**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до практичних занять і самостійної роботи
з навчальної дисципліни

# «ВИЩА МАТЕМАТИКА»
# МОДУЛЬ 2

(*для здобувачів першого (бакалаврського) рівня*
*вищої освіти заочної форми навчання*
*за спеціальністю 122 – Комп'ютерні науки*)

**Харків**
**ХНУМГ ім. О. М. Бекетова**
**2022**

Методичні рекомендації до практичних занять і самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика». Модуль 2 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти заочної форми навчання за спеціальністю 122 – Комп'ютерні науки) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. А. В. Якунін. – Харків : ХНУМГ ім. О М. Бекетова, 2022. – 77 с.

Укладач канд. техн. наук, доц. А. В. Якунін

Рецензент

**Ю. В. Ситникова**, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

*Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 11 від 27.06.2022*

Методичні рекомендації розроблені відповідно до програми дисципліни «Вища математика» для спеціальності 122 – Комп'ютерні науки та відображають навчальний матеріал другого модуля. Викладено короткі теоретичні відомості та розміщено приклади розв'язання типових задач, які не тільки ілюструють відповідні теоретичні питання, але й слугують зразками розв'язання й оформлення практичних завдань; подані питання для самодіагностики; завдання для модульної контрольної роботи; критерії оцінювання під час поточного, проміжного та підсумкового контролю. У кінці наведено список рекомендованих джерел.

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Розвиток наукових досліджень і широке впровадження їх результатів у виробництво, насичення його інноваційними наукоємними технологіями зумовлюють підвищення вимог не тільки до спеціальної, але й фундаментальної підготовки майбутніх фахівців. Усвідомлене використання математичного інструментарію слугує міцним підґрунтям розв'язування прикладних проблем. Математика також виконує функцію мови інших наук і виступає невід'ємною складовою загальної культури.

Сучасні освітні програми передбачають значну частку самостійної позааудиторної роботи студентів. Мета даного посібника полягає в допомозі студенту-заочнику опанувати математичний апарат, необхідний для розв'язування основних задач курсу вищої математики, розвивати логічне мислення, навчитися переводити практичне завдання з професійної на математичну мову.

Методичні рекомендації до практичних занять і самостійної роботи розроблені відповідно до програми дисципліни «Вища математика» для спеціальності 122 – Комп'ютерні науки та відображають навчальний матеріал другого модуля. Викладено короткі теоретичні відомості та розміщено приклади розв'язання типових задач, які не тільки ілюструють відповідні теоретичні питання, але й слугують зразками розв'язання й оформлення практичних завдань; подані питання для самодіагностики; завдання для модульної контрольної роботи; критерії оцінювання під час поточного, проміжного та підсумкового контролю. У кінці наведено список рекомендованих джерел.

Методичні рекомендації призначені для забезпечення засвоєння основних математичних понять та методів розв'язування задач під час самостійної роботи студентів. Особливість подання теоретичного матеріалу полягає в його алгоритмізації, що використовується при розв'язуванні відповідних завдань модульної контрольної роботи.

Результативність навчального процесу забезпечується ефективною системою контролю, яка включає в себе опитування студентів за змістом теоретичного матеріалу, оцінку активності та успішності роботи на практичних заняттях, перевірку виконання відповідної модульної контрольної роботи та її захист, проходження підсумкового іспиту за модуль.

Розв’язання модульної контрольної роботи оформляється в окремому зошиті відповідно до варіанта.

Для зауважень рецензента треба залишати поля, а виправлення вносити в цьому ж зошиті. Підсумковий контроль за модуль можна складати тільки після захисту роботи.

Номер варіанта повинен відповідати останній цифрі номера залікової книжки (шифру) студента.

Далі наведено зразок оформлення титульної сторінки модульної контрольної роботи.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
імені О. М. Бекетова

Контрольна робота №2
з вищої математики
студента (-тки) 1 курсу
групи <u>ХарКН22-1з</u>
(назва групи)
<u>Сидорова Івана Федоровича</u>
(прізвище, ім’я, по батькові студента)
Шифр студента <u>22018</u>
(номер залікової книжки)
Варіант №<u>8</u>
(номер варіанта)

Перевірив: ______________________________
(прізвище, ім’я, по батькові викладача)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2022

## КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ І ВМІНЬ СТУДЕНТІВ

| Оцінка | | | Вимоги |
|---|---|---|---|
| Сума балів | Оцінка ECTS | Оцінка за нац. шкалою | |
| 1 | 2 | 3 | 5 |
| 0–100 | A | Відмінно | Вільне володіння теоретичним матеріалом у повному обсязі: означення понять та їх ґрунтовне тлумачення, формулювання теорем та їх доведення, формулювання правил та їх обґрунтування, знання формул та обґрунтування їх застосування. Вільне застосування теоретичних знань до розв’язання задач і аналізу одержаних розв’язків в обсязі 90–100 % від запропонованих задач |
| 82–89 | B | Добре | Володіння основним теоретичним матеріалом у повному обсязі: означення понять та їх тлумачення, формулювання теорем та їх доведення, формулювання правил та їх обґрунтування, знання формул та обґрунтування їх застосування. Застосування теоретичних знань до розв’язання задач і аналізу одержаних розв’язків в обсязі 82–89 % від запропонованих задач |
| 74–81 | C | Добре | Володіння основним теоретичним матеріалом у повному обсязі: означення понять та їх тлумачення, формулювання теорем та їх доведення, формулювання правил та їх обґрунтування, знання формул та обґрунтування їх застосування. Припускаються деякі помилки по другорядним питанням курсу. Застосування теоретичних знань до розв’язання задач і аналізу одержаних розв’язків в обсязі 74–81 % від запропонованих задач |

| 1 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| 64–73 | D | Задовільно | Орієнтація в теоретичному матеріалі: означення понять без їх повного тлумачення, формулювання теорем без повного доведення, формулювання правил без їх обґрунтування, знання формул без обґрунтування їх застосування. Застосування теоретичних знань до розв'язання задач без аналізу одержаних розв'язків в обсязі 64–73 % від запропонованих задач |
| 60–63 | E | Задовільно | Орієнтація в теоретичному матеріалі: означення понять без їх повного тлумачення, формулювання теорем без повного доведення, формулювання правил без їх обґрунтування, знання формул без обґрунтування їх застосування. Застосування теоретичних знань до розв'язання задач без аналізу одержаних розв'язків в обсязі 60–63 % від запропонованих задач |
| 35–59 | FX | Незадовільно | Початкове ознайомлення з теоретичним матеріалом. Слабке володіння основним програмним матеріалом, грубі помилки в формулюванні теорем, правил і при розв'язуванні задач. Застосування теоретичних знань до розв'язання задач без аналізу одержаних розв'язків в обсязі 35–59 % від запропонованих задач |
| 0–34 | F | Незадовільно | Початкове ознайомлення з теоретичним матеріалом. Невміння застосовувати теоретичні знання до розв'язування задач. Недостатній обсяг знань, вмінь і навичок призводить до розв'язування з суттєвими похибками до 34 % від запропонованих задач |

# Змістовий модуль 1 ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ

## 1.1 Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

При дослідженні різноманітних явищ часто не вдається безпосередньо встановити функціональну залежність між значеннями шуканих і відомих величин, проте можливо виявити зв'язки між нескінченно малими приростами (диференціалами) змінних, що фігурують у задачі. Тому для моделювання неперервних динамічних процесів широко використовуються диференціальні та інші споріднені з ними рівняння.

Рівняння називається ***диференціальним***, якщо воно містить похідні (диференціали) шуканої функції.

***Порядком*** диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної (диференціала), що входить у нього.

Далі обмежимось випадком, коли шукана функція $y = f(x)$ є функцією однієї змінної $x$. Тоді диференціальне рівняння (ДР) називають ***звичайним***.

***Диференціальне рівняння*** $n$ ***–го порядку*** зв'язує незалежну змінну $x$, шукану функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'', \dots, y^{(n)}$ (чи відповідні диференціали). Диференціальне рівняння $n$–го порядку можна подати в ***загальному вигляді*** $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$.

***Розв'язком*** (***інтегралом***) диференціального рівняння називається довільна функція $y = f(x)$, що при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність. Графік розв'язку ДР називається ***інтегральною кривою***. Щоб знайти шукану функцію з ДР $n$-го порядку, треба в загальному випадку виконати $n$ операцій інтегрування, що дає $n$ довільних сталих. Таким чином, диференціальне рівняння має безліч розв'язків.

Розв'язок (інтеграл) диференціального рівняння $n$-го порядку, який залежить від $n$ довільних незалежних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, називається ***загальним розв'язком (інтегралом)*** цього рівняння:

$$y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \text{ або } F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0.$$

Надаючи довільним константам $C_1, C_2, \dots, C_n$ конкретних числових значень, отримаємо ***частинний розв'язок***.

*Геометричний зміст: загальному розв'язку відповідає сім'я інтегральних кривих. Частинному розв'язку відповідає конкретний екземпляр з сім'ї інтегральних ліній.*

Для знаходження конкретних значень довільних сталих, що входять у загальний розв'язок, звичайно використовуються:

1) ***початкові умови*** – відомі значення функції та її похідних в деякій одній фіксованій точці $x = x_0$; або

2) ***крайові*** (***граничні чи межові***) ***умови*** – відомі значення функції та її похідних в декількох різних фіксованих точках.

*Початкових або крайових умов повинно бути стільки, скільки довільних сталих, тобто який порядок рівняння.*

Диференціальне рівняння разом з початковими умовами називають ***початковою задачею*** (***задачею Коші***).

Диференціальне рівняння разом з крайовими умовами називають ***крайовою*** (***граничною***) ***задачею***.

***Теорема існування та єдиності розв'язку*** *початкової задачі. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області, що містить точку $M_0(x_0,y_0)$, то рівняння $y' = f(x,y)$ має розв'язок $y = y(x)$, в якому $y(x_0) = y_0$. Якщо, крім того, неперервна й частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$, то цей розв'язок єдиний.*

*Зауваження*. Крайова задача може мати довільну кількість розв'язків.

Диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x,y)$ називається ***рівнянням з відокремлюваними змінними***, якщо його права частина може бути подана як добуток $f(x,y) = h(x) \cdot g(y)$ двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної.

Щоб знайти розв'язок такого ДР $y' = h(x) \cdot g(y)$, треба відокремити змінні: похідну записати як відношення диференціалів $y' = dy/dx$, а потім обидві його частини помножити на $dx$ і поділити на вираз $g(y)$, щоб в одну частину рівняння входила тільки змінна $y$, а в іншу – тільки змінна $x$. Шуканий розв'язок $y = y(x)$ перетворює одержане рівняння $dy/g(y) = dx/h(x)$ у тотожність. Інтегруючи її, знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dx}{h(x)} + C, \text{ де } C \text{ – довільна стала.}$$

*Зауваження*. Для спрощення запису загального розв'язку ДР часто довільну сталу подають у вигляді деякого виразу з іншою довільною сталою $C$, при умові, що цей вираз приймає довільні значення. Наприклад, $\frac{1}{2}\ln C$, де $C > 0$.

*Приклад 1*. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$(xy^2 + 9x)dx + (4y - x^2y)dy = 0.$$

□ Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$x(y^2 + 9)dx + y(4 - x^2)dy = 0;\ \ y(4 - x^2)dy = -x(y^2 + 9)dx;$$

$$y(x^2 - 4)dy = x(y^2 + 9)dx\ |:(y^2 + 9):(x^2 - 4);\ \ \frac{ydy}{y^2+9} = \frac{x}{x^2-4}dx;$$

$$\int \frac{y\,dy}{y^2+9} = \int \frac{x\,dx}{x^2-4};$$

$$= \left| \begin{matrix} u = y^2 + 9;\ \ du = 2ydy;\ \ \ ydy = (1/2)du; \\ z = x^2 - 4;\ \ dz = 2xdx;\ \ \ xdx = (1/2)dz \end{matrix} \right| =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z};\ \ \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{2}\ln|C|;$$

$$\ln|y^2 + 9| = \ln|x^2 - 4| + \ln|C|.$$

Вигляд одержаного загального інтеграла можна спростити потенціюванням. Саме тому довільна стала записана через логарифм іншої довільної сталої. Тоді загальний інтеграл можна записати так: $|y^2 + 9| = |\mathrm{C}(x^2 - 4)|$. Далі $y = \pm\sqrt{\mathrm{C}(x^2 - 4) - 9}$ – загальний розв'язок в явній формі. ■

*Зауваження*. Виконуючи ділення в попередньому прикладі, припускали, що $x^2 - 4 \neq 0$ і $y^2 + 9 \neq 0$, та могли втратити розв'язки $x = \pm 2$. Підставляючи $x = \pm 2$ у диференціальне рівняння, переконуємося, що ці функції його задовольняють, тобто слугують його розв'язками. Але ці розв'язки є ***особливими***, оскільки їх неможливо одержати із загального розв'язку ні при яких значеннях довільної сталої.

*Приклад 2*. Розв'язати задачу Коші (знайти частинний розв'язок заданого ДР, що задовольняє вказаним початковим умовам):

$$y \cdot y' = xe^{x+y};\ \ y(2) = -1.$$

□ Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння. Подамо експоненту $e^{x+y}$ у вигляді $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ і відокремимо змінні:

$$y\frac{dy}{dx} = xe^x e^y \quad |\cdot dx; \quad ydy = xe^x e^y dx \quad |:e^y; \quad \frac{y}{e^y}dy = xe^x dx;$$

$$ye^{-y}dy = xe^x dx.$$

Далі проінтегруємо, використовуючи інтегрування частинами:

$$\int ye^{-y}dy = \int xe^x dx; \quad -y \cdot e^{-y} - e^{-y} = xe^x - e^x + C;$$

$(x-1)e^x + (y+1)e^y + C = 0$ – загальний розв'язок.

$$y' = \frac{y}{\ln y}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}; \quad \frac{\ln y\, dy}{y} = dx; \quad \int \frac{\ln y\, dy}{y} = \int dx.$$

Враховуючи початкову умову, знайдемо значення сталої $C$:

$$y(2) = -1: \quad (2-1)e^2 + (-1+1)e^{-1} + C = 0; \quad C = -e^2.$$

Отримуємо частинний розв'язок:

$$(x-1)e^x + (y+1)e^y - e^2 = 0. \quad \blacksquare$$

## 1.2 Однорідні та лінійні рівняння першого порядку

***Диференціальним рівнянням з однорідною правою частиною*** (***однорідним рівнянням***) називається рівняння першого порядку, яке можна подати у вигляді $y' = f(x,y)$, де функція $f(x,y)$ переходить сама в себе при заміні: $x \to kx$; $y \to ky$, $k = const \neq 0$.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою ***підстановки***: $y = xu$; $y' = u + xu'$.

*Приклад 1*. Знайти загальний розв'язок:

$$xy^3 dy = (x^4 + y^4)dx.$$

□ Поділимо ліву й праву частини ДР на $dx$ і розв'яжемо відносно похідної $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$xy^3\frac{dy}{dx} = x^4 + y^4; \quad xy^3 y' = x^4 + y^4 |:x:y^3; \quad y' = \frac{x^4+y^4}{xy^3}.$$

Перевіримо, чи буде це ДР першого порядку однорідним рівнянням:

$$x \to kx; \quad y \to ky; \quad f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{xy^3}; \; f(kx,ky) = \frac{(kx)^4+(ky)^4}{kx(ky)^3} = f(x,y).$$

Отже, це ДР – однорідне. Для розв'язання використаємо заміну $y = xu;\ \ y' = u + xu'$:

$$u + xu' = \frac{x^4+(xu)^4}{x(xu)^3};\ \ xu' = \frac{1+u^4}{u^3} - u;\ \ xu' = \frac{1}{u^3}\ |: x;\ \ u' = \frac{1}{xu^3};$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{xu^3}\ |\cdot dx;\ \ du = \frac{dx}{xu^3}\ \ |\cdot u^3;\ \ u^3du = \frac{dx}{x};\ \int u^3du = \int \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{4}u^4 = \ln|x| + \frac{1}{4}\ln|C|;\quad u^4 = 4\ln|x| + \ln|C|;\ \ u^4 = \ln Cx^4.$$

Повернемося до початкових змінних, підставляючи $u = y/x$:

$(y/x)^4 = \ln Cx^4;\ y^4 = x^4 \ln Cx^4$ – загальний розв'язок. ■

Диференціальне рівняння першого порядку, яке алгебраїчними перетвореннями можна звести до вигляду $y' + p(x)y = q(x)$, де $p(x)$ і $q(x)$ − відомі неперервні функції від $x$ (або сталі), називається ***лінійним***. Тобто, таке рівняння є лінійним відносно шуканої функції $y = y(x)$ та її похідної $y'$. Якщо функція $q(x)$ тотожно дорівнює нулю, то ДР називається ***однорідним***, в іншому разі – ***неоднорідним***.

Загальний розв'язок лінійного рівняння будуємо у вигляді:

$y = uv;\ \ y' = u'v + uv'$ (***підстановка Бернуллі***).

Тоді рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ набуває вигляду:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x);\ u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

Спочатку оберемо за множник $v$ ***будь-який*** частинний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними $v' + p(x)v = 0$. Далі для знаходження множника $u$ використаємо рівняння з відокремлюваними змінними $u'v = q(x)$, куди підставлено раніше знайдений вираз для $v$.

