = U_{ab} = E_3 - I_3(U_{ab}) \cdot R_3 \Rightarrow I_3(U_{ab}) = \frac{E_3 - U_{ab}}{R_3} = \frac{13 - U_{ab}}{10}.$$

Будуємо криві залежностей струмів  $I_1, I_2, I_3$  відповідно від напруг  $U_1, U_2, U_3$  (рис. 4.13). Будуючи залежність  $I_3(U_3)$  вважаємо, що напруга на опорі  $R_3$  може змінюватись від нуля до напруги джерела  $E_3 = 13$  В.

Будуємо криві залежностей струмів  $I_1, I_2, I_3$  від напруги  $U_{ab}$  (рис. 4.13) за одержаними вище співвідношеннями.

За рахунок джерела  $E_1$  крива  $I_1(U_1)$  зміщується праворуч від початку координат на 7 вольт, утворюючи криву  $I_1(U_{ab}) = \frac{U_{ab} - 7}{R_1(I_1)}$ . Напруга  $U_{ab}$  при цьому може змінюватись від 7 до 13 вольт, що відповідає додатним значенням струму  $I_1$ .

Прямую  $I_3(U_{ab}) = \frac{13 - U_{ab}}{10}$  будуємо за двома точками  $U_{ab} = 13$  В ( $I_3 = 0$ );  $U_{ab} = 0$  ( $I_3 = 1,3$ А), що відповідає режимам неробочого ходу і короткого замикання нелінійного навантаження відносно вітки з ЕРС  $E_3$  і опором  $R_3$  (рис. 4.12,б та 4.12,в).

Будуємо допоміжну залежність  $I_{12}(U_{ab}) = I_1(U_{ab}) + I_2(U_{ab})$ .

Точка  $M$  перетину кривої  $I_{12}(U_{ab})$  і прямої  $I_3(U_{ab})$  є робочою точкою і для неї виконується перший закон Кірхгофа.

Ордината точки  $M$  дає чисельне значення струму  $I_3 = 0,49$  А, а абсциса точки  $M$  – чисельне значення напруги  $U_{ab} = 8,1$  В.

Для одержання чисельних значень струмів  $I_1$  і  $I_2$  опускаємо з точки  $M$  перпендикуляр на вісь абсцис, тоді ордината точки  $L$  дає значення струму  $I_1$ , а ордината точки  $K$  – значення струму  $I_2$ :  $I_1 = 0,15$  А;  $I_2 = 0,34$  А.

Визначаємо падіння напруги на нелінійному опорі  $U_1$  а також лінійному опорі  $U_3$ , використовуючи вольт-амперні характеристики  $I_1(U_1)$  і  $I_3(U_3)$ :  $U_1 = 1,1$  В;  $U_3 = 4,9$  В.

