

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до виконання розрахунково-графічної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
Модуль 2
*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
зі спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій)*

Харків

ХНУМГ ім. О. М. Бекетова

2022

Методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика». Модуль 2 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 193 – Гедезія та землеустрій) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. С. М. Мордовцев. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. –39 с.

Укладач канд. техн. наук, доц. С. М. Мордовцев

Рецензент

С. М. Ламтюгова, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 5 від 24.11.2021.

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| ВСТУП..... | 4 |
| 1 ЗАВДАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ..... | 5 |
| Завдання 1 Основні поняття сферичної геометрії..... | 5 |
| Завдання 2 Основні формули сферичних трикутників..... | 6 |
| Завдання 3 Розрахування прямокутних сферичних трикутників | 7 |
| Завдання 4 Розрахування косокутних сферичних трикутників | 9 |
| 2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ | 10 |
| Завдання 1 | 10 |
| Завдання 2 | 12 |
| Завдання 3 | 13 |
| СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ..... | 24 |
| ДОДАТОК А ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ | 25 |
| ДОДАТОК Б СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ СФЕРИЧНОГО ТРИКУТНИКА..... | 26 |
| ДОДАТОК В ЗАПИС ФОРМУЛ В MS EXCEL | 28 |
| ДОДАТОК Г СТВОРЕННЯ ФУНКЦІЇ GRADMC В MS EXCEL..... | 34 |
| ДОДАТОК Д СТВОРЕННЯ ФУНКЦІЇ TEST1 І TEST2 В MS EXCEL | 35 |
| ДОДАТОК Е СТВОРЕННЯ ФУНКЦІЇ ODNOR1 В MS EXCEL | 36 |
| ДОДАТОК Ж СТВОРЕННЯ ФУНКЦІЇ ODNOR2 В MS EXCEL..... | 37 |
| ДОДАТОК И СТВОРЕННЯ ФУНКЦІЇ ODNOR3 В MS EXCEL..... | 38 |

ВСТУП

Методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика» . Модуль 2 розроблені для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій, які навчаються в Харківському національному університеті міського господарства імені О. М. Бекетова.

Метою виконання розрахунково-графічної роботи є формування у майбутніх фахівців з геодезії, картографії та землеустрою базових математичних знань для розв'язування практичних задач у сфері їх професійної діяльності.

Сучасні програми навчання приділяють велику увагу самостійній роботі студентів, тому в методичних рекомендаціях особлива увага приділяється доступному поданню теоретичного матеріалу, необхідного для розв'язання запропонованих завдань.

Після вивчення теоретичного матеріалу студент вирішує завдання розрахунково-графічної роботи відповідно до варіанту. У додатку А наведено зразок оформлення титульного аркуша роботи.

1 ЗАВДАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Завдання 1 Основні поняття сферичної геометрії

Завдання 1 складається з двох завдань, які вибираються студентом згідно з варіантом.

Завдання 1.1. Обчислити довжину дуги S паралелі Земної кулі ($R=6370$ км), на широті φ , якщо різниця довгот дорівнює $\Delta\lambda$ (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Дані для виконання завдання 1.1

| Варіант. | $\Delta\lambda$ | φ | Варіант. | $\Delta\lambda$ | φ |
|----------|-----------------|-----------|----------|-----------------|-----------|
| 1 | 1°10'15" | 55°45'00" | 11 | 17°19'21" | 31°45'17" |
| 2 | 5°12'17" | 54°31'25" | 12 | 20°17'18" | 35°40'01" |
| 3 | 2°11'18" | 56°29'30" | 13 | 26°30'17" | 40°31'02" |
| 4 | 25°17'19" | 56°50'40" | 14 | 11°29'11" | 43°17'07" |
| 5 | 5°20'30" | 89°10'10" | 15 | 9°33'18" | 45°18'19" |
| 6 | 4°31'49" | 45°10'02" | 16 | 7°41'35" | 46°19'17" |
| 7 | 10°29'03" | 40°21'05" | 17 | 6°31'17" | 80°20'03" |
| 8 | 11°30'41" | 39°31'42" | 18 | 15°17'13" | 82°17'07" |
| 9 | 30°10'29" | 49°27'12" | 19 | 19°21'34" | 85°20'20" |
| 10 | 26°11'30" | 44°31'11" | 20 | 13°31'11" | 81°30'15" |

Завдання 1.2. Довжина дуги AB паралелі Земної кулі на широті φ° дорівнює S . Визначте довжину дуги L екватора між меридіанами, що проходять через точки A та B .

Таблиця 1.2 – Дані для виконання завдання 1.2

| Варіант. | S | φ | Варіант | S | φ |
|----------|------|-----------|---------|------|-----------|
| 1 | 1200 | 31°45'17" | 11 | 100 | 55°45'00" |
| 2 | 1800 | 35°40'01" | 12 | 320 | 54°31'25" |
| 3 | 2240 | 40°31'02" | 13 | 140 | 56°29'30" |
| 4 | 900 | 43°17'07" | 14 | 1600 | 56°50'40" |
| 5 | 720 | 45°18'19" | 15 | 8 | 89°10'10" |
| 6 | 600 | 46°19'17" | 16 | 360 | 45°10'02" |
| 7 | 120 | 80°20'03" | 17 | 890 | 40°21'05" |
| 8 | 300 | 82°17'07" | 18 | 1000 | 39°31'42" |
| 9 | 180 | 85°20'20" | 19 | 2180 | 49°27'12" |
| 10 | 250 | 81°30'15" | 20 | 2076 | 44°31'11" |

Завдання 2 Основні формули сферичних трикутників

Знайти найкоротшу відстань (ортодромію) між містами (табл. 2.1).

Координати міст вказані в таблиці 2.2.

Таблиця 2.1 – Дані для виконання завдання 2

| Вар. | Місто 1 | Місто 2 | Вар. | Місто 1 | Місто 2 |
|-----------|------------|------------------|-----------|------------------|------------|
| 1 | Києва | Вінниця | 13 | Чернівці | Черкаси |
| 2 | Дніпро | Житомир | 14 | Києва | Суми |
| 3 | Донецьк | Івано-Франківськ | 15 | Чернігів | Дніпро |
| 4 | Києва | Сімферополь | 16 | Донецьк | Одеса |
| 5 | Кіровоград | Запоріжжя | 17 | Харків | Львів |
| 6 | Львів | Сум | 18 | Києва | Дніпро |
| 7 | Одеса | Луганськ | 19 | Одеса | Рівне |
| 8 | Чернівці | Харків | 20 | Житомир | Запоріжжя |
| 9 | Херсон | Луганськ | 21 | Луцьк | Харків |
| 10 | Луганськ | Ужгород | 22 | Луганськ | Чернігів |
| 11 | Черкаси | Львів | 23 | Ужгород | Донецьк |
| 12 | Кіровоград | Хмельницький | 24 | Івано-Франківськ | Кіровоград |

Таблиця 2.2 – Дані для виконання завдання 2

| Місто | Широта | Довгота | Місто | Широта | Довгота |
|------------------|---------|---------|--------------|--------|---------|
| Вінниця | 49°14' | 28°29' | Полтава | 49°34' | 34°34' |
| Дніпро | 48°27' | 34°59' | Рівне | 50°37' | 26°15' |
| Донецьк | 48°00' | 37°48' | Сімферополь | 44°56' | 34°6' |
| Житомир | 50°15' | 28°40' | Сум | 50°55' | 34°45' |
| Запоріжжя | 47°50' | 35°10' | Тернопіль | 49°34' | 25°36' |
| Івано-Франківськ | 48°55' | 24°43' | Ужгород | 48°37' | 22°18' |
| Києва | 50° 27' | 30°30' | Харків | 50°00' | 36°15' |
| Кіровоград | 48°30' | 32°16' | Херсон | 46°38' | 32°35' |
| Луганськ | 48°35' | 39°20' | Хмельницький | 49°25' | 26°58' |
| Луцьк | 50°45' | 25°20' | Черкаси | 48°25' | 32°04' |
| Львів | 49°50' | 24°00' | Чернігів | 51°30' | 31°18' |
| Одеса | 46°28' | 30°44' | Чернівці | 48°18' | 25°56' |

Завдання 3 Розрахування прямокутних сферичних трикутників

Завдання 3 складається з п'яти завдань, які вибираються студентом згідно з варіантом.

