**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**Ю. В. Федотова**

# МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ ЕКОНОМІЧНИХ РІШЕНЬ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної, заочної і дистанційної форм навчання зі спеціальності 051 – Економіка)*

**Харків**
**ХНУМГ ім. О. М. Бекетова**
**2022**

**Федотова Ю. В.** Методи прийняття економічних рішень : конспект лекцій (для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної, заочної і дистанційної форм навчання зі спеціальності 051 – Економіка) / Ю. В. Федотова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022.– 90 с.

Автор  канд. екон. наук, доц. Ю. В. Федотова

Рецензент

**О. О. Вороніна,** кандидат економічних наук, доцент кафедри економічної теорії та міжнародної економіки Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

*Рекомендовано кафедрою економічної теорії та міжнародної економіки, протокол № 3 від 29 жовтня 2021 р.*

## ЗМІСТ

# ВСТУП

На сучасному етапі розвитку суспільства постійно підвищується ціна від неправильно прийнятих рішень в різних сферах професійної діяльності та в повсякденному житті людини.

Методи прийняття економічних рішень – це дисципліна, яка забезпечує науково обґрунтований підхід до вибору найкращого, в деякому розумінні, варіанту (варіантів) поведінки в умовах неповної інформації щодо зовнішнього середовища. Важливість наукового підходу для прийняття рішень полягає в тому, що рішення, які людина приймає інтуїтивно, не завжди є раціональними. Саме тому «Методи прийняття економічних рішень» входить до переліку навчальних дисциплін, які викладаються студентам економічної спеціальності.

Науково обґрунтований вибір альтернатив базується на різних математичних постановках та відповідних методах, які залежать від змісту конкретної прикладної задачі прийняття рішень.

В одних випадках задача може бути зведена до пошуку найкращої альтернативи за сукупністю критеріїв і тоді її розв’язування ґрунтується на методах багатокритеріальної оптимізації. В інших адекватною моделлю задачі є прийняття рішень в умовах конфлікту в припущенні активної протидії супротивників, і тоді оптимальна стратегія ґрунтується на теорії ігор. Якщо ж прийняття рішень здійснюється в, так званій, «грі з природою», яка байдужа до наслідків прийнятих рішень, то вибір оптимальної альтернативи ґрунтується на методах теорії статистичних рішень (рішення в умовах ризику та невизначеності). Слід також враховувати практичні ситуації, коли розв’язування задачі ґрунтується на інтеграції індивідуальних рішень членів групи експертів, і тоді для пошуку остаточної альтернативи використовують спеціальні методи колективних рішень.

Мета підручника – заповнити прогалину та на єдиних методологічних позиціях викласти основні математичні засади методів, що склалися в теорії прийняття рішень.

# ТЕМА 1 ЗАГАЛЬНІ АСПЕКТИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

## 1.1 Рішення: концепція та класифікація

У наш час методику прийняття економічних рішень застосовують переважно для аналізу тих проблем, які можна відносно легко й однозначно формалізувати, а результати досліджень – адекватно інтерпретувати. Її використовують як у повсякденному житті при виборі найраціональнішого рішення, так і у різних галузях управління: проєктуванні складних технічних і організаційних систем, плануванні розвитку міст, виборі програм розвитку економіки й енергетики регіонів, організації нових економічних зон тощо.

Потреба в застосуванні засобів і методів прийняття економічних рішень очевидна: швидкий розвиток і ускладнення економічних зв’язків, виявлення залежностей між окремими складними процесами та явищами, які раніше здавалися не пов’язаними один з одним, призводять до різкого зростання труднощів під час прийняття обґрунтованих рішень. Витрати на прийняття рішень зростають, наслідки помилок стають більш суттєвими, а звернення до фахового досвіду та інтуїції не завжди зумовлює вибір найкращої стратегії. Застосування методів прийняття економічних рішень дає змогу розв’язати цю проблему, до того ж швидко й достатньо точно й ефективно.

Рішення – результат інтелектуальної діяльності людини, що призводить до певного висновку або до необхідних дій. Рішення – той пункт, у якому робиться вибір між альтернативними та, як правило, конкуруючими можливостями.

Децидент (ОПР) – особа чи група осіб, що приймають рішення.

Завданням прийняття рішення називають таке завдання, яке можна сформулювати в термінах мети, засобів і результату.

Виділяють такі види (групування об’єктів за якісними ознаками) рішень.

Організаційне рішення – вибір, який має зробити децидент, щоб виконати обов’язки згідно з посадою, яку він займає.

Програмоване рішення – результат реалізації певної послідовності кроків або дій, подібних до тих, які приймають у процесі розв’язання математичного рівняння (застосовують для проблем, що повторюються з певною регулярністю та виникають здебільшого в технічних галузях).

Непрограмовані рішення – визначення цілей організацій, поліпшення якості продукції, удосконалення структури управлінських підрозділів, посилення мотивації підлеглих (потрібні в ситуаціях, які певною мірою нові, внутрішньо неструктуровані чи пов’язані з новими чинниками).

Інтуїтивне рішення – вибір, зроблений на основі відчуття того, що він правильний («осяяння», «шосте відчуття»).

Рішення, що ґрунтується на міркуваннях – вибір, який зумовлений знаннями чи нагромадженим досвідом. Міркування за аналогією, як основа організаційного рішення, корисні, оскільки багато ситуацій в організаціях повторюються.

Раціональне рішення – не залежить від минулого досвіду, його обґрунтовують під час об'єктивного аналітичного процесу.

Ситуації, у яких відбувається вибір рішень, мають такі структурні елементи: проблемна ситуація, децидент, мета, керування, варіанти рішень, обмеження, зовнішнє середовище.

Мета – одна з найскладніших і водночас найдавніших категорій. Вона відображає призначення системи, яке не є детерміністично фіксованим. Мета конкретизується за допомогою аспектів і цілей (тактичні, макроцілі й ідеали).

Нагромаджений практичний досвід у галузі проблем прийняття економічних рішень показує, що часто найважчими й найважливішими виявляються такі аспекти цих проблем, які безпосередньо не стосуються процесу прийняття рішення, а саме:

– введення експертів і децидента в проблематику завдань, які потрібно розв'язати;

– формування спільної мови спілкування для різних груп експертів і децидента;

– узгодження думок і поглядів різних груп експертів і децидента;

– виявлення справжніх цілей розв'язання та постановки задачі.

Класифікація рішень – це науковий метод дослідження їхньої природи об'єктів та явищ із використанням визначених правил щодо їх систематизації.

1. За масштабом об'єкта:
   – глобальні;
   – локальні.
2. За характером мети:
   – стратегічні;
   – тактичні.
3. За джерелом виникнення:
   – по розпорядженню;
   – ініціативні;
   – за замовленням.
4. За способом доведення:
   – усні;
   – письмові.
5. За суб'єктом прийняття:
   – колегіальні;
   – індивідуальні;
   – колективні.

6. За ступенем новизни:
   – традиційні;
   – інноваційні.
7. За методами розробки:
   – кількісні;
   – евристичні.
8. За наявністю інформації:
   – визначені;
   – ймовірнісні;
   – невизначені.
9. За цільовою направленістю:
   – одноцільові;
   – багатоцільові.
10. За змістом рішень:
   – економічні;
   – технічні;
   – соціальні;
   – організаційні.
11. За періодом дії:
   – довготривалі;
   – оперативні.
12. За станом свідомості:
   – усвідомлені;
   – мало усвідомлені;
   – неусвідомлені.

## 1.2 Послідовність і зміст основних етапів процесу прийняття рішень

Прийняття рішення – це більше, ніж просто сам вибір. Кожний крок у процесі прийняття рішення є важливим; на кожному з них можна допуститися помилки та кожний може потенційно бути підтриманий деяким видом комп’ютеризованої допомоги. Розглянемо докладніше сімку кроків у загальній моделі процесу прийняття рішення: а) визначення проблеми; б) визначення осіб, що прийматимуть рішення (держателів проблеми); в) збір інформації; г) описування й оцінювання альтернатив; д) вибір оптимальної альтернативи; е) упровадження; ж) перевірка виконання й оцінювання (рис. 1.1).

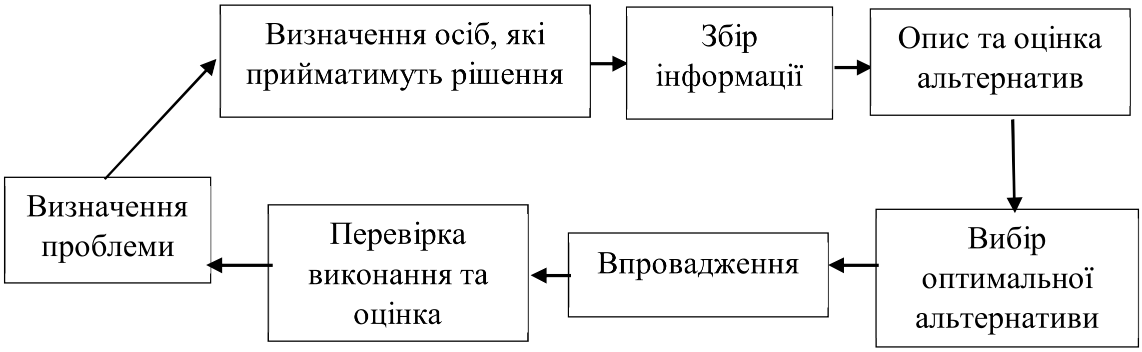


Рисунок 1.1 – Послідовність етапів процесу прийняття рішень

1. Визначення проблеми. Менеджери розуміють, що чіткіше сформульована проблема набагато легша для розв'язування, а скорочений опис проблеми зменшує шанси отримати найкращу відповідь або призводить до помилкової (несправжньої) проблеми. Коли неправильно визначена проблема, то це унеможливлює створення ефективного рішення.

2. Збір інформації. Як тільки проблема визначена, можна розпочати виявляти чинники, що визначають ефективність розв'язання проблеми, та інформації, потрібної для розроблення реальних альтернатив. Без інформації прийняття рішення є таким, що ґрунтується на передчуттях і інтуїції.

3. Опис та оцінка альтернатив. Найбільш творчою складовою частиною прийняття рішень є опис альтернатив і визначення того, що саме потрібно отримати в процесі серйозного дослідження й аналізу. Для генерування ідей корисною в багатьох ситуаціях є мозкова атака. Велика кількість ідей імовірніше веде до деяких ідей найвищої якості, ніж зосередження на одній або кількох дуже поверхових ідеях.

4. Вибір оптимальної альтернативи. Прийняти рішення означає вибір напряму дій або бездіяльність. У деяких ситуаціях рішення мають бути розроблені – це або є обов'язковим, або вимагається обставинами, клієнтами чи акціонерами. Рішення, крім того, інколи розробляються на підставі меншого обсягу інформації, ніж це має бути, або вибираються з деякої сукупності можливих альтернатив, які не оцінюються чи, навіть, не розглядаються.

5. Реалізація (впровадження). Прийняття рішення є кульмінацією єдиного процесу. Специфічний процес розроблення рішення може бути затяжним і складним або стрімким і простим. Але для будь-якої проблеми та будь-якої множини альтернатив, розроблених із комп'ютерною допомогою або без неї, якщо тільки рішення розроблене, що-небудь, звичайно, має відбутися.

6. Перевірка виконання та оцінка. Вимірювання й оцінювання наслідків рішення, яке було реалізоване, потрібні творцям рішень, оскільки вони

відповідальні за нього. За відслідковування процесу реалізації рішення можуть з'являтися нові проблеми. У деяких випадках потрібні незначні регулювання чи виправлення дій.

### 1.3 Альтернативи і критерії при прийнятті рішень

Альтернативою в процесі прийняття рішень називають спосіб дій або стратегію по досягненню мети. Дослівно «альтернатива» (фр. alternative, від лат. Alter – один із двох) означає необхідність вибору одного з двох або декількох можливих рішень, напрямів, потрібних варіантів тощо.

Способи дій – це способи використання ресурсів, тому можливості ОПР завжди обмежені можливістю використання ресурсів.

Кожна альтернатива може бути охарактеризована величиною витрат ресурсів (які завжди обмежені), можливими наслідками результату, ймовірністю досягнення мети.

Витрати ресурсів, ймовірність досягнення мети й результат є прогнозними характеристиками. Тому процес прийняття рішення завжди пов'язаний з невизначеністю, ризиком, неясністю.

Ухвалення рішення – є вибір найкращої (оптимальної) або прийнятною, задовільною альтернативи, тобто певні дії над безліччю альтернатив, в результаті яких виходить підмножина допустимих (можливих) альтернатив, що задовольняють накладаються обмеженням. Далі допустимі (можливі) альтернативи, вірніше, їх результати (наслідки) порівнюють за прийнятим критеріям ефективності, які являють собою найчастіше математичний вираз мети й визначають ступінь досягнення мети для кожної відібраної альтернативи. Альтернатива, що досягла екстремуму цього критерію, є оптимальною.

Отже, альтернативи, що задовольняють вимогам (обмеженням), називають можливими або допустимими, а альтернативу, що досягає екстремуму (найбільше або найменше значення функції на заданій множині) критерію, – оптимальною стратегією (рис. 1.2).

Обмеженнями виступають витрати, а також способи використання ресурсів на здійснення певної альтернативи. Окрім витрат ресурсів, альтернативи характеризуються певним результатом і ймовірністю досягнення поставленої мети.

Вибір – це дія, завдяки якій процес прийняття рішень набуває цілеспрямованості, оскільки йому підпорядковуються і ОПР, і експерти.

Процес вибору може бути здійсненим у різних варіаціях залежно від кількості альтернатив, їх оцінки, режиму вибору, його наслідків, відповідальності за вибір, а також ступеня узгодженості дій.

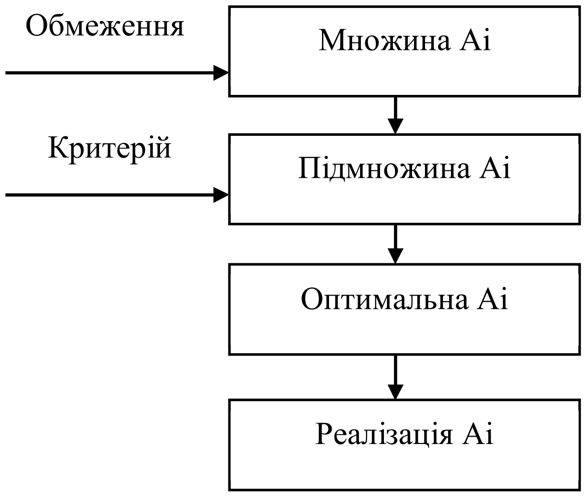


Рисунок 1.2 – Схема вибору оптимальної альтернативи

Оцінка та вибір альтернатив визначається мовами їх опису, серед яких виділяють три основні.

По-перше, критеріальна мова, яка дозволяє оцінити результат дії кожної альтернативи у вигляді певного критерію (конкретного числа), а після цього здійснити порівняння цих критеріїв. Найкращою вважається та альтернатива, яка, залежно від поставленої мети, має найбільші (найменші) значення критерію. Розрізняють одно- та багатокритеріальні альтернативи.

По-друге, мова бінарних відносин (від лат. binarius – подвійний), що передбачає оцінку кожної альтернативи не окремо, а в парі з іншою, і після цього робиться висновок: яка альтернатива переважає над іншою, альтернативи рівноцінні або взагалі не можуть бути порівняними між собою. На практиці такий спосіб є методом попарних порівнянь.

Припустимо, що є n альтернатив Ai (i = 1, …., n). Процес їх порівняння відображений на рисунку 1.3.

Основними припущеннями мови бінарних відносин є такі:

а) відсутність критеріальної функції;

б) для кожної пари альтернатив можна встановити наступні результати порівняння: переважання, рівноцінність або неможливість порівняти;

в) відношення переваги всередині будь-якої пари альтернатив не залежить від інших альтернатив, представлених для оцінки.

По-третє, мова функцій вибору, яка застосовується у ситуаціях, коли переваги між двома альтернативами залежить від інших альтернатив – вибір середнього, відмінного тощо.

Спосіб опису альтернативних варіантів рішення, вираження відмінності між ними (альтернативами) з погляду ОПР називають критерієм.

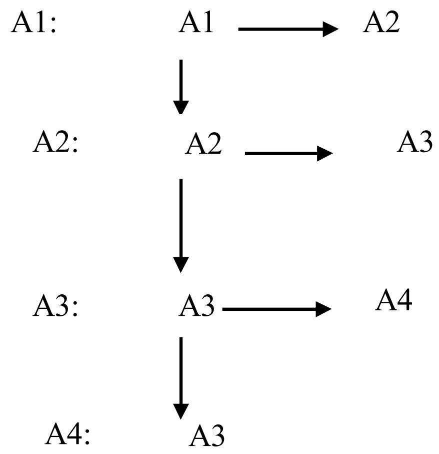


Рисунок 1.3 – Схема здійснення попарних порівнянь

Кількісні критерії, які дозволяють оцінювати результати прийнятих рішень, є критеріями ефективності. Прийняття кожного рішення завершується певним результатом, наслідки якого аналізують за оціночними критеріями. Тобто критерії – це ті показники, які характеризують загальну цінність рішень таким чином, що в ОПР з’являється прагнення отримати за ними найкращі з можливих оцінки.

До критеріїв висуваються такі вимоги:

– повнота (набір критеріїв має забезпечити адекватність поставленої мети прийняття рішення);

– чіткість (наявність однозначного формулювання);

– декомпозованість (можливість структуризації системи критеріїв);

– достатність (відсутність надмірної кількості);

– мінімальність (набір критеріїв має бути достатнім для здійснення оцінки);

– вимірність (критерій має надавати кількісну або якісну оцінку ступеня досягнення поставленої цілі).

Найзручнішими для аналізу є ті альтернативи, в яких вираженням ефективності є єдиний кількісний критерій, такий як величина доходу, сума витрат або інші. Такий єдиний критерій має назву скалярного, а сукупність критеріїв, за допомогою яких характеризується альтернатива, – векторний критерій.

Оцінка ефективності рішення одночасно за декількома критеріями є багатокритеріальністю.

## 1.4 Графічне зображення проблемної ситуації

Із давньогрецької мови «проблема» перекладається як перешкода, складність, завдання. У науковій літературі важко віднайти єдину думку щодо визначення цього поняття, однак можна виділити його основні характерні риси:

– обов’язковість вирішення;

– неповторність ситуації вибору;

– наявність певних складнощів при розгляді альтернатив розв’язання проблемної ситуації;

– невизначеність наслідків прийнятого рішення;

– необхідність брати до уваги значну кількість чинників;

– наявність людського чинника (ОПР або групи осіб, які приймають рішення), а отже, й суб’єктивності аргументацій стосовно прийняття рішень.

Внутрішня структура проблеми складається з таких елементів: предмет, об’єкт, суб’єкт, зв’язки, мета. Предмет проблеми – це головне протиріччя, яке виникло (у чому її суть). Об’єкт проблеми – це виявлення місця, де вона виникла. Суб’єкт проблеми – це той, хто має із нею зв’язок. Зв’язки проблеми характеризують міжелементні зв’язки (обмеження), так і зв’язок з іншими проблемами (з чим може бути пов’язана проблема?). Мета розв’язання проблеми – це відповідь на питання «для чого необхідно вирішувати цю проблему?». Кожен елемент проблеми може включати підпроблеми, тобто проблеми більш низького порядку.

Аналіз проблеми включає послідовність взаємопов’язаних кроків:

1) розділення проблеми на складники;
2) виділення основних і другорядних рис проблеми;
3) виявлення усіх причинно-наслідкових зв’язків за усіма можливими варіантами вирішення проблеми;
4) прогнозування та аналіз необхідних кроків;
5) розробка необхідних рекомендацій та дій.

Процес вирішення проблеми включає такі етапи (рис. 1.4).

Під час вирішення проблеми керівник має здійснити такі дії:

– визначити коло осіб, які здатні розробити й реалізувати способи її вирішення для того, щоб отримати позитивний очікуваний результат;

– визначити термін вирішення проблемної ситуації;

– оцінити та затвердити способи дій;

– виявлення необхідних ресурсів вирішення проблеми (трудових, фінансових та матеріальних).

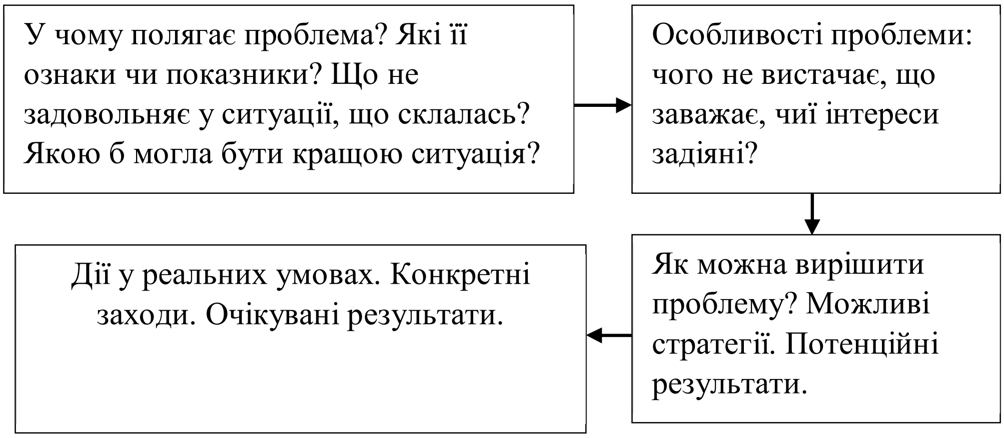


Рисунок 1.4 – Схематичний процес вирішення проблеми

Для більшої наочності проблему можна представити за допомогою прийому японського професора Ішікави («Фішбоун»), який запропонував відображати проблему у вигляді риб'ячого кістяка (рис. 1.5).

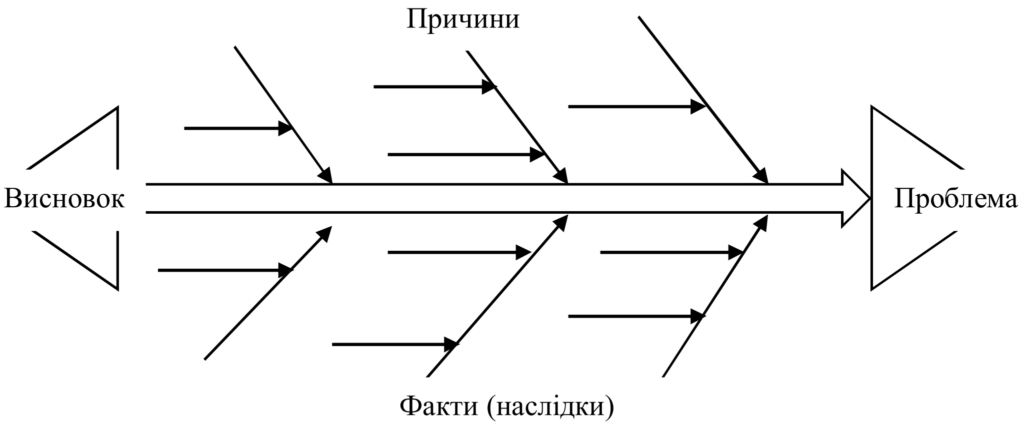


Рисунок 1.5 – Графічне зображення проблеми

Метод «Фішбоун» складається із чотирьох основних блоків, які представлені у вигляді голови, хвоста та кісток риби. Кожен блок відповідає за такі завдання:

– голова – це тема, питання або проблема, яка аналізується;

– верхні кістки – основні причини виникнення проблеми;

– нижні кістки – факти, які є підтвердженням певних причин або понять, які зазначені у схемі;

– хвіст – це висновки.

Найважливіші поняття розташовують ближче до голови.

# ТЕМА 2 АКСІОМАТИЧНІ ТЕОРІЇ РАЦІОНАЛЬНОЇ ПОВЕДІНКИ

## 2.1 Основна модель корисності в економіці. Види корисності

Уперше поняття «корисність» та близьку до нього категорію «задоволення» розпочали використовувати економісти, які аналізували поведінку споживачів. Концепція корисності ґрунтується на системі аксіом, за допомогою яких обґрунтовується існування самої функції корисності.

Модель корисності в економіці призначена для пояснення вектору споживання $Q = (Q_1, Q_2,..., Q_n)$, тобто набору благ, які споживає певна особа. Споживач обирає найкращій набір із множини доступних товарів за наступних обмежень.

По-перше, вектор Q має належати до множини допустимих розв'язків X, задану для кожного споживача, враховуючи обмеження, пов'язані з його діяльністю. У випадку, коли особа лише споживає, не виготовляючи товари або не надаючи послуги, у цьому випадку X є підмножиною $R^n$, яка складається із векторів з невід'ємними компонентами. Однак множина X може біти задана вужче, без врахування векторів, що не задовольняють базових потреб. Інакше кажучи, у моделі є можливість відображення ідеї прожиткового мінімуму (біологічного або обумовленого у суспільних угодах).

