

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**К. О. Метешкін, О. О. Воронков**

**МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
зі спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій)*

**Харків**  
**ХНУМГ ім. О. М. Бекетова**  
**2022**

УДК 528.85(075.8)

**Метешкін К. О.** Математична обробка геодезичних вимірів : конспект лекцій (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій) / К. О. Метешкін, О. О. Воронков ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 126 с.

Автори:

д-р техн. наук, проф. К. О. Метешкін  
канд. екон. наук, доц. О. О. Воронков

Рецензент:

**К. А. Мамонов**, доктор економічних наук, професор кафедри земельного адміністрування та геоінформаційних систем, директор навчально-наукового інституту будівельної та цивільної інженерії (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

*Рекомендовано кафедрою земельного адміністрування та геоінформаційних систем, протокол № 1 від 31.08.21.*

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ. ТЕОРІЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ.....	7
Тема 1 ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ.....	7
1.1 Класичний і статистичний методи визначення імовірності випадкової події .....	7
1.2 Теорема додавання імовірностей.....	9
1.3 Теорема множення імовірностей.....	12
1.4 Формула повної імовірності .....	12
1.5 Теорема гіпотез.....	13
1.6 Повторні незалежні випробування .....	13
1.7 Формула Пуассона .....	14
Тема 2 ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ.....	15
2.1 Поняття закону розподілу випадкової величини. Ряд розподілу імовірностей .....	15
2.2 Універсальні закони розподілу імовірностей .....	17
2.3 Моменти випадкової величини. Математичне сподівання. Дисперсія. Середнє квадратичне відхилення .....	20
Тема 3 НАЙВАЖЛИВІШІ ДЛЯ ПРАКТИКИ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН .....	24
3.1 Закони розподілу дискретних випадкових величин .....	25
3.2 Закони розподілу безперервних випадкових величин .....	26
3.3 Нормальний закон розподілу випадкових величин.....	26
Тема 4 СИСТЕМА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ.....	30
4.1 Багатовимірна випадкова величина. Кореляційна таблиця .....	30
4.2 Функція розподілу та щільність розподілу системи випадкових величин.....	31
4.3 Числові характеристики системи. Кореляційний момент та коефіцієнт кореляції .....	32
4.4 Поняття багатомірного випадкового вектора .....	35
4.5 Числові характеристики функцій випадкових величин .....	36
Тема 5 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ. ОЦІНКИ ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК. ПОГРІШНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРІВ.....	39
5.1 Основні поняття та визначення .....	39

5.2 Класифікація вимірів.....	40
5.3 Оцінки числових характеристик та їхні властивості.....	44
5.4 Структура похибок вимірів.....	46
5.5 Оцінювання точності результатів вимірів за дійсними погрішностями .....	52
5.6 Інтервальне оцінювання числових характеристик .....	53
<b>Тема 6 РЕГРЕСІЙНО-КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ .....</b>	<b>56</b>
6.1 Поняття регресійної залежності .....	56
6.2 Побудова поля кореляції та вибір виду статистичної залежності на підставі статистичних даних.....	57
6.3 Визначення параметрів рівняння регресії за методом найменших квадратів .....	58
6.4 Оцінювання тісноти лінійного зв'язку між залежними величинами .....	60
<b>ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2 ОСОБЛИВОСТІ ОБРОБКИ ВИМІРЮВАНЬ У ПЛАНОВИХ І ВИСОТНИХ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖАХ .....</b>	<b>63</b>
<b>Тема 7 ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ФУНКЦІЙ ВИМІРЯНИХ ВЕЛИЧИН .....</b>	<b>63</b>
7.1 Основні теореми .....	63
7.2 Визначення накопиченої погрішності у геодезичних вимірах .....	66
<b>Тема 8 МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ОДНІЄЇ ВЕЛИЧИНИ.....</b>	<b>72</b>
8.1 Проста арифметична середина та її властивості.....	72
8.2 Зрівнювання ряду результатів вимірів однієї величини .....	75
8.3 Апостеріорне оцінювання точності при опрацюванні ряду рівноточних вимірів .....	77
8.4 Послідовність математичної обробки ряду рівноточних вимірів однієї величини .....	79
<b>Тема 9 МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ОДНІЄЇ ВЕЛИЧИНИ.....</b>	<b>81</b>
9.1 Вага як міра відносної точності результатів нерівноточних вимірів.....	82
9.2 Вага функцій результатів нерівноточних вимірів .....	83
9.3 Розрахунок ваг результатів у певних видах вимірів.....	84
9.4 Загальна середньозважена арифметична середина .....	87
9.5 Апостеріорна оцінка точності при опрацюванні нерівноточних вимірів .....	91

9.6 Порядок математичної обробки ряду нерівноточних вимірів однієї величини .....	95
Тема 10 ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ЗА РІЗНИЦЯМИ ПОДВІЙНИХ ВИМІРІВ .....	98
10.1 Різниці подвійних вимірів однорідних величин .....	98
10.2 Оцінювання точності за різницями подвійних рівноточних вимірів .....	99
10.3 Оцінювання точності за різницями подвійних нерівноточних вимірів .....	102
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3 СПОСІБ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ .....	107
Тема 11 ПАРАМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ПОБУДОВ .....	107
11.1 Сутність завдання спільного зрівнювання результатів вимірів у геодезії .....	107
11.2 Сутність методу найменших квадратів .....	109
11.3 Особливості параметричного способу зрівнювання геодезичних побудов.....	111
11.4 Порядок розв'язання задач параметричним методом .....	117
Тема 12 КОРЕЛАТНИЙ МЕТОД ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ПОБУДОВ .....	119
12.1 Особливості корелатного способу зрівнювання.....	119
12.2 Порядок розв'язання задачі зрівнювання корелатним способом	123
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	125

## ВСТУП

Курс «Математична обробка геодезичних вимірів» є нормативною дисципліною підготовки бакалавра за освітньо-професійною програмою «Геодезія, картографія та землеустрій» за спеціальністю 193 – Геодезія та землеустрій». Обсяг курсу становить 180 академічних годин або 6 кредитів ЄКТС, зокрема 30 годин лекційних та 45 годин практичних занять. Обсяг самостійної роботи студента становить 105 годин, до якого включений час на виконання трьох завдань до самостійної роботи студента, тестування за теоретичним матеріалом змістових модулів дисципліни у системі «Moodle» та виконання розрахунково–графічної роботи. Програма курсу розділена на три змістові модулі: «Елементи теорії імовірностей і математичної статистики. Теорія похибок вимірювань», «Особливості обробки вимірювань у планових і висотних геодезичних мережах» і «Спосіб найменших квадратів», відповідно до яких виконується проміжний контроль знань шляхом тестування. Підсумковий контроль знань (екзамен) проводиться в письмовій формі.

Метою вивчення дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» є опанування здобувачами принципів та методів математичної обробки геодезичних даних, формування знань та навичок щодо опрацювання результатів геодезичних вимірів та оцінювання їхньої точності апіорі та апостеріорі.

У результаті вивчення курсу студенти повинні оволодіти основними методами обробки геодезичних вимірів, зокрема методами оцінювання точності функцій виміряних величин, опрацювання рівноточних та нерівноточних вимірів однієї величини, оцінювання точності за різницями подвійних вимірів, а також параметричним та корелатним метод зрівнювання геодезичних побудов.

# ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ. ТЕОРІЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ

## Тема 1 ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Класичний і статистичний методи визначення імовірності випадкової події. Теорема додавання імовірностей. Теорема множення імовірностей. Формула повної імовірності. Теорема гіпотез. Повторні незалежні випробування. Формула Пуассона.

### 1.1 Класичний і статистичний методи визначення імовірності випадкової події

Теорія імовірностей – математична наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах. Випадкове – це явище, яке за багаторазового повторення досліду протікає щораз інакше. Наприклад, вимірювання, якщо ми хочемо дістати точний результат, стрілянина у мішень є класичним прикладом випадкового явища, погодні умови, включаючи температуру повітря, силу вітру, атмосферний тиск та ін.

На відміну від випадкових існують детерміновані явища. Це, як правило, закони природи, що вивчають в курсі фізики, наприклад, прискорення вільного падіння дорівнює  $9,8 \text{ м/с}^2$ , сила, прикладена до матеріальної точки, надає їй прискорення  $F = m \cdot a$ .

Отже, якщо за відтворенням певних умов незмінно відбувається певна подія (та сама, тобто результат незмінно повторюється), то має місце детерміноване явище. Прогноз результату такого досліду можна здійснити, не проводячи експерименту. У випадку, коли на результат досліду впливає низка факторів, урахувати які неможливо, або дуже складно, скласти математичну модель, що прогнозує розвиток такого явища в детерміністському уявленні неможливо. У такому випадку намагаються знайти у випадкових явищах ті або інші закономірності. Такі закономірності виявляють у результаті масового повторення дослідів. Якщо їх вдається знайти, то випадкове явище є статистично однорідним або **стохастичним**. Якщо закономірності у явищі відсутні, тобто виявити їх не вдається, то таке явище є невизначеним і вимагає додаткового дослідження.

Введемо основні поняття і визначення. Одним з основних у теорії імовірностей є поняття випадкової події. **Випадкова подія** – це усякий факт, який в результаті досліду може відбутися або не відбутися.

Випадкові події позначають великими літерами латинського алфавіту:  $A = \{\text{влучення у мішень}\}$ ,  $B = \{\text{прибуття трамвая на зупинку}\}$ ,  $C = \{\text{поломка технічного пристрою}\}$ ,  $D = \{\text{коротке замикання в мережі}\}$ .

**Дослідом** називають відтворену сукупність умов, у яких може відбутися випадкова подія.

**Імовірність** випадкової події – це числова міра ступеня об'єктивної можливості появи даної події в результаті досліду. Імовірність події  $A$  позначають  $P(A)$ .

За одиницю виміру імовірності приймають імовірність **достовірної** події  $E$ , тобто такої, яка в результаті досліду обов'язково відбудеться:

$$P(E) = 1.$$

Протилежну достовірній подію називають **неможливою** і позначають  $\bar{E}$ . Імовірність неможливої події:

$$P(\bar{E}) = 0.$$

Очевидно, що значення імовірності будь-якої випадкової події  $A$  розташовується між нулем та одиницею:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Імовірність випадкової події можна визначити класичним методом тільки в обмеженій кількості явищ, а саме, якщо наслідки досліду мають наступні властивості:

- **утворюють повну групу** – якщо результатом однократного випробування є обов'язково один з можливих наслідків;
- **є рівноможливими** – якщо за умови симетрії досліду поява кожного з них є однаково можливою;
- **є несумісними** – якщо будь-які два з них не можуть відбутися одночасно.

Якщо наслідки досліду мають перелічені властивості (утворюють повну групу, є несумісними і рівноможливими), то говорять, що дослід збігається до **схеми випадків**, або що має місце класична схема теорії імовірностей. У рамках цієї схеми можна точно підрахувати імовірність події, не проводячи випробувань. Якщо дослід збігається до схеми випадків, то імовірність події  $A$  визначають як відношення кількості можливих наслідків досліду, які сприяють появі події  $A$ , до загальної кількості можливих наслідків досліду:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.1)$$

де  $n$  – загальне число можливих наслідків досліду;

$m$  – число наслідків досліду, які сприяють появі події  $A$ .

Щоб підрахувати число всіх випадків  $n$  і числа випадків  $m$ , які сприяють появі події  $A$ , часто використовують число сполучень із  $s$  елементів по



$k$  елементів:

$$C_s^k = \frac{s!}{k!(s-k)!}$$

де  $s! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times s$ , при цьому  $0! = 1$ .

Якщо події в досліді не збігаються до схеми випадків, то оцінювання імовірності можна зробити тільки статистично. Спостерігаючи випадкові явища або проводячи випробування, визначають **частоту** появи даної події. При проведенні серії з  $n$  дослідів, у кожному з яких могла з'явитися або не з'явитися подія  $A$ , як частоту її появи розуміють відношення

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.2)$$

де  $n$  – число проведених дослідів;

$m$  – число появ події  $A$  в  $n$  дослідах.

Чи можна вважати частоту появи події  $A$  її імовірністю? Результат кожного досліду є випадковим, проте якщо спостережуване явище має статистичну однорідність, то за великої кількості дослідів частота події починає стабілізуватися і у границі прагне до імовірності події. Ця властивість усталеності частот, багаторазово перевірена експериментально, є однією з найбільш характерних закономірностей, спостережуваних у випадкових явищах. Вона відома за назвою закону великих чисел. Бернуллі довів, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A) = P(A). \quad (1.3)$$

Вираз (1.3) читають так: імовірність події  $A$  із збільшенням числа дослідів  $n$  збігається за імовірністю до імовірності події  $A$ . Це означає, що із збільшенням числа дослідів  $n$  імовірність того, що частота події  $A$  відрізняється від імовірності цієї події, зменшується.

## 1.2 Теорема додавання імовірностей

Оскільки в практичних умовах багаторазове відтворення досліду надзвичайно утруднене, для визначення імовірностей одних випадкових подій за відомими імовірностями інших подій, з ними пов'язаними, користуються теоремами теорії імовірностей: теоремою додавання і теоремою множення.

Введемо визначення. Сумою двох подій  $A$  і  $B$  називають подію  $C$ , що полягає у появі події  $A$  або події  $B$  або обох подій разом:

$$C = A \cup B.$$

Сума подій – логічна сума, її називають диз'юнкцією і позначають спеціальним знаком:

$$C = A \cup B.$$

Добутком двох подій  $A$  і  $B$  називають подію  $C$ , що полягає у спільній появі подій  $A$  і  $B$ :

$$C = A \cdot B.$$

Добуток подій – логічний добуток, його називають кон'юнкцією і також позначають спеціальним знаком:

$$C = A \cap B.$$

Протилежними називають дві несумісних події  $A$  та  $\bar{A}$ , якщо вони складають повну групу.

Подію  $A$  називають незалежною від події  $B$ , якщо імовірність події  $A$  не змінюється від того, відбулася подія  $B$ , чи ні. Якщо ж імовірність події  $A$  залежить від того, відбулася подія  $B$ , чи ні, то такі події називають залежними.

Імовірність події  $A$ , обчислена за умови, що подія  $B$  мала місце, називають умовною імовірністю події  $A$  і позначають  $P(A/B)$ .

Для ілюстрації останнього твердження розглянемо приклад. Нехай в урні три кулі, дві з яких білі, а третя – чорна. Одну за іншою з урни виймають дві кулі. Позначимо події:

$A = \{\text{перша вийнята куля виявилася білою}\};$

$B = \{\text{друга вийнята куля виявилася білою}\}.$

Імовірність події  $B$  залежить від того, відбулася подія  $A$ , чи ні. Якщо подія  $A$  відбулась, то імовірність події  $B$ :

$$P(B/A) = \frac{1}{2}.$$

Якщо ж подія  $A$  не відбулася, то імовірність події  $B$  буде іншою: якщо першою виявилася вийнятою чорна куля, то  $P(B/\bar{A}) = 1$ .

Теорема додавання: імовірність суми двох несумісних подій  $A$  і  $B$  дорівнює сумі імовірностей цих подій, тобто

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.4)$$

Доведемо це. Нехай дослід має  $n$  можливих наслідків, в числі яких  $m$  сприяють появі події  $A$  і  $k$  – появі події  $B$ :

$$\underbrace{\begin{array}{cc} m \rightarrow A & k \rightarrow B \\ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ & \circ \circ \circ \end{array}}_n$$

Оскільки подія  $C$  полягає у появі події  $A$ , якій сприяють  $m$  наслідків досліду, або події  $B$ , якій сприяють  $k$  наслідків, то події  $C$  сприяють  $m + k$  наслідків досліду. Тоді імовірність події  $C$  за класичною формулою визначиться в такий спосіб:

$$P(C) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

Наслідки теореми додавання. За методом математичної індукції (узагальнення) теорему додавання імовірностей можна поширити на будь-яке кінцеве число несумісних подій:

$$C = \Sigma A_i ;$$

$$P(\Sigma A_i) = \Sigma P(A_i) .$$

Наслідок 1. Якщо події  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$  утворюють повну групу несумісних подій, то сума їхніх імовірностей дорівнює одиниці:

$$P(\Sigma A_i) = \Sigma P(A_i) = 1 . \quad (1.5)$$

Наслідок 2. Сума імовірностей двох протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 ,$$

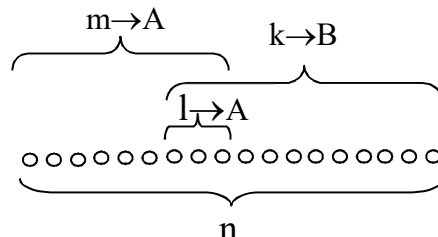
звідки імовірність будь-якої випадкової події

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) .$$

Якщо дві події є сумісними, імовірність їхньої суми дорівнює сумі імовірностей цих подій мінус імовірність їхньої спільної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) . \quad (1.6)$$

Доведемо це. Нехай дослід має  $n$  можливих наслідків, у числі яких  $m$  сприяють появі події  $A$ ,  $k$  – появі події  $B$  і  $l$  – появі події  $AB$ :



Оскільки подія  $C$  полягає у появі події  $A$ , якій сприяють  $m$  наслідків досліду, або події  $B$ , якій сприяють  $k$  наслідків, то події  $C$  сприяють  $m + k - l$  наслідків досліду. Тоді імовірність події  $C$  за класичною формулою визначиться в такий спосіб:

$$P(C) = \frac{m+k-l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(AB) .$$

Можна показати, що для суми трьох сумісних подій справедливою є формула

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) - P(ABC) ,$$

а в загальному випадку для  $n$  сумісних подій

$$P(\Sigma_{i=1}^n A_i) = \Sigma_i P(A_i) - \Sigma_{i,j} P(A_i A_j) + \Sigma_{i,j,k} P(A_i A_j A_k) + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) ,$$

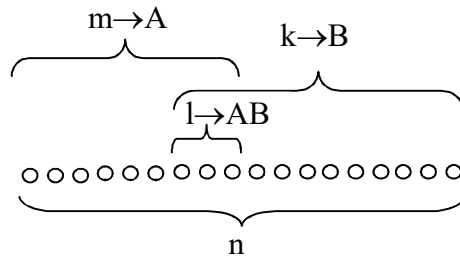
де суми поширюються на всі можливі комбінації індексів  $i, j, k, \dots$ , узятих по одному, по два, по три і т. д.

### 1.3 Теорема множення імовірностей

Імовірність добутку двох подій  $A$  і  $B$  дорівнює добутку імовірності одного з них на умовну імовірність іншого, обчислену за умови, що перша відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A). \quad (1.7)$$

Доведемо це. Нехай дослід має  $n$  можливих наслідків, у числі яких  $m$  сприяють появі події  $A$ ,  $k$  – появі події  $B$  і  $l$  – появі події  $AB$ :



Події  $AB$  сприяють  $l$  наслідків досліду з  $n$ :  $P(AB) = \frac{l}{n}$ , події  $A$  сприяють  $m$  наслідків досліду з  $n$ :  $P(A) = \frac{m}{n}$ , а події  $B$ , за умови, що одночасно з нею відбулася подія  $A$ , сприяють  $l$  наслідків досліду з  $m$   $P(B|A) = \frac{l}{m}$ . Тоді можна записати

$$P(AB) = \frac{l}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{m}.$$

Остаточно імовірність події добутку двох подій визначиться в такий спосіб:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Для імовірності добутку  $n$  подій формула має вигляд:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

Якщо події  $A$  і  $B$  незалежні, то умовна імовірність події  $B$  дорівнює безумовній імовірності цієї події:

$$P(B/A) = P(B).$$

Наслідок. Імовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку імовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.8)$$

Якщо маємо кілька незалежних подій:

$$P(\prod_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P(A_i).$$

### 1.4 Формула повної імовірності

Формула повної імовірності є наслідком двох теорем теорії імовірностей. Нехай передбачається проведення досліду, про умови протікання якого можна зробити  $N$  взаємовиключних припущень (гіпотез). Умови протікання досліду (гіпотези) являють собою повну групу несумісних подій  $H_1, H_2, \dots, H_N$ ,

імовірності яких  $P(H_i)$  відомі. Деяка випадкова подія  $A$  може з'явитися за будь-яких умов протікання досліду з різною імовірністю, тому її можна подати як суму несумісних подій:

$$A = H_1A + H_2A + \dots + H_NA .$$

Для визначення повної безумовної імовірності події  $A$ , використовуючи теорему додавання і множення, дістанемо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^N P(H_iA) = \sum_{i=1}^N P(H_i)P(A/H_i). \quad (1.9)$$

Отже, повна безумовна імовірність події  $A$  з урахуванням випадковості умов протікання досліду дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з гіпотез на умовну імовірність події  $A$  при кожній з гіпотез.

### 1.5 Теорема гіпотез

Ця теорема дозволяє за відомими до проведення досліду (априорними) імовірностями гіпотез  $P(H_i)$  і за результатом досліду (настання події  $A$ ) визначити обчислені після досліду (апостеріорні) імовірності гіпотез  $P(H_i/A)$ .

За теоремою множення імовірність появи події  $A$  при  $i$ -й гіпотезі

$$P(H_i \cdot A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

внаслідок симетрії подій справедливо:

$$P(H_i \cdot A) = P(A) \cdot P(H_i/A),$$

звідки одержуємо:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)},$$

або, якщо підставити  $P(A)$  з формули (1.9), маємо:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_i P(H_i) \cdot P(A/H_i)} . \quad (1.10)$$

Отже, формула Бейеса дозволяє переоцінити імовірності гіпотез після того, як стає відомим результат досліду, в результаті якого відбулася подія  $A$ .

### 1.6 Повторні незалежні випробування

На практиці доводиться стикатися з такими задачами, які можна подати як багаторазово повторювані незалежні випробування. Причому імовірність появи події  $A$  в одному досліді відома і дорівнює  $p$ , а треба визначити імовірність того, що в результаті певного числа дослідів подія  $A$  з'явиться рівно  $m$  разів. Для визначення цієї імовірності можна скористатися формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (1.11)$$

де  $P_n(m)$  – імовірність того, що в  $n$  випробуваннях подія  $A$  з'явиться рівно  $m$  разів;

$C_n^m$  – число сполучень із  $n$  елементів по  $m$ ;

$p$  – імовірність появи події  $A$  в одному досліді;

$q = 1 - p$  – імовірність не появи події  $A$  в одному досліді.

Переконаємося у справедливості формули Бернуллі на простому прикладі. Нехай виконуються п'ять пострілів, імовірність влучення при кожному пострілі в мішень дорівнює  $p$ . Визначимо імовірність рівно одного влучення:

$$P_5(1) = pqqqq + qrqqq + qqrqq + qqqrq + qqqqp = 5pq^4$$

визначимо імовірність рівно двох влучень:

$$P_5(2) = prqqq + pqrqq + pqqrq + pqqqp + qrrqq + \\ + qrqrq + qrqqp + qrrrq + qrrqr + qqrrp = 10p^2q^3;$$

визначимо імовірність рівно трьох влучень:

$$P_5(3) = prrqq + prqrq + prrrq + qrrrr + prqqp + \\ + pqrqr + qrrqr + pqrrp + qrqrr + qrrrr = 10p^3q^2;$$

визначимо імовірність рівно чотирьох влучень:

$$P_5(4) = prrrr + prrrq + prrrp + prrrr + qrrrr = 5p^4q.$$

У кожному з чотирьох виразів містяться однакові доданки. Число доданків в отриманих виразах для імовірностей визначається як число сполучень з п'яти елементів по одному, по два, по три та по чотири відповідно:

$$C_5^1 = \frac{5!}{1!(5-1)!} = 5; \quad C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10; \quad C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10; \quad C_5^4 = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5.$$

## 1.7 Формула Пуассона

Якщо імовірність  $p$  настання події в окремому випробуванні близька до нуля ( $p \leq 0,1$ ), то навіть за великої кількості випробувань  $n$ , але за невеликого значення добутку  $np$  (не більше десяти) одержувані значення імовірностей  $P_n(m)$  виявляються недостатньо точними, тому виникає потреба в іншій наближеній формулі. Отже, якщо число незалежних випробувань  $n$  досить велике, але значення добутку  $np$  залишається невеликим, то імовірність того, що в цих випробуваннях подія  $A$  відбудеться  $m$  разів, можна визначити за формулою Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}. \quad (1.12)$$

### Запитання для самоперевірки:

1. Дайте визначення випадкової події.
2. Які події називають: а) достовірними; б) рівноможливими; в) несумісними; г) протилежними? Наведіть приклади.
3. Чи є протилежні події несумісними?
4. Чи є несумісні події протилежними?

5. Дайте визначення імовірності випадкової події.
6. Як підрахувати імовірність події класичним методом?
7. Що розуміють під повною групою подій? Наведіть приклади.
8. Чи завжди можна визначити імовірність випадкової події класичним методом?
9. Як пов'язані одна з одною імовірність і частота появи події?
10. Як визначити імовірність суми сумісних подій?
11. Чи може сума двох подій збігатися з їхнім добутком?
12. Наведіть приклади залежних і незалежних подій.
13. Що розуміють під умовною імовірністю події?
14. Як визначається імовірність добутку двох подій?
15. У яких випадках для визначення імовірності застосовують формулу Бернуллі?
16. У яких випадках замість формули Бернуллі застосовують формулу Пуассона?

## **Тема 2 ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ**

Поняття закону розподілу випадкової величини. Ряд розподілу імовірностей. Універсальні закони розподілу імовірностей. Моменти випадкової величини. Математичне сподівання. Дисперсія. Середнє квадратичне відхилення.

### **2.1 Поняття закону розподілу випадкової величини.**

#### **Ряд розподілу імовірностей**

Випадковою величиною називають таку фізичну величину, яка в результаті досліду може прийняти те або інше значення, невідомо заздалегідь, яке саме (наприклад, число очок, що випали при киданні гральної кістки, число пасажирів у трамваї, температура повітря, час наробітку на відмову технічного пристрою). Випадкову величину позначають прописною літерою латинського алфавіту  $X$ ,  $Y$  або  $Z$ , а будь-яке її значення відповідною малою літерою  $x$ ,  $y$  або  $z$ .

Розрізняють дискретні й безперервні випадкові величини.

**Дискретною** називають таку випадкову величину, число значень якої скінченне або нескінченне, але рахункове (може приймати тільки окремі значення). Прикладом дискретної випадкової величини є сума очок, що випали при киданні двох гральних кісток, число пасажирів, які проходять через турнікет метро, та ін.

**Безперервною** називають таку випадкову величину, число значень якої нескінченне навіть на невеликому інтервалі. Прикладом безперервної випадкової величини може бути температура повітря. Вона може прийняти кожне з безперервного діапазону значень.

Для повної характеристики випадкової величини треба знати всі можливі її значення, а також імовірності появи цих значень в результаті досліду.

**Законом розподілу** випадкової величини називають будь-яке правило, що дозволяє певному значенню випадкової величини поставити у відповідність його імовірність. Найпростішим законом розподілу є закон розподілу дискретної випадкової величини  $X$ , називаний **рядом розподілу**. Він являє собою таблицю, у верхньому рядку якої перелічені всі значення випадкової величини  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в порядку їхнього зростання, а в нижньому – імовірності появи цих значень  $p_1, p_2, \dots, p_n$ :

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

де  $p_i = P \{X = x_i\}$ .

Оскільки події  $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots, \{X = x_n\}$  несумісні та утворюють повну групу, сума їхніх імовірностей дорівнює одиниці  $\sum p_i = 1$  (ця одиниця розподілена між значеннями  $X$ ).

Окрім ряду розподілу, для імовірнісної характеристики будь-якої випадкової величини застосовують два універсальних закони. Один з них називають функцією розподілу, а інший – щільністю розподілу імовірностей.

Сутність кожного закону розподілу полягає в тім, що він показує, як одиниця імовірності розподілена між значеннями певної випадкової величини, тобто які з її значень найбільш імовірні, а які майже не імовірні. Але, оскільки за фізичною природою розрізняють дискретні та безперервні випадкові величини, то для їхньої імовірнісної характеристики застосовують різні закони розподілення. Зокрема, для дискретних величин зручно застосовувати ряд розподілу. Але для безперервної величини ряд розподілу використовувати майже неможливо, оскільки кількість її значень нескінченна, а отже недоцільно будувати нескінченний ряд розподілу.

Тому потрібні такі універсальні закони, які узагальнюють правила імовірнісної характеристики випадкових величин. Саме цими законами розподілу і є функція розподілу та щільність розподілу імовірностей. Вони пов'язані один з одним та їх можна визначити з ряду розподілу.

Зауважимо, що на практиці отримати значення випадкової величини можна тільки у результаті її вимірів, а результати вимірів завжди відрізняються один від одного, оскільки містять випадкові похибки. Тому, досліджуючи певну



випадкову величину, наприклад, довжину ділянки місцевості, завжди отримують низку результатів вимірів, а потім їх опрацьовують.

Така вичерпна характеристика як закон розподілу не завжди потрібна, тому для імовірнісної характеристики застосовують певні числа, які називають числовими характеристиками випадкової величини. Зазвичай це арифметичне середнє та середнє квадратичне відхилення від арифметичного середнього. Теоретично числові характеристики визначають з ряду розподілу імовірностей випадкової величини. Але на практиці їх визначають з результатів вимірів, а отже вони є так само величинами випадковими і потребують дослідження з метою оцінювання їхньої точності.

Найбільш загальною формою закону розподілу для всіх випадкових величин (дискретних і безперервних) є функція розподілу.

## 2.2 Універсальні закони розподілу імовірностей

Функція розподілу. Для характеристики як безперервних так і дискретних випадкових величин зручніше користуватися не імовірністю події  $X = x_i$  (тому що значень  $x_i$  може бути багато), а імовірністю того, що випадкова величина  $X$  прийняла значення менше свого певного призначеного  $x$ , тобто імовірністю події  $X < x$ .

Функція розподілу випадкової величини  $X$  – це імовірність того, що випадкова величина  $X$  прийме значення, менше за  $x$ :

$$F(x) = P \{X < x\}. \quad (2.1)$$

Геометрично функція розподілу – це імовірність того, що значення випадкової величини потрапить лівіше  $x$  (рис. 2.1).

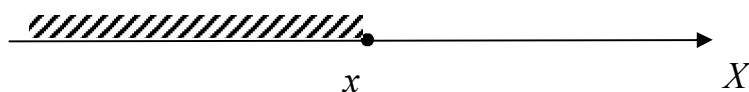


Рисунок 2.1 – Розташування поточного значення  $x$  на числовій осі

Функція розподілу дискретної випадкової величини являє собою розривну, східчасту функцію, що має перегони в точках, які відповідають можливим значенням  $x_1, x_2, \dots, x_n$  випадкової величини  $X$ , які дорівнюють імовірностям  $p_1, p_2, \dots, p_n$  цих значень. Сума всіх стрибків функції розподілу дорівнює одиниці.

У разі безперервної випадкової величини функція розподілу зазвичай має вигляд плавної кривої.

Функція розподілу має наступні властивості:

1. Значення функції розподілу належать відрізьку  $[0; 1]$ :

$$0 \leq F(x_2) \leq 1.$$

Це очевидно, оскільки вона є імовірністю.

2. Функція розподілу – неубутна функція, тобто  $F(x_2) \geq F(x_1)$ , якщо  $x_2 > x_1$ .

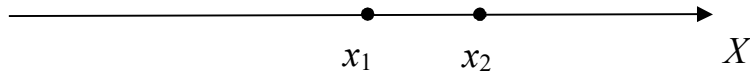


Рисунок 2.3 – Розташування значень  $X$  на числовій осі

Дійсно, нехай  $x_2 > x_1$ , тоді функція розподілу  $F(x_2)$  дорівнюватиме функції розподілу  $F(x_1)$  плюс імовірність влучення  $X$  на інтервал значень  $(x_1, x_2)$ :

$$F(x_2) = F(x_1) + P \{x_1 \leq X < x_2\}, \quad (2.2)$$

де  $F(x_1) \geq 0$  і  $P \{x_1 \leq X < x_2\} \geq 0$ , тому що являються імовірностями, отже

$$F(x_2) \geq F(x_1).$$

3. Імовірність того, що випадкова величина  $X$  прийме значення, розташоване в інтервалі  $(x_1, x_2)$ , дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі. З (2.2) маємо:

$$P \{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

4. Якщо всі можливі значення випадкової величини  $X$  належать інтервалу  $(-\infty, +\infty)$ , то при мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю, а при плюс нескінченності – одиниці, тобто  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$ .

Щільність розподілу. Нехай  $\epsilon$  безперервна випадкова величина  $X$  з функцією розподілу  $F(x)$ .

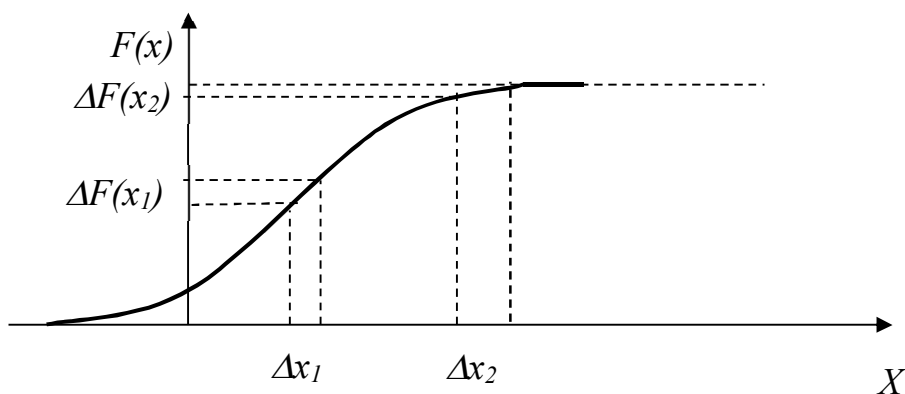


Рисунок 2.4 – Функція розподілу безперервної випадкової величини

Говорити про розподіл імовірностей між значеннями безперервної випадкової величини немає рації, тому що число її значень нескінченне навіть на невеликому інтервалі, та імовірність того, що безперервна випадкова величина прийме одне-єдине своє значення  $x_i$ , дорівнює нулю. Тому, характеризуючи

безперервну випадкову величину, завжди говорять про влучення її значень у той або інший інтервал. З рисунка 2.4 видно, що імовірність влучення  $X$  на інтервал  $\Delta x_1$  більша ніж на інтервал  $\Delta x_2$ , оскільки приріст функції розподілу  $\Delta F(x_1) > \Delta F(x_2)$ . Проте, порівнювати прирости функції розподілу, користуючись її графіком, незручно. З математики відомо, що

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx},$$

тобто границя відношення приросту функції  $F$  до приросту її аргументу  $X$  при прагненні  $\Delta x$  до нуля є похідною функції  $F$ .

Отже, закон розподілу імовірностей безперервних випадкових величин зручніше визначати шляхом завдання не функції розподілу  $F(x)$ , а щільності розподілу імовірностей  $f(x)$ , яка являє собою похідну від  $F(x)$  за  $x$ :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (2.3)$$

Передбачається, що  $F(x)$  безперервна і диференційована.