*Приклад 2*. Розв'язати задачу Коші:

$$x^2y' + xy + 6\ln x = 0;\ \ y(1) = 2.$$

□ Шукана функція та її похідна входять у ДР лінійно. Подамо це лінійне рівняння в стандартному вигляді $y' + p(x)y = q(x)$, ділячи його почленно на $x^2$ та переносячи відому функцію вправо:

$$y' + \frac{y}{x} = -6\frac{\ln x}{x^2}.$$

Шукаємо розв'язок у вигляді $y = uv$. Тоді:

$$y' = u'v + uv'; \quad u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -6\frac{\ln x}{x^2};$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = -6\frac{\ln x}{x^2}.$$

Прирівняємо вираз у дужках до нуля та розв'яжемо одержане ДР з відокремлюваними змінними відносно $v$, обмежуючись деяким частинним розв'язком:

$$v' + \frac{v}{x} = 0; \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln v = -\ln x; \quad \ln v = \ln\frac{1}{x}; \quad v = \frac{1}{x}.$$

Повернемося до попереднього рівняння. Беручи до уваги, що вираз у дужках дорівнює нулю, дістанемо:

$$u'v = -6\frac{\ln x}{x^2}.$$

Підставимо отриману функцію $v$ і розв'яжемо одержане ДР з відокремлюваними змінними відносно функції $u$:

$$u' \cdot \frac{1}{x} = -6\frac{\ln x}{x^2}; \;\; u' = -6\frac{\ln x}{x}; \;\; \frac{du}{dx} = -6\frac{\ln x}{x}; \;\; du = -6\frac{\ln x}{x}dx;$$

$$\int du = -6\int\frac{\ln x}{x}dx; \; u = \left|z = \ln x; \;\; dz = \frac{dx}{x}\right| = -6\int zdz =$$

$$= -3z^2 + C = -3\ln^2 x + C.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння знаходимо як добуток функцій $u$ і $v$:

$$y = uv = (C - 3\ln^2 x)\frac{1}{x};$$

Для знаходження конкретного значення довільної сталої використаємо початкову умову:

$$y(1) = 2: \;\; (C - 3\ln^2 1)\frac{1}{1} = 2; \;\; C = 2.$$

Підставимо значення константи $C$ у загальний розв'язок і дістанемо частинний розв'язок – розв'язок задачі Коші:

$$y = \frac{2 - 3\ln^2 x}{x}. \;\; \blacksquare$$

## 1.3 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння вигляду $y'' + py' + qy = f(x)$ називається ***лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами***, якщо ***коефіцієнти*** $p$ і $q$ – відомі числа, а ***права частина*** $f(x)$ – відома функція. Якщо $f(x) = 0$, то рівняння називається ***однорідним***, в іншому разі – ***неоднорідним***.

Для розв'язування однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$ виписуємо так зване ***характеристичне рівняння***: $k^2 + pk + q = 0$.

*Зауваження.* Для складання характеристичного рівняння потрібно в однорідному ДР виконати заміну:

$$y \to 1; \quad y' \to k; \quad y'' \to k^2.$$

Існують три можливих випадки для коренів $k_1$ і $k_2$ характеристичного рівняння:

1) Характеристичне рівняння має два дійсні різні корені $k_1$ і $k_2$ $(k_1 \neq k_2)$, тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, де $C_1$ і $C_2$ – довільні сталі.

2) Характеристичне рівняння має однакові дійсні корені $k_1 \neq k_1 = k_2 = k$, тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд: $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$.

3) Якщо дискримінант $D = p^2 - 4q$ характеристичного рівняння від'ємний, то воно має комплексні корені вигляду $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тут дійсна частина $\alpha = -\frac{p}{2}$; для уявної частини $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{-D}$; $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

*Зауваження.* Якщо дійсна частина комплексних коренів дорівнює нулю $(\alpha = 0)$, то загальний розв'язок однорідного рівняння виглядає так: $y = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x$.

*Приклад 1*. Знайти загальний розв'язок:

а) $y'' + 6y' - 7y = 0$; б) $y'' + 8y' + 16y = 0$;

в) $y'' + 6y' + 25y = 0$; г) $y'' + 25y = 0$.

□ а) $y'' + 6y' - 7y = 0$; $k^2 + 6k - 7 = 0$;

$$D = 6^2 - 4 \cdot (-7) = 64 > 0;\ \sqrt{D} = 8;$$

$$k_1 = \frac{-6-8}{2} = -7;\ \ k_2 = \frac{-6+8}{2} = 1;\ y = C_1 e^{-7x} + C_2 e^{x}.$$

б) $y'' + 8y' + 16y = 0; \quad k^2 + 8k + 16 = 0;\ \ D = 8^2 - 4 \cdot 16 = 0;$

$$k_1 = k_2 = k = \frac{-8}{2} = -4;\ \ y = (C_1 + C_2 x)e^{-4x}.$$

в) $y'' + 6y' + 25y = 0; \quad k^2 + 6k + 25 = 0;$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 25 = -64 < 0;\ \sqrt{-D} = 8;\ k_{1,2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i;$$

$$\alpha = -3;\ \beta = 4;\ \ y = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

г) $y'' + 25y = 0.\ k^2 + 25 = 0;\ k^2 = -25;\ k_{1,2} = \pm 5i;$

$$\alpha = 0;\ \beta = 5;\ \ y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x. \ \ \blacksquare$$

*Приклад 2*. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' + 7y' + 10y = 0; \qquad y(0) = -4;\ \ y'(0) = 3.$$

□ Складаємо і розв’язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 7k + 10 = 0;\ \ D = 7^2 - 4 \cdot 10 = 9 > 0;\ \sqrt{D} = 3;$$

$$k_1 = \frac{-7-3}{2} = -5; \quad k_2 = \frac{-7+3}{2} = -2.$$

Оскільки корені $k_1$ і $k_2$ − дійсні різні числа, то у відповідній формі записуємо загальний розв’язок: $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-2x}$.

Конкретні значення довільних сталих $C_1$ і $C_2$ знаходимо, враховуючи початкові умови:

$$y' = -5C_1 e^{-5x} - 2C_2 e^{-2x};$$

$$\begin{matrix} y(0) = -4: \\ y'(0) = 3: \end{matrix} \ \begin{cases} C_1 e^{-5 \cdot 0} + C_2 e^{-2 \cdot 0} = -4 \\ -5C_1 e^{-5 \cdot 0} - 2C_2 e^{-2 \cdot 0} = 3 \end{cases};\ \begin{cases} C_1 + C_2 = -4 \\ 5C_1 + 2C_2 = 3 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -3;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 23;$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{-3} = \frac{11}{3}; \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{23}{-3} = -\frac{23}{3}.$$

Тоді частинний розв’язок − розв’язок задачі Коші:

$$y = \frac{11}{3} e^{-5x} - \frac{23}{3} e^{-2x}. \ \ \blacksquare$$

## 1.4 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду

***Теорема про структуру загального розв'язку***. *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР $y'' + py' + qy = f(x)$ можна подати як суму загального розв'язку $y_о$ відповідного однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку $y_н$ цього рівняння:*

$$y = y_о + y_н.$$

Частинний розв'язок $y_н$ неоднорідного ДР звичайно вибирають за формою правої частини $f(x)$. На практиці функція $f(x)$ часто має ***спеціальний вигляд*** $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$. Тут $P_n(x)$ і $Q_m(x)$– многочлени відповідно степеня $n$ і $m$; $a$ і $b$ – дійсні сталі, з яких формується ***характеристичне комплексне число*** $z = a + bi$.

За ***методом невизначених коефіцієнтів*** *структура частинного розв'язку $y_н$ записується відповідно до спеціального вигляду правої частини $f(x)$ у формі:*

$$y_н = x^r e^{ax}(\bar{P}_s(x)\, cos\, bx + \bar{Q}_s(x)\, sin\, bx),$$

*де $\bar{P}_s(x)$ і $\bar{Q}_s(x)$ – многочлени степеня $s = max\{m, n\}$ з невідомими коефіцієнтами; $r$ – кратність характеристичного числа $z = a + bi$ як кореня характеристичного рівняння, $r \geq 0$.*

*Невідомі коефіцієнти многочленів $\bar{P}_s(x)$ і $\bar{Q}_s(x)$ знаходяться з системи рівнянь, які одержуються прирівнюванням коефіцієнтів при подібних відносно $x$ членах тотожності, в яку перетворюється ДР після підстановки в нього частинного розв'язку $y_н$.*

Розглянемо окремі випадки правої частини $f(x)$ спеціального вигляду:

1) $f(x) = P_n(x)$ – многочлен, при цьому $z = 0 + 0i = 0$. Якщо $k_1 \neq 0$ і $k_2 \neq 0$, тоді $y_н$ шукаємо у вигляді многочлена того ж степеня $n$ з невідомими коефіцієнтами: $y_н = \bar{P}_n(x)$. Якщо один з коренів характеристичного рівняння $\mathrm{k}_1$ і $\mathrm{k}_2$ дорівнює нулю, то $y_н = x\bar{P}_n(x)$.

2) $f(x) = Me^{ax}$, $M = const$, при цьому $z = a + 0i = a$. Тоді $y_н = Ax^r e^{ax}$, де $r$ – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $a$, $A$ – невідомий коефіцієнт.

3) $f(x) = M \cos bx + N \sin bx$ , $M, N = const$, при цьому $z = 0 + bi = bi$. Якщо корені характеристичного рівняння не дорівнюють $\pm bi$, тоді $y_{н} = A \cos bx + B \sin bx$. Якщо ж $k_{1,2} = \pm bi$, тоді $y_{н} = x(A \cos bx + B \sin bx)$. Тут $A$ і В – невідомі коефіцієнти.

*Приклад 1*. Знайти загальний розв'язок:

а) $y'' - 9y = 18x^2 - 9x + 2$; б) $y'' - 7y' = 14x - 2$;

в) $y'' + 6y' + 8y = 18e^{3x}$; г) $y'' + 10y' + 25y = 6e^{-5x}$;

д) $y'' + 3y' - 4y = -4 \sin 2x$; е) $y'' + 9y = 12 \cos 3x$.

□ а) $y'' - 9y = 0$; $k^2 - 9 = 0$; $k^2 = 9$; $k_{1,2} = \pm 3$;

$$y_{о} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x};$$

$f(x) = 18x^2 - 9x + 2$; $n = 2$; $z = 0 + 0i = 0$ – не є коренем характеристичного рівняння. Тоді $y_{н} = Ax^2 + Bx + C$.

$$y_{н}' = 2Ax + B;\ y_{н}'' = 2A;\ \ 2A - 9(Ax^2 + Bx + C) = 18x^2 - 9x + 2;$$

$$-9Ax^2 - 9Bx + (2A - 9C) = 18x^2 - 9x + 2;$$

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} -9A = 18 \\ -9B = -9 \\ 2A - 9C = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{r} A = -2 \\ B = 1 \\ C = (2A - 2)/9 = -2/3 \end{array}$$

$$y_{н} = -2x^2 + x - 2/3;$$

$$y = y_{о} + y_{н};\quad y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} - 2x^2 + x - 2/3.$$

б) $y'' - 7y' = 0$; $k^2 - 7k = 0$; $k(k - 7) = 0$;

$$k_1 = 0;\ k_2 = 7;\ y_{о} = C_1 + C_2 e^{7x};$$

$f(x) = 14x - 2$; $n = 1$; $z = 0 + 0i = 0$ – корінь характеристичного рівняння кратності $r = 1$.

Тоді $y_{н} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$.

$$y_{н}' = 2Ax + B;\quad y_{н}'' = 2A;\ \ 2A - 7(2Ax + B) = 14x - 2;$$

$$-14Ax + 2A - 7B = 14x - 2;$$

$$\begin{array}{l} x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} -14A = 14 \\ 2A - 7B = -2 \end{cases} \begin{array}{r} A = -1 \\ B = (2A + 2)/7 = 0 \end{array}$$

$$y_{\text{н}} = -x^2 + 0x = -x^2;\; y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}};\; y = C_1 + C_2e^{7x} - x^2.$$

в) $y'' + 6y' + 8y = 0;\; k^2 + 6k + 8 = 0;\; D = 6^2 - 4 \cdot 8 = 4 > 0;$

$$\sqrt{D} = 2;\; k_1 = \frac{-6-2}{2} = -4;\; k_2 = \frac{-6+2}{2} = -2;\; y_{\text{о}} = C_1e^{-4x} + C_2e^{-2x};$$

$f(x) = 18e^{3x};\quad z = 3 + 0i = 3$ – не є коренем характеристичного рівняння. Тоді $y_{\text{н}} = Ae^{3x}$.

$$y_{\text{н}}' = 3Ae^{3x};\; y_{\text{н}}'' = 9Ae^{3x};\;\; Ae^{3x} + 6 \cdot 3Ae^{3x} + 8Ae^{3x} = 18e^{3x};$$

$$27Ae^{3x} = 18e^{3x};\;\; A = \frac{2}{3};\;\; y_{\text{н}} = \frac{2}{3}e^{3x};$$

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}};\quad y = C_1e^{-4x} + C_2e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{3x}.$$

г) $y'' + 10y' + 25y = 0;\;\; k^2 + 10k + 25 = 0;\; D = 10^2 - 4 \cdot 25 = 0;$

$$k_1 = k_2 = k = \frac{-10}{2} = -5;\;\; y_{\text{о}} = (C_1 + C_2x)e^{-5x};$$

$f(x) = 6e^{-5x};\;\; z = -5 + 0i = -5$ – корінь характеристичного рівняння кратності $r = 2$. Тоді $y_{\text{н}} = Ax^2e^{-5x}$.

$$y_{\text{н}}' = A \cdot 2xe^{-5x} + Ax^2 \cdot (-5)e^{-5x} = Ae^{-5x}(-5x^2 + 2x);$$

$$y_{\text{н}}'' = -5Ae^{-5x}(-5x^2 + 2x) + Ae^{-5x}(-10x + 2) =$$

$$= Ae^{-5x}(25x^2 - 20x + 2);$$

$$Ae^{-5x}(25x^2 - 20x + 2) + 10 \cdot Ae^{-5x}(-5x^2 + 2x) +$$

$$+25Ax^2e^{-5x} = 6e^{-5x}\;\; |: e^{-5x};$$

$$A(25x^2 - 20x + 2 - 50x^2 + 20x + 25x^2) = 6;$$

$$2A = 6;\; A = 3;\quad y_{\text{н}} = 3x^2e^{-5x};$$

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}};\quad y = (C_1 + C_2x)e^{-5x} + 3x^2e^{-5x}.$$

д) $y'' + 3y' - 4y = 0;\; k^2 + 3k - 4 = 0;$

$$D = 3^2 - 4 \cdot (-4) = 25 > 0;\; \sqrt{D} = 5;$$

$$k_1 = \frac{-3-5}{2} = -4;\; k_2 = \frac{-3+5}{2} = 1;\; y_{\text{о}} = C_1e^{-4x} + C_2e^{x};$$

$f(x) = -4\sin 2x;\quad z = 0 + 2i = 2i$ – не є коренем характеристичного рівняння. Тоді $y_{\text{н}} = A\cos 2x + B\sin 2x$.

$$y_{н}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x\,;\;\; y_{н}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x;$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 3(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) -$$

$$-4(A\cos 2x + B\sin 2x) = -4\sin 2x;$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 6A\sin 2x + 6B\cos 2x -$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x = -4\sin 2x;$$

$$\begin{matrix}\cos 2x: \\ \sin 2x:\end{matrix} \begin{cases} -4A + 6B - 4A = 0 \\ -4B - 6A - 4B = -4 \end{cases} \begin{cases} -8A + 6B = 0 \\ -6A - 8B = -4 \end{cases} \begin{cases} 4A - 3B = 0 \\ 3A + 4B = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 25;\;\; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6;\;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8;$$

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{25};\; B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{25};\;\;\; y_{н} = \frac{6}{25}\cos 2x + \frac{8}{25}\sin 2x;$$

$$y = y_{о} + y_{н};\;\;\; y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x} + \frac{6}{25}\cos 2x + \frac{8}{25}\sin 2x.$$

е) $y'' + 9y = 0;\;\; k^2 + 9 = 0;\;\; k^2 = -9;\;\; k_{1,2} = \pm 3i;$

$$\alpha = 0;\;\; \beta = 3;\;\;\; y_{о} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x;$$

$f(x) = 12\cos 3x;\quad z = 0 + 3i = 3i$ – корінь характеристичного рівняння кратності $r = 1$. Тоді $y_{н} = x(A\cos 3x + B\sin 3x)$.

$$y_{н}' = A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) =$$

$$= A\cos 3x + B\sin 3x + 3x(-A\sin 3x + B\cos 3x);$$

$$y_{н}'' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x - 3A\sin 3x + 3B\cos 3x +$$

$$+3x(-3A\cos 3x - 3B\sin 3x) = -6A\sin 3x + 6B\cos 3x -$$

$$-9x(A\cos 3x + B\sin 3x);$$

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x - 9x(A\cos 3x + B\sin 3x) +$$

$$+9x(A\cos 3x + B\sin 3x) = 12\cos 3x;$$

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x = 12\cos 3x;\quad \begin{matrix}\cos 3x: \\ \sin 3x:\end{matrix} \begin{cases} 6B = 12 & B = 2 \\ -6A = 0 & A = 0 \end{cases}$$

$$y_{н} = x(0\cos 3x + 2\sin 3x) = 2x\sin 3x;$$

$$y = y_{о} + y_{н};\quad y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + 2x\sin 3x. \;\blacksquare$$

*Приклад 2*. Розв’язати задачу Коші:

$$y'' - 4y' + 29y = 52e^{x}; \qquad y(0) = 6; \;\; y'(0) = 5.$$

$$\square \;\; y'' - 4y' + 29y = 0; \quad k^2 - 4k + 29 = 0;$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 29 = -100 < 0; \sqrt{-D} = 10; k_{1,2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i;$$

$$\alpha = 2; \;\; \beta = 5; \;\; y_{\text{о}} = e^{2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x);$$

$f(x) = 52e^{x}$; $\quad z = 1 + 0i = 1$ – не є коренем характеристичного рівняння. Тоді $y_{\text{н}} = Ae^{x}$.

$$y_{\text{н}}' = Ae^{x}; \; y_{\text{н}}'' = Ae^{x}; \;\; Ae^{x} - 4Ae^{x} + 29e^{x} = 52e^{x} \;\; |: e^{x};$$

$$26A = 52; \;\; A = 2; \;\; y_{\text{н}} = 2e^{3x};$$

$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}$; $\;\; y = e^{2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + 2e^{\,x}$ – загальний розв’язок неоднорідного ДР.