По-друге, у споживача є наявний дохід C, на суму якого він має купувати предмети споживання на ринку, на якому кожне благо j = 1, …, n має свою певну ціну $c_j$. Отже, вартість набору Q не може перевищувати суму доходу споживача C:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \times Q_j \leq C. \tag{2.1}$$

По-третє, переваги споживача між різними векторами, які здатні задовольнити потребу, описуються за допомогою функції $U = U(Q_1, Q_2, …., Q_n)$, яку він має на меті максимізувати. Ця функція має назву функції корисності або функції задоволення, що визначена на множині X. Значення цієї функції у точках, що є різними наборами благ, показують, наскільки ці набори задовольняють споживача. Нерівність:

$$U(Q_r) > U(Q_m). \tag{2.2}$$

Означає, що для споживача блага $Q_r$ переважають вартість $Q_m$. Споживач намагається обрати той набір, для якого значення корисності максимальне.

Стандартна модель мотивації у випадку прийняття рішень є наступною: якщо особа має вимогу Y, і можна припустити, що, виконуючи дію X, можна досягти результату Y, буде обрана дія X (за умови, що не існує жодної перешкоди для виконання дії X або сильнішої за Y вимоги). Доцільність визначається тим, які альтернативи або бажання повинні мати люди. Найбільш обґрунтований підхід до цієї проблеми – це теорія раціонального вибору, завдяки якій можна знайти найефективніші способи досягнення конкретних бажань.

Виділяють такі види корисності.

1. Експериментальна корисність, основні положення теорії якої можна визначити за допомогою наступних тез.

а) у кожний момент досліджується корисність, яка вимірюється біллю або задоволенням;

б) корисність має кількість та валентність, а також нейтральну точку, що розташовується між бажаним і небажаним, задоволенням і болем;

в) експериментальна корисність – це все добре або погане в експерименті;

г) сума миттєвих корисностей за певний період – це уся корисність за весь період (властивість адаптивності);

д) оптимальним є рішення із максимальною повною корисністю;

е) миттєва корисність має бути вимірною у порядковій шкалі.

Теорія експериментальної корисності пов'язана із трьома проблемами:

– залежна корисність;
– невизначеність походження функції корисності програми;
– остаточне ви пробування будь-якої корисності.

2. Залежна корисність. На думку економістів, корисність певної кількості товарів не залежить від того, яку корисність мають інші товари в наборі ($Q_1$, $Q_2$, …., $Q_n$). Загальна корисність набору представлена так:

$$U = U(Q_1) + U(Q_2) + \cdots + U(Q_n). \quad (2.3)$$

Це припущення не є реальним – наприклад, внесок кожного елемента пари (як приклад, скибки хліба та тостера) є сумою їхніх корисностей:

$$(u(\text{тостер}, \text{хліб}) = u(\text{тостер})|\text{хліб}) + u(\text{хліб}|\text{тостер}). \quad (2.4)$$

Важко віднайти повністю незалежні один від одного товари, саме тому повну корисність визначають як

$$\mathrm{U} = \sum_{i=1}^{n} U\left(Q_i \middle| Q_j\right), i \neq j, j = \overline{1, n} \quad (2.5)$$

Обчислити повну корисність таким способом практично неможливо. Крім того, набір споживання є ідеалізацією, оскільки єдиний набір споживача – це, імовірніше, теоретичне уявлення.

Миттєва корисність – сукупний продукт повного набору споживання у кожний момент часу. Як приклад, уявімо, що особа має набір споживання, що складається з трьох товарів. Для визначення миттєвої корисності необхідно знати відчуття особи у певний момент часу. Що сприяє цьому відчуттю й як сильно, немає потреби знати. Щоб визначити, наскільки товар сприятиме відчуттю задоволення, потрібно, додаючи його до набору персонального споживання, виміряти миттєву корисність до моменту отримання товару та після нього.

3 Міжперсональна порівняльність.

Уявімо, що вимірювання повної корисності проводиться за двох різних соціальних умов. Для кожної людини більша повна корисність означає кращу спільноту, отже, можна дійти до висновку, що у випадку, коли в спільноті А кожен має таку саму повну корисність, як й у спільнот і В, а принаймні одна особа в спільноті А має більшу корисність, ніж у В, то буде обрана спільнота А. Однак якщо у конфлікті існує дві думки, то навіть за умови знання повної корисності будь-кого, неможна прийняти єдине рішення щодо результатів. Існує припущення, що кожен має таку функцію корисності, для якої реалізація переваги менша за додаткову одиницю корисності, або що повені потреби є більш фундаментальними, ніж інші.

Мета теорії корисності – знайти об’єктивний показник ступеня «добробуту», що означаю краще або гірше дотримання певних умов. Це стосується як мінімум двох критеріїв:

– бажаний показник ступеня слід вимірювати або оцінювати так, щоб покращити прийняття рішення;

– бажаний показник, оцінений у такий спосіб, має бути представницьким.

Експериментальна корисність та корисність рішення пов’язані з першим критерієм. Корисність рішення має бути реалізована через вибір, а експериментальну корисність вимірюють через психофізичні методи. Саме тому будь-яке обговорення надає перевагу другому критерію і визначенню, на якій підставі вимірюється корисність для того, щоб отримати адекватні результати.

## 2.2 Поняття функції вибору. Класи функцій вибору

Система переваг децидента – це сукупність формальних, неформальних, статичних і динамічних правил та умов, які дають йому змогу вибрати одну або декілька альтернатив у певній ситуації прийняття рішень.

Отже, система переваг має як статичний складник, який не залежить від умов зовнішнього середовища і залишається постійним, відображає глибинні закономірності, за допомогою яких можна відкинути неперспективні альтернативи, так і динамічний складник, який є віддзеркаленням зміни переваг залежно від умов зовнішнього середовища, внутрішнього суперечливість уявлень децидента про найкращі альтернативи, тобто його суб’єктивність.

Під час порівняння альтернатив можуть виникнути ситуації двох типів:

1) децидент прийняв рішення, що альтернатива $x_i$ переважає (інакше кажучи, є кращою) альтернативу $x_j$;

2) децидент не може розрізнити за якістю альтернативи $x_i$ та $x_j$ (альтернативи рівнозначні, подібні або байдужі).

Таким чином, статичний складник системи переваг децидента модулюється за допомогою співвідношення «домінування – байдужість». Основним завданням децидента під час прийняття рішення є виділення однієї або декількох альтернатив. Якщо завданням є отримання максимального доходу, то найкращій альтернативі відповідає поняття максимум за певним відношенням переваги P або побудова множини «найкращих», але непорівняних між собою альтернатив. У такому випадку доцільно використовувати поняття мажоранти, а у разі мінімізації збитків – міноранти. Між цими поняттями існують певні взаємозв'язки.

Залежно від характеру системи переваг децидента змінюються й альтернативи, які обрані із пред'явлених для вибору у конкретній ситуації. Це зумовлено тим, що у тій самій ситуації уявлення різних осіб про найкращі альтернативи можуть суттєво відрізнятися. Дециденти раціонально обґрунтовують свій вибір. Варто зазначити, що бінарне відношення порівняння P, здійснене у конкретній ситуації, є правомірним лише для конкретного децидента та для певної ситуації. Сен цього висновку у тому, що за допомогою вибору у конкретній ситуації неможливо дійти певних висновків стосовно причин, які спонукали суб'єкта обрати саме ці альтернативи, а не інші.

Розглянемо певну підмножину X множини різних можливих альтернатив A ($X \subseteq A$) будемо обирати із альтернатив, які належать цій множині X.

Функція вибору C – це відображення, яке кожній $X \subseteq A$ ставить у відповідність підмножину $Y \subseteq X$ альтернатив, які обирає децидент

$$\mathrm{C}: \mathrm{X} \rightarrow У, \text{або } Y = C(X), C(X) \subseteq \mathrm{X}. \tag{2.6}$$

Функція вибору має задовольняти умові

$$(\forall Z \subseteq \mathrm{X}); x \in C(X) \cap \mathrm{Z} \Rightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{C}(Z). \tag{2.7}$$

Ця умова відповідає вибору «серед кращих» альтернатив. Іншими словами, вибір у конкретній ситуації кращих альтернатив із підмножини Z множини X альтернатив $C(X) \cap \mathrm{Z}$ (рис. 2.1), які водночас належать підмножині Z. Якщо $C(X) = \emptyset$, то формально можна вважати, що виникає ситуація відмови від вибору.

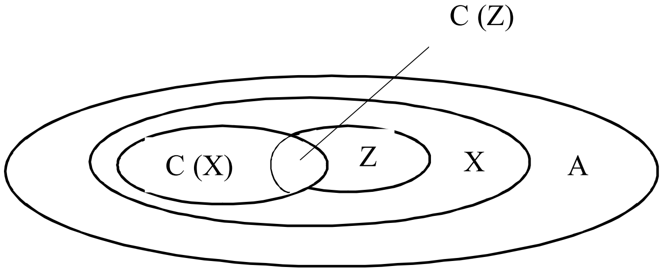


Рисунок 2.1 – Вибір серед набору альтернатив

У реальних задачах вибору одні альтернативи можуть виключати наявність у пред'явленні X інших або навпаки, у разі виникнення деяких альтернатив існую ті, що їх завжди супроводжують.

Функції вибору класифікуються згідно із виконанням певних умов або вимог, висунутих у процесі дослідження. Це може бути успадковування, незалежність від відкинутих альтернатив, узгодженість, незалежність вибору від шляху (квазісумарність), сумарність, мультиплікативність, монотонність.

Умова успадковування. Якщо здійснюється вибір із довільної множини A та її підмножини B ⊆ A, то всі альтернативи, обрані із множини A, які водночас належать до підмножини B, будуть обрані також у B. Наприклад, якщо студент D є найкращим студентом факультету, то він є також найкращим у групі або на потоці, де він навчається.

Умова незалежності від відкинутих альтернатив. Якщо вибір здійснюється з такої підмножини B довільної множини A, то B містить усі альтернативи, що є результатами вибору із множини A, вибір із підмножини B буде тотожний вибору з множини A. Отже, якщо D не є найкращим студентом, то склад переможців конкурсу не буде змінюватись від того, якщо він не братиме участі у ньому.

Умова узгодженості. Якщо альтернативи вибирають із усіх підмножин $A_i \subseteq A$, то вони будуть вибрані з їх перетину.

Умова незалежності вибору від шляху (квазісумарності). Вибір із об'єднання множин пред'явлень має бути тотожним вибору з об'єднання виборів із множин пред'явлення.

Якщо виконується умова квазісумарності, то для обрання найкращого студента потоку достатньо обрати найкращих студентів кожної групи, а потім обрати найкращого.

Умова сумарності. Вибір з об'єднання множин тотожний об'єднанню виборів із цих множин. Делегатів на конференцію обирають у підрозділах, оскільки множину делегатів утворює об'єднання виборів, здійснених у окремих підрозділах.

Умова мультикативності. Вибір із перетину множин тотожний перетину виборів із кожної множини окремо.

Умова монотонності. Вибір із більшої множини не менший, ніж із її підмножини.

Ці умови відображаються й у логічній формі функції вибору, яка використовується для проведення деяких тверджень.

Отже, за допомогою поняття функції вибору, з'являється можливість сформулювати низку умов, які мають виконуватися для забезпечення процедури раціонального вибору – вибору «кращих» у певному сенсі альтернатив.

Однією із найважливіших у побудові вибору є задача синтезу. Її зміст полягає у синтезі за функцією вибору (зазвичай, неповною) механізму вибору певного класу, що її реалізує. Оскільки функція вибору частіше за все є частковою та ґрунтується на експериментальних даних, а механізм вибору має бути придатним у довільних ситуаціях, то він має задовільно прогнозувати вибір і у тих ситуаціях, яких не було в експерименті. Як демонструє досвід, із цим справляються краще моделі механізмів вибору з невеликою складністю. Під час синтезу необхідно використовувати додаткову інформацію, яку можна отримати від децидента, а також певні напівформальні вимоги (рівновага, справедливість, компромісність).

Якщо є функція вибору С не може бути реалізована механізмами вибору заданого вигляду, то виникає проблема її апроксимації, тобто пошуку найкращого наближення до неї у певному розумінні. Якщо вводити певну метрику недоцільно або це неможливо, достатньо обрати верхнє та нижнє найкраще наближення – верхню та нижню апроксимації. Вони задаються через мажоранти та меморанти функцій неповного вибору.

Аналогічні задачі апроксимації можна ставити та розв’язувати не лише для функцій, а також для механізмів вибору.

Велике значення у дослідженні механізмів вибору мають характеристики їхньої складності. Їх виявлення зазвичай зводиться до отримання асимптотичних оцінок для певних суттєвих параметрів механізмів вибору. Ці оцінки отримуються конструктивно, що дозволяє використати їх при розробці та оптимізації конкретних процедур, а також прогнозувати орієнтовну складність реалізації того чи іншого механізму вибору. Задача синтезу також може мати багато варіантів розв’язку, тому що по одній і тій самій функції вибору можуть відповідати багато механізмів, які її реалізують.

Для досягнення певної однозначності до синтезованого механізму пред’являються додаткові вимоги, що мають відношення до складності. До найпростіших мір складності можна віднести такі:

– для вибору на ґрунті відношення – кількість пар, що його складають;

– для механізму послідовного вибору – кількість відношень (глибина вибору);

– для багатокрокових схем – кількість кроків.

Серед проблем оптимізації найбільш важливою є проблема оптимального синтезу й оптимізації вибору.

Метою оптимального є побудова механізму вибору з мінімальною складністю. Для більшості випадків не знайдено ефективних рішень. Тому вимоги до методів синтезу ослаблюють і ставлять задачу розробки методів синтезу, які забезпечують гарантовану оцінку складності реалізації функції.

У процесі дослідження та застосування механізмів і функцій вибору доводиться розв’язувати наступні основні завдання:

– аналізу;

– синтезу;
– апроксимації реального вибору децидента;
– оцінювання складності реалізації механізмів вибору;
– оптимізації механізмів вибору.

## 2.3 Постулати раціонального вибору в економіці

Одним із основних постулатів економічної науки є припущення, що людина робить свій вибір раціонально. Це означає, що прийняття рішення людиною є результатом упорядкованого процесу мислення.

Величина, яку особа з раціональним економічним мисленням максимізує у процесі вибору, називається корисністю. Інакше кажучи, корисність – це уявна міра психологічної та споживчої цінності благ.

Існують приклади, коли благо є таким для окремої особи, але для суспільства таким не є. Унаслідок цього виникає проблема: чи потрібно обмежувати особу у можливості обрання благ (наприклад, за допомогою медичних та інших рецептів)? Для таких випадків у різних країнах діють свої закони та приписи.

У свою чергу корисність розглядають як властивість блага, завдяки якому особа обирає його для задоволення своїх потреб. Вимірюють фізичні, хімічні та інші природні властивості благ, проте безпосередньо корисність виміряти більш складно.

Блага можна класифікувати за різними ознаками: за здатністю задовольняти потреби особи (матеріальні та духовні) за способом виникнення – природні та виготовлені. Переважна більшість благ є в обмеженій кількості, саме ці блага називають економічними. Такими є і виготовлені блага, що визначає зміст їхнього виробництва. Однак існують і природні блага (вода, ліс, корисні копалини), які у чималій кількості випадків теж можна вважати економічними. Як приклад охарактеризуємо повітря, яке є економічним благом, оскільки його кількість у чистому вигляді обмежена, і людство спрямовує кошти на його очищення.

Вважається, що зі зростанням кількості блага діє закон зниження граничної корисності (закон Ґоссена), тобто зі збільшенням кількості блага його гранична корисність знижується. Правдивість цього постулату підтверджується спостереженнями за споживачами. У випадку, коли річ є благом для людини, і це благо відсутнє, відчувається постійна потреба у ньому. Перша «порція» блага надає найбільше задоволення, а кожна наступна «порція» із тим самим обсягом – все менше задоволення.

Поведінка споживача на ринку товарів і послуг залежить від таких пунктів:
– можливості благ;
– ненасиченості;

– транзитивності;
– незалежності;
– взаємної замінності та взаємного доповнення благ;
– досконалої конкуренції;
– докладної інформації;
– обмеженості доходу;
– максимізації корисності.

# ТЕМА 3 БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

## 3.1 Способи перетворень бінарних відношень і дії над ними

Бінарні відношення є теоретичним підґрунтям теорії прийняття рішень, оскільки для дослідження переваг ОПР використовують основні типи бінарних відношень, а властивості бінарних відношень інтерпретуються якісно у термінах системи переваг ОПР. Доведені твердження дають можливість побудувати алгоритм перевірки експериментальних відношень на наявність таких важливих властивостей, як транзитивність, ациклічність, лінійність, для того, щоб виявити та корегувати суперечності у судженнях ОПР. Факторизація відповідає процедурі агрегування системи переваг ОПР та дає змогу досліджувати її загальні властивості й корегувати отримані відношення. Апарат функцій вибору виявляється зручним для формулювання змістовних властивостей, у разі дотримання яких вибір можна вважати «розумним», «несуперечливим», «раціональним», і дослідження та формалізації різноманітних принципів вибору.

Основними задачами дослідження та застосування механізмів вибору є аналіз, синтез, апроксимація реального вибору ОПР та їх оптимізація.

Відношенням називають твердження, яке відображає взаємний зв’язок між двома або більшою кількістю об’єктів. При розгляді деяких пар об’єктів можна обрати кращий із них. У таких випадках говорять, що об’єкти перебувають у бінарному відношенні.

Розглянемо деякі вислови, що виражають взаємозв’язки між об’єктами.

1) Тетяна старша за Ігоря.

2) Київ розташований південніше Москви.

3) Фірма А та В збиткові.

4) Іван – брат Петра.

5) Залізо важче за воду.

Як можна побачити, всі вислови описують відношення різного типу: друге і четверте означають, що два об’єкти належать до одного й того самого класу;

перший, третій і п'ятий відображають порядок у системі. Крім того, у всіх п'яти прикладах чітко виділено назви об'єктів і назви відношень.

Якщо замість однієї назва об'єкта підставити іншу, можливі наступні ситуації:

1) відношення знову буде виконано (Київ розташований південніше від Мурманська);

2) відношення не буде виконуватися (Київ розташований південніше від Одеси);

3) відношення не буде мати сенсу (залізо розташоване південніше води).

Отже, говорити про відношення ми можемо тільки тоді, коли вміємо виділяти множину об'єктів, на якій воно визначене. Математично визначення відношення можна сформулювати таким чином.

Відношенням R на множині Ω×Ω, тобто $R \subset \Omega^2$. Завдання підмножини R у множині Ω×Ω визначає, які саме пари елементів перебувають у відношенні R.

Відношення R, задане на множині Ω, позначимо як (R; Ω). Тут і далі записи xRy або $(x, y)$ ∈R означають, що елементи x та y у множині Ω перебувають у відношенні R.

Виділяють наступні види бінарних відношень:

– рефлексивне транзитивне відношення – відношення квазіпорядку;

– рефлексивне симетричне транзитивне відношення – відношення еквівалентності;

– рефлексивне антисиметричне транзитивне відношення – відношення часткового порядку;

– повне актисиметричне (для будь-яких x, y виконується xRy або yRx) – транзитивне відношення лінійного порядку;

– антирефлексивне антисиметричне відношення – відношення домінування.

## 3.2 Властивості та основні типи бінарних відношень

Відношення R на множині A називають рефлексивним, якщо для будь-якого a ∈ A виконується (a, a) ∈ R.

Відношення R на множині A називають іррефлексивним, якщо для будь-якого a ∈ A виконується (a, a) ∈ R.

Відношення R на множині A називають симетричним, якщо для будь-яких a, b ∈ A виконується (a, b) ∈ R, і як наслідок, (b, a) ∈ R.

Відношення R на множині A називають антисиметричним, якщо для всіх a, b ∈ A виконується (a, b) ∈ R, і як наслідок, (b, a) ∈ R, а також випливає, що a=b. Інакше кажучи, відношення антисиметричне, якщо у разі a≠b воно не містить пар (a, b) та (b, a) одночасно.

Відношення R на множині A називають асиметричним, якщо для всіх a, b $\in$ A виконується (a, b) $\in$ R, і як наслідок, (b, a) $\notin$ R.

Відношення R на множині A називають транзитивним, якщо для будь-яких a, b і c $\in$ A із того, що (a, b) $\in$ R $\wedge$ (b, c) випливає (a, c) $\in$ R.

Матриця рефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – одиниці, а матриця іррефлексивного відношення – тим, що зазначені елементи є нулями. Матриця антисиметричного відношення характеризується тим, що нема жодної пари одиниць на місцях, симетричних до головної діагоналі. Матриця асиметричного відношення має таку ж властивість до того ж всі елементи її головної діагоналі – нулі.

Розглянемо шість відношень на множині A = {1, 2, 3, 4}:

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$;

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$;

$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$;

$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$;

$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$;

$R_6 = \{(3,4)\}$.

Знайти властивості цих відношень.

Відношення $R_3$ та $R_5$ – рефлексивні, оскільки вони містять усі пари вигляду (a,a), тобто (1,1), (2,2), (3,3), (4,4). Решта відношень не є рефлексивними, зокрема, $R_1$, $R_2$, $R_4$, $R_6$ не містять пари (3,3).

Відношення $R_4$ та $R_6$ – іррефлексивні, оскільки вони містять усі пари вигляду (a,a), тобто (1,1), (2,2), (3,3), (4,4).

Зауважимо, що $R_1$, $R_2$ є ні рефлексивними, ні іррефлексивними.

Лише відношення $R_2$, $R_3$ симетричні, тому що містять тільки симетричні елементи.

Лише відношення $R_4$, $R_5$, $R_6$ є антисиметричними. У кожному із цих відношень немає таких пар елементів a та b ($a \neq b$), що одночасно (a, b) $\in$ R та (b, a) $\in$ R.

Є також відношення, які не є симетричними, ані антисиметричними. Прикладом такого відношення є $R_1$.

Зрозуміло, що будь-яке асиметричне відношення повинно бути й антисиметричним. Обернене твердження неправильне. Відношення $R_5$ є антисиметричним відношенням, яке не є асиметричним через те, що воно містить пару (1,1).

Відношення $R_3$, $R_5$, $R_6$ із є транзитивними. Для кожного з них можна пересвідчитись, що якщо пари (a, b) та (b ,c) належать цим відношенням, то й пара (a, c) теж їм належить. Відношення $R_1$, $R_2$, $R_3$ не є транзитивними: $(3,4) \in R_1$, $(4,1) \in R_1$, але $(3,1) \in R_1$; $(2,1) \in R_2$, $(1,2) \in R_2$, але $(2,2) \in R_2$; $(2,1) \in R_3$, $(1,4) \in R_3$, але $(2,4) \in R_2$.

## 3.3 Подання системи переваг бінарними відношеннями

Основні результати теорії впорядкованих множин дають змогу обґрунтувати процедури створення та модифікації системи переваг децидента.

Аксіома вибору. Якщо X – об’єднання множин $X_i$, $i = 1, \ldots, n$, що не перетинаються, то існує щонайменше одна підмножина $Y \subseteq X$, перетин якої з кожною множиною $X_i$ одноелементний.

Розглянемо важливі для прийняття рішень поняття max та min, а також major і minor ха певним відношенням R.

Елемент $x \in A$ – множина-носій відношення R, називається його max, якщо для $\forall y \in A{:}\, xRy$ , тобто для всіх $xRy$ елементів множини-носія A.

Елемент $x \in A$ – множина-носій відношення R, називається його min, якщо для $\forall y \in A{:}\, yRx$ , тобто для всіх $yRx$ елементів множини-носія A.

Елемент $x \in A$ – множина-носій відношення R, називається його major, якщо для $\forall y \in A{:}\, y\overleftarrow{R}x$ де $\overleftarrow{R}$ – доповнення до відношення R, тобто $y\overleftarrow{R}x$ всіх елементів множини-носія A.

Елемент $x \in A$ – множина-носій відношення R, називається його minor, якщо для $\forall y \in A{:}\, x\overleftarrow{R}y$ де $\overleftarrow{R}$ – доповнення до відношення R, тобто $x\overleftarrow{R}y$ всіх елементів множини-носія A.

Множина A називається впорядкованою за відношенням строго порядку D (транзитивним і симетричним), якщо вона є носієм цього відношення $D \subseteq A \times A$

Надалі впорядковану множину називають мажорантою підмножини $X \subset A$, якщо він є мажорантою звуження відношення D на множині X.

Впорядкована множина називається індуктивною, якщо кожна підмножина X, яка є ланцюгом, має мажоранту.

Лема Куратовського – Цорна. В індуктивній упорядкованій множині для кожного елемента існує мажоранта.

Зручний і точний спосіб подання впорядкованих множин – діаграми Гассе. На них кожен елемент зображено точкою площини. Якщо елемент y над x, то точки x та y сполучені відрізком, до того ж точка, яка відповідає елементові x, має бути нижче за y.

Елементи множини A зображають точками площини, до того ж для таких елементів x, y ∈ $P$: $xPy$, точка, що відповідає елементові x, знаходиться вище, ніж та, яка відповідає y. Ці точки потрібно з'єднати відрізком. Отже, якщо в діаграмі в напрямку «вниз» є шлях від x до z, то xPz. Дуг, що відображають транзитивність відношення P, не наводять.

Нехай, $A = \{1,2,3\}$. На множині всіх підмножин A розглянемо відношення «бути підмножиною».