Завдання 3.1. Надано гіпотенуза a і катет b . Визначити інші елементи трикутника (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Дані для виконання завдання 3.1

| № | a | b | № | a | b |
|----|------------|------------|----|------------|-----------|
| 1 | 61°07'08" | 33°18'17" | 11 | 61°07'08" | 54°41'47" |
| 2 | 32°08'00" | 23°50'48" | 12 | 32°08'00" | 22°12'00" |
| 3 | 64°03'10" | 40°04'16" | 13 | 64°03'10" | 55°07'35" |
| 4 | 107°17'00" | 143°12'03" | 14 | 107°17'00" | 68°13'15" |
| 5 | 83°01'04" | 73°02'12" | 15 | 83°01'04" | 65°22'56" |
| 6 | 58°40'13" | 15°15'42" | 16 | 58°40'13" | 12°22'39" |
| 7 | 78°21'49" | 13°02'17" | 17 | 78°21'49" | 78°03'04" |
| 8 | 83°01'04" | 73°02'12" | 18 | 83°01'04" | 65°22'56" |
| 9 | 115°56'50" | 124°52'25" | 19 | 58°40'13" | 15°15'42" |
| 10 | 80°52'27" | 72°13'48" | 20 | 64°03'10" | 40°04'16" |

Завдання 3.2. Надано катети b , c . Визначити інші елементи трикутника (табл. 3.2)

Таблиця 3.2 – Дані для виконання завдання 3.2

| № | b | c | № | b | c |
|----|-----------|------------|----|------------|------------|
| 1 | 48°27'21" | 33°07'37" | 11 | 50°00'00" | 52°55'26" |
| 2 | 51°02'48" | 12°16'42" | 12 | 57°13'00" | 98°47'00" |
| 3 | 48°54'54" | 12°16'42" | 13 | 108°07'00" | 39°03'05" |
| 4 | 50°00'00" | 52°55'26" | 14 | 43°18'02" | 118°53'58" |
| 5 | 2°44'00" | 11°38'11" | 15 | 75°18'12" | 118°09'21" |
| 6 | 43°18'02" | 118°53'58" | 16 | 98°47'00" | 57°13'00" |
| 7 | 75°18'12" | 118°09'21" | 17 | 52°55'26" | 50°00'00" |
| 8 | 47°15'00" | 56°25'00" | 18 | 56°25'00" | 47°15'00" |
| 9 | 63°31'26" | 58°40'30" | 19 | 58°40'30" | 63°31'26" |
| 10 | 2°44'00" | 11°38'11" | 20 | 12°16'42" | 48°54'54" |

Завдання 3.3 Надано гіпотенуза a і кут B . Визначити інші елементи трикутника (табл. 3.3).

Таблиця 3.3 – Дані для виконання завдання 3.3

| № | a | B | № | a | B |
|----|------------|------------|----|------------|------------|
| 1 | 40°33'40" | 65°58'47" | 11 | 120°38'43" | 116°56'17" |
| 2 | 127°32'26" | 21°08'18" | 12 | 115°17'20" | 19°13'50" |
| 3 | 120°38'43" | 44°54'44" | 13 | 60°21'19" | 32°39'23" |
| 4 | 115°17'20" | 98°28'30" | 14 | 87°16'00" | 76°57'43" |
| 5 | 60°21'19" | 72°24'40" | 15 | 44°44'18" | 47°37'21" |
| 6 | 87°16'00" | 78°21'49" | 16 | 60°22'25" | 38°57'12" |
| 7 | 44°44'18" | 52°05'54" | 17 | 87°16'00" | 78°21'49" |
| 8 | 60°22'25" | 68°12'58" | 18 | 120°38'43" | 116°56'17" |
| 9 | 40°33'40" | 30°23'50" | 19 | 115°17'20" | 19°13'50" |
| 10 | 127°32'26" | 103°15'23" | 20 | 60°16'00" | 78°03'04" |

Завдання 3.4. Надано катет b і кут C . Визначити інші елементи трикутника (табл. 3.4).

Таблиця 3.4 – Дані для виконання завдання 3.4

| № | b | C | № | b | C |
|----|-----------|------------|----|------------|------------|
| 1 | 54°06'20" | 73°11'06" | 11 | 118°12'48" | 55°30'20" |
| 2 | 60°38'07" | 40°56'23" | 12 | 74°21'53" | 52°05'54" |
| 3 | 50°00'00" | 59°56'10" | 13 | 54°08'20" | 73°11'06" |
| 4 | 28°07'10" | 8°19'25" | 14 | 37°52'18" | 49°21'45" |
| 5 | 64°30'09" | 132°44'57" | 15 | 60°38'07" | 40°56'23" |
| 6 | 37°52'18" | 49°21'45" | 16 | 38°25'51" | 47°30'18" |
| 7 | 50°00'00" | 59°56'10" | 17 | 28°07'10" | 8°19'25" |
| 8 | 2°44'00" | 78°21'49" | 18 | 64°30'09" | 132°44'57" |
| 9 | 28°07'10" | 8°19'25" | 19 | 54°06'20" | 73°11'06" |
| 10 | 64°30'09" | 132°44'57" | 20 | 60°38'07" | 40°56'23" |

Завдання 3.5. Надані кути B і C . Визначити інші елементи трикутника (табл. 3.5)

Таблиця 3.5 – Дані для виконання завдання 3.5

| № | B | C | № | B | C |
|----|-----------|------------|----|------------|-----------|
| 1 | 58°27'40" | 53°43'14" | 11 | 53°43'14" | 58°27'40" |
| 2 | 32°14'03" | 64°59'40" | 12 | 64°59'40" | 32°14'13" |
| 3 | 42°38'51" | 63°13'22" | 13 | 63°13'22" | 42°38'51" |
| 4 | 11°56'56" | 87°16'00" | 14 | 66°20'00" | 74°30'00" |
| 5 | 77°43'18" | 52°05'51" | 15 | 87°16'00" | 11°56'56" |
| 6 | 74°30'00" | 66°20'00" | 16 | 52°30'00" | 48°12'17" |
| 7 | 48°12'47" | 52°30'00" | 17 | 140°10'04" | 70°05'02" |
| 8 | 13°19'00" | 87°16'00" | 18 | 87°16'00" | 13°19'00" |
| 9 | 70°05'02" | 140°10'04" | 19 | 58°27'40" | 53°43'14" |
| 10 | 87°16'00" | 13°19'00" | 20 | 42°38'51" | 63°13'22" |

Завдання 4 Розрахування косокутних сферичних трикутників

Завдання 4 складається з двох завдань, які вибираються студентом згідно з варіантом.

Завдання 4.1. Надано три сторони косокутного сферичного трикутника. Визначити кути трикутника (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Дані для виконання завдання 4.1

| № | a | b | c | № | a | b | c |
|----|------------|------------|------------|----|------------|------------|------------|
| 1 | 34°12'48" | 42°55'12" | 51°02'30" | 11 | 109°14'32" | 65°46'04" | 80°38'18" |
| 2 | 59°46'20" | 83°17'38" | 96°04'22" | 12 | 129°16'54" | 45°09'46" | 112°58'04" |
| 3 | 82°11'17" | 64°19'21" | 31°31'30" | 13 | 39°01'40" | 77°18'34" | 69°32'35" |
| 4 | 69°34'26" | 57°49'22" | 114°16'14" | 14 | 60°31'41" | 117°28'18" | 78°42'26" |
| 5 | 60°31'42" | 117°28'19" | 78°42'23" | 15 | 142°47'00" | 118°48'00" | 83°17'00" |
| 6 | 171°18'12" | 54°07'16" | 133°09'24" | 16 | 51°12'26" | 75°03'10" | 45°55'52" |
| 7 | 42°18'00" | 17°12'00" | 58°30'00" | 17 | 42°55'12" | 34°12'48" | 51°02'30" |
| 8 | 79°33'20" | 65°28'20" | 37°51'40" | 18 | 64°19'12" | 82°11'17" | 31°31'30" |
| 9 | 30°04'56" | 27°32'22" | 32°15'48" | 19 | 117°27'59" | 60°32'00" | 78°42'23" |
| 10 | 69°30'36" | 62°20'54" | 39°46'43" | 20 | 65°28'20" | 37°51'40" | 79°33'20" |

Завдання 4.2. Надано три кути косокутного сферичного трикутника. Визначити сторони трикутника (табл. 4.2)

Таблиця 4.2 – Дані для виконання завдання 4.2

| № | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | № | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> |
|----|------------|------------|------------|----|------------|------------|------------|
| 1 | 62°05'40" | 54°36'10" | 70°14'30" | 11 | 132°54'22" | 44°08'36" | 36°17'49" |
| 2 | 90°40'16" | 71°00'36" | 43°04'39" | 12 | 112°56'18" | 70°56'10" | 57°54'54" |
| 3 | 116°08'04" | 60°07'25" | 69°45'17" | 13 | 118°19'56" | 31°16'39" | 48°37'53" |
| 4 | 123°15'06" | 50°00'20" | 84°07'18" | 14 | 32°56'31" | 128°13'15" | 56°40'54" |
| 5 | 40°00'48" | 95°02'16" | 73°04'34" | 15 | 36°28'26" | 111°50'54" | 52°14'16" |
| 6 | 47°59'12" | 130°46'58" | 56°48'52" | 16 | 106°59'00" | 56°55'00" | 100°40'00" |
| 7 | 148°14'00" | 130°18'00" | 120°12'00" | 17 | 121°15'13" | 81°36'20" | 34°15'36" |
| 8 | 49°54'13" | 108°30'47" | 44°50'42" | 18 | 64°40'30" | 22°48'09" | 106°43'40" |
| 9 | 83°42'39" | 54°16'13" | 55°05'54" | 19 | 120°26'21" | 39°04'28" | 57°46'10" |
| 10 | 132°54'22" | 44°08'36" | 36°17'49" | 20 | 74°32'10" | 49°10'18" | 61°09'50" |

2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Завдання 1

Завдання 1.1 Обчислити довжину дуги *S* паралелі Земної кулі (*R* = 6370 км), на широті $\varphi^\circ = 42^\circ 31' 25''$ (рис.2.1), якщо різниця довгот $\Delta\lambda^\circ = 8^\circ 12' 11''$.

Розв'язання. Згідно з формулою (2) п.3. 1. 2 Довжина дуги визначається за формулою: $S = R \cdot \Delta\lambda \cdot \cos\varphi$,

де $\Delta\lambda^\circ = 8^\circ 12' 11'' = 8^\circ + 12/60 + 11/3600 = 8,203056^\circ$

або в радіанах – $\Delta\lambda = \pi \Delta\lambda^\circ / 180^\circ = 0,14317$;

$\varphi^\circ = 42^\circ 31' 25'' = 42^\circ + 31/60 + 25/3600 = 42,523611^\circ$

або в радіанах – $\varphi = \varphi^\circ \pi / 180 = 0,742177$.