Щільністю розподілу випадкової величини  $X$  у точці  $x$  називають похідну функції розподілу  $X$  у цій точці.

На графіку щільності розподілу імовірність представляється площею (рис. 2.5).

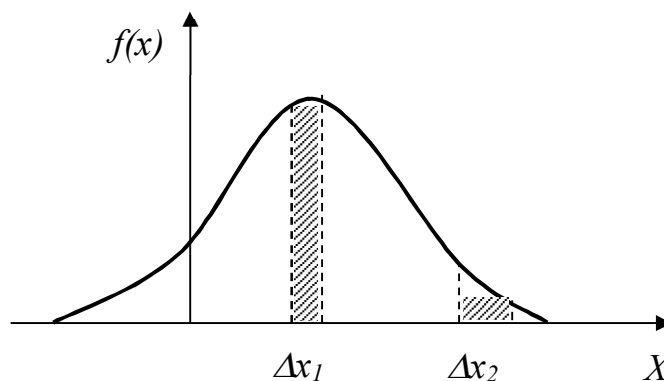


Рисунок 2.5 – Графік щільності розподілу

Властивості щільності розподілу імовірностей:

1. Щільність розподілу невід'ємна, тобто  $f(x) \geq 0$  як похідна неубутної функції.

2. Функцію розподілу визначають співвідношенням

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

3. Інтеграл від щільності розподілу в нескінченних межах дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1,$$

де  $f(x)dx$  – елемент імовірності, тобто імовірність влучення випадкової величини  $X$  на елементарну ділянку  $dx$ .

4. Імовірність влучення безперервної випадкової величини на інтервал  $(x_1, x_2)$  дорівнює інтегралу щільності розподілу в межах від  $x_1$  до  $x_2$ :

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Функцію розподілу  $F(x)$  іноді називають інтегральним законом розподілу, а щільність розподілу  $f(x)$  – диференціальним законом розподілу.

### 2.3 Моменти випадкової величини. Математичне сподівання. Дисперсія. Середнє квадратичне відхилення

Закон розподілу випадкової величини являє собою певну функцію, що цілком описує випадкову величину з імовірнісної точки зору, тобто є її вичерпною характеристикою і дозволяє визначати імовірності будь-яких подій, пов'язаних з випадковою величиною. Проте, у багатьох практичних задачах потрібно отримати компактніше подання інформації про випадкову величину. Для теорії імовірностей та її застосувань велику роль відіграють певні постійні числа, одержувані за певними правилами із законів розподілу випадкових величин і називані **числовими характеристиками** випадкової величини. Найважливішою числовою характеристикою випадкової величини є **математичне сподівання**.

Математичним сподіванням випадкової величини  $X$  називають суму добутків всіх можливих її значень на імовірності цих значень:

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (2.4)$$

Математичне сподівання тісно пов'язане із середнім значенням випадкової величини, отриманим з великої кількості дослідів.

Нехай зроблено  $n$  незалежних дослідів, в кожному з яких  $X$  прийняла певні значення  $x_i, i = \overline{1, k}$ . Припустимо, що  $x_1$  з'явилося  $n_1$  разів,  $x_2$  –  $n_2$  разів, і так далі, і  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ . Знайдемо середнє арифметичне отриманих значень, позначивши його  $m^*$ :

$$m^* = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n}.$$

Очевидно, що  $\frac{n_i}{n}$  – частота (статистична імовірність) події  $\{X = x_i\}$ , що позначають  $p_i^*$ , тоді:

$$m^* = \sum_{i=1}^k x_i p_i^*,$$

тобто середнє арифметичне дорівнює сумі добутків значень випадкової величини на їхні частоти.

При збільшенні числа дослідів  $n$  частота події  $p_i^*$  збігається за імовірністю

до імовірності події  $p_i$ . Виходить, і середнє арифметичне  $m^*$  буде збігатися за імовірністю до математичного сподівання  $M[X]$ .

Отже, математичне сподівання характеризує середнє значення випадкової величини. Воно є характеристикою її розташування на числовій осі, навколо якого групуються всі можливі значення. Іншими характеристиками положення є мода і медіана.

Модою  $M_o$  дискретної випадкової величини називають найбільш імовірне її значення. Для безперервної випадкової величини модою  $M_o$  є значення, якому відповідає найбільше значення її щільності розподілу, іншими словами, мода – точка глобального максимуму кривої розподілу безперервної випадкової величини (рис. 2.7).

Медіаною  $M_e$  випадкової величини називають таке її значення, що поділяє навпіл площу, обмежену кривою розподілу, тобто

$$P \{X < M_e\} = P \{X > M_e\} = 0,5 .$$

Узагальненням числових характеристик випадкової величини є так звані **моменти** або математичні сподівання випадкової величини. Розрізняють початкові  $\alpha$  і центральні  $\mu$  моменти.

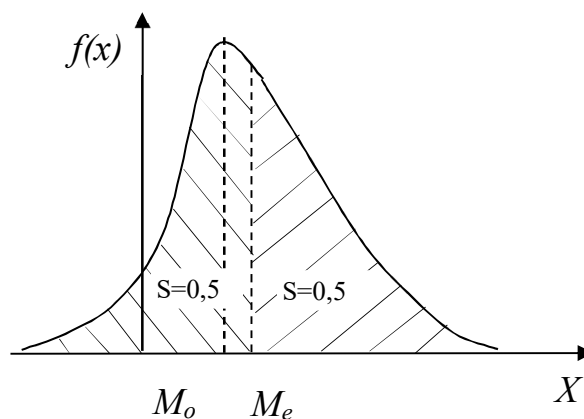


Рисунок 2.7 – Мода  $M_o$  і медіана  $M_e$

**Початковим моментом**  $s$ -го порядку дискретної випадкової величини називають математичне сподівання  $s$ -ї степені цієї величини:

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^n x_i^s p_i. \quad (2.5)$$

Для безперервної випадкової величини початковий момент  $s$ -го порядку

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x) dx. \quad (2.6)$$

Вирази (2.5) і (2.6) можна об'єднати в один, користуючись знаком математичного сподівання  $M$ :

$$\alpha_s = M[X^s], \quad (2.7)$$

тобто початковим моментом  $s$ -го порядку випадкової величини є математичне сподівання  $s$ -ї степені цієї випадкової величини.

При  $s = 1$  дістаємо перший початковий момент, або математичне сподівання випадкової величини:

$$\alpha_1 = M[X] = m_x. \quad (2.8)$$

На практиці іноді застосовують другий початковий момент  $\alpha_2$ :

$$\alpha_2 = M[X^2]. \quad (2.9)$$

**Центральним моментом**  $s$ -го порядку випадкової величини  $X$  називають математичне сподівання  $s$ -ї степені центрованої величини  $X$ . Як центровану розуміють відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$\dot{X} = X - m_x.$$

Центрування випадкової величини рівнозначне переносу початку відліку її значень від нуля осі  $X$  у точку математичного сподівання.

Моменти центрованої випадкової величини називають центральними.

Центральний момент  $s$ -го порядку випадкової величини  $X$  виражають формулою:

$$\mu_s = M[\dot{X}^s]. \quad (2.10)$$

Для дискретної випадкової величини  $X$  центральний момент  $s$ -го порядку:

$$\mu_s = M[\dot{X}^s] = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^s p_i = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^s p_i. \quad (2.11)$$

Для безперервної випадкової величини  $X$ :

$$\mu_s = M[\dot{X}^s] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}^s f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s f(x) dx. \quad (2.12)$$

Центральний момент першого порядку дорівнює нулю:

$$M[\dot{X}] = M[X - m_x] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x) p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^n p_i = 0.$$

Дуже важливою числовою характеристикою випадкової величини є центральний момент другого порядку. Для дискретної випадкової величини  $X$  його визначають формулою:

$$\mu_2 = M[\dot{X}^2] = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2 p_i = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i = D_x. \quad (2.13)$$

Для безперервної випадкової величини:

$$\mu_2 = M[\dot{X}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = D_x. \quad (2.14)$$

Другий центральний момент називають **дисперсією**. Дисперсія випадкової величини є характеристикою розсіювання цієї величини навколо математичного сподівання. У випадку, якщо це розсіювання відсутнє, величина  $D_x$  дорівнює нулю. Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, що не завжди зручно. Тому як характеристику розсіювання часто використовують середнє квадратичне відхилення випадкової величини  $X$ :

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (2.15)$$

Центральні моменти більш високого порядку можуть характеризувати ступінь асиметрії розподілу випадкової величини, крутість кривої розподілу та ін.

Властивості числових характеристик.

1. Математичне сподівання не випадкової величини  $c$  дорівнює їй самій:

$$M[c] = \sum_{i=1}^n cp_i = c \sum_{i=1}^n p_i = c. \quad (2.16)$$

2. Математичне сподівання добутку не випадкової величини  $c$  на випадкову величину  $X$  дорівнює добутку цієї не випадкової величини на математичне сподівання випадкової величини  $X$ :

$$M[cX] = \sum_{i=1}^n cx_i p_i = c \sum_{i=1}^n x_i p_i = cM[X], \quad (2.17)$$

тобто не випадкову величину  $c$  можна виносити за знак математичного сподівання.

3. Дисперсія не випадкової величини  $c$  дорівнює нулю:

$$D[c] = M[c^2] = M[(c - m_c)^2] = M[0] = 0. \quad (2.18)$$

4. Дисперсія добутку не випадкової величини  $c$  на випадкову величину  $X$  дорівнює добутку квадрата цієї не випадкової величини на дисперсію випадкової величини  $X$ :

$$D[cX] = M[c^2 X^2] = c^2 M[X^2] = c^2 D[X] \quad (2.19)$$

тобто не випадкову величину можна виносити з-під знака дисперсії, зведши її у квадрат.

На практиці дисперсію часто обчислюють як різницю другого початкового моменту  $\alpha_2$  і квадрата математичного сподівання:

$$D[X] = M[X^2] = M[(X - M[X])^2] = M[X^2 - 2XM[X] + (M[X])^2],$$

оскільки математичне сподівання суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань, а постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання, маємо:

$$D[X] = M[X^2] - 2M[X]M[X] + (M[X])^2 = M[X^2] - (M[X])^2. \quad (2.20)$$

### Запитання для самоперевірки:

1. Дайте визначення випадкової величини.
2. Яку випадкову величину називають дискретною? Наведіть приклади.
3. Яку випадкову величину називають безперервною? Наведіть приклади.
4. Поясніть, з якою метою в теорії імовірностей розрізняють дискретні і безперервні випадкові величини?
5. Що має на увазі термін «закон розподілу»? В яких формах може бути поданий закон розподілу випадкової величини?
6. Чи може функція розподілу: а) перевищувати одиницю; б) бути від'ємною? Поясніть, чому.
7. Що розуміють як щільність розподілу випадкової величини?

8. Чому не має сенсу поняття щільності розподілу для дискретної випадкової величини?
9. Яка розмірність щільності розподілу?
10. Перелічіть властивості щільності розподілу.
11. Як за рядом розподілу знайти значення функції розподілу?
12. Як виражають імовірність влучення випадкової величини на інтервал значень, якщо відома функція розподілу? Щільність розподілу?
13. Назвіть основні числові характеристики випадкових величин.
14. Як пов'язані одне з одним математичне сподівання та середнє арифметичне значень випадкової величини?
15. Чи є математичне сподівання випадковою величиною?
16. Чи є дисперсія випадковою величиною?
17. Як математичне сподівання і дисперсія характеризують випадкову величину?
18. Чим зручне застосування замість дисперсії середнього квадратичного відхилення?
19. В яких одиницях вимірюють математичне сподівання?
20. В яких одиницях вимірюють дисперсію?
21. Чому дорівнює математичне сподівання невинуватої величини  $C$ ?
22. Які особливості графіка функції розподілу?
23. Як обчислити імовірність влучення випадкової величини у заданий інтервал, якщо відома функція розподілення?
24. Як обчислити імовірність влучення випадкової величини у заданий інтервал, якщо відома щільність розподілу?
25. Надати визначення та формули обчислення наступних числових характеристик дискретних і безперервних випадкових величин: математичного сподівання, моментів, дисперсії, середньоквадратичного відхилення.
26. Поняття центрованої випадкової величини. Числові характеристики центрованої випадкової величини.

### **Тема 3 НАЙВАЖЛИВІШІ ДЛЯ ПРАКТИКИ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН**

Закони розподілу дискретних випадкових величин (біноміальний розподіл, розподіл Пуассона). Закони розподілу безперервних випадкових величин (експонентний закон розподілу, закон рівномірної щільності). Нормальний закон розподілу випадкових величин.



### 3.1 Закони розподілу дискретних випадкових величин

**Біноміальний закон розподілу.** Дискретна випадкова величина  $X$  має біноміальний закон розподілу (розподіл Бернуллі), якщо її можливі значення:  $0, 1, \dots, n$ , а відповідні імовірності визначають із співвідношення:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (3.1)$$

де  $p$  – імовірність появи події  $A$  в одному досліді,  $0 < p < 1$ ;

$q$  – імовірність не появи події  $A$  в одному досліді,  $q = 1 - p$ .

Числові характеристики випадкової величини, розподіленої за біноміальним, законом мають вигляд:

$$m_x = np; \quad D_x = npq; \quad \sigma_x = \sqrt{npq}. \quad (3.2)$$

**Закон розподілу Пуассона.** Закон Пуассона є граничним для біноміального розподілу. Тобто він має місце, коли  $n$  нескінченно велике, а  $p$  дуже мала (його називають законом рідких явищ).

Імовірність того, що за певний час  $\tau$  відбудеться рівно  $k$  подій за законом Пуассона визначається формулою

$$P(k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}, \quad (3.3)$$

де  $\lambda$  – число подій в одиницю часу;

$\tau$  – інтервал часу.

Отже, коли імовірність  $p$  появи події  $A$  в кожному окремому досліді мала, а число дослідів  $n$  велике, біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини може бути приблизно замінений законом Пуассона.

Математичне сподівання випадкової величини, що має розподіл Пуассона, – це середнє число подій, що потрапляють на ділянку часу довжиною  $\tau$ :

$$m_x = \lambda\tau. \quad (3.4)$$

Отже, закон розподілу Пуассона визначається одним параметром  $a = \lambda\tau$ , що є одночасно математичним сподіванням і дисперсією випадкової величини  $X$ :

$$D_x = \lambda\tau. \quad (3.5)$$

Розподіл Пуассона з параметром  $a = np$  можна приблизно застосовувати замість біноміального, коли число дослідів  $n$  дуже велике, а імовірність  $p$  дуже мала, тобто в кожному окремому досліді подія  $A$  з'являється вкрай рідко. Розподіл Пуассона часто використовують, коли мають справу з числом подій, які з'являються на проміжку часу. Наприклад, число дефектів на новій ділянці шосе довжиною 10 км, число місць витоку води на 100 км водопроводу, число поломок надійного технічного пристрою за певний період часу, наприклад за рік.

### 3.2 Закони розподілу безперервних випадкових величин

**Експонентний закон розподілу.** Функцію розподілу  $T$  обчислюють за формулою:

$$F(t) = P\{T < t\} = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (3.6)$$

Щільність розподілу  $T$ , як похідна функції розподілу  $F(t)$ , має вигляд:

$$f(t) = \frac{d(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (3.7)$$

Математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за експонентним законом, зворотне параметру розподілу  $\lambda$ :  $m_x = \frac{1}{\lambda}$ .

Дисперсія:  $D_t = \frac{1}{\lambda^2}$ , середнє квадратичне відхилення:  $\sigma_x = \frac{1}{\lambda}$ .

Імовірність влучення випадкової величини, що має експонентний розподіл, на інтервал значень  $(\alpha, \beta)$ :  $P\{\alpha \leq t \leq \beta\} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$ .

**Закон рівномірної щільності.** Цей закон розподілення мають похибки грубих вимірів. Безперервна випадкова величина  $X$  має рівномірний розподіл на інтервалі від  $\alpha$  до  $\beta$ , якщо її щільність розподілу на цьому інтервалі постійна:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } x \in (a, b) \\ 0 & \text{при } x \notin (a, b) \end{cases}. \quad (3.8)$$

Математичне сподівання:  $m_x = \frac{b+a}{2}$ ; дисперсія:  $D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$ ; середнє квадратичне відхилення:  $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$ .

Імовірність влучення значень випадкової величини на інтервал  $(\alpha, \beta)$ :

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Функція рівномірного розподілу:

$$F(x) = \frac{x - \alpha}{b - a}. \quad (3.9)$$

### 3.3 Нормальний закон розподілу випадкових величин

Нормальний закон розподілу імовірностей ще називають законом Гаусса, оскільки він запропонований Гаусом під час дослідження помилок точних вимірів (зазначимо, що помилки грубих вимірів мають інший розподіл імовірностей). Закон Гаусса ґрунтується на двох посиленнях:

- помилки різного знака, однакові за розміром, рівноймовірні;
- малі помилки імовірніші за великі (промахи).

Цім двом посиленням відповідає холмоподібна крива, яка симетрична щодо середнього значення похибки виміру (рис. 3.1). Це відбиває перше посилення – додатні та від'ємні помилки, що є однакові за розміром, рівноймовірні. Крива нормального закону має найбільше значення на осі

симетрії, її значення повільно зменшуються, асимптотично наближуючись до осі  $X$ , що відбиває друге посилення – малі похибки імовірніші за великі. Крива нормального закону – це крива щільності розподілу  $f(x)$  нормально розподіленої випадкової величини  $X$ . Криву нормального розподілу апроксимують виразом:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (3.10)$$

З виразу (3.10) випливає, що нормальний закон розподілу визначається двома параметрами  $m_x$  та  $\sigma_x$ , тобто математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням випадкової величини  $X$ .

На практиці закон нормального розподілу зустрічається дуже часто, тому що існує велика кількість нормально розподілених випадкових величин. Якщо відомі параметри  $m_x$  і  $\sigma_x$ , то із сімейства всіх кривих нормального розподілу виділяють одну з певною щільністю.

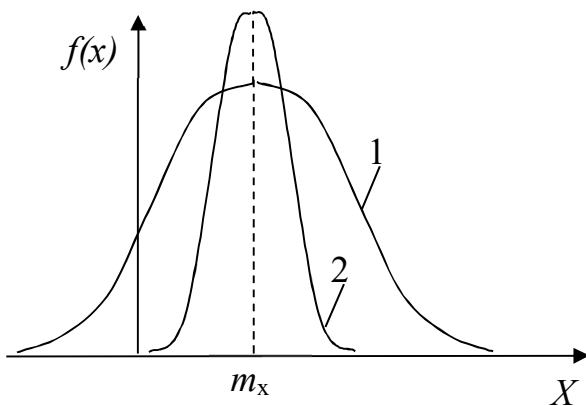


Рисунок 3.1 – Крива нормального розподілу

При  $x = m_x$  щільність розподілу максимальна і дорівнює

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}.$$

Оскільки інтеграл від щільності розподілу у нескінченних межах дорівнює одиниці, тобто крива на рисунку 3.2 обмежує площу, яка дорівнює одиниці, то чим менше параметр  $\sigma_x$ , тим крутіше спадає крива і тим менше розкидані значення  $X$  на числовій осі.

Визначимо імовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини на інтервал значень  $(\alpha, \beta)$  як інтеграл від щільності розподілу (3.10) в межах від  $\alpha$  до  $\beta$ :

$$P\{\alpha \leq X \leq \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} = \left| \begin{matrix} t = \frac{x-m_x}{\sigma_x} \\ dx = \sigma_x dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (3.11)$$

де  $t_1 = \frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}$ ;  $t_2 = \frac{\beta - m_x}{\sigma_x}$ .

Оскільки інтеграл (3.11) не можна узяти в елементарних функціях, для визначення імовірностей, пов'язаних із нормально розподіленою випадковою величиною, користуються функцією Лапласа (інтегралом імовірностей):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3.12)$$

Значення інтегралу  $\Phi(x)$  наведені у довідкових таблицях та у групі статистичних функцій програмного пакету Excel, зокрема, функція ГАУСС(x).

Інтеграл імовірностей має такі властивості:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 & \quad \Phi(x) = 0; \\ \text{при } x = \infty & \quad \Phi(x) = 0,5; \\ \text{при } x = -\infty & \quad \Phi(x) = -0,5; \end{aligned}$$

$$\Phi(-x) = -\Phi(x),$$

тобто функція  $\Phi(x)$  є непарною функцією.

Отже, усі можливі значення інтегралу імовірностей  $\Phi(x)$  належать інтервалу  $(-0,5; +0,5)$ , причому при  $|x| > 4$  можна вважати, що  $\Phi(x) \approx \pm 0,5$ .

Якщо певна випадкова величина є наслідком сумування багатьох випадкових слабо взаємно залежних величин, кожна з яких має невеликий вплив на спільну суму, то закон її розподілення із зростанням числа спостережень прагне до нормального. Це доведено у теорії імовірностей як центральна гранична теорема.

Нормальне розподілення грає істотну роль у багатьох галузях науки, зокрема, в теорії похибок, а отже, у математичному опрацюванні геодезичних вимірів.

З використанням інтеграла імовірностей імовірність влучення випадкової величини  $X$  на інтервал значень  $(\alpha, \beta)$  виражають за формулою:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right). \quad (3.13)$$

Скористаємось формулою (3.13) та визначимо функцію розподілу для випадкової величини, розподіленої нормально:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - m_x}{\sigma_x}\right) = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) + 0,5. \quad (3.14)$$

Оскільки нормальний розподіл є симетричним, у багатьох завданнях, що пов'язані із вимірами, інтерес являє імовірність потрапляння нормально розподіленої випадкової величини у область значень, яка симетрична щодо її математичного сподівання (рис. 3.2):

$$P(|x - m_x| < l)$$

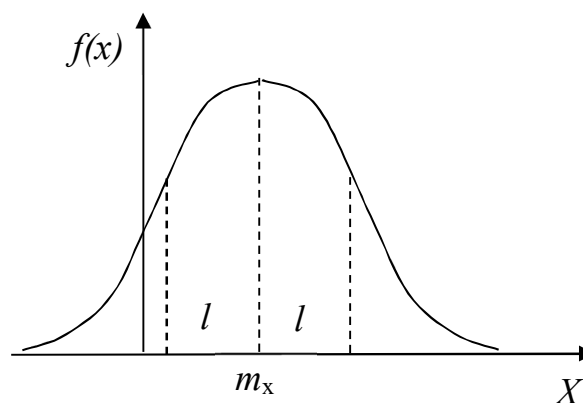


Рисунок 3.2 – Значення, симетричні щодо математичного сподівання

Для її визначення також скористаємось формулою (3.13), отримаємо:

$$\begin{aligned} P\{|x - m_x| < l\} &= P\{m_x - l < X < m_x + l\} = \\ &= \Phi\left(\frac{m_x + l - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{m_x - l - m_x}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma_x}\right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Скористаємось формулою (3.15) та знайдемо імовірності подій:

$$\begin{aligned} P\{|x - m_x| < \sigma_x\}; \\ P\{|x - m_x| < 2\sigma_x\}; \\ P\{|x - m_x| < 3\sigma_x\}. \end{aligned}$$

Покладемо у формулі (3.15)  $l = \sigma_x$ , тоді:

$$P\{|x - m_x| < \sigma\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 \cdot \Phi(1) = 0,68.$$

Отже, 68 % значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини лежать у інтервалі  $(m_x \pm \sigma_x)$ .

Нехай  $l = 2\sigma_x$ , тоді:

$$P\{|x - m_x| < 2\sigma\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{2\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 \cdot \Phi(2) = 0,95.$$

Тобто 95 % значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини лежать у інтервалі  $(m_x \pm 2\sigma_x)$ .

Якщо  $l = 3\sigma_x$ , то:

$$P\{|x - m_x| < 3\sigma\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{3\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 \cdot \Phi(3) = 0,997.$$

Тобто 99,7 % значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини лежать у інтервалі  $(m_x \pm 3\sigma_x)$ .

Цю властивість випадкових величин, що розподілені нормально, називають «правилом трьох сигм», його часто використовують під час оцінювання похибок вимірів і, зокрема, геодезичних.

### Запитання для самоперевірки:

1. Яким вимогам мають задовольняти повторні незалежні випробування?
2. Як визначають числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом Бернуллі?
3. Який зв'язок існує між біноміальним і пуассонівським розподілами?
4. Яким умовам має задовольняти випадкова величина, підпорядкована закону Пуассона?
5. Навести формули функції та щільності випадкової величини, розподіленої рівномірно.
6. Навести формули функції розподілу та щільності розподілу випадкової величини, розподіленої за нормальним законом.
7. Навести формули обчислення основних числових характеристик випадкової величини, розподіленої рівномірно.

8. Поняття інтеграла імовірностей. Обчислення імовірності влучення нормально розподіленої випадкової величини у заданий інтервал з використанням інтеграла імовірностей.

9. Як визначають числові характеристики закону розподілу Пуассона?

10. Якими параметрами визначається експонентний закон розподілу випадкової величини?

11. Чому дорівнює щільність імовірності випадкової величини з нормальним законом розподілу?

12. Якими параметрами визначається нормальний закон розподілу випадкової величини?

13. Як змінюється графік нормального закону із зміною середнього квадратичного відхилення випадкової величини?

14. Як визначити імовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини на задану ділянку?

15. Поясніть імовірнісний смисл параметрів нормального розподілу.

16. Поясніть смисл центральної граничної теореми.

## **Тема 4 СИСТЕМА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ**

Функція розподілу та щільність розподілу системи випадкових величин. Кореляційна таблиця. Числові характеристики системи. Кореляційний момент та коефіцієнт кореляції. Числові характеристики функцій випадкових величин.

### **4.1 Багатовимірна випадкова величина. Кореляційна таблиця**

Під час вивчення випадкових явищ іноді доводиться враховувати взаємодію двох, трьох та більше випадкових величин. Спільне розглядання двох або кількох випадкових величин призводить до поняття системи випадкових величин. Систему кількох випадкових величин  $X, Y, \dots, W$  позначають  $(X, Y, \dots, W)$  і називають **багатовимірною випадковою величиною**. Під час вивчення багатовимірної випадкової величини недостатньо окремого вивчення її складових, тобто окремих випадкових величин, що складають систему, а необхідно враховувати також зв'язки між цими випадковими величинами.

Найбільше практичне значення має система двох випадкових величин. Для характеристики системи двох випадкових величин застосовують закони розподілу системи і числові характеристики системи випадкових величин. Найбільш простим є закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин, що являє собою кореляційну таблицю (кореляція від англійського

correlation – співвідношення, відповідність), в якій перший рядок містить всі значення випадкової величини  $X$ , а перший стовпець – всі значення випадкової величини  $Y$ . В  $ij$ -у клітину таблиці записують імовірність події  $\{X = x_i, Y = y_j\}$ , тобто імовірність того, що  $X$  прийняла значення  $x_i$  та одночасно  $Y$  прийняла значення  $y_j$  (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Кореляційна таблиця системи двох випадкових величин  $(X, Y)$

$y_j$	$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$y_1$		$p\{x_1, y_1\}$	$p\{x_2, y_1\}$	...	$p\{x_n, y_1\}$
$y_2$		$p\{x_1, y_2\}$	$p\{x_2, y_2\}$	...	$p\{x_n, y_2\}$
...		...	...	...	...
$y_m$		$p\{x_1, y_m\}$	$p\{x_2, y_m\}$	...	$p\{x_n, y_m\}$

Сума всіх імовірностей у кореляційній таблиці дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p\{x_i, y_j\} = 1.$$

#### 4.2 Функція розподілу та щільність розподілу системи випадкових величин

Функція розподілу системи двох випадкових величин  $(X, Y)$  дорівнює імовірності того, що випадкова величина  $X$  прийме значення, менше за  $x$  і випадкова величина  $Y$  прийме значення, менше за  $y$ :

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}. \quad (4.1)$$

Геометричною інтерпретацією функції розподілу системи двох випадкових величин є імовірність влучення  $X$  та  $Y$  у нескінченний квадрат з координатами вершини  $(x, y)$  (рис. 4.1).

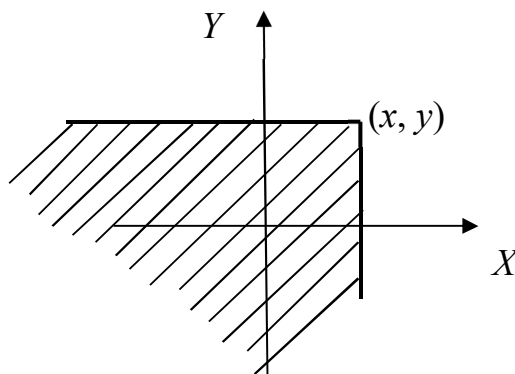


Рисунок 4.1 – Геометрична інтерпретація функції розподілу

Властивості функції розподілу системи:

1. Функція розподілу – неубутна функція, тобто

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y) \quad \text{якщо } x_2 > x_1;$$

та

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \quad \text{якщо } y_2 > y_1.$$

2. Функція розподілу дорівнює нулю, якщо хоча б один з аргументів обертається на мінус нескінченність:

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

3. Функція розподілу, якщо хоча б один з аргументів обертається на плюс нескінченність, дорівнює функції розподілу компонента системи, що залишився

$$F(x, +\infty) = F(x);$$

$$F(+\infty, y) = F(y);$$

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

Щільність розподілу імовірностей системи двох випадкових величин  $(X, Y)$   $f(x, y)$  являє собою другу змішану похідну від  $F(x, y)$ :

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (4.2)$$

Тут передбачається, що  $F(x, y)$  безперервна та двічі диференційована. Властивості щільності розподілу імовірностей системи двох випадкових величин:

1. Щільність розподілу невід’ємна, тобто  $f(x, y) \geq 0$ ;

2. Функція розподілу системи двох випадкових величин  $(X, Y)$  дорівнює подвійному інтегралу від щільності розподілу системи:

$$F(x, y) = \iint_{-\infty}^{xy} f(x, y) dx dy,$$

де  $f(x, y) dx dy$  – елемент імовірності, що являє собою імовірність влучення системи в елементарний прямокутник  $dx dy$  та дорівнює об’єму паралелепіпеда  $f(x) dx dy$ .

3. Подвійний інтеграл від щільності розподілу у нескінченних межах дорівнює одиниці:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

### 4.3 Числові характеристики системи.

#### Кореляційний момент та коефіцієнт кореляції

За аналогією з числовими характеристиками однієї випадкової величини числовими характеристиками системи двох випадкових величин є початкові та центральні моменти  $\alpha_{ks}$  і  $\mu_{ks}$ , причому порядок моменту визначається сумою індексів  $k+s$ .



**Початковим моментом** порядку  $k, s$  системи двох випадкових величин  $(X, Y)$  називають математичне сподівання добутку випадкової величини  $X$  у степені  $k$  та випадкової величини  $Y$  у степені  $s$ :

$$\alpha_{k,s} = M[X^k Y^s]. \quad (4.3)$$

**Центральним моментом** порядку  $k, s$  системи випадкових величин  $(X, Y)$  називають математичне сподівання добутку центрованої величини  $X$  у степені  $k$  та центрованої випадкової величини  $Y$  у степені  $s$ :

$$\mu_{k,s} = M[X^k Y^s]. \quad (4.4)$$

Зокрема, початковими моментами першого порядку є математичні сподівання випадкових компонентів системи  $X$  та  $Y$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,0} &= M[X^1 Y^0] = M[X]; \\ \alpha_{0,1} &= M[X^0 Y^1] = M[Y]. \end{aligned}$$

Центральними моментами другого порядку є дисперсії випадкових компонентів системи  $X$  та  $Y$ :

$$\begin{aligned} \mu_{2,0} &= M[X^2 Y^0] = M[X^2] = D_x; \\ \mu_{0,2} &= M[X^0 Y^2] = M[Y^2] = D_y. \end{aligned}$$

Для опису системи двох випадкових величин окрім математичних сподівань і дисперсій  $X$  та  $Y$  застосовують кореляційний момент і коефіцієнт кореляції. Кореляційним моментом є другий змішаний центральний момент:

$$\mu_{x,y} = M[XY] = K_{xy}. \quad (4.5)$$

Для дискретних випадкових величин  $K_{xy}$  визначають за формулою:

$$K_{x,y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}, \quad (4.6)$$

де  $p_{ij} = P\{X = x_i / Y = y_j\}$  – умовна імовірність, тобто імовірність того, що  $X$  прийме значення  $x_i$  за умови, що  $Y$  прийме значення  $y_j$ .

Для безперервних випадкових величин:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy. \quad (4.7)$$

Якщо події  $P\{X = x_i\}$  і  $P\{Y = y_j\}$  незалежні, то імовірність їхньої спільної появи за теоремою множення дорівнює:

$$p_{ij} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = p_i \cdot p_j.$$

Тоді для кореляційного моменту справедливим є вираз:

$$K_{x,y} = \sum_{i=1}^n x_i p_i \sum_{j=1}^m y_j p_j = 0,$$

оскільки співмножники є центральними моментами першого порядку випадкових величин  $X$  та  $Y$ , а тому дорівнюють нулю. Таким чином, кореляційний момент є характеристикою зв'язку між величинами  $X$  та  $Y$  та у випадку незалежних  $X$  та  $Y$  він дорівнює нулю.

Кореляційний момент  $K_{xy}$  у літературі часто називають коваріацією.

Як другий змішаний центральний момент кореляційний момент містить також розсіювання випадкових величин  $X$  та  $Y$  відносно одна одної. Тому він не може характеризувати тісноту зв'язку між  $X$  та  $Y$ . Для визначення тісноти зв'язку між  $X$  та  $Y$  використовують коефіцієнт кореляції  $r_{xy}$ , який визначають, виключивши з кореляційного моменту розсіювання  $X$  та  $Y$ , за формулою:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (4.8)$$

Переконаємося в тому, що  $r_{xy}$  характеризує ступінь тісноти лінійного зв'язку між двома випадковими величинами. Нехай випадкова величина  $Y$  функціонально (жорстко) залежить від випадкової величини  $X$ , причому залежність ця є лінійною:

$$Y = ax + b.$$

Визначимо математичне сподівання

$$M[Y] = M[ax + b] = \sum(ax_i + b)p_i = a\sum x_i p_i + \sum b p_i = a[X] + b.$$

Знайдемо дисперсію:

$$\begin{aligned} D[Y] &= M[Y^2] = M[(Y - m_y)^2] = M[Y^2 - 2m_y Y + m_y^2] = \\ &= M[(ax + b)^2 - 2(am_x + b)(ax + b) + (am_x + b)^2] = \\ &= M[a^2(X - m_x)^2] = a^2 D_x \end{aligned}$$

і середнє квадратичне відхилення випадкової величини  $Y$   $\sigma_y = |a|\sigma_x$ .