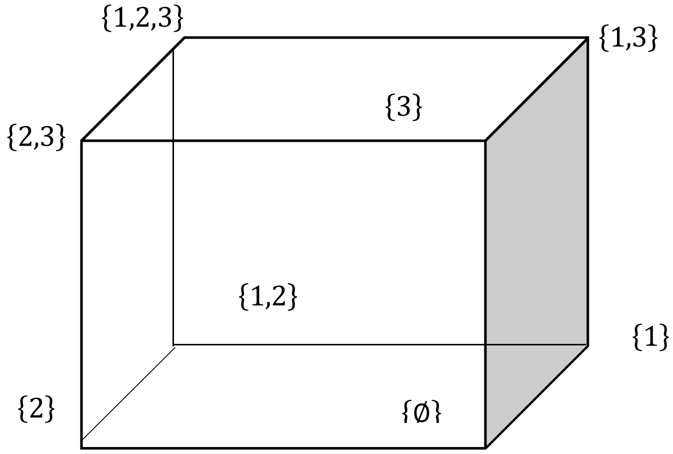


Рисунок 3.1 – Діаграма Гассе для прикладу 1

Нехай $A = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. На множині A розглянемо відношення «ділиться».

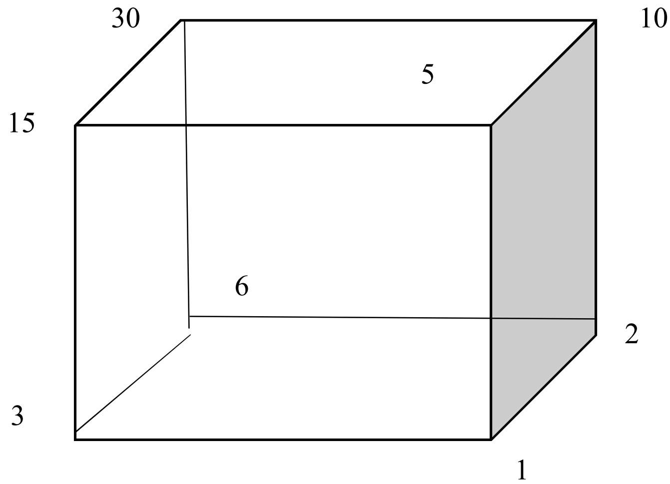


Рисунок 3.2 – Діаграма Гассе для прикладу 2

Як видно із рисунків, діаграми Гассе для відношень прикладів 1, 2 не збігаються. Це означає, що ці частково впорядковані множини мають однакову структуру, тобто є ізоморфними.

### 3.4 Структура «домінування – байдужість»

Відношення переваги включає два аспекти:

– перевага (домінування, переважання);

– байдужість (індиферентність, толерантність).

Саме тому визначають два відношення між об’єктами, які надалі будемо називати відношенням домінування та байдужості.

Як приклад наведемо турнір із шахів, у якому результат зустрічі двох учасників – виграш одного з них або нічия. На множині учасників турніру задають відношення домінування та байдужості: a домінує над b – означає, що a виграв у b; a та b байдужі означає, що вони зіграли внічию.

Позначимо через α відношення домінування, а відповідно ß – відношення байдужості.

Ця структура має наступні властивості.

1. Відношення домінування α асиметричне.

2. Не може бути такого, щоб, наприклад, на тенісному турнірі учасник a переміг учасника b й b переміг a, щоб кандидат a зібрав більше голосів, ніж кандидат b, а b – більше, ніж a (в одному й тому самому турі голосування). Отже, $a \cap a^{-1} = \emptyset$.

3. Відношення байдужості ß симетричне.

4. Якщо учасник a зіграв внічию з учасником b, то й b зіграв унічию з a; якщо вік особи a близький до віку особи b, то й вік b близький до a. Тому $\beta^{-1} = \beta$.

5. Жодна пара об’єктів не належить водночас до відношень домінування та байдужості, тобто $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

6. Кожен об’єкт байдужий до самого себе, тобто відношення ß рефлексивне. Ця властивість має швидше характер угоди, оскільки об’єкт не порівнюють сам із собою. ознака цілком відповідає змісту, який зазвичай вкладають у поняття байдужості.

# ТЕМА 4 ПАРАДОКСИ ЕКОНОМІЧНОГО ВИБОРУ

### 4.1 Парадокси Адама Сміта, Карла Менґера, Моріса Аллє. Дилема генерала

Парадокс Адама Сміта. На запитання «від чого залежить ціна блага для споживача?» на перший відповідь знаходиться на поверхні. Відповідь – «від корисності», і це логічно: чим вище корисність блага, ти більшу суму людина готова заплатити за нього. І це твердження ставиться під сумнів завдяки парадоксу А. Сміта: «що корисніше для людини – вода чи алмаз?». Відповідь очевидна – вода.

Без неї людина гине, а без алмазу може жити, незважаючи не те, що алмаз значно дорожчий.

А. Сміт розв’язав цей парадокс у такий спосіб: води багато, а алмазів мало, тому вони трапляються набагато рідше, ніж вода. Безумовно, корисність усієї води більша, ніж корисність усіх алмазів, і якщо людину поставити перед вибором «вода або алмази», вона обере воду й буде готова заплатити за неї найвищу ціну, оскільки це ціна її життя. Однак коли говорять про одиницю води й алмазу, виникає зовсім інший вибір: скільки людина готова заплатити за додатковий літр води та додатковий карат алмазів. Зазвичай людині доступно багато води та мало алмазів, тому вона готова платити значно вищу ціну за алмази. Якщо ми змінимо умови вибору, уявивши, що людина перебуває в пустелі та не має ані води, ані алмазів. І якщо запропонують літр води або один алмаз, то вибір буде зроблений на користь води.

Висновок із парадоксу А. Сміта полягає у тому, що ціна одиниці блага для споживача залежить від граничної корисності.

Парадокс Карла Менґера. Уявімо, що у пустелі живе самітник, який періодично відвідує інших людей для того, щоб купити продукти харчування. Основа його харчування зерно, яке він може придбати від одного до п’яти мішків залежно від ціни на ринку.

Корисність першого мішка – це ціна життя самітника, тому що у разі придбання цього мішка він зможе прожити до наступної поїздки. Корисність другого мішка – це сите життя, удосталь хліба. А третій мішок самітник може використати для того, щоб виростити порося й отримати м’ясо, а з четвертого – зварити пиво. П’ятий мішок потрібен самітнику для того, щоб годувати пташок.

Запитання таке: від якого мішка залежить ціна, яку готовий заплатити самітник на ринку за кожен із п’яти мішків зерна?

Зрозуміло, що ціна на ринку не залежить від самітника. Якщо вона є високою, то за єдиний мішок він готовий віддати все, що є у нього, оскільки це його життя. Якщо ціна на ринку зменшиться, то оцінка самітником корисності кожного наступного мішка знизиться.

Відповідь така. Оскільки на ринку всі мішки зерна коштують однаково, то самітник заплатить однакову ціну за кожен мішок, і корисність усіх мішків є однаковою. Якщо самітник купить усі п’ять мішків, то корисність будь-якого із них залежить для нього від корисності п’ятого мішка (задоволення годувати пташок), тобто граничної корисності п’яти мішків. Отже, ціна, яку споживач готовий заплатити за одиницю певного блага, залежить від граничної корисності цього блага.

Гроші самі собою не задовольняють потреб людини, однак за них можна придбати блага, які мають певну корисність. Тому корисність певної суми грошей дорівнює корисності благ, які можна придбати за них. Функція корисності грошей така ж сама, як і товарів, які можна придбати за них: 1 000 грн вкрай корисні для того, хто не має високого доходу , і майже нічного не варті для мільйонера.

Парадокс Аллє. Французький учений Аллє запропонував розглянути наступну лотерею. На рисунку 2.2 децидент може обрати одну альтернативу із двох: отримати 1 000 000 (альтернатива А) або погодитись на лотерею, у якій ймовірність виграшу 5 000 000 становить 0,1; 1 000 000 – 0,89, а ймовірність нічого не виграти – 0,01 (альтернатива В).

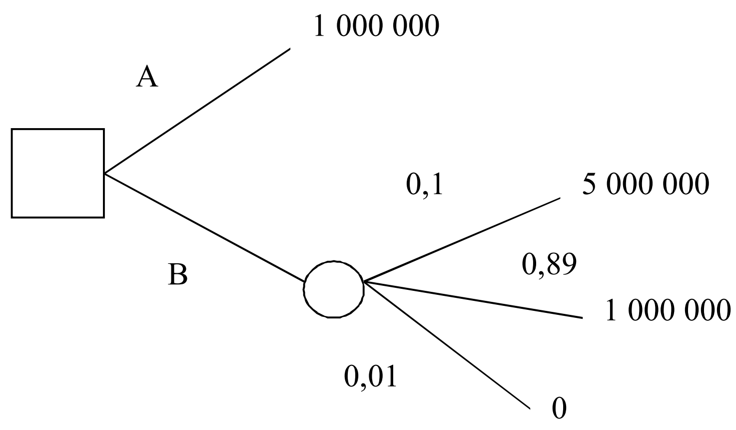


Рисунок 4.1 – Парадокс Аллє

Переважна більшість людей обере альтернативу А, хоча середній виграш для альтернативи В є більшим. Максимально можливий виграш складає 5 000 000, а мінімальний – 0, отже, U(5) = 1 та U(0) = 0, а невідоме значення корисності U(1) = U. Оскільки у цьому випадку переважна більшість віддасть перевагу альтернативі А, то

$$U > 0{,}1\times 1 + 0{,}89 \times U \qquad (2.8)$$

Тобто $U > \frac{10}{11}$

Дилема генерала. Одним із найвідоміших прикладів нераціональної поведінки особи – «дилема генерала», зміст якої полягає у наступному. Генерал програв війну і має намір вивести своє військо у кількості 600 осіб із території противника. Він може зробити це одним із двох шляхів, а попередня розвідка надала інформацію про очікувані втрати у разі обрання зазначених маршрутів.

Можливості виведення війська проілюстровані на рисунку 4.2, на якому їх подано в еквівалентних з погляну корисності варіантах а (виграші) та б (втрати).

У випадку, коли для оцінювання представлено варіант а, більшість осіб обирають шлях 1, уникаючи лотереї, коли можуть загинути всі особи. Якщо для оцінювання взяти варіант б, більшість обирають шлях 2, де із ймовірністю 1/3 можна зберегти весь особовий склад.

На основі спостережень можна визначити основні нюанси, які допомагають зрозуміти причини відхилень осіб від раціональної поведінки: твердження за представництвом, кількістю подій, точкою відліку, наддовіра, прагнення до уникнення ризику.

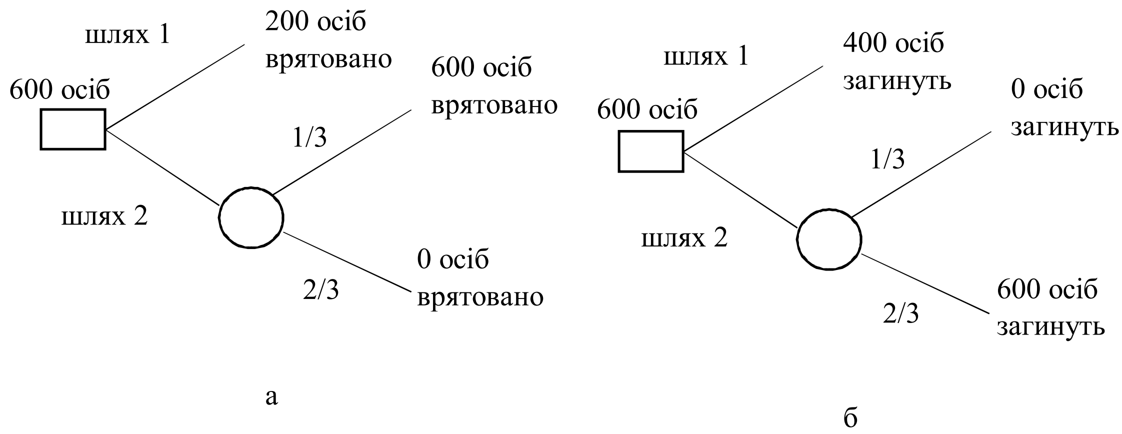


Рисунок 4.2 – Дилема генерала

Це дозволило сформулювати основні причини нераціональності поведінки осіб, які приймають рішення:

– недостатня інформованість децидента у процесі вибору рішення;

– прагнення децидента знайти рішення, оптимальне за декількома критеріями, які впорядковано за важливістю, і неспроможність це зробити;

– відмінність між часом, об’єктивно необхідним для реалізації, і тим, що запланував сам децидент.

### 4.2 Задача з вазами

Теорія корисності експериментально досліджувалась у так званих задачах з вазами (або урнами). Ваза – це непрозора ємність, у якому знаходиться певна (відома лише організатору експерименту) кількість кульок різного кольору. Задачі з вазами типові для групи найпростіших задач прийняття рішень – задач статистичного типу. Для їхнього розв’язання потрібно знати основи теорії ймовірності.

Людина робить вибір у тих задачах, ґрунтуючись на розрахунках. Варіанти дій виражені у найпростішому вигляді.

Типова задача може бути представлена в такий спосіб. Перед особою ставиться ваза, яка може бути вазою першого або другого типу. Надається наступна інформація: які виграші очікують особу, якщо вона вгадає, якого типу ваза; які втрати очікують її, якщо буде зроблено помилку. Після отримання такої інформації особа має зробити висновок: чи озвучити, до якого типу належить поставлена перед нею ваза.

Наприклад, експериментатор випадково обирає вазу для особи із множини, що має 700 ваз першого типу і 300 ваз другого типу. Якщо перед особою знаходиться ваза першого типу, і він вгадає це, то отримує виграш 350 грошових одиниць, якщо не вгадає, то програш становитиме 50 грошових одиниць. Якщо перед нею ваза другого типу, і він вгадає, то отримає виграш 500 гр. од., якщо не вгадає, його програш становитиме 100 гр. од. Приймемо, що корисність для особи дорівнює якості грошових одиниць. Особа може здійснити одну із наступних дій: $d_1$ – сказати, що ваза першого типу, $d_2$ – сказати, що ваза другого типу.

Умови задачі можна представити у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Представлення задачі з вазами

| Тип вази | Ймовірність вибору вази даного типу | Дії та виграш | |
|---|---|---|---|
| | | $d_1$ | $d_2$ |
| 1 | 0,7 | 350 | -100 |
| 2 | 0,3 | -50 | 500 |

Який вибір здійснити особі? Теорія корисності дає на це відповідь: оцінити середню (очікувану) корисність кожної із дій та обрати дію з максимальною очікуваною корисністю. Відповідно до цієї рекомендації ми можемо визначити середнє значення виграшу для кожної із дій:

$U(d_1) = 0{,}7 \times 350 - 0{,}3 \times 50 = 230$ гр. од.

$U(d_2) = 0{,}3 \times 500 - 0{,}7 \times 100 = 80$ гр. од.

Таким чином, раціональна особа обере дію $d_1$, а не $d_2$.

Із цього прикладу можна сформулювати загальний механізм дій раціональної особи: визначити результати, помножити їх на існуючі ймовірності, отримати очікувану корисність та обрати дію із найвищою корисністю.

# ТЕМА 5 ПСИХОЛІНГВІСТИЧНІ АСПЕКТИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

## 5.1 Дослідження короткотермінової та довготривалої пам’яті

Пам’ять є особливою формою психічного відображення дійсності, яка полягає у закріплення, збереженні та наступному відтворенні інформації у живій системі. У пам’яті залишаються не окремі інформаційні елементи, а цілісні сукупності знань, що надають можливість всьому живому здобувати, зберігати й використовувати великий запас відомостей з метою ефективного пристосування до навколишнього світу.

Пам’ять, як результат навчання, пов’язана із такими змінами у нервовій системі, які зберігаються протягом деякого часу й істотно впливають на подальшу поведінку живого організму. Комплекс таких структурно-функціональних змін пов’язаний із процесом утворення енграм – слідів пам’яті.

Пам’ять виступає як певним своєрідний інформаційний фільтр, оскільки у ній обробляється та зберігається лише незначна частка від загального обсягу подразників, що впливають на організм. Без добору та витіснення інформації з пам’яті жива істота була б перенасичена нескінченним потоком зовнішніх подразників.

Пам’ять виступає також як своєрідний інформаційний фільтр, оскільки в ній обробляється й зберігається лише незначна частка від загального числа подразників, що впливають на організм. Без добору й витиснення інформації з пам’яті жива істота була б «затоплена» нескінченним потоком зовнішніх подразників.

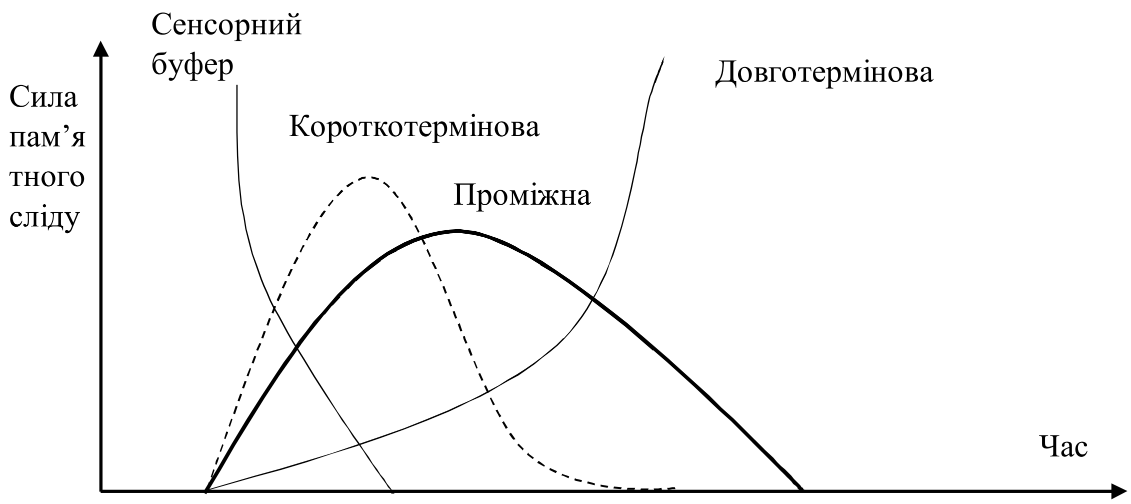


Рисунок 5.1 – Часова організація пам’яті. Гіпотеза множинного сліду в пам’яті

Найбільш популярною є концепція часової організації пам’яті, автором якої є Д. Хеббу. Автор виділив за тривалістю збереження та відтворення інформації:

1. короткотермінову (секунди – хвилини); у межах короткотермінової пам’яті, виходячи із фізіологічних особливостей та механізмів виділяють: а) сенсорну і б) робочу пам’ять;

2. довготермінову (дні – роки) пам’ять.

Короткотермінова пам’ять характеризується обмеженим існуванням у часі, сліду у ній лабільний, нестійкий. Об’єм одночасного зберігання інформації обмежений, тому більш пізні сліди витісняють більш ранні.

Сенсорна пам’ять є одним із перших етапів сприйняття інформації і триває 0,1–0,5 с, наприклад, якщо махнути рукою перед очима, можна побачити слабкий слід, що залишається після того, як руку буде опущено.

Закривши очі, ми ще якийсь час «бачимо» все, шо сприймали до цього. Слід події, яка тільки що відбулась, є безпосереднім свідченням сенсорної пам'яті. Об'єм сенсорної пам'яті не дуже великий, і кожна сенсорна модальність (зорова, слухова, тактильна та ін.) має власну систему запам'ятовування. Припускається, що сенсорна пам'ять відіграє надзвичайно важливу роль, оскільки дозволяє відібрати для подальшої обробки і зберігання лише суттєву інформацію.

Ерхоїчна (сенсорна пам'ять на слухові сигнали), утримує слід звукового стимулу близько 12 секунд.

Іконічна (сенсорна пам'ять на зорові стимули). Ємність іконічного зберігання – близько 9 елементів при утриманні сліду від зорового стимулу 250 мс.

Робоча пам'ять – це один із видів короткотермінової пам'яті, який характеризується тим, що ця пам'ять пов'язана із короткочасним утриманням інформації. Об'єм короткотермінової робочої пам'яті тієї або іншої людини визначають, коли обстежуваному представляють певний ряд цифр, не пов'язаних між собою слів чи складів, а потім просять їх відтворити через незначний проміжок часу. У цих випадках кількість відтворених цифр, слів або складів дорівнює приблизно 7–9. Такий об'єм робочої пам'яті є фізіологічною причиною появи «магічного» числа 7, що є атрибутом багатьох прислів'їв.

Довготривала пам'ять – це перехід енграми у стійкий стан. Процес переходу з короткотермінової пам'яті довготривалу пам'ять – процес консолідації пам'яті. Енграма у довготривалій пам'яті стійка, час її зберігання необмежений, так само, як і обсяг інформації, що зберігається.

Порівнюючи функції короткотермінової і довготривалої пам'яті, можна сказали, що у короткотерміновій пам'яті ми «живемо», а у довготривалій – зберігаємо знання. Звернення до минулого досвіду, який необхідний, щоб дату оцінку сьогоденню, – це функція довготривалої пам'яті.

## 5.2. Психологічні теорії поведінки особи при прийнятті рішень

Психологічний підхід до прийняття рішень ґрунтується на таких основних теоріях, як пізнання та психоаналітична теорії мислення.

Теорія пізнання підкреслює особливу роль у поведінці знанням. Наприклад, споживач оцінює чинники, що впливають на нього, виходячи із наявного досвіду і власних цільових установок.

Психоаналітична теорія – теорія З. Фрейда – розглядає психічне життя людини, як багаторівневе явище, глибинним рівнем якого є підсвідоме. За Фрейдом, організація психічного життя спирається на психічні інстанції: Воно, Я (Его), Над-Я (Супер-Его).

Воно – найбільш примітивна інстанція, що охоплює все вроджене, генетично первинне. Я (Его) підпорядковується принципу реальності, розробляючи ряд механізмів, що дозволяють адаптуватись з його вимогами. Супер-Его – результат впливу з боку інших людей. Від напруження, яке є результатом тиску інших сил, Я (Его) рятується за допомогою спеціальних «захисних» – витіснення, раціоналізації, регресії, сублімації тощо.

Тривалий час економіка та психологія були абсолютно розділені. На думку економістів, що люди при прийнятті рішень міркують раціонально, натомість психологи вважали, що вигода та витрати представляються ірраціональними та залежать від особливостей психіки. Однак останнім часом набувають популярності такі наукові напрями, як «нейромаркетинг», «нейроекономіка», «біхевіористична економіка», для чого важливу роль зіграли психолог Даніел Канеман, який став лауреатом Нобелівську премію з економіки.

Основою моделі Д. Канемана є виділення двох різних систем мислення, які визначають нашу поведінку та вибір. Автор назвав їх «система 1» (Автопілот) та система 2 (Пілот) (рис. 5.2).


Рисунок 5.2 – Схема прийняття рішення, шляхом взаємодії двох систем

Система «Автопілот» об’єднує сприйняття та інтуїцію, вона активна і швидко обробляє інформацію паралельними потоками на основі асоціацій.

Інша система – «Пілот» – повільна, працює крок за кроком, енерговитратна та гнучка.

«Автопілот» зв’язується із зовнішнім світом через органи чуття. Під час набуття нових навичок у людини спочатку спрацьовує система «пілот», проте із накопиченням досвіду певні дії стають автоматичними (наприклад, водіння автомобілю), і тоді, при їх виконанні, вмикається «автопілот». Процес прийняття рішення – це спільна робота обох систем. Продуктивність «автопілоту» складає приблизно 11 000 000 біт на секунду (7 +/− 2 елементи інформації). Типова тривалість рекламного ролику свідчить про те, що реклама сприймається не повільним «пілотом».

Завдяки високій продуктивності «автопілот» здатен обробляти практично всі сигнали навколишнього середовища, що дозволяє використовувати контекст, який автоматично враховується при прийнятті рішення.

«Автопілот» у навчанні побудований на принципі асоціативного навчання, коли у мозку з'являються асоціативні зв'язки між сигналами, що виникають в одному місці або в один час, якщо ця одночасна поява сигналів повторюється.

Виділяють три основні принципи створення переконливих інтерфейсів прийняття рішення:

1) відчутність – сигнали мають бути матеріальними і доступними для сприйняття;

2) швидкість – «автопілот» налаштований отримати винагороду негайно;

3) впевненість – «автопілот» надає пріоритети безпечним варіантам.

У таблиці 5.1 представлений загальний опис принципів поведінкової економіки.

Таблиця 5.1 – Загальні принципи поведінкової економіки

| Принципи | Рушійні сили для прийняття рішення | |
|---|---|---|
| | Цінність | Втрати |
| Відсутність<br>Що саме сприймається? | Сигнали, що роблять цінність реальною | Послаблення сигналів про вартість |
| Швидкість<br>Коли будуть реалізовані цінність або витрати? | Спрощення процесу винагороди<br>Мінімізація часу до отримання винагороди<br>Ефект «знеціненого майбутнього»<br>(у майбутньому винагорода та втрати здаються меншими, ніж сьогодні) | Максимальне «відсунення» втрат |
| Впевненість<br>Наскільки постійні розміри цінності або витрат | Максимізація впевненості в отриманні винагороди | Мінімізація відчуття ризику |

## 5.3 Способи отримання інформації від експертів

Розглядаючи особливості процесу отримання знань від експертів або інших джерел, розглянемо потенційні складнощі, що можуть виникнути:

– організаційні неузгодження;

– неефективний спосіб отримання інформації, який не співпадає із структурою знань у даній предметній області;

– помилкова модель (мова) для представлення знань;

– невміння налагодити контакт із джерелом знань (експертом);

– термінологічне неспівпадіння;

– відсутність цілісної системи знань у результаті видобування лише фрагментів;

– спрощення й ущільнення «картини світу» експерта.