Тоді $S = 6370 \cdot 0,14317 \cdot \cos(0,742177) = 672,14$ км

Завдання рекомендується виконувати за допомогою MS Excel (рис 2.2).

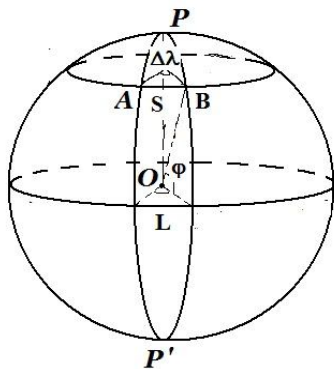


Рисунок 2.1 .

У клітинку D4 запишіть формулу, що переводить кут φ° в десяткові частки градуса: $=A4+B4/60+C4/3600$ (рис. 1.2). В клітинку E4 введіть формулу, що переводить кут в радіани: **=РАДИАНЫ(D4)**

За аналогічними формулами обчислюється кут $\Delta\lambda$.

| | | | | | |
|----|-----------------|------|-----|----------------|----------|
| D8 | | fx | | =B1*E7*COS(E4) | |
| | A | B | C | D | E |
| 1 | R= | 6370 | км | | |
| 2 | φ | | | | |
| 3 | град | мин | сек | дес.град | радианы |
| 4 | 42 | 31 | 25 | 42,52361 | 0,742177 |
| 5 | $\Delta\lambda$ | | | | |
| 6 | град | мин | сек | дес.град | радианы |
| 7 | 8 | 12 | 11 | 8,203056 | 0,14317 |
| 8 | Длина дуги S= | | | 672,1393 | |

Рисунок 2.2 – Розв'язання завдання 1.1 в MS Excel

Нарешті, в клітинку D8 запишіть формулу, яка обчислює довжину дуги S:

$$=B1*E7*\cos(E4)$$

Зауваження. Досвідчені користувачі можуть відразу записати формулу, що обчислює довжину дуги S:

$$=B1*РАДИАНЫ(A7+B7/60+C7/3600)*(COS(РАДИАНЫ(A4+B4/60+C4/3600)))$$

Завдання 1.2. Довжина дуги AB паралелі Земної кулі ($R = 6370$ км), на широті $\varphi^\circ = 40^\circ 28' 10''$ дорівнює $S = 720$ км. (рис. 1.1) Обчислити довжину дуги екватора L між меридіанами, які проходять через точки A та B .

Розв'язання Довжина дуги екватора, відсікається двома меридіанами, визначається за формулою $L = R \cdot \Delta\lambda$, де $\Delta\lambda$ - різниця довгот точок B та A , яка визначається за формулою $\Delta\lambda = S/(R \cos \varphi)$. Таким чином, $L = S/\cos \varphi$.

Розв'язання за допомогою MS Excel представлено на рисунку 2.3.

Зауваження: досвідчені користувачі можуть відразу записати формулу, що обчислює довжину дуги L : **=B1/(COS(РАДИАНЫ(B3+C3/60+D3/3600)))**

| | | | | | |
|---|---------|----------|-----|-----|-------------------|
| | B4 | | | | |
| | | | | | =B3+C3/60+D3/3600 |
| | A | B | C | D | E |
| 1 | S= | 720 | км | | |
| 2 | | град | мин | сек | |
| 3 | φ= | 40 | 28 | 10 | |
| 4 | φ= | 40,46944 | | | |
| 5 | φ= | 0,706325 | | | |
| 6 | cos(φ)= | 0,760752 | | | |
| 7 | L= | 946,4317 | км | | |
| 8 | | | | | |

Рис. 2.3 – Розв'язання завдання 1.2 в MS Excel

Завдання 2

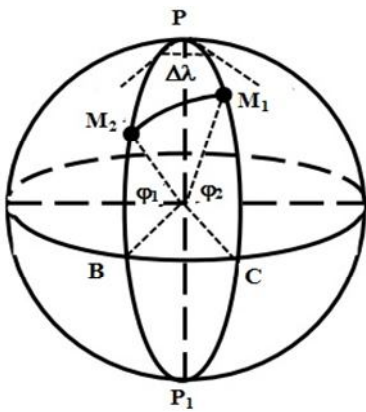


Рисунок 2.4

Завдання. Визначити найкоротшу відстань (ортодромію) між Берліном ($52^{\circ}30'17''$ СШ; $13^{\circ}23'44''$ ВД) і Парижем ($48^{\circ}50'11''$ СШ; $2^{\circ}20'15''$ ВД). Радіус Землі $R = 6371$ км.

Розв'язання. Розглянемо сферичний трикутник M_1PM_2 (рис. 2.4). Для визначення ортодромії скористаємося формулою косинуса сторони сферичного трикутника:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Оскільки BC – дуга екватора, P – полюс, то сторони ΔM_1PM_2 дорівнюють $M_1P = 90^{\circ} - \varphi_1$; $M_2P = 90^{\circ} - \varphi_2$. Різниця довгот – це кут $\angle M_1PM_2 = \Delta\lambda$. Тоді формула набуває такого вигляду:

$$\cos M_1M_2 = \cos(90^{\circ} - \varphi_1)\cos(90^{\circ} - \varphi_2) + \sin(90^{\circ} - \varphi_1)\sin(90^{\circ} - \varphi_2)\cos \Delta\lambda$$

$$\text{або} \quad \cos M_1M_2 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda \quad (2.1)$$

Обчислення рекомендується проводити за допомогою MS Excel (рис. 2.5).

Рекомендації до розв'язання. Градуси переводяться в радіани, підраховуються косинуси і синуси з використанням вбудованих функцій COS(), SIN(). Потім в клітинку B11 записується формула у вигляді: **=B9*B10+B6*B7*B8**

Дуга M_1M_2 обчислюється в радіанах з використанням функції арккосинус: $=ACOS(B11)$. Довжина дуги M_1M_2 обчислюється за формулою: $=6371*B12$. Таким чином, відстань між Парижем і Берліном приблизно дорівнює 787 км.

B13 fx $=ОКРУГЛ(B12*6371;0)$

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|----|---------------------------------------|------------------|-----|-----|--------------------|-------------------|------|-----|-----|--------------------|---------|
| 1 | координаты | широта φ | | | | долгота λ | | | | | |
| 2 | точек | град | мин | сек | десятичная мера | радианы | град | мин | сек | десятичная мера | радианы |
| 3 | Париж | 48 | 50 | 11 | 48,83639 | 0,85236 | 2 | 20 | 15 | 2,3375 | 0,0408 |
| 4 | Берлин | 52 | 30 | 17 | 52,50472 | 0,91638 | 13 | 23 | 44 | 13,39556 | 0,2338 |
| 5 | разность долгот угол $\Delta \lambda$ | | | | | | | | | 11,05806 | 0,193 |
| 6 | $\cos(\Delta \lambda)$ | 0,9814 | | | | | | | | | |
| 7 | $\cos(\varphi_1)$ | 0,6582 | | | | | | | | | |
| 8 | $\cos(\varphi_2)$ | 0,6087 | | | | | | | | | |
| 9 | $\sin(\varphi_1)$ | 0,7528 | | | | | | | | | |
| 10 | $\sin(\varphi_2)$ | 0,7934 | | | | | | | | | |
| 11 | $\cos(M_1M_2)$ | 0,9905 | | | | | | | | | |
| 12 | M_1M_2 в рад. | 0,1379 | | | | | | | | | |
| 13 | расстояние M_1M_2 | 878 | км | | | | | | | | |

Рисунок 2.5 – Розв'язання завдання 1.2 в MS Excel

Завдання 3

Для розв'язання рекомендується використовувати формули:

$$\left. \begin{aligned}
 \cos a &= \cos b \cos c \\
 \cos a &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \\
 \cos B &= \sin C \cos b \\
 \cos C &= \sin B \cos c \\
 \sin b &= \sin a \sin B \\
 \sin c &= \sin a \sin C \\
 \cos C &= \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b \\
 \sin b &= \operatorname{ctg} C \operatorname{tg} c \\
 \cos B &= \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c \\
 \sin c &= \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b
 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Якщо розв'язок трикутника існує, то для досліджуваних випадків він єдиний.

Під час розв'язання необхідно контролювати правильність розрахунків і стежити, щоб значення елементів відповідали умовам існування сферичного трикутника. Настійно рекомендуємо користуватися MS Excel, що істотно полегшує вирішення завдань.

Завдання 3.1. Надано гіпотенуза $a = 80^{\circ}10'25''$ і катет $b = 47^{\circ}38'36''$. Знайти катет c , кути C і B .

Рекомендації до розв'язання. З десяти формул (3.1) обираємо такі:

$$\cos a = \cos b \cos c; \sin b = \sin a \cdot \sin B; \cos C = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} b$$

Тоді невідомі елементи визначаються за формулами:

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \quad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \quad \cos C = \operatorname{tg} b / \operatorname{tg} a.$$

Формула для контролю повинна пов'язувати знайдені елементи. Із (3.1) обираємо рівність $\cos C = \sin B \cdot \cos c$.

Далі проведіть контроль правильності рішення, перевіривши умови існування прямокутного сферичного трикутника.

1 $0 < a + b + c < 360^{\circ}$.