Для виділення частинного розв’язку – розв’язку задачі Коші – знаходимо конкретні значення довільних сталих $C_1$ і $C_2$, враховуючи початкові умови:

$$y' = 2e^{2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) +$$
$$+ e^{2x}(-5C_1 \sin 5x + 5C_2 \cos 5x) + 2e^{x};$$

$$\begin{matrix} y(0) = 6: \\ y'(0) = 5: \end{matrix} \;\; \begin{cases} e^{0}(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + 2e^{0} = 6 \\ 2e^{0}(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + \\ + e^{0}(-5C_1 \sin 0 + 5C_2 \cos 0) + 2e^{0} = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} C_1 + 2 = 6 \\ 2C_1 + 5C_2 + 2 = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} C_1 = 4 \\ C_2 = (3 - 2C_1)/5 = -1 \end{matrix};$$

Тоді частинний розв’язок − розв’язок задачі Коші:

$$y = e^{2x}(4 \cos 5x - \sin 5x) + 2e^{\,x}. \;\; \blacksquare$$

*Зауваження*. Якщо права частина $f(x)$ не має спеціального вигляду, то часто її можна подати як суму $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, де кожний доданок $f_i(x)$ має спеціальний вигляд. Тоді за принципом суперпозиції маємо: $y_{\text{н}} = \sum_{i=1}^{n} y_{\text{н}i}$, де $y_{\text{н}i}$ – частинний розв’язок рівняння $y'' + py' + qy = f_i(x)$ з тією ж самою лівою і відповідною правою частиною, $i = \overline{1, n}$.

## 1.5 Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

У багатьох задачах потрібно знайти не одну, а декілька невідомих функцій, які характеризують взаємодіючі об'єкти. що описуються системою диференціальних рівнянь.

***Нормальна система*** $n$ ***лінійних ДР першого порядку зі сталими коефіцієнтами*** має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2(t), \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{cases}$$

де у лівих частинах стоять похідні першого порядку, а праві частини не містять похідних. Тут $t$ − аргумент; $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ − шукані функції; $a_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ − сталі коефіцієнти (відомі дійсні числа); $b_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ − вільні члени (відомі неперервні функції). Число $n$ називається ***порядком*** системи.

Якщо всі вільні члени $b_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ тотожно рівні нулю, то система називається ***однорідною***, в іншому разі – ***неоднорідною***.

***Розв'язком*** диференціальної системи називається сукупність функцій $x_{i0} = x_{i0}(t)$, $i = \overline{1,n}$, яка при підстановці в кожне з її рівнянь перетворює його у тотожність.

За аналогією з диференціальними рівняннями визначаються ***загальний*** і ***частинний розв'язки*** диференціальної системи.

Якщо нормальну систему доповнити ***початковими умовами*** $x_i(t_0) = x_{i0}$, $i = \overline{1,n}$ , де $x_{i0}$, $i = \overline{1,n}$ − задані дійсні числа, то одержимо для неї ***задачу Коші***.

Для розв'язування нормальної диференціальної системи найпростіше застосувати ***метод вилучення*** (зведення до одного ДР вищого порядку). Його суть розглянемо на прикладі.

*Приклад 1.* Розв'язати задачу Коші для неоднорідної диференціальної системи другого порядку методом вилучення. Обчислити значення $\bar{x} = x_K(\bar{t})$, $\bar{y} = y_K(\bar{t})$ отриманого розв'язку в заданій точці $\bar{t}$ (результат записати, округлюючи до цілих чисел):

$$\begin{cases} x' = 6x + 3y + 3e^{-t} \\ y' = -8x - 5y \end{cases}; \quad x(0) = -3; \; y(0) = 1; \quad \bar{t} = 2.$$

□ Продиференціюємо перше рівняння:

$$x'' = 6x' + 3y' - 3e^{-t}.$$

Підставимо в отримане рівняння замість похідної $y'$ вираз із другого рівняння:

$$x'' = 6x' + 3(-8x - 5y) - 3e^{-t};\ x'' = 6x' - 24x - 15y - 3e^{-t}.$$

З першого рівняння системи виразимо функцію $y$:

$$y = \frac{1}{3}x' - 2x - e^{-t}$$

і підставимо цей вираз замість $y$ в останнє рівняння:

$$x'' = 6x' - 24x - 15\left(\frac{1}{3}x' - 2x - e^{-t}\right) - 3e^{-t};$$

$$x'' = 6x' - 24x - 5x' + 30x + 15e^{-t} - 3e^{-t};$$

$$x'' - x' - 6x = 12e^{-t}.$$

Для одержаного лінійного неоднорідного ДР другого порядку спочатку знайдемо загальний розв’язок відповідного однорідного ДР за допомогою характеристичного рівняння:

$$x'' - x' - 6x = 0;\ k^2 - k - 6 = 0;\ D = (-1)^2 - 4 \cdot (-6) = 25 > 0;$$

$$\sqrt{D} = 5;\ k_1 = \frac{1-5}{2} = -2;\ k_2 = \frac{1+5}{2} = 3;\ x_{о} = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t}.$$

Оскільки права частина ЛНДР має спеціальний вигляд – експонента зі сталим множником, то його частинний розв’язок $x_{н}$ будуємо методом невизначених коефіцієнтів:

$f(t) = 12e^{-t};\ \ z = -1 + 0i = -1$ – не є коренем

характеристичного рівняння. Тоді $x_{н} = Ae^{-t}$.

$$y_{н}{}' = -Ae^{-t};\ y_{н}{}'' = Ae^{-t};\ \ Ae^{-t} + Ae^{-t} - 6Ae^{-t} = 12e^{-t}\ \ |: e^{-t};$$

$$-4A = 12;\ \ A = -3;\ \ x_{н} = -3e^{-t}.$$

Далі за принципом суперпозиції дістанемо загальний розв’язок відносно шуканої функції $x$:

$$x = x_{о} + x_{н};\ \ x = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t} - 3e^{-t}.$$

Знайдемо похідну отриманого загального розв’язку:

$$x' = -2C_1e^{-2t} + 3C_2e^{3t} + 3e^{-t}$$

та підставимо вирази для $x$ і $x'$ у співвідношення для $y$:

$$y = \frac{1}{3}x' - 2x - e^{-t} = \frac{1}{3}(-2C_1e^{-2t} + 3C_2e^{3t} + 3e^{-t}) -$$

$$-2(C_1e^{-2t} + C_2e^{3t} - 3e^{-t}) - e^{-t} = -\frac{2}{3}C_1e^{-2t} + C_2e^{3t} + e^{-t} -$$

$$-2C_1e^{-2t} - 2C_2e^{3t} + 6e^{-t} - e^{-t} = -\frac{8}{3}C_1e^{-2t} - C_2e^{3t} + 6e^{-t}.$$

Отже, маємо загальний розв'язок диференціальної системи:

$$\begin{cases} x = C_1e^{-2t} + C_2e^{3t} - 3e^{-t} \\ y = -(8/3)C_1e^{-2t} - C_2e^{3t} + 6e^{-t} \end{cases}.$$

Для знаходження конкретних значень довільних сталих $C_1$ і $C_2$ використаємо початкові умови:

$$\begin{matrix} x(0) = -3: \\ y(0) = 1: \end{matrix} \begin{cases} C_1e^0 + C_2e^0 - 3e^0 = -3 \\ -(8/3)C_1e^0 - C_2e^0 + 6e^0 = 1 \quad |\times(-3) \end{cases};$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 8C_1 + 3C_2 = 15 \end{cases} \quad \begin{matrix} C_2 = -C_1 \\ 8C_1 - 3C_1 = 15 \end{matrix} \quad \begin{matrix} C_2 = -3 \\ C_1 = 3 \end{matrix}.$$

Отже, маємо розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} x_К = 3e^{-2t} - 3e^{3t} - 3e^{-t} \\ y_К = -8e^{-2t} + 3e^{3t} + 6e^{-t} \end{cases}.$$

Обчислимо значення отриманого розв'язку в заданій точці:

$$\bar{t} = 2; \begin{cases} \bar{x} = x_К(2) = 3e^{-4} - 3e^{6} - 3e^{-2} \approx -1\,210 \\ \bar{y} = y_К(2) = -8e^{-4} + 3e^{6} + 6e^{-2} \approx 1\,210 \end{cases}. \blacksquare$$

**Запитання для самоконтролю**

1. Що таке диференціальне рівняння (ДР)? Як визначається його порядок? Який загальний вигляд ДР $n$ –го порядку?
2. Що називається розв'язком ДР? Що називається загальним розв'язком ДР? Частинним розв'язком?
3. Що таке початкові та крайові умови? Як ставиться початкова задача (задача Коші)? Крайова задача?
4. Як для ДР першого порядку формулюється теорема про існування та єдиність розв'язку?

5. Що таке ДР з відокремлюваними змінними? Опишіть метод інтегрування диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.
6. Що таке ДР з однорідною правою частиною (однорідне рівняння)? За допомогою якої підстановки однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?
7. Яке ДР першого порядку називається лінійним однорідним? Лінійним неоднорідним? Як розв'язується таке ДР методом Бернуллі?
8. Яке ДР $n$-го порядку називається лінійним однорідним? Лінійним неоднорідним?
9. Яка структура загального розв'язку лінійного однорідного ДР другого порядку?
10. Що таке характеристичне рівняння для лінійного однорідного ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами? Як скласти характеристичне рівняння?
11. За якими формулами будується загальний розв'язок лінійного однорідного ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами в залежності від виду коренів характеристичного рівняння?
12. Яка структура загального розв'язку лінійного неоднорідного ДР другого порядку?
13. Для лінійного неоднорідного ДР що таке права частина спеціального вигляду? Як методом невизначених коефіцієнтів будується частинний розв'язок лінійного неоднорідного ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає правій частині спеціального вигляду?
14. Наведіть приклади застосування диференціальних рівнянь у прикладних задачах.
15. Який вигляд має нормальна система лінійних ДР першого порядку зі сталими коефіцієнтами? Що називається розв'язком системи диференціальних рівнянь?
16. Як ставиться початкова задача (задача Коші) для диференціальної системи?
17. У чому полягає метод вилучення розв'язування лінійної диференціальної системи?

## Змістовий модуль 2 РЯДИ

### 2.1 Числовий ряд. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. ***Числовим рядом*** називається нескінченна сума членів числової послідовності: $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, де $u_1, u_2, \ldots, u_n$, … – ***члени ряду***, причому $n$***-й член*** $u_n$ також має назву ***загального члена***.

Ряд вважається заданим, якщо відомо правило, за яким може бути обчислений будь-який член ряду. Найчастіше використовують два способи завдання ряду:

1) формулою загального члена $u_n = f(n)$;

2) рекурентним співвідношенням, наприклад:

$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}, \quad n = 3, 4, \ldots; \quad u_1 = 1; \quad u_2 = 1.$

Скінченна сума $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ усіх перших членів ряду до $u_n$ включно називається $n$ ***-ю частковою сумою ряду***.

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд називається ***збіжним***, а значення границі $S$ – ***сумою ряду***. Якщо ця границя нескінченна, чи взагалі не існує, то ряд називається ***розбіжним***.

Ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$, який утворюється з початкового ряду $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ відкиданням перших $n$ членів називається $n$***-м залишком ряду***.

***Необхідна ознака збіжності***. *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збігається, то загальний член ряду прямує до нуля при необмеженому зростанні його номера:* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Іншими словами, *якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$*, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *розбігається.*

*Приклад 1*. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{8n+3}$ на збіжність.

□ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-1}{8n+3} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5-1/n}{8+3/n} = \frac{5-0}{8+0} = \frac{5}{8} \neq 0.$

Ряд розбігається. ■

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***знакододатним***, якщо $u_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \ldots$.

Розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності знакододатних рядів.

***Перша (основна) ознака порівняння***. *Нехай маємо два знакододатні ряди* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. *Якщо, починаючи з деякого номера* $N$, *для усіх* $n > N$ *виконується нерівність* $u_n \le v_n$, *то із збіжності другого («більшого») ряду випливає збіжність першого («меншого») ряду, а з розбіжності першого («меншого») ряду випливає розбіжність другого («більшого») ряду*.

Для порівняння використовують ***еталонні ряди*** – ряди з відомою поведінкою. Серед них ***узагальнений гармонічний ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, що збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$, та ***геометричний ряд*** (ряд геометричної прогресії) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, що збігається при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \ge 1$.

*Приклад 2*. Дослідити ряд на збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (1/n)^n; \qquad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

□ а) Порівняємо цей ряд зі збіжним геометричним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n$. Оскільки $(1/n)^n \le (1/2)^n$, починаючи з $n \ge 2$, то даний «менший» ряд теж збіжний разом з «більшим» рядом.

б) Порівняємо цей ряд із розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Оскільки $\frac{1}{n} \le \frac{1}{\ln n}$, починаючи з $n \ge 2$, то даний «більший» ряд теж розбіжний разом з «меншим» рядом. ■

***Друга*** (***гранична***) ***ознака порівняння***. *Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = c$, $(0 < c < +\infty)$ *відношення загальних членів двох знакододатних рядів* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *то обидва ряди збігаються чи розбігаються одночасно.*

*Приклад 3*. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{4n^6+2n^3-5}}{3n^2+2n^4\sqrt{n}+4}$ на збіжність:

□ Оскільки

$$u_n = \frac{\sqrt[3]{4n^6+2n^3-5}}{3n^2+2n^4\sqrt{n}+4} \sim \frac{\sqrt[3]{4n^6}}{2n^4\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt[3]{n^6}}{n^4\sqrt{n}} = \frac{n^2}{n^{9/2}} = \frac{1}{n^{5/2}} = v_n,$$

то застосуємо граничну ознаку порівняння з узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$, $p = \frac{5}{2} > 1$, що збігається:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{4n^6+2n^3-5}}{3n^2+2n^4\sqrt{n}+4}:\frac{1}{n^{5/2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{4n^6+2n^3-5}\cdot n^{5/2}}{3n^2+2n^4\sqrt{n}+4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{4+\frac{2}{n^3}-\frac{5}{n^6}}}{\frac{3}{n^{5/2}}+2+\frac{4}{n^{9/2}}}=\frac{\sqrt[3]{4+0-0}}{0+2+0}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\neq\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}.$$ Ряд збігається. ■

***Ознака Даламбера***. *Якщо для знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *існує границя* $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ *відношення наступного члена до попереднього, то* а) *при* $q<1$ *ряд збігається*; б) *при* $q>1$ *ряд розбігається*; в) *при* $q=1$ *ряд може як збігатися, так і розбігатися (потребує додаткового дослідження)*.

*Зауваження*. Ознаку Даламбера рекомендується застосовувати, коли загальний член містить показникову функцію або факторіал.

*Приклад 4*. Дослідити ряд на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^{2n}}$;  б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^n\sqrt{n^2+9}}$.

□ а) Оскільки загальний член ряду містить показникову функцію, то скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{n^3+1}{3^{2n}};\quad u_{n+1}=\frac{(n+1)^3+1}{3^{2(n+1)}}=\frac{(n+1)^3+1}{3^{2n}\cdot 9}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3+1}{3^{2n}\cdot 9}:\frac{n^3+1}{3^{2n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+1)^3+1\right)\cdot 3^{2n}}{3^{2n}\cdot 9(n^3+1)}=$$

$$=\frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+1}{n^3+1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^3+1/n^3}{1+1/n^3}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{(1+0)^3+0}{1+0}=\frac{1}{9}<1.$$ Ряд збігається.

б) Оскільки загальний член ряду містить і факторіал, і показникову функцію, то скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{(2n)!}{3^n\sqrt{n^2+9}};\quad u_{n+1}=\frac{(2(n+1))!}{3^{n+1}\sqrt{(n+1)^2+9}}=\frac{(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}{3^n\cdot 3\cdot\sqrt{(n+1)^2+9}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}{3^n\cdot 3\cdot\sqrt{(n+1)^2+9}}:\frac{(2n)!}{3^n\sqrt{n^2+9}}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n+1)\sqrt{n^2+9}}{\sqrt{(n+1)^2+9}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+9}{(n+1)^2+9}}\times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}(2n+1)(n+1) = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+9/n^2}{(1+1/n)^2+9/n^2}} \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}(2n+1)(n+1) = \left|\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{1+0}{(1+0)^2+0}}\cdot(+\infty)\right| = +\infty > 1.$$

Ряд розбігається. ■

***Радикальна ознака Коші***. *Якщо для знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = q$, *то* а) *при* $q < 1$ *ряд збігається*; б) *при* $q > 1$ *ряд розбігається*; в) *при* $q = 1$ *ряд може як збігатися, так і розбігатися (потребує додаткового дослідження)*.

*Зауваження*. Цю ознаку рекомендується застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції, з яких досить просто добувається корінь $n$-го степеня.