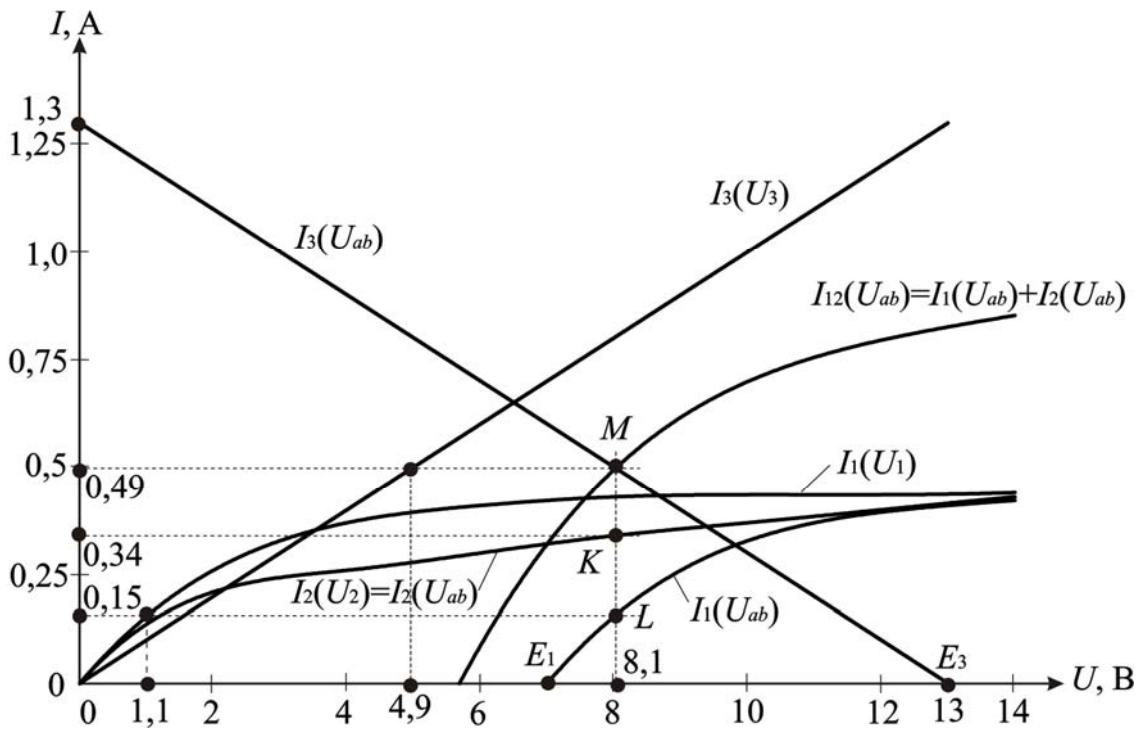


Рисунок 4.13 – Графічне визначення струмів віток дослідженого кола

### ЗАДАЧА 4

*Розрахунок електричного кола постійного струму з нелінійним елементом методом еквівалентного генератора*

Електричне коло з джерелом постійної напруги (рис. 4.14), містить нелінійний опір  $R_5$ , вольт-амперна характеристика якого задана таблицею 3.4. Параметри інших елементів схеми:  $E_1 = 5$  В,  $R_1 = R_2 = 5$  Ом,  $R_3 = 10$  Ом,  $R_4 = 15$  Ом.

Таблиця 4.4 – Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента  $R_5$

|                 |   |      |      |      |      |      |      |     |      |       |
|-----------------|---|------|------|------|------|------|------|-----|------|-------|
| $U_5, \text{В}$ | 0 | 0,5  | 1,0  | 1,5  | 2    | 2,5  | 3    | 3,5 | 4    | 4,5   |
| $I_5, \text{А}$ | 0 | 0,25 | 0,39 | 0,47 | 0,52 | 0,55 | 0,57 | 0,6 | 0,62 | 0,635 |

Визначити струм в нелінійному опорі  $R_5$ .

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати основи методу еквівалентного генератора;
- вміти розраховувати нелінійні кола графічним методом.

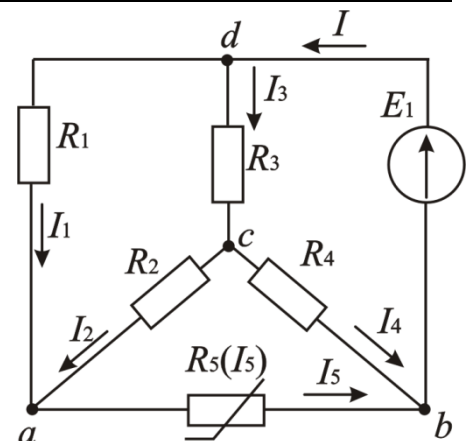


Рисунок 4.14 – Досліджуване нелінійне коло

### Розв'язок

Представимо задану схему у вигляді еквівалентного генератора, що приєднаний до вітки з нелінійним опором  $R_5$  (рис. 4.15).

За методом еквівалентного генератора необхідно визначити значення вхідного опору активного двополюсника відносно затискачів  $a$ - $b$  і напругу  $U_{ab\text{вх}}$  між точками « $a$ » та « $b$ » при відключеному нелінійному опорі.

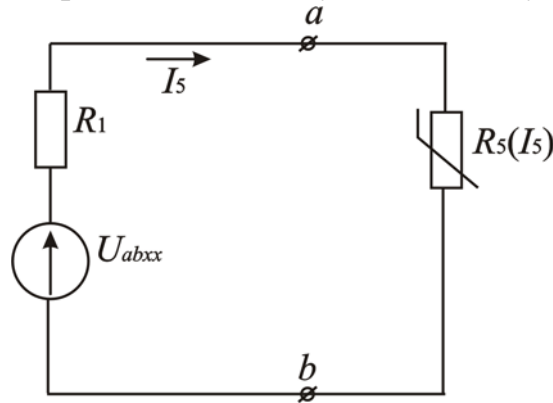


Рисунок 4.15 – Схема у вигляді еквівалентного генератора та нелінійного опору  $R_5$

Визначаємо вхідний опір (схема на рис. 4.16).