Визначимо коефіцієнт кореляції для жорстко зв'язаних  $X$  та  $Y$ , для чого виразимо  $Y$  через  $X$ :

$$Y - m_y = aX + b - am_x - b = a(X - m_x) = aX,$$

тоді кореляційний момент дорівнюватиме:

$$K_{xy} = M[YX] = [aXX] = aD_x,$$

а коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{aD_x}{\sigma_x |a| \sigma_x} = \frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x |a| \sigma_x} = \frac{a}{|a|}.$$

Отже, якщо зв'язок між  $X$  та  $Y$  функціональний, то коефіцієнт кореляції дорівнює 1, причому

$$r_{xy} = \begin{cases} -1 & \text{при } a < 0 \\ +1 & \text{при } a > 0 \end{cases}. \quad (4.9)$$

У загальному випадку коефіцієнт кореляції лежить у межах  $-1 \leq r_{xy} \leq +1$  і дорівнює нулю, якщо  $X$  та  $Y$  незалежні.

Дві випадкові величини  $X$  та  $Y$  називають корельованими, якщо їхній кореляційний момент відрізняється від нуля. Дві корельовані випадкові величини обов'язково залежні. Якщо кореляційний момент випадкових величин

$X$  та  $Y$  дорівнює нулю, то ці випадкові величини некорельовані, але вони можуть опинитись залежними. Отже, поняття **корельованості** і **залежності** двох випадкових величин – різні.

#### 4.4 Поняття багатомірного випадкового вектора

Якщо кількість випадкових величин у системі становить  $n$ , то вводять поняття багатомірного випадкового вектора. Як  $n$ -мірний випадковий вектор (матрицю-стовпець) розуміють вектор, складниками якого є  $n$  випадкових величин, тобто

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T. \quad (4.10)$$

Найпростішими числовими характеристиками випадкового вектора є математичне сподівання, що дорівнює вектору математичних сподівань складників випадкового вектора:

$$M(X) = (M(X_1), M(X_2), \dots, M(X_n))^T,$$

та кореляційна матриця

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Елементами кореляційної матриці є відповідні кореляційні моменти, що характеризують зв'язок між елементами випадкового вектора. Ця матриця є симетричною, тобто є квадратною матрицею, в якій усі елементи, що розташовані симетрично до головної діагоналі, дорівнюють один одному ( $K_{ij} = K_{ji}$ ). На головній діагоналі матриці  $K$  стоять дисперсії складників випадкового вектора:

$$K_{ii} = D(X_i), \quad (i = \overline{1, n}).$$

Елементи матриці  $K$ , що не стоять на головній діагоналі, є кореляційними моментами відповідно між  $i$ -м та  $j$ -м елементами випадкового вектора. Отже ці елементи характеризують зв'язок між  $i$ -м та  $j$ -м елементами випадкового вектора.

Функцією розподілу випадкового вектора є імовірність одночасного виконання нерівностей  $X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n$ , тобто:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\}.$$

Щільність розподілу випадкового вектора, складники якого є випадковими безперервними величинами, зв'язана з його функцією розподілу співвідношеннями:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \geq 0, \quad (4.12)$$

а функція розподілу виражається через щільність розподілу формулою:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (4.13)$$

Імовірність влучення випадкової точки  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  – кінця випадкового вектора – у довільну  $n$ -мірну область  $D$  виражається  $n$ -кратним інтегралом:

$$P\{X \in D\} = \underbrace{\int \dots \int}_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

що поширений на всю область  $D$ .

#### 4.5 Числові характеристики функцій випадкових величин

Функції однієї або декількох випадкових величин доводиться розглядати, коли аргументом деякої функції  $Y$  є система випадкових величин  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , закон розподілу яких відомий. Функція  $Y$  є випадковою величиною, закон розподілу якої необхідно визначити. У більшості задач для визначення числових характеристик функції декількох випадкових величин досить знати тільки числові характеристики аргументів.

1. Математичне сподівання суми двох залежних або незалежних випадкових величин  $X$  і  $Y$  дорівнює сумі їхніх математичних сподівань:

$$M[X + Y] = \sum (x_i + y_i) \cdot p_i = \sum x_i \cdot p_i + \sum y_i \cdot p_i = M[X] + M[Y]. \quad (4.14)$$

За методом математичної індукції (узагальнення) для  $n$  доданків дістанемо:

$$M[\sum X_i] = M[\sum Y_i],$$

тобто математичне сподівання суми  $n$  випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань.

Математичне сподівання лінійної функції кількох випадкових величин

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$$

дорівнює тій самій лінійній функції від їхніх математичних сподівань:

$$M[Y] = M[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b] = \sum_{i=1}^n a_i M[X_i] + b,$$

де  $a_i$  і  $b_i$  – не випадкові коефіцієнти.

2. Математичне сподівання добутку двох випадкових величин  $X$  та  $Y$  дорівнює добутку їхніх математичних сподівань плюс кореляційний момент.

Запишемо вираз для кореляційного моменту:

$$\begin{aligned} K_{xy} &= M \left[ \overset{\circ}{Y} \overset{\circ}{X} \right] = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = \\ &= M[XY] - M[Xm_y] - M[Ym_x] + M[m_x m_y] = \\ &= M[XY] - m_x m_y - m_y m_x + m_x m_y = M[XY] - m_x m_y, \end{aligned}$$

звідки маємо

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y] + K_{xy}. \quad (4.15)$$

Звідси кореляційний момент можна виразити формулою

$$K_{xy} = M[XY] - M[X] \cdot M[Y]. \quad (4.16)$$

Якщо випадкові величини  $X$  та  $Y$  некорельовані, математичне сподівання добутку дорівнює добутку їхніх математичних сподівань:

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y],$$

або для  $n$  незалежних співмножників:

$$M[\prod_{i=1}^n X_i] = \prod_{i=1}^n M[X_i].$$

3. Визначимо дисперсію суми двох випадкових величин  $X$  та  $Y$ :

$$\begin{aligned} D[X + Y] &= M\{(X + Y) - M(X + Y)\}^2 = \\ &= M[X^2 + 2XY + Y^2 - 2(X + Y) \cdot M(X + Y) + M^2(X + Y)] = \\ &= M[X^2 + 2XY + Y^2] - 2M(X + Y) \cdot M(X + Y) + M^2(X + Y) = \\ &= M[X^2 + 2XY + Y^2] - (M[X] + M[Y])^2 = \\ &= M[X^2] + M[Y^2] - M^2[X] - 2M[X] \cdot M[Y] - M^2[Y] = \\ &= D[X] + D[Y] + 2M[XY] - 2M[X] \cdot M[Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}. \end{aligned}$$

Отже, дисперсія суми двох випадкових величин  $X$  та  $Y$  дорівнює сумі їхніх дисперсій плюс подвоєний кореляційний момент:

$$D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}. \quad (4.17)$$

Дисперсію суми кількох випадкових величин виражають формулою:

$$D[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n D[X_i] + 2 \sum_{i < j} K_{x_i x_j},$$

де  $K_{x_i x_j}$  – кореляційний момент випадкових величин  $X_i$  та  $X_j$ .

Якщо  $X_i$  – некорельовані випадкові величини, то дисперсія їхньої суми дорівнює сумі їхніх дисперсій, тоді для суми  $n$  незалежних випадкових величин дисперсія визначиться в такий спосіб:

$$D[\sum X_i] = \sum D[X_i],$$

звідки середнє квадратичне відхилення суми  $\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\sum \sigma_i^2}$ .

Дисперсія лінійної функції кількох випадкових величин

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$$

виражається формулою:

$$D[Y] = D[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b] = \sum_{i=1}^n a_i^2 D[X_i] + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{x_i x_j}. \quad (4.18)$$

Якщо  $X_i$  – некорельовані випадкові величини, то

$$D[Y] = D[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b] = \sum_{i=1}^n a_i^2 D[X_i].$$

4. Дисперсію добутку двох незалежних випадкових величин  $X$  та  $Y$ , математичні сподівання яких дорівнюють нулю  $m_x = m_y = 0$ , знайдемо за формулою:

$$D[YX] = D[Y] \cdot D[X] + M[Y]^2 \cdot D[X] + M[X]^2 \cdot D[Y].$$

### Запитання для самоперевірки:

1. Що являє собою багатомірна випадкова величина?
2. Що являє собою функція розподілу системи двох випадкових величин?

Перелічіть її властивості.

3. Перелічіть числові характеристики системи двох випадкових величин.
4. Що характеризує кореляційний момент системи двох випадкових величин?
5. Для чого використовують коефіцієнт кореляції?
6. Перелічіть теореми про числові характеристики.
7. Чому дорівнює середнє квадратичне відхилення добутку невинпадкової величини  $C$  на випадкову величину  $X$ ?
8. Сформулюйте теорему додавання математичних сподівань для випадкових величин: а) залежних і незалежних; б) корельованих і некорельованих.
9. Чому дорівнює математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин?
10. Що називають початковими і центральними моментами двомірної випадкової величини?
11. Що називають кореляційним моментом (коваріацією) двомірної випадкової величини? Наведіть формулу для розрахунку коваріації.
12. Як обчислити коефіцієнт кореляції?
13. Які межі змінення коефіцієнта кореляції?
14. Напишіть формулу щільності двомірного нормального розподілу та поясніть сутність параметрів, що входять до формули.
15. Чому дорівнює математичне сподівання суми випадкових величин? За яких умов це правило діє?
16. Чому дорівнює математичне сподівання постійної величини?
17. За яких умов математичне сподівання добутку дорівнює добутку математичних сподівань?
18. Чому дорівнює дисперсія постійної величини?
19. Чи можна виносити постійну величину за знак дисперсії? Якщо так, то як?
20. За яких умов дисперсія суми випадкових величин Чому дорівнює сумі дисперсій?
21. Як обчислити дисперсію добутку двох незалежних центрованих випадкових величин?

## **Тема 5 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ. ОЦІНКИ ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК. ПОГРІШНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРІВ**

Основні поняття та визначення. Оцінки числових характеристик та їхні властивості. Спроможність, незміщеність та ефективність оцінок. Структура похибок вимірів. Перевірка статистичних гіпотез. Оцінювання точності результатів вимірів за дійсними погрішностями. Критерії точності вимірів. Інтервальне оцінювання числових характеристик.

### **5.1 Основні поняття та визначення**

Коли мова йде про геодезичні виміри, завжди мають на увазі вимірювання фізичних величини, що є параметрами просторового розташування об'єктів. Зокрема, це горизонтальні напрями й кути, відстані, перевищення, площі об'єктів, координати точок на поверхні Землі та ін.

Введемо низку понять та визначень.

Як **фізичну величину** розуміють одну з властивостей фізичного об'єкта, яка притаманна в якісному аспекті багатьом фізичним об'єктам, але в кількісному аспекті є індивідуальною для кожного з них. Прикладами фізичної величини є довжина, ширина, висота, маса, термін служби, швидкість руху будь-якого об'єкта та ін.

**Розмір** фізичної величини – кількісна визначеність фізичної величини, що притаманна конкретному об'єкту, системі, явищу або процесу.

**Значення** фізичної величини – подання розміру фізичної величини у вигляді певного числа прийнятих для нього одиниць виміру.

**Числове значення** фізичної величини – певне число, що входить у значення величини. Наприклад, значення перевищення між точками  $A$  і  $B$  дорівнює 12,63 м.

**Істинне значення** фізичної величини – значення фізичної величини, яке ідеально характеризує у якісному і кількісному аспектах фізичну величину. Зауважимо, що істинне значення фізичної величини можна отримати тільки як результат нескінченного числа вимірів із нескінченим вдосконаленням методів та засобів вимірів.

**Дійсне значення** фізичної величини – значення фізичної величини, що отримане експериментальним шляхом та є настільки близьким до істинного значення, що у поставленій вимірювальній задачі його можна застосувати замість істинного.

**Вимірювання** – сукупність операцій із застосування технічного засобу, який зберігає одиницю фізичної величини та, забезпечує визначення

співвідношення (у явному або неявному вигляді) вимірюваної величини з її одиницею та отримання значення цієї величини.

**Принцип вимірювання** – теоретичне положення, що лежить в основі отримання результату виміру.

**Метод вимірювання** – прийом або сукупність прийомів, що дозволяють отримати результат виміру відповідно до принципу виміру, що реалізується.

**Об'єкт вимірювання** – тіло (фізична система, процес, явище та ін.), що характеризується однією або кількома вимірюваними фізичними величинами.

**Засіб виміру** – технічний пристрій, що призначений для вимірів та має нормовані метрологічні характеристики, які відтворюють та зберігають одиницю фізичної величини, розмір якої приймають незмінним (у межах встановленої погрішності) у межах відомого інтервалу часу, отримання у процесі виміру оцінки властивостей об'єкта.

**Результат виміру** – значення величини, яке отримане шляхом її вимірювання.

Будь-який процес виміру відбувається за наявності п'яти складових (факторів) вимірювання:

- об'єкт виміру – що вимірюють;
- суб'єкт виміру – хто вимірює;
- засіб виміру – чим вимірюють;
- метод виміру – як вимірюють;
- зовнішнє середовище – де вимірюють.

У процесі вимірювання конкретний зміст і стан факторів вимірювання визначають **умови вимірів**.

Два комплекси умов вважатимемо однаковими, якщо у обох випадках:

- об'єкти вимірів були одного і того самого роду та за час вимірів коливались у одних і тих самих межах;
- суб'єкти вимірів мали однакову кваліфікацію;
- застосовувались засоби вимірів одного й того самого класу точності;
- виміри виконувались за однією і тією самою методикою;
- зовнішнє середовище, у якому виконувались виміри, характеризувалось одними й тими самими значеннями чинників.

## 5.2 Класифікація вимірів

Виміри класифікують за низкою ознак.

**За фізичним виконанням:**



– прямі виміри, у яких значення вимірюваної величини отримують **безпосереднім порівнянням** з фізичною величиною того самого роду, наприклад, вимірювання довжини лінії рулеткою або мірною стрічкою;

– непрямі, у яких значення вимірюваної величини отримують з обчислень, де як вихідні застосовують результати інших прямих вимірів, наприклад, вимірювання довжини лінії світлодалекоміром. У цьому випадку безпосередньо вимірюється час  $t$  проходження світлового сигналу від далекоміру до відбивача та назад, а потім обчислюється у рахунковому пристрої приладу довжина лінії  $S = \frac{1}{2} vt$ , де  $v$  – швидкість світла.

#### **За родом:**

– однорідні виміри, які виконують для однорідних фізичних величин, наприклад, геометричне нівелювання, що полягає у вимірюванні відрізків від земної поверхні до горизонтального візирного променя нівеліру;

– різнорідні виміри, наприклад визначення перевищення методом тригонометричного нівелювання, коли вимірюють лінії (горизонтальні прокладання або нахилені відстані) та кути нахилу.

#### **За кількістю:**

– необхідні виміри надають тільки одне значення кожної вимірюваної величини;

– додаткові або надлишкові виміри виконують з метою отримання декількох значень вимірюваної величини для контролю та виключення грубих погрешностей та підвищення якості результатів вимірів.

#### **За точністю:**

– рівноточні виміри, що виконують в однакових умовах;

– нерівноточні виміри, що виконують у випадках, коли хоча б одна із п'яти складових процесу виміру істотно відрізняється від аналогічної складової інших вимірів, наприклад вимірювання кутів у триангуляції різних класів.

#### **За зв'язками:**

– незалежні виміри, якщо їх виконують у різних умовах та немає підстав вважати, що ці умови однаково впливатимуть на результати вимірів;

– залежні виміри, якщо результати вимірювань можуть мати спільні властивості.

#### **За часом виконання:**

– синхронні виміри, для яких моменти виміру збігаються, наприклад GPS-виміри, що виконують двома приймачами, які розташовані на двох різних точках, під час проведення вимірів у диференційному режимі;

– виміри, зсунуті за часом, для яких моменти вимірів відрізняються на істотну величину.

### **За місцем виконання:**

- зосереджені виміри, місця виконання яких розташовані близько одне від одного;
- розосереджені виміри, місця виконання яких розташовані далеко одне від одного.

Зауважимо, що класична теорія погрешностей не враховує залежність, синхронність та зосередженість за місцем виконання, але сучасні методи вимірювань, у першу чергу електронні, вимагають врахування цих особливостей вимірювань.

Вибір засобів геодезичних вимірів та вивчення їх технічних характеристик є предметом вивчення геодезії, тому нагадаємо, що в засобах геодезичних вимірів (геодезичних приладах) реалізують різні фізичні явища, зокрема, це оптичні, оптико–механічні, оптико–електронні, електромагнітні, імпульсні, фазові, супутникові, доплерівські, інтерференційні та інші явища.

Детальніше розглянемо **методи геодезичних вимірів**, що відповідають принципам вимірів, які забезпечують отримання результатів із заданою точністю. У геодезії розрізняють наступні методи вимірів:

- метод **прямих** геодезичних вимірів, за якого значення вимірюваної геодезичної величини отримують безпосередньо;
- метод **непрямих** геодезичних вимірів, за якого значення геодезичної величини визначають як функцію інших величин, отриманих шляхом безпосередніх вимірів;
- **комбінований** метод вимірів полягає в отриманні не лише геодезичних величин, розташованих між суміжними пунктами, але й їхніх різних поєднань (комбінацій);
- метод **прийомів** полягає у неодноразових вимірюваннях однієї і тієї ж геодезичної величини за єдиною методикою;
- метод **кругових прийомів** полягає у вимірюванні кутів шляхом послідовного спостереження візирних цілей, що розташовані за колом повторним спостереженням першого (початкового) напрямку;
- метод **подвійних вимірів** полягає у виконанні однорідних геодезичних вимірів серіями, що складаються з двох прийомів (спостережень);
- метод **повторень** (метод реітерацій) полягає у  $n$ -кратному визначенні значення вимірюваної геодезичної величини та наступному обчисленні визначеного значення;
- метод **вимірів «уперед»** полягає у спостереженні за точкою, передньою за ходом;

– **метод вимірів «середини»** полягає в послідовному спостереганні суміжних пунктів (точок) ходу, що прокладається, за допомогою приладу, який розташований між ними;

– **метод вимірів «через точку»** виконують шляхом встановлення вимірювального приладу тільки на парних, або тільки на непарних пунктах ходу;

– **багатоштативний метод вимірів** полягає у зменшенні похибок центрування шляхом встановлення одночасно на кількох суміжних пунктах мережі штативів із підставками для розміщення у них візирних цілей або приладу. Найбільшого поширення на практиці набув триштативний метод вимірів.

Виміри також класифікують як необхідні і додаткові або надлишкові. Виміри називають **необхідними**, якщо вони дають тільки один результат прямого виміру, непрямого виміру, або тільки одне значення функції вимірюваних величин. Прикладами необхідних вимірів є одноразовий вимір довжини лінії мірною стрічкою або далекоміром, вимір горизонтального кута теодолітом за одним напівприйомом, визначення тахеометром перевищення із станції на рейковий пікет, визначення координат точки засічкою за двома вимірюваними кутами, а також  $n - 1$  виміряних ліній і кутів у теодолітному ході з  $n$  точок. Необхідні неможливо проконтролювати за точністю, тому немає можливості оцінити їхню якість.

**Надлишковими** називають усі виміри, які виконані понад необхідні. Вони дозволяють отримати два і більше значень вимірюваної величини або два і більше значень функції.

Надлишкові виміри дають можливість:

- здійснити контроль вимірів;
- оцінити точність виконаних вимірів;
- набути таких наближених значень вимірюваних величин, які у загальному випадку є ближчими до дійсного значення за окремо отриманий результат необхідного виміру.

На процес виміру переважно впливають наступні чинники, що взаємодіють один з одним:

- специфіка об'єкта виміру;
- психофізіологічний стан і кваліфікація суб'єкта виміру, тобто виконавця;
- особливості вимірювального приладу;
- особливості методу вимірювання, який визначають за вимірювальним процесом;
- специфіка зовнішнього середовища, у якому перебігає процес вимірювання.

Завершальною процедурою в процесі геодезичних вимірів є математична обробка отриманих результатів, яка полягає у оцінюванні їхньої точності шляхом проведення обчислювальних операцій із вимірними значеннями геодезичних величин за певним алгоритмом. Математична обробка геодезичних вимірів ґрунтується на математичних методах і моделях теорії імовірностей, математичної статистики і теорії похибок. У процесі математичної обробки результатів вимірів можна виділити наступні етапи:

- систематизація і класифікація результатів вимірів;
- виявлення структури похибок вимірів;
- обчислення числових значень похибок вимірів;
- обчислення поправок і ваг функцій результатів вимірів;
- оцінювання точності результатів вимірів;
- оцінювання надійності результатів вимірів.

### 5.3 Оцінки числових характеристик та їхні властивості

Методи обробки результатів спостережень випадкових явищ з метою виявлення наявних у них закономірностей розробляє математична статистика. Збір статистичних даних проводять за спеціальними правилами статистичного спостереження, основним з яких є подання результатів спостережень у числовому вигляді. Усю сукупність числових характеристик об'єктів або явищ, що підлягають вивченню, називають **генеральною сукупністю**. Але для вивчення генеральної сукупності найчастіше не застосовують суцільне обстеження із вивченням її кожного елементу, а зазвичай використовують вибіркового метод, що полягає у вивченні характеристик обмеженої кількості елементів генеральної сукупності.

Сутність **вибіркового методу** полягає в тім, що висновки, зроблені на основі вивчення частини сукупності, якою є **випадкова вибірка**, можна поширити на всю генеральною сукупність.

Генеральну сукупність зазвичай розглядають як випадкову величину  $X$ , а кожен елемент сукупності – як реалізацію цієї випадкової величини, причому імовірності появи будь-якого з цих елементів випадкової вибірки у результаті дослідження вважають однаковими.

Числові характеристики генеральної сукупності називають генеральними параметрами. До них належать математичне сподівання і дисперсія, які є параметрами розподілу досліджуваної сукупності. Їхні теоретичні значення ніколи не відомі, але їх можна оцінити за випадковою вибіркою. Числову характеристику, отриману в результаті обробки випадкової вибірки, називають **оцінкою параметра**.

Будь-які значення шуканого параметру розподілу, зокрема, математичного сподівання та дисперсії, обчислені на основі обмеженої кількості дослідів, містять елемент випадковості. Отже оцінки параметрів є наближеними випадковими їх значеннями.

Зокрема, математичне сподівання випадкової величини  $X$  являє собою її середнє значення. З  $n$  дослідів оцінку математичного сподівання визначають як середнє арифметичне  $m_x^*$ .

$$m_x^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i, \quad (5.1)$$

де  $n$  – кількість дослідів;

$\frac{1}{n}$  – частота появи значення  $x_i$  у кожному з  $n$  дослідів.

Статистичну оцінку дисперсії випадкової величини  $X$  визначають як середнє арифметичне суми квадратів відхилень  $X$  від її середнього  $m_x^*$ :

$$D^*[X] = \frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n}. \quad (5.2)$$

Статистичні оцінки числових характеристик, які отримані з обмеженої кількості дослідів  $n$ , є лінійними функціями  $n$  незалежних випадкових величин, тому вони самі є випадковими величинами, а отже мають власні числові характеристики (математичні сподівання і дисперсії), та до них виставляють низку вимог:

– статистична оцінка параметра розподілу має бути **спроможною**. Це означає, що із збільшенням кількості дослідів вона має збігатися за імовірністю до шуканого параметра:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_x^* = m_x;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_x^* = D_x;$$

– статистична оцінка параметра розподілу має бути **незміщеною**. Це означає, що її математичне сподівання має дорівнювати шуканому параметру, тобто вона не містить систематичної помилки:

$$M[m_x^*] = M[X];$$

$$M[D_x^*] = D[X];$$

– статистична оцінка параметра розподілу має бути **ефективною**. Це означає, що вона повинна мати мінімальну дисперсію, тобто бути щонайменше випадковою:

$$D[m_x^*] = \min;$$

$$D[D_x^*] = \min.$$

Можна показати, що оцінка математичного сподівання, яка отримана за формулою (5.1) є спроможною та незміщеною оцінкою. У той самий час оцінка дисперсії, що обчислена за формулою (5.2), є спроможною оцінкою, але зміщеною, тобто результат обчислення за формулою (5.2) дає систематичну

помилку. Для отримання незміщеної оцінки дисперсії треба суму квадратів відхилень  $X$  від її середнього  $m_x^*$  розділити не на  $n$ , а на  $(n - 1)$ :

$$D^*[X] = \frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n-1}, \quad (5.3)$$

а оцінка середнього квадратичного відхилення відповідно дорівнює:

$$\sigma_x^* = \sqrt{D_x^*} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n-1}}. \quad (5.4)$$

Визначимо числові характеристики оцінки математичного сподівання як випадкової величини. Математичне сподівання випадкової величини  $m_x^*$  як математичне сподівання її арифметичної середньої відповідно до (5.1) дорівнює:

$$M[m_x^*] = M\left[\frac{\sum x_i}{n}\right] = \frac{1}{n}M[\sum x_i] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot M[X] = M[X].$$

Тобто математичне сподівання оцінки математичного сподівання  $m_x^*$  випадкової величини  $X$  дорівнює математичному сподіванню самої випадкової величини  $X$  і не залежить від кількості дослідів  $n$ .

Визначимо дисперсію оцінки математичного сподівання, тобто арифметичної середньої випадкової величини  $X$ :

$$D[m_x^*] = D\left[\frac{\sum x_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2} \cdot D[\sum x_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot D[\sum X] = \frac{D[X]}{n},$$

звідки випливає, що із збільшенням кількості дослідів  $n$  дисперсія оцінки математичного сподівання прагне до нуля  $Dm_x^* \rightarrow 0$ . Це свідчить про прагнення  $m_x^*$  до не випадкової величини  $m_x$  (оскільки дисперсія характеризує наявність розкиду, і цей розкид прагне до нуля).

Таким чином, дисперсія оцінки математичного сподівання, тобто арифметичної середньої, дорівнює дисперсії випадкової величини  $X$ , поділеній на кількість дослідів:

$$D_{m_x^*} = \frac{D_x}{n}. \quad (5.5)$$

Середнє квадратичне відхилення оцінки математичного сподівання, тобто арифметичної середньої відповідно дорівнює:

$$\sigma_{m_x^*} = \sqrt{D_{m_x^*}} = \sqrt{\frac{D_x}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \quad (5.6)$$

## 5.4 Структура похибок вимірів

Відповідно до визначення, вимірювання є процесом порівняння вимірюваної величини з іншою однорідною величиною, яку обрано за одиницю порівняння. У процесі вимірювання завжди присутні п'ять складників: об'єкт виміру, суб'єкт виміру, засіб виміру, метод виміру та зовнішнє середовище. Ці складові безперервно змінюються, зокрема, змінюється стан приладів, увага виконавця, визначення точок та площин на реальній місцевості. Тому у

експериментальній теорії вимірів виходять з постулату про неминучість похибок вимірів. Цей постулат ґрунтується на практичній основі, зокрема, на тому, що проведення повторних вимірів практично незмінної величини у одних і тих самих умовах дає хоч і близькі, але різні результати, що вказує на наявність похибок. Про наявність похибок також свідчать і нев'язки, які виникають у деяких рівностях з виміряними даними. Наприклад сума перевищень у замкненому висотному полігоні має дорівнювати нулю, але у результаті похибок у вимірних перевищеннях зазвичай отримується нев'язка.

Похибку вимірів визначають як оцінку відхилення величини виміряного значення від її дійсного значення. За формою подання розрізняють наступні похибки.

**Абсолютна похибка** –  $\delta$  є оцінкою абсолютної помилки виміру. Її величина залежить від способу обчислення, який визначається законом розподілу випадкової величини  $m_x^*$ , що є вимірним значенням. Абсолютну похибку визначають у такий спосіб

$$\delta = |M[X] - m_x^*|,$$

де  $M[X]$  – дійсне, тобто не випадкове, значення  $X$ ;

$m_x^*$  – середнє вимірних значень.

Якщо випадкова величина  $m_x^*$  розподілена за нормальним законом, то за абсолютну похибку приймають середнє квадратичне відхилення  $\sigma_{m_x^*}$ , що обчислюють за формулою (5.6) Абсолютну похибку вимірюють у тих самих одиницях виміру, що й саму величину  $X$ .

**Відносна похибка** – відношення абсолютної похибки до того значення, яке приймають за дійсне значення, її обчислюють за формулою:

$$\Delta = \frac{\delta}{M[X]} . \quad (5.7)$$

Відносна похибка є безрозмірною величиною, її вимірюють у відносних одиницях, або у відсотках.

**Приведена похибка** – це відносна похибка, яку виражено відношенням абсолютної похибки засобу виміру до умовно набутого значення величини, постійного в усьому діапазоні вимірів або частині діапазону. Її обчислюють за формулою:

$$\Delta_x = \frac{\sigma_{m_x^*}}{X_n} , \quad (5.8)$$

де  $X_n$  – нормоване значення, яке залежить від типу шкали вимірювального приладу і визначається за його градуванням: якщо шкала приладу одnobічна, тобто нижня межа вимірів дорівнює нулю, то вважають, що  $X_n$  дорівнює верхній межі вимірів; якщо шкала приладу двобічна, то нормуюче значення дорівнює ширині діапазону вимірів приладу.

Приведена похибка є безрозмірною величиною та її можна вимірювати у відсотках.

За походженням розрізняють наступні похибки.

**Інструментальні (приладові похибки)** – ті, які визначають похибки вживаних засобів вимірів та викликані недосконалістю принципу дії, неточністю градування шкали та її ергономічністю.

**Методичні похибки** – ті, які зумовлені недосконалістю методу, а також спрощеннями, покладеними в основу методики вимірів.

**Суб'єктивні (операторні) похибки** – ті, які зумовлені ступенем уважності, зосередженості, підготовленості та іншими психофізіологічними властивостями людини, що здійснює вимір.

Окрім того, за походженням похибок виділяють похибки, залежні від специфіки об'єкту виміру та зовнішнього середовища.

У процесі вимірів застосовують прилади для вимірювання лише з певною заздалегідь заданою точністю – основною похибкою, за нормальних умов експлуатації для певного приладу. Якщо вимірювальний прилад використовують в умовах, які відрізняються від нормальних умов, то виникає додаткова похибка, що збільшує загальну похибку приладу. До додаткових похибок належать температурна, викликана відхиленням температури навколишнього середовища від нормальної, установча, що зумовлена відхиленням положення приладу від нормального робочого положення та ін. За нормальну температуру навколишнього повітря приймають 20 °С, за нормальний атмосферний тиск – 101,325 кПа.

Узагальненою характеристикою засобів є клас точності, який визначають граничними значеннями припустимих основної і додаткової похибок. Клас точності засобів характеризує їхні точнісні властивості, але він не є безпосереднім показником точності вимірів, що виконуються за допомогою цих засобів, оскільки точність залежить також від методу вимірів та умов їх виконання.

За характером прояву розрізняють такі види похибок.

**Грубі похибки або промахи**, які різко відхиляють результати вимірів від дійсного значення. Вони завжди виникають тільки з вини виконавця (оператора). У теорії похибок грубі похибки не вивчають. Їх необхідно своєчасно виявляти, а результати вимірів, що містять ці похибки, виключати з подальшої обробки. Найбільш дієвими методами виявлення грубих похибок є виконання надлишкових вимірів, тому у геодезії кожену величину вимірюють, переважно не менше двох разів.

**Систематичні елементарні похибки** породжуються істотними зв'язками між чинниками, які впливають на виміри, і виникають кожного разу за одних і



тих самих умов. Систематичні похибки підпорядковані певній закономірності. Ці закономірності піддаються вивченню і за певних умов систематичні похибки можна виключити з окремого результату вимірів.

**Випадкові елементарні похибки** породжуються не істотними, а другорядними випадковими зв'язками між чинниками вимірів за певних умов вимірів. Вони можуть з'являтися в процесі вимірів, а можуть і не з'явитися, можуть бути великими або малими, додатними або від'ємними. Величина і знак цих похибок має випадковий характер, а їхній закон розподілу зазвичай вважають нормальним.

Випадкові похибки не можна виключити з окремого результату виміру. Їхній вплив на результати вимірів можна лише послабити шляхом підвищення кваліфікації виконавця, вдосконалення вимірювальних приладів та методики вимірів, виконуючи виміри за сприятливіших умов. Вплив випадкових похибок можна також послабити належною математичною обробкою результатів вимірів.

У експериментальній теорії вимірів виходять з постулату про неминучість погрішностей вимірів, оскільки при повторних вимірах за тих самих умов отримують результати, що відрізняються один від одного. Отже, будь-який вимір містить похибку, тому завжди виникає необхідність оцінювання точності отриманого результату. Для цього зазвичай застосовують дві характеристики точності: загальний зсув (систематичну похибку)  $\theta$  і розкид (випадкову похибку) результатів вимірів  $\sigma$ .

На практиці під час здійснення геодезичних вимірів систематичні і випадкові похибки виникають спільно, тому їх поділ у процесі обробки результатів вимірів є надзвичайно важким, а у певних випадках похибки, що є випадковими за походженням, за певних умов стають систематичними. Отже, не існує чіткої межі між цими двома видами елементарних погрішностей, елементарна погрішність буде випадковою або систематичною залежно від умов, у яких вона виникає.

Кожен результат виміру  $x_i$  у загальному випадку є сумою двох складників – істинного значення вимірюваної величини  $L$ , що нам невідоме, та істинної погрішності виміру  $\varepsilon_i$ , яка змінюється від одного виміру до іншого, тобто:

$$x_i = L + \varepsilon_i,$$

де  $x_i$  – результат  $i$ -го виміру;

$L$  – істинне значення вимірюваної величини;

$\varepsilon_i$  – істинна погрішність  $i$ -го результату виміру.

Теоретично погрішність результату виміру  $x_i$  є різницею між цим результатом виміру та істинним (дійсним) значенням  $L$  вимірюваної фізичної величини:

$$\varepsilon_i = x_i - L . \quad (5.9)$$

У свою чергу істинна погрішність  $i$ -го результату виміру  $\varepsilon_i$  у загальному випадку містить дві складові: систематичну похибку ряду вимірів, яка є однаковою для усіх отриманих результатів вимірів  $\theta$ , та випадкову похибку результату  $i$ -го виміру  $\delta_i$ :

$$\varepsilon_i = \theta + \delta_i . \quad (5.10)$$

Розглянемо ряд результатів повторних вимірів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , що отримані у однакових умовах. Структура  $i$ -го результату виміру  $x_i$  наведена на рисунку 5.1.