*Приклад 5*. Дослідити ряд на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{3n-1}{6n+5}\right)^{4n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

□ а) Випишемо загальний член ряду та скористаємося радикальною ознакою Коші, спираючись на те, що загальний член ряду є показниковою функцією, з якої легко добувається корінь $n$-го степеня:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{3n-1}{6n+5}\right)^{4n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\frac{3n-1}{6n+5}\right)^{4} =$$

$$= \left(\arcsin\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{6n+5}\right)^{4} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \left(\arcsin\lim_{n\to\infty}\frac{3-1/n}{6+5/n}\right)^{4} =$$

$$= \left(\arcsin\frac{3-0}{6}\right)^{4} = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{4} < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

б) Загальний член ряду містить показникову функцію, з якої легко добувається корінь $n$-го степеня, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{2}e > 1. \text{ Ряд розбігається. ■}$$

***Інтегральна ознака Коші***. *Якщо члени знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *утворюють спадну послідовність* ($u_{n+1} \le u_n, n = 1, 2, \ldots$)*, а* $f(x)$*– спадна невід'ємна неперервна на проміжку* $[1; +\infty)$ *функція, значення якої при натуральних значеннях аргументу співпадають з членами ряду* ($f(n) = u_n, n = 1, 2, \ldots$)*, тоді вказаний ряд і невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *ведуть себе однаково: збігаються чи розбігаються одночасно*.

*Приклад 6*. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\ln^2(3n+4)}$ на збіжність.

□ Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{(3x+4)\ln^2(3x+4)}$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[1; +\infty)$, причому $f(n) = u_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(3x+4)\ln^2(3x+4)} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = \ln(3x+4)\,; \;\; du = \frac{3dx}{3x+4}; \\ \frac{dx}{3x+4} = \frac{1}{3}du; \; u_1 = \ln 7\,; \;\; u_2 = +\infty \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int_{\ln 7}^{+\infty} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{3u}\Big|_{\ln 7}^{+\infty} =$$

$$= 1/(3\ln 7).$$

Інтеграл збігається, тому збігається й заданий ряд. ■

## 2.2 Знакозмінні ряди. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбниця

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що містить нескінченну кількість членів обох знаків «+» і «−», називається ***знакозмінним***.

Знакозмінний ряд, два довільні сусідні члени якого мають різні знаки, називається ***знакопочерговим***. Його вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \text{ де } u_n \ge 0.$$

***Достатня ознака Лейбниця***. *Якщо для знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, де $u_n \ge 0$, *виконуються дві умови*:

$$1)\; u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \cdots; \qquad 2)\; \lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

*тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно* *спадною і прямує до нуля, тоді цей ряд є збіжним, причому його сума* $S$ *додатна і не перевищує модуля першого члена*: $0 < S \leq u_1$.

*Наслідок*. Модуль залишку $R_n = S - S_n$ збіжного знакопочергового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ не перевищує модуля першого з відкинутих членів. Тобто $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, складений з модулів його членів, збігається, та ***умовно збіжним***, коли сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ з модулів його членів розбігається.

Підкреслимо, що *виконання ознаки Лейбниця гарантує не абсолютну, а лише умовну збіжність знакопочергового ряду.*

*Приклад 1*. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність дані знакопочергові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\operatorname{arctg}\frac{n^4+1}{n^4+9}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(7n-3)\ln(7n-3)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^{2n-1}}{\sqrt{n^3-n+4}}$.

□ а) До ряду з модулів членів даного ряду застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(-\operatorname{arctg}\frac{n^4+1}{n^4+9}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{n^4+1}{n^4+9} =$$

$$= \operatorname{arctg}\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+1}{n^4+9} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \operatorname{arctg}\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n^4}{1+9/n^4} = \operatorname{arctg}\frac{1+0}{1+0} = \frac{\pi}{4} < 1.$$

Ряд з модулів збігається. Отже, даний ряд абсолютно збіжний.

б) До ряду з модулів членів даного ряду застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{(7n-3)\ln(7n-3)}\right| = \frac{1}{(7n-3)\ln(7n-3)};\ f(x) = \frac{1}{(7x-3)\ln(7x-3)};$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{(7x-3)\ln(7x-3)} =$$

$$= \left|\begin{array}{c} u = \ln(7x-3)\,;\ du = \frac{7dx}{7x-3}; \\ \frac{dx}{7x-3} = \frac{1}{7}du;\ u_1 = \ln 4\,;\ u_2 = +\infty \end{array}\right| = \frac{1}{7}\int_{\ln 4}^{+\infty}\frac{du}{u} = \frac{1}{7}\ln|u|\Big|_{\ln 4}^{+\infty} = +\infty.$$

Оскільки інтеграл розбігається, то розбігається й ряд з модулів.

Безпосередньо до самого знакопочергового ряду застосуємо ознаку Лейбниця. Перевіримо виконання відповідних умов:

$$1)\ |u_n| = \frac{1}{(7n-3)\ln(7n-3)} > \frac{1}{(7(n+1)-3)\ln(7(n+1)-3)} = |u_{n+1}|;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(7n-3)\ln(7n-3)} = 0,$$

Обидві умови ознаки Лейбниця справджуються, тому ряд збігається. Оскільки при цьому ряд з модулів його членів розбігається, то даний ряд збігається умовно.

в) До ряду з модулів членів даного ряду застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}5^{2n-1}}{\sqrt{n^3-n+4}};\quad u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1+1}5^{2(n+1)-1}}{\sqrt{(n+1)^3-(n+1)+4}} = \frac{(-1)^{n+2}5^{2n+1}}{\sqrt{(n+1)^3-n+3}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}5^{2n+1}}{\sqrt{(n+1)^3-n+3}} : \frac{(-1)^{n+1}5^{2n-1}}{\sqrt{n^3-n+4}}\right| = 25\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3-n+4}}{\sqrt{(n+1)^3-n+3}} =$$

$$= \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 25\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-1/n^2+4/n^3}}{\sqrt{(1+1/n)^3-1/n^2+3/n^3}} = 25\cdot\frac{\sqrt{1-0+0}}{\sqrt{(1+0)^3-0+0}} = 25 > 1.$$

Ряд з модулів розбігається. З розбіжності цього ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ за ознакою Даламбера випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| \neq 0$. Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Отже, для даного ряду не виконується необхідна ознака збіжності, тому він розбігається. ■

## 2.3 Степеневі ряди. Інтервал і область збіжності

***Функціональним*** називається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, членами якого є функції $u_n(x)$, $n = 1, 2, ...$, визначені на деякій непорожній множині $D$ зміни аргументу $x$.

Областю збіжності функціонального ряду називається множина тих значень $x$, при яких ряд збігається.

***Степеневим рядом*** за степенями двочлена $x - x_0$ називається функціональний ряд вигляду: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, де $x$ – дійсна змінна (***аргумент***); $x_0$ – дійсне фіксоване число (***центр розвинення*** або ***опорна точка***); $a_n$, $n = 0, 1, 2, ...$ – дійсні сталі (***коефіцієнти***).

***Область збіжності*** степеневого ряду включає ***інтервал збіжності*** $(x_0 - R; x_0 + R)$, де він збігається абсолютно, а також, можливо, кінці цього інтервалу, де ряд може як збігатися, так і розбігатися. $R$ називається ***радіусом збіжності*** ряду.

Для визначення інтервалу збіжності застосовується ознака Даламбера чи радикальна ознака Коші до ряду, складеного з абсолютних величин членів даного степеневого ряду. На кінцях інтервалу збіжності питання про збіжність розв'язується окремо для кожного конкретного ряду, при цьому використовуються більш «сильні» ознаки – необхідна ознака збіжності, ознаки порівняння та, в останню чергу як більш складна, інтегральна ознака.

*Зауваження*. У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку $x = x_0$ $(R = 0)$, у інших – інтервалом збіжності є вся числова пряма $(-\infty; +\infty)$ $(R = +\infty)$.

*Приклад 1*. Знайти інтервал, радіус і область збіжності:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^{3n}}{(n+4)8^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n n!}{n^3+8}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(n+4)! \cdot 3^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{2n}}{3^{2n}} \ln^n(e + 1/n)$.

□ а) Скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{(-1)^n (x-5)^{3n}}{(n+4)8^n};\ u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} (x-5)^{3(n+1)}}{(n+1+4)8^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1} (x-5)^{3n+3}}{(n+5)8^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}(x-5)^{3n+3}}{(n+5)8^{n+1}} : \frac{(-1)^n (x-5)^{3n}}{(n+4)8^n}\right| = \frac{|x-5|^3}{8} \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{n+5} =$$

$$= \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \frac{|x-5|^3}{8} \lim_{n\to\infty} \frac{1+4/n}{1+5/n} = \frac{|x-5|^3}{8}; \quad \frac{|x-5|^3}{8} < 1; \quad |x-5| < 2;$$

$$-2 < x - 5 < 2;\ 3 < x < 7; \quad R = (7-3)/2 = 2.$$

Отже, радіус збіжності $R = 2$, а інтервал збіжності $x \in (3; 7)$. Для знаходження області збіжності дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$x = 3:\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3-5)^{3n}}{(n+4)8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{3n} 2^{3n}}{(n+4)8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}.$$

До отриманого знакододатного числового ряду застосуємо граничну ознаку порівняння:

$$u_n = \frac{1}{n+4} \sim \frac{1}{n} = v_n; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+4} : \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+4} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+4/n} = 1 \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$ розбігається разом з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$x = 7: \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (7-5)^{3n}}{(n+4)8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{(n+4)8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4}.$$

Для одержаного знакопочергового ряду спочатку дослідимо, чи буде збігатися ряд, складений з абсолютних величин його членів. Але ряд з модулів $|u_n| = \frac{1}{n+4}$ співпадає з рядом, який отримано на лівому кінці інтервалу при $x = 3$, що розбігається. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$|u_n| = \frac{1}{n+4} > \frac{1}{n+5} = |u_{n+1}|; \quad \lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+4} = 0.$$

Вони виконуються. Отже, в точці $x = 7$ ряд збігається умовно.

Остаточно маємо область збіжності ряду $x \in (3; 7]$.

б) Застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n = \frac{(x+2)^n n!}{n^3+8}; \ u_{n+1} = \frac{(x+2)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^3+8}; \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x+2)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^3+8} : \frac{(x+2)^n n!}{n^3+8}\right| = |x+2| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n^3+8)}{(n+1)^3+8} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= |x+2| \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{8}{n^3}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{8}{n^4}} = \big||x+2| \cdot \infty\big| = \begin{cases} 0 < 1 \ \text{при } x = -2 \\ +\infty > 1 \ \text{при } x \neq -2 \end{cases}.$$

Отже, інтервал і область збіжності – одна точка $x = -2$, радіус збіжності $R = 0$.

в) Скористаємося ознакою Даламбера: $\frac{(x-1)^{2n}}{(n+4)! \cdot 3^n}$

$$u_n = \frac{(x-1)^{2n}}{(n+4)! \cdot 3^n}; \ u_{n+1} = \frac{(x-1)^{2(n+1)}}{(n+1+4)! \cdot 3^{n+1}} = \frac{(x-1)^{2n+2}}{(n+5)! \cdot 3^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-1)^{2n+2}}{(n+5)! \cdot 3^{n+1}} : \frac{(x-1)^{2n}}{(n+4)! \cdot 3^n}\right| = \frac{(x-1)^2}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+5} = 0 < 1.$$

Отже, інтервалом і областю збіжності слугує вся числова пряма $x \in (-\infty; +\infty)$, радіус збіжності $R = +\infty$.

г) Скористаємося радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{4^n x^{2n}}{3^{2n}}\ln^n(e+1/n)\right|}=\frac{4x^2}{9}\lim_{n\to\infty}\ln(e+1/n)=$$

$$=\frac{4x^2}{9}\ln(e+0)=\frac{4x^2}{9}<1;\ x^2<\frac{9}{4};\ |x|<\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2};\ R=\frac{3}{2}.$$

$$-2<x-5<2;\ 3<x<7;\quad R=(7-3)/2=2.$$

Отже, радіус збіжності $R=\frac{3}{2}$, а інтервал – $x\in\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. Для знаходження області збіжності проаналізуємо збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$x=-\frac{3}{2}:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(-3/2)^{2n}}{3^{2n}}\ln^n(e+1/n)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n(e+1/n).$$

Дістали знакододатний ряд. Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}u_n=\ln^n(e+1/n)=|1^{\infty}|=A;$$

$$\ln A=\lim_{n\to\infty}n\ln\ln(e+1/n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln(e+1/n)}{1/n}=\left|\begin{matrix}u=1/n;\\ n\to\infty\ \Rightarrow u\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\ln\ln(e+u)}{u}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{u\to 0}\frac{(\ln\ln(e+u))'}{u'}=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{(e+u)\ln(e+u)}}{1}=\frac{1}{e};$$

$$\ln A=1/e;\quad A=e^{1/e}\neq 0.$$

Загальний член ряду не прямує до нуля, тому ряд розбігається.

$$x=\frac{3}{2}:\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(3/2)^{2n}}{3^{2n}}\ln^n(e+1/n)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n(e+1/n).$$

Одержали той же самий ряд, що розбігається.

Остаточно маємо область збіжності ряду $x\in\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. ■

***Основні властивості*** степеневих рядів:

1. *Сума степеневого ряду неперервна на інтервалі збіжності*.

2. *Степеневий ряд можна почленно диференціювати в інтервалі збіжності, а також почленно інтегрувати на будь-якому відрізку, який належить інтервалу збіжності. При цьому інтервал збіжності не змінюється, але може змінитися збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.*

## 2.4 Розвинення функцій у степеневі ряди. Степеневі ряди в наближених обчисленнях

Якщо функція $f(x)$ нескінченно диференційована в околі точки $x_0$ та задовольняє певним додатковим умовам, то вона може бути розвинена в ***ряд Тейлора***:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0=0$, то отримаємо ***ряд Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Таблиця 2.1 – Стандартні розвинення в ряд Маклорена

| № з/п | Функція та її розвинення в ряд Маклорена |
|---|---|
| 1 | $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in R$ |
| 2 | $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in R$ |
| 3 | $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x\in R$ |
| 4 | $\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1;1]$ |
| 5 | $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$ $=1+\alpha x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\ x\in(-1;1)$ |
| 6 | $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},$ $x\in(-1;1]$ |

Якщо ряд Тейлора збігається до функції $f(x)$ в будь-якій точці $x$ з його області збіжності, то абсолютна похибка $\Delta_n$, яка виникає при наближеній заміні функції $f(x)$ частковою сумою (многочленом) $S_n(x)$, дорівнює модулю залишку ряду $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$. При цьому справедлива оцінка:

$$\Delta_n = |R_n(x)| \le M_{n+1} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

де $M_{n+1}$ – додатна стала, що задовольняє наступну умову для $(n+1)$-ї похідної:

$$\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \le M_{n+1} \text{ для всіх } \xi, \text{ які лежать між } x \text{ і } x_0.$$

*Приклад 1.* Обчислити наближено значення $\sqrt{e}$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$.

□ Скористаємося розвиненням експоненти $e^x$ у ряд Маклорена

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

враховуючи, що $\sqrt{e} = e^{1/2}$, тобто $x = 1/2$. Тоді

$$\sqrt{e} = 1 + 1/2 + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^4}{4!} + \frac{(1/2)^5}{5!} + \cdots + \frac{(1/2)^n}{n!} + \cdots.$$

Шукане значення $\sqrt{e}$ дорівнює сумі збіжного знакододатного ряду. З'ясуємо, скільки $n$ перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon = 0{,}001$.

Оскільки для $(n+1)$-ї похідної експоненти виконується нерівність:

$$\left|(e^x)^{(n+1)}\right| = |e^x| \le 2 \text{ для всіх } x \in (0; 1/2),$$

тобто можна покласти $M_{n+1} = 2$, то для абсолютної похибки $\Delta_n$ справджується оцінка:

$$\Delta_n = |R_n(1/2)| \le 2 \cdot \frac{|1/2-0|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{2^n(n+1)!},$$

Тепер треба підібрати $n$ і число вірних десяткових цифр $k$ при обчисленні кожного доданка так, щоб загальна похибка була б менша ніж $\varepsilon = 0{,}001$. Пригадаємо, що $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ і $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$. Тоді $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}001/2 = 0{,}000\,5$.

Спочатку підбором знайдемо таке $n$, щоб виконувалася умова:

$$\Delta_n \le \frac{1}{2^n (n+1)!} \le \varepsilon_1 = 0{,}000\,5.$$

Візьмемо, наприклад, $n = 4$, тоді:

$$\Delta_4 \le \frac{1}{2^4 (4+1)!} \approx 0{,}000\,52 > \varepsilon_1 = 0{,}000\,5.$$

Беремо $n = 5$ тоді:

$$\Delta_5 \le \frac{1}{2^5 (5+1)!} \approx 0{,}000\,04 \le \varepsilon_1 = 0{,}000\,5.$$

Отже, досить взяти $n = 5$.

Тепер визначимо кількість $k$ вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot n \le \varepsilon_2; \quad 0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot 5 \le 0{,}000\,5;$$

$$10^k \ge 5\,000; \quad k \ge \lg 5\,000; \quad k \ge 4.$$

Отже, члени ряду округляємо до чотирьох десяткових знаків. Тоді маємо:

$$\sqrt{e} \approx S_5 = 1 + 1/2 + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^4}{4!} \approx$$

$$\approx 1 + 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}020\,8 + 0{,}002\,4 \approx 1{,}648\,2.$$

Остаточно $\sqrt{e} \approx 1{,}648$. ■

*Приклад 2.* Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^{0{,}5} \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x} dx$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}000\,1$.