$$R_{\text{вх}} = \frac{R_1 \cdot \left( R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} \right)}{R_1 + R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}} = \frac{5 \cdot \left( 5 + \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} \right)}{5 + 5 + \frac{10 \cdot 15}{10 + 15}} = 3,43 \text{ Ом.}$$

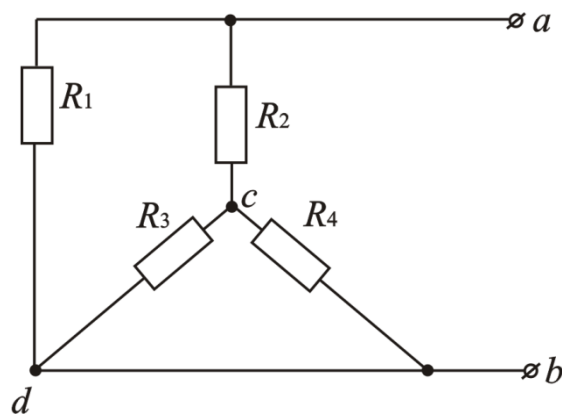


Рисунок 4.16 – Схема для визначення вхідного опору

Розраховуємо струми при відключенні нелінійного опору (рис. 4.17), для чого розрахуємо еквівалентний опір відносно затискачів « $d$ », « $b$ »:

$$R_{db} = R_4 + \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_3 + R_1 + R_2} = 15 + \frac{10 \cdot (5 + 5)}{10 + 5 + 5} = 20 \text{ Ом.}$$

За законом Ома:  $I_4' = \frac{E}{R_{db}} = \frac{5}{20} = 0,25 \text{ А}$ .

Струми в паралельних вітках, так як  $R_1 + R_2 = R_3$ :

$$I_1' = I_2' = I_4' \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 0,25 \cdot \frac{10}{5 + 5 + 10} = 0,125 \text{ А}$$

За другим законом Кірхгофа знаходимо напругу неробочого ходу:

$$U_{abxx} = R_4 \cdot I_4' + R_2 \cdot I_2' = 15 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,125 = 4,37 \text{ В}$$

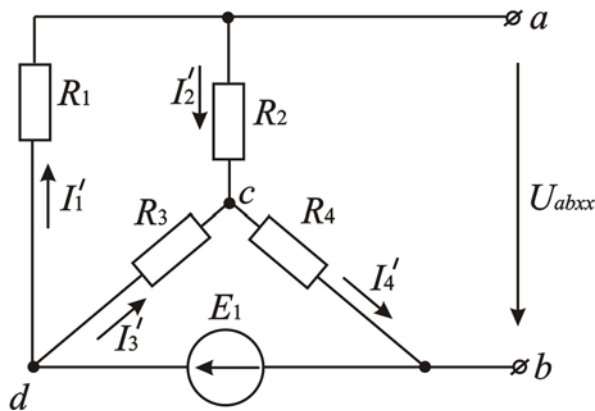


Рисунок 4.17 – Схема при відключенні нелінійного опору

Подальший розрахунок схеми здійснюємо за нелінійним рівнянням  $U_{abxx} = I_5 \cdot R_{ex} + U_5$ .

Наведене рівняння можна розв'язати графічно двома способами, а саме, побудувавши сумарну вольт-амперну характеристику вхідного опору та нелінійного опору  $R_5$ , або наступним чином (рис. 4.18):

– розглянути рівняння  $U_5 = U_{abxx} - I_5 \cdot R_{ex}$  в режимі короткого замикання,

тобто  $U_5 = 0$ ,  $I_5 = \frac{U_{abxx}}{R_{ex}} = 1,27 \text{ А}$ ;

– розглянути рівняння  $U_5 = U_{abxx} - I_5 \cdot R_{ex}$  в режимі холостого ходу, тобто

$I_5 = 0$ ,  $U_5 = U_{abxx} = 4,37 \text{ В}$ ;

– відкласти точки з координатами  $(4,37; 0)$ ,  $(0; 1,26)$  та отримати

відрізок  $[KN]$  прямої  $I_5 = \frac{U_{abxx} - U_5}{R_{ex}}$ ;

– побудувати вольт-амперну характеристику нелінійного опору  $R_5$  за даними таблиці 4.4;

– точка  $M$  перетину вольт-амперної характеристики нелінійного опору  $R_5$  з відрізком  $[KN]$  дає струм та напругу на  $R_5$ , а саме –  $I_5 = 0,55 \text{ А}$ ,  $U_5 = 2,5 \text{ В}$ .