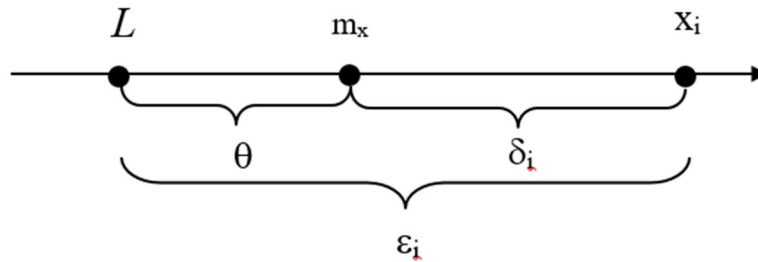


Рисунок 5.1 – Структура  $i$ -го результату виміру  $x_i$ :

$L$  – істинне значення вимірюваної величини;  $m_x$  – математичне сподівання результатів вимірів (центр розсіювання);  $\varepsilon_i$  – істинна погрішність результату  $i$ -го виміру;  $\delta_i$  – випадкова погрішність результату  $i$ -го виміру;  $\theta$  – систематична погрішність даного ряду вимірів (систематичний зсув)

З рисунка 5.1 випливає, що істинне значення вимірюваної величини  $L$  відрізняється від математичного сподівання ряду результатів вимірів  $x_1, x_2, \dots, x_n$  саме на величину систематичного зсуву  $\theta$ , яка для певної низки результатів вимірів є незмінною. Розташування значення  $x_i$  на числовій осі визначається випадковою погрішністю  $\delta_i$ . Випадкова погрішність  $\delta_i$  є випадковою величиною із нормальним законом розподілу, що має велике значення для встановлення технічних вимог до величини погрішності виміру. Це твердження зазвичай обґрунтовують центральною граничною теоремою, оскільки величина випадкової погрішності  $\delta_i$  зумовлена впливом дуже великої кількості окремих джерел похибок.

У силу симетрії кривої нормального розподілу щодо початку координат теоретично математичне сподівання випадкової погрішності  $\delta_i$  дорівнює нулю:

$$M(\delta) = 0 .$$

Тоді математичне сподівання повної похибки дорівнює систематичному зсуву:

$$M(\varepsilon) = \theta ,$$

а  $i$ -й результат виміру  $x_i$  є різницею між цим результатом виміру та істинним (дійсним) значенням  $L$  вимірюваної фізичної величини:

$$x_i = m_x \pm \delta_i . \quad m_x = L - \theta , \quad (5.11)$$

звідки очевидна необхідність аналізу наявності та значущості систематичної погрішності.

Отже, виникає необхідність для характеристики точності вимірів застосовувати щонайменше два чинники – характеристику зсуву та характеристику розкиду. Як такі характеристики застосовують:

- **загальний зсув** ряду вимірювань від істинного значення вимірюваної величини, тобто систематичну похибку  $\theta$ , яка має закономірний характер;
- **характеристику розкиду** результатів вимірювань щодо математичного сподівання ряду вимірювань  $m_x$ , тобто середнє квадратичне відхилення  $\sigma$ .

Окрім вказаних, для повної характеристики відхилення результатів вимірів від істинного значення часто використовують також **граничну погрішність**, яка ґрунтується на відомому «правилі трьох сигм». Це правило є властивістю усіх нормально розподілених випадкових величин. Правило трьох сигм полягає у тім, що 99,7 % усіх можливих значень нормальної випадкової величини влучають на ділянку  $\pm 3\sigma$ , тобто тільки 0,3 % значень виходять за межі даного інтервалу (3 значення з 1000 значень).

Граничну похибку визначають за формулою:

$$\Delta_{\text{гр}} = \theta \pm t \cdot \sigma, \quad (5.12)$$

де значення параметра  $t$  визначається законом розподілу погрішностей та заданою імовірністю появи граничної погрішності. В геодезичній практиці граничні погрішності розраховують при  $t = 2; 2,5; 3$ .

Абсолютне значення граничної похибки  $\Delta_{\text{гр}}$  є верхньою межею припустимих розмірів погрішностей. Кожен результат виміру із похибкою, що перевищує за абсолютною величиною значення граничної похибки  $\Delta_{\text{гр}}$ , відкидається. Граничну похибку встановлюють інструкції для кожного виду геодезичних робіт.

Оскільки значення середньоквадратичного відхилення  $\sigma$  та систематичного зсуву  $\theta$  зазвичай невідомі, то для характеристики точності вимірів застосовують їхні оцінки. В геодезичній практиці оцінку середньоквадратичного відхилення  $\sigma$  називають середньоквадратичною погрішністю (СКП) та позначають  $m$ , а систематичного зсуву – систематичною погрішністю  $\theta$ . Величини  $m$  і  $\theta$ , як оцінки характеристик точності, залежать від умов вимірів, а отже є величинами випадковими, і для них розраховують характеристики їх надійності:  $m_m$  – СКП середньоквадратичної погрішності та  $m_\theta$  – СКП систематичної погрішності. Зазвичай ці величини застосовують для правильного заокруглення величин  $m$  та  $\theta$ .

СКП середньоквадратичної погрішності розраховують за формулою

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2\nu}}, \quad (5.13)$$

де  $\nu$  – число ступенів свободи, яким зазвичай є кількість проведених вимірів  $n$ .

Одним із завдань теорії погрішностей результатів вимірів є розробка методів обчислення оцінок числових характеристик точності  $m$  та  $\theta$  у різних геодезичних операціях.

### 5.5 Оцінювання точності результатів вимірів за дійсними погрішностями

У випадку, коли істинне значення вимірюваної величини невідоме, можна оцінити вплив лише випадкових погрішностей, що являють собою відхилення результатів вимірів від середнього значення. Вплив систематичних погрішностей у цьому випадку виявити повністю неможливо.

Якщо маємо низку рівноточних вимірів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , за умови, що істинне значення вимірюваної величини відоме та дорівнює  $L$ , за формулою (5.9) визначимо низку істинних погрішностей результатів вимірів. Покладемо, що систематична похибка відсутня, тобто  $\theta = 0$ . Тоді за відсутності систематичної похибки істинні погрішності дорівнюють випадковим  $\varepsilon_i = \delta_i$ . Отже, середню квадратичну похибку (СКП) можна визначити як корінь із суми квадратів істинних погрішностей, поділений на кількість вимірювань  $n$ :

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n}}, \quad (5.14)$$

тоді її надійність становить

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}, \quad (5.15)$$

де  $[ ]$  – символ суми Гаусса, що означає додавання однорідних елементів, які відрізняються індексами, що змінюються від 1 до  $n$ . Символ Гаусса еквівалентний символу  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ , де  $n$  – число величин, які додаються одна до одної. Відповідно до правила розкриття символу Гаусса маємо:  $[\varepsilon] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$ .

У випадку, коли має місце наявність систематичної погрішності, то необхідно знайти оцінку систематичного зсуву, характеристику розкиду і оцінити значущість виявленої систематичної погрішності.

Оцінку середнього значення систематичної погрішності можна визначити як середнє повної погрішності  $\varepsilon_i$ , виходячи з того, що середнє випадкової складової похибки виміру дорівнює нулю  $\bar{\delta} = 0$ , тобто:

$$\bar{\theta} = \frac{[\varepsilon]}{n}, \quad (5.16)$$

Випадкову похибку результату  $i$ -го виміру  $\delta_i$  можна виразити з формули (5.10) як відхилення від середнього  $\bar{\delta}_i = \varepsilon_i - \bar{\theta}$  та для оцінювання середнього квадратичного відхилення за наявності  $\theta$ , тобто середньої квадратичної погрішності СКП, скористатись такою формулою:

$$m = \sqrt{\frac{[(\varepsilon_i - \bar{\theta})^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}, \quad (5.17)$$

де  $\delta_i = \varepsilon_i - \bar{\theta}$  – випадкова складова істинної погрішності  $i$ -го результату виміру.

У цьому випадку оцінку надійності СКП обчислюють за формулою

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (5.18)$$

Для оцінювання значущості виявленої систематичної погрішності поступають наступним чином. Висувають нульову гіпотезу  $H_0: \theta = 0$ . Перевіряють гіпотезу за допомогою критерія  $\Delta_{np\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} < |\bar{\theta}|$ , який являє собою граничне значення  $\theta$ , зумовлене випадковими факторами. Значення  $t_q$  отримують з довідкових таблиць розподілу Стюдента відповідно до рівня значущості  $\alpha$  та числа ступенів свободи  $\nu = n - 1$ .

Якщо виконується нерівність виду  $|\bar{\theta}| < \Delta_{np\bar{\theta}}$ , тобто якщо значення систематичного зсуву не перевищує граничної похибки, вважають, що  $\theta$  сформоване випадковими факторами, а отже систематичні погрішності відсутні. Виконання нерівності протилежного змісту дає підстави вважати наявність систематичних погрішностей у даних вимірах.

Для правильного заокруглення величини  $\theta$ , якщо вона є значущою, обчислюють величину її погрішності:

$$m_{\bar{\theta}} = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Оцінку СКП  $\sigma$  можна отримати при малому обсязі вибірки ( $n \leq 10$ ) за величиною розмаху. Її обчислюють за формулою

$$\hat{m} = \frac{R_n}{d_n}, \quad (5.19)$$

де  $R_n = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$  – розмах вибірки обсягу  $n$ ;

$d_n$  – коефіцієнт, що залежить від обсягу вибірки. Значення коефіцієнтів  $d_n$  надані у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Значення коефіцієнтів  $d_n$

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14
$d_n$	1,13	1,69	2,06	2,33	2,53	2,70	2,85	2,97	3,08	3,41

## 5.6 Інтервальне оцінювання числових характеристик

Якщо точкову оцінку параметру визначено на підставі вибірки малого обсягу, вона може істотно відрізнятись від оцінюваного параметра. Для

визначення помилки від заміни шуканого параметра його оцінкою використовують поняття довірчого інтервалу та довірчої імовірності.

При визначенні дійсного значення шуканого параметру  $m_x$  величину погрішності характеризує довірчий інтервал  $L$ , а ступінь впевненості, що похибка не перевищить  $L$ , характеризує довірна імовірність  $\beta$ . Якщо для певного параметру розподілу, наприклад, математичного сподівання  $m_x$  отримано спроможну й незміщену оцінку  $a^*$ , потрібно знати, до яких помилок може призвести заміна параметра  $m_x$  його точковою оцінкою  $a^*$ , та з яким ступенем впевненості можна очікувати, що ці помилки не вийдуть за певні межі. Для розв'язання цієї задачі призначають досить велику імовірність  $\beta(0,95; 0,99)$  таку, що подію  $A = \{|a^* - m_x| < l\}$ , яка характеризується цією імовірністю, можна вважати практично вірогідною, потім знаходять таке значення  $l$ , для якого справедлива рівність

$$P(A) = P\{(a - l) < m_x < (a + l)\} = \beta. \quad (5.20)$$

Тобто з імовірністю  $\beta$  невідоме значення параметру  $m_x$  перебуватиме в інтервалі  $L = [a^* - l, a^* + l]$ . Більші за  $l$  за абсолютним значенням помилки зустрічатимуться з імовірністю  $\alpha = 1 - \beta$ . Границі інтервалу називають довірчими границями  $a_1 = a^* - l, a_2 = a^* + l$  (рис. 5.2).

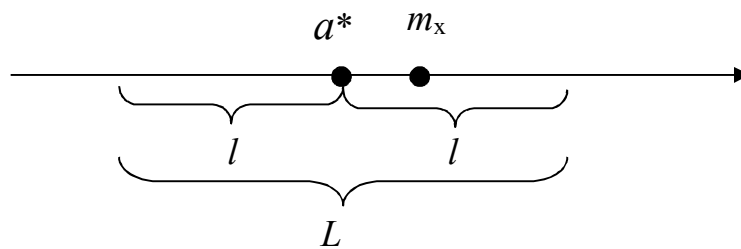


Рисунок 5.2 – Довірчий інтервал

Утруднення полягає в тому, що закон розподілу оцінки  $a^*$  залежить від закону розподілу досліджуваної ознаки  $X$  і, отже, від його невідомих параметрів (зокрема і від самого параметра  $a$ ). Щоб обійти це утруднення, застосовують наступний грубо наближений прийом: заміняють у виразі  $l$  невідомі параметри їхніми точковими значеннями. При 20–30 дослідах цей прийом зазвичай дає задовільні за точністю результати.

### Запитання для самоперевірки:

1. Наведіть визначення понять «фізична величина» та «істинне значення фізичної величини».
2. Поясніть, що являють собою принцип, метод та об'єкт вимірювання.
3. Перелічіть та охарактеризуйте фактори за наявності яких відбувається процес вимірювання.

4. Як відрізняються методи прямих та непрямих геодезичних вимірів?
5. Поясніть зміст вибіркового методу. У чому полягає різниця між генеральною сукупністю і вибіркою?
6. Яку інформацію про випадкову величину дістають з варіаційного ряду?
7. Що таке оцінка параметра розподілу?
8. Які властивості повинні мати оцінки числових характеристик випадкової величини?
9. Поясніть такі властивості оцінок випадкової величини як спроможність й незміщеність.
10. Поясніть, як відрізняються прямі та непрямі виміри?
11. До якого виду вимірів – до прямих або непрямих – слід віднести визначення перевищення методом тригонометричного нівелювання?
12. Поясніть призначення та сутність необхідних та надлишкових вимірів.
13. Поясніть сутність адитивної гіпотези будови повної погрішності результату виміру?
14. У чому основна різниця між систематичними та випадковими погрішностями?
15. Поясніть смисл аксіоми компенсації.
16. Поясніть смисл аксіоми розсіяння.
17. Які варіанти оцінки математичного сподівання вам відомі? Найкраща оцінка математичного сподівання.
18. Оцінка дисперсії та СКП при відомому математичному сподіванні.
19. Оцінка дисперсії та СКП при невідомому математичному сподіванні.
20. Оцінка СКП за розмахом вибірки.
21. Оцінка моментів.
22. Оцінка коефіцієнту кореляції.
23. Які характеристики точності необхідні для оцінювання якості виміру та чому?
24. Що є характеристикою розкиду результатів вимірів?
25. На яких підставах можна вважати, що істинні погрішності результатів вимірів розподілені нормально?
26. Як визначають граничну погрішність результатів вимірів?
27. Що розуміють як оцінку числових характеристик точності результатів вимірів?
28. Що характеризує СКП результату виміру?
29. Що характеризує СКП середньоквадратичної погрішності та для чого її обчислюють?
30. Перелічіть основні завдання, що вирішує теорія погрішностей.

31. Напишіть формули, за якими оцінюють точність за істинними (дійсними) погрішностями.
32. Чим відрізняються точкова і інтервальна оцінки параметрів розподілу?
33. Поясніть поняття «довірчий інтервал» і «довірча імовірність».
34. Чим визначаються точність та надійність інтервальної оцінки параметра?
35. За яких умов можлива побудова довірчого інтервалу?
36. Як здійснити побудову довірчого інтервалу для математичного сподівання при відомій та невідомій дисперсії?

## Тема 6 РЕГРЕСІЙНО-КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Поняття регресійної залежності. Побудова поля кореляції. Вибір виду статистичної залежності на підставі статистичних даних. Визначення параметрів рівняння регресії за методом найменших квадратів. Оцінювання тісноти лінійного зв'язку між залежними величинами.

### 6.1 Поняття регресійної залежності

Завданням кореляційно–регресійного аналізу є визначення форми залежності проміж незалежною та залежною змінними  $X$  та  $Y$ , а також оцінювання тісноти зв'язку між ними.

Залежність виду

$$y = f(x), \quad (6.1)$$

у якій кожному значенню  $X$  відповідає одне-єдине значення  $Y$ , називають **функціональною**.

Проте одному значенню змінної  $X$   $x_i$  може відповідати низка значень змінної  $Y$ :  $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik}$ , що може бути викликано впливом різних факторів на змінну  $Y$ , а не тільки змінної  $X$ , або помилками вимірювань. У цьому випадку залежність проміж незалежною та залежною змінними  $X$  та  $Y$  називають **статистичною**. У випадку статистичної залежності для кожного значення  $x_i$  можна визначити умовне середнє  $\bar{y}_i$  (рис. 6.1).

Статистична залежність між змінними  $Y$  та  $X$  передбачає, що при зміні незалежної змінної  $X$  змінюється розподіл залежної змінної  $Y$ . Якщо при зміні  $X$  закон розподілу  $Y$  не змінюється, а змінюється її середнє значення, то таку статистичну залежність називають **кореляційною**:

$$\bar{y}_x = \varphi(x). \quad (6.2)$$



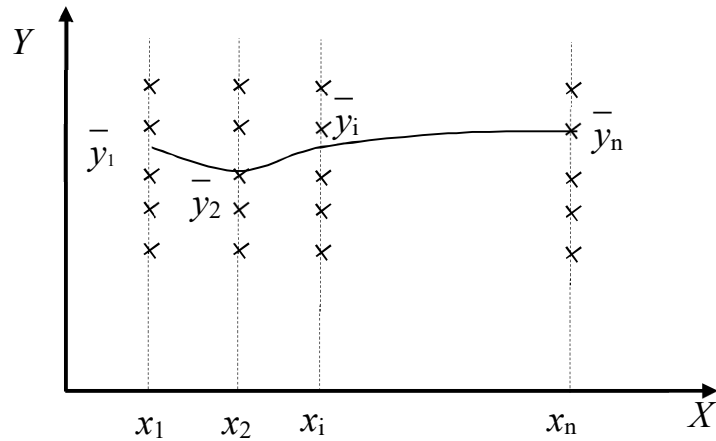


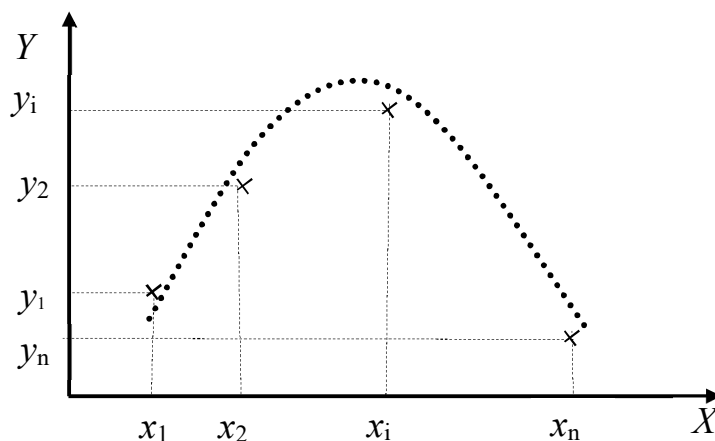
Рисунок 6.1 – Статистична залежність  $y = f(X)$

Кореляційний аналіз ґрунтується на використанні рівняння регресії. **Регресією**  $Y$  на  $X$  називають умовне математичне сподівання випадкової величини  $Y$  за умови, що  $X$  прийняла значення  $x_i$ . Лінію, яка з'єднує точки  $\bar{y}_i$ , називають **лінією регресії** (рис. 6.1).

Для апроксимації лінії регресії аналітичним виразом застосовують **рівняння регресії** (6.2). Розрізняють парну (або просту) регресію, якщо досліджують вплив на залежну змінну  $Y$  однієї незалежної змінної  $X$ , і множинну регресію, якщо досліджують вплив на залежну змінну  $Y$  множини незалежних змінних  $X_i$ .

## 6.2 Побудова поля кореляції та вибір виду статистичної залежності на підставі статистичних даних

Вибір вигляду залежності  $\bar{y}_x = \varphi(x)$  зазвичай здійснюють або з теоретичних міркувань, якщо відомий вид теоретичної залежності  $\bar{y}_x = \varphi(x)$ , або графічно, для чого залежність зображують точками на координатній площині. Таке зображення статистичної залежності називають **полем кореляції** (рис. 6.2).



### Рисунок 6.2 – Поле кореляції

Наприклад, розташування отриманих статистичним шляхом точок на рисунку 6.2 нагадує параболу, тоді для згладжування експериментальної залежності  $\bar{y}_x = \varphi(x)$  можна скористатися поліномом другого порядку:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

На практиці найчастіше застосовують лінійне рівняння регресії:

$$Y = \rho_{yx}X + b. \quad (6.3)$$

Коефіцієнт при змінній  $X$   $\rho_{yx}$  називають коефіцієнтом регресії.

### 6.3 Визначення параметрів рівняння регресії за методом найменших квадратів

Для визначення параметрів залежності, що згладжує  $\bar{y}_x = \varphi(x)$ , зокрема значень параметрів  $\rho_{yx}$  та  $b$  рівняння регресії (6.3), застосовують **метод найменших квадратів** (МНК). Метод найменших квадратів дозволяє при відомому класі апроксимуючої залежності  $\bar{y}_x = \varphi(x)$  так вибрати значення її параметрів  $\rho_{yx}$  та  $b$ , щоб ця залежність щонайкраще відображала дані спостережень.

Нехай в результаті  $n$  дослідів для кожного значення незалежної змінної  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  отримані значення залежної змінної  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Потрібно згладити отриману статистичну залежність апроксимуючою кривою  $\bar{y}_x = \varphi(x)$ . Будемо вважати, що відхилення статистичних даних від апроксимуючої кривої  $y_i - \varphi(x_i)$  (рис. 6.3) зумовлені помилками вимірів, а отже, розподілені нормально. Тоді залежна змінна  $Y$  при кожному значенні  $X = x_i$  є

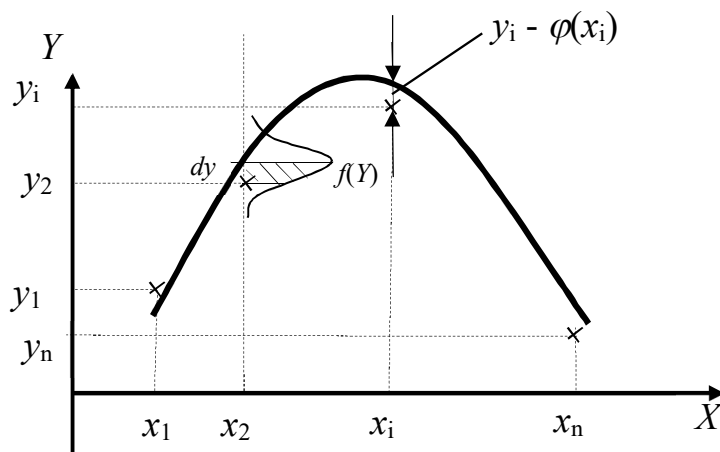


Рисунок 6.3 – Розподіл відхилень статистичних даних від апроксимуючої кривої  $y_i - \varphi(x_i)$

випадковою величиною  $Y_i$ , що розподілена нормально із параметрами  $\varphi(x_i)$  та  $\sigma$ . Параметр розподілу  $\sigma$  характеризує точність виміру  $Y$  в  $i$ -му досліді. Будемо вважати, що виміри у всіх дослідях проводилися з однаковою точністю, тоді  $\sigma$  для усіх  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  одна й та сама. Закон розподілу  $Y_i$  (щільність розподілу) запишемо в такий спосіб:

$$f(Y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[y_i - \varphi(x_i)]^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Імовірність того, що  $Y_i$  потрапила на інтервал  $dy$  дорівнює елементу імовірності (див. рис. 6.3):

$$P\{y_i - dy < Y_i < y_i + dy\} = f(Y_i) \cdot dy.$$

Імовірність того, що залежна змінна  $Y$  прийняла значення  $y_1, y_2, \dots, y_n$  визначимо за теоремою множення:

$$\begin{aligned} P\{y_1 = y_1, y_2 = y_2, \dots, y_n = y_n\} &= \prod_{i=1}^n f(Y_i) dy = \\ &= \left(\frac{dy}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{[y_i - \varphi(x_i)]^2}{2\sigma^2}\right\}. \end{aligned}$$

Ця імовірність буде найбільшою, коли аргумент експоненти  $\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{[y_i - \varphi(x_i)]^2}{2\sigma^2}\right\}$  прийме найменше значення, тому використання МНК збігається до вимоги, щоб сума квадратів відхилень цієї теоретичної кривої від експериментальних точок оберталась на мінімум:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - y_{ip})^2 \rightarrow \min, \quad (6.4)$$

де  $y_i$  – значення залежної змінної  $Y$ , отримані в результаті спостережень;

$y_{ip}$  – розрахункові значення залежної змінної  $Y$ , отримані на підставі аналітичного виразу кривої, що згладжує  $\bar{y}_x = \varphi(x)$ .

Зауважимо, що виконання умови (6.4) забезпечує щонайкраще узгодження апроксимуючої кривої  $\bar{y}_x = \varphi(x)$  із дослідними даними. Отже, якщо усі виміри проводились з однаковою точністю і помилки вимірів розподілені за нормальним законом, то знайдена залежність буде найбільш імовірною з усіх можливих в даному класі функцій.

З огляду на те, що  $y_{ip} = \varphi(x_i)$ , вираз (6.4) можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i)]^2 \rightarrow \min. \quad (6.5)$$

Невідомі параметри шуканої залежності визначають, записавши її не тільки як функцію аргументу  $x$ , але і як функцію невідомих параметрів  $a_j, j = \overline{1, m}$ :

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_m)]^2 \rightarrow \min, \quad (6.6)$$

де  $m$  – число шуканих параметрів.

Візьмемо часткові похідні від виразу (6.6) за параметрами  $a_j$  і, дорівнявши їх нулю, дістанемо систему  $m + 1$  нормальних рівнянь з  $m + 1$  невідомими, розв'язання якої дає шукані параметри  $a_j$ , які задовольняють умові (6.5):

$$-2 \sum_{i=1}^n [y_i - \phi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_j, \dots, a_m)] \frac{\partial \phi}{\partial a_j} = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Розв'язання отриманої системи нормальних рівнянь залежить від конкретного вигляду залежності  $\bar{y}_x = \varphi(x)$ .

Отримаємо для лінійного рівняння регресії (6.3) методом найменших квадратів вираз для коефіцієнта регресії  $\rho_{yx}$  та вільного члена  $b$ . Для цього підставимо у (6.6) вираз (6.3), отримаємо:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \rho_{yx} x_i - b]^2 \rightarrow \min.$$

Для відшукування мінімуму візьмемо похідні за параметрами  $\rho_{yx}$  та  $b$  і, дорівнявши їх до нуля, одержимо систему нормальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n [y_i - \rho_{yx} x_i - b] \cdot x_i &= 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n [y_i - \rho_{yx} x_i - b] &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (6.7)$$

з якої в результаті перетворень отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{yx} \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i &= \sum x_i y_i \\ \rho_{yx} \cdot \sum x_i + nb &= \sum y_i \end{aligned} \right\}. \quad (6.8)$$

Виразимо  $\rho_{yx}$  та  $b$ , маємо параметри шуканої залежності:

$$\rho_{yx} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad (6.9)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (6.10)$$

#### 6.4 Оцінювання тісноти лінійного зв'язку між залежними величинами

Для оцінювання тісноти лінійної кореляційної залежності слугує коефіцієнт кореляції. Для його визначення підставимо у вираз (6.8), використаний для одержання параметрів лінійної залежності за методом найменших квадратів, такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum x_i}{n}, & \text{звідки } \sum x_i &= \bar{x}n; \\ \bar{y} &= \frac{\sum y_i}{n}, & \text{звідки } \sum y_i &= \bar{y}n; \\ \overline{x^2} &= \frac{\sum x_i^2}{n}, & \text{звідки } \sum x_i^2 &= \overline{x^2}n, \end{aligned}$$

отримаємо

$$\left. \begin{aligned} \rho_{yx} \cdot \overline{x^2}n + b \cdot \bar{x}n &= \sum x_i y_i \\ \rho_{yx} \cdot \bar{x} + b &= \bar{y} \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

із другого рівняння виразимо  $b$ :

$$b = \bar{y} - \rho_{yx} \cdot \bar{x} \quad (6.12)$$

і, підставивши його до першого рівняння, знайдемо коефіцієнт регресії:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cdot \sum x_i^2 + (\bar{y} - \rho \cdot \bar{x}) \sum x_i &= \sum x_i y_i \\ \rho \cdot (\sum x_i^2 - \bar{x} \cdot \sum x_i) &= \sum x_i y_i - \bar{y} \cdot \sum x_i \end{aligned} \right\};$$

$$\rho = \frac{\sum x_i y_i - \bar{y} \cdot \sum x_i}{\sum x_i^2 - \bar{x} \cdot \sum x_i} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{y} \bar{x}}{n \overline{x^2} - n \bar{x}^2} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{y} \bar{x}}{n \cdot \sigma_x^2}. \quad (6.13)$$

Помножимо рівність (6.13) на дріб  $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ , тоді

$$\rho \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{y} \bar{x}}{n \cdot \sigma_x \sigma_y}, \quad (6.14)$$

де  $\rho \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r_b$  – вибірковий коефіцієнт кореляції.

Підставивши у рівняння лінійної регресії  $\bar{y}_x = \rho_{yx} \cdot x + b$  вираз для  $b$  (6.12), отримаємо його в такому вигляді:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx} \cdot (x - \bar{x}) \quad \text{або} \quad \bar{y}_x - \bar{y} = r_b \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \bar{x}). \quad (6.15)$$

Коефіцієнт кореляції  $r_b$  має важливе значення. Він дозволяє оцінити величину лінійного зв'язку між двома випадковими величинами  $X$  та  $Y$ . Покладемо у рівнянні (6.14)  $r_b = 0$ , тоді

$$\bar{y}_x - \bar{y} = 0,$$

або

$$\bar{y}_x = \bar{y},$$

тобто при  $r_b = 0$  усі умовні середні дорівнюють оцінці середньої, а значить при зміні незалежної величини  $X$  залежна змінна  $Y$  не змінюється, і графік рівняння регресії паралельний осі абсцис. Це говорить про те, що  $Y$  не залежить від  $X$ , між ними немає лінійного зв'язку. Проте  $X$  та  $Y$  можуть бути зв'язані нелінійним зв'язком, який може опинитися як кореляційним, так і функціональним.

Дисперсія залежної змінної  $Y$  в точці  $X = x_i$  відносно її умовного середнього  $S_y$  визначається за формулою:

$$S_y = D_y(1 - r_b^2), \quad (6.16)$$

де  $D_y$  – дисперсія  $Y$  щодо оцінки середньої.

Покладемо у формулі (6.16)  $r_b = 1$ , тоді

$$S_y = 0,$$

отже при  $r_b = 1$  розсіювання значень залежної змінної  $Y$  у кожній точці відсутнє, рівняння (6.15) матиме вигляд  $\bar{y}_x - \bar{y} - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \bar{x}) = 0$ , тобто будь-яка пара

чисел  $x$  та  $y$  йому задовольняє. Звідси випливає, що при  $r_b = 1$  між  $X$  та  $Y$  існує функціональний лінійний зв'язок.

З формули (6.15) також випливає, що зі збільшенням  $r_b$  дисперсія залежної змінної  $Y$  відносно умовної середньої  $S_y$  зменшується, тобто зменшується розсіювання навколо умовних середніх, а це означає, що тіснота зв'язку збільшується.

Отже, статистична оцінка коефіцієнта кореляції приймає значення від  $-1$  до  $+1$  і характеризує тісноту лінійного зв'язку між досліджуваними змінними  $X$  та  $Y$ . Якщо  $r_b = 0$ , то лінійний зв'язок відсутній, чим ближче значення  $|r_b|$  до одиниці, тим тісніше зв'язок, при  $|r_b| = 1$  він стає функціональним.

### Запитання для самоперевірки:

1. Які задачі вирішують методом кореляційного аналізу?
2. В яких випадках залежність  $y = f(x)$  є функціональною, статистичною або кореляційною?
3. Дайте визначення термінів «регресія», «лінія регресії», «рівняння регресії».
4. З яких міркувань визначають тип кореляційної залежності  $y = f(x)$ ? Які типи залежностей вам відомі?
5. Чим характерна лінійна залежність  $y = f(x)$ ? Чому її використовують найчастіше?
6. Як називаються параметри лінійної залежності  $y = f(x)$ ?
7. Які методи можна використовувати для визначення параметрів рівняння регресії  $y = f(x)$ ?
8. Якій вимозі задовольняють параметри, що визначені за методом найменших квадратів?
9. Назвіть характеристики, що дозволяють оцінити наявність зв'язку між залежною та незалежною величинами.
10. Які значення може приймати коефіцієнт кореляції, які висновки можна зробити на підставі цих значень?
11. Що таке кореляційна таблиця?
12. Які параметри визначають за допомогою кореляційної таблиці?
13. Як перевірити значущість оцінки коефіцієнта кореляції?
14. У чому полягає загальна ідея регресійного аналізу?
15. Охарактеризуйте загальний вигляд лінійного рівняння регресії та зміст параметрів, що входять до рівняння.

## ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2 ОСОБЛИВОСТІ ОБРОБКИ ВИМІРЮВАНЬ У ПЛАНОВИХ І ВИСОТНИХ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖАХ

### Тема 7 ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ФУНКЦІЙ ВИМІРЯНИХ ВЕЛИЧИН

Основні теореми. Визначення накопиченої погрішності у геодезичних вимірах: під час передачі дирекційного кута за ходом в  $n$  поворотних точок, у сумі кутів полігона, у середній арифметичній  $n$  рівноточних вимірів кута, під час передачі висот за ходом у  $n$  станцій та у лінійних вимірах.

#### 7.1 Основні теореми

У геодезичній практиці переважно використовують не окремі безпосередньо вимірні величини, а їхні функції, тобто застосовують непрямі вимірювання. Наприклад, нахил лінії визначають як відношення безпосередньо виміряного перевищення до довжини лінії. Довжину лінії, що недоступна для безпосереднього виміру, обчислюють із розв'язання трикутника, в якого безпосередньо вимірюють базисну сторону і горизонтальні кути. Площу земельної ділянки прямокутної форми обчислюють як добуток безпосередньо вимірної довжини та ширини ділянки. Перелік подібних прикладів можна продовжувати. Очевидно, що похибка функції залежить від похибок аргументів. Отже, виникає задача оцінювання точності функції вимірних величин за відомими характеристиками точності безпосередньо вимірних аргументів.

Зазвичай істинні похибки вимірних аргументів невідомі, а отже істинні похибки функцій можна визначити тільки якщо відома істинна величина функції, наприклад, сума вимірних кутів трикутника, або сума перевищень у замкненому висотному полігоні. У цих випадках похибку функції можна отримати як різницю між її теоретичним значенням та значенням, що обчислене за вимірними аргументами. Таку різницю називають нев'язкою.

Розглянемо задачі з визначення оцінок точності функцій за відомими оцінками точності їхніх аргументів. Зауважимо, що аргументи функції можуть опинитись як корельовані, так і некорельовані. Звернемось до задачі з визначення оцінок точності функцій за відомими оцінками точності некорельованих аргументів, для розв'язання якої сформульовано та доведено основні теореми теорії похибок.

**Теорема 7.1.** Нехай маємо лінійну функцію виду:

$$y = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n,$$

де  $C_i$  – постійні, визначені з теоретичних міркувань, ( $i = \overline{1, n}$ );

$x_1, x_2, \dots, x_n$  – ряд результатів незалежних вимірів.