□ Формула Ньютона – Лейбниця тут не застосовна, тому що первісна від $f(x) = \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x}$ не виражається в елементарних функціях. Розвинемо підінтегральну функцію $f(x)$ у степеневий ряд, використовуючи стандартний розклад для косинуса $\cos x$, де замість $x$ підставимо $\sqrt{x}$, потім віднімемо 1 і почленно поділимо на $x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots; \quad \cos\sqrt{x} = 1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2!} +$$

$$+ \frac{(\sqrt{x})^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} + \cdots = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \cdots +$$

$$+(-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \cdots; \quad \cos\sqrt{x} - 1 = -\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \cdots;$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\cos\sqrt{x} - 1\right) = -\frac{1}{2!} + \frac{x}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(2n)!} + \cdots.$$

Оскільки $[0; 0{,}5] \subseteq (-\infty; +\infty)$, то цей степеневий ряд можна проінтегрувати почленно на відрізку $[0; 0{,}5]$. Дістанемо:

$$I = \int_0^{0,5} \left(-\frac{1}{2!} + \frac{x}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(2n)!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!\cdot 2} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!\cdot n} + \cdots\right)\Big|_0^{0,5} =$$

$$= -\frac{0{,}5}{2!} + \frac{0{,}5^2}{4!\cdot 2} - \cdots + (-1)^n \frac{0{,}5^n}{(2n)!\cdot n} + \cdots.$$

Шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакопочергового ряду. За наслідком з ознаки Лейбниця для абсолютної похибки $\Delta_n$ маємо оцінку:

$$\Delta_n = |R_n| \le |u_{n+1}| = \frac{0{,}5^{n+1}}{(2n+2)!\cdot(n+1)}.$$

З’ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon = 0{,}000\,1$.

Для заданої точності $\varepsilon = 0{,}000\,1$ наближення маємо:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}000\,1/2 = 0{,}000\,05.$$

Підберемо $n$ так, щоб виконувалася умова:

$$\Delta_n \le \frac{0{,}5^{n+1}}{(2n+2)!\cdot(n+1)} \le \varepsilon_1 = 0{,}000\,05.$$

$$n = 2:\ \Delta_2 \le \frac{0{,}5^{2+1}}{(2\cdot 2+2)!\cdot(2+1)} \approx 0{,}000\,058 > \varepsilon_1 = 0{,}000\,05;$$

$$n = 3:\ \Delta_3 \le \frac{0{,}5^{3+1}}{(2\cdot 3+2)!\cdot(3+1)} \approx 0{,}000\,000\,4 \le \varepsilon_1 = 0{,}000\,05.$$

Отже, досить взяти $n = 3$ – три перших члени ряду.

Тепер визначимо кількість $k$ вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot n \le \varepsilon_2; \quad 0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot 3 \le 0{,}000\,05;$$

$$10^k \ge 30\,000; \quad k \ge \lg 30\,000; \quad k \ge 5.$$

Отже, члени ряду округляємо до п’яти десяткових знаків. Тоді маємо:

$$I \approx S_3 = -\frac{0{,}5}{2!} + \frac{0{,}5^2}{4!\cdot 2} - \frac{0{,}5^3}{6!\cdot 3} \approx -0{,}25 + 0{,}005\,21 -$$
$$-0{,}000\,06 \approx -0{,}244\,85.$$

Остаточно $I \approx -0{,}244\,9$. ■

Періодична функція $f(x)$ з періодом $2\pi$ може бути розкладена в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

де $a_0$, $a_n$, $b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ – коефіцієнти, що обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

## 2.5 Тригонометричні ряди Фур’є

Періодична функція $f(x)$ з довільним періодом $T = 2l,\ l > 0$, що задовольняє певним умовам, може бути розвинена в ***тригонометричний ряд Фур’є*** – функціональний ряд вигляду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

де $a_0$, $a_n$, $b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ – дійсні сталі (***коефіцієнти Фур’є***), що обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

*Зауваження*. Ряд Фур’є для парної функції не містить синусів, при цьому коефіцієнти Фур’є дорівнюють:

$$b_n = 0; \quad a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Ряд Фур’є для непарної функції не містить косинусів і вільного члена, при цьому коефіцієнти Фур’є дорівнюють:

$$a_0 = 0; \quad a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Функція $f(x)$ називається ***кусково-монотонною*** на відрізку $[a;b]$, якщо виконуються наступні умови (***умови Діріхле***):

1) функція на відрізку $[a;b]$ неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду («дірок» чи скінченних стрибків);

2) відрізок $[a;b]$ можна розбити на скінченне число частин так, що всередині кожної з них функція монотонна.

Зокрема, окремим випадком кусково-монотонної функції є кусково-гладка функція. Графік кусково-гладкої функції складається зі скінченної кількості гладких дуг.

***Достатня ознака розвинення функції в ряд Фур'є***. *Якщо функція $f(x)$ має період $T = 2l$, $l > 0$ і кусково-монотонна на відрізку $[-l;l]$, то її ряд Фур'є збігається на всій числовій осі, причому сума ряду $S(x)$ в точках неперервності функції $f(x)$ дорівнює їй самій $S(x) = f(x)$, а у кожній точці розриву $x_0$ функції $f(x)$ – середньому арифметичному односторонніх границь при $x \to x_0$ зліва та справа:*

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x) + \lim_{x\to x_0+0} f(x)\right),$$

*зокрема* $S(-l) = S(l) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -l+0} f(x) + \lim_{x\to l-0} f(x)\right).$

*Приклад 1.* Розвинути в ряд Фур'є $2l$-періодичну функцію:

$$f(x) = \begin{cases} -2x/\pi, & -\pi < x < 0 \\ \sin(x/2), & 0 < x \le \pi \end{cases}.$$

□ Задана функція має півперіод $l = \pi$. Графічно функція подана на рисунку 2.1. Функція є кусково-монотонною, тому може бути розвинена в ряд Фур'є. Знайдемо її коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\frac{-2x}{\pi}dx + \int_0^\pi \sin\frac{x}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{-2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{0} x dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}dx = \frac{-2}{\pi^2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\cdot(-2)\cos\frac{x}{2}\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{\pi-2}{\pi};$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\frac{-2x}{\pi}\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx + \right.$$

$$+\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx\Big)=\frac{-2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos nx\,dx=$$

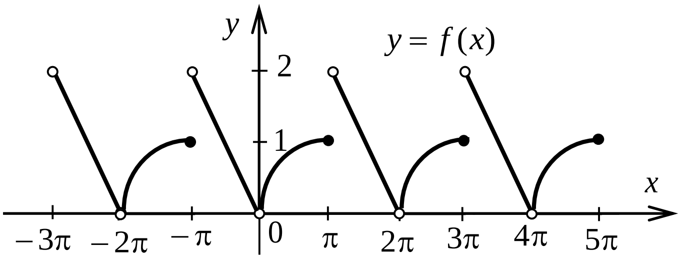


Рисунок 2.1

$$=\left|\begin{array}{l} u=x;\;\; du=dx;\;\; dv=\cos nx\,dx;\;\; v=\frac{1}{n}\sin nx;\\ \sin\frac{x}{2}\cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x}{2}+nx\right)+\sin\left(\frac{x}{2}-nx\right)\right)=\\ \qquad =\frac{1}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{(2n-1)x}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{-2}{\pi^2}\left(x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,xdx\right)+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\frac{(2n+1)x}{2}dx-$$

$$-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\frac{(2n-1)x}{2}dx=|\sin\pi n=0;\quad\cos\pi n=(-1)^n|=$$

$$=\frac{2}{\pi^2 n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{2}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{2}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=0\right|=$$

$$=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2n^2}+\frac{1}{\pi(2n+1)}-\frac{1}{\pi(2n-1)}=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2n^2}-\frac{2}{\pi(4n^2-1)};$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\frac{-2x}{\pi}\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx\right)=\frac{-2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin nx\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=x;\;\; du=dx;\;\; dv=\sin nx\,dx;\;\; v=-\frac{1}{n}\cos nx;\\ \sin\frac{x}{2}\sin nx=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{x}{2}-nx\right)-\cos\left(\frac{x}{2}+nx\right)\right)=\\ \qquad =\frac{1}{2}\cos\frac{(2n-1)x}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{(2n+1)x}{2}\end{array}\right|=$$

$$= \frac{-2}{\pi^2}\left(x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\, xdx\right) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{(2n-1)x}{2}dx - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{(2n+1)x}{2}dx =$$

$$= -\frac{2(-1)^n}{\pi^2 n} - \frac{2}{\pi^2 n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)x}{2}\Big|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)x}{2}\Big|_0^{\pi} = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right) = (-1)^n\right| =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^2 n} + \frac{-1(-1)^n}{\pi(2n-1)} - \frac{(-1)^n}{\pi(2n+1)} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^2 n} + \frac{4n(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}.$$

Розвинення заданої функції в ряд Фур’є має вигляд:

$$f(x) = \frac{\pi-2}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2} - \frac{2}{\pi(4n^2-1)}\right)\cos nx +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^2 n} + \frac{4n(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}\right)\sin nx\right). \blacksquare$$

Зазначимо, що знайдений у попередньому прикладі ряд збіжний до заданої функції $f(x)$ при всіх $x \neq \pi n$, $n = 0, 1, \ldots$. У точках $x = 2\pi n$, $n = 0, 1, \ldots$ функція $f(x)$ має усувні розриви («дірки» на графіку на рис. 2.1). У цих точках сума ряду:

$$S(2\pi n) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 2\pi n-0} f(2\pi n) + \lim_{x\to 2\pi n+0} f(2\pi n)\right) = \frac{1}{2}(0+0) = 0.$$

Тобто сума $S(x)$ ряду Фур’є в цих точках неперервна.

У точках $x = \pi + 2\pi n$, $n = 0, 1, \ldots$ функція $f(x)$ має скінченні стрибки (графік на рис. 2.1). У цих точках сума ряду:

$$S(\pi + 2\pi n) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to \pi+2\pi n-0} f(2\pi n) + \lim_{x\to \pi+2\pi n+0} f(2\pi n)\right) =$$

$$= (1/2)(1+2) = 3/2.$$

Тобто сума $S(x)$ ряду Фур’є «більш гладка», ніж сама функція.

*Зауваження*. Практичне застосування тригонометричних рядів Фур’є зумовлене тим, що вони правильно відображають структуру різноманітних явищ як накладання коливань. Процес і результат розвинення функції в ряд Фур’є називається ***гармонічним аналізом***.

## Запитання для самоконтролю

1. Що називається числовим рядом, частковою сумою, загальним членом, залишком ряду?
2. Який числовий ряд називається збіжним (розбіжним)? Що таке сума збіжного ряду?
3. У чому полягає необхідна ознака збіжності ряду?
4. Що таке знакододатний ряд? Сформулюйте основні достатні ознаки збіжності знакододатних рядів.
5. Що таке еталонні ряди? При яких умовах збігаються і розбігаються найпоширеніші еталонні ряди – узагальнений гармонічний ряд і ряд геометричної прогресії?
6. Який числовий ряд називається знакозмінним?
7. Що таке знакопочерговий ряд? У чому полягає ознака Лейбниця збіжності знакопочергового ряду?
8. Як оцінюється залишок збіжного знакопочергового ряду, спираючись на ознаку Лейбниця?
9. Який знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним? Умовно збіжним?
10. Що називається функціональним рядом? Що таке його область збіжності?
11. Який функціональний ряд називається степеневим?
12. Що таке інтервал збіжності та радіус збіжності степеневого ряду? Яким може бути радіус збіжності степеневого ряду?
13. Чим область збіжності степеневого ряду може відрізнятися від інтервалу збіжності? Наведіть приклади.
14. Сформулюйте основні властивості степеневих рядів.
15. Який вигляд мають ряди Тейлора і Маклорена? За якими формулами обчислюються їхні коефіцієнти?
16. Наведіть приклади застосування степеневих рядів до наближених обчислень.
17. Які недоліки розвинення функцій у степеневі ряди?
18. Що називається рядом Фур'є за тригонометричною системою функцій? Як обчислюються коефіцієнти Фур'є?
19. Яка функція називається кусково-монотонною на відрізку? Сформулюйте достатню ознаку розвинення в ряд Фур'є.
20. Як записується неповний ряд Фур'є для періодичної парної функції? Для періодичної непарної функції?

## Змістовий модуль 3 ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

### 3.1 Перетворення Лапласа та його основні властивості. Обернення перетворення Лапласа

***Операційне числення*** дає можливість значно спростити розв'язування багатьох прикладних задач. Його підґрунтям слугує ***інтегральне перетворення Лапласа***, що функції $f(t)$ (***оригіналу***) дійсної змінної $t$ ставить у взаємно однозначну відповідність єдину функцію $F(p)$ (***зображення***) комплексної змінної $p$ (***параметра***). Правила операційного числення подано у таблиці 3.1. Перехід від оригіналів елементарних функцій до їх зображень і навпаки подано у таблиці 3.2. При записі між оригіналом і його зображенням ставимо знак $\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}$ або $\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}}$, наприклад $f(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}F(p)$. Тут $F(p)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)\,dt.$

Таблиця 3.1 – Правила операційного числення

| № з/п | Операція, властивість | Оригінал $f(t)$ | Зображення $F(p)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | Лінійність | $C_1f_1(t)\pm$ $\pm C_2f_2(t)$ | $C_1F_1(p)\pm$ $\pm C_2F_2(p)$ |
| 2 | Зміщення аргументу зображення (затухання оригіналу) | $e^{-at}f(t)$ | $F(p+a)$ |
| 3 | Зміна масштабу (подібність) | $f(at)$, $a>0$ | $\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$ |
| 4 | Зміщення аргументу оригіналу (запізнювання оригіналу) | $f(t-b)\times$ $\times\eta(t-b)$, $b>0$ | $e^{-bp}F(p)$ |

Продовження таблиці 3.1

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 5 | Диференціювання зображення | $t^n f(t)$ | $(-1)^n F^{(n)}(p)$ |
| 5а | Перша похідна зображення | $t\, f(t)$ | $-F'(p)$ |
| 6 | Зображення похідних оригіналу | $f^{(n)}(t)$ | $p^n F(p) - p^{n-1} f(0) -$ $- p^{n-2} f'(0) - \ldots -$ $- pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$ |
| 6а | Зображення першої похідної оригіналу | $f'(t)$ | $pF(p) - f(0)$ |
| 6б | Зображення другої похідної оригіналу | $f''(t)$ | $p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$ |
| 7 | Зображення інтеграла від оригіналу | $\int\limits_0^t f(u)du$ | $\frac{1}{p} F(p)$ |

Таблиця 3.2 – Основні оригінали та їх зображення

| № з/п | Оригінал $f(t)$ | Зображення $F(p)$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ – одинична функція | $\frac{1}{p}$ |
| 2 | $\eta(t-b) = \begin{cases} 1, & t > b \\ 0, & t < b \end{cases}$ | $e^{-bp} \cdot \frac{1}{p}$ |
| 3 | $e^{-at}$ | $\frac{1}{p+a}$ |
| 4 | $\sin bt$ | $\frac{b}{p^2 + b^2}$ |

Продовження таблиці 3.2

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 5 | $\cos bt$ | $\dfrac{p}{p^2+b^2}$ |
| 6 | $e^{-at}\sin bt$ | $\dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$ |
| 7 | $e^{-at}\cos bt$ | $\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$ |
| 8 | $t^n$ | $\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ |
| 8a | $t$ | $\dfrac{1}{p^2}$ |
| 9 | $t\,\eta(t-b)$ | $e^{-bp}\left(b\cdot 1/p+1/p^2\right)$ |
| 10 | $t^n e^{-at}$ | $\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$ |
| 10a | $te^{-at}$ | $\dfrac{1}{(p+a)^2}$ |
| 11 | $t\sin bt$ | $\dfrac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}$ |
| 12 | $t\cos bt$ | $\dfrac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}$ |
| 13 | $\dfrac{1}{2b^3}(\sin bt-bt\cos bt)$ | $\dfrac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}$ |
| 14 | $\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ +\infty, & t=0\end{cases}$ – дельта-функція<br>$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$ | 1 |

*Зауваження*. Прийнято, що всі функції $f(t)$, які розглядаються як оригінали (табл. 3.2), тотожно дорівнюють 0, коли $t<0$.