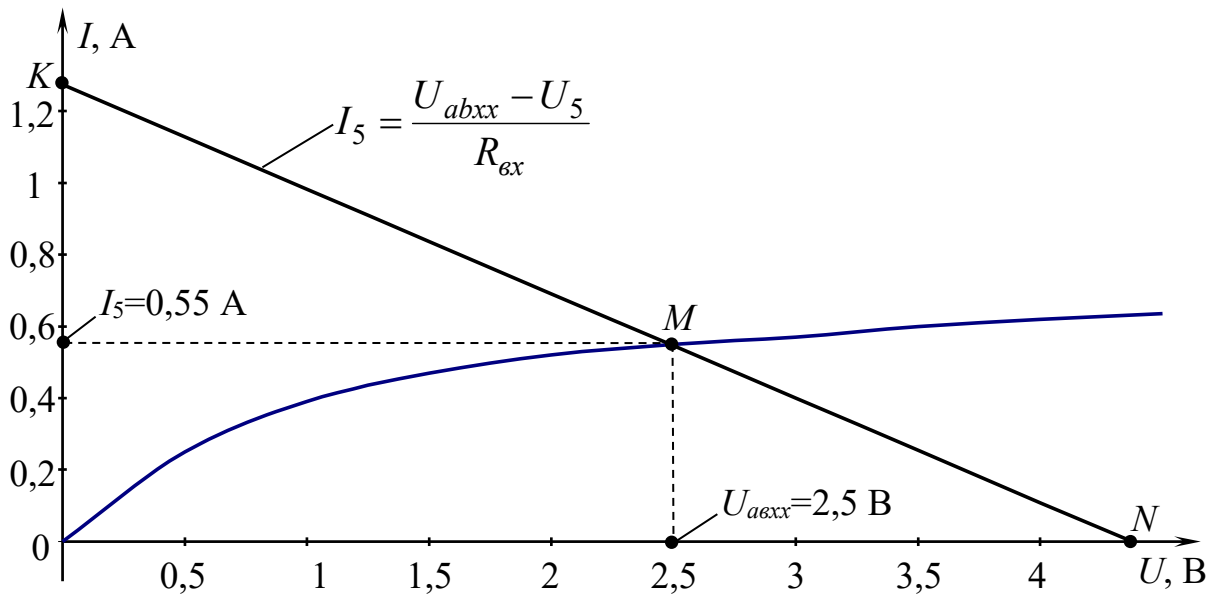


Рисунок 4.18 – Графічне визначення струму  $I_5$

### ЗАДАЧА 5

*Розрахунок кола синусоїдного струму з ідеальним діодом*

Напруга на вході кола, що складається з резистора  $R = 1 \text{ кОм}$  і ідеального діода  $VD$  (рис. 4.19), дорівнює  $u(t) = 200 \cdot \sin(\omega t) \text{ В}$ .

Визначити:

- середнє значення струму в колі  $I_0$ ;
- діюче значення струму в колі  $I$ .

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати визначення ідеального діода;
- вміти розраховувати середнє і діюче значення струму.

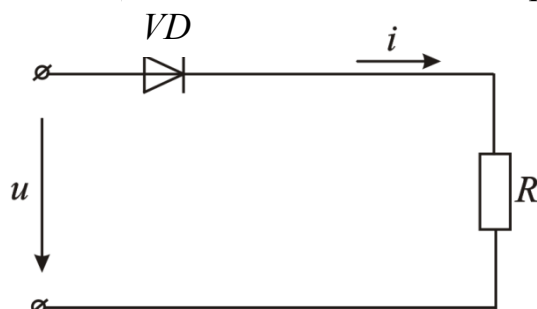


Рисунок 4.19 – Досліджуване коло

### *Розв'язок*

Ідеальним діодом називається діод, в якого опір у провідному стані дорівнює нулю, а в закритому стані нескінченості. Тому такий діод буде

пропускати лише додатну півхвилю струму.

Визначаємо амплітудне значення струму –  $I_m = \frac{U_m}{R} = \frac{200}{1000} = 0,2 \text{ А.}$

Знаходимо постійну складову струму –  $I_0 = \frac{I_m}{\pi} = \frac{0,2}{3,14} = 0,0638 \text{ А.}$

Розраховуємо діюче значення струму –  $I = \frac{I_m}{2} = \frac{0,2}{2} = 0,1 \text{ А.}$

Визначаємо потужність втрат в резисторі –  $P_H = \frac{U_m \cdot I_m}{4} = \frac{200 \cdot 0,2}{4} = 10 \text{ Вт.}$

### З А Д А Ч А 6

#### *Розрахунок електричного кола синусоїдного струму з нелінійним елементом*

Резистор з опором  $R = 1 \text{ кОм}$  підключений до джерела синусоїдної ЕРС  $e(t) = 150 \cdot \sin(\omega t)$  через діод  $VD$  (рис. 4.20,а), вольт-амперна характеристика якого показана на рисунку 3.20,б.