Результати вимірів отримані в умовах, що забезпечують точність, яка характеризується, систематичними погрішностями  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  та дисперсіями  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ . Тоді систематичну погрішність і дисперсію функції  $y$  можна обчислити за формулами

$$\theta_y = C_1\theta_1 + C_2\theta_2 + \dots + C_n\theta_n ; \quad (7.1)$$

$$\sigma_y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \dots + C_n^2\sigma_n^2 . \quad (7.2)$$

*Доказ.* Нехай  $L_1, L_2, \dots, L_n$  – істинні значення вимірених величин, а  $Y$  – істинне значення їхньої лінійної функції. Тоді вірним є співвідношення

$$Y = C_0 + C_1L_1 + C_2L_2 + \dots + C_nL_n, \quad (7.3)$$

а отже значення функції  $y$ , що обчислене за результатами вимірів, матиме вигляд:

$$y = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n. \quad (7.4)$$

Для переходу до погрішності лінійної функції від (7.4) віднімемо (7.3) та отримаємо:

$$y - Y = C_0 + C_1(x_1 - L_1) + \dots + C_n(x_n - L_n). \quad (7.5)$$

Нагадаємо, що кожен результат виміру  $x_i$  у загальному випадку є сумою двох складових – істинного значення вимірюваної величини  $L$ , що нам невідоме, та погрішності виміру  $\varepsilon_i$ , яка змінюється від одного виміру до іншого, тобто

$$x_i = L_i + \varepsilon_i, \quad \text{або} \quad \varepsilon_i = x_i - L_i . \quad (7.6)$$

Позначимо погрішність функції  $\varepsilon_y = y - Y$  та формулі (7.5) із врахуванням (7.6) надаємо вигляд

$$C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \dots + C_n\varepsilon_n . \quad (7.7)$$

Перейдемо від погрішностей результатів вимірів до їхніх математичних сподівань, враховуючи, що математичне сподівання суми дорівнює сумі математичних сподівань, отримаємо:

$$M(\varepsilon_y) = M(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \dots + C_n\varepsilon_n) . \quad (7.8)$$

Беручи до уваги, що  $M(\varepsilon_y) = \theta_y$  і  $M(\varepsilon_i) = \theta_i$ , рівність (7.8) можна привести до вигляду рівності (7.1):

$$\theta_y = C_1\theta_1 + C_2\theta_2 + \dots + C_n\theta_n .$$

Обчислимо дисперсію лівої та правої частин рівності (7.7):

$$D(\varepsilon_y) = D(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \dots + C_n\varepsilon_n) . \quad (7.9)$$

Оскільки дисперсії результатів вимірів відомі, та враховуючи, що для незалежних величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  дисперсія суми дорівнює сумі дисперсій, причому постійні коефіцієнти при доданках виносять за знак дисперсії у квадраті, а також що  $D(\varepsilon_y) = \sigma_y^2$  та  $D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$  рівність (7.9) приведемо до вигляду (7.2):

$$\sigma_y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \dots + C_n^2\sigma_n^2 .$$

**Теорема 7.2.** Нехай маємо функцію  $y$  довільного виду, яка є диференційованою:



$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – ряд результатів незалежних вимірів, ( $i = \overline{1, n}$ ).

Незалежні виміри отримані в умовах, що забезпечують точність із систематичними погрішностями  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  та дисперсіями  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ .

Тоді систематичну погрішність і дисперсію функції  $y$  можна обчислити за формулами:

$$\theta_y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \theta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \theta_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \theta_n ; \quad (7.10)$$

$$\sigma_y^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \sigma_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \sigma_2 \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \sigma_n \right)^2 . \quad (7.11)$$

*Доказ.* Нехай  $L_1, L_2, \dots, L_n$  – істинні значення вимірюваних величин, а  $Y$  – істинне значення їхньої функції:

$$Y = f(L_1, L_2, \dots, L_n), \quad (7.12)$$

тоді обчислене за результатами вимірів значення функції має вигляд:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (7.13)$$

Перейдемо до погрішності функції  $y$ , для чого з рівності (7.13) віднімемо рівність (7.12), отримаємо:

$$y - Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(L_1, L_2, \dots, L_n). \quad (7.14)$$

Погрішності вимірів можна розглядати як прирощення аргументів, тоді рівності (7.14) можна надати вигляд:

$$y - Y = \Delta y = f(L_1 + \varepsilon_1, \dots, L_n + \varepsilon_n) - f(L_1, \dots, L_n). \quad (7.15)$$

За умовою функція  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  є функцією довільного вигляду, у тому числі вона може бути нелінійною, що зазвичай істотно утруднює розв'язання задач. Але більшість геодезичних задач містить нелінійні співвідношення, і тому часто доводиться застосовувати відомий з вищої математики прийом спрощення нелінійного виразу – розкладання нелінійної функції у ряд Тейлора з метою її лінеаризації.

Нагадаємо, що будь-який вираз є лінійним (графіком лінійного виразу є пряма лінія), якщо він не містить змінних у ступенях, або добутки змінних, або іншого виду нелінійних складових.

Для лінеаризації функції  $f_i(t_1, \dots, t_k)$  застосовують формулу розкладання Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x - a)^{n-1} + R_n(x).$$

Зауважимо, що розкладання функції у ряд Тейлора є справедливим тільки для оточення певної точки, в якій відомі значення  $x_i^0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Отже, вираз (7.15) є нелінійним, але його можна розкласти у ряд Тейлора:

$$\Delta y = f(L_1, \dots, L_n) - f(L_1, \dots, L_n) +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \varepsilon_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \varepsilon_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 \varepsilon_n + R_n(x),$$

де  $R_n(x)$  – остаточний член розкладання, яким зазвичай можна зневажити.

Числові значення похідних можна визначити за наближеними значеннями відповідних аргументів.

Покладемо прирощення функції  $\Delta y$  як істинну погрішність функції  $y$ , тоді отримаємо

$$\varepsilon_y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \varepsilon_n . \quad (7.16)$$

Отже, рівність (7.16) виражає погрішність функції як лінійну комбінацію незалежних погрішностей результатів вимірів. Перетворимо її на підставі теореми 7.1 та отримаємо:

$$\begin{aligned} \theta_y &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \theta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \theta_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \theta_n ; \\ \sigma_y^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \sigma_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \sigma_n\right)^2 , \end{aligned}$$

тобто отримали вирази, ідентичні (7.10) та (7.11).

Зауважимо, що теореми 7.1 та 7.2 доведені для теоретичних характеристик точності  $\theta$  і  $\sigma^2$ . Проте у практиці геодезичних дій доводиться застосовувати їхні статистичні оцінки  $\bar{\theta}$  та  $m^2$ . Тоді формули (7.1), (7.2), (7.10), (7.11) мають наступний вигляд:

$$\bar{\theta}_y = C_1 \bar{\theta}_1 + C_2 \bar{\theta}_2 + \dots + C_n \bar{\theta}_n ; \quad (7.18)$$

$$m_y^2 = C_1^2 m_1^2 + C_2^2 m_2^2 + \dots + C_n^2 m_n^2 ; \quad (7.19)$$

$$\bar{\theta}_y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \bar{\theta}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \bar{\theta}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \bar{\theta}_n ; \quad (7.20)$$

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} m_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} m_n\right)^2 . \quad (7.21)$$

## 7.2 Визначення накопиченої погрішності у геодезичних вимірах

На підставі теорем теорії похибок (теорем 7.1 і 7.2) можна визначити закони накопичення погрішностей під час проведення певних видів геодезичних вимірів, зокрема, у таких як передача дирекційного кута за ходом в  $n$  поворотних точок, в сумі кутів полігона, у середньому арифметичному  $n$  рівноточних вимірів кута, передача висот за ходом у  $n$  станцій та у лінійних вимірах. Отриманими формулами доцільно скористатися під час планування геодезичних робіт та для апостеріорного оцінювання точності результатів вимірів.

Розглянемо задачу визначення накопиченої погрішності у результаті передачі дирекційного кута за ходом в  $n$  поворотних точок. Нехай прокладений теодолітний хід, схему якого наведено на рисунку 7.1.

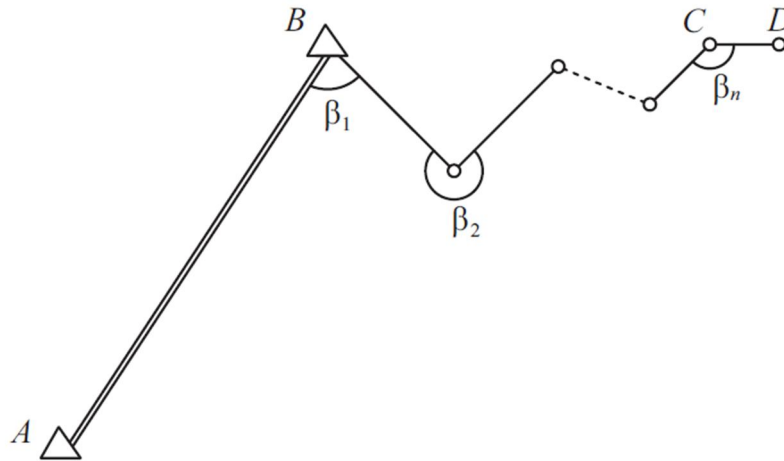


Рисунок 7.1 – Схема теодолітного ходу

Кути теодолітного ходу  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  виміряні незалежно один від одного в однакових умовах, що забезпечило рівні систематичні погрішності  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta_\beta$  та рівні середньоквадратичні погрішності  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_\beta$ . Необхідно розрахувати систематичну  $\theta_{\alpha_{CD}}$  та середньоквадратичну  $m_{\alpha_{CD}}$  погрішності дирекційного кута останньої лінії ходу.

Будемо вважати, що значення вихідного дирекційного кута  $\alpha_{AB}$  лінії  $AB$  отримане із погрішностями, що зневажливо малі порівняно з погрішностями вимірів. Отже  $\alpha_{AB}$  вважаємо точною величиною.

Запишемо дирекційний кут лінії  $CD$  як функцію вихідних та вимірних величин. Оскільки виміряні праві за ходом кути, шуканий дирекційний кут має наступний вигляд:

$$\alpha_{CD} = \alpha_{AB} + 180^\circ \cdot n - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_n.$$

Перетворимо вираз, позначивши суму точних величин у формулі  $\alpha_{AB} + 180 \cdot n = C_0$ :

$$\alpha_{CD} = C_0 - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_n.$$

Для визначення похибки систематичного впливу скористаємось формулою (7.18), яка враховує тільки систематичні похибки вимірів, дістанемо:

$$\theta_{\alpha_{CD}} = -\theta_1 - \theta_2 - \dots - \theta_n,$$

або, оскільки  $\theta_i$  дорівнюють одна одній, маємо:

$$\theta_{\alpha_{CD}} = -n \cdot \theta_\beta. \quad (7.22)$$

Визначимо квадрат СКП дирекційного кута останньої лінії теодолітного ходу  $CD$ , скориставшись формулою (7.19):

$$m_{\alpha_{CD}}^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2,$$

або, оскільки  $m_i$  дорівнюють одна одній, маємо:

$$m_{\alpha_{CD}}^2 = m_\beta^2 \cdot n.$$

Отже, СКП дирекційного кута матиме вигляд:

$$m_{\alpha_{CD}} = m_{\beta} \cdot \sqrt{n}. \quad (7.23)$$

З отриманих формул (7.22) та (7.23) випливає, що під час передачі дирекційних кутів систематичні погрішності накопичуються пропорційно числу вимірних кутів, а випадкові – пропорційно кореню квадратному з числа кутів.

Розглянемо задачу визначення накопиченої погрішності у сумі кутів полігона. Нехай у багатокутнику виміряні усі внутрішні кути  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ . Точність їх вимірювань характеризується однаковими систематичними погрішностями  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta_{\beta}$  та СКП  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_{\beta}$ . Визначимо систематичну та середньоквадратичну погрішності суми кутів багатокутника.

Застосувавши формули (7.18) та (7.19), отримаємо:

$$\theta_{\Sigma\beta} = n \cdot \theta_{\beta}; \quad (7.24)$$

$$m_{\Sigma\beta} = m_{\beta} \cdot \sqrt{n}. \quad (7.25)$$

Отже, сума кутів багатокутника має систематичну погрішність, що у  $n$  разів перевищує, та середньоквадратичну погрішність, що у корінь з  $n$  разів перевищує відповідні погрішності вимірних кутів.

Розглянемо задачу визначення накопиченої погрішності у середньому арифметичному  $n$  рівноточних вимірів кута. Нехай один і той самий кут виміряний  $n$  разів та отримані результати  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , із однаковими систематичними погрішностями  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta_{\beta}$  та однаковими СКП  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_{\beta}$ . Обчислимо систематичну та середньоквадратичну погрішності середньої арифметичної вимірних значень кута, яка визначається формулою:

$$\bar{\beta} = \frac{1}{n} \cdot \beta_1 + \frac{1}{n} \cdot \beta_2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \beta_n.$$

Оскільки коефіцієнти  $C_i = \frac{1}{n}$ , систематична погрішність середнього арифметичного  $\bar{\beta}$  відповідно до формули (7.18) становить

$$\theta_{\bar{\beta}} = \theta_{\beta}. \quad (7.26)$$

Отже, систематична погрішність середнього арифметичного залишається такою самою, як і систематична погрішність одиничного виміру. З цього випливає, що **за наявності систематичних погрішностей в результатах вимірів підвищення точності неможливе без їх виключення.**

Для квадрата СКП відповідно до формули (7.19) отримаємо вираз:

$$m_{\bar{\beta}}^2 = \frac{m_{\beta}^2}{n},$$

а для СКП:

$$m_{\bar{\beta}} = \frac{m_{\beta}}{\sqrt{n}}. \quad (7.27)$$

Отже, **середня квадратична погрішність середньої арифметичної у корінь з  $n$  разів менша порівняно із середньою квадратичною погрішністю**

**одиночного виміру.** Цей висновок цілком стосується не тільки кутових вимірів, але й інших рівноточних вимірів будь-якого роду.

Розглянемо задачу визначення накопиченої погрішності у результаті передачі висот за нівелірним ходом у  $n$  станцій. Нехай прокладено нівелірний хід з  $n$  станцій. Перевищення на станицях нівелірного ходу виміряні незалежно одно від одного. Виміри проводили в однакових умовах, та отже систематичні погрішності  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta_{ст}$  і СКП  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m_{ст}$ . Визначимо систематичну  $\theta_{H_B}$  і середньоквадратичну  $m_{H_B}$  погрішності висоти кінцевої точки ходу  $H_B$ . Будемо вважати, що значення висоти початкової точки ходу  $H_A$  є точним. Запишемо висоту точки  $B$   $H_B$  як функцію вихідних та вимірних величин:

$$H_B = H_A + h_1 + h_2 + \dots + h_n.$$

Враховуючи, що  $H_A$  – величина точна, скористаємось формулою (7.18) для визначення систематичної погрішності висоти останньої точки ходу, отримаємо

$$\theta_{H_B} = \theta_{ст} \cdot n, \quad (7.28)$$

а для квадрата СКП висоти останньої точки ходу за формулою (7.19) запишемо

$$m_{H_B}^2 = m_{ст}^2 \cdot n.$$

Тоді СКП матиме вигляд

$$m_{H_B} = m_{ст} \cdot \sqrt{n}. \quad (7.29)$$

З отриманих формул (7.28) та (7.29) випливає, що під час передачі висот точок **систематичні погрішності накопичуються пропорційно числу вимірних перевищень, а випадкові – пропорційно кореню квадратному з їх числа.** Отже, закон накопичення систематичних та випадкових погрішностей не змінюється при використанні різних характеристик нівелірних ходів, будь то довжина ходу або число станцій в ході: систематичні погрішності накопичуються пропорційно кількісній характеристиці ходу, а випадкові – пропорційно кореню квадратному з кількісної характеристики ходу.

Під час нівелювання на рівнинній місцевості відстані між рейками є приблизно однаковими, тому кількість станцій нівелірного ходу дорівнює:

$$n = \frac{L}{l_{сер}},$$

де  $L$  – довжина нівелірного ходу;

$l_{сер}$  – середня відстань між рейками.

Тоді вирази (7.28) та (7.29) можна перетворити так:

$$\theta_{H_B} = \theta_{ст} \cdot \frac{L}{l_{сер}};$$

$$m_{H_B} = m_{ст} \cdot \sqrt{\frac{L}{l_{сер}}}.$$

Позначимо  $\frac{\theta_{ст}}{l_{сер}} = \tau_{h_{км}}$  та  $\frac{m_{ст}}{\sqrt{l_{сер}}} = \mu_{h_{км}}$ , тоді остаточно маємо:

$$\theta_{НВ} = \tau_{h_{км}} L; \quad (7.30)$$

$$m_{НВ} = \mu_{h_{км}} \cdot \sqrt{L}. \quad (7.31)$$

Величини  $\tau_{h_{км}}$  і  $\mu_{h_{км}}$  є систематичною і середньоквадратичною похибками перевищення, за ходом довжиною 1 км. Це видно, якщо підставити у вирази  $L = 1$  км. Ці величини називають коефіцієнтом систематичного і коефіцієнтом випадкового впливу у геометричному нівелюванні, а також кілометричною систематичною похибкою та кілометричною СКП нівелювання.

Розглянемо задачу визначення накопиченої погрішності у лінійних вимірах. Нині у геодезичному виробництві застосовують два типи лінійних вимірів, що істотно відрізняються один від одного за принципом вимірів:

– безпосереднє вимірювання ліній з використанням мірного приладу, який укладають у створ вимірюваної лінії, зокрема це виміри, що виконують рулеткою, мірною стрічкою або проволокою;

– непрямі виміри, що пов'язані з вимірюванням часу проходження сигналу від приладу до відбивача та назад, до яких належать виміри за допомогою світло- або радіовіддалемірів.

Вказані типи вимірів відрізняються один від одного за характером накопичення погрішностей.

Розглянемо безпосереднє вимірювання ліній. Процес виміру лінії стрічкою (проволокою, рулеткою) за власною структурою дуже наближений до геометричного нівелювання, в обох випадках остаточної результат отримують як суму окремих елементів, тобто перевищень на станціях нівелірного ходу, або довжин відрізків між штативами під час виміру довжини лінії проволокою, або довжини відрізків між шпильками під час виміру лінії мірною стрічкою. Однаковий характер процесів виміру визначає однотипний характер накопичення погрішностей вимірів. Тому для лінії  $S$ , що виміряна стрічкою  $l$  та обчислена за формулою  $S = l \cdot n$ , систематичну і середню квадратичну погрішності розраховують за формулами:

$$\theta_S = \theta_l \cdot n; \quad m_S = m_l \cdot \sqrt{n}, \quad (7.32)$$

де  $\theta_l$  – систематична погрішність одного укладання стрічки;

$m_l$  – СКП одного укладання стрічки;

$n$  – кількість укладань стрічки у створі вимірюваної лінії.

Як і у нівелірних роботах, погрішності вимірів ліній можна представити з використанням довжини лінії. Для цього у формулах (7.32) замість  $n$  потрібно підставити його вираз через  $S$ . Тоді маємо:

$$\theta_S = \theta_l \cdot \frac{S}{l}; \quad m_S = m_l \cdot \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{l}}. \quad (7.33)$$

Якщо у формулах (7.31) ввести наступні позначення, отримаємо:

$$\tau_S = \frac{\theta_l}{l}; \quad \mu_S = \frac{m_l}{\sqrt{l}}. \quad (7.34)$$

Отже, остаточно вирази (7.30) матимуть вигляд:

$$\theta_S = \tau_S \cdot S; \quad m_S = \mu_S \cdot \sqrt{S}. \quad (7.35)$$

Величини  $\tau_S$  та  $\mu_S$  є відповідно систематичною та середньою квадратичною похибками виміру лінії довжиною у один метр. Іноді ці величини називають **коефіцієнтом систематичного і коефіцієнтом випадкового впливу** у лінійних вимірах.

Фізична основа лінійних вимірів довжин ліній за допомогою світло- та радіодалекомірами істотно відрізняється від вимірів, що виконують безпосередньо за методом «нарощення», коли остаточної результат є сумою окремих елементарних довжин, які вимірювали безпосередньо.

У світло- та радіовіддалемірних вимірах фіксується час проходження сигналу від приладу до відбивача і назад. Тому точність остаточної результату істотно визначається точністю виміру відрізка часу, що не завжди пов'язане із довжиною цього відрізка. Але у практиці світло- і радіодалекомірних вимірів для конкретного типу приладів в дуже широкому діапазоні довжин ліній ці виміри можна вважати рівноточними. Досить якісні характеристики точності можна отримати за паспортними даними вимірювального приладу.

### Запитання для самоперевірки:

1. Як накопичуються систематичні похибки при передачі дирекційних кутів?
2. Як накопичуються випадкові похибки при передачі дирекційних кутів?
3. Виміряні дві величини, потім обчислені їхня сума і різниця. Як співвідносяться їхні СКП?
4. Що є спільним у законі накопичення випадкових погрешностей при передачі дирекційного кута та передачі висот методом геометричного нівелювання?
5. Охарактеризуйте поведінку випадкових та систематичних погрешностей при обчисленні середньоарифметичного ряду рівноточних вимірів однієї величини?
6. Лінія ходу вимірюється мірною стрічкою. Як накопичуються систематичні та випадкові погрешності при такому вимірюванні?
7. Два результати вимірів однієї величини містять однакові систематичні похибки та характеризуються одним и тим самим СКП. Чому дорівнюватимуть систематична похибка та СКП різниці цих результатів вимірів?
8. Поясніть, що таке «коефіцієнт випадкового впливу» в геометричному

нівелюванні?

9. Поясніть, що таке «коефіцієнт випадкового впливу» у лінійних вимірюваннях?

10. Чому в тригонометричному нівелюванні обмежують коливання місця нуля?

11. Поясніть, як накопичуються систематичні та випадкові похибки, якщо сумують рівноточні доданки?

## **Тема 8 МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ОДНІЄЇ ВЕЛИЧИНИ**

Проста арифметична середина та її властивості. Зрівнювання ряду результатів вимірів однієї величини. Апостеріорне оцінювання точності при опрацюванні ряду рівноточних вимірів. Послідовність математичної обробки ряду рівноточних вимірів однієї величини. Похибки заокруглення.

### **8.1 Проста арифметична середина та її властивості**

Результати вимірів вважають рівноточними, якщо вони мають практично одну й ту саму середню квадратичну похибку, а отже виконані за однакових умов. Недотримання хоча б однієї з умов, у яких проведені виміри, робить їхні результати нерівноточними.

Нехай є ряд результатів незалежних рівноточних вимірів  $x_1, x_2, \dots, x_n$  однієї величини  $X$ , істинне значення  $L$  якої невідоме. Задача полягає у математичному опрацюванні отриманого ряду вимірів, що передбачає вирішення двох задач – задачі зрівнювання та задачі апостеріорного оцінювання точності.

Задача зрівнювання полягає у визначенні щонайкращого у певному змісті наближення до істинного значення  $L$  вимірюваної величини  $X$ .

Задача апостеріорного оцінювання точності (a'posteriori – від лат. після досліду) полягає у обчисленні характеристик точності польових вимірів та зрівняного значення вимірюваної величини  $X$ .

Метод зрівнювання результатів вимірів однієї величини ґрунтується на принципі **арифметичної середини**, який полягає у тім, що середнє арифметичне отриманих результатів рівноточних вимірів є найбільш надійним значенням вимірюваної величини  $X$ . Найбільш надійне значення розуміють як найбільш імовірне. З теорії похибок відомо, що найкраще наближення до істинного значення повинне мати наступні три властивості:

– властивість спроможності;



- властивість незміщеності;
- властивість ефективності.

Якщо  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  – ряд незалежних результатів рівноточних вимірів однієї величини  $X$ , то щонайкращим її наближенням до дійсного значення  $L$  є проста арифметична середина, яку обчислюють за формулою:

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}, \quad (8.1)$$

де  $n$  – кількість рівноточних вимірів, а квадратні дужки означають суму результатів вимірів у символах Гаусса.

Покажемо, що якщо результати вимірів вільні від систематичних похибок, то проста арифметична середина цих результатів, обчислена за формулою (8.1), при збільшенні кількості вимірів у границі наближується до дійсного значення вимірюваної величини  $L$ , тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L - \bar{x}) = 0. \quad (8.2)$$

Враховуючи, що погрішність результату виміру  $x_i$  є різницею між цим результатом та істинним значенням  $L$  вимірюваної фізичної величини, запишемо:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= x_1 - L \\ \delta_2 &= x_2 - L \\ \dots\dots\dots \\ \delta_n &= x_n - L \end{aligned} \right\}. \quad (8.3)$$

Просумуємо праві та ліві частини виразів (8.3) та, розділивши їхні суми на  $n$ , отримаємо

$$\frac{[\delta]}{n} = \frac{[x]}{n} - L,$$

або, враховуючи вираз (8.1), запишемо отриману рівність у такому вигляді:

$$\frac{[\delta]}{n} = \bar{x} - L. \quad (8.4)$$

Оскільки при  $n \rightarrow \infty$  ліва частина виразу (8.4) на підставі властивості компенсації випадкових похибок наближається до нуля, права його частина так само наближається до нуля, що доводить справедливість виразу (8.2). Та у свою чергу очевидно, що проста арифметична середина  $\bar{x}$ , визначена за формулою (8.1), є спроможною.

Отже, середнє арифметичне результатів рівноточних вимірів однієї величини має тенденцію прагнути до істинного значення  $L$  цієї величини при необмеженому зростанні числа вимірів  $n$ .

На практиці число вимірів завжди обмежено, і величина  $\delta$ , що називають істинною похибкою арифметичного середнього, визначає ступінь наближення отриманого середнього арифметичного  $\bar{x}$  до істинного значення вимірюваної величини  $L$  за відсутності грубих і систематичних похибок.

Властивість незміщеності означає, що середнє арифметичне  $\bar{x}$  не містить систематичної помилки.

Покажемо, що якщо арифметичне середнє отримане з результатів вимірів, вільних від систематичних похибок, то і сама вона не містить систематичної похибки. Припустимо зворотнє, тобто що результати вимірів містять систематичні похибки  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n$ . Тоді можна записати:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - L &= \theta_1 + \delta_1 \\ x_2 - L &= \theta_2 + \delta_2 \\ \dots &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n - L &= \theta_n + \delta_n \end{aligned} \right\} .$$

Просумуємо праві та ліві частини отриманих рівнянь та розділимо їх на  $n$ , отримаємо:

$$L - \bar{x} = \frac{[\theta]}{n} + \frac{[\delta]}{n}.$$

Права частина отриманого рівняння містить два доданки, які є систематичною та випадковою похибками арифметичного середнього. Звідси випливає, що оскільки систематичні похибки дорівнюють нулю  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = 0$ , то і доданок  $\frac{[\theta_i]}{n}$  дорівнюватиме нулю, отже арифметичне середнє є незміщеним.

Отже, за відсутності систематичних похибок арифметична середина  $L$  є не тільки спроможною, але й незміщеною оцінкою величини  $X$ . Таку оцінку в геодезії називають **найімовірнішим значенням** вимірюваної величини.

За наявності систематичних похибок арифметична середина так само міститиме систематичну похибку

$$\theta_L = \frac{[\theta_i]}{n},$$

а тому вона не матиме властивостей спроможності та незміщеності. У цьому випадку арифметична середина  $L$ , хоча і дасть щонайкраще з можливих наближень до  $X$ , але не буде її найімовірнішим значенням.

Властивість ефективності означає, що середнє арифметичне  $\bar{x}$  має найменшу дисперсію, тобто є щонайменше випадковою.

Покажемо, що арифметична середина результатів незалежних рівноточних вимірів має середнє квадратичне відхилення, яке у  $\sqrt{n}$  разів менше за середнє квадратичне відхилення  $\sigma$  цих вимірів.

подамо вираз (8.1) у наступному вигляді:

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n} = L = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_i}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Скористаємось формулою основної теореми теорії похибок (7.2)

$\sigma_y^2 = C_1^2 \sigma_1^2 + C_2^2 \sigma_2^2 + \dots + C_n^2 \sigma_n^2$  та визначимо дисперсію  $\bar{x}$  як дисперсію лінійної функції  $n$  аргументів, причому дисперсії доданків  $\sigma_{x_i}^2$  відомі і дорівнюють одна одній  $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \dots = \sigma_{x_n}$ , отримаємо:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_n^2 = \frac{n}{n^2} \sigma^2,$$

звідки

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma \sqrt{\frac{n}{n^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (8.5)$$

Ділянка розсіювання похибок  $\delta_i$  буде тим вужча, чим більша кількість вимірів  $n$ . Але підвищення точності арифметичного середнього відбувається істотно повільніше за збільшення числа вимірів. Щоб підвищити точність  $\bar{x}$  у два рази, потрібно повторити виміри чотири рази, для підвищення точності арифметичного середнього у 10 разів потрібно повторити виміри 100 разів.

Проте зростання точності відбуватиметься тільки за відсутності у результатах вимірів грубих і систематичних похибок. На практиці же усунути систематичні похибки повністю неможливо, хоча б тому, що залишаться непоміченими малі систематичні похибки, величина яких має один порядок із випадковими похибками. Одночасно більша кількість вимірів потребує більших витрат часу, а відповідно зросте період часу, протягом якого умови вимірів можуть змінитися і тим порушиться рівноточність вимірів.

Ці міркування дають підстави вважати, що недоцільно виконувати понад 10–15 вимірів. Якщо підвищення точності середнього арифметичного у 3–4 рази недостатньо, то треба покращити умови виконання геодезичних робіт, застосувавши досконаліші прилади та методи вимірів. Малочутливий прилад не дозволить отримати високоточний результат навіть при величезній кількості повторних вимірів.

## 8.2 Зрівнювання ряду результатів вимірів однієї величини

Звернемося до вирішення задачі зрівнювання, яка полягає у визначенні щонайкращого наближення до істинного значення  $L$  вимірюваної величини  $X$ .

Зрівнювання результатів вимірів дозволяє істотно послабити вплив випадкових похибок. Результати вимірів зрівнюють шляхом введення до обчислень поправок. **Поправками**  $v_i$ , або залишковими відхиленнями, називають різниці між арифметичним середнім та кожним з вимірених значень  $x_i$ .

Як точну поправку  $\bar{v}$  розуміють величину, додавши яку до арифметичного середнього  $\bar{x}$ , отримують дійсне значення  $L$ , тобто

$$\bar{x} + \bar{v} = L. \quad (8.6)$$

Точне значення поправки  $\bar{v}$  за абсолютною величиною дорівнює похибці  $L - \bar{x}$ , але протилежне їй за знаком:

$$\bar{v} = -(\bar{x} - L) .$$

Для ряду  $n$  рівноточних вимірів отримаємо співвідношення:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = \bar{x} - x_1 \\ v_2 = \bar{x} - x_2 \\ \dots\dots\dots \\ v_n = \bar{x} - x_n \end{array} \right\} , \quad (8.7)$$

просумуємо ліві та праві частини співвідношень та отримаємо таке:

$$[v] = n \cdot \bar{x} - [x]. \quad (8.8)$$

Замість  $\bar{x}$  підставимо його значення (8.1)  $\bar{x} = \frac{[x]}{n}$ :

$$[v] = n \cdot \frac{[x]}{n} - [x],$$

отже отримали, що  $[v] = 0$ . Ця рівність виражає додаткову (четверту) властивість середнього арифметичного.

Алгебраїчна сума поправок  $v$  дорівнює нулю за будь-якої кількості вимірів.

Цю властивість застосовують для контролю правильності обчислення поправок  $v$  та середнього арифметичного  $\bar{x}$ .

Зазвичай величину  $\bar{x}$  обчислюють з одним надлишковим десятковим знаком щодо виміряних даних. Якщо при цьому приходиться заокруглювати значення  $\bar{x}$ , то рівність  $[v] = 0$  точно не задовольняється. Нехай похибка  $\beta$  заокруглення величини  $\bar{x}$  дорівнює

$$\beta = X' - \bar{x},$$

де  $\bar{x}$  – точне значення середнього арифметичного;

$X'$  – заокруглене значення середнього арифметичного.

Виразимо заокруглене значення як  $X' = \beta + \bar{x}$ . Підставимо у співвідношення (8.8)  $[v] = n \cdot \bar{x} - [x]$  замість  $\bar{x}$  його заокруглене значення, отримаємо:

$$[v] = n \left( \frac{[x]}{n} + \beta \right) - [x],$$

звідки

$$[v] = n \cdot \beta. \quad (8.9)$$

При обмеженій кількості вимірів  $n$  поправки  $v$ , що характеризують розсіювання результатів вимірів навколо арифметичного середнього  $\bar{x}$ , застосовують для оцінювання точності результатів вимірів та отриманих на їх підставі висновків.

Ще одну (п'яту) властивість середнього арифметичного  $\bar{x}$  застосовують для контролю правильності обчислення поправок  $v$  та середнього арифметичного  $\bar{x}$ .

Сума квадратів найімовірніших поправок, отриманих з арифметичної середини, завжди менша за суму квадратів наближених поправок, отриманих для будь-якої іншої функції тих самих результатів вимірів, тобто  $[v^2] = \min$ .

Знання та розуміння розглянутих властивостей простої арифметичної середини дозволяє правильно організувати математичну обробку рівноточних геодезичних вимірів.

### 8.3 Апостеріорне оцінювання точності при опрацюванні ряду рівноточних вимірів

Задача апостеріорного оцінювання точності (a'posteriori – від лат. Після досліду) полягає у обчисленні характеристик точності польових вимірів та зрівняного значення вимірюваної величини  $X$ .

Отже, ми показали, що найкращою оцінкою для математичного сподівання є проста арифметична середина (8.1)

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}.$$

Як виходить з теорії похибок вимірів, для оцінювання точності застосовують характеристики розсіювання ряду виміряних значень. Мірою розсіювання результатів вимірів  $x_1, x_2, \dots, x_n$  величини  $X$  щодо середнього арифметичного є дисперсія  $\sigma^2$ . Для її оцінки  $m$  застосовують формулу:

$$m^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}. \quad (8.10)$$

Чим більше дисперсія, тим далі від арифметичної середини розкидані результати вимірів. Але будь-які значення числових характеристик, обчислені на підставі обмеженого числа вимірів, є випадковими величинами на відміну від самих числових характеристик, значення яких не випадкові. Необхідно, щоб похибка від заміни дійсного значення числової характеристики його наближеною оцінкою була мінімальною. Цю вимогу задовольняють оцінки числових характеристик, які є спроможними, незміщеними та ефективними.

Покажемо, що формула (8.10) дає спроможну оцінку дисперсії ряду результатів вимірів.

Статистична оцінка дисперсії є середнім арифметичним квадрата центрованої випадкової величини  $X$  і може бути визначена як різниця другого початкового моменту та квадрата математичного сподівання:

$$m^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}^2}{n} - 2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i \bar{x}}{n} = \alpha_2^* - (\bar{x})^2,$$

де перший доданок – середнє арифметичне квадратів елементів ряду вимірів, що при  $n \rightarrow \infty$  збігається за імовірністю до другого початкового моменту  $\alpha_2^*$ . Другий доданок – квадрат середнього арифметичного  $\bar{x}$ . Третій доданок – подвоєна сума

добутків арифметичного середнього та елементів ряду вимірів, поділена на  $n$ , яка за  $n \rightarrow \infty$  дорівнює нулю.