*Приклад 1*. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=3e^{-5t}(\cos 4t+t-2)+7;$ б) $f(t)=12t\sin^2 4t\sin t;$

в) $f(t)=(t^2-1)^3+6e^{2t}\cos 3t\cos 5t-2^{7t}5^{7t};$

г) $f(t)=6te^{-3t}\cos^2 4t.$

□ а) Перемножимо та зведемо задану функцію до лінійної комбінації основних (табличних) оригіналів:

$$f(t)=3e^{-5t}\cos 4t+3te^{-5t}-6e^{-5t}+7.$$

Далі, використовуючи властивість лінійності, за таблицею оригіналів і відповідних зображень знаходимо:

$$f(t)\risingdotseq 3\cdot\frac{p+5}{(p+5)^2+4^2}+3\cdot\frac{1}{(p+5)^2}-6\cdot\frac{1}{p+5}+7\cdot\frac{1}{p}=F(p).$$

б) Застосуємо тригонометричні тотожності

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);\quad \sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

і подамо задану функцію у вигляді лінійної комбінації більш простих (бажано табличних) оригіналів:

$$f(t)=12t\sin t\cdot(1/2)(1-\cos 8t)=6t\sin t-6t\sin t\cos 8t=6t\times$$

$$\times\sin t-6t\cdot(1/2)\big(\sin 9t+\sin(-7t)\big)=6t\sin t-3t\sin 9t+3t\sin 7t.$$

Одержано лінійну комбінацію табличних оригіналів. Використаємо властивість лінійності та таблицю відповідності оригіналів і зображень. Дістанемо:

$$f(t)\risingdotseq 6\cdot\frac{2p\cdot 1}{\left(p^2+1^2\right)^2}-3\cdot\frac{2p\cdot 9}{\left(p^2+9^2\right)^2}+3\cdot\frac{2p\cdot 7}{\left(p^2+7^2\right)^2}=F(p).$$

в) Для подання заданої функції у вигляді лінійної комбінації основних оригіналів піднесемо до куба та скористаємося формулами:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big);\ a^x b^x=(ab)^x;\ a^b=e^{b\ln a}.$$

Отримаємо:

$$f(t) = t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1 + 6e^{2t} \cdot (1/2)\big(\cos 8t + \cos(-2t)\big) - 10^{7t} =$$

$$= t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1 + 3e^{2t}\cos 8t + 3e^{2t}\cos 2t - e^{7\ln 10 \cdot t}.$$

Спираючись на властивість лінійності, за таблицею оригіналів і відповідних зображень одержимо:

$$f(t) \doteqdot \frac{6!}{p^7} - 3 \cdot \frac{4!}{p^5} + 3 \cdot \frac{2!}{p^3} - \frac{1}{p} + 3 \cdot \frac{p-2}{(p-2)^2 + 8^2} +$$

$$+ 3 \cdot \frac{p-2}{(p-2)^2 + 2^2} - \frac{1}{p - 7\ln 10} = F(p).$$

г) Скористаємося тотожністю $\cos^2\alpha = (1/2)(1 + \cos 2\alpha)$ і дістанемо:

$$f(t) = 6te^{-3t}(1/2)(1 + \cos 8t) = 3te^{-3t} + 3te^{-3t}\cos 8t.$$

В одержаній лінійній комбінації перший доданок є табличним оригіналом. Другий доданок подамо у вигляді, що допускає застосування правила диференціювання зображення до табличного оригіналу:

$$3te^{-3t}\cos 8t = 3 \cdot t \cdot (e^{-3t}\cos 8t).$$

Далі, спираючись на властивість лінійності та вказане правило, за таблицею оригіналів і відповідних зображень знаходимо:

$$f(t) \doteqdot 3 \cdot \frac{1}{(p+3)^2} + 3 \cdot (-1)\left(\frac{p+3}{(p+3)^2 + 8^2}\right)' = \frac{3}{(p+3)^2} -$$

$$-3 \cdot \frac{(p+3)^2 + 64 - (p+3) \cdot 2(p+3)}{((p+3)^2 + 64)^2} = F(p). \quad \blacksquare$$

Обернена задача – відновлення оригіналу $f(t)$ за його зображенням $F(p)$ – досить складна: її вирішення, у загальному випадку, передбачає інтегрування функції комплексної змінної.

Обмежимося лише розв’язуванням цієї задачі за допомогою таблиць операційного числення, коли зображення має вигляд правильного раціонального дробу.

*Правило. Нехай необхідно знайти оригінал* $f(t)$ *для зображення* $F(p)$ *у вигляді раціонального дробу* $F(p)=P_m(p)/Q_n(p)$, *де* $P_m(p)$ *і* $Q_n(p)$ – *многочлени відповідно степеня* $m$ *і* $n$, $m< n$. *Тоді*:

1. *Правильний дріб треба розкласти на суму елементарних дробів виду:*

$$\frac{A}{(p-a)^k};\quad \frac{A(p+a)+B}{\left((p+a)^2+b^2\right)^k};\quad k\ge 1.$$

2. *Знайти оригінали для кожного елементарного дробу, скористатися властивістю лінійності перетворення Лапласа та одержати оригінал початкового дробу.*

3. *Спростити отриманий вираз.*

*Приклад 2*. Знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$:

а) $F(p)=\dfrac{p^3-p^2+2p+2}{(p^2+2p-3)(p^2+4p+13)}$; б) $F(p)=\dfrac{p^2+2p-4}{(p+1)^2(p^2+4)}$.

□ а) $$F(p)=\frac{p^3-p^2+2p+2}{(p^2+2p-3)(p^2+4p+13)}=$$

$$=\left|\begin{array}{c} p^2+2p-3;\ D=4+12=16>0;\ \sqrt{D}=4;\ p_1=\dfrac{-2-4}{2}=-3; \\ p_2=\dfrac{-2+4}{2}=1;\quad p^2+2p-3=(p+3)(p-1); \\ p^2+4p+13;\ D=16-52=-36<0; \\ p^2+4p+13=p^2+2p\cdot 2+2^2-2^2+13=(p+2)^2+9 \end{array}\right|=$$

$$=\frac{p^3-p^2+2p+2}{(p+3)(p-1)((p+2)^2+9)}=\frac{A}{p+3}+\frac{B}{p-1}+\frac{C(p+2)+D}{(p+2)^2+9}=$$

$$=\Big|\, A(p-1)((p+2)^2+9)+B(p+3)((p+2)^2+9)+(C(p+2)+$$

$$+D)(p+3)(p-1)=p^3-p^2+2p+2;$$

$$\begin{array}{l} p=-3: \\ p=1: \\ p=-2: \\ p=0: \end{array} \begin{cases} -4\cdot 10A=-40 \\ 4\cdot 18B=4 \\ -27A+9B-3D=-14 \\ -13A+39B-6C-3D=2 \end{cases};$$

$$A=1;\ B=1/18;\ -27+1/2-3D=-14;\ D=-25/6;$$

$$-13+13/6-6C+25/2=2;\quad C=-1/3\Big| =$$

$$=\frac{1}{p+3}+\frac{1/18}{p-1}+\frac{(-1/3)(p+2)-25/6}{(p+2)^2+9}=\frac{1}{p+3}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{p-1}-$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+3^2}-\frac{25}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(p+2)^2+3^2}\risingdotseq e^{-3t}+\frac{1}{18}e^{t}-$$

$$-\frac{1}{3}e^{-2t}\cos 3t-\frac{25}{18}e^{-2t}\sin 3t=f(t).$$

б) $$F(p)=\frac{p^2+2p-4}{(p+1)^2(p^2+4)}=\frac{A}{(p+1)^2}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}=$$

$$=\Big|\,A(p^2+4)+B(p+1)(p^2+9)+(Cp+D)(p+1)^2=$$

$$=p^2+2p-4;$$

$$\begin{array}{l} p=-1: \\ p^3: \\ p^2: \\ p^0: \end{array} \begin{cases} 5A=-5 \\ B+C=0 \\ A+B+2C+D=1 \\ 4A+9B+D=-4 \end{cases}; \quad \begin{array}{c} A=-1 \\ C=-B \\ -1+B-2B+D=1 \\ -4+9B+D=-4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} D=2+B;\ 9B+2+B=0;\quad B=-1/5; \\ D=2-1/5=9/5;\quad C=-B=1/5 \end{array}\right| =$$

$$=\frac{-1}{(p+1)^2}+\frac{-1/5}{p+1}+\frac{(1/5)p+9/5}{p^2+4}=-1\cdot\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p+1}+$$

$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{p}{p^2+2^2}+\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+2^2} \doteqdot -te^{-t}-$$

$$-\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{9}{10}\sin 2t = f(t). \quad ■$$

## 3.2 Операційний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та їх систем

Нехай потрібно знайти розв'язок лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами $y''+py'+qy=f(t)$, який задовольняє початковим умовам $y(0)=y_0$; $y'(0)=y_0'$.

Припустимо, що шукана функція $y=y(t)$, її похідні $y'(t)$, $y''(t)$ і права частина $f(t)$ є оригіналами. Позначимо зображення функцій $y(t)$ і $f(t)$ відповідно через $Y(p)$ і $F(p)$. Використовуючи правило диференціювання оригіналу, знайдемо зображення похідних шуканої функції. Також визначимо зображення $F(p)$ правої частини.

Застосовуючи до диференціального рівняння властивість лінійності, отримаємо допоміжне рівняння в зображеннях, яке відповідає заданому ДР. Розв'язуючи одержане лінійне алгебраїчне рівняння в області зображень, дістанемо зображення $Y(p)$ шуканого розв'язку. Надалі залишається повернутись в область оригіналів – знайти відповідний оригінал $y(t)$.

Загальна схема методу показана на рисунку 3.1. Застосування цієї схеми докладно розберемо на прикладах.

*Приклад 1.* Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$y''-6y'+8y=5e^{3t}\sin 2t;\quad y(0)=1;\ y'(0)=6.$$

□ Нехай $y(t)\doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

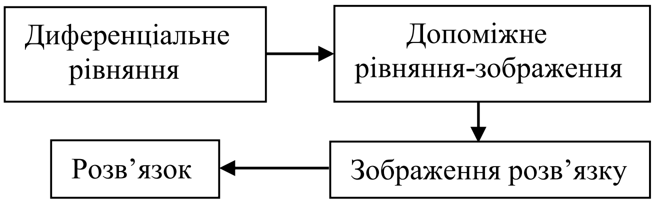


Рисунок 3.1

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 1;$$

$$y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p - 6;$$

$$e^{3t}\sin 2t \doteqdot \frac{2}{(p-3)^2 + 2^2} = \frac{2}{(p-3)^2 + 4}.$$

Одержимо допоміжне рівняння-зображення:

$$p^2Y(p) - p - 6 - 6\big(pY(p) - 1\big) + 8Y(p) = 5 \cdot \frac{2}{(p-3)^2 + 4}.$$

Розв’яжемо це рівняння:

$$Y(p) \cdot (p^2 - 6p + 8) = p + \frac{10}{(p-3)^2 + 4};$$

$$Y(p) \cdot (p^2 - 6p + 8) = \frac{p^3 - 6p^2 + 13p + 10}{p^2 - 6p + 13};$$

$$Y(p) = \frac{p^3 - 6p^2 + 13p + 10}{(p^2 - 6p + 8)(p^2 - 6p + 13)}$$ – зображення

шуканого розв’язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p) = \frac{p^3 - 6p^2 + 13p + 10}{(p^2 - 6p + 8)(p^2 - 6p + 13)} = \Big|\, p^2 - 6p + 8;$$

$$D = 36 - 32 = 4 > 0;\ \sqrt{D} = 2;\ \ p_1 = \frac{6-2}{2} = 2;\ p_2 = \frac{6+2}{2} = 4;$$

$$p^2-6p+8=(p-2)(p-4)\Big|=\frac{p^3-6p^2+13p+10}{(p-2)(p-4)((p-3)^2+4)}=$$

$$=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p-4}+\frac{C(p-3)+D}{(p-3)^2+4}=$$

$$=\Big|A(p-4)((p-3)^2+4)+B(p-2)((p-3)^2+4)+(C(p-3)+$$

$$+D)(p-2)(p-4)=p^3-6p^2+13p+10;$$

$$\begin{array}{l} p=2: \\ p=4: \\ p=3: \\ p^3: \end{array} \begin{cases} -10A=20 \\ 10B=30 \\ -4A+4B-D=22 \\ A+B+C=1 \end{cases}; \quad \left.\begin{array}{l} A=-2; \\ B=3; \\ 8+12-D=22;\ D=-2; \\ -2+3+C=1;\ C=0 \end{array}\right| =$$

$$=\frac{-2}{p-2}+\frac{3}{p-4}+\frac{0(p-3)-2}{(p-3)^2+4}=-2\cdot\frac{1}{p-2}+3\cdot\frac{1}{p-4}-$$

$$-\frac{2}{(p-3)^2+2^2} \risingdotseq -2e^{2t}+3e^{4t}-e^{3t}\sin 2t=y(t) \quad \blacksquare$$

*Зауваження*. За аналогічною схемою операційним методом розв’язуються також системи лінійних ДР зі сталими коефіцієнтами.

*Приклад 2*. Розв’язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x'=2x-4y \\ y'=4x+2y+2\sin 2t \end{cases}; \quad x(0)=-1;\ \ y(0)=2.$$

□ Нехай $x(t) \risingdotseq X(p)$; $y(t) \risingdotseq Y(p)$ – відповідно оригінал і зображення шуканого розв’язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень:

$$x'(t) \risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)+1;$$

$$y'(t) \risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)-2; \quad \sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+2^2}=\frac{2}{p^2+4}.$$

Дістанемо операторну форму диференціальної системи:

$$\begin{cases} pX(p)+1=2X(p)-4Y(p) \\ pY(p)-2=4X(p)+2Y(p)+2\cdot\dfrac{2}{p^2+4} \end{cases} \text{ – допоміжна}$$

система-зображення. Розв’яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, за формулами Крамера:

$$\begin{cases} pX(p)-2X(p)+4Y(p)=-1 \\ pY(p)-4X(p)-2Y(p)=2+4\big/(p^2+4) \end{cases};$$

$$\begin{cases} (p-2)X(p)+4Y(p)=-1 \\ -4X(p)+(p-2)Y(p)=(2p^2+12)\big/(p^2+4) \end{cases};$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} p-2 & 4 \\ -4 & p-2 \end{vmatrix}=(p-2)^2+16; \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ \dfrac{2p^2+12}{p^2+4} & p-2 \end{vmatrix}=$$

$$=-p+2-\frac{8p^2+48}{p^2+4}=\frac{-p^3-4p+2p^2+8-8p^2-48}{p^2+4}=$$

$$=\frac{-p^3-6p^2-4p-40}{p^2+4}; \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} p-2 & -1 \\ -4 & \dfrac{2p^2+12}{p^2+4} \end{vmatrix}=$$

$$=(p-2)\frac{2p^2+12}{p^2+4}-4=\frac{2p^3+12p-4p^2-24-4p^2-16}{p^2+4}=$$

$$=\frac{2p^3-8p^2+12p-40}{p^2+4};$$

$$\begin{cases} X(p)=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{-p^3-6p^2-4p-40}{(p^2+4)((p-2)^2+16)} \\ Y(p)=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{2p^3-8p^2+12p-40}{(p^2+4)((p-2)^2+16)} \end{cases}$$ – зображення

шуканого розв'язку. Повернимось в область оригіналів – знайдемо відповідні оригінали:

$$X(p)=\frac{-p^3-6p^2-4p-40}{(p^2+4)((p-2)^2+16)}=\frac{Ap+B}{p^2+4}+\frac{C(p-2)+D}{(p-2)^2+16}=$$

$$=\Big|\,(Ap+B)((p-2)^2+16)+(C(p-2)+D)(p^2+4)=$$

$$=-p^3-6p^2-4p-40;\quad Ap^3-4Ap^2+4Ap+16Ap+$$

$$+Bp^2-4Bp+4B+16B+Cp^3+4Cp-2Cp^2-8C+$$

$$+Dp^2+4D=-p^3-6p^2-4p-40;$$

$$\begin{matrix} p^3: \\ p^2: \\ p^1: \\ p^0: \end{matrix}\begin{cases} A+C=-1 \\ -4A+B-2C+D=-6 \\ 4A+16A-4B+4C=-4\,\big|:4 \\ 4B+16B-8C+4D=-40\,\big|:4 \end{cases}\qquad \begin{cases} A+C=-1 \\ -4A+B-2C+D=-6 \\ 5A-B+C=-1 \\ 5B-2C+D=-10 \end{cases}$$

$$C=-1-A;\ 5A-B-1-A=-1;\ B=4A;$$

$$5\cdot 4A-2(-1-A)+D=-10;\ D=-8-22A;$$

$$-4A+4A-2(-1-A)-8-22A=-6;\quad A=0;$$

$$C=-1-0=-1;\ B=4\cdot 0=0;\ D=-8-21\cdot 0=-8\,\Big|=$$

$$=\frac{0\cdot p+0}{p^2+4}+\frac{-1\cdot(p-2)-8}{(p-2)^2+16}=-\frac{p-2}{(p-2)^2+4^2}-$$

$$-8\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{(p-2)^2+4^2}\ \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}\ -e^{2t}\cos 4t-2e^{2t}\sin 4t=x(t);$$

$$Y(p)=\frac{2p^3-8p^2+12p-40}{(p^2+4)((p-2)^2+16)}=\frac{Ap+B}{p^2+4}+\frac{C(p-2)+D}{(p-2)^2+16}=$$

$$=\Big|\,(Ap+B)((p-2)^2+16)+(C(p-2)+D)(p^2+4)=$$

$$=2p^3-8p^2+12p-40;\quad Ap^3-4Ap^2+4Ap+16Ap+$$

$$+Bp^2-4Bp+4B+16B+Cp^3+4Cp-2Cp^2-8C+$$

$$+Dp^2+4D=2p^3-8p^2+12p-40;$$

$$\begin{array}{l} p^3: \\ p^2: \\ p^1: \\ p^0: \end{array}\begin{cases} A+C=2 \\ -4A+B-2C+D=-8 \\ 4A+16A-4B+4C=12\,\big|:4 \\ 4B+16B-8C+4D=-40\,\big|:4 \end{cases}\qquad \begin{cases} A+C=2 \\ -4A+B-2C+D=-8 \\ 5A-B+C=3 \\ 5B-2C+D=-10 \end{cases}$$

$$C=2-A;\ 5A-B+2-A=3;\ B=4A-1;$$

$$5(4A-1)-2(2-A)+D=-10;\ D=-2-22A;$$

$$-4A+4A-1-2(2-A)-2-22A=-8;\quad A=1/20;$$

$$C=2-A=\frac{39}{20};\quad B=4A-1=-\frac{4}{5};\quad D=-2-22A=-\frac{31}{10}\,\Big|=$$

$$=\frac{(1/20)p-4/5}{p^2+4}+\frac{(39/20)(p-2)-31/10}{(p-2)^2+16}=\frac{1}{20}\cdot\frac{p}{p^2+2^2}-$$

$$-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot+\frac{39}{20}\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+4^2}-\frac{31}{10}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{(p-2)^2+4^2}\ \ \begin{smallmatrix}\bullet\\=\\\bullet\end{smallmatrix}$$

$$\begin{smallmatrix}\bullet\\=\\\bullet\end{smallmatrix}\ \frac{1}{20}\cos 2t-\frac{2}{5}\sin 2t+\frac{39}{20}e^{2t}\cos 4t-\frac{31}{40}e^{2t}\sin 4t=y(t).$$

Отже, шуканий розв'язок:

$$\begin{cases} x(t)=-e^{2t}\cos 4t-2e^{2t}\sin 4t \\ y(t)=\dfrac{1}{20}\cos 2t-\dfrac{2}{5}\sin 2t+\dfrac{39}{20}e^{2t}\cos 4t-\dfrac{31}{40}e^{2t}\sin 4t \end{cases}.\ \blacksquare$$

## 3.3 Розв'язування диференціальних рівнянь і систем з правою частиною, що містить запізнювання

Єдина особливість застосування операційного числення для розв'язування таких задач полягає в необхідності врахування запізнювань при переході від оригіналу до зображення та навпаки.