Отриманням знань має займатись експерт-аналітик, а не експерт із предметної області. На користь цього є наступні причини:

1. Більша частина знань експерта із предметної області – це результат навчання і досвіду. І, наприклад, якщо A випливає із B, експерт має ризик не усвідомити, що ланцюжок його певною мірою інтуїтивних міркувань може бути значно довшим. Наприклад, $C \Rightarrow D, D \Rightarrow A, A \Rightarrow F, F \Rightarrow B$.

2. Мислення є у значній мірі діалогічним процесом, і саме тому діалог аналітика та експерта є найбільш природньою формою обробки інформації, добутої із пам'яті експерта, у якій зберігаються набуті знання, які частково мають невербальний характер, тобто висловлюються не у вигляді слів, а у формі, як приклад, наочних образів. Під час пояснення аналітикові експерт накладає на ці розмиті асоціативні образи чіткі словесні конструкції, вербалізуючи знання.

3. Для експерта важко створити модель предметної області через глибину і непрозорість інформації, якою він володіє. Численні причинно-наслідкові зв'язки реальної предметної області утворюють складну систему, з якої аналітику, що володіє системною методологією, виділити основне та відтворити структуру у багатьох випадках значно простіше.

Отримання інформації – це специфічний вид спілкування, в якому інформаційний аспект є найбільш важливим для аналітика із практичної точки зору. Втрати інформації при розмовному спілкуванні є суттєвими, тому і розглядають проблему збільшення інформативності аналітика та експерта за допомогою психологічних знань.

Структурна модель спілкування при отриманні інформації є наступною: спілкування (партнери); засоби спілкування (процедура); предмет спілкування (знання). Відповідно до цієї структурної моделі виділяють три рівні психологічних проблем: контактний, когнітивний та процедурний, які виникають під час видобування знань.

Проблеми процедурного рівня стосуються реалізації процедури отримання інформації. У цій ситуації недостатньо проникливості, важливої для розв’язання проблеми контакту, необхідні знання.

Розглянемо основні кроки здійснення процедури.

По-перше, бесіду з експертом слід проводити у невеликому приміщенні один на один. Такі аспекти, як освітлення, тепло та затишок, чинять безпосередній вплив на настрій. Існує думка, що для ділового спілкування найбільш зручною є дистанція від 1,2 до 3 метрів. Формулювання власних думок є нелегкою працею, саме тому тривалість одного сеансу має знаходитись у межах від 1,5 до 2 годин. Цей час краще обрати у першій половині дня (із 10 до 12 години). Взаємна втомлюваність партнерів з’являється за 20–25 хвилин, тому необхідними є паузи.

По-друге, використання наочного матеріалу. Незалежно від методу отримання інформації, можливе використання різних способів для цього. Як приклад можна врахувати класифікацію людей, які займаються інтелектуальною діяльністю, на типи «художника» або «мислителя». Визначивши тип експерта, аналітик збільшить ефективність застосування будь-якого із методів видобування, знаючи, що люди художнього типу легше сприймають інформацію у вигляді малюнків, графіків, діаграм, оскільки ця інформація сприймається першою сигнальною системою. І, навпаки, експерти-мислителі краще сприймають мову формул та текстову інформацію.

По-третє, довжина фраз. Кожна людина має свою унікальну манеру спілкування. Одні люди говорять швидко, інші навпаки – повільно, одна голосно, а інші – тихо. Стиль розмови змінити важко, оскільки він формується у ранньому дитинстві. Однак процес отримання інформації – це професійна розмова, і на її результативність чинить вплив довжина фраз фахівця. Існує погляд, що людина найкраще сприймає команди довжиною 7 +/− 2 слова. Саме це число отримало назву числа Інґве-Мілера. Цей показник можна вважати мірою «розмовності» мови. Досвідчені лектори використовують у лекції в основному короткі фрази, скорочуючи втрату інформації з 20…30 % до 3…4 %.

По-четверте, невербальна компонента спілкування. Отримання інформації відбувається частіше за все у процесі спілкування (комунікації). Більша частина інформації надходить у формі речень певною мовою. Однак зовнішня мова експерта є відтворенням його внутрішньої мови (мислення), яка є значно багатшою та різнобічною. І для передачі саме внутрішньої мови експертом використовуються і невербальні засоби: інтонація, міміка, жести. Досвідчений фахівець занотовує і цю додаткову інформацію у формі нотаток.

По-п’яте, протоколювання результатів, яке здійснюється у трьох способах:

1. Запис на папір безпосередньо під час розмови. Однак цей спосіб має недолік – може заважати ходу бесіди, а також відзначається складність встигати все занотувати, навість при наявності навичок стенографії.

2. Диктофонний запис, який допомагає аналітикові проаналізувати весь хід сеансу і свої власні помилки, проте може сковувати експерта.

3. Запам’ятовування із подальшим записом одразу відразу після бесіди. Однак цей спосіб підходить для аналітиків із дуже гарною пам’яттю.

Із позицій когнітивної психології фахівцю доцільніше дотримуватись таких рекомендацій:

– не нав’язувати експерту модель представлення інформації, яка аналітику більш зрозуміла і є для нього природньою;

– намагатися виявити різноманітні форми семантичної репрезентації, враховуючи той факт, що вони можуть суттєво відрізнятись у різних експертів;

– використовувати різноманітні методи роботи із експертом, виходячи з того, що метод має підходити експерту;

– чітко усвідомлювати мету процедури отримання інформації або її головну стратегію, яка може бути визначена як виявлення основних понять предметної області і відношень, які їх пов’язують. Поняття та відношення – це підґрунтя будь-якої форми семантичної репрезентації;

– частіше малювати схеми, що відображають міркування експерта: а) експерт викладає свої міркування; б) аналітик будує схему або малює картинку, що відповідає його розумінню розповіді експерта; в) аналітик відтворює міркування експерта, дивлячись на схему або малюнок; г) експерт виправляє аналітика (вербально); д) аналітик виправляє схему тощо;

– враховувати, що на ефективність процедури отримання нечіткої інформації чинить вплив форма запитання. Аналітик має розуміти, що при тій чи іншій формі запитання він може або спростити, або навпаки ускладнити порівняння об’єктів. Важливим моментом для аналітика є впевненість у формі запитання, тобто сконструювати інтерв’ю.

Всі ці аспекти тісно пов’язані з азами психологічної культури, яка включає розуміння і знання себе та інших людей; адекватну самооцінку та оцінку інших людей; саморегулювання внутрішнього психологічного стану.

# ТЕМА 6 РИЗИКИ В ПРИЙНЯТТІ РІШЕНЬ

## 6.1. Поняття та джерела невизначеності

Умови невизначеності у прийнятті рішень – це умови, при яких особа знає із достатнім ступенем впевненості, які існують альтернативи, і які умови пов’язані із кожною альтернативою.

Головними джерелами невизначеності є економічне, нормативно-законодавче, техніко-технологічне та внутрішнє середовища.

За критерієм часу розрізняють перспективну невизначеність (у разі виникнення непередбачених обставин) та ретроспективну (недостатня інформація про поведінку об’єкта в минулому). У разі виникнення ретроспективної невизначеності можливі наступні варіанти: відновлення інформації, заміна її перспективною, неможливість заміни або відновлення.

Задача прийняття рішень в умовах невизначеності аналізується у наступній послідовності.

1. Складається перелік доступних можливостей для збирання інформації, проведення експериментів і виконання дій.
2. Систематизується перелік подій, які, ймовірно, можуть трапитися.
3. Визначається послідовність подій у часі, які надають доступну інформацію, і послідовні дії, які можна виконати.
4. Вирішують, наскільки влаштовують наслідки різних дій.
5. Оцінюють шанси кожної конкретної невизначеної події.

Методологія аналізу рішень мотивує ОПР розглядати завдання як єдине ціле, кількісно оцінювати взаємодію різних аспектів проблеми. Систематичне дослідження цінності, що виходить із інформації у контексті прийняття рішень, дає підґрунтя для збирання, опрацювання та організації даних із джерел нової інформації. Такий спосіб надає можливість розмежовувати суб’єктивні переваги вже із самого початку прийняття рішення, оцінювати ставлення ОПР до ризику невизначеності різних факторів, стимулює його активно знаходити нові альтернативні варіанти поведінки.

У формулюванні задачі прийняття рішень ситуація відображається за допомогою мови ОПР. Найважливіші види невизначеності під час прийняття рішень зображають за допомогою у вигляді дерева класифікації.

Виділяють наступні невизначеності у процесі прийняття рішень:

I Невідомість.

II Недостовірність.

1. Неповнота.
2. Недостатність.

3. Недовизначеність.
4. Неадекватність.

III Неоднозначність.

1. Фізична невизначеність.
   а) Випадковість.
   б) Неточність.
2. Лінгвістична невизначеність.
   а) Невизначеність значень (полісемія).
   – Омонімія.
   – Нечіткість.
   б) Невизначеність змісту фраз.
   – Прагматична.
   – Семантична, що у свою чергу буває поверхневою і глибинною.
   – Синтаксична.
3. Невизначеність мети.
4. Багатоособовість.

На першому рівні розташовані основні чинники, від яких залежить вид невизначеності: невідомість, недостовірність, неоднозначність. У ситуації невідомості відсутня інформація про здачу. Така ситуація характерна для початкової стадії дослідження. Якщо після збирання інформації на певному етапі виявляється, що зібрана не вся інформація або одержати її з певних причин неможливо, то невизначеність трансформується в недостовірність. Вона може набирати вигляду неповноти або недостатності (є не вся потрібна інформація), а для деяких задач є неточні описи (недовизначеність), певні елементи задачі описано лише за аналогією з тими, що вже розв’язано (неадекватність).

Причинами можливої неоднозначності опису є зовнішнє середовище (фізична невизначеність) та фахова мова, яка використовується ОПР (лінгвістична невизначеність).

Фізична невизначеність пов’язана як із наявністю у зовнішньому середовищі кількох можливостей, кожна з яких реалізовується випадково (ситуація випадковості або стохастичної невизначеності), так і з неточністю вимірювання величини за допомогою фізичних приладів (ситуація неточності).

Лінгвістична невизначеність виникає через використання природньої мови (в окремому випадку – фахової мови ОПР) для описання задачі прийняття рішень. Такий вид невизначеності зумовлений необхідністю використовувати обмеженим обсягом слів та набором структурних фраз (речень, абзаців і текстів) для описання за визначений час нескінченної множини різноманітних ситуацій, які виникають під час прийняття рішень. Лінгвістична невизначеність пов’язана, з одного боку, множинністю значень слів (понять і відношень) мови (полісемією), а з іншого – неоднозначністю змісту фраз.

Під час прийняття рішень виникають два види полісемії: омонімію та нечіткість. Омонімія виникає у тому випадку, коли об'єкти задачі прийняття рішень суттєво різняться. Прикладом є: коса – вид узбережжя, сільськогосподарський інструмент, вид зачіски. У разі, коли ці об'єкти подібні, то це є нечіткістю. Наприклад, невеликий запас пального на складі – це 1 т, 1,1 т або множина чисел, менша за 1 000.

До джерел неоднозначності змісту фраз належить синтаксична, семантична та прагматична. Прикладом синтаксичної неоднозначності є вислів «залізні болти та гайки». Болти залізні, натомість гайки можуть бути й з іншого металу; або і ті, і інші залізні. «Стратити не можна помилувати»: стратити не можна, помилувати, або ж навпаки – стратити, неможна помилувати. У разі поверхової семантичної невизначеності змісту фраз окремі слова є зрозумілими, але не є очевидним зміст усієї фрази: «блакитні зелені думки люто сплять». У випадку глибинної семантичної невизначеності загальний зміст зберігається, однак незрозумілі окремі слова: «глокая куздра штеко будланула бокра й курдючит бокренка». Можна припустити, що особа жіночої статі щось зробили із особою чоловічої статі, його нащадком.

Прагматична невизначеність пов'язана із неоднозначністю використання синтаксично та семантично зрозумілої інформації для досягнення певних цілей діяльності.

Невизначеність може виникати і через невизначеність мети, що призводить до виникнення задач із багатьма критеріями, а також у багатоособових задачах прийняття рішень. Невизначеність може модулюватись методами теорії ігор у випадках або активної протидії в одних ситуаціях та активного сприяння – в інших.

Фізична невизначеність може бути ускладнена виникненням лінгвістичної невизначеності в описанні розподілу ймовірностей. Ці види невизначеності можуть накладатись один на одний.

## 6.2 Небезпека та ризик. Класифікація ризиків

Небезпекою вважають загрозу для людей у всьому, що є для них цінністю. При характеристиці небезпеки, пов'язаної із конкретною подією або процесом, слід зрозуміти ймовірність прояву цієї події або процесу у певному місці та у встановлений час. Порівнюючи небезпеки різних подій або процесів, усереднюють ймовірності їх прояву за просторовими або часовими параметрами.

На відміну від небезпеки, ризик не можна розглядати окремо від можливих наслідків його прояву. Ризик є кількісною мірою небезпеки з урахуванням її наслідків, до яких належать: економічні, соціальні, екологічні та інші. Оцінка ризику – це оцінки збитку. Чим вище очікуваний збиток, тим вищий ризик. А, відповідно, чим вищий ризик, тим більше ймовірність прояву відповідної небезпеки. Саме поняття «ризик» поєднує у собі «ймовірність небезпеки» та «збиток».

Розглядають кілька різновидів ризику, кожен із яких має свої особливості.

До основних видів ризику належать:

а) ті, що загрожують безпеці (safety risks);

б) здоров'ю (health risks);

в) стану навколишнього середовища (environmental risks);

г) суспільному добробуту (public welfare/goodwill risks);

д) фінансові (financial risks).

Після виникнення ризикової події для суб'єкта, що виступає у ролі фізичної або юридичної особи і має відношення до цього процесу, залежно від часу/місця/зовнішніх умов можливі три результати:

1) збитки (програш);

2) прибуток (виграш, вигода);

3) відсутність результату (ні збитків, ні прибутку).

Класифікація ризиків за типами полегшує формування відповідної реакції на ризик.

Наведемо деякі класифікації ризиків, що розглядають на практиці (табл. 6.1).

Таблиця 6.1 – Класифікація ризиків

| Класифікаційна ознака | Вид ризику | Характеристика ризику |
|---|---|---|
| Природа виникнення | Суб'єктивний (особистісний) | Недостатній досвід, порушення правил поведінки, недостатнє розуміння угоди або, навпаки, високий рівень здібностей, освіти, професіоналізму та ін. |
| | Об'єктивний | Недостатня інформація, стихійні лиха, несподівані зміни: кон'юнктура ринку, рівень інфляції, законодавства, умов кредитування, оподаткування, інвестування та ін. |

Продовження табл. 6.1

| | | |
|---|---|---|
| Залежно від етапу розв'язання проблем | На етапі прийняття рішень | Можливість помилки у виборі методів визначення рівня ризику через недостатню інформацію або її низьку якість. Або, навпаки, відмінне володіння цими методами, залучення якісної інформації, розвинена інтуїція тощо. |
| | На етапі реалізації рішення | Помилки у реалізації правильного рішення, несподівані зміни суб'єктивних умов |
| За масштабами | Локальний | Ризик окремої фірми (компанії або об'єднання або їхніх структурних ) |
| | Галузевий | Ризик, який пов'язаний із специфікою галузі |
| | Регіональний | Проблема на рівні території, економічних районів країни |
| | Національний | Проблема на рівні макроекономіки (через несподівані зміни у політиці, законодавстві, кредитуванні, оподаткуванні тощо) |
| | Міжнародний | Зміни у кон'юнктурі світового ринку, відносини між країнами, масштабні стихійні лиха тощо |
| За сферою виникнення | Зовнішній | Зміни в економічній політиці, стихійні лиха на великих територіях, валютний ризик, стрибки кон'юнктури на світовому ринку |
| | Внутрішній | Ризики господарської діяльності: виробничі, фінансові, страхові |
| За можливістю страхування | Які страхують | Кількісно визначені організаціями та застраховані |
| | Які не страхують | Форс-мажорні ризики, оцінити рівень яких практично неможливо, а також масштабні ризики, коли організації не готові прийняти на себе ризик страхувальника |

Продовження табл. 6.1

| | | |
|---|---|---|
| За видами діяльності | Фінансовий | До нього належать ризики на фондовому ринку (ліквідності, інфляційний, валютний тощо); банківські – кредитний, процентний, портфельний; ризик падіння загальноринкових цін (інфляційний); лізинговий і факторинговий, які пов’язані із специфікою клієнта банку |
| | Юридичний | Зумовлений низькою якістю законодавчих актів і несподіваних змін у законодавстві |
| | Виробничий | Пов’язаний із вимушеними перервами у виробництві, вихід із ладу виробничих фондів, втрату оборотних коштів, несвоєчасність постачання устаткування, сировини та інше |
| | Комерційний | Спричинений несподіваними змінами у кон’юнктурі ринку й інших умов комерційної діяльності |
| | Інвестиційний | Зумовлений невизначеностями, а також непередбачуваними обставинами в інвестиційній сфері, а також інноваційній діяльності |
| | Страховий | Створення страхового фонду, керування ним, а також власним майном, коштами та персоналом |
| | Інноваційний | Спричинений невизначеностями в інноваційній сфері (формування інноваційної ідеї, втілення її в продукті або технології, реалізація продукту на ринку ) |
| За можливістю диверсифікації | Систематичний | Відповідає певній сфері діяльності (наприклад, для фондового ринку властивий ризик зменшення цінності паперів у цілому) |
| | Специфічний | Пов’язаний із одержанням підприємницького доходу від конкретної операції у даній сфері діяльності |

Продовження табл. 6.1

| | | |
|---|---|---|
| За ступенем допустимості | Мінімальний | Характеризується рівнем можливих втрат прибутку у межах 0 – 25 % |
| | Підвищений | Не перевищує можливі втрати прибутку на рівні 25 – 50 % |
| | Критичний | Характеризується можливими втратами прибутку на рівні 50 – 70 % |
| | Недопустимий | Можливі втрати близькі до розміру власних засобів, що потенційно може призвести до банкрутства фірми. Коефіцієнт ризику дорівнює 75 – 100 % |

Зазначена класифікація надає можливість керування ризиками, боротися з ними.

## 6.3 Критерії прийняття рішень в умовах ризику

Основна відмінність рішень в умовах ризику полягає у тому, що настання певних умов зовнішнього середовища є не чисто випадковим, а очікується із певною ймовірністю. Значення цієї ймовірності можуть бути визначені або об’єктивно на підставі даних статистики або випробувань, або суб’єктивно. У будь-якому разі ОПР ці ймовірності відомі.

ОПР приймають рішення на основі двох величин: математичного сподівання альтернативи (середнього виграшу/програшу) і ступені ризику, властивого цій альтернативі.

Математичне сподівання для альтернативи EV може бути представлено формулою

$$EV = \sum_{j=1}^{m} P_j \times W_j, \tag{6.1}$$

де $P_j$ – ймовірність результату;

$W_j$ – цінність результатів.

Очікувана грошова віддача EMV (expected monetary value) визначається як EMV = сума можливих надходжень (віддач) варіанта, зважена на ймовірність появи віддачі.

Передбачено такі умови:

– кожен із можливих станів природи має передбачувану ймовірність;

– стани природи є взаємовиключними;

– ймовірності у сумі мають давати 1;

– визначають очікувану грошову віддачу – expected monetary value (EMV) – для кожної альтернативи

$$EMV(\text{альтернатива } i) = (\text{Виграш 1} - \text{го стану природи}) \times \big(\text{Ймовірність1} - \text{го стану природи}\big) + (\text{Виграш 2} - \text{го стану природи}) \times \big(\text{Ймовірність 2} - \text{го стану природи}\big) + \cdots (\text{Виграш останнього стану природи}) \times \big(\text{Ймовірністьостанньогостануприроди}\big) \quad (6.2)$$

– розраховують очікувану цінність досконалої інформації – EVPI (expexted value of perfect information)

$$EVPI = \text{віддача від рішень в умовах визначеності} - max\, EMV \quad (6.3)$$

Правило модального значення: враховуються лише ті результати, ймовірність появи яких є максимальною.

Це правило має назву «аксіома раціональності», оскільки у разі одиничного вибору можна припустити, що саме ця подія настане з максимальною ймовірністю появи.

Такий підхід переважно призведе до позитивного результату.

Проте він має і певні недоліки, що виникають у разі, коли:

– ряд станів мають рівну ймовірність появи;

– максимальний результат дають декілька альтернатив;

– коли ймовірність появи модального значення при одному зі станів середовища тільки незначно вище, ніж для інших станів, а при цьому інші альтернативи є більш оптимальними, іноді суттєво.

На відміну від правила модального значення, правило Байєса залучає до процесу вибору рішення усі наявні значення. Для цього результат кожної альтернативи для кожного стану середовища множиться на ймовірність її появи. Сума по кожній альтернативі дає очікуваний результат альтернативи в цілому для усіх можливих станів середовища.

# ТЕМА 7 МЕТОД АНАЛІТИЧНОЇ ІЄРАРХІЇ (МАІ)

## 7.1 Ієрархії та пріоритети

Ієрархія – це певна абстракція структури системи, призначена для вивчення функціональної взаємодії її компонентів і їх дій на систему загалом.

У свою чергу, метод аналітичної ієрархії – це систематична процедура, що ґрунтується на ієрархічному поданні елементів, які визначають сутність проблеми.

Проблема піддається декомпозиції на більш прості складники із подальшим оцінюванням ОПР відносно ступеня взаємодії елементів отриманої ієрархічної структури.

Цей метод будується на принципі ідентичності та декомпозиції, згідно з яким структурування проблем у вигляді ієрархії або мережі містить процедури синтезу множинних тверджень, оцінювання пріоритетності критеріїв та знаходження альтернативних рішень.

Рівні ієрархії мають наступне призначення.

1. У результаті ідентифікації загального призначення розв'язання проблеми виявляють єдиний елемент або фокус (проблему загалом) і розміщують його у вершині ієрархії.

2. На другому рівні відображають економічні, політичні та соціальні сили, що здатні вплинути на результат.

3. Третій рівень утворюють актори, що маніпулюють цими силами.

4. Четвертий рівень – це цілі кожного з акторів.

5. На п'ятому рівні описують можливі сценарії або результати, яких прагнуть досягнути кожен із акторів, застосовуючи свою політику. Саме тому між четвертим і п'ятим рівнем може біти проміжний рівень – політики.

Основне завдання в ієрархії – оцінити вищі рівні, виходячи із взаємодії різних рівнів, а не безпосередньо залежності від елементів на цих рівнях.

При застосування МАІ для ОПР корисними є наступні.

1. Якщо є множина дій (альтернатив), серед яких потрібно зробити вибір, і є сумніви стосовно критеріїв, за якими оцінюються альтернативи, слід порівняти попарно критерії стосовно коротко- та довгострокових дій, ризику та переваг, а також побудувати матрицю попарних порівнянь щодо ефективності й успіху.

2. Якщо розглянути достатню кількість альтернатив та тверджень, і є впевненість, що всі істотні чинники взяти до уваги, то зроблено все, що було необхідно для вибору найкращої альтернативи за наявних умов.

Розглянемо послідовність етапів МАІ.

1. Формулювання задачі, яку необхідно вирішити.

2. Постановка проблеми у загальному вигляді – включення її (якщо це необхідно) до системи, у якій є інші зацікавлені дійові особи (актори), аналіз їх ідей та бажаних результатів.

3. Ідентифікація критеріїв, за якими буде оцінена якість розв'язання проблеми.

4. Побудова ієрархії спільних критеріїв, окремих критеріїв, властивостей альтернатив і самих альтернатив. У проблемі із багатьма учасниками рівні можуть описувати навколишнє середовище акторів, їхні цілі, політики і результати, за допомогою яких буде одержаний узагальнений результат (стан сфери дій). Для того, щоб усунути неясності необхідно визначити кожен елемент в ієрархії.

5. Визначення пріоритетів первинних критеріїв (сил) щодо їх впливу на генеральну мету.

6. Чітке формулювання питання для попарних порівнянь у кожній матриці. Слід звернути увагу на орієнтацію кожного питання (в якості прикладу: вартість має зменшуватись, а ефективність навпаки – зростати).

7. Визначення пріоритетів часткових критеріїв щодо загальних. Збір результатів попарних порівнянь.

8. Опрацювання даних згідно із алгоритмом МАІ для обчислення глобальних пріоритетів і глобальної узгодженості результатів.

9. У разі вибору серед альтернатив – обрання тієї, що має найбільше значення глобального пріоритету. У разі розміщення ресурсів оцінювання вартості альтернативи, обчислення відношення ефективності до вартості та відповідний розподіл ресурсів: повністю або пропорційно. У разі необхідності визначення пріоритетів вартості – розподіляють ресурси пропорційно пріоритетам.