Отже, уся величина  $m$ , обчислена за статистичними даними, при  $n \rightarrow \infty$  збігається за імовірністю до дисперсії:

$$\sigma^2 = D_x = \alpha_2 - (\bar{x})^2.$$

Таким чином, вибіркова дисперсія, що визначена за формулою (8.10), є спроможною.

Нагадаємо, що оцінка параметра  $a^*$  є незміщеною, тобто не містить систематичної помилки, якщо її математичне сподівання дорівнює оцінюваному параметру  $a$ :

$$M[a^*] = a.$$

Розглянемо оцінку дисперсії  $m$  та переконаємось, що її обчислення за формулою (8.10) дає незміщену оцінку. Знайдемо її математичне сподівання:

$$\begin{aligned} M[m^2] &= M[\alpha_2^* - (\bar{x})^2] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2\right] = \\ &= M\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}\right] - M\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n^2}\right] - 2M\left[\frac{\sum_{i < j} x_i x_j}{n^2}\right], \end{aligned}$$

де перший доданок – математичне сподівання оцінки другого початкового моменту  $\alpha_2^*$ ; другий доданок – математичне сподівання оцінки другого початкового моменту  $\alpha_2^*$ , розділеного на  $n$ ; третій доданок – являє собою оцінку другого змішаного моменту  $\alpha_2^*$ , що дорівнює нулю, оскільки значення  $x_i$  незалежні. Другий і третій доданки отримані шляхом піднесення у квадрат арифметичного середнього за формулою:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Тоді одержимо, з огляду на те, що генеральна середня дорівнює нулю,

$$M[m^2] = \frac{n}{n} M\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}\right] - \frac{1}{n} M\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}\right] = \frac{n-1}{n} M\left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}\right] = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

Отже, математичне сподівання оцінки дисперсії, визначеної за формулою (8.10) не дорівнює дисперсії, тобто є зміщеною її оцінкою:

$$M[m^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

Застосовуючи цю оцінку, ми будемо робити систематичну помилку в меншу сторону. Щоб від неї позбутися, необхідно ввести виправлення – помножити оцінку дисперсії, отриману за формулою (8.10), на  $\frac{n}{n-1}$ . Незміщену оцінку дисперсії  $m$  знаходять за формулою:

$$m^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (8.11)$$

Отже, ми показали, що найкращою оцінкою для математичного сподівання є проста арифметична середина (8.1), а для дисперсії одного виміру – квадрат середньої квадратичної похибки, що визначають за формулою Бесселя:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1}, \quad (8.12)$$

де  $v_i = \bar{x} - x_i$  – відхилення від арифметичної середини, що мають такі властивості:

$$[v] = 0 \quad \text{та} \quad [v^2] = \min.$$

Величина  $\bar{x}$  має середню квадратичну похибку  $m_{\bar{x}}$  (або  $M$ ), яку обчислюють за формулою:

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (8.13)$$

Спільний вплив випадкових похибок та постійної систематичної похибки можна виразити формулою:

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{m^2}{n} + \theta^2}, \quad (8.14)$$

де  $\theta$  – систематична похибка.

Середня квадратична похибка СКП, як впливає з формули Бесселя, дорівнює:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \quad (8.15)$$

причому, вона (середня квадратична похибка) характеризується власною середньою квадратичною похибкою (СКП СКП), яку обчислюють за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (8.16)$$

#### **8.4 Послідовність математичної обробки ряду рівноточних вимірів однієї величини**

Мета кожної обробки вимірних даних полягає у визначенні шляхом зрівнювальних обчислень найбільш надійного значення вимірюваної величини, оцінюванні точності результатів безпосередніх вимірів та отриманого з них висновку, а також у визначенні надійності знайдених середніх квадратичних похибок.

Порядок обробки результатів ряду рівноточних вимірів однієї величини наступний.

1. Знаходять найбільш надійне значення вимірюваної величини за правилом арифметичної середини. Для полегшення обчислень величини  $\bar{x}$  вводять її наближене значення  $x_0$ . Як  $x_0$  зручніше взяти найменший результатів вимірів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Тоді обчислені залишки  $\varepsilon_i$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= x_1 - x_0 \\ \varepsilon_2 &= x_2 - x_0 \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon_n &= x_n - x_0 \end{aligned} \right\}$$

будуть додатними, а деякі з них дорівнюватимуть 0. Складемо рівності

$$[\varepsilon] = [x] - n \cdot x_0,$$

звідки отримаємо

$$\frac{[x]}{n} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}, \quad \text{або} \quad \bar{x} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}.$$

2. Обчислюють поправки  $v$ :

$$v_i = \bar{x} - x_i.$$

Значення поправок  $v$  обчислюють з однаковим числом десяткових знаків, причому беруть стільки десяткових знаків, щоб найбільші з  $v$  мали дві значущі цифри, а якщо їхні значення починаються з одиниці, – три значущі цифри.

Знайдені значення поправок  $v$  та арифметичної середини  $\bar{x}$  перевіряють за рівністю

$$[v] = 0.$$

Якщо у процесі обчислення  $\bar{x}$  виникла похибка заокруглення, то для перевірки правильності обчислення  $v_i$ , та  $\bar{x}$  застосовують формулу (8.9)

$$[v] = n \cdot \beta.$$

3. Визначають  $[v^2]$ .

Отримаємо контрольні формули для перевірки розрахунку  $[v^2]$ . Оскільки  $v_i = \bar{x} - x_i$ , та одночасно  $x_i = x_0 + \varepsilon_i$ , то  $[v^2] = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = v_1(\bar{x} - x_0 - \varepsilon_1) + v_2(\bar{x} - x_0 - \varepsilon_2) + \dots + v_n(\bar{x} - x_0 - \varepsilon_n) = [v]\bar{x} - [v]x_0 - [\varepsilon v]$ , або  $[v^2] = -[\varepsilon v]$ .

Проте за наявності похибки заокруглення  $\beta$  такий контроль не є досить чітким. Краще для контролю обчислення  $[v^2]$  скористатися формулою

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}.$$

4. Обчислюють середню квадратичну похибку окремого виміру за формулою (8.15):

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

5. Якщо величину  $m$  обчислюють за результатами малої кількості вимірів, то необхідно ще визначити похибку самої похибки за формулою (8.16):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

Треба мати на увазі, що навіть при  $n = 51$   $m_m$  становить 10 % величини  $m$ , а при 9 вимірах  $m_m = 0,25m$ .

6. Обчислюють середню квадратичну похибку арифметичної середини за формулою (8.13):



$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

7. Визначають надійність величини  $m_{\bar{x}}$ , для чого обчислюють її похибку також за формулою (8.13):

$$m_{m_{\bar{x}}} = \frac{m_m}{\sqrt{n}}$$

Записують остаточний результат опрацювання рівноточних вимірів так:

$$\bar{x} = 25 \pm m_{\bar{x}}, \quad m_{m_{\bar{x}}} = 1,1.$$

### **Запитання для самоперевірки:**

1. Які завдання вирішують під час математичної обробки рядів вимірів?
2. Що включає до себе завдання зрівнювання результатів вимірів однієї величини та за якими формулами завдання вирішують?
3. Охарактеризуйте властивості спільної арифметичної середини?
4. Як здійснюють контроль зрівнювання при математичній обробці рядів вимірів?
5. Як розраховують вагу спільної арифметичної середини?
6. Чи можна вважати, що середнє арифметичне є частковим випадком спільної арифметичної середини?
7. Що станеться із рядом істинних погрішностей, якщо кожен з них помножити на корінь з її ваги?
8. За якою формулою можна обчислити СКП одиничної ваги за наявності ряду істинних погрішностей, ваги яких відомі?
9. За якою формулою можна обчислити СКП спільної арифметичної середини, якщо відома СКП одиничної ваги?
10. Як обчислюють поправки, що отримані із зрівнювання та яка їхня властивість?
11. Як оцінити надійність СКП спільної арифметичної середини?

## **Тема 9 МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ОДНІЄЇ ВЕЛИЧИНИ**

Вага як спеціальна міра відносної точності результатів нерівноточних вимірів. Загальна середньозважена арифметична середина. Апостеріорна оцінка точності при опрацюванні нерівноточних вимірів. Середня квадратична похибка одиниці ваги. Порядок математичної обробки ряду нерівноточних вимірів однієї величини.

### **9.1 Вага як міра відносної точності результатів нерівноточних вимірів**

Часто буває так, що виміри виконують за неоднакових умов, унаслідок чого їхні результати відрізняються точністю, тобто характеризуються різними середніми квадратичними похибками. Такі виміри називають нерівноточними.

Нерівноточні результати отримують, зокрема, у результаті вимірів приладами різної точності, за різної кваліфікації виконавців, за різних методів виміру, за неоднакових зовнішніх умов та ін. Очевидно, що при спільному опрацюванні результатів нерівноточних вимірів необхідно, щоб точніші результати вимірів мали більший вплив, тобто мали більшу вагу як достовірніші, а менш точні – відповідно менший вплив на остаточний результат опрацювання. Тому різну значущість вимірів, різних за точністю, враховують під час спільного опрацюванні їхніх результатів шляхом введення допоміжних чисел – ваг.

Чим менша середня квадратична похибка результату виміру, тим він надійніше і тим більшою має бути його вага. Вага нібито виражає міру надійності певного результату під час спільного опрацювання порівняно з іншими результатами. Очевидно, що ваги окремих результатів вимірів доцільно застосовувати як певні коефіцієнти при цих результатах вимірів. При точніших результатах – більші коефіцієнти, при менш точних – відповідно менші. Тоді чим більше вага одного результату виміру, тим точніше цей вимір порівняно з іншими. Цей підхід призводить до розуміння, що ваги мають бути числами, які зворотно пропорційні дисперсіям відповідних результатів вимірів.

Дійсно, якщо є ряд вимірів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , кожен з яких характеризується дисперсією  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$  то вагу  $i$ -го результату виміру розраховують за формулою:

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}, \quad (9.1)$$

де  $\sigma_i^2$  – дисперсія  $i$ -го виміру;

$k$  – певне довільне число.

З (9.1) можна отримати такі співвідношення:

$$k = p_i \cdot \sigma_i^2, \text{ тобто } k = p_1 \cdot \sigma_1^2 = p_2 \cdot \sigma_2^2 = \dots = p_n \cdot \sigma_n^2, \quad (9.2)$$

або  $p_i \cdot \sigma_i^2 = p_j \cdot \sigma_j^2$ , звідки у свою чергу видно, що

$$p_i = p_j \frac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2}, \quad \text{або} \quad \sigma_i = \sigma_j \sqrt{\frac{p_j}{p_i}}. \quad (9.3)$$

Вага показує, у скільки разів дисперсія одного виміру більша або менша за іншу. Вибір коефіцієнта пропорційності  $k$  доцільно обрати таким, щоб ваги  $p_i$  були найближчими до одиниці, тому його зазвичай приймають рівним дисперсії одного з результатів виміру  $\sigma_i^2$ , отже тоді вага цього результату дорівнюватиме одиниці. Дисперсію результату виміру, що має вагу, яка дорівнює одиниці, позначають символом  $\sigma_0^2$ . Тоді для будь-якого  $p_i$  рівняння (9.1) можна записати так:

$$p_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}; p_2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2}; \dots; p_n = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2}. \quad (9.4)$$

Величину  $\sigma_0^2$  називають **середнім квадратичним відхиленням (СКВ) одиниці ваги**, розуміючи його як «середнє квадратичне відхилення виміру, вага якого дорівнює одиниці», отже,

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}.$$

Проте, оскільки дисперсія  $\sigma_0^2$ , визначена з дослідних даних, невідома, ми застосовуємо її статистичну оцінку. Оцінку СКВ одиниці ваги позначають  $\mu$  та називають «середньою квадратичною похибкою (СКП) одиниці ваги». Вона дозволяє порівняти точність рядів нерівноточних вимірів.

Зауважимо, що, як впливає з наведених вище міркувань і виразів (9.1) та (9.4), результати рівноточних вимірів, які мають однакові середні квадратичні відхилення, тобто  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n$ , мають однакові ваги, які можна прийняти рівними одиниці  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$ .

Очевидно, що результати нерівноточних вимірів, отримані за різних умов, мають нерівні ваги.

Зазвичай у практиці СКВ залишаються невідомими, тому для визначення ваг застосовують їхні оцінки, тобто СКП. Тоді формула (9.1) набуває вигляд:

$$p_i = \frac{k}{m_i^2} = \frac{\mu^2}{m_i^2}. \quad (9.5)$$

## 9.2 Вага функцій результатів нерівноточних вимірів

У практиці геодезичних робіт часто виникає потреба визначення ваги функції результатів вимірів. Це завдання вирішують за допомогою двох теорем теорії похибок, якими є теореми 7.1 та 7.2.

Нехай  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – результати незалежних вимірів, отримані з вагами, що відповідно дорівнюють  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Тоді лінійна функція цих результатів вимірів  $y = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ , де  $C_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – постійні величини, має зворотну вагу, що обчислюють за формулою:

$$\frac{1}{p_y} = \frac{C_1^2}{p_1} + \frac{C_2^2}{p_2} + \dots + \frac{C_n^2}{p_n}. \quad (9.6)$$

Покажемо це. Відповідно до теореми 7.1 для функції  $y = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$  можна записати співвідношення для її дисперсії:

$$\sigma_y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \dots + C_n^2\sigma_n^2. \quad (9.7)$$

За визначенням ваги запишемо, що

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}, \quad \text{або} \quad \sigma_i^2 = \frac{k}{p_i}. \quad (9.8)$$

Підставимо вираз (9.8) до (9.7), отримаємо

$$\frac{k}{p_y} = \frac{kC_1^2}{p_1} + \frac{kC_2^2}{p_2} + \dots + \frac{kC_n^2}{p_n} . \quad (9.9)$$

Скоротимо обидві частини рівності (9.9) на величину  $k$  та отримаємо шукану рівність (9.6).

Нехай  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – результати незалежних вимірів, ваги яких відповідно дорівнюють  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Тоді диференційована функція цих результатів вимірів  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  має зворотну вагу, що обчислюють за формулою:

$$p_y^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 p_1^{-1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 p_2^{-1} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 p_n^{-1} . \quad (9.10)$$

Перевіримо, чи це так. Відповідно до теореми 7.2 для функції  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можна записати вираз для її дисперсії:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2 . \quad (9.11)$$

За визначенням ваги маємо:

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}, \text{ або } \sigma_i^2 = \frac{k}{p_i} = k \cdot p_i^{-1} . \quad (9.12)$$

Підставимо вираз (9.12) до (9.11), отримаємо:

$$k \cdot p_y^{-1} = k \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot p_1^{-1} + k \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot p_2^{-1} + \dots + k \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \cdot p_n^{-1} . \quad (9.13)$$

Скоротимо обидві частини рівності (9.13), на величину  $k$  та отримаємо шукану рівність (9.10).

### 9.3 Розрахунок ваг результатів у певних видах вимірів

На підставі отриманих виразів (9.6) та (9.10) щодо визначення ваг функцій нерівноточних вимірів можна отримати співвідношення для визначення ваг у певних геодезичних задачах.

**Кутові виміри.** Розглянемо передачу дирекційного кута на  $n$ -у лінію теодолітного ходу. Нехай у теодолітному ході рівноточно виміряні праві кути  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ . Потрібно обчислити вагу  $n$ -ї лінії ходу за умови, що дирекційний кут  $\alpha_{AB}$  вихідної лінії  $AB$  виміряний точно.

Оскільки кути виміряні рівноточно, усі виміряні значення мають однакові ваги, що дорівнюють одиниці:  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p_\beta = 1$ .

Дирекційний кут останньої лінії теодолітного ходу обчислимо за відомою формулою:

$$\alpha_n = \alpha_{AB} + 180^\circ \cdot n - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_n . \quad (9.14)$$

Враховуючи, що доданок  $\alpha_{AB} + 180^\circ \cdot n$  у (9.14) є точною величиною, дисперсія якої дорівнює нулю і, відповідно, зворотна вага так само є нульовою, запишемо вираз зворотної ваги дирекційного кута останньої лінії теодолітного ходу, застосовуючи формулу 9.6:

$$\frac{1}{p_{\alpha_n}} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^2}{1} + \dots + \frac{(-1)^2}{1} = n,$$

звідки:

$$p_{\alpha_n} = \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad p_{\beta} = 1. \quad (9.15)$$

Скористаємось властивістю ваг та помножимо усі ваги у рівностях (9.15) на число  $k > 0$ , отримаємо

$$p_{\alpha_n} = \frac{k}{n} \quad \text{при} \quad p_{\beta} = k. \quad (9.16)$$

З (9.16) випливає, що величиною, яка має одиничну вагу, є дирекційний кут, отриманий за ходом у  $k$  поворотних точок. Це є очевидним, якщо у формулі (9.16) замість  $n$  підставити  $k$ .

**Отже, вибір коефіцієнта  $k$  визначає вибір величини, вага якої дорівнює одиниці.**

Отримані висновки є справедливими і у випадку, якщо у теодолітному ході вимірюють ліві кути. При цьому відбувається зміна знаків при коефіцієнтах  $C_i$  формули зворотної ваги, але це не впливає на остаточний результат, оскільки при обчисленні зворотної ваги функції усі  $C_i$  підносять у квадрат.

Аналогічно розраховують вагу суми кутів замкненого багатокутника і вагу кутової нев'язки в сумі кутів теодолітного ходу:

$$\sum \beta_{np} = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n; \quad (9.17)$$

$$f_{\beta} = \sum \beta_{np} - \sum \beta_{теор} = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n - \sum \beta_{теор}.$$

Вирази (9.17) відрізняються від функції (9.14) тільки постійними доданками, що не впливають на визначення ваг. Отже, вирази для ваги суми кутів та кутової нев'язки мають вигляд

$$p_{\alpha_n} = p_{\sum \beta} = p_{f_{\beta}} = \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad p_{\beta} = 1, \quad (9.18)$$

або

$$p_{\alpha_n} = p_{\sum \beta} = p_{f_{\beta}} = \frac{k}{n} \quad \text{при} \quad p_{\beta} = k. \quad (9.19)$$

**Лінійні виміри.** Нехай мірною стрічкою виміряно  $n$  ліній та отримані результати вимірів  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Потрібно обчислити ваги результатів виміру цих ліній за умови, що усі виміри виконані з одним і тим самим коефіцієнтом випадкового впливу  $\mu_s = \mu$  (7.34).

Дисперсії вимірів цих ліній відповідно до формули (7.35) дорівнюватимуть  $\sigma_1^2 = \mu^2 \cdot S_1, \sigma_2^2 = \mu^2 \cdot S_2, \dots, \sigma_n^2 = \mu^2 \cdot S_n$ . Якщо прийняти як дисперсію одиничної ваги величину  $\sigma_0^2 = C \cdot \mu^2$ , то ваги вимірних значень ліній дорівнюватимуть

$$p_1 = \frac{c}{S_1}, p_2 = \frac{c}{S_2}, \dots, p_n = \frac{c}{S_n}, \quad (9.20)$$

тобто вага виміряного мірною стрічкою значення лінії буде зворотно пропорційною довжині цієї лінії. Причому величиною, що має одиничну вагу, є

результат виміру лінії довжиною  $C$  метрів. Щоб переконатися в цьому, треба підставити відповідне значення довжини лінії до формули ваги лінії.

Цей висновок є справедливим так само і для результатів вимірів ліній за допомогою дротів або рулеток, але пропонована методика розрахунку ваг вимірюваних значень довжин ліній не придатна при радіо- та світловіддалемірних вимірах.

Примітка. Обчислення ваг вимірюваних значень ліній як величин, що зворотно пропорційні їхній довжині, можливе тільки за умови, що значення вимірів усіх ліній отримані за тією самою методикою, тобто при тому самому значенні  $\mu_s$ .

**Розрахунок ваг у геометричному нівелюванні у випадку пересіченої місцевості.** Нехай за кількома ходами геометричного нівелювання отримані перевищення  $h_1, h_2, \dots, h_N$ , причому число станцій у кожному з ходів дорівнює  $n_1, n_2, \dots, n_N$ . Потрібно розрахувати ваги перевищень за умови, що перевищення на усіх станціях виміряні рівноточно.

Нехай  $m_{cm}^2$  – дисперсія виміру перевищення на станції. Дисперсію одиничної ваги подамо у вигляді  $\mu_0^2 = C \cdot m_{cm}^2$ , де  $C > 0$  – довільна постійна величина. Дисперсії перевищень за ходами на основі формули (7.29) можна подати у вигляді

$$m_i^2 = m_{cm}^2 \cdot n_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді для визначення ваг перевищень за ходами на основі (9.6) можна скористатись співвідношеннями:

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2} = \frac{C \cdot m_{cm}^2}{m_{cm}^2 \cdot n_i} = \frac{C}{n_i}. \quad (9.21)$$

Отже, вага перевищення за ходом геометричного нівелювання на пересіченій місцевості визначається як величина, що зворотно пропорційна числу станцій. Великою, що має одиничну вагу, є перевищення, отримане за ходом у  $C$  станцій. Величину, що має одиничну вагу, визначає вибір коефіцієнта пропорційності.

**Розрахунок ваг у геометричному нівелюванні у випадку рівнинної місцевості.** За кількома ходами геометричного нівелювання, що прокладені на рівнинній місцевості, отримані перевищення  $h_1, h_2, \dots, h_N$ . Довжини ходів відповідно дорівнюють  $L_1, L_2, \dots, L_n$  км. В усіх ходах нівелювання виконувалось в однакових умовах, тобто з однаковими СКП нівелювання на 1 км хода  $\mu_{h_{км}}$ . Тоді дисперсію одиничної ваги можна представити як  $\mu_0^2 = C \cdot \mu_{h_{км}}^2$ , де  $C > 0$  – довільна постійна величина. Дисперсії перевищень за ходами можна представити у вигляді:

$$m_i^2 = \mu_{h_{км}}^2 \cdot L_i, \quad i = \overline{1, N},$$

а тоді ваги перевищень за ходами можна отримати за співвідношеннями:

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2} = \frac{C \cdot \mu_{\text{нкм}}^2}{\mu_{\text{нкм}}^2 \cdot L_i} = \frac{C}{L_i} . \quad (9.22)$$

Отже, вага перевищення за ходом геометричного нівелювання на рівнинній місцевості визначається як величина, що зворотно пропорційна довжині ходу. Великою, що має одиничну вагу, при цьому є перевищення, отримане за ходом довжиною у  $C$  кілометрів.

Як і в попередніх випадках, вибір коефіцієнта пропорційності визначає величину з одиничною вагою.

#### 9.4 Загальна середньозважена арифметична середина

Якщо  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – незалежні результати вимірів однієї і тієї самої величини  $X$ , відносна точність яких характеризується відповідними вагами  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , то за якнайкраще наближення до величини  $X$  приймають загальну арифметичну середньозважену, що визначають як відношення суми добутків вимірних значень та відповідних ваг до суми усіх ваг:

$$\bar{X} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{[px]}{[p]}, \quad (9.23)$$

причому сума усіх ваг  $[p]$  є вагою загальної середньозваженої арифметичної середини  $\bar{X}$ .

Зауважимо, що формулу (9.23) можна застосовувати лише тоді, коли окремі результати вимірів можна порівнювати, тобто коли вони є величинами одного порядку. Не можна усереднювати результати вимірів, що істотно відрізняються умовами отримання, наприклад, не можна усереднювати довжину лінії, виміряну один раз звичайною рулеткою, а другий раз – світлодалекоміром, або величину кута, виміряного один раз технічним теодолітом, а другий раз високоточним теодолітом. Виходячи зі сказаного, на ваги у формулі (9.23) потрібно накладати обмежувачі умови, які можна виразити нерівністю:

$$c_1 \leq p_i \leq c_2, \quad i = \overline{1, n}, \quad (9.24)$$

де  $c_1, c_2$  – певні додатні постійні.

Зазвичай величину  $\bar{X}$  обчислюють з одним залишковим десятковим знаком порівняно з вимірними даними.

Треба відзначити також, що ваги мають відносний характер, їх можна підвищувати та зменшувати у будь-яке число разів (усі одночасно), від цього середня зважена  $\bar{X}$  не зміниться.

Розглянемо, чи задовольняє вимогам спроможності, незміщеності та ефективності нерівноточних вимірів середня зважена  $\bar{X}$ , обчислена за формулою (9.23).

Властивість 1 – **спроможність** полягає у тім, що із збільшенням обсягу вибірки (із збільшенням числа вимірів заданої фізичної величини) середньозважене за імовірністю збігається до істинного значення цієї фізичної величини, тобто  $\bar{X} \rightarrow X$ .

Для математичного обґрунтування цього твердження обчислимо математичне сподівання випадкової величини  $\bar{X}$ :

$$\begin{aligned} M(\bar{X}) &= M\left(\frac{[px]}{[p]}\right) = M\left(\frac{p_1}{[p]}x_1 + \frac{p_2}{[p]}x_2 + \dots + \frac{p_n}{[p]}x_n\right) = \\ &= M\left(\frac{p_1}{[p]}x_1\right) + M\left(\frac{p_2}{[p]}x_2\right) + \dots + M\left(\frac{p_n}{[p]}x_n\right) = \\ &= \frac{p_1}{[p]}M(x_1) + \frac{p_2}{[p]}M(x_2) + \dots + \frac{p_n}{[p]}M(x_n) = \\ &= \frac{p_1}{[p]}X + \frac{p_2}{[p]}X + \dots + \frac{p_n}{[p]}X = X \quad . \end{aligned}$$

Отже, математичне сподівання середньозваженої загальної арифметичної середини результатів вимірів за відсутності систематичних погрешностей дорівнює істинному значенню вимірюваної величини  $M(\bar{X}) = X$ .

З цього положення випливає, що сума відхилень результатів нерівноточних вимірів від середньозваженої арифметичної середини дорівнює нулю:

$$\frac{[(x-\bar{x})p]}{[p]} = \frac{[xp]-[\bar{x}p]}{[p]} = \frac{[xp]}{[p]} - \frac{\bar{x}[p]}{[p]} = \bar{x} - \bar{x} = 0. \quad (9.25)$$

Обчислимо вагу величини  $\bar{X}$ , вважаючи, що ваги усіх результатів вимірів обчислені за формулою (9.4)

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2},$$

де  $\sigma_0^2$  – дисперсія одиничної ваги.

За теоремою 7.1 відповідно до формул (9.6) та (9.23) маємо

$$\frac{1}{p_{\bar{X}}} = \frac{\left(\frac{p_1}{[p]}\right)^2}{p_1} + \frac{\left(\frac{p_2}{[p]}\right)^2}{p_2} + \dots + \frac{\left(\frac{p_n}{[p]}\right)^2}{p_n} = \frac{p_1}{[p]^2} + \frac{p_2}{[p]^2} + \dots + \frac{p_n}{[p]^2} = \frac{1}{[p]}$$

або

$$p_{\bar{X}} = [p]. \quad (9.26)$$

**Отже, вага загальної середньозваженої арифметичної середини  $\bar{X}$  дорівнює сумі ваг результатів вимірів.**

Властивість 2 – **незміщеність**. Відповідно до принципів математичної статистики властивість незміщеності виражається рівністю  $M(\bar{X}) = X$ . Це означає, що за умови відсутності систематичних погрешностей в результатах вимірів середньозважене так само буде вільним від систематичних похибок, що було доведено під час доведення властивості спроможності.

Властивість 3 – **ефективність** означає, що оцінка середньозваженої повинна мати мінімальну дисперсію, тобто бути щонайменше випадковою.



Дисперсію загальної середньозваженої арифметичної середини, враховуючи формулу (9.5)  $p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2}$ , можна визначити так:

$$m_{\bar{X}}^2 = \frac{\mu^2}{[p]}, \quad \text{або} \quad \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{[p]}. \quad (9.27)$$

Відповідно середнє квадратичне відхилення загальної арифметичної середини дорівнює:

$$m_{\bar{X}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}, \quad \text{або} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{[p]}}. \quad (9.28)$$

Зауважимо, що для знаходження значення середнього квадратичного відхилення  $m_i$  будь-якого результату виміру або його функції, потрібно середнє квадратичне відхилення одиниці ваги  $\mu$  розділити на корінь квадратний із ваги цього результату або його функції.

Для доведення ефективності оцінки середньозваженої треба показати, що з усіх функцій вигляду  $y = C x_1 + C x_2 + \dots + C x_n$  загальна арифметична середина  $\bar{X}$  має максимальну вагу, тоді її дисперсія (9.27) буде найменшою.

Відповідно до (9.26), вага середньозваженої арифметичної середини дорівнює сумі ваг результатів вимірів, тобто  $p_{\bar{X}} = [p]$ .

Обчислимо вагу будь-якої іншої функції виду  $y = C x_1 + C x_2 + \dots + C x_n$ , представивши її у формі  $y = \frac{p_1+c_1}{[p]} x_1 + \frac{p_2+c_2}{[p]} x_2 + \dots + \frac{p_n+c_n}{[p]} x_n$ , при цьому  $[c] = 0$ .

Тоді зворотну вагу функції  $y$  на основі формули (9.6) можна записати наступним чином:

$$\frac{1}{p_y} = \frac{\left(\frac{p_1+c_1}{[p]}\right)^2}{p_1} + \frac{\left(\frac{p_2+c_2}{[p]}\right)^2}{p_2} + \dots + \frac{\left(\frac{p_n+c_n}{[p]}\right)^2}{p_n}.$$

Перетворимо кожний доданок  $\frac{\left(\frac{p_i+c_i}{[p]}\right)^2}{p_i} = \frac{p_i^2 + 2p_i c_i + c_i^2}{p_i [p]} = \frac{p_i + 2c_i + \frac{c_i^2}{p_i}}{[p]}$ , та обчисливши суму перетворених доданків, отримаємо

$$\frac{1}{p_y} = \frac{[p] + 2[c] + \left[\frac{c^2}{p}\right]}{[p]^2} = \frac{1}{[p]} + 2 \frac{[c]}{[p]^2} + \frac{\left[\frac{c^2}{p}\right]}{[p]^2},$$

де перший доданок є зворотною вагою середньозваженої арифметичної середини, другий доданок дорівнює нулю  $[c] = 0$ , а третій – за будь-яких  $c$  перевищує нуль. Отже останню рівність можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{p_{\bar{X}}} + C,$$

де  $C > 0$ , звідки випливає, що  $p_y < p_{\bar{X}}$ . Отже, загальна арифметична середина  $\bar{X}$  має максимальну вагу та її дисперсія є найменшою.

На підставі третьої та другої властивостей можна зробити висновок, що за відсутності систематичних похибок загальна арифметична середина  $\bar{X}$ , що є

зрівняним значенням результатів нерівноточних вимірів, є спроможною, незміщеною і ефективною оцінкою  $X$ .

Нагадаємо визначення. Істинною поправкою  $V_i$  називають різницю між істинною величиною вимірюваної величини  $X$  та результатом виміру  $x_i$   $V_i = X - x_i$  на відміну від істинної похибки  $\Delta$ , яка є різницею між виміряним значенням  $x_i$  та істинним значенням вимірюваної величини  $\Delta = x_i - X$ .

Систему поправок  $V_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) визначає зрівняне значення  $\bar{X}$ :

$$V_i = \bar{X} - x_i. \quad (9.29)$$

Ці поправки іноді називають імовірнішими поправками. Система поправок  $V_i$  має дві важливі властивості.

Властивість 4 –  $[pv] = 0$ . Покажемо це.

$$[pv] = [p(\bar{X} - x_i)] = \bar{X}[p] - [px].$$

Враховуючи, що  $\bar{X} = \frac{[px]}{[p]}$  перетворимо отриманий вираз

$$[pv] = \frac{[px]}{[p]}[p] - [px] = [px] - [px] = 0.$$

Отже, отримали:

$$[pv] = 0. \quad (9.30)$$

Систему поправок застосовують для контролю правильності обчислення  $\bar{X}$ . Зазвичай величину  $\bar{X}$  обчислюють з одним залишковим десятковим знаком порівняно з виміряними даними. Оскільки у результаті доводиться заокруглювати значення  $\bar{X}$ , рівність (9.30) не виконується. Похибка заокруглення, на яку  $\bar{X}_{\text{пр}}$  відрізняється від  $\bar{X}$  становить  $\beta = \bar{X}_{\text{пр}} - \bar{X}$ . У цьому випадку властивість системи поправок  $V_i'$  матиме вигляд  $[pv'] = \beta[p]$ . Покажемо, що це так:

$$v_i' = \bar{X}_{\text{пр}} - x_i, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Помноживши кожен з  $V_i'$  на відповідні ваги, отримаємо  $n$  рівнянь, складемо їх почлено та **дістанемо**:

$$[pv'] = \bar{X}_{\text{пр}}[p] - [px].$$

Скористаємось тим, що  $\bar{X}_{\text{пр}} = \bar{X} + \beta = \frac{[px]}{[p]} + \beta$  та підставимо його у попередній вираз:

$$[pv'] = \frac{[px]}{[p]}[p] + \beta [p] - [px] = [px] + \beta [p] - [px] = \beta [p].$$

Остаточно отримали

$$[pv'] = \beta [p]. \quad (9.31)$$

Властивість 5 – система поправок має властивість  $[pv^2] = \min$ . Покажемо, що сума добутків ваг на квадрати відхилень від загальної арифметичної середини завжди менша за суму добутків ваг на квадрати відхилень від будь-якої іншої функції тих самих результатів вимірів, тобто

$$[pv^2] = \min, \quad (9.32)$$

що відповідає нерівності

$$[pv^2] < [p(v')^2]. \quad (9.33)$$

Розглянемо певну функцію результатів вимірів  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що створює систему поправок  $v'_i = \bar{Y} - x_i$ , або  $v'_i = v_i + \bar{Y} - \bar{X}$ .

Піднесемо ліві й праві частини останньої рівності у другий ступінь відповідно до формул скороченого множення для многочленів, отримаємо:

$$(v'_i)^2 = v_i^2 + 2v_i(y - X) + (y - X)^2,$$

далі помножимо ліві й праві частини цих рівнянь на відповідні ваги  $p_i$  та отримані вирази почлено додаємо один до одного

$$[p(v')^2] = [pv^2] + 2[pv](y - X) + [p](y - X)^2.$$

Очевидно, що оскільки  $[pv] = 0$ ;  $[p](y - X)^2 > 0$ , то

$$[p(v')^2] = [pv^2] + [p](y - X)^2,$$

а отже

$$[pv^2] < [p(v')^2].$$

Знання властивостей загальної арифметичної середини дозволяє правильно й коректно організувати математичні обчислення нерівноточних геодезичних вимірів.