При переході до зображення потрібно спочатку оригінал подати як лінійну комбінацію табличних оригіналів, де кожний доданок скрізь містить один певний зсув аргументу, а далі використовувати *теорему запізнювання* (*зсув аргументу в оригіналі*):

$$f(t-b)\cdot\eta(t-b) \risingdotseq e^{-bp}F(p),\ \ b>0.$$

*Правило* переходу від зображень до оригіналів із запізнюваннями:

1) в зображенні згрупувати члени, що відповідають однаковим запізнюванням, і винести відповідний спільний експоненціальний множник $e^{-bp}$ за дужки;

2) вираз у кожних дужках подати у вигляді лінійної комбінації табличних зображень;

3) знайти оригінал для кожного зображення в дужках і врахувати відповідні запізнювання.

*Приклад 1*. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y''+7y'+12y=f(t);\quad y(0)=2;\ \ y'(0)=-1,$$

де права частина $f(t)$ задана співвідношеннями:

$$f(t)=\begin{cases} 0,\ \ t\in(-\infty;0) \\ 3-t,\ \ t\in(0;3] \\ 6-(4/3)t,\ \ t\in(3;6] \\ 0,\ \ t\in(6;+\infty) \end{cases}.$$

□ Права частина $f(t)$ показана графічно на рисунку 3.2. Застосовуючи одиничну функцію Хевісайда, запишемо функцію $f(t)$ однією формулою:

$$f(t)=(3-t)\big(\eta(t)-\eta(t-3)\big)+(6-(4/3)t)\big(\eta(t-3)-\eta(t-6)\big).$$

Отже, права частина $f(t)$ містить запізнювання.

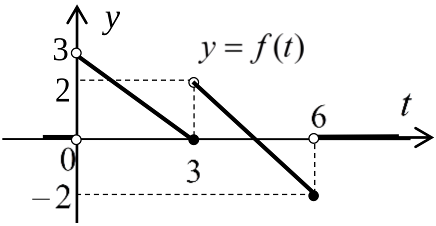


Рисунок 3.2

Розглядаючи функцію $f(t)$ як оригінал, знайдемо її зображення:

$$f(t) = (3-t)\cdot\eta(t) -$$
$$-(3-t)\cdot\eta(t-3) +$$
$$+(6-(4/3)t)\cdot\eta(t-3) -$$
$$-(6-(4/3)t)\cdot\eta(t-6) =$$

$$= (3-t)\cdot\eta(t) + (-3+t+6-(4/3)t)\cdot\eta(t-3) - (6-(4/3)t)\times$$
$$\times\eta(t-6) = (3-t)\cdot\eta(t) + (3-(1/3)t)\cdot\eta(t-3) - (6-(4/3)t)\times$$
$$\times\eta(t-6) = (3-t)\cdot\eta(t) + (3-(1/3)((t-3)+3)\cdot\eta(t-3) -$$
$$-(6-(4/3)((t-6)+6)\cdot\eta(t-6) = (3-t)\cdot\eta(t) +$$
$$+(2-(1/3)(t-3))\cdot\eta(t-3) + (2+(4/3)(t-6))\cdot\eta(t-6) \doteqdot$$
$$\doteqdot 3\cdot 1 - \frac{1}{p^2} + \left(2\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2}\right)e^{-3p} + \left(2\cdot 1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{p^2}\right)e^{-6p} =$$
$$= \frac{3p^2-1}{p^2} + \frac{6p^2-1}{3p^2}e^{-3p} + \frac{6p^2+4}{3p^2}e^{-6p} = F(p).$$

Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 2;$$

$$y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p + 1;$$

$$p^2Y(p) - 2p + 1 + 7(pY(p) - 2) + 12Y(p) =$$

$$= \frac{3p^2 - 1}{p^2} + \frac{6p^2 - 1}{3p^2} e^{-3p} + \frac{6p^2 + 4}{3p^2} e^{-6p}$$ – допоміжне

рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння:

$$(p^2 + 7p + 12) \cdot Y(p) = 2p + 13 +$$

$$+ \frac{3p^2 - 1}{p^2} + \frac{6p^2 - 1}{3p^2} e^{-3p} + \frac{6p^2 + 4}{3p^2} e^{-6p};$$

$$Y(p) = \frac{2p^3 + 16p^2 - 1}{p^2(p^2 + 7p + 12)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6p^2 - 1}{p^2(p^2 + 7p + 12)} e^{-3p} +$$

$$+ \frac{2}{3} \cdot \frac{3p^2 + 2}{p^2(p^2 + 7p + 12)} e^{-6p}$$ – зображення шуканого розв’язку.

Знайдемо відповідний оригінал, ураховуючи запізнення.

Оскільки $p^2 + 7p + 12 = (p+4)(p+3)$, то розкладаючи кожний раціональний дріб окремо в суму елементарних дробів, отримаємо:

$$Y(p) = \frac{A_1}{p^2} + \frac{B_1}{p} + \frac{C_1}{p+4} + \frac{D_1}{p+3} + \frac{1}{3} \cdot e^{-3p} \left( \frac{A_2}{p^2} + \frac{B_2}{p} + \frac{C_2}{p+4} + \right.$$

$$\left. + \frac{D_2}{p+3} \right) + \frac{2}{3} \cdot e^{-6p} \left( \frac{A_3}{p^2} + \frac{B_3}{p} + \frac{C_3}{p+4} + \frac{D_3}{p+3} \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} A_1(p+4)(p+3) + B_1 p(p+4)(p+3) + C_1 p^2 (p+3) + \\ + D_1 p^2 (p+4) = 2p^3 + 16p^2 - 1; \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} p = -4: \\ p = -3: \\ p = 0: \\ p^3: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -16C_1 = -127; \;\; C_1 == -127/16; \\ 9D_1 = 89; \;\; D_1 = 89/9; \\ 12A_1 = -1; \;\; A_1 = -1/12; \\ B_1 + C_1 + D_1 = 2; \;\; B_1 = 2 - C_1 - D_1 = 1 - 7/144. \end{array} \right.$$

Обчислення інших коефіцієнтів відтворіть самостійно:

$$A_2 = -1/12; \;\; B_2 = 7/144; \;\; C_2 = -95/16; \;\; D_2 = 53/9;$$

$$A_3 = 1/6;\ B_3 = -7/72;\ C_3 = -25/8;\ D_3 = 29/9\ \Big| =$$

$$Y(p) = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{107}{144}\cdot\frac{1}{p} - \frac{127}{16}\cdot\frac{1}{p+4} + \frac{89}{9}\cdot\frac{1}{p+3} +$$

$$+ e^{-3p}\left(-\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{7}{432}\cdot\frac{1}{p} - \frac{95}{48}\cdot\frac{1}{p+4} + \frac{53}{27}\cdot\frac{1}{p+3}\right) +$$

$$+ e^{-6p}\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{7}{108}\cdot\frac{1}{p} - \frac{25}{12}\cdot\frac{1}{p+4} + \frac{58}{27}\cdot\frac{1}{p+3}\right).$$

Застосовую чи властивість лінійності, таблицю відповідності оригіналів та їх зображень і теорему запізнювання, знайдемо оригінал шуканого розв'язку:

$$y(t) = -\frac{1}{12}t + \frac{107}{144} - \frac{127}{16}e^{-4t} + \frac{89}{9}e^{-3t} + \left(-\frac{1}{36}(t-3) + \frac{7}{432} -\right.$$

$$\left. - \frac{95}{48}e^{-4(t-3)} + \frac{53}{27}e^{-3(t-3)}\right)\eta(t-3) + \left(\frac{1}{9}(t-6) - \frac{7}{108} -\right.$$

$$\left. - \frac{25}{12}e^{-4(t-6)} + \frac{58}{27}e^{-3(t-6)}\right)\eta(t-6). \quad \blacksquare$$

*Приклад 2*. Розв'язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь із запізнюванням:

$$\begin{cases} x' = -8y \\ y' = 2x + 3\delta(t-5) \end{cases}; \qquad x(0) = 0;\ \ y(0) = 0.$$

$$\square\ \ x(t) \risingdotseq X(p);\ \ \ y(t) \risingdotseq Y(p); \qquad \begin{cases} pX(p) = -8Y(p) \\ pY(p) = 2X(p) + 3e^{-5p} \end{cases};$$

$$\begin{cases} X(p) = -\dfrac{24}{p^2+16}e^{-5p} \risingdotseq -6\sin 4(t-5)\cdot\eta(t-5) = x(t) \\ Y(p) = \dfrac{3p}{p^2+16}e^{-5p} \risingdotseq 3\cos 4(t-5)\cdot\eta(t-5) = y(t) \end{cases}. \quad \blacksquare$$

**Запитання для самоконтролю**

1. Яка функція називається оригіналом? Наведіть приклади оригіналів і функцій, що не є оригіналами.
2. Дайте означення перетворення (оператора) Лапласа. Що таке зображення оригіналу?
3. Сформулюйте теорему єдиності перетворення Лапласа.
4. Як веде себе будь-яке зображення на нескінченності?
5. У чому полягає властивість лінійності оператора Лапласа?
6. Що таке одинична ступінчаста функція Хевісайда? Яке її зображення?
7. Сформулюйте теорему запізнювання (про зсув аргументу в оригіналі).
8. Як знаходиться зображення похідних оригіналу?
9. Сформулюйте правило знаходження оригіналу для зображення у вигляді раціонального дробу на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень.
10. За якою схемою здійснюється розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем методом операційного числення?
11. Сформулюйте правило знаходження зображення оригіналу, що містить різні запізнювання.
12. Сформулюйте правило знаходження оригіналу із запізнюваннями для зображення, що містить експоненціальні множники вигляду $e^{-bp}$, на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень з використанням теореми запізнювання.
13. За якою схемою здійснюється розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем у випадку наявності запізнювань?
14. Що таке одинична імпульсна дельта-функція Дірака? Яке її зображення?
15. Який зв'язок між одиничними функціями Дірака і Хевісайда?
16. Наведіть приклади застосування операційного числення для розрахунку перехідних процесів у електричних колах і в інших прикладних задачах.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

### Варіант 1

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $(xy^2 + y^2)dx - xdy = 0$; б) $ydx - xdy - \sqrt{x^2 + y^2}dy = 0$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

а) $xy' + y - e^x = 0$; $y(0) = 1$;

б) $y'' + 4y = 6\cos 2x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$.

3. Методом вилучення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y + 1 \\ y' = 4x + 6y - 3t \end{cases}; \qquad \begin{matrix} x(0) = -2; \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

4. Дослідити на збіжність знакододатний ряд, який заданий своїм загальним членом $u_n$:

а) $u_n = \frac{(3n+8)5^{2n}}{4^{n-1}}$; б) $u_n = \arcsin^{2n}\frac{n+1}{2n+3}$; в) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+16}}{3n^2+1}$.

5. Дослідити знакопочерговий ряд, що заданий своїм загальним членом $u_n = (-1)^n\left(\frac{8n-1}{8n+3}\right)^{n^2}$, на абсолютну та умовну збіжність.

6. Знайти інтервал та область збіжності степеневого ряду, який заданий своїм загальним членом: $u_n = \frac{(x-4)^{3n}\ln n}{n\,3^{3n-1}}$.

7. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближено заданий інтеграл з точністю до $\varepsilon = 0{,}000\,1$: $I = \int_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{x}dx$.

8. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi, \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. Побудувати графік даної функції $y = f(x)$ на відрізку $[-3\pi, 3\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \le x < 0 \\ x - 2\pi, & 0 \le x < \pi \end{cases}.$$

9. Знайти оригінал функції $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$:

$$F(p) = \frac{3p^2-1}{p^3+4p^2+4p}.$$

10. Операційним методом знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$y'' - 2y' - 3y = 2\cos 2t - \sin 2t;\ \ y(0) = -2;\ \ y'(0) = 3.$$

11. Операційним методом знайти частинний розв’язок диференціальної системи, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = 7x - 9y + 2e^{2t} \\ y' = x + 7y \end{cases};\qquad \begin{matrix} x(0) = 0; \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

## Варіант 2

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

а) $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$;   б) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

2. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

а) $xy' - 4y = 2x^2 - 5x$;   $y(0) = 0$;

б) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2$; $y(0) = 2$ ; $y'(0) = 0$.

3. Методом вилучення знайти частинний розв’язок системи диференціальних рівнянь, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x - y - 2\sin t \end{cases};\qquad \begin{matrix} x(0) = 2; \\ y(0) = 3. \end{matrix}$$

4. Дослідити на збіжність знакододатний ряд, який заданий своїм загальним членом $u_n$:

а) $u_n = \frac{(n^2+1)2^{2n-1}}{5^n}$;   б) $u_n = \mathrm{arctg}^{3n}\frac{4n+3}{4n-1}$;   в) $u_n = \frac{\sqrt{n^4+6n}}{8n^3-1}$.

5. Дослідити знакопочерговий ряд, що заданий своїм загальним членом $u_n = \frac{(-1)^n n\sqrt{n^2+4}}{2^n+n}$, на абсолютну та умовну збіжність.

6. Знайти інтервал та область збіжності степеневого ряду, який заданий своїм загальним членом: $u_n = \frac{8^{n-1}(x+1)^{3n}}{\sqrt{n+4}}$.

7. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближено заданий інтеграл з точністю до $\varepsilon = 0{,}000\,1$: $I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x} dx$.

8. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi, \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. Побудувати графік даної функції $y = f(x)$ на відрізку $[-3\pi, 3\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi, & -\pi \le x < 0 \\ x - \pi, & 0 \le x < \pi \end{cases}.$$

9. Знайти оригінал функції $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$:

$$F(p) = \frac{3p^2 - 2p}{(p-2)(p^2+2p+10)}.$$

10. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$y'' - 2y' = 2t^2 - t + 3;\ y(0) = -1;\ y'(0) = 0.$$

11. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціальної системи, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = -5x + 16y \\ y' = -x - 5y + 2e^{-t} \end{cases};\quad \begin{matrix} x(0) = 2; \\ y(0) = -1. \end{matrix}$$

## Варіант 3

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $(xy^2 - x)dx + (x^2y + y)dy = 0$; б) $(x - 2y)y' = x - y$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

а) $y' = y\,\mathrm{tg}x + 2\cos x$; $y(0) = -2$;

б) $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$; $y(0) = -2$; $y'(0) = 2$.

3. Методом вилучення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = 3x + y + 2e^{-2t} \\ y' = -5x - 3y \end{cases};\quad \begin{matrix} x(0) = -1; \\ y(0) = 3. \end{matrix}$$

4. Дослідити на збіжність знакододатний ряд, який заданий своїм загальним членом $u_n$:

$$\text{а) } u_n = \frac{(n+2)!}{\sqrt{n^4+4n}}; \quad \text{б) } u_n = \ln^n \frac{7n+3}{7n-2}; \quad \text{в) } u_n = \frac{n^3-\sqrt{n^4+1}}{2n^5-1}.$$

5. Дослідити знакопочерговий ряд, що заданий своїм загальним членом $u_n = \frac{(-1)^n\,(n^3+8)}{(3n-1)\sqrt{n^6+1}}$, на абсолютну та умовну збіжність.

6. Знайти інтервал та область збіжності степеневого ряду, який заданий своїм загальним членом: $u_n = \frac{2^n(x+4)^n}{5^{n+1}\sqrt{n+4}}$.

7. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближено заданий інтеграл з точністю до $\varepsilon = 0{,}000\,1$: $I = \int_0^{0,5} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}\,dx$.

8. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi, \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. Побудувати графік даної функції $y = f(x)$ на відрізку $[-3\pi, 3\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} x+\pi, & -\pi \le x \le 0 \\ -\pi, & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

9. Знайти оригінал функції $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$:

$$F(p) = \frac{4p^2-p+1}{(p-3)(p^2+6p+10)}.$$

10. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$y'' + 8y' + 25y = -3e^{-4t}; \; y(0) = 2; \; y'(0) = -4.$$

11. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціальної системи, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = 7x + 4y + 3t \\ y' = -4x + 7y \end{cases}; \quad \begin{matrix} x(0) = 0; \\ y(0) = -2. \end{matrix}$$

## Варіант 4

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } (xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0; \quad \text{б) } xy' = y\ln(x/y).$$

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

а) $y' + y\cos x = 2\, e^{-\sin x}$; $y(0) = 3$;

б) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$; $y(0) = -2$ ; $y'(0) = 0$.

3. Методом вилучення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + t^2 \\ y' = 3x - 2y \end{cases}; \quad \begin{matrix} x(0) = -2; \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

4. Дослідити на збіжність знакододатний ряд, який заданий своїм загальним членом $u_n$:

а) $u_n = \frac{6^n \sqrt{2n-1}}{(n+3)!}$; б) $u_n = \frac{1}{(7n-2)\ln(7n-2)}$; в) $u_n = \frac{n^2-n}{2n^3+\sqrt{n^4+4}}$.