Визначити:

- середнє значення струму в колі  $I_0$ ;
- діюче значення струму в колі  $I$ ;
- потужність джерела  $P$ ;
- потужність втрат в резисторі  $P_H$ .

Побудувати графік струму  $i(t)$ .

Для розв'язку задачі необхідно:

- знати які методи використовують для розрахунку нелінійних кіл синусоїдного струму;
- знати визначення середнього і діючого струму;
- вміти проводити заміну діода еквівалентним нелінійним резистором.

#### *Розв'язок*

Замінімо діод у схемі рисунку 4.20,а нелінійним резистором, еквівалентний опір  $R_E$  якого є різним при прямому і зворотному напрямках струму (рис. 4.21,а).

Визначимо еквівалентний опір діода з характеристики рисунку 4.20,б:

- в прямому напрямі  $R_{E,np} = 1,2/0,3 = 4 \text{ Ом};$
- у зворотному напрямі  $R_{E,zv} = 200/(0,05 \cdot 10^{-6}) = 4 \cdot 10^9 \text{ Ом.}$

Струм у колі при прямому  $i_1$  й зворотному  $i_2$  напрямках являє собою



півхвилі синусоїди, амплітуди яких:

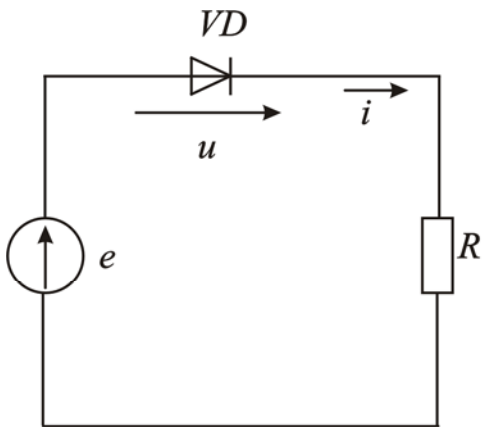
$$I_{mnp} = \frac{E_m}{R + R_{Enp}} = \frac{150}{1000 + 4} = 0,149 \text{ А},$$

$$I_{mзв} = \frac{E_m}{R + R_{Eзв}} = \frac{150}{1000 + 4 \cdot 10^9} = 0,0375 \cdot 10^{-6} \text{ А}.$$

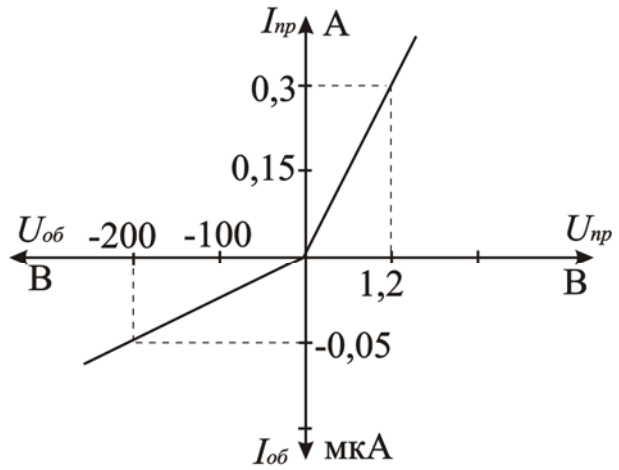
Будуємо залежність  $i(\omega t)$  (рис. 4.21,б).