## 7.2 Обґрунтування методу аналітичної ієрархії

У МАІ порівнюють пари елементів задачі попарно щодо їх впливу (дії, ваги, інтенсивності) на спільну для них характеристику.

Матриця має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Після отримання кількісних тверджень пари $(B_i, B_j)$ у числовому вигляді $a_{ij}$ потрібно кожному елементу множини $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ поставити у відповідність числові ваги або пріоритети. У разі ієрархічного подання задач матрицю складають для порівняння відносної важливості критеріїв другого рівня відносно загальної мети першого рівня (кореня ієрархії), а потім будують такі самі матриці попарних порівнянь наступного рівня відносно елементів попереднього.

Попарні порівняння виконують у шкалі відношень за бальною системою.

Таблиця 7.1 – Шкала ранжування для критеріїв і альтернатив

| Бал, k | Визначення | Роз’яснення |
|---|---|---|
| 1 | Однакова важливість | Два фактори спричиняють однаковий вплив на мету |
| 3 | Помірна перевага | Досвід і оцінювання показують невелику перевагу одного над іншим |

Продовження табл. 7.1

| | | |
|---|---|---|
| 5 | Суттєва перевага | Досвід і оцінювання показують сильну перевагу одного над іншим |
| 7 | Значна перевага | Досвід і оцінювання показують значну перевагу одного над іншим. Його важливість демонструється на практиці |
| 9 | Дуже велика перевага | Очевидна перевага одного над іншим |
| 2,4,6,8 | Проміжні значення (використовуються у перехідних ситуаціях ) | Коли потрібен компроміс |
| 1/k | Обернені величини | – |

Приклад. Є чотири моделі комп'ютерів (A, B, C, D). Експерт надав наступні оцінки:

1. Модель C помірно переважає A.
2. Модель B помірно поступається моделі C.
3. Модель A значно переважає D.
4. Перевага моделі C над моделлю D є дуже великою та значною.
5. Модель A помірно поступаються моделі B.
6. Модель B помірно переважає D.

За даними оцінки матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 7 \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 8 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

У шкалі відношень обрано значення від 1 до 9, оскільки саме такій кількості точок відповідає психологічна межа $7 \mp 2$ предмети для одночасного порівняння. У випадку, коли важко розрізнити кількість проміжних градацій, застосовують шкалу із їх меншою кількістю.

Локальні пріоритети отримують, визначивши множину головних власних векторів для кожної з обернено симетричних матриць ієрархії та нормалізувавши результат.

Наближене обчислення пріоритетів проводять, визначаючи середнє геометричне рядків матриці попарних порівнянь А з подальшою нормалізацією усіх складових отриманого вектора за формулою

$$x_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}} \Big/ \sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right). \tag{7.2}$$

Отримані значення власного вектора x = ($x_1$, $x_2$, ….., $x_n$) використовують для подальших обчислень.

Для того, щоб знайти рейтинг пріоритетів, а саме власний вектор X:

1) нормалізують елементи стовпця шляхом ділення кожного елемента на суму стовпця;

2) знаходять середні значення рядка.

Для оцінювання індексу узгодженості оцінок експерта використовують формулу

$$I_u = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) - n}{n-1} = \frac{\alpha_{max} - n}{n-1}, \tag{7.3}$$

де $\alpha_{max}$ – максимальне власне значення матриці.

Відношення узгодженості обчислюють за формулою

$$\mathrm{I_o} = \frac{\mathrm{I}_n}{M(I_n)}, \tag{7.4}$$

де M ($I_n$) – випадкова узгодженість. Якщо оптимальне значення $I_o$ менше 10 % – рівень узгодженості можна вважати задовільним (інколи доводиться задовольнятись значенням 20 %).

У таблиці 7.2 представлені індекси узгодженості для випадкових матриць. Верхній рядок є порядком випадкової матриці, а нижній ряжок є відповідним індексом узгодженості для випадкових суджень.

Таблиця 7.2 – Індекси узгодженості для випадкових матриць

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,00 | 0,58 | 0,9 | 1,12 | 1,24 | 1,32 | 1,41 | 1,45 | 1,49 | 1,51 | 1,48 | 1,56 | 1,57 | 1,59 |

Значення індексу узгодженості, отримане із матриці попарних порівнянь, потрібно помножити на пріоритет властивості, якої стосувалось порівняння, і до цього числа додати аналогічні результати для ієрархії загалом. Після цього отримане значення слід порівняти з відповідним значенням індексу, який дорівнює сумі випадкових значень, зважених за відповідними пріоритетами.

## 7.3 Побудова ієрархії МАІ

Головне завдання МАІ – визначення глобальних пріоритетів альтернатив, тобто їх пріоритетів відносно корені ієрархії. У якості вихідних даних використовуються результати опитування експертів у вигляді матриць попарних порівнянь при всіх вузлах ієрархії, окрім альтернатив.

Для кращої ілюстрації розглянемо наступний приклад. Родина із середнім достатком хоче придбати автомобіль. Унаслідок аналізу було виявлено такі критерії, які слід взяти до уваги: престижність, вартість, питомі витрати пального, комфортність, надійність, максимальна швидкість, розміри, витрати на технічне обслуговування, гарантійні зобов’язання.

Подальший розгляд дає змогу обрати в якості «кандидатів» три моделі та подати задачу у вигляді ієрархії.

Первинну множину критеріїв після аналізу було звужено до наступних основних: $Q_1$ – комфортність, $Q_2$ – надійність, $Q_3$ – швидкість, $Q_4$ – вартість, $Q_5$ – престижність, $Q_6$ – обслуговування, $Q_7$ – гарантії, $Q_8$ – витрати пального.

Після опитування членів родини побудовано наступну матрицю попарних порівнянь для рівня 2 – критеріїв.

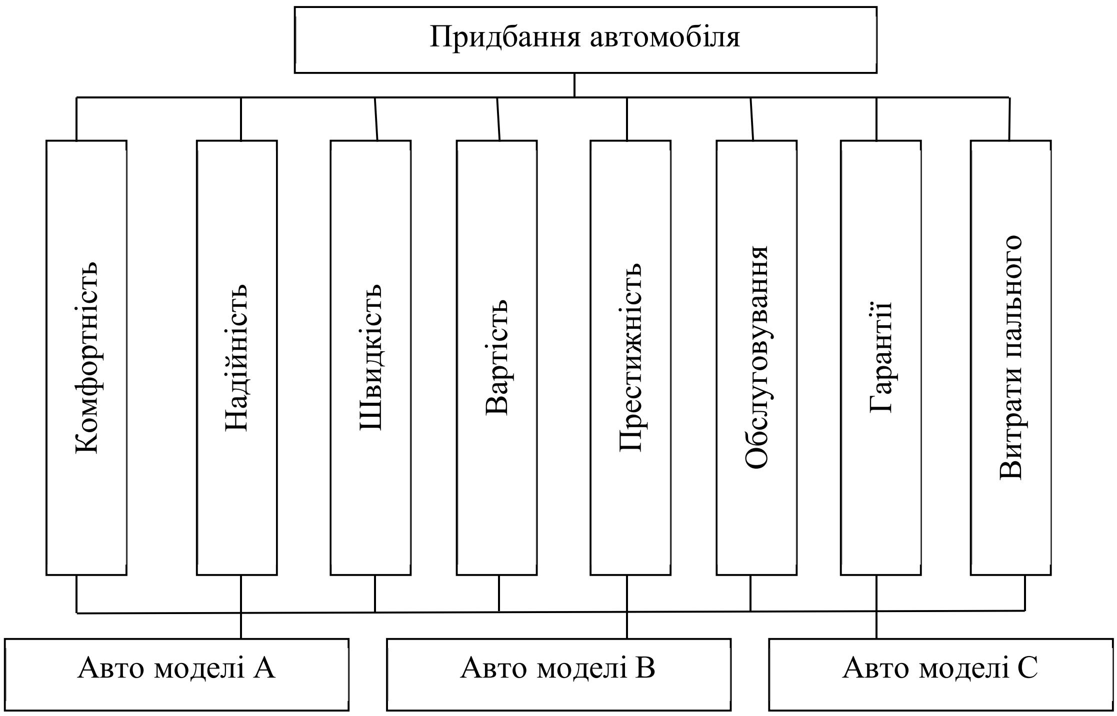


Рисунок 7.1 – Ієрархічна структура задачі покупки автомобіля

Наступним кроком складаємо матрицю попарних порівнянь.

Таблиця 7.2 – Матриця попарних порівнянь

| Критерій | $Q_1$ | $Q_2$ | $Q_3$ | $Q_4$ | $Q_5$ | $Q_6$ | $Q_7$ | $Q_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_1$ | 1 | 5 | 3 | 7 | 6 | 6 | 1/3 | 1/4 |
| $Q_2$ | 1/5 | 1 | 1/3 | 5 | 3 | 3 | 1/5 | 1/7 |
| $Q_3$ | 1/3 | 3 | 1 | 6 | 3 | 4 | 6 | 1/5 |
| $Q_4$ | 1/7 | 1/5 | 1/6 | 1 | 1/3 | 1/4 | 1/7 | 1/8 |
| $Q_5$ | 1/6 | 1/3 | 1/3 | 3 | 1 | 1/2 | 1/5 | 1/6 |
| $Q_6$ | 1/6 | 1/3 | 1/4 | 4 | 2 | 1 | 1/5 | 1/6 |
| $Q_7$ | 3 | 5 | 1/6 | 7 | 5 | 5 | 1 | 1/2 |
| $Q_8$ | 4 | 7 | 5 | 8 | 6 | 6 | 2 | 1 |

Після цього, порівнюючи попарно три автомобілі (A, B, C) за кожним із критеріїв (рівень 3) отримаємо вісім матриць (для кожного із критеріїв) розміром 3x3 (за кількістю альтернатив до вибору).

Таблиця 7.3 – Матриці попарних порівнянь альтернатив A, B, C за критеріями

| $Q_1$ | A | B | C | $Q_2$ | A | B | C | $Q_3$ | A | B | C | $Q_4$ | A | B | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 6 | 8 | A | 1 | 7 | 1/5 | A | 1 | 8 | 6 | A | 1 | 1 | 1 |
| B | 1/6 | 1 | 4 | B | 1/7 | 1 | 1/8 | B | 1/8 | 1 | ¼ | B | 1 | 1 | 1 |
| C | 1/8 | ¼ | 1 | C | 5 | 8 | 1 | C | 1/6 | 4 | 1 | C | 1 | 1 | 1 |

| $Q_5$ | A | B | C | $Q_6$ | A | B | C | $Q_7$ | A | B | C | $Q_8$ | A | B | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 5 | 4 | A | 1 | 8 | 6 | A | 2 | 1/2 | 1/2 | A | 1 | 1/7 | 1/5 |
| B | 1/5 | 1 | 1/3 | B | 1/8 | 1 | 1/5 | B | 2 | 1 | 1 | B | 7 | 1 | 3 |
| C | ¼ | 3 | 1 | C | 1/6 | 5 | 1 | C | 2 | 1 | 1 | C | 5 | 1/3 | 1 |

Обчислити локальні вектори пріоритетів, індекс узгодженості та відношення узгодженості для матриці попарних порівнянь критеріїв (табл. 7.2) та матриць попарних порівнянь альтернатив A, B, C за критеріями $Q_1$–$Q_8$ (табл. 7.3).

Наведемо нижче результати визначення вектора пріоритетів, індексу узгодженості та відношення узгодженості для матриці попарних порівнянь (табл. 7.4). Вектор пріоритетів визначається як результат обчислення головного власного вектора із подальшою його нормалізацією. Одержане значення відношення узгодженості завелике, проте вважатимемо його прийнятним. У відносно великих матрицях (n = 7, 8, 9) досягнення високого рівня узгодженості є проблематичним, проте у цьому випадку слід зважати на збільшення ризику через неузгодженість.

Таблиця 7.4 – Визначення узгодженості матриці критеріїв

| Критерій | $Q_1$ | $Q_2$ | $Q_3$ | $Q_4$ | $Q_5$ | $Q_6$ | $Q_7$ | $Q_8$ | Вектор пріоритетів |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_1$ | 1 | 5 | 3 | 7 | 6 | 6 | 1/3 | 1/4 | 0,173 |
| $Q_2$ | 1/5 | 1 | 1/3 | 5 | 3 | 3 | 1/5 | 1/7 | 0,054 |
| $Q_3$ | 1/3 | 3 | 1 | 6 | 3 | 4 | 6 | 1/5 | 0,188 |
| $Q_4$ | 1/7 | 1/5 | 1/6 | 1 | 1/3 | 1/4 | 1/7 | 1/8 | 0,018 |
| $Q_5$ | 1/6 | 1/3 | 1/3 | 3 | 1 | 1/2 | 1/5 | 1/6 | 0,031 |
| $Q_6$ | 1/6 | 1/3 | 1/4 | 4 | 2 | 1 | 1/5 | 1/6 | 0,036 |
| $Q_7$ | 3 | 5 | 1/6 | 7 | 5 | 5 | 1 | 1/2 | 0,167 |
| $Q_8$ | 4 | 7 | 5 | 8 | 6 | 6 | 2 | 1 | 0,333 |
| | | | | | | | | $I_u$ | 0,238 |
| | | | | | | | | $I_o$ | 0,169 |

Обчислимо відповідні характеристики для множини таблиць наступного рівня – оцінювання альтернатив.

Таблиця 7.5 – Обчислені значення локальних пріоритетів для альтернатив

| $Q_1$ | A | B | C | Вектор пріоритетів | $Q_2$ | A | B | C | Вектор пріоритетів |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 6 | 8 | 0,754 | A | 1 | 7 | 1/5 | 0,233 |
| B | 1/6 | 1 | 4 | 0,181 | B | 1/7 | 1 | 1/8 | 0,005 |
| C | 1/8 | 1/4 | 1 | 0,065 | C | 5 | 8 | 1 | 0,713 |
| | | | $I_u$ | 0,068 | | | | $I_u$ | 0,124 |
| | | | $I_o$ | 0,117 | | | | $I_o$ | 0,213 |

| $Q_3$ | A | B | C | Вектор пріоритетів | $Q_4$ | A | B | C | Вектор пріоритетів |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 8 | 6 | 0,745 | A | 1 | 1 | 1 | 0,333 |
| B | 1/8 | 1 | 1/4 | 0,065 | B | 1 | 1 | 1 | 0,333 |
| C | 1/6 | 4 | 1 | 0,181 | C | 1 | 1 | 1 | 0,333 |
| | | | $I_u$ | 0,068 | | | | $I_u$ | 0,000 |
| | | | $I_o$ | 0,117 | | | | $I_o$ | 0,000 |

| $Q_5$ | A | B | C | Вектор пріоритетів | $Q_6$ | A | B | C | Вектор пріоритетів |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 5 | 4 | 0,674 | A | 1 | 8 | 6 | 0,747 |
| B | 1/5 | 1 | 1/3 | 0,101 | B | 1/8 | 1 | 1/5 | 0,060 |
| C | 1/4 | 3 | 1 | 0,226 | C | 1/6 | 5 | 1 | 0,193 |
| | | | $I_u$ | 0,043 | | | | $I_u$ | 0,099 |
| | | | $I_o$ | 0,074 | | | | $I_o$ | 0,170 |

| $Q_7$ | A | B | C | Вектор пріоритетів | $Q_8$ | A | B | C | Вектор пріоритетів |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 1/2 | ½ | 0,200 | A | 1 | 1/7 | 1/5 | 0,072 |
| B | 2 | 1 | 1 | 0,400 | B | 7 | 1 | 3 | 0,650 |
| C | 2 | 1 | 1 | 0,400 | C | 5 | 1/3 | 1 | 0,278 |
| | | | $I_u$ | 0,000 | | | | $I_u$ | 0,032 |
| | | | $I_o$ | 0,000 | | | | $I_o$ | 0,056 |

Стосовно інтерпретації результатів, то у нашому випадку витрати пального є найважливішими у виборі автомобіля, друге місце посідає комфортність, а третє – швидкість руху. У реальній ситуації за результатами такого аналізу несуттєві критерії можна було б відкинути і повторити опитування експерта, однак залишимо всі.

Приклад. Обчислення глобальних пріоритетів альтернатив. За результатом наведеного прикладу необхідно визначити глобальні пріоритети альтернатив.

Глобальні пріоритети обчислюють на наступному етапі МАІ – ієрархічного синтезу. З цією метою для виявлення складених або глобальних пріоритетів автомобілів виконаємо зворотний хід: із передостаннього рівня рухаємось до кореня ієрархії, збираючи вектори локальних пріоритетів до досягнення кореня ієрархії.

У наведеному прикладі ця процедура зводиться до збирання матриці з векторів локальних пріоритетів альтернатив за критеріями (s=2).

$$P_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}754 & 0{,}233 & 0{,}745 & 0{,}333 & 0{,}674 & 0{,}747 & 0{,}200 & 0{,}072 \\ 0{,}181 & 0{,}055 & 0{,}065 & 0{,}333 & 0{,}101 & 0{,}060 & 0{,}400 & 0{,}650 \\ 0{,}065 & 0{,}713 & 0{,}181 & 0{,}333 & 0{,}226 & 0{,}193 & 0{,}400 & 0{,}278 \end{pmatrix}$$

вектор локальних пріоритетів відносно кореня дерева

$$x_1^{(1)} = (0{,}173 \quad 0{,}054 \quad 0{,}188 \quad 0{,}018 \quad 0{,}031 \quad 0{,}036 \quad 0{,}167 \quad 0{,}333)^{T}$$

Знак транспонування вжито для зручності його запису. Тоді

$$p_1^{(1)} = P_1^{(1)} \times x_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}396 \\ 0{,}341 \\ 0{,}263 \end{pmatrix}$$

Оскільки оновлене значення i=0, то роботу алгоритму на цьому завершено. Отже, за загальним показником (попри найгірші показники за критерієм витрат пального) обрано автомобіль А, тому що інші показники є кращими порівняно із конкурентами.

# ТЕМА 8 ЗАДАЧА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

## 8.1 Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності

Невизначеність виникає у відкритих завданнях прийняття рішень, у яких ОПР не знає всієї сукупності чинників, що діють. Ситуація невизначеності характеризується тим, що вибір конкретного плану дій може спричинити будь-який результат із певної множини варіантів, однак ймовірності впливу випадкових факторів невідомі. Можливі такі випадки:

– ймовірності невідомі через те, що немає потрібної статистичної інформації;

– ситуація не є статистично, і говорити про об'єктивні ймовірності взагалі немає сенсу (ситуація «досконалої невизначеності»).

Саме «досконала» невизначеність найчастіше трапляється, адже рішення (особливо стратегічні) приймаються конкретними особами в унікальних умовах.

В умовах повної невизначеності – «досконалої невідомості» – достатньо прийняти будь-яке рішення (включаючи варіант «нічого не робити»). Інший варіант – ситуація, коли ОПР знає можливі варіанти своїх дій, а також те, які варіанти дій виконуються у відповідь, і що він може виграти або програти за певних обставин, проте невідома інформація про можливість здійснення певних дій або її неможливо отримати. Така ситуація належить до класичних задач прийняття рішень за умов невизначеності.

Розглянемо критерії прийняття рішень, які застосовуються в різних інформаційних ситуаціях. Почнемо із ситуації $I_4$, характерної невідомим розподілом ймовірності: $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_j = p(\Theta = \Theta_j)$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, на множині $\Theta_1 \ldots \Theta_n$, а також відсутністю активної протидії середовища цілям прийняття рішень. У певному сенсі, така ситуація відповідає моделі пасивної «поведінки» середовища в теорії статистичних рішень. Іншими словами, вона відображає повну відсутність у органу управління даних про поведінку середовища.

У реальних умовах такі ситуації пов'язані із впровадженням у виробництво нового обладнання або при реалізації нових зразків товару, коли попит на продукцію повністю невідомий тощо. Розглянемо критерій прийняття рішень, який може бути застосовані у цій ситуації.

Критерій Байєса – Лапласа. Найпростіший варіант невизначеності – «доброякісна» стохастична. У цьому випадку стани природи характеризуються ймовірностями їх виникнення $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, і оптимальна стратегія $A_k$, для якої критерій Байєса досягає максимуму.

$$Q_B = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \rightarrow \max_{i \in \overline{1,m}} \tag{8.1}$$

тобто обрано стратегію $A_k$ з індексом k, для якої

$$k = arg \max_{i \in \overline{1,m}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \ , \tag{8.2}$$

згідно з критерієм Байєса обирають альтернативу, яка забезпечує максимальний середній виграш. Якщо ж ймовірності невідомі, але є підстави вважати їх приблизно рівними, то доцільно застосовувати критерій Лапласа

$$Q_L = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \rightarrow \max_{i \in \overline{1,m}} \quad , \tag{8.3}$$

обираючи стратегію $A_k$ з індексом k, для якої

$$k = arg \max_{i \in \overline{1,m}} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ , \tag{8.4}$$

Правило Лапласа припускає ОПР із нейтральним ставленням до ризику і дає змогу вибрати альтернативу з максимальною сумарною корисністю. Для цього кожному стану зовнішнього середовища приписується рівна ймовірність (тобто визначається як 1, поділена на кількість даних станів середовища). Далі визначається сума для кожної альтернативи.

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Правило Лапласа |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 92 | 160 | 40 | 92*0,33+160*0,33+40*0,33 = 97,33 |
| $A_2$ | 100 | 76 | 120 | 100*0,33+76*0,33+120*0,33 = **98,67** |
| $A_3$ | 68 | 80 | 140 | 68*0,33+80*0,33+140*0,33 = 96 |

## 8.2 Критерії прийняття рішень в умовах антагоністичної поведінки середовища

Тепер розглянемо критерії прийняття рішень в умовах антагоністичної поведінки середовища (інформаційна ситуація $I_5$). Іншими словами, середовище активно протидіє цілям прийняття рішень, тобто з усіх своїх станів воно обирає саме ті, у яких оцінний функціонал набуває своїх найгірших значень. Ось чому у цій ситуації раціональним буде вибір рішення, яке дозволяє отримати гарантовані значення оцінного функціонала. Цього можна досягти, використовуючи критерії Вальда і Севіджа.

1. Максимінний критерій Вальда. Згідно із цим критерієм гра з природою є грою з агресивним і розумним суперником,

$$Q_w = \min_{j \in \overline{1,n}} a_{ij} \to \max_{i \in \overline{1,m}} \tag{8.5}$$

Обирають стратегію k, для якої

$$k = arg \max_{i \in \overline{1,m}} \left( \min_{j \in \overline{1,m}} a_{ij} \right) \tag{8.6}$$

Це позиція крайнього песимізму. Стосовно природи водна є перестрахувальною.

Приклад. Прийняття рішення за критерієм Вальда.

Нехай ситуація прийняття рішення задано таблицею

| Стратегія | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | min $a_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1,0 | 100,0 | 1,0 | 1,0 |
| $A_2$ | 1,1 | 1,1 | 1,1 | 1,1 |

Потрібно обрати оптимальну стратегію за критерієм Вальда й проаналізувати вибір.

Якщо проаналізувати можливості вибору з погляду ОПР неформально, то стратегія $A_1$ видається найбільш перспективною, однак за критерієм Вальда буде обрано стратегію $A_2$, для якої гарантований виграш становить 1,1 (натомість стратегії $A_1$ – 1,0).

Критерій Вальда прийнятний, коли ситуація ухвалення рішення має наступні характеристики:

- нічого не відомо про можливість реалізації «природою» своїх стратегій;
- доводиться зважати на різні стратегії «природи»;
- рішення унікальне, його можна прийняти лише один раз;
- потрібно виключити будь-який ризик.

2. Критерій Севіджа. Це доволі песимістичний критерій. Однак у випадку обрання оптимальної стратегії він орієнтує на мінімальний гарантований ризик і має вигляд

$$Q_{C0} = \max_{j \in \overline{1,n}} r_{ij} \to \min_{i \in \overline{1,m}} \qquad (8.7)$$

Обираємо стратегію $A_k$ з індексом k, для якої

$$k = arg \min_{i \in \overline{1,m}} \left( \max_{j \in \overline{1,n}} \left( \max_{i \in \overline{1,m}} a_{ij} - a_{ij} \right) \right) \qquad (8.8)$$

## 8.3 Критерії прийняття рішень в умовах часткової невизначеності

Інформаційна ситуація $I_6$ характеризується наявністю факторів, що зумовлюють два типи поведінки середовища.

Перший характеризується наявністю в органу управління деякої інформації про справжній розподіл ймовірності на множині станів середовища, і хоча її недостатньо для точного визначення інформаційної ситуації, існує можливість встановити певний ступінь оптимізму-песимізму щодо поведінки середовища.

Другий тип припускає, що орган управління володіє інформацією про стани середовища, де має місце повне або часткове знання про розподіл ймовірності на множині станів і про його антагоністичну поведінку.

Розглянемо критерії, які можуть бути корисними в таких ситуаціях.

1. Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца. Відповідно до цього критерію, обираючи розв'язок, не слід орієнтуватись ні на песимізм, ні на оптимізм. Слід узяти певну їх комбінацію, задавши коефіцієнт $\lambda$, $0 \le \lambda \le 1$. Коли $\lambda = 1$, отримаємо критерій максиміну, а в разі $\lambda = 0$ – крайній оптимізм (притаманний азартному гравцю). Критерій Гурвіца має вигляд

$$H = \lambda \times \min_{j \in \overline{1,n}} a_{ij} + (1 - \lambda) \times \max_{j \in \overline{1,n}} a_{ij} \to \max_{i \in \overline{1,m}} \qquad (8.9)$$

Очевидно, що у цьому випадку проблему не розв'язано. Її розв'язання перенесено в іншу площину – пошук «правильного» значення коефіцієнта оптимізму.

Приклад. Для кожної альтернативи враховуються два значення – максимальне і мінімальне. Для цього вводиться додатковий параметр оптимізму-песимізму α, який враховує індивідуальний підхід до ризику ОПР. У песиміста α знаходиться у діапазоні від 0 до 0,5, у оптиміста від 0,5 до 1. Даля кожен максимум у рядку множиться на α, а кожен мінімум на (1-α). Для випадку песиміста (α=0,3) результат представлений у таблиці

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Правило Гурвіца |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 92 | 160 | 40 | 160*0,3+40*0,7 = 76 |
| $A_2$ | 100 | 76 | 120 | 120*0,3+76*0,7 = 89,2 |
| $A_3$ | 68 | 80 | 140 | 140*0,3+68*0,7=**89,6** |

2. Критерій Ходжа-Лемана. Він ґрунтується на максимінному критерії та критерії Байєса. Параметр відповідає довірі до використовуваного розподілу ймовірностей. Якщо ступінь довіри великий, то застосовують критерій Байєса, якщо ні – то переважає складова, що відповідає максимінному критерію.

Критерій Ходжа-Лемана має вигляд

$$Q_B = v\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + (1-v)\min_{j\in\overline{1,n}} a_{ij} \to \max_{i\in\overline{1,m}} \qquad (8.10)$$

У випадку v=1 отримуємо критерій Байєса, а для v=0 критерій максиміну. Зазначений критерій найчастіше застосовують за наступних умов:

– ймовірності застосування «природою» своїх стратегій невідомі, але можливі деякі припущення про розподіли ймовірності;

– ухвалення рішення теоретично допускає нескінченно багато реалізацій;

– за небагатьох реалізацій можливий певний ризик.

# ТЕМА 9 СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ

## 9.1 Кореляційний та регресійний аналіз прямолінійної залежності

У багатьох статистичних дослідженнях важливо пояснити залежність між двома або декількома ознаками, встановити їх взаємний зв’язок. Однак у таких дослідженнях рідко мають справу із точними і визначеними функціональними зв’язками, коли кожному значенню однієї величини відповідає суворо визначене значення іншої величини. Частіше зустрічаються такі співвідношення між змінними, коли кожному значенню ознаки X відповідає не одна, а безліч можливих значень ознаки Y. Такі зв’язки появляються лише при масовому визначенні ознак і, на відміну від функціональних, називаються схоластичними (вірогідними) або кореляційними.

У класифікаційному плані кореляції (взаємне співвідношення, залежність показників, явищ тощо) поділяються за напрямом, формою, силою та кількістю зв’язків.

За напрямом вони поділяються на прямі та зворотні.

Пряма кореляція спостерігається тоді, коли із збільшенням однієї ознаки (X) інша ознака (Y) також збільшується. Приклади прямої кореляції: із збільшенням довжини колоса кількість зерен у ньому також зростає; збільшення довжини листя призводить до збільшення їх площі; інтенсивніше освітлення рослин посилює фотосинтез тощо.

Зворотна кореляція спостерігається, коли із збільшенням однієї ознаки (X) інша ознака (Y) зменшується. Приклад зворотної кореляції: при більшій забур'яненості посівів зменшується врожайність польових культур; збільшення доз застосовуваного інсектициду зменшує кількість шкідників на полі; надмірне розростання коренеплодів цукрових буряків призводить до зниження їх цукристості тощо.

При вивченні кореляційних зв'язків виникає два основних питання – про силу зв'язків і їх форму. Для вимірів сили і форми зв'язків використовують спеціальні статистичні методи, які називаються кореляцією і регресією. За формою кореляції поділяють на прямолінійні та криволінійні.

При прямолінійній кореляції із збільшенням одних ознак (X) відповідно збільшуються інші ознаки (Y). Наприклад, при збільшенні маси бульб картоплі чи коренеплодів буряків збільшуються їх розміри, при збільшенні кількості зерен у колосі збільшується його довжина та ін.

Криволінійна кореляція має місце, коли значення X та Y змінюються спочатку в одному напрямі, а потім у протилежному. Приклади криволінійної кореляції: при постійному зростанні градацій певного фактору X (азотні або інші добрива, вологість ґрунту тощо) врожай (Y) спочатку зростає, потім стає стабільним , а після подальшого збільшення ознаки X ознака Y починає зменшуватись. Такі зв'язки виражають кореляційним відношенням, яке позначають грецьким «ета».

За кількістю зв'язків кореляція буває простою, коли досліджується зв'язок між двома ознаками, та множинною, якщо вивчається зв'язок між трьома і більшою кількістю ознак. Приклади простої кореляції наведені вище, а прикладами множинної можуть бути: залежність урожайності одночасно від доз добрив, норм зрошення, норм висіву, глибини загортання насіння тощо; залежність якості врожаю від вище перелічених умов, залежність урожайності від атмосферних опадів, температури повітря, його вологості тощо. За силою зв'язків кореляція може бути повною, сильною, середньою, слабкою або її може не бути зовсім.

Ступінь кореляційної залежності вимірюється різними показниками. За прямолінійної кореляції ступінь взаємозв'язків виражається числом, яке називається коефіцієнтом кореляції і позначається буквою r.

Коефіцієнт кореляції показує на напрям і ступінь взаємозв'язку, але не дає можливості зробити висновок про те, як кількісно змінюється функціональна ознака (Y) при зміні факторіальної ознаки (X) на одиницю виміру. В таких випадках на допомогою досліднику приходить регресійний аналіз, за яким можна передбачити значення функціональної ознаки за заданим значенням факторіальної, тому що регресія вказує на ступінь зміни ознаки Y при зміні на одиницю ознаки X. наприклад, зі зміною довжини колоса (X) на 1 см кількість зерен у ньому (Y) збільшується на 7 штук.

Після кореляційних та регресійних аналізів складають рівняння регресій, які використовують для обчислення невідомого показника за відомим.

Кореляційний аналіз. Проведемо аналіз залежності між довжиною 20 окремих листків озимої пшениці та їх площами (табл. 9.1), визначених на основі індивідуальних вимірів.

Таблиця 9.1 – Обчислення кореляційної залежності між довжиною листя озимої пшениці та його площею

| Номери листків (пар) | Довжина листа, см (X) | Площа листа, см$^2$ (Y) | X-x | Y-y | (X-x)(Y-y) | (X-x)$^2$ | (Y-y)$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16,1 | 7,4 | -6,4 | -7,8 | 49,92 | 40,96 | 60,84 |
| 2 | 17,3 | 8,7 | -5,2 | -6,5 | 33,80 | 27,04 | 42,25 |
| 3 | 18,6 | 10,3 | -3,9 | -4,9 | 19,11 | 15,21 | 24,01 |
| 4 | 20,0 | 11,2 | -2,5 | -4,0 | 10,00 | 6,25 | 16,00 |
| 5 | 21,3 | 12,9 | -1,2 | -2,3 | 2,76 | 1,44 | 5,29 |
| 6 | 21,6 | 13,2 | -0,9 | -2,0 | 1,80 | 0,81 | 4,00 |
| 7 | 21,8 | 13,7 | -0,1 | -1,5 | 0,15 | 0,01 | 2,25 |
| 8 | 22,0 | 14,1 | -0,5 | -1,1 | 0,55 | 0,25 | 1,21 |
| 9 | 22,4 | 14,3 | -0,1 | -0,9 | 0,09 | 0,01 | 2,25 |
| 10 | 22,8 | 14,8 | 0,3 | -0,4 | -0,12 | 0,09 | 0,16 |
| 11 | 23,1 | 15,2 | 0,6 | 0,0 | 0 | 0,36 | 0 |
| 12 | 23,3 | 16,2 | 0,8 | 1,0 | 0,80 | 0,64 | 1 |
| 13 | 23,3 | 16,7 | 0,8 | 1,5 | 1,20 | 0,64 | 1 |
| 14 | 23,7 | 17,0 | 1,2 | 1,8 | 2,16 | 1,44 | 3,24 |
| 15 | 24,0 | 17,4 | 1,5 | 2,2 | 3,30 | 2,25 | 4,84 |
| 16 | 24,1 | 19,2 | 1,6 | 3,0 | 4,80 | 2,56 | 9,00 |
| 17 | 25,2 | 19,3 | 2,7 | 4,1 | 11,07 | 7,29 | 16,81 |
| 18 | 26,0 | 20,3 | 3,5 | 5,1 | 17,85 | 12,25 | 26,01 |
| 19 | 25,6 | 21,4 | 4,0 | 6,2 | 24,80 | 16,00 | 38,44 |
| 20 | 26,4 | 22,3 | 3,9 | 7,1 | 27,69 | 15,21 | 50,41 |
| n=20 | x=22,5 | y= 15,2 | ∑≈0 | ∑≈0 | ∑ [(X-x)(Y-y)]=211,73 | ∑(X-x)$^2$=150,71 | ∑(Y-y)$^2$=308,82 |

Після проведення у таблиці 9.1 розрахунків обчислюємо:
коефіцієнт кореляції

$$r = \frac{\sum[(X-x)\times(Y-y)]}{\sqrt{[\sum(X-x)^2\times\sum(Y-y)^2]}} = \frac{211{,}73}{\sqrt{150{,}71\times308{,}82}} = 0{,}98 \qquad (9.1)$$

похибку коефіцієнта кореляції

$$S_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}98^2}{20-2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}96}{18}} = 0{,}047 \qquad (9.2)$$

критерій достовірності коефіцієнта кореляції

$$t_r = \frac{r}{S_r} = \frac{0,98}{0,047} = 20,85 \qquad (9.3)$$

Теоретичне значення критерію Стьюдента знаходять за числом ступенів вільності $v_r$ = n-2 = 20–2 = 18

$t_{0,95}$ = 2,1

$t_{0,99}$ = 2,88

Про силу зв'язку роблять висновок за таким правилом: якщо коефіцієнт кореляції дорівнює 1¸то зв'язок повний; якщо він становить 0,66 – 0,99, то зв'язок сильний; якщо він знаходиться у межах 0,33 – 0,66 – середній; якщо коефіцієнт кореляції менший за 0,33, то зв'язок слабкий. Оскільки у нашому прикладі r = 0,98, то зв'язок між довжиною листя пшениці і його площею сильний.

Про напрям зв'язку висновок роблять залежно від знака при коефіцієнті кореляції: якщо він плюсовий, то кореляція пряма, а якщо мінусовий – зворотна. У нашому прикладі пряма.

Про достовірність зв'язку висновок роблять за правилом: якщо критерій достовірності коефіцієнта кореляції фактичний більший за теоретичні його значення або дорівнює їм, то зв'язок достовірний.

Оскільки критерій фактичний ($t_r$) складає 20,85, що значно більше теоретичних значень $t_{0,95}$ = 2,1 і $t_{0,99}$ = 2,88, то зв'язок між довжиною листя озимої пшениці і його площею достовірний на обох рівнях надійної ймовірності.

Регресійний аналіз.

Його здійснюють при сильному та достовірному зв'язку і будь-якому напрямі (прямому чи зворотному). Під регресією розуміють зміну результативної ознаки Y (функції) при певній зміні одної або декількох факторіальних (аргументів).

Зв'язок між функцією і аргументом виражають рівнянням регресії, яке має такий вигляд

$$Y = y + R_{yx}(X - x) \qquad (9.4)$$

Користуючись даними таблиці, розрахуємо коефіцієнт регресії $R_{yx}$, який покаже зміну площі листя озимої пшениці при зміні його довжини на 1 см.

$$R_{yx} = \frac{\sum(X-\overline{x})(Y-\overline{y})}{\sum(X-x)^2} = \frac{211,73}{150,71} = 1,4 \text{ см}^2 \qquad (9.5)$$

Отже, у нашому прикладі при зміні довжини листка на 1 см його площа змінюється на 1,4 см$^2$.

Підставивши значення коефіцієнта регресії у рівняння регресії, ми одержимо робоче рівняння, за яким, знаючи довжину листя, можна визначити його площу.

$$Y = y + R_{yx}(X - x) = 15,2 + 1,4(\mathrm{X} - 22,5) = 15,2 + 1,4\mathrm{X} - 31,5 \qquad (9.6)$$

Таким чином, Y= 1,4X – 16,3.

Вводячи у це рівняння чисельне значення довжини листя X, яке є середньою величиною від вимірювання 50–100 листків, вираховують площу листя, її можна визначити для цілої рослини або на певній площі посіву.

Наприклад, після розрахунків довжина листка склала 23,3 см (пара 12 у таблиці), а фактична площа листка при цій дожині становить 16,2 см$^2$.

Розрахуємо площу листка, взявши його середню довжину 23,3 см, скориставшись виведеним рівнянням регресії

$Y = 1{,}4*23{,}3 - 16{,}3 \approx 16{,}3$ см$^2$.

Точність прогнозування площі листя озимої пшениці за довжиною її листа розраховують за формулою.

Різниця між розрахунковою площею і фактичною становить 16,3 – 16,2 = 0,1 см$^2$ або це складає (0,1×100) : 16, 2 = 0,62 %, тому точність досліду дорівнюватиме

T% = 100 – 0,62 = 99,38% ≈ 99,4 %.

Таким чином, точність прогнозування площі листя озимої пшениці за довжиною листка є високою.

## 9.2 Застосування статистичних методів для прийняття рішень в умовах ризику

Задача прийняття рішень в умовах невизначеності виникає, коли необхідно діяти в ситуації, що відома не повністю. Задачу формулюють як задачу пошуку окремого найкращого (в якомусь розумінні) рішення на заздалегідь заданій множині допустимих рішень.

Основна трудність полягає у тому, що наслідки, пов’язані з прийняттям того або іншого рішення, залежать від невідомої ситуації. Ступінь неприйнятності цих наслідків прийнято вимірювати в умовних одиницях – втратах, які може зазнати особа, що приймає рішення (ОПР).

Вихідною інформацією, необхідною для розв’язання задачі є функція витрат F (d, S), що являє собою залежність втрат ОПР від двох аргументів: його рішення $d \in D$ та ситуації $S = \Theta$, в якій це рішення приймається.

Головний принцип розв’язання задач в умовах невизначеності полягає у перетворюванні функції витрат F (d, S) у функцію ризику R(d), яка відображає залежність ступеня ризику, на який іде ОПР, вже тільки від одного аргументу – від рішення $d \in D$, що приймають. Спосіб такого перетворення неоднозначний і залежить від вибраного критерію ризику. Від цього критерію залежить і зміст виразу «найкраще рішення»: найкращим називають рішення, що мінімізує ризик.

Застосування різних критеріїв ризику залежить від характеру невизначеності ситуації. Докладно вивчено два типи невизначеності: невизначеність стану природи і невизначеність цілеспрямованої протидії. Задачі, пов'язані з невизначеністю вказаних типів, вивчаються теорією статистичних рішень.

У задачах теорії статистичних рішень невизначеність ситуації не має антагоністичного (конфліктного) характеру. Передбачається, що зовнішнє середовище, в якому приймають рішення, байдуже до наших рішень і не протидіє нам.

Невизначеність у теорії статистичних рішень зв'язують лише з незнанням того, в якому стані знаходиться зовнішнє середовище – «природа», яку умовно можна вважати другим учасником гри. Здавалося б, що відсутність свідомої протидії супротивника спрощує задачу вибору рішення, тому що ОПР ніхто не заважає. Але це не так.

У крі з активним супротивником нам відомі його наміри протидіяти, а тому можемо розв'язувати задачу у припущенні, що супротивник прийме найгірше для нас рішення. Тим самим частково знімається елемент невизначеності гри.

У грі з природою таке обґрунтоване припущення зробити неможливо і тому вибір оптимального рішення значною мірою залежить від вибору критерію оптимальності, тобто від суб'єктивних уподобань ОПР.

Розглянемо формальну постановку задачі.

Передбачається, що ОПР (гравець А) може приймати одне з рішень $d_i \in D$, i = 1, …., m, а другим «гравцем» виступає зовнішнє середовище, яке може перебувати в одному зі станів $S_j = \Theta$. Формально таку задачу можна представити у вигляді матриці (табл. 9.2)

$$U = \|u_{ij}\|, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \qquad (9.7)$$

де $u_{ij}$ – виграш (корисність) від рішення $d_i$ у ситуації $S_j = \Theta$.

У даному випадку для вибору оптимальної стратегії вже не можна орієнтуватися на те, що другий гравець (природа) прагне мінімізувати наш виграш. Тому, поряд із платіжною матрицею, вводиться $m \times n$ матриця ризиків (табл. 9.3)

$$R = \|r_{ij}\| \qquad (9.8)$$

де $r_{ij}$ – величина ризику, який пов'язаний з рішенням $d_i \in D$ у ситуації $S_j = \Theta$.

Таблиця 9.2 – Матриця виграшів

| Можливі рішення ОПР | Стани зовнішнього середовища | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $S_1$ | … | $S_j$ | … | $S_n$ |
| $d_1$ | $u_{11}$ | … | $u_{1j}$ | … | $u_{1n}$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $d_i$ | $u_{i1}$ | … | $u_{ij}$ | | $u_{in}$ |
| …. | … | … | … | … | … |
| $d_m$ | $u_{m1}$ | … | $u_{mj}$ | … | $u_{mn}$ |

Таблиця 9.3 – Матриця ризиків

| Можливі рішення ОПР | Стани зовнішнього середовища | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $S_1$ | … | $S_j$ | … | $S_n$ |
| $d_1$ | $r_{11}$ | … | $r_{1j}$ | … | $r_{1n}$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $d_i$ | $r_{i1}$ | … | $r_{ij}$ | | $r_{in}$ |
| …. | … | … | … | … | … |
| $d_m$ | $r_{m1}$ | … | $r_{mj}$ | … | $r_{mn}$ |

Величину ризику визначають за допомогою різниці

$$r_{ij} = \max_i u_{ij} - u_{ij} \tag{9.9}$$

Між максимальним виграшом $u_{ij} = \max_i u_{ij}$, який ОПР потенційно отримала б, якщо б знала, що середовище знаходиться у певному стані $S_j$ та реальним виграшом $u_{ij}$, який ОПР отримає з вибором рішення $d_i \in D$ у даному стані $S_j = \Theta$.

Слід зауважити, що вихідна платіжна матриця (матриця виграшів) може однозначно бути перетворена в матрицю ризиків, але не навпаки (табл. 9.4).

Таблиця 9.4 – Перетворення платіжної матриці в матрицю ризиків

Платіжна матриця

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | 1 | 4 | 5 | **9** |
| $d_2$ | 3 | **8** | 4 | 3 |
| $d_3$ | **4** | 6 | **6** | 2 |

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | 4-1 | 8-4 | 6-5 | 9-9 |
| $d_2$ | 4-3 | 8-8 | 6-4 | 9-3 |
| $d_3$ | 4-4 | 8-6 | 6-6 | 9-2 |

Матриця ризиків

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | 3 | 4 | 1 | 0 |
| $d_2$ | 1 | 0 | 2 | 6 |
| $d_3$ | 0 | 2 | 0 | 7 |

У теорії статистичних рішень розглядають пошук оптимального розв'язку задачі в умовах:

– ризику, коли розподіл ймовірності P ($S_j$) станів середовища $S_j$=Θ відомий або його можна оцінити на основі попередніх експериментальних досліджень за вибіркою спостережень;

– невизначеності, коли невідомий розподіл ймовірності P ($S_j$) станів середовища $S_j$=Θ, а його оцінювання на основі попередніх експериментальних спостережень складно реалізувати або взагалі неможливо.

Задачу прийняття оптимальних рішень в умовах ризику формулюють наступним чином.

Нехай відомі ймовірності P ($S_j$) станів середовища $S_j$=Θ. Тоді для кожного рядка платіжної матриці можна визначити очікуваний виграш для фіксованого рішення $d_i \in D$ у вигляді математичного сподівання

$$\mathrm{E}\{u(d_i)\} = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} P(S_j) \qquad (9.10)$$

Оптимальною стратегією $d^* \in \{d_1, \ldots, d_m\}$ буде та з можливих стратегій, яка забезпечує найбільш очікуваний виграш

$$d^* = arg \max_{1 \le i \le m} \{u(d_i)\} \qquad (9.11)$$

Приклад. Матриця, у якій представлено виграші $u_{ij}$, 1≤ I ≤3, 1 ≤ j ≤ 4, що отримає ОПР від кожного з трьох рішень $d_i \in \{d_1, d_2, d_3\}$ у кожній з чотирьох ситуацій $S_j \in \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ з відомим розподілом ймовірності P ($S_j$).

Таблиця 9.5 – Матриця виграшів

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $\sum_{j=1}^{n} u_{ij} P(S_j)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P ($S_j$) | P ($S_1$) = 0,25 | P ($S_2$) = 0,3 | P ($S_3$) = 0,25 | P ($S_4$) = 0,2 | |
| $d_1$ | 1 | 4 | 5 | 9 | 4,5 |
| $d_2$ | **3** | **8** | **4** | **3** | **4,75** |
| $d_3$ | 4 | 6 | 6 | 2 | 4,7 |

В останньому стовпчику таблиці 9.5 надано розрахунки очікуваних результатів результатів ОПР для кожного можливого рішення, які визначені за формулою 9.10 математичного сподівання. Максимальному очікуваному результату відповідає рішення $d_2$, яке є оптимальним розв'язком задачі.

Якщо для відомого розподілу ймовірності перейти від матриці виграшів до матриці ризиків, то для кожного рядка такої матриці можна встановити очікуваний ризик з фіксованим рішенням $d_i \in D$ у вигляді математичного сподівання.

$$E\{r(d_i)\} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} P(S_j) \qquad (9.12)$$

Таке оптимальне рішення (стратегія) ОПР має задовольняти умову мінімального середнього ризику

$$d^* = arg \min_{1 \le i \le m} E\{r(d_i)\} \qquad (9.13)$$

Таблиця 9.6 – Матриця ризиків

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} P(S_j)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P ($S_j$) | P ($S_1$) = 0,25 | P ($S_2$) = 0,3 | P ($S_3$) = 0,25 | P ($S_4$) = 0,2 | |
| $d_1$ | 3 | 4 | 1 | 0 | 2,2 |
| $d_2$ | **1** | **0** | **2** | **3** | **1,35** |
| $d_3$ | 0 | 2 | 0 | 7 | 2,0 |

З іншого боку оптимальне рішення залежить від розподілу P ($S_j$) імовірності станів середовища. Тому для однієї і тієї ж матриці ризиків оптимальне рішення може змінитися, якщо зміниться розподіл P ($S_j$) (табл. 9.7).

Таблиця 9.6 – Матриця ризиків при зміні розподілу P ($S_j$)

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} P(S_j)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| P ($S_j$) | P ($S_1$) = 0,6 | P ($S_2$) = 0,1 | P ($S_3$) = 0,2 | P ($S_4$) = 0,1 | |
| $d_1$ | 3 | 4 | 1 | 0 | 2,4 |
| $d_2$ | 1 | 0 | 2 | 3 | 1,3 |
| $d_3$ | **0** | **2** | **0** | **7** | **0,9** |

Максимальному очікуваному результату тепер відповідає рішення $d_3$, яке є оптимальним розв'язком задачі.

# ТЕМА 10 МЕТОДИ КОЛЕКТИВНОГО ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

## 10.1 Постановка задачі колективного прийняття рішень

Відомим прийомом підвищення якості прийняття рішень є об'єднання спеціалістів відповідної області знань у колектив, який виробляє спільне рішення. Типовим прикладом подібного колективу є медичний консиліум, що приймає, що приймає колективне рішення щодо поточного стану пацієнта на основі врахування різних думок – особистих рішень експертів. Ідею колективного рішення можна застосовувати і до «колективу» формальних алгоритмів, що надає змогу підвищити достовірність розпізнавання ситуацій, які спостерігаються.

Нехай експерти $A_1, \ldots, A_N$, $N \geq 2$, братимуть участь у колективному прийнятті рішень. Припустимо, що група експертів розглядає неякий набір альтернатив, і кожний i-й член групи здійснює свій вибір $d_i \in D$, $i = 1, \ldots, N$. Виникає задача формування колективного рішення $d \in D$, що певним чином узгоджує індивідуальні рішення $d_1, \ldots, d_N$ та виражає «загальну думку» групи (рис. 10.1).

Синтез функції $d \in D$, яка визначає спосіб інтеграції індивідуальних рішень $d_1, \ldots, d_N$ членів колективу. Звичайно, різним принципам інтеграції індивідуальних рішень будуть відповідати колективні рішення.

Розглянемо спочатку один із найбільш популярних методів інтеграції індивідуальних рішень експертів – метод голосування.