2 $a + b > c, a + c > b, b + c > a, b > c - a, a > b - c, c > b - a$.

3 Перевірка $90^{\circ} < B + C < 270^{\circ}; -90 < B - C < 90$ (в MS Excel рекомендується створити дві функції користувача TEST1 и TEST2 (додаток Д)).

4 Якщо катети однорідні, то гіпотенуза повинна бути менше 90° (в MS Excel рекомендується створити функцію користувача ODNOR1 (додаток Е)).

5 Якщо прилеглі до гіпотенузи кути однорідні, то гіпотенуза менше 90° ; якщо ж ці кути різномірні, то гіпотенуза більше 90° (в MS Excel рекомендується створити функцію користувача ODNOR2 (додаток Ж)).

6 Довільний катет і протилежний йому кут завжди однорідні (в MS Excel рекомендується створити дві функції користувача ODNOR3 і ODNOR4 (додаток И)).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|----|--|---------|---------|----------------|------------------------------|-----------------|-----------------------------|--------|---------|
| 1 | Задання 3.1 Надано гіпотенуза і катет | | | | | | | | |
| 2 | | град | хв | сек | град, десятькова форма | радіани | cos | sin | tg |
| 3 | гіпотенуза <i>a</i> | 80 | 10 | 25 | 80,1736 | 1,3993 | 0,17066 | 0,9853 | 5,77353 |
| 4 | катет <i>b</i> | 47 | 38 | 36 | 47,6433 | 0,8315 | 0,67374 | 0,739 | 1,0968 |
| 5 | | | | | | | Формула | | |
| 6 | <i>cos(c)=</i> | 0,2533 | | | | | <i>cos(c)=cos(a)/cos(b)</i> | | |
| 7 | <i>c=</i> | 1,3147 | рад | 75,3268 | дес.град | 75° 19' 36" | | | |
| 8 | <i>sinB=</i> | 0,7500 | | | | | <i>sin(B)=sin(b)/sin(a)</i> | | |
| 9 | <i>B=</i> | 0,8480 | рад | 48,5876 | дес.град | 48° 35' 15" | | | |
| 10 | <i>cosC=</i> | 0,18997 | | | | | <i>cos(C)=tg(b)/tg(a)</i> | | |
| 11 | <i>C=</i> | 1,3797 | рад | 79,0489 | дес.град | 79° 2' 56" | | | |
| 12 | | | | | | | | | |
| 13 | Контроль рішення | | 0,18997 | = | 0,18997 | | <i>cos(C)=sin(B)cos(c)</i> | | |
| 14 | Перевірка на однорідність | | | Інші перевірки | | | | | |
| 15 | <i>a, b, c</i> | ТАК | | <i>B+C</i> | ТАК | <i>a+b>c</i> | ТАК | | |
| 16 | <i>a, B, C</i> | ТАК | | <i>B - C</i> | ТАК | <i>a+c>b</i> | ТАК | | |
| 17 | <i>b, B</i> | ТАК | | <i>a+b+c</i> | ТАК | <i>c+b>a</i> | ТАК | | |
| 18 | <i>c, C</i> | ТАК | | | | | | | |

Рисунок 2.6 – Розв'язання завдання 3.1 в MS Excel

Розв'язання з використанням MS Excel представлено на рисунку 2.6.

1. В клітинку E3 запишіть формулу **=B4+C4/60+D4/3600**
2. Скопіюйте формулу в клітинку E4.
3. У клітинку F3 запишіть формулу **=РАДИАНЫ(E4)** та знову скопіюйте формулу.
4. У клітинку G3, H3, I3 запишіть відповідно формули **=COS(F4)** **=SIN(F4)** **=TAN(F4)**
5. Скопіюйте формули у відповідні комірки четвертого рядка.
6. Для визначення *cosc* в клітинку B6 запишіть формулу **=G4/G5**
7. Для визначення катета *c* в радіанах в B7 запишіть формулу **=ACOS(B6)**
8. Для того щоб отримати значення катета *c* в десяткових частках градуса у D7 запишіть формулу **=ГРАДУСЫ(B7)**

9. Для того щоб отримати значення катета c в градусах-хвилинах-секундах в клітинку F7 використовуйте користувацьку функцію **=GRADMC(D7)**, якщо ви створили її в робочій книзі MS Excel (додаток Г).

10 Формули для визначення кутів B та C запишіть у відповідні клітинки самостійно (див. рис. 3.1)

11 Проведемо контроль правильності рішення, за допомогою перевірки умови існування прямокутного сферичного трикутника.

11.1 У клітинку C13 запишіть формулу **=B10**, яка відображає значення $\cos C$ в радіанах. $\sin B \cdot \cos c$. В клітинку E13 запишіть формулу **=B6*B8**, яка відображає значення $\sin B \cdot \cos c$ в радіанах. Повинно вийти $0,189971 = 0,189971$ (рис. 2.6).

11.2 Перевіримо умову $0 < a + b + c < 360^\circ$. У клітинку E17 запишіть формулу
=ЕСЛИ(E3+E4+D7<360;"ТАК";"НІ")

11.3 Перевіримо умови $a + b > c$. У клітинку G15 запишіть формулу
=ЕСЛИ(E3+E4>D7;"ТАК";"НІ")

Формули, $a + c > b$, $b + c > a$ запишіть у відповідні клітинки G16, G17 самостійно.

11.4 Перевіримо умови $90^\circ < B + C < 270^\circ$; $-90^\circ < B - C < 90^\circ$. У клітинку E15 запишіть формулу **=TEST1(D9;D11)**

У клітинку E16 запишіть формулу **=TEST2(D9;D11)**

11.5 Тест на однорідність. В клітинку B15 запишіть формулу
=ODNOR1(E3;E4;D7)

Тест на однорідність кутів і гіпотенузи (клітинка B16) використовує функцію ODNOR2 (запишіть формулу самостійно). Тест на однорідність катету і протилежного йому куту (клітинки B17 і B18) використовує функцію ODNOR3 (запишіть формули самостійно).

Відповідь: $c = 75^\circ 19' 36''$; $B = 48^\circ 35' 15''$; $C = 79^\circ 2' 56''$

Завдання 3.2. Надані катет $b = 150^{\circ}52'40''$ і катет $c = 114^{\circ}15'54''$. Знайти гіпотенузу a , кути B і C .

Рекомендації до розв'язання. З десяти формул (3.1) обираємо такі:

$$\cos a = \cos b \cos c; \sin c = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{tg} b; \sin b = \operatorname{ctg} C \cdot \operatorname{tg} c$$

Тоді невідомі елементи визначаються за формулами:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}$$

Формула для контролю повинна пов'язувати знайдені елементи. Із (3.1) обираємо рівність $\cos a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C$. Перевірте інші умови існування прямокутного сферичного трикутника.

Далі проведіть контроль правильності рішення, перевіривши умови існування прямокутного сферичного трикутника:

1 $0 < a + b + c < 360^{\circ}$.

2 $a + b > c, a + c > b, b + c > a, b > c - a, a > b - c, c > b - a$.

3 Перевірка $90^{\circ} < B + C < 270^{\circ}; -90 < B - C < 90$ (в MS Excel рекомендується створити дві функції користувача TEST1 и TEST2 (додаток Д)).

4 Якщо катети однорідні, то гіпотенуза повинна бути менше 90° (в MS Excel рекомендується створити функцію користувача ODNOR1 (додаток Е)).

5 Якщо прилеглі до гіпотенузи кути однорідні, то гіпотенуза менше 90° ; якщо ж ці кути різномірні, то гіпотенуза більше 90° (в MS Excel рекомендується створити функцію користувача ODNOR2 (додаток Ж)).

6 Довільний катет і протилежний йому кут завжди однорідні (в MS Excel рекомендується створити дві функції користувача ODNOR3 і ODNOR4 (додаток И)).

Розв'язання з використанням MS Excel представлено на рис. 2.7.

Зауваження. У результаті початкового розрахування, кути B і C будуть негативними, а ряд перевірочних тестів також негативний (рис. 2.8).

У цьому разі, кути в градусах в клітинках D9 і D11 необхідно обчислюватися за формулами:

$$=\text{ГРАДУСЫ}(\text{B9})+180$$

$$=\text{ГРАДУСЫ}(\text{B11})+180$$

Тоді будуть виконані умови існування прямокутного сферичного трикутника.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|----|---------------------------------------|----------|-----|----------------|------------------------------|-------------------|----------------------------|----------|----------|
| 1 | Завдання 3.2 Надано два катета | | | | | | | | |
| 2 | | град | хв | сек | град, десятькова форма | радіани | cos | sin | tg |
| 3 | катет <i>b</i> | 150 | 52 | 40 | 150,8778 | 2,6333 | -0,87358 | 0,486674 | -0,5571 |
| 4 | катет <i>c</i> | 114 | 15 | 54 | 114,2650 | 1,9943 | -0,41096 | 0,911654 | -2,21837 |
| 5 | | | | | | | Формула | | |
| 6 | <i>cos(a)=</i> | 0,35901 | | | | | <i>cos(a)=cos(b)cos(c)</i> | | |
| 7 | <i>a=</i> | 1,20359 | рад | 68,9609 | дес.град | 68°57'39" | | | |
| 8 | <i>tg(B)=</i> | -0,6111 | | | | | <i>tg(B)=tg(b)/sin(c)</i> | | |
| 9 | <i>B=</i> | -0,5485 | рад | 148,571 | дес.град | 148°34'17" | | | |
| 10 | <i>tg(C)=</i> | -4,5582 | | | | | <i>tg(C)=tg(c)/sin(b)</i> | | |
| 11 | <i>C=</i> | -1,3548 | рад | 102,374 | дес.град | 102°22'26" | | | |
| 12 | Контроль рішення | 0,359006 | | = | 0,359006 | | <i>cos(a)=ctg(B)ctg(C)</i> | | |
| 13 | | | | | | | | | |
| 14 | Перевірка на однорідність | | | Інші перевірки | | | | | |
| 15 | <i>a, b, c</i> | ТАК | | <i>B+C</i> | ТАК | <i>a+b>c</i> | ТАК | | |
| 16 | <i>a, B, C</i> | ТАК | | <i>B - C</i> | ТАК | <i>a+c>b</i> | ТАК | | |
| 17 | <i>b, B</i> | ТАК | | <i>a+b+c</i> | ТАК | <i>c+b>a</i> | ТАК | | |
| 18 | <i>c, C</i> | ТАК | | | | | | | |