### 9.5 Апостеріорна оцінка точності при опрацюванні нерівноточних вимірів

Звернемось до оцінювання точності. По-перше, точність польових вимірів вже є оціненою, оскільки відомі середні квадратичні похибки  $m_i$ . По-друге, точність загальної арифметичної середини визначається її середнім квадратичним відхиленням, що відповідно до формули (9.28) дорівнює:

$$m_{\bar{X}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}, \quad \text{або} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{[p]}}.$$

Зауважимо, що подібне співвідношення можна отримати для середніх квадратичних похибок результатів вимірів  $m_i$ , скориставшись формулою (9.5)

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2}, \quad \text{звідки:}$$

$$\mu = m_i \cdot \sqrt{p_i} \quad \text{та} \quad m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}, \quad (9.34)$$

отже, для знаходження значення середнього квадратичного відхилення  $m_i$  будь-якого результату виміру або його функції, потрібно середнє квадратичне відхилення одиниці ваги  $\mu$  розділити на корінь квадратний із ваги цього результату або його функції.

Формулу (9.34) застосовують для обчислення остаточних значень середніх квадратичних похибок  $m_i$  результатів вимірів після їх опрацювання.

Для контролю наявності систематичних похибок у результатах вимірів можна скористатись властивістю компенсації випадкових похибок у нерівноточних вимірах.

Наведемо визначення.

**Істинною похибкою**  $\Delta_i$  є різниця між вимірним  $x_i$  та істинним  $X$  значенням вимірюваної величини  $X$ :

$$\Delta_i = x_i - X.$$

**Істинною поправкою**  $v_i$  є різниця між істинним  $X$  та вимірним  $x_i$  значенням вимірюваної величини  $X$ :

$$v_i = X - x_i.$$

**Істинною похибкою**  $\omega$  загальної арифметичної середини  $\bar{X}$  є різниця між  $\bar{X}$  та істинним значенням вимірюваної величини  $X$ :

$$\omega = \bar{X} - X.$$

З врахуванням визначення істинної похибки  $\Delta_i$  кожен результат виміру являє собою суму істинного значення вимірюваної величини  $X$  та істинної похибки  $\Delta_i$ :

$$x_i = X + \Delta_i. \quad (9.35)$$

Підставимо до формули загальної середньозваженої арифметичної середини (9.23)  $\bar{X} = \frac{p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n}{p_1+p_2+\dots+p_n} = \frac{[px]}{[p]}$ , замість  $x_i$  його значення (9.35), отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{p_1(X + \Delta_1) + p_2(X + \Delta_2) + \dots + p_n(X + \Delta_n)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \\ &= \frac{X[p] + [p\Delta]}{[p]} = X + \frac{[p\Delta]}{[p]}. \end{aligned}$$

Отримане співвідношення підставимо до виразу істинної похибки  $\omega$  загальної арифметичної середини

$$\omega = \bar{X} - X = X + \frac{[p\Delta]}{[p]} - X = \frac{[p\Delta]}{[p]}.$$

Отже, істинна похибка  $\omega$  загальної арифметичної середини дорівнює середньозваженій істинних похибок окремих вимірів. Можна показати, що при необмеженому зростанні числа вимірів  $n$  істинна похибка загальної арифметичної середини  $\omega$  прагне до нуля.

Якщо під час проведення геодезичних робіт вплив систематичних похибок був істотно послабленим, то

$$\frac{[p\Delta]}{[p]} \approx 0. \quad (9.36)$$

Співвідношення (9.36) можна застосовувати під час опрацювання результатів нерівноточних вимірів для виявлення систематичних похибок.

Наявність систематичних похибок буде показувати перевага додатних або від'ємних похибок.

Основною задачею оцінювання точності під час опрацювання нерівноточних вимірів є визначення щонайкращої оцінки дисперсії одиничної ваги  $\mu$ . Спосіб обчислення похибки одиниці ваги  $\mu$  визначається особливостями вихідних даних. Розглянемо варіанти обчислення  $\mu$ .

У тому випадку, якщо відомі середні квадратичні похибки  $m_i$  результатів вимірів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ваги визначають за формулою (9.5):

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} = \frac{k}{m_i^2},$$

де  $k$  – певна постійна, яку призначають довільно. Тоді похибку одиниці ваги  $\mu$  можна обчислити безпосередньо як квадратний корінь з постійної величини  $k$ :

$$\mu = \sqrt{k}. \quad (9.37)$$

У тому випадку, якщо відомі середні квадратичні похибки  $m_i$  та певним чином встановлені ваги однорідних результатів вимірів  $p_i$ , то для кожного результату обчислюють похибку одиниці ваги  $\mu_i$  за формулою

$$\mu_i = m_i \sqrt{p_i},$$

а потім визначають остаточне значення  $\mu$  за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_n^2}{n}}, \quad (9.38)$$

де  $n$  – число результатів, для яких були відомі  $m_i$  та  $p_i$ , причому вважають, що надійність усіх  $m_i$  приблизно однакова.

Якщо ваги результатів нерівноточних вимірів визначені, то середню квадратичну похибку одиниці ваги  $\mu$  можна обчислити, використовуючи поправки  $v_i$ , які являють собою різницю між арифметичною середньою  $\bar{X}$  та результатом виміру  $x_i$ :  $v_i = \bar{X} - x_i$ . У цьому випадку для обчислення похибки одиниці ваги  $\mu$  застосовують формулу:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}. \quad (9.39)$$

Формулу (9.39) називають формулою Бесселя. Обґрунтуємо обчислення  $\mu$  за поправками  $v_i$ . Нехай отримано результати вимірів  $x_1, x_2, \dots, x_n$  випадкової величини, істинне значення якої дорівнює  $X$ . Найбільш надійним її вимірним значенням є загальна арифметична середина  $\bar{X}$ . Запишемо вирази для істинної похибки  $\Delta_i$  та істинної поправки  $v_i$ :

$$\begin{aligned} \Delta_i &= x_i - X; \\ v_i &= \bar{X} - x_i. \end{aligned}$$

Складемо ці вирази один з одним:

$$\Delta_i + v_i = \bar{X} - X, \quad (9.40)$$

де права частина виражає істинну похибку  $\omega$  загальної арифметичної середньої  $\bar{X}$ :

$$\bar{X} - X = \omega.$$

Виразимо істинні похибки  $\Delta_i$  через істинну похибку загальної арифметичної середньої  $\omega$ , скориставшись виразом (9.40):

$$\Delta_i = \omega - v_i.$$

Отриманий вираз піднесемо у квадрат та помножимо на відповідні ваги

$$p_i \Delta_i^2 = p_i \omega^2 + p_i v_i^2 - 2\omega p_i v_i.$$

Далі складемо  $n$  отриманих рівностей:

$$[p\Delta^2] = [p]\omega^2 + [pv^2] - 2\omega[pv],$$

де останній доданок  $2\omega[pv] = 0$ , та розділимо на  $n$ , отже маємо

$$\frac{[p\Delta^2]}{n} = \frac{[p]\omega^2}{n} + \frac{[pv^2]}{n}.$$

У останньому виразі ліва частина є середньозваженою сумою квадратів відхилень результатів вимірів  $x_i$  від центру розсіювання  $X$ , поділеною на  $n$ , тобто за визначенням є дисперсією

$$\frac{[p\Delta^2]}{n} = \mu^2.$$

У першому доданку правої частини виразу квадрат істинної похибки загальної арифметичної середньої  $\omega^2$  за змістом дорівнює дисперсії загальної арифметичної середньої  $\bar{X}$ , яка за формулою (9.28) дорівнює  $m_{\bar{X}}^2 = \frac{\mu^2}{[p]}$ .

Виконавши відповідні заміни, отримаємо:

$$\mu^2 = \frac{[p]}{n} \cdot \frac{\mu^2}{[p]} + \frac{[pv^2]}{n} = \frac{\mu^2}{n} + \frac{[pv^2]}{n}; \text{ звідки}$$

$$n \cdot \mu^2 - \mu^2 = [pv^2]; \mu^2 = \frac{[pv^2]}{n-1},$$

або остаточно отримаємо формулу (9.39)

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}.$$

Якщо число вимірювань невелике, необхідно визначати надійність обчисленої за формулою (9.39) дисперсії одиниці ваги  $\mu$ . Надійність  $\mu$  визначають як її середню квадратичну похибку за формулою

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (9.41)$$

За невеликої кількості вимірів потрібно також, окрім дисперсії загальної арифметичної середньої  $\bar{X}$ , яку визначають за формулою (9.28)  $m_{\bar{X}}^2 = \frac{\mu^2}{[p]}$ , оцінити її надійність. Надійність оцінки загальної арифметичної середньої  $\bar{X}$  оцінюють шляхом обчислення середньої квадратичної похибки  $m_M$  середньої квадратичної

похибки загальної арифметичної середньої  $m_{\bar{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$  за наступною формулою:

$$m_{m_{\bar{x}}} = m_M = \frac{m_{\mu}}{\sqrt{[p]}}. \quad (9.42)$$

Зауважимо, що коли у результаті опрацювання результатів нерівноточних вимірів похибку одиниці ваги  $\mu$  можна отримати як за формулою (9.37), тобто як квадратний корінь з постійної величини  $k$   $\mu = \sqrt{k}$ , так і за формулою (9.39)  $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$ , отримані значення  $\mu$  зазвичай не збігаються, але якщо розходження становить порядок  $m_{\mu}$ , то це нормально. Для подальших обчислень потрібно застосовувати значення  $\mu$ , знайдене за формулою (9.39).

## 9.6 Порядок математичної обробки ряду нерівноточних вимірів однієї величини

В результаті повторних нерівноточних вимірів однієї величини  $X$ , істинне значення якої є невідомим, отриманий ряд результатів  $x_1, x_2, \dots, x_n$  із середніми квадратичними похибками  $m_1, m_2, \dots, m_n$ .

1. Визначають ваги результатів вимірів за формулою (9.5):

$$p_i = \frac{k}{m_i^2},$$

де  $m_i$  – середня квадратична похибка результату вимірювання;

$k$  – коефіцієнт пропорційності, який може набувати довільних значень.

Коефіцієнт  $k$  обирають так, щоб значення ваг були близькими до одиниці, наприклад, використовуючи формулу:

$$k = \frac{m_{max-1}^2 + m_{min+1}^2}{2},$$

де  $m_{max-1}^2$  – друга за величиною найбільша середня квадратична похибка;

$m_{min+1}^2$  – друга за величиною найменша середня квадратична похибка.

2. Обчислюють найімовірніше значення вимірюваної величини, яким є загальна арифметична середина результатів вимірів, за формулою (9.23):

$$\bar{X} = \frac{[px]}{[p]},$$

де  $x_i$  – результат  $i$ -го виміру;

$p_i$  – вага  $i$ -го результату виміру.

Якщо кількість вимірів  $n$  є досить великою, то замість формули (9.23) на практиці застосовують зручнішу формулу:

$$\bar{X} = X_0 + \frac{[p\delta]}{[p]},$$

де  $X_0$  – найменше значення з отриманих результатів, тобто умовний нуль;

$\delta_i$  – відхилення від умовного нуля, обчислення яких виконують за формулою:

$$\delta_i = x_i - X_0.$$

Щоб не накопичувати похибки заокруглення, загальну арифметичну середину  $\bar{X}$  обчислюють з кількістю десяткових знаків, що на три перевищує кількість десяткових знаків в результатах вимірів  $x_i$ . Далі це значення заокруглюють, залишаючи таку саму кількість десяткових знаків, як і у результатах вимірів. В результаті отримують дещо зміщене значення  $X'$ , яке відрізняється від  $\bar{X}$  на малу величину  $\beta$ , обчислену за формулою:

$$\beta = X' - \bar{X},$$

де  $X'$  – заокруглене значення простої арифметичної середини.

3. Обчислюють поправки, тобто відхилення результатів вимірів  $x_i$  від загальної арифметичної середини  $X'$ , за формулою:

$$v_i = x_i - X'.$$

Знайдені значення поправок та арифметичної середини перевіряють за рівністю (9.30)  $[pv] = 0$ . Але оскільки поправки  $v_i$  обчислюють з використанням заокругленого на величину  $\beta$  значення загальної арифметичної середини, то замість найімовірніших поправок отримують їхні зміщені значення, які відрізняються від найімовірніших так само на величину  $\beta$ . Тому для контролю обчислення поправок застосовують рівність (9.31):

$$[pv] = [p] \cdot \beta.$$

4. Обчислюють суму квадратів відхилень вимірних значень від  $\bar{X}$ , тобто  $[pv^2]$  за формулою:

$$[pv^2] = [p\delta^2] - \frac{[p\delta]^2}{[p]}$$

та визначають емпіричну середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою (9.39):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}.$$

5. Визначають надійність отриманої середньої квадратичної похибки одиниці ваги, застосовуючи формулу (9.41):

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

6. Визначають середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини  $m_{\bar{X}} = M$ , застосовуючи формулу (9.28):

$$m_{\bar{X}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}.$$

7. Обчислюють похибку середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини, оцінюючи її надійність за формулою (9.42):



$$m_{m_{\bar{x}}} = m_M = \frac{m_{\mu}}{\sqrt{[p]}}$$

8. Остаточний результат обчислень записують так:

$$\bar{X} = 21 \pm M; \quad (m_M = 0,2).$$

Визначимо оцінку надійності величини  $\mu$  за формулою (9.41)

$$m_{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{2,88}{\sqrt{2(6-1)}} = 0,91 \text{ мм.}$$

Надійність середньої квадратичної похибки арифметичної середини  $M$  оцінимо за формулою (9.42):

$$m_M = \frac{m_{\mu}}{\sqrt{[p]}} = \frac{0,91}{\sqrt{1,6}} = 0,72 \text{ мм.}$$

Відзнака  $H$  точки місцевості становить:

$$\bar{H} = 196,528 \text{ м} \pm 2,27 \text{ мм} \quad (m_M = 0,72).$$

### Запитання для самоперевірки:

1. Поясніть, що таке вага результату виміру?
2. Чи має смисл призначати вагу одиничному результату виміру? Якщо так, то чому? Якщо ні, то теж чому?
3. Чому під час розрахунку ваг коефіцієнт пропорційності має перевищувати нуль?
4. Чи можуть ваги приймати від'ємні значення?
5. Надані два однорідних виміри із різними вагами. Що можна сказати про їхню точність?
6. Що розуміють як вираження «СКО одиничної ваги»?
7. За якою формулою можна розрахувати вагу результату виміру, якщо задані СКП результату виміру та СКП одиничної ваги?
8. Як змінюються ваги при передачі дирекційних кутів?
9. Чому дорівнює вага суми рівноточних доданків?
10. Дан ряд вимірів із своїми вагами. Обчислена диференційована функція цих результатів вимірів. Як розрахувати вагу цієї функції?
11. Як розрахувати ваги перевищень, що отримані у ходах геометричного нівелювання, які прокладаються на пересіченій і на рівнинній місцевості?
12. Чи більше вага суми за вагу різниці двох результатів вимірів?
13. Охарактеризуйте властивості спільної арифметичної середини.
14. Як розраховують вагу спільної арифметичної середини?
15. Чи можна вважати, що середнє арифметичне є частковим випадком спільної арифметичної середини?
16. За якою формулою можна обчислити СКП спільної арифметичної середини, якщо відома СКП одиничної ваги?
17. Як обчислюють поправки із зрівнювання та яку властивість вони

мають?

18. Як оцінити надійність СКП загальної арифметичної середини?

## Тема 10 ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ЗА РІЗНИЦЯМИ ПОДВІЙНИХ ВИМІРІВ

Різниці подвійних вимірів однорідних величин. Середня квадратична похибка одного виміру. Середня квадратична похибка одиниці ваги. Залишкова систематична похибка. Критерій наявності систематичної похибки. Надійність оцінок точності подвійних рівноточних та нерівноточних вимірів.

### 10.1 Різниці подвійних вимірів однорідних величин

У геодезичній практиці прийнято кожен фізичну величину вимірювати незалежно та рівноточно не менше двох разів, оскільки один вимір не дає можливості здійснити контроль правильності виміру. Зокрема, горизонтальний кут вимірюють в положеннях труби теодоліта «круг право» і «круг ліво», довжину лінії вимірюють двічі – в прямому і зворотному напрямках, при геометричному нівелюванні перевищення на станції визначають за чорним і червоним боками рейки, у тригонометричному нівелюванні перевищення визначають в прямому і зворотному напрямках, при нівелюванні II і III класу нівелірний хід прокладають в прямому і зворотному напрямках. Такого роду пари вимірів називають **подвійними вимірами**.

Мова йде про вимірювання великої кількості однорідних величин, кожен з яких вимірюють тільки двічі. Завдання полягає у тім, щоб за загальною сукупністю різниць подвійних вимірів однорідних величин оцінити їхню точність.

Нехай з  $n$  однорідних величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , кожна виміряна двічі та отримані два ряди результатів вимірів:

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n \quad x''_1, x''_2, \dots, x''_n. \quad (10.1)$$

На підставі результатів вимірів (10.1) можна обчислити  $n$  різниць подвійних вимірів, щоб застосувати їх для оцінювання загальної для усіх вимірів точності:

$$d_i = x'_i - x''_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10.2)$$

де  $x'_i, x''_i$  – результати двох вимірів одного і того самого об'єкту.

У геодезичній практиці зазвичай зустрічаються два випадки: усі подвійні виміри рівноточні, або виміри у парах рівноточні, але пари одна з одною нерівноточні.

## 10.2 Оцінювання точності за різницями подвійних рівноточних вимірів

Розглянемо випадок, коли усі  $x'_i$  та  $x''_i$  у рядах (10.1) рівноточні. Звернемо увагу на те, що істинне значення випадкової величини  $d_i$  відоме, оскільки якщо би виміри були точними, то усі різниці  $d_i$  дорівнювали би нулю, і це є істинним значенням  $d$ . Звідси випливає, що ненульові різниці  $d_i$  є їхніми істинними похибками. Зазвичай, точність вимірів оцінюють за середньою квадратичною похибкою, яку визначають як корінь квадратний з дисперсії. Дисперсією випадкової величини є середнє арифметичне квадратів її відхилень від істинного значення (5.2), отже, для  $d$  дисперсія визначається співвідношенням  $\frac{[d^2]}{n}$ , відповідно середнє квадратичне відхилення  $d$  дорівнює:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \quad (10.3)$$

де  $n$  – число різниць  $d$ , тобто число вимірюваних величин  $X_i$ .

Середнє квадратичне відхилення різниць  $d$  характеризує їхню середню квадратичну похибку, скориставшись якою, треба визначити середню квадратичну похибку результатів вимірів  $m$ .

З визначення різниці  $d_i$ , тобто із співвідношення (10.2), випливає, що випадкова величина  $d$  є алгебраїчною сумою двох незалежних випадкових величин  $x'_i$  та  $x''_i$ . Тому відповідно до формули (4.13) дисперсія суми незалежних випадкових величин, дорівнює сумі їхніх дисперсій, причому, оскільки виміри рівноточні, їхні дисперсії однакові і дорівнюють  $m^2$ :

$$m_d^2 = m^2 + m^2 = 2 \cdot m^2,$$

звідки

$$m^2 = \frac{m_d^2}{2} = \frac{[d^2]}{2n},$$

відповідно середнє квадратичне відхилення результатів вимірів  $m$  визначається наступним чином:

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \quad (10.4)$$

Найбільш надійні значення  $\bar{x}_i$  величин  $X_i$ , кожна з яких виміряна два рази, обчислюють як середні арифметичні відповідних результатів вимірів  $x'_i$  та  $x''_i$ :

$$\bar{x}_i = \frac{x'_i + x''_i}{2}. \quad (10.5)$$

Для оцінювання точності середніх арифметичних результатів вимірів  $\bar{x}$  визначимо середню квадратичну похибку, скориставшись формулою (5.6):

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{m}{\sqrt{2}},$$

де  $n$  – число результатів вимірів однієї вимірюваної величини,  $n = 2$ , з яких визначена її арифметична середня  $\bar{x}_i$ .

До останнього виразу підставимо  $m$  з формули (10.4) та отримаємо середню квадратичну похибку  $\bar{x}$ , виражену через різниці  $d_i$ :

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{4n}},$$

отже, остаточно:

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{4n}}. \quad (10.6)$$

За невеликої кількості подвійних вимірів  $n$  потрібно визначати надійність оцінок  $m$  та  $m_{\bar{x}}$ , отриманих за формулами (10.4) та (10.6). Можна показати, що середню квадратичну похибку  $m_m$  можна визначити за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}, \quad (10.7)$$

а середню квадратичну похибку  $m_{m_{\bar{x}}}$  – за формулою:

$$m_{m_{\bar{x}}} = \frac{m_{\bar{x}}}{\sqrt{2n}}. \quad (10.8)$$

Розглянутий підхід до оцінювання точності за різницями подвійних вимірів застосовують, коли різниці  $d_i$  у певному ряді результатів вимірів не містять систематичних похибок.

Щодо впливу на результати подвійних вимірів наявності систематичних похибок вважають, що систематичні похибки двох рівноточних вимірів однієї величини  $X_i$  близькі одна до одної за величиною та у різницях  $d_i$  істотною мірою погашаються. Тому систематичні похибки у різницях  $d_i$  називають **залишковими систематичними похибками**.

Для виявлення у ряді результатів подвійних вимірів систематичної похибки можна скористатися властивістю компенсації випадкових похибок. За відсутності систематичної похибки величина  $\frac{[d]}{n}$  має наближатися до нуля. Якщо це не так, то властивість компенсації випадкових похибок порушена і можна вважати, що на процес вимірів мали вплив певні випадкові чинники або різниці  $d_i$  містять систематичні похибки  $\theta_d$ .

Звичайний підхід до виключення систематичних похибок полягає у наступному. Будемо вважати, що похибки, які містять різниці  $d_i$ , змінюються неістотно та що різниці складаються з випадкової  $\Delta$  та систематичної  $\theta$  похибок. Тоді співвідношення  $\frac{[d]}{n}$  можна представити так:

$$\frac{[d]}{n} = \frac{[\Delta]}{n} + \frac{[\theta]}{n}.$$

Скористаємось властивістю компенсації випадкових похибок та дорівняємо до нуля середнє випадкових похибок  $\frac{[\Delta]}{n} = 0$ , тоді залишкове середнє систематичних похибок дорівнюватиме  $\frac{[\theta]}{n} = \frac{[d]}{n} = \theta_{\text{сер}}$ .

Виключимо з кожного  $d_i$  середнє значення систематичної похибки та отримаємо значення залишкових відхилень  $\varepsilon_i$ :

$$d_i - \theta_{\text{сер}} = \varepsilon_i,$$

додамо їх одне до одного  $[d] - n \cdot \theta_{\text{сер}} = [\varepsilon]$ , звідки, оскільки теоретично  $[\varepsilon] = 0$  як сума остаточних випадкових відхилень від середнього різниць  $d_i$ , є справедливим  $[d] = n \cdot \theta_{\text{сер}}$ . Але практично  $[\varepsilon]$  дорівнює не нулю, а сумі  $n$  різниць між точним та обчисленим значеннями середньої систематичної похибки  $\theta_{\text{сер}}$ :

$$[\varepsilon] = n \cdot \beta,$$

де  $\beta = \theta_{\text{сер}}^{\text{точ}} - \theta_{\text{сер}}^{\text{обч}}$ .

Оскільки величини  $d_i$  отримані з вимірів, то відхилення  $\varepsilon_i$  можна розглядати як відхилення від середнього різниць  $d_i$ , і тому за формулою Бесселя (9.39) для середньої квадратичної похибки  $m_d$  будь-якої різниці  $d_i$  записати:

$$m_d = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n-1}}, \quad (10.9)$$

тоді для середньої квадратичної похибки вимірів отримаємо:

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{2(n-1)}}. \quad (10.10)$$

Для контролю обчислення  $[\varepsilon^2]$  застосовують формулу:

$$[\varepsilon^2] = [d^2] - \frac{[d^2]}{n}. \quad (10.11)$$

Відповідно, у цьому випадку для обчислення середньої квадратичної похибки середнього арифметичного парних вимірів треба застосовувати таку формулу:

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{4(n-1)}}. \quad (10.12)$$

Отже, для обчислення середньої квадратичної похибки вимірів отримано дві формули – (10.4) та (10.10), а для обчислення середньої квадратичної похибки середнього арифметичного парних вимірів – формули (10.6) та (10.12), тому потрібно визначитись, за якого значення систематичного впливу  $\theta_{\text{сер}}$  потрібно застосовувати формули (10.10) та (10.12). Як умову, за якою формули (10.10) та (10.12) застосовувати непотрібно вважають нерівність:

$$|\theta_{\text{сер}}| \leq \frac{m_d}{5} \quad \text{або} \quad |[d]| \leq 0,25|[d]|. \quad (10.13)$$

Якщо умова (10.13) виконується, то потрібно для визначення  $m$  та  $m_{\bar{x}}$  застосовувати формули (10.4) та (10.6) відповідно.

### 10.3 Оцінювання точності за різницями подвійних нерівноточних вимірів

Нехай з  $n$  однорідних величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , кожна виміряна двічі незалежно, причому у кожній парі результати вимірів рівноточні, а пари вимірів одна з одною нерівноточні. На підставі результатів вимірів обчислимо  $n$  різниць подвійних вимірів для оцінювання їх загальної для усіх вимірів точності за формулою (10.2):  $d_i = x'_i - x''_i$ , де  $x'_i, x''_i$  – результати двох вимірів одного і того самого об'єкту.

Оскільки пари вимірів одна з одною нерівноточні, позначимо ваги вимірів у  $i$ -й парі  $p_i$ :

$$p_i = p_{x'_i} = p_{x''_i},$$

тоді ваги різниць  $d_i = x'_i - x''_i$ , які є істинними похибками, запишемо з врахуванням основної теореми теорії похибок (9.6)

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i} = \frac{2}{p_i},$$

звідки вага різниці  $d_i$  кожного виміру визначається так:

$$p_{d_i} = \frac{p_i}{2}. \quad (10.14)$$

Середню квадратичну похибку одиниці ваги визначимо через середньозважену суму квадратів відхилень результатів вимірів  $x_i$  від центру розсіювання  $X$ , поділену на  $n$ , тобто через визначення дисперсії  $\frac{[p\Delta^2]}{n} = \mu^2$ , де  $\Delta_i$  – істинні похибки замінимо на істинні похибки подвійних вимірів, якими є різниці  $d_i$ , скористаємось вагами  $d_i$  (10.14) та отримаємо:

$$\mu = \sqrt{\frac{\frac{p_1}{2} \cdot d_1^2 + \frac{p_2}{2} \cdot d_2^2 + \dots + \frac{p_n}{2} \cdot d_n^2}{n}},$$

остаточно маємо формулу:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}, \quad (10.15)$$

де  $p_i$  – вага одного вимірюваного значення з кожної пари вимірів.

Середню квадратичну похибку результату одного виміру з вагою  $p_i$  визначимо за формулою (9.34):

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}. \quad (10.16)$$

Найбільш надійні значення  $\bar{x}_i$  величин  $X_i$ , кожна з яких виміряна двічі, отримуємо як середні арифметичні відповідних результатів вимірів  $x'_i$  та  $x''_i$  за формулою (10.5):

$$\bar{x}_i = \frac{x'_i + x''_i}{2},$$

причому, вага кожного значення  $\bar{x}_i$  середніх арифметичних відповідних результатів вимірів  $p_{\bar{x}_i}$  дорівнюватиме

$$p_{\bar{x}_i} = 2p_i. \quad (10.17)$$

Середню квадратичну похибку арифметичної середини  $\bar{x}_i$  для кожної пари обчислюють за формулою

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}. \quad (10.18)$$

Середню квадратичну похибку  $m_\mu$  власно похибки  $\mu$ , що обчислена за формулою (10.15), визначають за рівністю

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2n}}. \quad (10.19)$$

Середню квадратичну похибку  $m_{m_i}$  середньої квадратичної похибки результату одного виміру, визначають за формулою

$$m_{m_i} = \frac{m_\mu}{\sqrt{p_i}} = \frac{m_i}{\sqrt{2n}}, \quad (10.20)$$

а середню квадратичну похибку  $m_{m_{\bar{x}_i}}$  середньої квадратичної похибки арифметичної середини  $\bar{x}_i$ , визначають за формулою

$$m_{m_{\bar{x}_i}} = \frac{m_\mu}{\sqrt{2p_i}} = \frac{m_{\bar{x}_i}}{\sqrt{2n}}. \quad (10.21)$$

Отримані формули (10.15–10.21) справедливі, якщо різниці  $d_i$  не містять істотних систематичних похибок, на наявність яких вказуватимуть переважання додатних або від'ємних знаків в різницях  $d_i$  та помітна величина  $[d]$ , внаслідок чого буде порушеною властивість компенсації випадкових похибок і співвідношення

$$\frac{[pd]}{[p]} \neq 0,$$

причому  $\frac{[pd]}{[p]}$  буде істотно відрізнитись від нуля та у той самий час виражати величину систематичної похибки  $\theta_{\text{сер}}$ :

$$\frac{[pd]}{[p]} = \theta_{\text{сер}}.$$

Далі, встановивши наявність систематичних похибок, визначають їхні величини  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  та виключають з різниць  $d_i$ , обчислюючи значення  $\varepsilon_i$ :

$$d_i - \theta_i = \varepsilon_i.$$

Величини систематичних похибок при лінійних вимірах та при геометричному нівелюванні визначають за допомогою коефіцієнта залишкового

систематичного впливу  $\lambda_l$ , що показує частку систематичного впливу на одиницю довжини

$$\lambda_l = \frac{[d]}{[l]}, \quad (10.22)$$

де  $l$  – довжини вимірюваних ліній для лінійних вимірів;

$$\lambda_L = \frac{[d]}{[L]}, \quad (10.23)$$

де  $L$  – довжина ходу подвійного нівелювання.

Далі величини  $\theta_i$  визначають за формулою:

$$\theta_i = \lambda_l \cdot l_i \quad (10.24)$$

Під час опрацювання результатів лінійних вимірів полігонометрії  $[d]$ ,  $l_i$  та  $[L]$  виражають у метрах. Визначивши коефіцієнт коефіцієнта систематичного впливу, обчислюють значення  $\varepsilon_i$ :

$$d_i - \theta_i = \varepsilon_i$$

Як і при рівноточних вимірах, величини  $\varepsilon_i$  є залишковими відхиленнями з протилежним знаком, але з вагами

$$p_d = \frac{p}{2}, \quad (10.25)$$

Відповідно для середньої квадратичної похибки одиниці ваги  $\mu$  маємо

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{2(n-1)}}, \quad (10.26)$$

Для середнього з двох вимірених значень отримаємо:

$$m_{\bar{x}_i} = \sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{4(n-1)}}. \quad (10.27)$$

Формули (10.19) та (10.21) для визначення надійності обчислених середніх квадратичних похибок  $\mu$  та  $m_{\bar{x}_i}$  матимуть вигляд:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad (10.28)$$

$$m_{m_{\bar{x}_i}} = \frac{m_{\bar{x}_i}}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (10.29)$$

Оцінка за різницями подвійних вимірів зазвичай перевищує дійсну точність результатів вимірів.

Найчастіше виміри, що складають пари, виконують майже в одних і тих самих умовах, тобто одним виконавцем, тем самим інструментом, у тій самій місцевості, при температурі й вологості повітря, ґрунту та інших факторів, що відрізняються неістотно. За таких обставин так само й вплив низки джерел похибок на пари результатів вимірів буде майже тим самим. Тому на різницях парних результатів певні джерела похибок зовсім не вплинуть, а вплив частки інших буде послаблений, проте у дійсності їхній вплив на результати вимірів помітний.



Величина коефіцієнта залишкового систематичного впливу  $\lambda_l$  характеризує тільки вплив різниць систематичних похибок першого та другого результатів парних вимірів, але не дає уявлення про величину самих систематичних похибок.

Отже, різниці  $d_i$  зазвичай лише частково виражають вплив усіх джерел похибок на результат окремого виміру пари. Внаслідок цього оцінка за різницями подвійних вимірів дає зазвичай дещо зменшене значення похибок  $m$  та  $\mu$ , причому іноді у 2–3 рази. Найнадійніші дані з оцінювання точності дають розрахунки за нев'язками вільної мережі полігонів, далі за внутрішнім збігом результатів вимірів та найменш надійними – за різницями подвійних вимірів.

Послідовність опрацювання подвійних нерівноточних вимірів наступна:

1. Обчислюють вагу  $p_i$  перевищення кожного нівелірного ходу за формулою

$$p_i = \frac{1}{L_i}, \quad (10.30)$$

де  $L_i$  – довжина нівелірного ходу, км.

2. Обчислюють суму різниць  $d_i$  перевищень прямого і зворотного ходу і суму довжин нівелірних ходів  $L_i$ .

3. Визначають величину коефіцієнта систематичного впливу за формулою (10.23):

$$\lambda = \frac{[d]}{[L]}.$$

4. Обчислюють добутки  $\lambda L_i$ , які є систематичними похибками  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ . Сума цих добутків має дорівнювати сумі різниць  $d_i$ , тобто:

$$[d] = [\lambda L]. \quad (10.31)$$

5. Обчислюють остаточні відхилення  $\varepsilon_i$ :

$$\varepsilon_i = d_i - \theta_i = d_i - \lambda \cdot L_i. \quad (10.32)$$

6. Обчислюють середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою (10.26):

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{2(n-1)}}.$$

7. Оцінюють надійність величини  $\mu$ , отриманої на підставі (10.26). Це можна зробити за формулою (10.28):

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

8. Обчислюють середню квадратичну похибку кожного нівелірного ходу за формулою

$$m_i = \mu \cdot \sqrt{L_i}. \quad (10.33)$$

9. Обчислюють середню квадратичну похибку середнього перевищення в нівелірному ході за формулою:

$$m_{m_i} = \frac{m_i}{\sqrt{2}}. \quad (10.34)$$

### Запитання для самоперевірки:

1. За яких умов у результаті проведення геодезичних робіт результати вимірів називають подвійними вимірами?
2. Охарактеризуйте сутність завдання оцінювання точності результатів подвійних вимірів однорідних величин.
3. Поясніть, за яких умов у геодезичній практиці мають місце рівноточні подвійні виміри.
4. Поясніть, за яких умов у геодезичній практиці мають місце нерівноточні подвійні виміри.
5. Поясніть, яку роль відіграють у оцінюванні точності результатів подвійних вимірів різниці  $d_i$ .
6. Поясніть, чи є різниці  $d_i$  подвійних вимірів випадковими величинами та чи відоме їхні істинні значення.
7. За якою формулою визначають середнє квадратичне відхилення результатів вимірів  $m$ ? Чи є однаковими  $m$  для будь-яких пар рівноточних подвійних вимірів?
8. Як обчислюють найбільш надійні значення  $\bar{x}_i$  величин  $X_i$  у результаті рівноточних подвійних вимірів?
9. Які характеристики застосовують для оцінювання точності рівноточних подвійних вимірів?
10. Які характеристики застосовують для оцінювання надійності рівноточних подвійних вимірів?
11. Чому систематичні похибки у різницях  $d_i$  називають залишковими систематичними похибками?
12. Поясніть, як визначають, чи є істотним вплив залишкових систематичних похибок на точність результатів вимірів та як його враховують.
13. Поясніть, як у загальному випадку визначають ваги результатів нерівноточних подвійних вимірів.
14. Як ваги різниць  $d_i$  пов'язані з вагами результатів нерівноточних подвійних вимірів?
15. За якими ознаками можна визначити наявність систематичних похибок у результатах нерівноточних подвійних вимірів?
16. Який математичний критерій застосовують для встановлення наявності систематичної похибки  $\theta$ ?
17. Яке умовне рівняння виникає при двократному вимірюванні однієї величини?