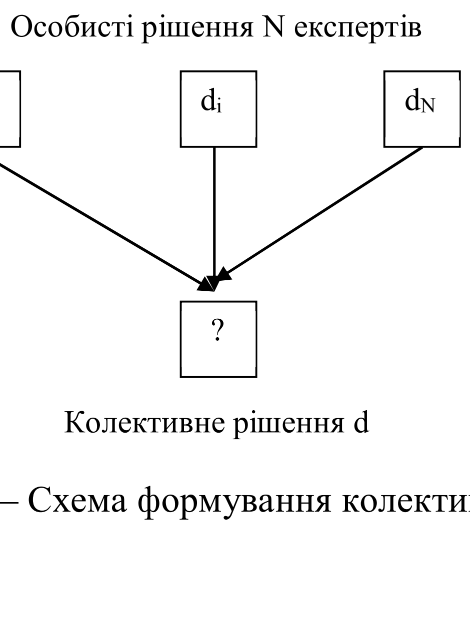


Рисунок 10.1 – Схема формування колективного рішення

## 10.2 Методи: відносної більшості голосів, де Борда, Кондорсе

Одним із способів побудови колективного рішення $d \in D$ є правило більшості, коли колективним рішенням вважається альтернатива, яка отримала найбільше число голосів експертів. Припускається, що заборонено голосувати відразу за два рішення.

Водночас такий, на перший погляд, справедливий метод надає однозначне рішення лише в тому випадку, коли число можливих альтернатив дорівнює двом (M=2) та експерти групи мають рівні компетентності в оцінюванні альтернатив. У загальному ж випадку метод голосування може не надати справедливе рішення та призвести до так званих «парадоксів» голосування.

Розглянемо метод голосування більш детально.

Метод ґрунтується на індивідуальних перевагах експертів щодо альтернатив $d \in D$. Нагадаємо, що коли експерт вважає, що альтернатива $d_i \in D$ перевершує альтернативу $d_j \in D$, то цей факт позначається так

$$d_i > d_j, i \neq j \tag{10.1}$$

Індивідуальний порядок переваг експерта – це набір альтернатив, які розташовані в порядку їх переваги конкретним експертом. Сукупність індивідуальних порядків переваг альтернатив, наданих експертами групи, називають профілем переваг.

Кожен з експертів має один голос і віддає його за найкращу, на його думку, альтернативу. Переможцем оголошують альтернативу, яка отримала більше половини голосів експертів (абсолютна більшість).

Якщо множина D містить тільки дві альтернативи, то правило більшості правомірно вважати найбільш справедливим. Якщо ж число альтернатив більше двох, то метод голосування може викликати сумніви в справедливості результату.

Покажемо це на характерних прикладах.

Приклад 1. Нехай N=29 експертів приймають рішення щодо M=3 альтернатив $d_1$, $d_2$, $d_3$.

Припустимо, що індивідуальні переваги експертів наступні:

15 експертів визнали, що $d_1>d_2>d_3$.

14 експертів визнали, що $d_2>d_3>d_1$.

Оскільки альтернатива $d_1$ набирає 15 голосів експертів, що більше половини, то вона стає переможцем. Але чи є вона дійсно кращою серед альтернатив?

Насправді, кращою може бути і альтернатива $d_2$, оскільки 14 експертів їй віддали перевагу, а 15 експертів поставили її на високе (друге) місце. До того ж, 14 експертів поставили альтернативу $d_1$ на останнє третє місце (після $d_3$).

Ще більш складний випадок виникає, коли при M>2 жодна з альтернатив не набирає абсолютно більшість (більше половини) голосів експертів. Як бути в такому випадку? Яку з альтернатив оголосити переможцем, якщо голосування проводиться в один тур?

Приклад 2. Нехай N=21 експертів та M=4 альтернативи $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ з наступними індивідуальними перевагами експертів:

3 експерти $d_1>d_2>d_3>d_4$.

5 експертів $d_1>d_3>d_2>d_4$.

7 експертів $d_2>d_4>d_3>d_1$.

6 експертів $d_3>d_2>d_4>d_1$.

Позначимо через $\gamma$ ($d_i$) сумарну кількість голосів, яку альтернатива $d_i$ отримає при голосуванні. Сумарна кількість голосів за альтернативу, яку в індивідуальному порядку експерти поставили на перше місце складає

$\gamma$ ($d_1$) = 8, $\gamma$ ($d_2$) = 7, $\gamma$ ($d_3$) = 6, $\gamma$ ($d_4$) = 0,

тобто жодна з альтернатив не отримує абсолютної більшості.

В таких випадках для прийняття колективного рішення можна використовувати правило відносної більшості: «перемагає» альтернатива, яка набирає більше голосів у порівнянні з іншими. В даному випадку перемагає альтернатива $d_1$, яка має доволі високий результат – майже 40% від загальної кількості голосів.

Популярність отримало правило Борда, відповідно до якого альтернатива, що займає останнє місце в індивідуальному порядку переваг, отримує 0 балів, передостаннє місце – 1 бал і т. д. Отже, альтернатива, яка займає перше місце в індивідуальному порядку переваг експерта, отримує від нього M-1 балів.

Тоді, для даних, описаних у прикладі 2, маємо

$$\text{3 експерти } \underset{3}{d_1} > \underset{2}{d_2} > \underset{1}{d_3} > \underset{0}{d_4}$$

$$\text{5 експертів } \underset{3}{d_1} > \underset{2}{d_3} > \underset{1}{d_2} > \underset{0}{d_4}$$

$$\text{7 експертів } \underset{3}{d_2} > \underset{2}{d_4} > \underset{1}{d_3} > \underset{0}{d_1}$$

$$\text{6 експертів } \underset{3}{d_3} > \underset{2}{d_2} > \underset{1}{d_4} > \underset{0}{d_1}$$

Зведемо сумарні бали, отримані альтернативами від всіх експертів (табл. 10.1). Отже, маємо таке впорядкування альтернатив

$$d_2 > d_3 > d_1 > d_4,$$

а значить переможцем, за правилом Борда, є альтернатива $d_2$ з найбільшою сумою балів.

Зауважимо, що колективна перевага не збігається із жодною індивідуальною перевагою. Крім того, переможець, за правилом Борда (альтернатива $d_2$) не співпадає з переможцем за правилом відносної більшості (альтернатива $d_1$).

Таблиця 10.1 – Сумарні бали за правилом Борда

| Альтернативи | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Бали | 24 | **44** | 38 | 20 |

Розглянемо ще одне відоме правило голосування – правило Кондорсе. Відповідно да правила Кондорсе, найкращою вважають альтернативу $d_i$, яка перемагає будь-яку іншу альтернативу при парному порівнянні за правилом більшості. Іншими словами. Альтернатива $d_i$ найкраща, коли число експертів, які вважають, що $d_i > d_j$, більше числа експертів, які вважають, що $d_j > d_i$, $\forall j \neq i$.

Позначимо через К $(d_i,d_j)$ кількість експертів, у яких в індивідуальному порядку переваг альтернатива $d_i \in D$ перевищує альтернативу $d_j \in D$, $j \neq i$.

Тоді за даними прикладу 2 кількість експертів, які вважають, що $d_1 > d_2$, дорівнює 8, тобто К $(d_i,d_j) = 8$. Аналогічним чином можуть бути визначені результати інших попарних переваг, які зведені у табл. 10.2.

Таблиця 10.2 – Результати попарних переваг альтернатив

| | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $d_1$ | – | 8 | 8 | 8 |
| $d_2$ | 13 | – | 10 | 21 |
| $d_3$ | **13** | **11** | **–** | **14** |
| $d_4$ | 13 | 0 | 7 | – |

За правилом Кондорсе, кращою має бути визнана альтернатива $d_3$, оскільки вона «виграє» у попарному порівнянні з кожною іншою альтернативою.

Таким чином, групове рішення залежить від прийнятого правила голосування та при одних і тих же даних може давати різні результати.

Так, за даними прикладу 2 виявилось, що:

– альтернатива $d_2$ – краща за правилом Борда,
– альтернатива $d_3$ – краща за правилом Кондорсе,
– альтернатива $d_1$ – краща за правилом відносної більшості.

## 10.3 Теорема Ерроу

Систематичне дослідження усіх можливих систем голосування провів у 1951 році Кеннет Ерроу із Стенфордського університету. Він поставив питання у найбільш загальному вигляді: чи можна створити таку систему голосування, що вона була одночасно раціональною (без протиріч), демократичною (одна людина – один голос) і вирішальною (давала можливість здійснити вибір)? Замість спроб винаходу такої системи Ерроу запропонував набір вимог, аксіом, яким ця система повинна задовольняти. Ці аксіоми повинні бути прийнятними з точки зору здорового глузду і допускати математичні вирази у вигляді деяких умов. На основі цих аксіом Ерроу спробував у загальному вигляді довести існування системи голосування, що задовольняє одночасно трьом перерахованим вище принципам.

Наведемо ці аксіоми.

1. Аксіома універсальності. Для будь-якого ранжування існує такий набір індивідуальних ранжувань, що їх підсумкове ранжування збігається з даним.

2. Аксіома монотонності. Якщо один із голосуючих змінив свою думку на користь кандидата А, а думки інших не змінилися, то в пудсумковому ранжуванні положення А не може погіршитися.

З цих аксіом, зокрема, випливає, що якщо всі індивідуальні ранжування збігаються, то і підсумкова збігається з ними, тобто колективний вибір точно повторює одностайну думку всіх голосуючих.

3. Аксіома незалежності. Результат порівняння між двома об’єктами А і В має залежати тільки від результатів порівняння їх в індивідуальних ранжуваннях, але не від порівняння їх з іншими об’єктами. Нехай виборець вважає, що з пари кандидатів А і В кращим є А. Ця перевага не повинна залежати від ставлення виборця до інших кандидатів.

Третя аксіома досить приваблива, проте не настільки очевидна із точки зору повсякденної людської поведінки. Так, третя аксіома Ерроу порушується суддями у фігурному катанні. Даючи порівняльні оцінки двом сильним фігуристам в одиночному катанні, вони намагаються врахувати можливість гарного виступу третього сильного кандидата, залишаючи йому шанси стати переможцем. Проте сама можливість пред’явлення вимоги незалежності до системи голосування в якості обов’язкового не викликає сумніву.

Визначивши аксіоми – бажані властивості системи голосування – необхідно знайти саме цю систему (правила голосування), або хоча б довести можливість її існування.

Перш за все, відзначимо, що такі правила існують. Наприклад, можна виділити одного з голосуючих і завжди вибирати його ранжування в якості підсумкового. Такі правила природно називати диктаторськими.Ерроу сформулював свої результати у вигляді теореми: будь-які системи голосування, що задовольняють аксіомам універсальності, монотонності та незалежності, засновані на диктаторському правилі. Додавання вимоги виключення диктатора до системи аксіом призводить до неможливості створення системи голосування, що задовольняє всім аксіомам Ерроу. Тому результат Ерроу називають «теоремою неможливості».

Результати, виявлені Ерроу, отримали широку популярність. Вони розвіяли надії знайти досконалу систему голосування. Проте результат Ерроу ще не означає остаточного вирішення цієї проблеми. Близько 60 років математики та економісти роблять спроби змінити вимоги Ерроу, «пом'якшити» аксіоми, що уникнути висновку, настільки неоднозначного для демократичної системи голосування. Однак системи аксіом, що виходять, виявляються навіть більш спірними, ніж початкові аксіоми Ерроу.

## 10.4 Визначенні функції колективної корисності. Егалітаризм та утилітаризм

Перед будь-якою людською спільнотою стоять дві основні задача: створення та розподіл. Як у взаємодії з природою створити побільше благ, і як розподілити витрати на створення цих благ і як розподілити самі блага між членами спільноти? І взагалі, якщо відомі функції індивідуальних корисностей, як побудувати функцію колективної корисності?

Формально задача колективного прийняття рішень формулюється так

$$\max\{u_i(x) | x \in X \subset E^n\}, i \in N = \{1, \dots, n\}, \qquad (10.2)$$

де $u_i$ – функція корисності i-го агента (§1), X – множина альтернатив.

Існування альтернативи x, на якій одночасно досягають максимуму всі індивідуальні функції корисності, у практичних задачах настільки рідкісний випадок, що його можна не враховувати (у цьому випадку задачі колективного прийняття рішень, як такої, і немає).

Отже, задача 10.2 є слабоструктурованою. Необхідна додаткова інформація, яка дозволила б визначити, що розуміється під розв'язком задачі 10.2. Можливо, наприклад, виділити «пріоритетного» члена спільноти («царя», «вождя»), індивідуальна функція корисності якого максимізується, для інших індивідуальних функцій корисності встановлюються «порогові» рівні $\overline{u_i} = const$

$$\max\{u_k(x) | u_i(x) \geq \overline{u}_i, i \neq k;\ x \in X\}, \qquad (10.3)$$

Зокрема $\overline{u}_i$ і $\overline{u}_j$, i≠j, можуть бути рівними. Якщо для фіксованих значень $\overline{u}_i$ задача 10.3 не буде мати розв'язку, то «пороги» (хоча б один) необхідно змінити.

Припускаючи ж, що апріорі всі члени суспільства рівні у своїх правах, навряд чи можна погодитись із постановкою 10.3. Логічними («демократичними») будуть дві такі «крайні» постановки

$$\sum_{i \in N} u_i(x) \to \max_{x \in X} \tag{10.4}$$

$$u_1(x) = u_2(x) = \cdots = u_n(x) \to \max_{x \in X} \tag{10.5}$$

Задача 10.4 називається утилітарною постановкою (функція $W_y(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i \in N} u_i$) називається утилітарною функцією колективної корисності, задача 10.5 – егалітарною (від латинського слова «рівність»). Інтерпретуючи функції індивідуальної корисності $u_i$ як прибуток і-го члена спільноти, отримуємо, що утилітаризм максимізує сумарний прибуток спільноти, не звертаючи уваги на його перерозподіл між членами спільноти (так, наприклад в оптимальній точці x може бути, що $u_1$ (x) = 1 млн грн, $u_2$ (x) = $u_n$ (x) – у «багатому суспільстві» всі, крім одного, бідні).

Егалітарна постановка може привести до ситуації, коли $u_1$ (x) = …. = $u_n$ (x) = 1 грн – «рівність у бідності» (див. рис. 10.2).

Оскільки ситуація з «абсолютною» рівністю здається «непродуктивною», як правило, розглядається функція колективної корисності у вигляді $W_e(u_1, \ldots, u_n) = \min_{i=\overline{1,n}} \{u_i\}$, яку необхідно максимізувати на множині альтернатив X. Ця функція називається егалітарною функцією колективної корисності. «Економічна» інтерпретація егалітарної функції зрозуміла – суспільство намагається максимізувати мінімальну «зарплату» (прибуток найбіднішого агента). Суперечка між утилітаризмом та егалітаризмом існує тисячоліттями, можна привести безліч аргументів «за» і «проти» як для першого, так і для другого. Ми ж будемо розглядати їх як «крайні» способи агрегації індивідуальних функцій корисності (ФК) у колективну (агреговану) функцію корисності (КФК).

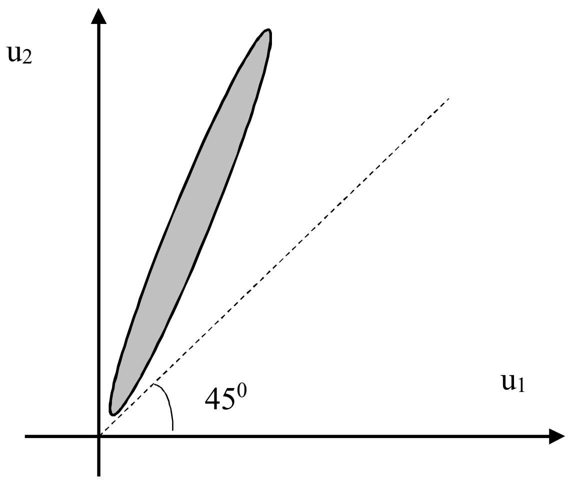


Рисунок 10.2 – Егалітарна концепція корисності

Як приклад розберемо ситуацію. Брат і сестра повинні поділити між собою одиницю нескінченно подільного пірога. Брат удвічі голодний, ніж сестра: один і той самий шматок пірога х приносить брату (з функцією корисності $u_1$) удвічі більшу корисність $u_1$ (x) =2$u_2$ (x), де $u_2$ – функція корисності сестри. Нехай функції $u_1$, $u_2$ є зростаючими, увігнутими й диференційованими.

Розв'язок утилітарної задачі: $u_1(x) + u_2(1 - x) \to \max\limits_{x \in [0,1]}$ знаходиться з необхідних умов оптимальності, оскільки функція є увігнутою. Маємо

$$\acute{u}_1(x*) = \acute{u}_2(1 - x*) = 0{,}5\acute{u}_1(1 - x*) < \acute{u}_1(1 - x*) \to x* > 1 - x* \to x* > 0{,}5$$

Розв'язок егалітарної задачі

$$u_1(\overline{x}) = u_2(1 - \overline{x}) = 0{,}5u_1(1 - \overline{x}) < u_1(1 - \overline{x}) \to \overline{x} < 1 - \overline{x} \to \overline{x} < 0{,}5$$

Отже, утилітарист віддає більшу частину пирога голодному брату, егалітарист віддає йому меншу частину. Чому? Бо турбується у першу чергу за голодну сестру – компенсує їй знижений апетит.

# ТЕМА 11 ПРЕДМЕТ ТА ЗАВДАННЯ ТЕОРІЇ ІГОР

## 11.1 Класифікація ігор за умовами взаємодії та інформованості гравців

У теорії ігор існує класифікації ігор: по числу гравців, числу стратегій гри, числу ходів, характеру взаємодії гравців, математичній структурі моделі гри, характеру виграшу, ступені інформованості гравців в грі і так далі.

Залежно від кількості гравців розрізняють ігри двох і n гравців. Перші з них найбільш вивчені. Ігри трьох і більше гравців менш досліджені через принципові труднощі і технічні можливості отримання вирішення із зростанням числа гравців. Проте теорія ігор для гравців останнім часом почала активно розвиватися, що зокрема, пов'язано з її ефективністю при прогнозі дій людей в таких відповідальних напрямах як політика, економіка, військова справа. При цьому типова ситуація, в якій проводився прогноз, включає від 30 до 40 гравців. Отриманий позитивний ефект досягає 90 %. Максимальна кількість учасників, для яких вирішувалася проблема, у ученого з США Буено де Меськита складала 200 гравців.

По кількості стратегій гри діляться на скінчені і нескінчені. Якщо в грі всі гравці мають кінцеве число можливих стратегій, то вона називається скінченою. Якщо ж хоч би один з гравців має нескінчену кількість можливих стратегій, гра називається нескінченою.

По характеру взаємодії ігри діляться на:

– безкоаліційні: гравці не мають права вступати в угоди, утворювати коаліції;

– коаліційні (кооперативні) – гравці можуть вступати в коаліції.

У кооперативних іграх коаліції наперед визначені.

По характеру виграшів гри діляться на: ігри з нульовою сумою (загальний капітал всіх гравців не міняється, а перерозподіляється між гравцями; сума виграшів всіх гравців дорівнює нулю) і ігри з ненульовою сумою.

По вигляду функцій виграшу гри діляться на: матричні, біматричні, безперервні, опуклі, сепарабельні, типу дуелей і ін.

За безперервну вважається гра, в якій функція виграшів кожного гравця є безперервною залежно від стратегій. Доведено, що ігри цього класу мають рішення, проте не розроблено практично прийнятних методів їх знаходження.

По ступеню інформованості гравців гри характеризуються як детерміновані, стохастичні, невизначені.

Матрична гра – це скінченна гра з нульовою сумою двох гравців, у якій задається виграш гравця А у вигляді матриці: рядок матриці відповідає номеру стратегії гравця А, стовпець – номеру стратегії гравця В, на перетині рядка і стовпця матриці знаходиться виграш гравця А, що відповідає застосовуваним стратегіям.

Біматрична гра – це скінченна гра з ненульовою сумою двох гравців, в якій виграші кожного гравця задаються матрицями окремо для відповідного гравця (у кожної матриці рядок відповідає стратегії гравця А, стовпець – стратегії гравця В, на перетині рядків і стовпців першої матриці знаходиться виграш гравця А, у другій матриці – виграш гравця В).

Для біматричних ігор також розроблено теорію оптимальної поведінки гравців, однак розв'язувати такі ігри складніше, ніж звичайні матричні.

Для складання матричної моделі гри введемо деякі припущення:

а) розглядаються тільки парні ігри за участі двох гравців А та В, для визначеності будемо вважати, що А завжди виграє (якщо $c_{ij}<0$, гравець А програє), а В завжди програє;

б) розглядаються ігри з нульовою сумою;

в) всі результати ходів гравців можна виразити кількісно у вигляді плати за хід;

г) стратегії гравців відомі заздалегідь;

д) гра складається з двох ходів: гравець А обирає одну із стратегій $A_i$, а гравець В – $B_j$, при цьому вибір кожного відбувається при повному незнанні вибору один одного.

Нехай гравці мають скінченну кількість можливих дій – вибір однієї з чистих стратегій, тоді вибір пари стратегій $A_i$ та $B_j$ однозначно визначає результат $c_{ij}$ – виграш гравця А та програш гравця В. При відомих значеннях $c_{ij}$ виграшу для кожної пари чистих стратегій $A_i$ та $B_j$ можна скласти матрицю виграшів А (програшів гравця В), яку називають платіжною, або матрицею матричної гри.

Оскільки матрична гра фактично вимагає шукати рішення в умовах невизначеності, це призводить до того, що основою розв'язку має стати використання одного з критеріїв таких задач.

Критерій вибору стратегії. Виходячи з принципу «обережності», обирають рішення, яке засноване на виборі найкращого результату з найгірших, тобто на використанні максимінного критерію для першого гравця:

– перший гравець А обирає рядок так, щоб виграш був найбільшим при будь-яких діях гравця В. для цього у кожному рядку він означає мінімальний елемент. Після цього обирає рядок з найбільшим із них;

і мінімаксного критерії для другого:

– другий гравець В обирає стовпець так, щоб його програш був найменшим. Для цього в кожному стовпчику він визначає максимальний елемент, після цього обирає стовпчик з найменшим із них.

$$\left.\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \min c_{1j} \\ \min c_{2j} \\ \dots \\ \min c_{mj} \end{matrix}\right\} \max_{A_i}\left\{\min_{B_j} C_{ij}\right\} = \alpha \qquad (11.1)$$

$$\min_{Bj}\left\{\max_{A_i} C_{ij}\right\} = \beta$$

Значення α називають нижньою ціною гри

$$\alpha = \max_{\mathrm{A_i}}\left\{\min_{\mathrm{B}_j}\{C_{ij}\}\right\} \qquad (11.2)$$

Значення ß називають верхньою ціною гри

$$\beta = \min_{B_j}\left\{\max_{A_i}\{C_{ij}\}\right\} \qquad (11.3)$$

При грі у чистих стратегіях верхня та нижня ціни гри збігаються. Точка (i; j), координатами якої є номери вибраних стратегій, в такому випадку називається сідловою точкою, значення $c_{ij} = V$ – ціною гри.

$$\alpha=\beta=V \qquad (11.4)$$

## 11.2 Стратегічні ігри

При слові «гра» може скластися уявлення, що мова йде про поверхневий, малозначимий предмет у масштабній картині світу, що вивчає такі тривіальні заняття, як азартні ігри та спорт, тоді як у світі є набагато важливіші питання – війна, освіта, кар'єра та відносини. Одна стратегічна гра – це не просто гра; усі перераховані питання і є прикладами ігор, і теорія ігор допомагає нам зрозуміти їх сутність. Тим не менш немає нічого поганого у тому, щоб почати вивчення теорії ігор стосовно азартних ігор та видів спорту.

Складові більшості ігор – удача, майстерність і стратегії у різних пропорціях. Ставити все на підкидання монети – це гра чистого везіння, якщо, звичайно, ви не є спеціалістом у галузі підтасовок та підкидання монет. Забіг на сто метрів – гра, що потребує виключно фізичних навичок, хоча у ній також може бути присутнім певний елемент випадковості – наприклад, у бігуна без видимих причин видався не дуже вдалий день.

Стратегія – це набір навичок іншого роду. У контексті спорту це ментальні навички, необхідні для того, щоб ефективно грати, а ще вміння розрахувати, як краще використовувати фізичні можливості. Наприклад, у тенісі Ви їх розвиваєте, відпрацьовуючи подачі. Стратегічні навички – це розуміння того, куди слід відправити подачу та доцільно виконати обводячий удар.

У футболі ви розвиваєте вміння ловити і кидати м'яч, блокувати суперника, відбирати у нього м'яч та ін. Тренер, знаючи фізичні можливості членів своєї команди та команди противника, організує гру так, щоб по максимуму використати навички своїх гравців та слабкі сторони суперника. Саме розрахунки тренера визначають стратегію. Фізичну гру у футбол ведуть самі спортсмени, а стратегічну – тренери та їх помічними у кабінетах і на боковій лінії.

Ваша задача на забігу у сто метрів – як можна вигідніше застосувати свої фізичні навички. На цій дистанції немає можливості спостерігати за суперниками та реагувати на їх дії, а значить, немає місця і для стратегії. А ось біль довгі забіги вже передбачають її наявність: чи потрібно вам очолювати забіг та задавати темп бігу, за який час до фінішу робити спробу вирватись уперед тощо.