5. Дослідити знакопочерговий ряд, що заданий своїм загальним членом $u_n = \frac{(-1)^n\,(2n^2-1)}{(4n+1)\sqrt{n}}$, на абсолютну та умовну збіжність.

6. Знайти інтервал та область збіжності степеневого ряду, який заданий своїм загальним членом: $u_n = \frac{3^n(x-4)^n}{2^{2n+1}n^2}$.

7. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближено заданий інтеграл з точністю до $\varepsilon = 0{,}000\,1$: $I = \int_0^1 \frac{1-\cos x^2}{x^3}\,dx$.

8. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi, \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. Побудувати графік даної функції $y = f(x)$ на відрізку $[-3\pi, 3\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \pi, & -\pi \le x \le 0 \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

9. Знайти оригінал функції $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$:

$$F(p) = \frac{4p+3}{(p+2)(p^2-6p+10)}.$$

10. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$y'' + 6y' + 8y = 2\cos 2t;\; y(0) = 1;\; y'(0) = 4.$$

11. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціальної системи, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = -6x + y + 3\cos t \\ y' = -4x - 6y \end{cases}; \qquad \begin{matrix} x(0) = 1; \\ y(0) = -1. \end{matrix}$$

## Варіант 5

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $3e^x \sin y dx + (2 - e^x)\cos y dy = 0$; б) $x^2 y' = xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

а) $xy' - 2y = 6x^4$; $y(1) = 2$;

б) $y'' - 2y' + 2y = 2x^2$; $y(0) = 0$; $y'(0) = -2$.

3. Методом вилучення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + e^{-t} \\ y' = 2x + y - 3e^{-t} \end{cases}; \qquad \begin{matrix} x(0) = -1; \\ y(0) = 3. \end{matrix}$$

4. Дослідити на збіжність знакододатний ряд, який заданий своїм загальним членом $u_n$:

а) $u_n = \frac{6^n \sqrt{4n-1}}{5^{2n} n}$; б) $u_n = \frac{1}{(5n+3)\ln^2(5n+3)}$; в) $u_n = \frac{4n + \sqrt[3]{n^6+1}}{2n + \sqrt{n^6-1}}$.

5. Дослідити знакопочерговий ряд, що заданий своїм загальним членом $u_n = \frac{(-1)^n (n^2+1)}{(n^3+8)\sqrt{n}}$, на абсолютну та умовну збіжність.

6. Знайти інтервал та область збіжності степеневого ряду, який заданий своїм загальним членом: $u_n = \frac{(x-3)^{2n}}{4^n(2n-1)}$.

7. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближено заданий інтеграл з точністю до $\varepsilon = 0{,}000\,1$: $I = \int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^4)}{x^2} dx$.

8. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi, \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. Побудувати

графік даної функції $y = f(x)$ на відрізку $[-3\pi, 3\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \le x < 0 \\ 2x - \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

9. Знайти оригінал функції $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$:

$$F(p) = \frac{p^2+3p}{(p^2+4)(p^2+9)}.$$

10. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$y'' - 6y' + 18y = 2t + 3;\ \ y(0) = 2;\ \ y'(0) = -1.$$

11. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціальної системи, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = 5x - 8y + 2\cos t \\ y' = 2x + 5y - \sin t \end{cases}; \qquad \begin{matrix} x(0) = 0; \\ y(0) = -2. \end{matrix}$$

## Варіант 6

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $2x^2yy' + y^2 = 4$; б) $x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

а) $y' - \frac{1}{1-x^2} = 2 + 2x$; $y(0) = -1$;

б) $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x$; $y(0) = -1$; $y'(0) = -3$.

3. Методом вилучення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = 6x + 3y + e^{2t} \\ y' = -8x - 5y - e^{2t} \end{cases}; \qquad \begin{matrix} x(0) = 0; \\ y(0) = -2. \end{matrix}$$

4. Дослідити на збіжність знакододатний ряд, який заданий своїм загальним членом $u_n$:

а) $u_n = \frac{3^n n^6}{(2n)!}$; б) $u_n = \frac{\ln(8n+1)}{8n+1}$; в) $u_n = \sqrt{\frac{3n^4-2}{n^6+4n}}$.

5. Дослідити знакопочерговий ряд, що заданий своїм загальним членом $u_n = \frac{(-1)^n\,(n^2+1)}{(n^3+8)\sqrt{n}}$, на абсолютну та умовну збіжність.

6. Знайти інтервал та область збіжності степеневого ряду, який заданий своїм загальним членом: $u_n = \frac{(x-1)^{3n}}{8^n(\sqrt{n}+1)}$.

7. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближено заданий інтеграл з точністю до $\varepsilon = 0{,}000\,1$: $I = \int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x^3}{x} dx$.

8. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi, \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. Побудувати графік даної функції $y = f(x)$ на відрізку $[-3\pi, 3\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi, & -\pi \le x < 0 \\ 3x - 2\pi, & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

9. Знайти оригінал функції $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$:

$$F(p) = \frac{p^2-4p+2}{(p-1)(p^2+6p+13)}.$$

10. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$y'' - 6y' + 25y = 2e^{3t};\ y(0) = 0;\ y'(0) = 2.$$

11. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціальної системи, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = -6x - 2y + t \\ y' = 2x - 8y - 3t \end{cases}; \quad \begin{matrix} x(0) = -1; \\ y(0) = 0. \end{matrix}$$

## Варіант 7

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y^2 \ln x dx - (y-1)x dy = 0$; б) $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

а) $(xy' - 1)\ln x = 2y$; $y(1) = 0$;

б) $y'' + y' - 6y = 4e^{2x}$;  $y(0) = 1$ ; $y'(0) = 5$.

3. Методом вилучення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 2t, & x(0) = 3; \\ y' = 3x + 6y + t, & y(0) = 0. \end{cases}$$

4. Дослідити на збіжність знакододатний ряд, який заданий своїм загальним членом $u_n$:

а) $u_n = \frac{n^n}{(2n-1)!}$;  б) $u_n = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi(n+1)}{3n+4}\right)^{2n}$;  в) $u_n = \sqrt{\frac{3n^2-n}{2n^6+5}}$.

5. Дослідити знакопочерговий ряд, що заданий своїм загальним членом $u_n = \frac{(-1)^n \ln^2(5n+4)}{5n+4}$, на абсолютну та умовну збіжність.

6. Знайти інтервал та область збіжності степеневого ряду, який заданий своїм загальним членом: $u_n = \left(\frac{2n+1}{4n+5}\right)^n \frac{(x-3)^n}{2^n}$.

7. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближено заданий інтеграл з точністю до $\varepsilon = 0{,}000\,1$:  $I = \int_0^{0,5} \frac{1-\cos x^{3/2}}{x^2}\,dx$.

8. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi, \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. Побудувати графік даної функції $y = f(x)$ на відрізку $[-3\pi, 3\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - \pi, & -\pi < x < 0 \\ 3\pi, & 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

9. Знайти оригінал функції $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$:

$$F(p) = \frac{p^2 - p}{(p^2+1)(p^2-2p+5)}.$$

10. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$y'' + 7y' + 10y = 3e^{-2t};\; y(0) = 1;\; y'(0) = -3.$$

11. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціальної системи, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y - 3\sin t \end{cases}; \qquad \begin{matrix} x(0) = -2; \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

## Варіант 8

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $(1 - e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$; б) $xy' = y + 2x - 2\sqrt{xy - y^2}$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

а) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$; $y(0) = -2$;

б) $y'' + 3y' + 2y = 10e^{-x}$; $y(0) = 3$ ; $y'(0) = -2$.

3. Методом вилучення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = 8x - 9y + t \\ y' = 7x - 8y + 3t \end{cases}; \qquad \begin{matrix} x(0) = 0; \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

4. Дослідити на збіжність знакододатний ряд, який заданий своїм загальним членом $\mathrm{u_n}$:

а) $u_n = \frac{2^{3n}}{n^n \sqrt{n+1}}$; б) $u_n = \left(\frac{4n-1}{4n-3}\right)^{n^2}$; в) $u_n = \frac{1}{(5n-1)\sqrt{\ln(5n-1)}}$ .

5. Дослідити знакопочерговий ряд, що заданий своїм загальним членом $u_n = \frac{(-1)^n}{(7n-4)\ln^3(7n-4)}$, на абсолютну та умовну збіжність.

6. Знайти інтервал та область збіжності степеневого ряду, який заданий своїм загальним членом: $u_n = \frac{5^{n-1}(x-4)^n}{2^{2n+1}(\sqrt[3]{n}+1)}$.

7. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближено заданий інтеграл з точністю до $\varepsilon = 0{,}000\,1$: $I = \int_0^{0,5} x \operatorname{arctg} x^2 dx$.

8. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi, \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. Побудувати графік даної функції $y = f(x)$ на відрізку $[-3\pi, 3\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}3x-2\pi, & -\pi<x<0\\ 2\pi, & 0\le x\le\pi\end{cases}.$$

9. Знайти оригінал функції $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$:

$$F(p)=\frac{p^2-4}{(p+1)(p^2-4p+13)}.$$

10. Операційним методом знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$y''+8y'+20y=3\sin 2t;\ \ y(0)=0;\ \ y'(0)=-1.$$

11. Операційним методом знайти частинний розв’язок диференціальної системи, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases}x'=-5x+2y\\ y'=x-6y-e^{-2t}\end{cases};\qquad \begin{matrix}x(0)=-2;\\ y(0)=0.\end{matrix}$$

## Варіант 9

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

а) $\sin x\cdot y'=y\cdot\cos x-3\cos x$; б) $y=x\left(y'-\sqrt[x]{e^y}\right)$.

2. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

а) $y'-\frac{y}{x+1}=e^x(x+1);\ \ y(0)=3;$

б) $y''+4y'-12y=8\sin 2x;\quad y(0)=-4\,;\ y'(0)=0.$

3. Методом вилучення знайти частинний розв’язок системи диференціальних рівнянь, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases}x'=7x-5y+4t\\ y'=10x-7y-t\end{cases};\qquad \begin{matrix}x(0)=0;\\ y(0)=-2.\end{matrix}$$

4. Дослідити на збіжність знакододатний ряд, який заданий своїм загальним членом $\mathrm{u_n}$:

а) $u_n=\frac{2^{3n}\sqrt{n+1}}{3^{2n}}$; б) $u_n=\sin^{2n}\frac{\pi(n+3)}{6n+1}$; в) $u_n=\frac{2n+\sqrt[3]{n^4}+1}{\sqrt{n^4-3n+4}}$.

5. Дослідити знакопочерговий ряд, що заданий своїм загальним членом $u_n=\frac{(-1)^n\,(4n^2-1)\sqrt[3]{n}}{(n^2+9)\sqrt{n^2+1}}$, на абсолютну та умовну збіжність.

6. Знайти інтервал та область збіжності степеневого ряду, який заданий своїм загальним членом: $u_n = \frac{(-1)^n n(x+2)^{3n}}{27^{n+1}\sqrt[3]{n^5+1}}$.

7. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближено заданий інтеграл з точністю до $\varepsilon = 0{,}000\,1$: $I = \int_0^{0,5} x^2 \ln(1+x^2)\,dx$.

8. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi, \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. Побудувати графік даної функції $y = f(x)$ на відрізку $[-3\pi, 3\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} -2\pi, & -\pi < x < 0 \\ 2\pi - x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

9. Знайти оригінал функції $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$:

$$F(p) = \frac{p^2 - 2p}{(p+2)(p^2+4p+13)}.$$

10. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$y'' + 8y' + 16y = 6e^{-4t}; \; y(0) = 1; \; y'(0) = 0.$$

11. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціальної системи, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = -x - 2y + \cos 2t \\ y' = 3x + 4y - \sin 2t \end{cases}; \qquad \begin{matrix} x(0) = 2; \\ y(0) = 0. \end{matrix}$$

## Варіант 10

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{y^2+1} = 0$; б) $(x^2 + y^2 + xy)dx - x^2 dy = 0$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

а) $y'\cos x + y\sin x = 3$; $y(0) = -1$;

б) $y'' + 6y' + 13y = 2\cos 3x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

3. Методом вилучення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = -5x + 2y - e^{-t} \\ y' = x - 6y + 3e^{-t} \end{cases}; \quad \begin{aligned} x(0) &= -1; \\ y(0) &= 2. \end{aligned}$$

4. Дослідити на збіжність знакододатний ряд, який заданий своїм загальним членом $u_n$:

а) $u_n = \left(\cos\frac{\pi(2n-1)}{6n+5}\right)^{n^2}$; б) $u_n = \frac{5^{2n+1}}{3^{2n}\sqrt{n+1}}$; в) $u_n = \frac{2n+1}{\sqrt[3]{n^4}+\sqrt{2n^4-1}}$.

5. Дослідити знакопочерговий ряд, що заданий своїм загальним членом $u_n = \frac{(-1)^n\,(n^2+1)}{(n^3+8)\sqrt{n}}$, на абсолютну та умовну збіжність.

6. Знайти інтервал та область збіжності степеневого ряду, який заданий своїм загальним членом: $u_n = \frac{2^{n+1}(x+1)^n}{5^n n \ln 8n}$.

7. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити наближено заданий інтеграл з точністю до $\varepsilon = 0{,}000\,1$: $I = \int_0^{0,5} \frac{\sin x^3}{x^3}\,dx$.

8. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi, \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. Побудувати графік даної функції $y = f(x)$ на відрізку $[-3\pi, 3\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi, & -\pi < x < 0 \\ \pi - 3x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

9. Знайти оригінал функції $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$:

$$F(p) = \frac{p^2+2p-4}{(p+2)(p^2-2p-8)}.$$

10. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

$$y'' - 4y' - 5y = 2t^2 - 1; \; y(0) = 1; \; y'(0) = 0.$$

11. Операційним методом знайти частинний розв'язок диференціальної системи, який задовольняє початковим умовам:

$$\begin{cases} x' = 8x - 9y + e^{-2t} \\ y' = 7x - 8y - e^{-2t} \end{cases}; \quad \begin{aligned} x(0) &= -2; \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Архіпова О. С. Посібник для розв'язання типових завдань з курсу «Вища математика» / О. С. Архіпова, В. П. Протопопова, Є. С. Пахомова. – Харків : ХНАМГ, 2008 р. − 210 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/6656/, вільний).

2. Бізюк В. В. Елементи операційного числення [Електронний ресурс] : конспект лекцій для студентів першого курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / В. В. Бізюк, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електронні текстові дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 59 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/57508/, вільний (дата звернення: 25.04.2022). − Назва з екрана.

3. Бізюк В. В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. – Харків : ХНАМГ, 2008. – 300 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/5934/, вільний).

4. Вища математика : збірник задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. ; За ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – Київ : А.С.К., 2005. – 480 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://194.44.152.155/elib/local/sk642773.pdf, вільний).

5. Вища математика : збірник задач : у 2 ч. Ч. 2 : Звичайні диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди. Рівняння мат. фізики. Стійкість за Ляпуновим. Елементи теорії ймовірностей і мат. статистики. Методи оптимізації і задачі керування. Варіаційне числення. Числові методи : Навч. посібник / П. П. Овчинников, П. С. Кропив'янський, С. П. Полушкін та ін. ; За заг. ред. П. П. Овчинникова. – Київ : Техніка, 2003. – 376 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://msk.edu.ua/s-k/vfn/downloads/vmat_z2.djvu, вільний).

6. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : Ігнатекс – Україна, 2013. – 648 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://dspace.nuft.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/10062/1/56.pdf, вільний).

7. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госпва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 192 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/48566/, вільний).

8. Колосов А. І. Вища математика. Модуль 2 [Електронний ресурс] : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 126 – Інформаційні системи та технології / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Електронні текстові дані. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 239 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/60154/, вільний (дата звернення: 18.03.2022). − Назва з екрана.

9. Колосов А. І. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» : у 2-х модулях. Модуль 2 : Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Функції багатьох змінних. Ряди [Електронний ресурс] / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Електронні текстові дані. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 227 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/46338/, вільний (дата звернення: 18.03.2022). − Назва з екрана.

10. Методичні рекомендації до практичних занять і самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика». Модуль 2 : Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди. Операційне числення [Електронний ресурс] (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спец. 126 – Інформаційні системи та технології) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : А. В. Якунін. – Електронні текстові дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 105 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/60152/, вільний (дата звернення: 25.04.2022). − Назва з екрана.

11. Ряди та їх застосування : Методичні рекомендації та дидактичні матеріали до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» / С. О. Станішевський, С. М. Мордовцев, А. В. Якунін, Л. О. Бистрова, В. С. Ситникова ; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2009. – 123 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/16023/, вільний).

12. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 2) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський ; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 125 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/21115/, вільний).

13. Bird J. O. Higher engineering mathematics / J. O. Bird. – Oxford, Burlington MA : Newnes, 2006. – 726 p.

*Виробничо-практичне видання*

Методичні рекомендації
до практичних занять і самостійної роботи
з навчальної дисципліни

# «ВИЩА МАТЕМАТИКА»
# МОДУЛЬ 2

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня*
*вищої освіти заочної форми навчання*
*за спеціальністю 122 – Комп'ютерні науки)*

Укладач **ЯКУНІН** Анатолій Вікторович

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
*За авторською редакцією*
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2021, поз. 193М

Підп. до друку 30.06.2022. Формат 60 × 84/16
Електронне видання. Ум. друк. арк. 4,5

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.