Рисунок 2.7 – Розв'язання завдання 3.2 з використанням MS Excel

| | | | | | |
|----|---------------------------|----------|-----|----------------|----------|
| 9 | <i>B=</i> | -0,5485 | рад | -31,429 | дес.град |
| 10 | <i>tg(C)=</i> | -4,5582 | | | |
| 11 | <i>C=</i> | -1,3548 | рад | -77,626 | дес.град |
| 12 | Контроль рішення | 0,359006 | | = | 0,359006 |
| 13 | | | | | |
| 14 | Перевірка на однорідність | | | Інші перевірки | |
| 15 | <i>a, b, c</i> | ТАК | | <i>B+C</i> | НІ |
| 16 | <i>a, B, C</i> | ТАК | | <i>B - C</i> | ТАК |
| 17 | <i>b, B</i> | НІ | | <i>a+b+c</i> | ТАК |
| 18 | <i>c, C</i> | НІ | | | |

Рисунок 2.8 – Результати початкового розрахунку

Відповідь: $a = 68^{\circ}57'39''$; $B = 148^{\circ}34'17''$; $C = 102^{\circ}22'26''$

Завдання 3.3 Надані гіпотенуза $a = 56^015'42''$ та прилеглий до неї кут $C = 41^05'6''$. Знайти катети і кут B .

Рекомендації до розв'язання. З десяти формул (3.1) обираємо такі:

$$\cos C = ctga \cdot tg b; \sin c = \sin a \cdot \sin C; \cos a = ctg B \cdot ctg C$$

Тоді невідомі елементи визначаються за формулами

$$tgb = tga \cdot \cos C, \quad \sin c = \sin a \cdot \sin C, \quad tg B = \frac{1}{\cos a \cdot tg C}$$

Формула контролю $\sin c = ctg B \cdot tgb$

Далі проведіть контроль правильності рішення, перевіривши умови існування прямокутного сферичного трикутника.

1 $0 < a + b + c < 360^0$.

2 $a + b > c, a + c > b, b + c > a$

3 Перевірка $90^0 < B + C < 270^0; -90 < B - C < 90$

4 Тести на однорідність

Розв'язання з використанням MS Excel представлено на рис. 2.9.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|----|--|-----------|-----|----------------|------------------------------|-----------|-----------------------|----------|----------|
| 1 | Завдання 3.3 Гіпотенуза та прилеглий до неї кут C | | | | | | | | |
| 2 | | град | хв | сек | град, десятькова форма | радіани | cos | sin | tg |
| 3 | гіпотенуза a | 56 | 15 | 42 | 56,2617 | 0,9820 | 0,555401 | 0,831583 | 1,497266 |
| 4 | кут C | 41 | 5 | 6 | 41,0850 | 0,7171 | 0,753735 | 0,657178 | 0,871895 |
| 5 | | | | | | | Формула | | |
| 6 | tg(b)= | 1,1285422 | | | | | tg(b)=tg(a)cos(C) | | |
| 7 | b= | 0,8457147 | рад | 48,456 | дес.град | 48°27'21" | | | |
| 8 | sin(c)= | 0,5464978 | | | | | sin(c)=sin(a)sin(C) | | |
| 9 | c= | 0,5781766 | рад | 33,127 | дес.град | 33°7'37" | | | |
| 10 | tg(B)= | 2,0650443 | | | | | tg(B)=1/(cos(a)tg(C)) | | |
| 11 | B= | 1,119827 | рад | 64,161 | дес.град | 64°9'41" | | | |
| 12 | Контроль рішення | | | 0,54650 | = | 0,54650 | sin(c)=ctg(B)tg(b) | | |
| 13 | | | | | | | | | |
| 14 | Перевірка на однорідність | | | Інші перевірки | | | | | |
| 15 | a, b, c | ТАК | | B+C | ТАК | a+b>c | ТАК | | |
| 16 | a, B, C | ТАК | | B - C | ТАК | a+c>b | ТАК | | |
| 17 | b, B | ТАК | | a+b+c | ТАК | c+b>a | ТАК | | |
| 18 | c, C | ТАК | | | | | | | |

Рисунок 2.9 – Розв'язання завдання 3.3 з використанням MS Excel

Відповідь: $b = 48^027'21''$; $c = 33^07'37''$; $B = 64^09'41''$.

Завдання 3.4 Надані катет $b = 37^{\circ}52'09''$ і прилеглий кут $C = 45^{\circ} 34' 35''$.

Знайти катет c , кут B , гіпотенузу a .

Рекомендації до розв'язання. З десяти формул (3.1) обираємо такі:

$$\cos C = ctga \cdot tg b; \sin b = tgc \cdot ctg C; \cos B = \cos b \cdot \sin C$$

Тоді невідомі елементи визначаються за формулами:

$$tga = tgb / \cos C, \quad tg c = \sin b \cdot tg C, \quad \cos B = \cos b \cdot \sin C$$

Далі проведіть контроль правильності рішення, перевіривши умови існування прямокутного сферичного трикутника.

$$1 \ 0 < a + b + c < 360^{\circ}.$$

$$2 \ a + b > c, \ a + c > b, \ b + c > a.$$

$$3 \text{ Перевірка } 90^{\circ} < B + C < 270^{\circ}; \ -90 < B - C < 90.$$

4 Тести на однорідність.

Розв'язання з використанням MS Excel представлено на рис. 2.10.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|----|--|-----------|-----|----------------|------------------------------|-----------|--------------------------|----------|----------|
| 1 | Завдання 3.4 Надано катет і прилеглий кут | | | | | | | | |
| 2 | | град | хв | сек | град, десятькова форма | радіани | cos | sin | tg |
| 3 | катет b | 37 | 52 | 9 | 37,8692 | 0,66094 | 0,789415 | 0,61386 | 0,777615 |
| 4 | кут C | 45 | 34 | 35 | 45,5764 | 0,79546 | 0,699958 | 0,714184 | 1,020325 |
| 5 | | | | | | | Формула | | |
| 6 | $tg(a)=$ | 1,11095 | | | | | $tg(a)=tg(b)/\cos(C)$ | | |
| 7 | $a=$ | 0,83791 | рад | 48,0085 | дес.град | 48°0'31" | | | |
| 8 | $tg(c)=$ | 0,62634 | | | | | $tg(c)=\sin(b)tg(C)$ | | |
| 9 | $c=$ | 0,55956 | рад | 32,0604 | дес.град | 32°3'38" | | | |
| 10 | $\cos(B)=$ | 0,56379 | | | | | $\cos(B)=\cos(b)\sin(C)$ | | |
| 11 | $B=$ | 0,97183 | рад | 55,6819 | дес.град | 55°40'55" | | | |
| 12 | Контроль рішення | 0,5637875 | | = | 0,5637875 | | $\cos(B)=tg(c)/tg(a)$ | | |
| 13 | Перевірка на однорідність | | | Інші перевірки | | | | | |
| 14 | a, b, c | ТАК | | $B+C$ | ТАК | $a+b>c$ | ТАК | | |
| 15 | a, B, C | ТАК | | $B - C$ | ТАК | $a+c>b$ | ТАК | | |
| 16 | b, B | ТАК | | $a+b+c$ | ТАК | $c+b>a$ | ТАК | | |
| 17 | c, C | ТАК | | | | | | | |

Рисунок 2.10 – Розв'язання завдання 3.4 з використанням MS Excel

Відповідь: $a = 48^{\circ}00'31''$; $c = 32^{\circ}03'38''$; $B = 55^{\circ}40'55''$

Завдання 3.5. Надані два кути $B = 80^{\circ}10'32''$ і $C = 154^{\circ}58'28''$. Знайти катети b, c і гіпотенузу a .