Середнє значення постійної складової струму:

$$I_0 = I_{0np} - I_{0зв} = \frac{I_{mnp}}{\pi} - \frac{I_{mзв}}{\pi} = \frac{0,149 - 0,0375 \cdot 10^{-6}}{3,14} = 0,047 \text{ А}.$$

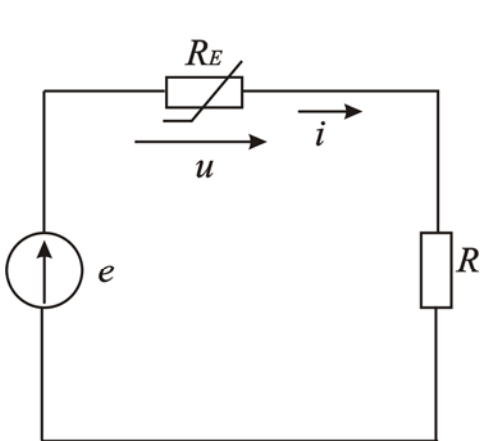


а

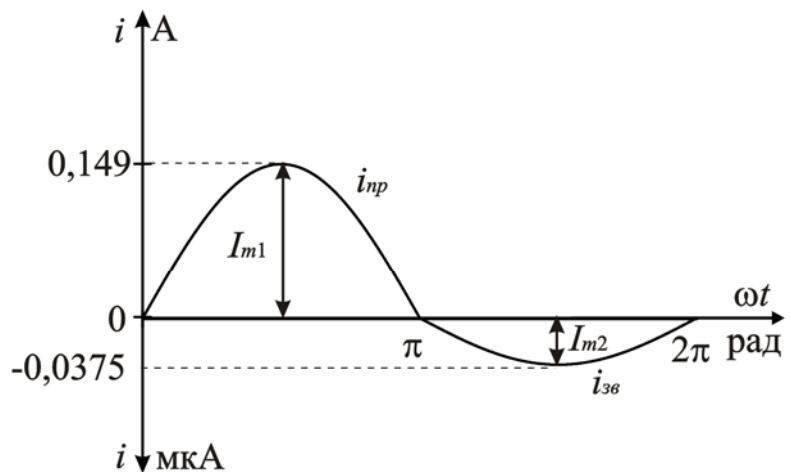


б

Рисунок 4.20 – Досліджуване коло та ВАХ діода  $VD$



а



б

Рисунок 4.21 – Схема заміщення досліджуваного кола та залежність  $i(\omega t)$

Визначаємо діюче значення струму:

$$I = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left( \int_0^{\pi} I_{mnp}^2 \cdot (\sin \omega t)^2 d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} I_{m3\phi}^2 \cdot (\sin \omega t)^2 d\omega t \right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{I_{mnp}^2 + I_{m3\phi}^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0,149^2 + (0,0375 \cdot 10^{-6})^2} = 0,075 \text{ A.}$$

Знаходимо потужність джерела:

$$P = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} (e(t) \cdot i(t)) d\omega t = \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \int_0^{\pi} (e(t) \cdot i_{np}(t)) d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} (e(t) \cdot i_{3\phi}(t)) d\omega t \right) =$$

$$= \frac{E_m}{4} \cdot (I_{m3\phi} + I_{mnp}) = \frac{150}{4} \cdot (0,149 + 0,0375 \cdot 10^{-6}) = 5,6 \text{ Вт.}$$

Знаходимо потужність втрат в резисторі:

$$P_H = I^2 \cdot R = 0,075^2 \cdot 1000 = 5,6 \text{ Вт.}$$

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учебник / Л. А. Бессонов. – М. : Гардарики, 2002 – 640 с.
2. Основы теории цепей : учебник для вузов / [Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин и др.]. – М. : Энергоатомиздат, 1989 – 528 с.
3. Теоретические основы электротехники. 4-е издание, дополненное для самостоятельного изучения курса / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. – СПб. : Питер, 2004 (т. 1 – 462 с., т. 2 – 575 с., т. 3 – 376 с.).
4. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – М. : Высшая школа, 1990 – 544 с.
5. М. П. Рибалко. Теоретичні основи електротехніки. Лінійні електричні кола : підручник / М. П. Рибалко, В. О. Єсауленко, В. І. Костенко. – Донецьк : Новий світ, 2003 – 513 с.
6. Перхач В. С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола / В. С. Перхач. – Київ : Вища школа, 1992 – 439 с.

*Виробничо-практичне видання*

Методичні рекомендації  
до практичних занять  
з навчальних дисциплін

**«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ. Частина 1, 2» ,**

**«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ. Частина 3»**

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
усіх форм навчання зі спеціальності  
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)*

Укладачі : **ФОРКУН Яна Борисівна,**  
**ГЛЄБОВА Марина Леонідівна**

Відповідальний за випуск *Я. Б. Форкун*  
*За авторською редакцією*  
Комп'ютерне верстання *Я. Б. Форкун*

План 2022, поз. 222М

---

Підп. до друку 06.07.2022. Формат 60 × 84/16.

Електронне видання. Ум. друк. арк. 4,4.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.

Електронна адреса: office@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.