18. Оцінювання точності кутових вимірів можна виконати за різницями подвійних вимірів у напівприйомах, а також за нев'язками у полігонах і ходах. Яке з них найбільш об'єктивно відбиває якість кутових вимірів в теодолітних ходах?

19. Як визначити значущість колімаційної погрішності теодоліту?

20. Чому при обчисленні систематичної погрішності за різницями подвійних лінійних вимірів ми говоримо про «залишковий коефіцієнт систематичного впливу»?

21. За якою формулою оцінюють точність геометричного нівелювання за різницями перевищень, що отримані з прямого та зворотного ходів?

## **ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3 СПОСІБ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ**

### **Тема 11 ПАРАМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ПОБУДОВ**

Сутність завдання спільного зрівнювання результатів вимірів в геодезії. Надлишкові виміряні величини. Сутність методу найменших квадратів. Особливості параметричного способу зрівнювання геодезичних побудов. Параметричні рівняння зв'язку. Параметричні рівняння поправок. Система нормальних рівнянь.

#### **11.1 Сутність завдання спільного зрівнювання результатів вимірів у геодезії**

До цієї теми математична обробка геодезичних вимірів застосовувалась для розв'язання, переважно, трьох задач:

– знаходження найімовірнішого значення однієї фізичної величини в результаті багатократних вимірів (рівноточних або нерівноточних) і оцінювання його точності;

– оцінювання точності функцій однієї або кількох незалежно виміряних величин;

– оцінювання точності за результатами подвійних вимірів.

Здобуття точних і достовірних геодезичних даних не обмежується вказаними трьома задачами. Необхідність здобуття точних та надійних результатів вимірів призвела шляхом їх дослідження до формування обов'язкової процедури, яка отримала назву **надлишкові виміри**. Наприклад, виміряні три кути плоского трикутника. З теорії відомо, що сума трьох кутів

трикутника дорівнює  $180^\circ$ . Досить виміряти два кути  $\alpha$  та  $\beta$  трикутника, а третій кут  $\gamma$  можна знайти із співвідношення  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ . Це співвідношення справедливе тільки для істинних значень кутів  $\alpha$  і  $\beta$ . Але, оскільки результати вимірів містять похибки, то вони можуть призвести або до їх часткової компенсації, або до грубої похибки. Виникає ситуація невизначеності, яку власно і вирішують шляхом використання надлишкових вимірів, тобто вимірюють кут  $\gamma$ , результат виміру якого так само містить певну похибку. Отже, виникає завдання знаходження поправок до вимірних величин, які би мінімізували сумарну похибку вимірів. Таку процедуру в геодезії називають **зрівнюванням** вимірних величин.

**Зрівнюванням геодезичних вимірів** є сукупність математичних операцій, які виконують для набуття найімовірнішого значення геодезичних координат точок земної поверхні і для оцінювання точності результатів вимірів. Реалізація процедури зрівнювання дає **поправки** до вимірних значень величин. Зрівнювання виконують за методом найменших квадратів, відповідно до якого вимірні величини отримують поправки  $v_i$  до вимірних величин (кутів, напрямів, довжин ліній, перевищень тощо), що задовольняють умові  $[pv^2] \rightarrow \min$ , де  $p_i$  – вага виміру. У математичній статистиці доведено, що цей метод призводить до найкращих оцінок шуканих невідомих.

Розрізняють строге і спрощене (нестроге) зрівнювання геодезичних вимірів. У разі строгого зрівнювання поправки зазвичай визначають за допомогою методу найменших квадратів так, щоб сума квадратів всіх поправок була найменшою. Поправки такого зрівнювання мають найімовірніші значення. Застосування методу найменших квадратів до зрівнювання вимірних величин справедливе тільки у тому випадку, коли похибки вимірів мають випадковий характер.

Строге зрівнювання геодезичних мереж, особливо великих за розмірами, пов'язане з труднощами технічного та організаційного характеру. Тому на практиці часто застосовують спрощене (нестроге) зрівнювання, за якого всі геометричні умови виконуються, а найімовірніше значення величин і оцінку точності визначають приблизно.

Будь-який спосіб зрівнювання складається з таких основних етапів:

- попередні обчислення;
- складання умовних рівнянь або рівнянь похибок;
- вирішення нормальних рівнянь;
- оцінювання точності вимірних та зрівняних величин.

У геодезичній практиці можна скористатись будь-яким з відомих способів зрівнювання: параметричним, корелатним, комбінованим, рекурентним,

параметричним способом із залежними змінними, корелатним способом з додатковими параметрами, способом послідовних наближень та ін.

У цій дисципліні розглянемо тільки два основних способи зрівнювання – параметричний і корелатний. Перший спосіб передбачає безпосереднє отримання зрівнюваних значень шуканих величин – параметрів шляхом рішення системи нормальних рівнянь, а в другому способі – спочатку отримують допоміжні множники – так звані корелати, а потім шукані величини та їхні функції. Ці способи зрівнювання призводять до однакових результатів, але мають різну складність під час розв’язання тієї самої задачі.

## 11.2 Сутність методу найменших квадратів

Оскільки результати вимірів є випадковими величинами, вони містять істотну невизначеність, а тому описати їх можливо тільки невизначеними системами рівнянь, тобто такими, в яких число рівнянь менше за число невідомих, або число рівнянь перевищує число невідомих. Такі системи рівнянь є невизначеними, оскільки вони не мають єдиного розв’язку і не можуть бути розв’язані способами елементарної алгебри, тому що число їхніх розв’язків нескінченне. Зауважимо, що з нескінченної множини розв’язків нас цікавлять не будь-які, а тільки найкращі у певному сенсі. Отже, розв’язання невизначеної системи рівнянь полягає у знаходженні з нескінченної множини розв’язків одного єдиного, який є найкращим за умови мінімуму суми квадратів відхилень результатів вимірів від істинних значень шуканих величин. Цей метод вирішення невизначених систем рівнянь був запропонований на початку XIX ст. німецьким математиком і геодезистом К. Ф. Гауссом (1777–1855) і французьким математиком А. М. Лежандром та отримав назву **методу найменших квадратів**.

Метод найменших квадратів є одним з методів регресійного аналізу, він призначений для оцінювання невідомих величин за результатами вимірів, що містять випадкові похибки. З метою збільшення точності результатів вимірів в геодезії виміри шуканої фізичної величини здійснюють багато разів і як остаточний результат приймають арифметичну середину з усіх окремих вимірів. Властивості арифметичної середини мають стохастичну природу. Враховуючи властивості арифметичної середини легко довести, що сума квадратів відхилень окремих вимірів від арифметичної середини буде меншою за суму квадратів відхилень окремих вимірів від певної іншої величини. Отже, правило обчислення арифметичної середини є простим випадком методу найменших квадратів.

Сутність вирішення невизначеної системи рівнянь, що описує певну геодезичну побудову, полягає в тому, що на рішення рівнянь системи накладають умову мінімізації суми квадратів відхилень:

$$\sum_{i=1}^n p_i v_i^2 = [pv^2] \rightarrow \min, \quad (11.1)$$

де  $p_i$  – ваги вимірів;

$v_i$  – поправки до вимірів.

Нехай виміряно  $n$  величин, істинні значення яких  $X_i$ . Результати вимірювань цих величин  $x_i$  отримані з вагами  $p_i$ . Відомо, що виміряні величини  $X_i$  пов'язані одна з одною співвідношеннями, кількість яких становить  $r$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(X_1, \dots, X_n) &= 0 \\ \varphi_2(X_1, \dots, X_n) &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_r(X_1, \dots, X_n) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (11.2)$$

Отже, система (11.2) містить  $r$  незалежних рівнянь. Число рівнянь в системі (11.2)  $r$  менша за число вимірних величин  $n$ ,  $r < n$ , тобто менша за число вимірних величин  $n$ , для яких потрібно визначити поправки. Така система є невизначеною, оскільки припускає нескінченну множину рішень. Рівняння (11.2) називають **умовними рівняннями**. Причому, кожен новий додатковий вимір породжує нове умовне рівняння.

**Умовним рівнянням називають будь-яке математичне співвідношення, що пов'язує істинні значення вимірюваних величин.**

Отримані результати вимірів ( $x_1, \dots, x_n$ ) перед усім перевіряють, наскільки вони задовольняють умовним рівнянням (11.2). Після підстановки вимірних значень величин система умовних рівнянь набуває наступного вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) &= W_1 \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) &= W_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_r(x_1, \dots, x_n) &= W_r \end{aligned} \right\}, \quad (11.3)$$

де  $W_i$  – нев'язки.

Головною задачею, яку необхідно вирішити під час зрівнювання, є усунення усіх нев'язок  $W_i$ , для чого потрібно виправити результати вимірів, тобто знайти для них поправки.

Виправлені результати вимірів позначають  $x'_i = x_i + v_i$ , де  $v_i$  – шукані поправки. Якщо до (11.3) підставити виправлені результати вимірів, отримаємо вираз:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_r(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (11.4)$$

Мета зрівнювання – визначення таких поправок  $v_i$  до вимірних значень  $x_i$ , які усунули би нев'язки  $W_i$ .

Отже, математичний вираз принципу найменших квадратів (11.1)  $[pv^2] \rightarrow \min$  – це вимога, щоб сума квадратів відхилень від істинного значення вимірюваної величини була мінімальною.

З урахуванням того, що шукана поправка  $v_i$  являє собою різницю зрівняного та виміряного значень  $v_i = x'_i - x_i$ , підставимо її до виразу мінімуму суми квадратів відхилень  $\sum p_i(x'_i - x_i)^2 \rightarrow \min$  та позначимо цей вираз  $f(x)$ :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x'_i - x_i)^2 \rightarrow \min.$$

Нам потрібно знайти такі зрівняні значення  $x'_i$ , за яких  $f(x)$  буде мінімальною.

Оскільки відомо, що певна функція має екстремуми у точках, де її похідні дорівнюють нулю  $\frac{df(x)}{dx} = 0$ , треба скласти систему рівнянь з  $n$  часткових похідних функції  $f(x)$ , дорівняних до нуля:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n 2p_i(x'_i - x_i) = 0.$$

У результаті отримаємо систему  $n$  рівнянь за кількістю часткових похідних. Саме підходами до складання функції  $f(x)$ , що мінімізується, відрізняються параметричний та корелатний методи зрівнювання геодезичних побудов.

### 11.3 Особливості параметричного способу зрівнювання геодезичних побудов

Сутність параметричного способу зрівнювання полягає у наступному. Зазвичай число рівнянь  $r$ , які пов'язують шукані величини  $X_i$  (11.2), менше за число самих виміряних величин  $n$ ,  $r < n$ . Проте, для визначення  $n$  невідомих потрібно і  $n$  рівнянь. Тому кількість рівнянь у системі додають до  $n$  шляхом введення певних параметрів  $t_j$ , що пов'язані з виміряними величинами та не пов'язані одна з одною. Оскільки необхідно додати  $k = n - r$  рівнянь, то і таких параметрів додають  $k$ .

Обравши параметри  $t_j$ , складають **параметричні рівняння зв'язку**

$$X_i = f_i(t_1, \dots, t_k), \quad j = \overline{1, k}, i = \overline{1, n}, \quad (11.5)$$

де  $t_j$  – параметри;

$X_i$  – виміряні величини.

**Параметричні рівняння зв'язку – це математичні співвідношення, що пов'язують істинні значення виміряних величин  $X_i$  з істинними значеннями величин, що визначають  $t_j$ .**

Загальна кількість параметричних рівнянь зв'язку має становити  $n$ :





або у розгорнутому вигляді

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1k}t_k + l'_1 \\ v_2 &= a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2k}t_k + l'_2 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ v_n &= a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \dots + a_{nk}t_k + l'_n \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

Останній вираз (11.10) дозволяє записати вимогу мінімуму суми добутків ваг на поправки в такий спосіб:

$$\sum_{i=1}^n p_i \{f_i(t_1, \dots, t_k) - l'_i\}^2 \rightarrow \min, \quad (11.11)$$

або компактніше:

$$F(t_1, \dots, t_k) \rightarrow \min. \quad (11.12)$$

Залишається, узявши часткові похідні функції  $F$  за параметрами  $t_j$ , звести їх до системи  $k$  рівнянь:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = 0, \quad j = \overline{1, k}. \quad (11.13)$$

Проведені перетворення дозволили від задачі на умовний екстремум перейти шляхом введення параметрів  $t_j$  до задачі на абсолютний, тобто безумовний екстремум.

Зробимо певне відступлення. Оскільки в більшості задач вираз  $f_i(t_1, \dots, t_k)$  є нелінійним, що істотно утруднює розв'язання, функцію (11.7)  $x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k)$  лінеаризують (спрощують, приводячи до лінійного вигляду) шляхом розкладання у ряд Тейлора.

Нагадаємо, що будь-який вираз вважають лінійним (графіком лінійного виразу є пряма лінія), якщо він не містить змінних у ступенях, або добутків змінних, або іншого виду нелінійних складових (рис. 11.1).

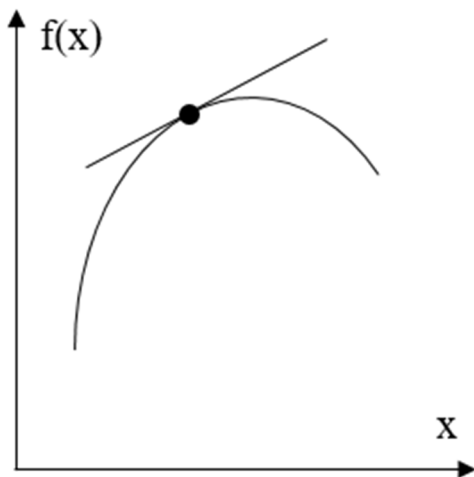


Рисунок 11.1 – Сутність лінеаризації

Для лінеаризації функції  $f_i(t_1, \dots, t_k)$  застосовують формулу розкладання функції у ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + \\ &\quad + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x - a)^{n-1} + R_n(x). \end{aligned}$$

Зауважимо, що розкладання функції у ряд Тейлора є справедливим тільки для оточення певної точки, в якій відомі значення  $t_j^0, j = \overline{1, k}$ . Тому вводять поправки до параметрів  $t_j$ :

$$t_j = t_j^0 + \tau_j, \quad j = \overline{1, k},$$

де  $\tau_j$  – поправка до  $t_j$ ;

$t_j^0$  – відоме значення параметра у  $j$ -й точці, яке обчислюють з системи параметричних рівнянь зв'язку, застосовуючи результати вимірів  $x_i$ . Підставимо їх до рівності для  $v_i$  (11.8) та отримаємо

$$v_i = f_i(t_1^0 + \tau_1, \dots, t_k^0 + \tau_k) - x_i, \quad (11.14)$$

де  $j = \overline{1, k}, i = \overline{1, n}$ .

Розкладання в ряд Тейлора передбачає визначення часткових похідних виразу (11.12). Запишемо результат лінеаризації (11.12), це є важливим, оскільки з'являться нові коефіцієнти  $a_{ij}$  та нові змінні  $\tau_j$ :

$$v_i = f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 \tau_1 + \dots + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 \tau_k - x_i, \quad (11.15)$$

де  $j = \overline{1, k}, i = \overline{1, n}$ , причому слід врахувати, що доданок  $f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) \approx x_i$ .

Коефіцієнти у виразі (11.15), що стоять при  $\tau_j$ , позначимо буквами  $a_{ik}$ , а вільний член рівняння позначимо  $l_i$ , тоді маємо:

$$\left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 = a_{i1}; \dots; \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 = a_{ik}; \quad (11.16)$$

$$f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i = x_i^0 - x_i = l_i. \quad (11.17)$$

Скориставшись прийнятими позначеннями, запишемо систему (11.8) для поправок  $v_i$  як залежності від поправок параметрів  $t_j$ :

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i, \quad j = \overline{1, k}, i = \overline{1, n}. \quad (11.18)$$

Система (11.18) є **системою параметричних рівнянь поправок**, тобто поправки  $v_i$  виражені через поправки параметрів  $\tau_j$ . Зауважимо також, що коефіцієнти  $a_{ij}$ , які отримані у процесі розкладання в ряд Тейлора, є наближеними числовими значеннями похідних. Таким чином, ми отримали систему параметричних рівнянь поправок, рівняння якої є лінійними.

Закінчивши лінеаризацію виразу  $v_i$  (11.8), повернемося до рішення задачі на знаходження мінімуму суми квадратів відхилень та запишемо вимогу мінімуму суми добутків ваг на поправки із врахуванням (11.18):

$$[pv^2] = \sum_{i=1}^n p_i \cdot (a_{i1} \cdot \tau_1 + \dots + a_{ik} \tau_k + l_i)^2 = F(\tau_1, \dots, \tau_k) \rightarrow \min. \quad (11.19)$$

Зауважимо, що скобка у квадраті – це  $v_i$  у квадраті.

Нагадаємо, що функція має точки екстремуму при значеннях змінних, які обертають її часткові похідні на нуль, а нам потрібний мінімум функції  $F$ .

Візьмемо часткову похідну функції  $F$  за змінною  $\tau_1$  та дорівняємо її до нуля:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = 2p_1 \cdot v_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \tau_1} + 2p_2 \cdot v_2 \cdot \frac{\partial v_2}{\partial \tau_1} + 2p_3 \cdot v_3 \cdot \frac{\partial v_3}{\partial \tau_1} + \dots + 2p_n \cdot v_n \cdot \frac{\partial v_n}{\partial \tau_1} = 0. \quad (11.20)$$

Рівність виразу (11.20) нулю дозволяє скоротити множник 2. З виразу (11.18) видно, що часткові похідні  $v_i$  дорівнюють коефіцієнтам  $a_{i1}$ :

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau_1} = a_{11}; \dots; \frac{\partial v_2}{\partial \tau_1} = a_{21}; \dots; \frac{\partial v_n}{\partial \tau_1} = a_{n1},$$



де матриця  $T$  є матрицею невідомих поправок до параметрів  $t_j$ .

Матричний запис великого числа лінійних рівнянь у вигляді одного рівняння є перевагою матричних позначень. Зауважимо, що добутки матриць коефіцієнтів, що стоять при змінних  $\tau_j$  та вільних членах  $l_i$  відповідають структурі коефіцієнтів системи нормальних рівнянь. Після обчислення числових значень коефіцієнтів та вільних членів множник  $A^T \cdot P \cdot A$  позначають  $N$  і систему нормальних рівнянь остаточно записують у такому вигляді:

$$N \cdot T = -L . \quad (11.24)$$

Система нормальних рівнянь (11.24) завжди має єдине рішення, тому при зрівнюванні геодезичних побудов завжди можна знайти щонайкращі наближення  $x'_i$  до істинних значень  $X_i$  з максимальними вагами.

У системі нормальних рівнянь (11.24) матриця коефіцієнтів при невідомих  $N$  є квадратною матрицею. Її діагональні елементи квадратичні, а отже завжди додатні. Коефіцієнти, які розташовані симетрично щодо головної діагоналі, попарно дорівнюють один одному, тобто матриця  $N$  є симетричною. Визначник матриці  $D(N) = |N|$  називають визначником Грама, тобто матриця  $N$  є неособливою, її визначник не дорівнює нулю та вона має зворотну матрицю  $N^{-1}$ .

Нагадаємо, що зворотною до  $N$  називають матрицю  $N^{-1}$ , таку, що  $N \cdot N^{-1} = E$ . Зворотну матрицю зручно застосовувати для рішення системи нормальних рівнянь за допомогою матричних функцій табличного процесора MS Excel. Для отримання розв'язку треба помножити зліва обидві частини (11.24) на матрицю  $N^{-1}$  :

$$N^{-1} \cdot N \cdot T = -N^{-1} \cdot L , \quad \text{звідки } T = -N^{-1} \cdot L .$$

Формула MS Excel для обчислення коренів системи рівнянь має два аргументи:

$$=\text{МУМНОЖ}(\text{МОБР}(A1:B3);D1:D3),$$

де (A1:B3) – матриця  $N$  (матриця коефіцієнтів при змінних);

МОБР(A1:B3) – функція обернення матриці коефіцієнтів при змінних, яка є першим аргументом функції МУМНОЖ;

D1:D3 – матриця вільних членів, яка є другим аргументом функції МУМНОЖ. Передбачається, що вільні члени розташовані у правих частинах рівнянь системи після знаку рівності.

Для розв'язання системи рівнянь в таблиці MS Excel треба помістити масив коефіцієнтів рівнянь, виділити комірки, в яких буде розміщено розв'язок, та натиснути комбінацію клавіш Ctrl + Shift + Enter.

Зауважимо, що якщо результати вимірів містять лише випадкові похибки, що підкоряються нормальному закону розподілу, то значення невідомих, отримані за методом найменших квадратів, є найімовірнішими значеннями і мають найменшу середню квадратичну похибку. Якщо результати вимірів, окрім



Таблиця 11.1 – Схема обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Номер	$p_j$	$a_{j1}$	$a_{j2}$	$a_{j3}$	$l_j$	$S_j$	$V_j$
1	$p_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$l_1$	$S_1$	$V_1$
2	$p_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$l_2$	$S_2$	$V_2$
...							
$n$	$p_n$	$a_{n1}$	$a_{n2}$	$a_{n3}$	$l_n$	$S_n$	$V_n$
[ ]		$[a_1]$	$[a_2]$	$[a_3]$	$[l]$	$[S]$	$[V]$
		$[pa_1a_1]$	$[pa_1a_2]$	$[pa_1a_3]$	$[pa_1l]$	$[pa_1S]$	
			$[pa_2a_2]$	$[pa_2a_3]$	$[pa_2l]$	$[pa_2S]$	
				$[pa_3a_3]$	$[pa_3l]$	$[pa_3S]$	
					$[p_1l]$	$[p_1S]$	
						$[pSS]$	

### Запитання для самоперевірки:

1. Поясніть, які рівняння називають умовними рівняннями.
2. Наведіть приклад умовного рівняння нелінійного виду.
3. Поясніть, що таке нев'язка та як її обчислюють.
4. Охарактеризуйте властивості нев'язок.
5. У яких випадках виникає задача зрівнювання геодезичних побудов?
6. У чому полягає ідея принципу найменших квадратів та принципу найбільшої ваги?
7. Надайте визначення параметричним рівнянням зв'язку. Як визначають загальне число параметричних рівнянь зв'язку?
8. Надайте визначення параметричним рівнянням поправок.
9. Як перетворюють параметричні рівняння поправок шляхом введення наближених значень невідомих?
10. Як можна отримати наближені значення шуканих величин?
11. Проведіть вивід нормальних рівнянь, ґрунтуючись на принципі найменших квадратів.
12. Як треба діяти, якщо параметричні рівняння зв'язку мають нелінійний вигляд?
13. Опишіть порядок зрівнювання геодезичних побудов параметричним методом у випадку лінійних параметричних рівнянь зв'язку.
14. Опишіть порядок зрівнювання геодезичних побудов параметричним методом у випадку нелінійних параметричних рівнянь зв'язку.
15. У чому полягає підсумковий контроль зрівнювання за параметричним

методом?

16. За яких умов система з  $n$  рівнянь з  $n$  невідомими має єдине рішення?

17. Поясніть, у чому полягає «лінійне перетворення системи рівнянь»?

18. Які системи рівнянь називають еквівалентними?

19. Як обчислюють невідомі системи лінійних рівнянь з використанням зворотної матриці?

## Тема 12 КОРЕЛАТНИЙ МЕТОД ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ПОБУДОВ

Функція Лагранжа. Невизначені множники Лагранжа. Умовні рівняння поправок. Корелатні рівняння поправок. Система нормальних рівнянь корелат.

### 12.1 Особливості корелатного способу зрівнювання

Сутність зрівнювання корелатним способом полягає у тім, що задачу знаходження мінімуму функції  $[pv^2]$  розв'язують, застосовуючи метод Лагранжа. Метод Лагранжа є одним з найбільш загальних підходів до розв'язання задач з пошуку екстремуму функції за наявності сполучних обмежень на її змінні, тобто задач умовної оптимізації. Основне практичне значення методу Лагранжа полягає в тому, що він дозволяє перейти від умовної оптимізації до безумовної. Методи, що припускають таке розв'язання, називають непрямыми. Їх можна застосовувати для досить вузького класу задач, для яких вдається одержати лінійну або таку, що збігається до лінійної, систему рівнянь.

Ідея методу Лагранжа полягає у наступному. Якщо треба знайти мінімум функції  $[pv^2]$ , на змінні якої  $X_1, \dots, X_n$ , що пов'язані одна з одною незалежними умовними рівняннями, накладені обмеження

$$\left. \begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ g_r(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (12.1)$$

то для зведення задачі пошуку умовного екстремуму функції  $[pv^2]$  до задачі безумовної оптимізації застосовують функцію Лагранжа, яка має вигляд:

$$\Phi(x, \lambda) = [pv^2] + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_r g_r(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (12.2)$$

де  $\lambda_i$  - вектор додаткових змінних, які називають невідомими множниками Лагранжа, а функцію  $\Phi(x, \lambda)$  - функцією Лагранжа.

Для функції Лагранжа  $\Phi(x, \lambda)$  вирішують систему рівнянь (шукаємо екстремум) щодо змінних  $x$  і  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad (j = \overline{1, n}) \\ \frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} = \varphi_i(x) = 0, \quad (i = \overline{1, r}) \end{cases} \quad (12.3)$$

Метод Лагранжа складається з наступних етапів.

1. Складання функції Лагранжа  $\Phi(x, \lambda)$ .

2. Знаходження частинних похідних

$$\frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n} \quad \text{і} \quad \frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial \lambda_i}, \quad i = \overline{1, r}.$$

3. Розв'язання системи рівнянь (12.3) щодо змінних  $x$  і  $\lambda$ .

4. Дослідження точок екстремумів, що задовольняють системі (12.3), на максимум (мінімум) за допомогою достатньої ознаки екстремуму.

Нехай виміряні  $n$  величин  $X_1, \dots, X_n$ , що пов'язані одна з одною незалежними умовними рівняннями

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_r(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (12.4)$$

Рівняння (12.4) завжди треба подавати так, щоб у правих частинах стояли нулі.

Нехай для величин  $X_i$  отримані результати вимірів  $x_1, x_2, \dots, x_n$  з вагами відповідно  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Оскільки всі вимірювання  $x_i$  містять похибки вимірів, то у результаті підстановки їх до лівих частин умовних рівнянь в правих частинах, як правило, виходять не нулі, а нев'язки  $W_j$ , що є істинними похибками функцій  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ . Відповідно система рівностей (12.4) матиме наступний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= W_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= W_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_r(x_1, x_2, \dots, x_n) &= W_r \end{aligned} \right\}. \quad (12.5)$$

Задача зрівнювання, перед усім, полягає у задоволенні вимоги щодо усунення усіх нев'язок. Тому виправлені результати вимірювань мають задовольнити системі рівностей

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) &= 0 \\ \varphi_2(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \varphi_r(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (12.6)$$

Зрозуміло, що з усієї множини можливих рішень невизначеної системи (12.6) обирають те, за якого  $[pv^2]$  приймає найменше значення.

Отже, математично поставлену задачу формулюють наступним чином: знайти  $[pv^2] = \min$ , за умови, що змінні  $v_1, v_2, \dots, v_n$  пов'язані одна з одною



рівняннями (12.6). Цю задачу на умовний екстремум у корелатному способі розв'язують за правилами Лагранжа, тобто за допомогою невизначених множників умовних рівнянь.

Зауважимо, що в параметричному способі цю саму задачу на умовний екстремум розв'язують за допомогою допоміжних незалежних змінних, які дозволяють перейти від пошуку умовного екстремуму до пошуку безумовного екстремуму.

Для системи (12.6) функція Лагранжа матиме вигляд

$$\Phi(v_1, \dots, v_n) = pv^2 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_r\varphi_r, \quad (12.7)$$

де  $\varphi_j = \varphi_j(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = 0, (j = \overline{1, r})$

та  $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_r\varphi_r = 0.$

Доведено, що знаходження умовного екстремуму функції  $F = f(x_1, \dots, x_n)$  дає те саме рішення, що й знаходження абсолютного екстремуму функції

$$\Phi = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_r\varphi_r(x_1, \dots, x_n).$$

Введення  $r$  невизначених множників  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  дозволяє розглядати функцію Лагранжа як функцію незалежних змінних. Тоді шукані значення поправок  $v_i$  мають задовольняти рівності виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (12.8)$$

У результаті приєднання до рівностей (12.8) рівностей (12.6) отримуємо систему з  $n + r$  рівнянь із  $n + r$  невідомими (тобто з поправками  $v_1, v_2, \dots, v_n$  та невизначеними множниками Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ).

Такою є схема розв'язання задачі.

Зауважимо, що у випадку, коли умовні рівняння є нелінійними, задача стає практично нерозв'язуваною. Проте, нелінійну функцію можна лінеаризувати шляхом її розкладання у ряд Тейлора. Отже, рівності (12.4) розкладають у ряд Тейлора та, скориставшись тим, що поправки  $v_i$  завжди малі, нехтують членами розкладання порядку вище за перший або другий.

Для кожної з функцій  $\varphi_i$  за формулою розкладання у ряд Тейлора можна записати наступний вираз:

$$\varphi_j(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n) + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\right)_0 v_1 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n}\right)_0 v_n.$$

Позначимо коефіцієнти при змінних  $v_i$ :

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)_0 = a_{ij} \quad (12.9)$$

та отримаємо (12.5) у наступному вигляді:

$$a_{1j}v_1 + \dots + a_{nj}v_n + W_j = 0.$$

Або у вигляді системи

$$\left. \begin{aligned} a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n + W_1 &= 0 \\ a_{12}v_1 + \dots + a_{n2}v_n + W_2 &= 0 \\ \dots &\dots \\ a_{1r}v_1 + \dots + a_{nr}v_n + W_r &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (12.10)$$

а також у вигляді скороченого запису

$$\left. \begin{aligned} [a_1 v] + W_1 &= 0 \\ [a_2 v] + W_2 &= 0 \\ \dots &\dots \\ [a_r v] + W_r &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (12.11)$$

Рівності (12.10) і (12.11) називають умовними рівняннями поправок. Нев'язкі  $W_j$  є вільними членами цих рівнянь. Матрична форма запису умовних рівнянь поправок має наступний вигляд:

$$AV + W = 0. \quad (12.12)$$

Якщо умовні рівняння початково є лінійними, то їх розкладання у ряд Тейлора не потрібне.

Тепер задачу можна сформулювати наступним чином. Треба знайти мінімум функції  $[pv^2]$ , якщо змінні  $v_i$  пов'язані одна з одною рівняннями (12.10).

Для зручності обчислень множники Лагранжа позначають так:

$$\lambda_1 = -2k_1, \lambda_2 = -2k_2, \dots, \lambda_r = -2k_r,$$

де змінні  $k_1, k_2, \dots, k_r$  називають корелатами.

Функція Лагранжа (12.7) тепер має вигляд:

$$\Phi(v_1, \dots, v_n) = [pv^2] - 2k_1([a_1 v] + W_1) - \dots - 2k_r([a_r v] + W_r).$$

Далі напишемо її похідну

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 2p_i v_i - 2k_1 a_{i1} - 2k_2 a_{i2} - \dots - 2k_r a_{ir} = 0,$$

звідки отримаємо поправки

$$v_i = q_i a_{i1} k_1 + q_i a_{i2} k_2 + \dots + q_i a_{ir} k_r, \quad (12.13)$$

де  $q_i$  – зворотні ваги  $q_i = \frac{1}{p_i}$ .

Вираз (12.13) називають **корелатними рівняннями поправок**, що у матричній формі мають наступний вигляд:

$$V = P^{-1} A^T k \quad (12.14)$$

Або  $v_i$  можна виразити інакше:

$$v_i = \frac{a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2 + \dots + a_{ir} k_r}{p_i}. \quad (12.15)$$

Рівності (12.13) і (12.14) називають корелатними рівняннями поправок. З цих рівностей можна визначити шукані поправки  $v_i$  за відомими корелатами  $k_j$ .

Для визначення корелат скористаємось системою (12.13). Помножуючи рівності системи одну за одною на  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}$  та кожен раз додаючи їх одну до одної, отримаємо наступні співвідношення:



прикладів умовних рівнянь.

2. Як обчислюють нев'язки (вільні члени) умовних рівнянь?
3. Опишіть перехід від умовних рівнянь до умовних рівнянь поправок.
4. Є система умовних рівнянь поправок. Необхідно обчислити поправки до результатів вимірів. Чому приходить ся ставити додаткові умови для визначення цих поправок? Як формулюють додаткову умову та що вона дає?
5. Який математичний прийом застосовують при вирішенні задачі знаходження мінімуму суми квадратів поправок у корелатному методі?
6. Поясніть, що таке корелати?
7. Опишіть структуру нормальних рівнянь корелат.
8. Як отримати поправки до результатів вимірів, якщо відомі корелати?
9. Як проводять зрівнювання геодезичних побудов у випадку нелінійних умовних рівнянь?

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений : учебник / В. Д. Большаков, П. А. Гайдаев. – 2-е изд. – М. : Недра, 1977. – 367 с.
2. Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений : практикум / В. Д. Большаков, Ю. И. Маркузе. – 2-е изд. – М. : Недра, 1977. – 345 с.
3. Метешкін К. О. Математична обробка геодезичних вимірів : навч. посібник / К. О. Метешкін, Д. В. Шаульський ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2012. – 176 с.
4. Метешкін К. О. Практикум з математичної обробки геодезичних вимірів : навч. посібник / К. О. Метешкін, Д. В. Шаульський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ, 2014. – 100 с.
5. Воронков О. О. Теорія імовірностей і математична статистика : навч. посіб. / О. О. Воронков, А. Е. Ачкасов, В. Т. Плакіда. – Харків : ХНАМГ, 2008. – 249 с.
7. Математична обробка геодезичних вимірів : дистанційний курс [Електронний ресурс] / К. О. Метешкін, О. О. Воронков ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Режим доступу : <https://dl.kname.edu.ua/course/view.php?id=219>.

*Навчальне видання*

**МЕТЕШКІН** Костянтин Олександрович  
**ВОРОНКОВ** Олексій Олександрович

**МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
зі спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій)*

Відповідальний за випуск *С. Г. Нестеренко*  
*За авторською редакцією*  
Комп'ютерне верстання *О. О. Воронков*

План 2020, поз. 6Л

---

Підп. до друку 14.09.2021. Формат 60x84/16  
Електронне видання. Ум. друк. арк. 7,3.

Видавець і виготовлювач:  
Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.  
Електронна адреса: office@kname.edu.ua  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 5328 від 11.04.2017.