Рекомендації до розв'язання. З десяти формул (1) обираємо такі:

$$\cos B = \sin C \cdot \cos b; \cos a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C; \cos C = \cos c \cdot \sin B$$

Тоді невідомі елементи визначаються за формулами:

$$\cos a = \frac{1}{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \cos C / \sin B$$

Далі проведіть контроль правильності рішення, перевіривши умови існування прямокутного сферичного трикутника.

$$1 \quad 0 < a + b + c < 360^{\circ}.$$

$$2 \quad a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a$$

$$3 \quad \text{Перевірка } 90^{\circ} < B + C < 270^{\circ}; \quad -90 < B - C < 90$$

4 Тести на однорідність

Розв'язання з використанням MS Excel представлено на рис. 3.6.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|----|------------------------------------|-----------|-----|----------------|---------------------|------------|-----------------------|----------|----------|
| 1 | Завдання 3.5 Надані два кути B і C | | | | | | | | |
| 2 | | град | хв | сек | град, десятькова | радіани | cos | sin | tg |
| 3 | кут B | 80 | 10 | 32 | 80,1756 | 1,3993 | 0,17063 | 0,985335 | 5,774693 |
| 4 | кут C | 154 | 58 | 28 | 154,9744 | 2,7048 | -0,90612 | 0,423022 | -0,46685 |
| 5 | | | | | | | Формула | | |
| 6 | cos(a)= | -0,370931 | | | | | cos(a)=1/(tg(B)tg(C)) | | |
| 7 | a= | 1,9508076 | рад | 111,77304 | дес.град | 111°46'23" | | | |
| 8 | cos(b)= | 0,4033589 | | | | | cos(b)=cos(B)/sin(C) | | |
| 9 | b= | 1,1556116 | рад | 66,211669 | дес.град | 66°12'42" | | | |
| 10 | cos(c)= | -0,919605 | | | | | cos(c)=cos(C)/sin(B) | | |
| 11 | c= | 2,7378702 | рад | 156,86841 | дес.град | 156°52'6" | | | |
| 12 | Контроль рішення | | | -0,370931 | = | -0,370931 | cos(a)=cos(b)cos(c) | | |
| 13 | | | | | | | | | |
| 14 | Перевірка на однорідність | | | Інші перевірки | | | | | |
| 15 | a, b, c | ТАК | | B+C | ТАК | a+b>c | ТАК | | |
| 16 | a, B, C | ТАК | | B - C | ТАК | a+c>b | ТАК | | |
| 17 | b, B | ТАК | | a+b+c | ТАК | c+b>a | ТАК | | |
| 18 | c, C | ТАК | | | | | | | |

Рисунок 2.11 – Розв'язання завдання 3.5 з використанням MS Excel

Відповідь: $a = 111^{\circ}46'23''$; $b = 66^{\circ}12'42''$; $c = 156^{\circ}52'06''$.

Завдання 4

Завдання 4.1. Надано сторони косокутного сферичного трикутника $a = 60^{\circ}31'42''$, $b = 117^{\circ}28'19''$, $c = 78^{\circ}42'23''$ Знайти кути A , B і C .

Рекомендації до розв'язання. Для розв'язання використовуються формули:

$$\operatorname{tg}(A/2) = \frac{M}{\sin(p-a)}; \operatorname{tg}(B/2) = \frac{M}{\sin(p-b)}; \operatorname{tg}(C/2) = \frac{M}{\sin(p-c)};$$

$$\text{де } M = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Для контролю обчислень можна використовувати співвідношення

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{M}{\sin(p)}$$

Необхідно, щоб виконувалися такі умови

$$180^{\circ} < A + B + C < 540^{\circ},$$

$$A + B - C < 180^{\circ}, \quad A + C - B < 180^{\circ}, \quad C + B - A < 180^{\circ}.$$

Розв'язання завдання 4.1 представлено на рисунку 2.12

| | A | B | C | D | E | F | G |
|----|------------------|--------|--------|------------------|-----------|------------------------------|-------------|
| 3 | $a=$ | 60 | 31 | 42 | 60,5283 | 1,0564 | |
| 4 | $b=$ | 117 | 28 | 19 | 117,4719 | 2,0503 | |
| 5 | $c=$ | 78 | 42 | 23 | 78,7064 | 1,3737 | |
| 6 | $p=$ | | | | | 2,2402 | |
| 7 | $\sin(p-a)=$ | 0,9260 | | Обчислення кутів | | | |
| 8 | $\sin(p-b)=$ | 0,1888 | | | радіани | град. десятькова форма | град/хв/сек |
| 9 | $\sin(p-c)=$ | 0,7621 | | $A=$ | 0,8375202 | 47,98637 | 47° 59' 10" |
| 10 | $\sin(p)=$ | 0,7842 | | $B=$ | 2,2826005 | 130,7834 | 130° 47' 0" |
| 11 | $M=$ | 0,4122 | | $C=$ | 0,9915833 | 56,81354 | 56° 48' 48" |
| 12 | Контроль рішення | | | | 0,5255879 | = | 0,525588 |
| 13 | | | | | | | |
| 14 | Інші перевірки | | | | | | |
| 15 | | 180 < | A+B+C= | 235,58 | < 540 | | |
| 16 | | | A+B-C= | 121,96 | < 180 | | |
| 17 | | | A+C-B= | -25,98 | < 180 | | |
| 18 | | | B+C-A= | 139,61 | < 180 | | |

Рисунок 2.13 – Розв'язання завдання 4.1 з використанням MS Excel

Відповідь: $A = 47^{\circ}59'10''$; $B = 130^{\circ}47'$; $C = 56^{\circ}48'48''$

Завдання 4.2 Надано кути косокутного сферичного трикутника $A = 47^{\circ}59'12''$, $B = 130^{\circ}46'58''$, $C = 56^{\circ}48'52''$. Знайти сторони a , b і c .

Рекомендації до розв'язання. Для вирішення використовуються формули:

$$\operatorname{tg}(a/2) = N \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \operatorname{tg}(b/2) = N \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \operatorname{tg}(c/2) = N \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$\text{де } N = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\sin(A - \frac{\varepsilon}{2}) \sin(B - \frac{\varepsilon}{2}) \sin(C - \frac{\varepsilon}{2})}}, \quad \varepsilon = A + B + C - \pi$$

Для контролю обчислень можна використовувати співвідношення:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}\right) = N \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Необхідно, щоб виконувалися такі умови

$$p = 0,5(a + b + c) < 180^{\circ}; \quad p - a > 0; \quad p - b > 0; \quad p - c > 0;$$

$$a + b + c < 360^{\circ}; \quad c + b > a; \quad a + c > b, \quad a + b > c.$$

Розв'язання завдання 4.2 представлено на рисунку 2.14

| | A | B | C | D | E | F | G |
|----|---|-------------|-----|-------------------|------------------------------|------------------------------|--------------|
| 1 | Завдання 4.2 Надані кути косокутного сферичного трикутника | | | | | | |
| 2 | | град | хв | сек | град, десятькова форма | радіани | |
| 3 | угол A | 47 | 59 | 12 | 47,9867 | 0,8375 | |
| 4 | угол B | 130 | 46 | 58 | 130,7828 | 2,2826 | |
| 5 | угол C | 56 | 48 | 52 | 56,8144 | 0,9916 | |
| 6 | | | | $\varepsilon =$ | 55,5839 | 0,9701 | |
| 7 | $\sin(A - \varepsilon/2) =$ | 0,3452 | | Визначення сторін | | | |
| 8 | $\sin(B - \varepsilon/2) =$ | 0,9744 | | | радіани | град, десятькова форма | град/[d/сек |
| 9 | $\sin(C - \varepsilon/2) =$ | 0,4852 | | $a =$ | 1,05641 | 60,528007 | 60° 31' 40" |
| 10 | $\sin(\varepsilon/2) =$ | 0,4663 | | $b =$ | 2,05027 | 117,47182 | 117° 28' 18" |
| 11 | $N =$ | 1,6903 | | $c =$ | 1,37370 | 78,707114 | 78° 42' 25" |
| 12 | | | | | | | |
| 13 | Контроль рішення | | | 0,7881216 | = | 0,7881216 | |
| 14 | Інші перевірки | | | $p =$ | 128,35347 | < 180 | |
| 15 | | | | $a + b + c =$ | 256,70694 | < 360 | |
| 16 | | $a + b > c$ | ТАК | $a + c > b$ | ТАК | $b + c > a$ | ТАК |

Рисунок 2.14 – Розв'язання завдання 4.2 з використанням MS Excel

Відповідь: $A = 60^{\circ}31'40''$; $B = 117^{\circ}28'18''$; $C = 78^{\circ}42'25''$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1 Данилевський М. П. Основи сферичної геометрії та тригонометрії: навч. посібник / М. П. Данилевський, А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2011. – 92 с.

2 Мордовцев С. М. Конспект лекцій по курсу «Сферическая геометрия и тригонометрия (для студентов всех форм обучения направления подготовки 6.080101 – Геодезия, картография, землеустройство) / С. М. Мордовцев, А. И. Колосов, А. В. Якунин ; Харьков. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Харьков: ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2016. – 78 с.

3 Якунин А. В. Теорія кривих і поверхонь для геоінформатиків : навч. посібник / А. І. Колосов, А. В. Якунин ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 172 с. URL: <https://eprints.kname.edu.ua/53230/>

Додаток А

Зразок оформлення розрахунково-графічної роботи

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Розрахунково-графічна робота
з дисципліни «Вища математика» (модуль 2)
студента (-тки) 1 курсу ГКЗ-202_ групи _

(ПІБ студента)

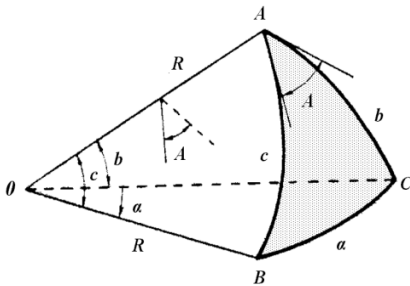
Варіант № ____

Перевірив: _____

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 202_

Додаток Б

Співвідношення між сторонами і кутами сферичного трикутника



1) $a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a,$

$$b > c - a, \quad a > b - c, \quad c > b - a$$

Напівперіод сферичного трикутника завжди більше будь-якої зі сторін.

2) $0 < a + b + c < 360^\circ$

Сума сторін сферичного трикутника завжди менше 360° .