Стратегічне мислення – це здатність аналізувати взаємодію з іншими людьми, тоді як вони, у свою чергу, роблять те ж саме. Під час марафону вашу суперники можуть зривати або підтримувати ваші спроби очолити забіг залежно від того, що більш відповідає їх інтересам. У тенісі противник намагається вгадати, куди ви спрямуєте свою подачу або обводячий удар; у футболі тренер команди противника будує гру так, щоб вона найкращим чином, на його думку, протистояла вашій стратегії гри. Безумовно, ви маєте враховувати плани суперника, точно так же, як і він враховує ваші. Теорія ігор – це аналіз про інтерактивний процес прийняття рішень.

Коли ви детально все зважуєте, перед тим, як що-небудь здійснити, тобто розумієте свої цілі та переваги, а також будь-які обмеження або вимоги до ваших дій, та осмислено обираєте свої дії, щоб досягти максимального успіху, виходячи із власних критеріїв, вважається, що ви поводите себе раціонально. Теорія ігор привносить ще один аспект у поняття раціональної поведінки, а саме – взаємодія з іншими, у рівному ступені раціональними людьми, що приймають рішення. Іншими словами, теорія ігор – це вчення про раціональну поведінку в інтерактивних ситуаціях.

Безумовно, теорія ігор не навчає секретам ідеальної гри або допомагає ніколи не програвати. По-перше. Ваш суперник може прочитати ті ж книжки; крім того, ви обидва не можете постійно вигравати. Ще важливіше те, що багато ігор містять чимало складних і тонких нюансів, а більшість реальних ситуацій включають у себе достатньо своєрідних та випадкових факторів. Теорія ігор не може запропонувати безпомилковий рецепт дій; що вона дійсно робить, так це надає ряд загальних принципів аналізу стратегічних взаємодій.

## 11.3 Антагоністичні ігри

Безкоаліційною грою будемо називати таку гру, в якій метою кожного гравця є отримання по можливості більшого індивідуального виграшу.

Антагоністична гра є окремим випадком безкоаліційної гри.

Гра $\Gamma =< \mathrm{I}, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I} >$ називається антагоністичною, якщо число гравців у ній дорівнює двом, а значення функцій виграшу цих гравців у кожній ситуації рівні по величині протилежні по знаку, тобто

$$H_1(s) = -H_2(s), \forall s \in S \qquad (11.5)$$

Із визначення виходить, що у будь-якій ситуації антагоністичної гри $H_1(s)+H_2(s)$=0. Іншими словами, антагоністична гра – це гра двох осіб з нульовою сумою.

Очевидно, що при заданні антагоністичної гри достатньо задати тільки одну функцію виграшу, друга однозначно визначається із формули 11.1.

Тому під антагоністичною грою зазвичай розуміють трійку: $\Gamma =< \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{H} >$, де А і В – множина стратегій гравців 1 та 2, а Н – функція виграшу гравця 1, задана на $S = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$.

Таким чином, безкоаліційна гра двох осіб з постійною сумою стратегічно еквівалентна певній антагоністичній грі.

У теорії ігор існує поняття сідлової точки. Це точка, у кій досягається максимум по першій змінній, а мінімум – по іншій.

Приклад. Перевіримо, чи має матриця сідлову точку. Якщо так, описуємо рішення гри у чистих стратегіях. Стратегія чиста – будь-яка із доступних для гравця дій, передбачених правилами гри.

Таблиця 11.3 – Інформаційні дані

| Гравці | $B_1$ | $B_2$ | a=min ($A_i$) |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 4 | 3 | 3 |
| $A_2$ | 2 | 4 | 2 |
| b = max ($B_i$) | 4 | 4 | 0 |

Знаходимо гарантований виграш, що визначається нижньою ціною гри $a = \max(a_i) = 3$, що вказує на максимальну чисту стратегію $A_1$. Верхня ціна гри $b = \min(b_i) = 4$. Що свідчить про відсутність сідлової точки, оскільки $a \neq b$, тоді ціна гри знаходиться у змішаних стратегіях.

Змішана стратегія – випадкова величина, значеннями якої є чисті стратегії гравця. Пояснюється це тим, що гравці не можуть об'явити противнику свої чисті стратегії: їх слід приховувати свої дії. Гру можна вирішити, якщо дозволити гравцям обирати свої стратегії випадковим чином (змішувати чисті стратегії).

## 11.4 Нестратегічні ігри

Кооперативні (нестратегічні) ігри відрізняються від ігор іншої категорії, безкоаліційних ігор, тим, що в них можливі так звані зобов'язуючі угоди між гравцями. Такі угоди називаються зобов'язуючими, тому що вони безумовно дотримуються гравцями у силу самої природи гри; наслідками таких угод є заключення союзів між гравцями (точніше, утворення коаліцій) і трансфери, тобто передача корисностей (виграшу) від одних гравців іншим. Вибір узгоджених дій, стратегій, ходів у конкретних позиціях – об'єкт дослідження теорій стратегічних і позиційних ігор. Для нас більш важливий той аспект кооперативних ігор, який має справу з діленням виграшів, отриманих коаліцією, серед учасників даної коаліції.

Розглянемо ґрунтовний приклад Дж. Фон Неймана, який призвів до поняття ділення та характеристичної форми гри. У ньому стратегіями гравців по сутності є вибір коаліції, у якій вони хочуть прийняти участь.

Приклад. Проста мажоритарна гра трьох осіб. Це гра трьох осіб з нульовою сумою.

Кожен гравець обирає один із номерів інших гравців, причому ходи усіх трьох гравців робляться одночасно – роблячи вибір, гравець не знає, які вибори зробили інші гравці. Якщо два гравця обрали один одного, то вони утворили пару. Буде утворена або 1 пара, або жодної. Якщо пара є, то обидва гравця цієї пари отримають по 1/2, а третій (виключений гравець) втрачає 1. Якщо пар немає, то у всіх гравців нульовий виграш.

Правила гри повністю симетричні та абсолютно безневинні, проте поведінка гравців свідомо такою не буде. Було б нерозумно не утворювати коаліцій, однак те, яка саме із трьох коаліцій буде утворена, виходить за межі теорії.

Можливі модифікації правил:

1) якщо склалась пара $(\{1,2\})$, то $u_1 = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $u_2 = \frac{1}{2} - \varepsilon$, в інших випадках нічого не змінюється;

2) якщо гравець 1 приймає участь у парі, то $u_1 = \frac{1}{2} + \varepsilon$, інший учасник пари отримує $\frac{1}{2} - \varepsilon$;

3) у парах $(\{1,3\})$ та $(\{2,3\})$ гравці 1 і 2 виграють $\frac{1}{2} + \varepsilon$, а для гравця 3 $u_3 = \frac{1}{2} - \varepsilon$.

Розглянемо, наприклад, модифікацію 1. Хоча гравець 1 по правила гри має перевагу, він не може нею скористуватись. Уявімо, що гра не допускає узгоджень між гравцями. Тоді (за умови раціональності гравців) гравець 1 обере гравця 2, оскільки для нього пара (1,2) більш приваблива; гравець 2 обере гравця 3, оскільки пара (1,3) ніколи не утворюється, гравець 3 обере гравця 2. Краще, що у ситуації, що склалася, може зробити гравець 1, це повернути додаток $\varepsilon$ гравцю 2, щоб зробити пару (1,2) такою ж привабливою для гравця 2, к конкуруюча пара (2,3).

Більш суттєва наступна модифікація. Гра з трьох осіб з коаліціями різної сили.

Гравці 1,2, об'єднавшись, можуть отримати від гравця 3 суму ≤ c, 1 і 3 від 2-го ≤ c, 2 і 3 від 1-го ≤ a. Дослідимо необхідні трансферти.

Нехай гравець 1 намагається об'єднатись з гравцем 2 або 3 та отримати x у будь-якій ситуації: тоді гравець 2 у коаліції з 1-м може отримати ≤ (c–x), а гравець 3 − ≤ (b–x), що призводить до нерівності (c–x) + (b–x) ≥ α, тобто $x \leq \frac{-a+b+c}{2}$; відповідно, максимальний виграш гравця 1 складає $\alpha \leq \frac{-a+b+c}{2}$. Аналогічно розраховуються максимальні виграші гравців 2 і 3 – відповідно $\beta = \frac{a-b+c}{2}$ та $\gamma = \frac{a+b-c}{2}$. Ці виграші дійсно досягаються, оскільки α + ß = c, α+γ=b, ß+γ = a.

## 11.5 Матричні ігри

Розглянемо математичну модель взаємодії індивідуальних учасників, кожен з яких характеризується можливими діями та своїми цілями. Кожен з учасників, діючи самостійно, виходить з егоїстичних мотивів і прагне досягти найкращого результату особисто для себе. Такі моделі складають зміст безкоаліційної теорії ігор.

Математична модель, що описує взаємодію різних сторін, повинна адекватно відображати основні характеристики такої взаємодії.

По-перше, в моделі повинні бути вказані учасники взаємодії. В теорії ігор їх прийнято називати гравцями. Тобто, повинен бути заданий список гравців, який часто представляється списком {1,2,…,n}, де 1 представляє першого, 2-другого, і т. д., n представляє останнього, n-го гравця.

По-друге, гравці роблять певні дії та впливають таким чином на процес взаємодії. Фактично, взаємодія визначається набором дій всіх учасників або гравців. В теоретичних моделях кожному гравцю $i \in N$ приписується множина $X_i$ всіх можливих дій та його вплив зводиться до вибору конкретного елемента $x_i$ з цієї множини. Кожна можлива дія гравця називається стратегією та множина всіх стратегій позначається $X_i$.

Розвиток процесу взаємодій визначається вибором дій всіх гравців. В моделі визначаються впорядковані набори стратегій $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, де стратегія

$x_i \in X_i$ є вибором гравця $i \in N$. Такий вибір називається ситуацією гри та множина всіх ситуацій є декартовий добуток відповідних множин стратегій $X = \prod_{i \in N} X_i$. Набір стратегій $(x_1,x_2,\ldots x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ всіх гравців, крім і-го позначають $x_{-i}$ (цей набір стратегій описує поведінку так би мовити зовнішнього світу, щодо і-го гравця).

По-третє, гравці роблять свої вибори на підставі своїх переваг, де ціль гравця визначається функцією виграшу, тобто відображенням з множини ситуацій в множину виграшів. Вважається, що виграш визначається дійсним числом, який показує степінь досягнення бажаного результату. Таким чином, $f_i(X) \rightarrow R$ є функцією виграшу і-го гравця.

Таким чином, три основні характеристики взаємодії визначаються списком учасників (множина гравців N), множиною їхніх можливих дій (множина стратегій $X_i$) та цілями сторін, які взаємодіють (набором функцій виграшу $f_i$, $i=\overline{1,n}$).

Математична модель з даними властивостями називається безкоаліційна гра n осіб в нормальній формі

$$\Gamma = < N, \{X_i\}_{i \in N} \{f_i(x)\}_{i \in N} > \qquad (11.6)$$

Виділимо важливі класи безкоаліційних ігор. Розглядаються ігри двох, трьох і т. д. осіб, які визначаються по кількості представлених в ній гравців.

## 11.6 Домінування в матричних іграх. Спрощення матричних ігор

Вирішення матричних ігор тим складніше, чим більше розмірність платіжної матриці. Тому для ігор із платіжними матрицями великої розмірності пошук оптимального вирішення можна спростити, якщо зменшити їх розмірність шляхом виключення дублюючих або завідомо невигідних (тих, що домінують) стратегій.

Визначення 1. Якщо у платіжній матриці всі елементи рядка (стовпця) дорівнюють відповідним елементам іншого рядка (стовпця), то відповідні цим рядкам (стовпцям) стратегії називаються дублюючими.

Визначення 2. Якщо у платіжній матриці гри всі елементи певного рядку, що визначає стратегії Ai гравця A, не більше (менше або деякі дорівнюють) відповідних елементів іншого рядка, то стратегія $A_i$ називається тією, що домінує (завідомо невигідна).

Визначення 3. Якщо у платіжній матриці все елементи деякого стовпця, що визначає стратегію $B_j$ гравця B не менше (більше або деякі дорівнюють) відповідних елементів іншого стовпця, то стратегія $B_j$ називається тією, що домінує (завідомо невигідна).

Правило. Вирішення матричної гри не зміниться, якщо з платіжної матриці виключити рядки і стовпці, що відповідають дублюючим стратегіям та тим, що домінують.

Із платіжної матриці видно, що стратегія $A_2$ дублює стратегію $A_5$, тому що будь-яку з них можна відкинути (відкинемо стратегію $A_5$). Порівнюючи стратегії $A_1$ та $A_4$, бачимо, що кожний елемент рядку $A_4$ не більше відповідного елемента рядку $A_1$. Тому застосування гравцем A домінуючої над $A_4$ стратегії $A_1$ завжди забезпечує виграш, не менший того, який був би отриманий при застосуванні стратегії $A_4$. Відповідно, стратегію $A_4$ можна відкинути.

Приклад. Спростити матричну гру, платіжна матриця якої має вигляд

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 9 | 3 | 4 | 5 |
| $A_2$ | 4 | 7 | 7 | 9 | 10 |
| $A_3$ | 4 | 6 | 3 | 3 | 9 |
| $A_4$ | 4 | 8 | 3 | 4 | 5 |
| $A_5$ | 4 | 7 | 7 | 9 | 10 |

Таким чином, маємо спрощену матричну гру з платіжною матрицею вигляду

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 9 | 3 | 4 | 5 |
| $A_2$ | 4 | 7 | 7 | 9 | 10 |
| $A_3$ | 4 | 6 | 3 | 3 | 9 |

Із цієї матриці видно, що в ній деякі стратегії гравця B домінують над іншими: $B_3$ над $B_2$, $B_4$ і $B_5$. Відкидаючи стратегії, що домінують, - $B_2$, $B_4$, $B_5$, отримуємо гру 3x2, що має платіжну матрицю виду

| | $B_1$ | $B_3$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 3 |
| $A_2$ | 4 | 7 |
| $A_3$ | 4 | 3 |

У цій матриці стратегія $A_3$ домінує над стратегією $A_1$, $A_2$. Відкидаючи стратегію $A_3$, отримуємо гру 2×2 з платіжною матрицею.

| | $B_1$ | $B_3$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 5 | 3 |
| $A_2$ | 4 | 7 |

Алгебраїчні методи вирішення матричних ігор іноді виконувати простіше, якщо використовувати також наступні властивості матричних ігор.

Властивість 1. Якщо до всіх елементів платіжної матриці додати (вирахувати) одне й те ж число C, то оптимальні змішані стратегії гравців не зміняються, а тільки ціна гри збільшиться (зменшиться) на це число C.

Властивість 2. Якщо кожен елемент платіжної матриці помножити на позитивне число к, то оптимальні змішані стратегії гравців не зміняються, а ціна гри помножиться на к.

Відзначимо, що ці властивості є вірними і для ігор, що мають сідлову точку. Ці дві властивості матричних ігор застосовуються у наступних випадках:

1) якщо матриця гри поряд з позитивними має й від'ємні елементи, то ко всім її елементам додають таке число, щоб виключити від'ємні числа у матриці;

2) якщо матриця гри має дробні числа, то для зручності обчислень елементи цієї матриці слід помножити на таке число, щоб всі виграші були цілими числами.

## 11.7 Метод наближеного визначення ціни гри

Розв'язання матричних ігор при розмірах n × m, більших або таких, що дорівнюють 3 × 3, та відсутності сідлових точок у чистих стратегіях або можливості зменшити розміри матриці за допомогою вилучення домінуючих стратегій у загальному випадку можливе тільки за допомогою числових методів. Розглянемо один із таких методів – послідовного наближення гри. У цьому методі послідовно розігрується багато партій. У кожній партії обидва гравця вибирають ті стратегії, які дають їм найбільший сумарний виграш у всіх партіях, включаючи поточну. Після кожної партії матричної гри обчислюється середнє значення виграшу $v_1$ в одній партій першого гравця, середнє значення програшу $v_2$ в одній партії другого гравця та півсума $v_1$ та $v_2$, що береться за наближене значення ціни матричної гри v

$$v_1 = \frac{1}{N}\max(S_1^1, S_2^1, \dots, S_n^1);$$
$$v_2 = \frac{1}{N}\min(S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2); \qquad (11.7)$$
$$v = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

де N – номер партії, що розігрується; $S_1^1, S_2^1, \dots, S_n^1$ – виграші першого гравця в N партіях відповідно при застосуванні свої першої, другої, …., n-ї чистої стратегії; n – кількість чистих стратегій першого гравця; $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ – програші другого гравця в N партіях відповідно при застосуванні свої першої, другої, … m – кількість чистих стратегій другого гравця.

Для визначення оптимальних змішаних стратегій обох гравців підраховуються $f_i^1\left(i = \overline{1,n}\right)$, $f_j^1\left(i = \overline{1,m}\right)$ застосування кожної чистої стратегії відповідно першого та другого гравців. Ці частоти беруть за наближені значення імовірностей застосування відповідних чистих стратегій в оптимальних змішаних стратегіях обох гравців.

Доведено, що при необмеженому збільшенні кількості партій середній виграш першого гравця та середній програш другого гравця необмежено прагнуть до ціни гри. Якщо розв'язок матричної гри єдиний, то наближені значення змішаних стратегій обох гравців необмежено наближаються до їх оптимальних змішаних стратегій.

Обсяг обчислень у цьому методі пропорційний сумі кількості рядків та стовпців вихідної матриці гри.

## 11.8 Властивості оптимальних стратегій гри

Якщо α≠ß, а точніше α<ß, це означає, що не існує єдиних стратегій для першого і другого гравців для отримання оптимального результату. Тоді логіка гри вимагає «змішувати» стратегії при повторенні однакових ігор з ймовірнісними «ваговими» коефіцієнтами з метою отримати оптимальну ціну гри α<V<ß, тобто підвищити виграш і знизити програш, зводячи їх значення до ціни гри. Зміст ймовірнісних «вагових» коефіцієнтів полягає у знаходженні ймовірностей вибору тієї або іншої стратегії, які утворюють вектори мішаних стратегій для кожного гравця.

Для першого гравця вектор мішаних стратегій

$$\vec{\mathrm{p}} = (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots, \mathrm{p}_m), \tag{11.8}$$

де $p_i$ (i = 1 …., m) – ймовірність вибору першим гравцем стратегії $A_i$.

Для другого гравця вектор мішаних стратегій

$$\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n), \tag{11.9}$$

де $q_j$ (j = 1, …., n) – ймовірність вибору другим гравцем стратегії $B_j$.

Оскільки якісь стратегії будуть обов’язково використані, вектору мішаних стратегій притаманна властивість

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \tag{11.10}$$

Матрична гра у чистих стратегіях є окремим випадком гри у мішаних стратегіях. Вектори $\vec{\mathrm{p}}$ та $\vec{q}$ у випадку гри у чистих стратегіях мають нульові компоненти, окрім значень $p_i$=$q_j$=1 (якщо (i; j) – сідлова точка).

Для розв’язання матричної гри у мішаних стратегіях, а саме знаходження ціни гри і оптимального значення векторів мішаних стратегій ($\vec{\mathrm{p}}$; $\vec{q}$), які утворюють сідлову точку цієї гри, вводиться платіжна функція гри.

$$f(\vec{p}; \vec{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_i q_j \tag{11.11}$$

Тепер дамо точне визначення поняття сідлової точки, яке розтлумачує мотивацію такої назви. Сідловою точкою ($\vec{\mathrm{p}}*$ ; $\vec{q}*$) платіжної функції називають таку точку, яка забезпечує виконання ланцюга нерівностей

$$f(\vec{p}; \overrightarrow{q*}) \leq f(\overrightarrow{p*}; \overrightarrow{q*}) \leq f(\overrightarrow{p*}; \vec{q}) \tag{11.12}$$

Зміст цієї системи полягає в тому, що сідлова точка, компонентами якої є два типи змінних, одночасно виконує роль точки максимуму по одному типу змінних (у даному випадку по компонентах вектору $\vec{\mathrm{p}}$) і точки мінімуму (по компонентах вектору $\vec{q}$).

Для практичного знаходження сідлової точки використовують умови, що відображені у теоремі Неймана.

Теорема Неймана. Кожна скінченна гра має хоча б один розв’язок (можливо, в області мішаних стратегій).

Нехай V= $f(\overrightarrow{p*};\overrightarrow{q*})$ - розв'язок матричної гри (ціна гри) у мішаних стратегіях, тоді як будь-яка скінченна матрична гра у мішаних стратегіях має сідлову точку, для компонент якої необхідно або достатньо виконання умов, що задані системою нерівностей (відзначимо, що за умовами задачі α<V<ß).

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq V \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j \leq V \end{cases} \tag{11.13}$$

(нерівностей першого типу – n, другого типу – m).

Практично оптимальні значення $(\overrightarrow{p*};\overrightarrow{q*})$ знаходяться з лінійної системи m+n+2 рівнянь.

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = V \\ \sum_{i=1}^{m} p_1 = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \end{gathered} \tag{11.14}$$

Отримана система є лінійною відносно невідомих V, pi (I = 1, …, m), qj (j=1, …, n), оптимальні значення яких знаходяться методами лінійної алгебри.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Алескеров Ф. Т. Бинарные отношения, графы и коллективные решения : учеб. пособие для вузов / Ф. Т. Алескеров, Э. Л. Хабина, Д. А. Шварц. – М. : Изд. Дом ВШЭ, 2006. – 298 с.

2. Волошин О. Ф. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посібник / О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. – Київ : Вид.-поліг. центр «Київ. ун-т», 2010. – 336 с.

3. Грешилов А. А. Математические методы принятия решений : учеб. пособие / А. А. Грешилов. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 647 с.

4. Горбань І. І. Теорія ймовірності і математична статистика для наукових працівників та інженерів / І. І. Горбань. – Київ : ІПММС, 2003. – 244 с.

5. Гусейн-Заде С. М. Разборчивая невеста / С. М. Гусейн-Заде. – М. : Изд. Моск. Центра непрерывного математического образования, 2003. – 24 с.

6. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения (пер. с англ.) / М. Де Гроот. – М. : Мир, 1971. – 491 с.

7. Іваненко В. І. Прийняття рішення в умовах невизначеності / В. І. Іваненко, М. М. Дідук. – Київ : Енциклопедія кібернетики, 1973. – Т. 2. – С. 292–294.

8. Жуковська О. А. Основи інтервального аналізу : навч. посібник / О. А. Жуковська. – Київ : Освіта України, 2009. – 136 с.

9. Жуковская О. А. Интервальное обобщение байесовской модели принятия коллективного решения в конфликтных ситуациях / О. А. Жуковская, Л. С. Файнзильберг // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 3. – С. 133–144.

10. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій / Ю. П. Зайченко. – Київ : Вид. Дім «Слово», 2006. – 816 с.

11. Згуровский М. З. Модифицированный метод анализа иерархий / М. З. Згуровский, А. А. Павлов, А. С. Штанькевич // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2010. – № 1. – С. 7–25.

12. Кини Р. Л. Принятие решений по многим критериям : Предпочтения и замещения (пер. с англ.) / Р. Л. Кини, Х. Райфа. – М. : Радио и связь, 1981. – 560 с.

13. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений / О. И. Ларичев. – М. : Логос, 2000. – 296 с.

14. Литвак Б. Г. Экспертная информация : Методы получения и анализа / Б. Г. Литвак. – М. : Радио и связь, 1982. – 184 с.

15. Миркин Б. Г. Проблема группового выбора / Б. Г. Миркин. – М. : Наука, 1974. – 256 с.

16. Ногин В. Д. Принятие решений при многих критериях. Учеб.-метод. пособие / В. Д. Ногин. – Спб. : Ютас, 2007. – 104 с.

17. Подиновский В. В. Парето – оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Наука, 1982. – 254 с.

18. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий (пер. с англ.) / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1993. – 278 с.

19. Степашко В. С. Комп'ютерний експеримент в індуктивному моделюванні / В. С. Степашко, С. М. Єфіменко, Є. А. Савченко. – Київ : Наук. думка, 2014. – 222 с.

20. Файнзильберг Л. С. Байєсова схема принятия коллективных решений в условиях противоречий / Л. С. Файнзильберг // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 3. – С. 112–122.

21. Файнзильберг Л. С. Обучаемая система поддержки принятия коллективного решения группы независимых экспертов / Л. С. Файнзильберг // Управляющие системы и машины. – 2003. – № 4. – С. 62–67.

22. Файнзильберг Л. С. Математические методы оценки полезности диагностических признаков / Л. С. Файнзильберг. – Киев : Освіта України, 2010. – 152 с.

23. Шлезингер М. И. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию / М. И. Шлезингер, В. Главач. – Киев : Наук. думка, 2004. – 545 с.

24. Ivanenko V. I. Decision Systems and Nonstochastic Randomness / V. I. Ivanenko. – Springer, 2010. – 272 p.

*Навчальне видання*

**ФЕДОТОВА** Юлія Володимирівна

# МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ ЕКОНОМІЧНИХ РІШЕНЬ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної, заочної і дистанційної форм навчання зі спеціальності 051 – Економіка)*

Відповідальний за випуск *М. С. Наумов*

*За авторською редакцією*

Комп'ютерне верстання *О. Г. Ткаченко*

План 2020, поз. 106 Л

Підп. до друку 02.12.2021. Формат 60 × 84/16.
Електронне видання. Ум. друк. арк. 5,2.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.