3) $180^\circ < A + B + C < 540^\circ$

Перевищення суми кутів сферичного трикутника над 180° називається його ексцесом або сферичним надлишком і позначається

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$$

4) $A + B - C < 180^\circ; \quad A + C - B < 180^\circ; \quad B + C - A < 180^\circ.$

5) Зовнішній кут сферичного трикутника менше суми двох внутрішніх кутів, з ним не суміжних, але більше їх різниці.

6) Кути при підставі рівнобедреного сферичного трикутника рівні між собою.

7) У сферичному трикутнику навпроти рівних сторін лежать рівні кути, тобто якщо $b = c$, то $B = C$.

8) Навпроти рівних кутів у сферичному трикутнику лежать рівні сторони.

9) У сферичному трикутнику навпроти більшого кута лежить велика сторона.

10) У сферичному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут.

11) Якщо сума двох сторін сферичного трикутника задовольняє одній з умов $a + b < 180^\circ$, $a + b = 180^\circ$, $a + b > 180^\circ$, то і сума протилежних їм кутів задовольняє відповідній умові: $A + B < 180^\circ$, $A + B = 180^\circ$ або $A + B > 180^\circ$.

У навпаки, якщо сума двох кутів сферичного трикутника більша, дорівнює або менша 180° , то й сума протилежних їм сторін повинна бути відповідно більша, дорівнює або менша 180° .

12). Якщо різниця двох сторін сферичного трикутника більше, дорівнює або менше 0, то й різниця двох протилежних їм кутів більше, дорівнює або менше нуля.

13) Якщо різниця двох кутів сферичного трикутника більше, дорівнює або менше 0, то і різниця двох протилежних їм сторін більше, дорівнює або менше нуля.

Зв'язок між величинами сторін і кутів прямокутного сферичного трикутника

Два елементи трикутника **однорідними**, якщо обидва вони більше або менше 90° , та **різнорідними**, коли один з них більше, а другий менший за 90° . Тоді:

– якщо катети однорідні, то гіпотенуза менше 90° ; якщо ж катети різнорідні, то гіпотенуза більше 90° ;

– якщо прилеглі до гіпотенузи кути однорідні, то гіпотенуза менше 90° ; якщо ж ці кути різнорідні, то гіпотенуза більше 90° ;

– довільний катет і протилежний йому кут завжди однорідні;

– $90^\circ < B + C < 270^\circ$; $-90^\circ < B - C < 90^\circ$.

Отримані співвідношення між величинами сторін і кутів прямокутного сферичного трикутника допоможуть при знаходженні елементів трикутника за їхніми синусами. Наприклад, якщо в прямокутному трикутнику ABC катет $b > 90^\circ$ та при вирішенні завдання для протилежного кута B отримано, що $\sin B = 0,5$, то його значення дорівнює $B = 150^\circ$.

Додаток В

Запис формул в MS EXCEL

При записуванні формул треба пам'ятати три основні правила:

Перше правило: будь-яка формула починається зі знаку `=` і вводиться без пробілів.

Друге правило: адреси клітинок записуються тільки з використанням літер англійського алфавіту (стрічці або прописні – без різниці).

Третє правило: формулу найкраще редагувати в рядку формул.

Створення простих формул

Заповніть стовпці А і В. Треба перемножити числа стовпців А і В, а результат вивести в стовпці С.

Зробіть активної клітинку С1 і введіть в неї формулу:

=A1*B1

і натисніть клавішу Enter (табл. В.1).

Таблиця В.1 – Створення простих формул

| | А | В | С |
|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 5 | 4 | =A1*B1 |
| 2 | 3 | 6 | |
| 3 | 6 | 9 | |
| 4 | 12 | 8 | |
| 5 | 10 | 9 | |

У клітинці С1 з'явиться результат множення вмісту клітинки А1 на вміст клітинки В1. Поверніться в С1. У рядку формул буде записана введена вами формула `= A1*B1`. Отже, якщо в клітинку введено формулу, то вона з'явиться в рядку формул, а в самій клітинки - результат розрахунків за цією формулою.

Що робити далі? Можна перейти до клітинки С2 і знову записати формулу `= A2*B2` і так далі. Але це нераціонально, особливо для великих таблиць. Excel

пропонує дієвий прийом копіювання формули, при якому адреси клітинок будуть автоматично листуватися відповідно до розташування цих клітинок.

Для того щоб скопіювати формулу, поверніться до клітинки C1 і встановіть курсор миші в нижній правий кут так, щоб він прийняв вигляд маленького чорного хрестика, натисніть ліву кнопку миші (далі – ЛК) й, не відпускаючи її, перемістіть курсор миші вниз по стовпчику C, до останнього рядка таблиці. Відпустіть ЛК. На екрані з'явиться результат множення стовпця A на стовець B. Клацніть, наприклад, по клітинки C4. У рядку формул ви побачите запис: = A4 * B4, який записано при копіюванні самою програмою.

Таким чином, досить ввести формулу один раз, а потім скопіювати її для рядків або стовпців. Адреси клітинок у формулі перепишуться автоматично.

Створення формули за допомогою миші і клавіатури

Адреси клітинок рекомендується вводити за допомогою миші. З клавіатури вводяться тільки оператори.

Установіть табличний курсор до клітинки D1. Наприклад, в цьому стовпці повинен з'явитися результат ділення чисел стовпчика A на B.

1. Уведіть знак =
2. Клацніть ЛК по клітинки і A1 (в рядку формул автоматично запишеться адреса осередку).
3. Введіть з клавіатури знак / (скісна риска)
4. Клацніть ЛК по клітинки B1
5. Натисніть Enter
6. Скопіюйте хрестиком формулу по рядках стовпчика D.

При записуванні формул можна використовувати оператори: + (додавання), – (віднімання), / (ділення), * (множення), ^ - піднесення до ступеня. Під час обчислень в першу чергу, виконуються дії в дужках. Множення і ділення виконуються раніше додавання і віднімання. Оператори, що мають однаковий пріоритет, виконуються зліва направо.

Якщо формулу введено невірно, в клітинки з'являється повідомлення про помилку. Деякі повідомлення надано в таблиці В.2

Таблиця В.2 – Повідомлення про помилку

| | |
|----------|--|
| #ДЕЛ/0 | Спроба ділення на нуль |
| #ИМЯ? | Використовується ім'я, якого немає у списку |
| #ЗНАЧ! | Введена математична формула, яка посилається на текст |
| #ССЫЛКА! | Відсутня діапазон комірок, на який посилається формула |

Примітка. На початку розділу було зроблено зауваження про те, що пробіли всередині формули неприпустимі. Але, якщо формула довга, в неї можна включити символи табуляції і розриви рядків. Тоді формула легко сприймається. Для того щоб ввести символи табуляції, встановіть в рядку формул текстовий курсор в задану позицію і натисніть сукупність клавіш Ctrl-Alt-Tab. Розрив рядка з'являється при натисканні клавіш Alt-Tab.

Використання констант у формулах

Адреси клітинок, які використовуються у формулі, називають відносними, тому що вони змінюються при копіюванні формули. Іноді необхідно зафіксувати адреса клітинки або серії клітинок, тобто зробити його абсолютним. Наприклад, при проведенні обчислень необхідно все числа стовпчика «С» помножити на 20%. Ця константа зберігається в певній клітинці.

Як зробити адресу клітинки абсолютним? Для цього перед координатою рядки або стовпці (або і рядки і стовпці) в формулах поміщають знак долара: \$.

Зробіть активною клітинку Н1 і введіть ставку ПДВ, тобто 20 %. У стовпці Е ми хочемо обчислити ПДВ від чисел стовпчика С. Клацніть по клітинки Е1.

Як виглядає формула? Відповідь, на перший погляд, очевидна: = С1*Н1. Дійсно, введіть цю формулу. Отримаємо правильну відповідь: 1,0. Скопіюйте формулу хрестиком по рядках стовпчика Е. Але тоді в рядках Е2 – Е5 з'явилися нулі, що не правильно!

В чому причина? Клацніть по комірці Е2 і подивіться в рядок формул.

Програма записала формулу:

$$=C2*H2$$

Але нам необхідно, щоб адреса клітинки H1 не змінювався, тому що в цієї клітинці зберігається константа. Отже, щоб зафіксувати адресу, зробивши її абсолютною, потрібно повернутися в клітинку E1, клацнути в рядку формул по H1 і натиснути клавішу F4 (табл. В.3).

Таблиця В.3 – Використання констант у формулах

| | A | B | C | D | E |
|---|----|---|----|-------|------------|
| 1 | 5 | 4 | 20 | 1,250 | =C1*\$H\$1 |
| 2 | 3 | 6 | 18 | 0,500 | |
| 3 | 6 | 9 | 54 | 0,667 | |
| 4 | 12 | 8 | 96 | 1,500 | |
| 5 | 10 | 9 | 90 | 1,111 | |

Натисніть Enter. Скопіюйте цю формулу «хрестиком» (табл. В.4).

Таблиця В.4 – Результат використання констант у формулах

| | A | B | C | D | E |
|---|----|---|----|-------|-----|
| 1 | 5 | 4 | 20 | 1,250 | 1,0 |
| 2 | 3 | 6 | 18 | 0,500 | 0,6 |
| 3 | 6 | 9 | 54 | 0,667 | 1,2 |
| 4 | 12 | 8 | 96 | 1,500 | 2,4 |
| 5 | 10 | 9 | 90 | 1,111 | 2,0 |

Клацніть, наприклад, по клітинці E5. У рядку формул з'явиться запис:

$$= E5*H1$$

Отже, при копіюванні адреса клітинки H1 не зміниться.

Підсумовування рядків і стовпців

У більшості таблиць необхідно просто підсумувати числа в рядках і стовпцях. Для цього застосовується вбудована функція автоматичної суми.

Наприклад, ми хочемо знайти суми чисел в стовпці А. Клацніть по клітинці А6. Натисніть на панелі інструментів на кнопочку Σ .

У клітинці А6 з'явиться формула: **=СУММ(А1:А5)**. Це означає, що програма підключила вбудовану функцію підсумовування. Аргумент функції: А1:А5 вказує на діапазон клітинок, який необхідно підсумувати. Натисніть Enter. В клітинці А6 з'явиться результат. Скопіюйте «хрестиком» цю формулу до шостого рядка. В результаті всі стовпці будуть підсумовані. Аналогічно можна підсумувати рядки. Виберіть клітинку G1 і натисніть кнопочку Σ , потім Enter. Далі скопіюйте "хрестиком" вниз отриману формулу.

Використання вбудованих функцій

Excel містить велику кількість вбудованих функцій: математичних, статистичних, фінансових тощо. Кожна функція має унікальне ім'я. Воно часто вказує на призначення функції. Аргументи функції записуються в круглих дужках. Наприклад, досить корисною буде функція ОКРУГЛ (), яка дозволяє округляти число до заданої кількості знаків після коми. Загальний вигляд функції:

=ОКРУГЛ (число або адреса клітинки; число знаків після коми)

Для прикладу:

- введіть у клітинку F10 число 10;
- введіть у клітинку G10 число 6;
- у клітинці H10 запишіть формулу: **= F10 / G10**
- натисніть Enter. З'явиться результат: 1,666667.

Повернемося в клітинку H10. Клацніть по рядку формул і змініть формулу: **=ОКРУГЛ(F10/G10;2)** Натисніть кнопку Enter. Результат дорівнює 1,67.

Використання майстра функцій полегшує завдання введення формул з використанням вбудованих функцій. Встановіть табличний курсор в вільну клітинку. Для виклику майстра функцій натисніть кнопочку f_x на панелі

інструментів. З'явиться знайоме вікно, в якому перераховані всі функції, які згруповані за категоріями. Майстер дозволяє вивчити різні функції (таблиця В.5).

Таблиця В.5 – Функції MS EXCEL

| Функція | Аргумент | Призначення |
|-----------|--------------------------|--|
| КОРЕНЬ() | Число | Обчислює квадратний корінь |
| СТЕПЕНЬ() | Показник ступеня | Виводить результат піднесення до ступеня |
| РАДИАНЫ() | Значення кута в градусах | Перетворює градуси в радіани |
| ГРАДУСЫ() | Значення кута в радіанах | Перетворює радіани в градуси |
| СРЗНАЧ() | Масив чисел | Обчислює середнє арифметичне значення заданого масиву клітинок |
| МАХ() | Масив чисел | Виводить максимальне значення масиву клітинок |
| МИН() | Масив чисел | Виводить мінімальне значення масиву клітинок |
| ПИ() | | Виводить число $\pi = 3,14159265 \dots$ |
| TAN() | Кут в радіанах | Обчислює тангенс кута |
| SIN() | Кут в радіанах | Обчислює синус кута |
| COS() | Кут в радіанах | Обчислює косинус кута |
| EXP() | Число | Обчислює експоненту аргументу |
| LN() | Число | Обчислює натуральний логарифм |
| ASIN() | Число | Обчислює \arcsin кута в радіанах |
| ACOS() | Число | Обчислює \arccos кута в радіанах |
| ATAN() | Число | Обчислює \arctg кута в радіанах |
| ABS() | Число | Виводить абсолютне значення аргументу |

Додаток Г

Створення функції GRADMC в MS Excel

Рекомендується створити нову функцію, яка увійде до складу функцій MS Excel і дозволяє переводити десяткові градуси в формат градуси/хвилини/секунди. Для цього відкрийте робочу книгу MS Excel. Натисніть комбінацію клавіш **Alt** і **F11**. У вікні VBA (Visual Basic for application) виберіть пункт головного меню "**Insert**", потім пункт "**Module**". З'явиться вікно модуля, в яке введіть код програми, що формує функцію **GRADMC**.

Function GRADMC(a)

GRADMC=Str(Fix(a))+"°"+Str(Fix((a-Fix(a))*60))+" '" + Str(Int(60*((a-Fix(a))*60-Fix((a-Fix(a))*60))))+" "

End Function

| | | | | |
|---|----------|-------------|---|---|
| | B1 | | | |
| | A | B | C | D |
| 1 | 56,28965 | 56° 17' 22" | | |

Залишіть інформацію у відповідному файлі. Для перевірки поверніться на перший аркуш Excel. В якійсь клітинці, наприклад, A1 введіть число 56,289654, а в клітинці B1 формулу: **=GRADMC(A1)**

Надалі цю функцію можна використовувати при розв'язанні завдань РГР.

Додаток Д

Створення функції TEST1 і TEST2 в MS Excel

Рекомендується створити нову функцію TEST1, яка увійде до складу функцій MS Excel і дозволяє провести перевірку нерівності $90 < B + C < 270$ для кутів прямокутного сферичного трикутника. Для цього відкрийте робочу книгу MS Excel. Натисніть комбінацію клавіш **Alt** і **F11**. У вікні VBA (Visual Basic for application) виберіть пункт головного меню **Insert**, потім пункт **Module**. З'явиться вікно модуля, у яке введіть код програми, що формує функцію **TEST1**.

```
Function TEST1(B, C)
If B + C < 270 And B + C > 90 Then
test1 = "TAK"
Else
test1 = "HI"
End If
End Function
```

Збережіть зміни. Аналогічно, створіть нову функцію TEST2, яка перевіряє нерівність $-90 < B - C < 90$ для кутів прямокутного сферичного трикутника.

Додаток Е

Створення функції ODNOR1 в MS Excel

Рекомендується створити нову функцію ODNOR1, яка увійде до складу функцій MS Excel і дозволяє провести перевірку умови однорідності елементів прямокутного сферичного трикутника:

- якщо катети b , c однорідні, то гіпотенуза a повинна бути менше 90° ;
- якщо катети b , c різнорідні, то гіпотенуза a повинна бути більше 90° .

Для цього відкрийте робочу книгу MS Excel. Натисніть комбінацію клавіш **Alt** і **F11**. У вікні VBA (Visual Basic for application) виберіть пункт головного меню **Inser**", потім пункт **Modul**". З'явиться вікно модуля, в яке введіть код програми, що формує функцію **ODNOR1**:

```
Function ODNOR1 (a, b, c)
```

```
ODNOR1= If((b <90 And c < 90 And a<90) Or (b<90 And c>90 And a>90) Or (b>90 And c<90 And a>90) Or  
(b>90 And c>90 And a<90), "ТАК", "НІ")
```

```
End Function
```

Примітка. ODNOR1= записується в один рядок. Збережіть зміни.

Додаток Ж

Створення функції ODNOR2 в MS Excel

Рекомендується створити нову функцію ODNOR2, яка увійде до складу функцій MS Excel і дозволяє провести перевірку умови однорідності елементів прямокутного сферичного трикутника:

- якщо прилеглі до гіпотенузи кути B , C однорідні, то гіпотенуза a менше 90° ;
- якщо ж ці кути B , C різні, то гіпотенуза a більше 90° .

Для цього відкрийте робочу книгу MS Excel. Натисніть комбінацію клавіш **Alt** і **F11**. У вікні VBA (Visual Basic for application) виберіть пункт головного меню **Insert**, потім пункт **Module**. З'явиться вікно модуля, в яке введіть код програми, що формує функцію **ODNOR2**:

```
Function ODNOR2(a, ug1, ug2)

ODNOR2 = IIf((ug1<90 And ug2<90 And a<90) Or (ug1<90 And ug2>90 And a>90) Or (ug1>90 And ug2<90 And a>90) Or
(ug1>90 And ug2>90 And a<90), "ТАК", "НІ")

End Function
```

Примітка. ODNOR2= записується в один рядок. Збережіть зміни.

Додаток II

Створення функції ODNOR3 в MS Excel

Рекомендується створити нову функцію ODNOR3, яка увійде до складу функцій MS Excel і дозволяє провести перевірку умови однорідності елементів прямокутного сферичного трикутника: довільний катет і протилежний йому кут завжди однорідні.

Для цього відкрийте робочу книгу MS Excel. Натисніть комбінацію клавіш **Alt** і **F11**. У вікні VBA (Visual Basic for application) виберіть пункт головного меню **Insert**, потім пункт **Module**. З'явиться вікно модуля, в яке введіть код програми, що формує функцію **ODNOR3**:

```
Function ODNOR3 (ka, ug)
```

```
If (ka < 90 And ug < 90) Or (ka > 90 And ug > 90) Then
```

```
    ODNOR3= "TAK"
```

```
Else
```

```
    ODNOR3= "HI"
```

```
End If
```

```
End Function
```

Збережіть зміни.

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації
для виконання розрахунково-графічної роботи з навчальної дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Модуль 2

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
зі спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій)*

Укладач **МОРДОВЦЕВ** Сергій Михайлович

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *С. М. Мордовцев*

План 2021, поз. 194 М

Підп. до друку __20.01.2022. Формат 60 x 84/16
Ум. друк. арк. 2,3.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.