

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**Л. П. Вороновська**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА  
Модуль 2**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної  
та заочної форм навчання зі спеціальності  
194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія  
та водні технології)*

**Харків  
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова  
2022**

**Вороновська Л. П.** Вища математика. Модуль 2 : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 194 – **Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології** / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 195 с.

Автор  
канд. пед. наук Л. П. Вороновська

Рецензент  
**Л. Б. Коваленко**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

*Рекомендовано кафедрою вищої математики,  
протокол № 12 від 4 травня 2021 року*

Конспект лекцій складено з метою допомогти студентам гідротехнічних спеціальностей вишів під час підготовки до занять та іспитів з вищої математики.

© Л. П. Вороновська, 2022  
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022

## ЗМІСТ

ВСТУП		9
ЛЕКЦІЯ 1	ПЕРВІСНА ФУНКЦІЇ І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ.....	10
	1.1 Первісна функція і невизначений інтеграл.....	10
	1.2 Основні властивості невизначеного інтеграла.....	11
	1.3 Таблиця основних інтегралів.....	13
ЛЕКЦІЯ 2	МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЗАМІНОЮ ЗМІННОЇ. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН.....	16
	2.1 Метод інтегрування заміною змінної.....	16
	2.2 Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен.....	18
ЛЕКЦІЯ 3	ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ... ..	22
	3.1 Інтегрування раціональних дробів.....	22
	3.2 Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та різні.....	22
	3.3 Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та серед яких є кратні.....	25
	3.4 Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника якого є комплексні.....	27
ЛЕКЦІЯ 4	МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ.....	30
ЛЕКЦІЯ 5	ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ.....	36
	5.1 Інтегрування тригонометричних функцій.	
	5.2 Інтеграли виду $\int \sin ax \cos bx \, dx$ , $\int \cos ax \cos bx \, dx$ , $\int \sin ax \sin bx \, dx$ .....	39
	5.3 Інтегрування ірраціональних функцій.....	42

ЛЕКЦІЯ 6	ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПІДСТАНОВОК. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦЯ.....	46
	6.1 Інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ , $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$ , $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ .....	46
	6.2 Визначений інтеграл.....	48
	6.3 Властивості визначеного інтеграла.....	50
	6.4 Формула Ньютона–Лейбниця.....	52
ЛЕКЦІЯ 7	ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ І ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ.....	55
	7.1 Заміна змінної у визначеному інтегралі ....	55
	7.2 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.....	57
ЛЕКЦІЯ 8	НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ.....	60
	8.1 Невласні інтеграли по нескінченному проміжку (першого роду).....	60
	8.2 Невласні інтеграли від розривних функцій (другого роду).....	63
ЛЕКЦІЯ 9	ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА.....	69
	9.1 Площа плоскої фігури.....	69
	9.2 Довжина дуги кривої.....	76
	9.3 Об'єм тіла обертання.....	83
ЛЕКЦІЯ 10	ФІЗИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА.....	85
	10.1 Маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої дуги .....	85
	10.2 Маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої області .....	89
ЛЕКЦІЯ 11	ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ЛІНІЇ РІВНЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ. ПОВЕРХНІ РІВНЯ ФУНКЦІЇ ТРЬОХ ЗМІННИХ. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.....	94

	11.1	Поняття функції багатьох змінних. Область визначення.....	94
	11.2	Поверхня як графік функції двох змінних.....	96
	11.3	Лінії рівня функції двох змінних. Поверхні рівня функції трьох змінних.....	97
	11.4	Границя та неперервність функції багатьох змінних.....	98
ЛЕКЦІЯ 12		ЧАСТИННІ ПОХІДНІ. ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. СКЛАДЕНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ.....	101
	12.1	Частинні похідні. Частинні диференціали. Повний диференціал функції багатьох змінних.....	101
	12.2	Складені функції та їх диференціювання..	106
ЛЕКЦІЯ 13		НЕЯВНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ЧАСТИННІ ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ.....	110
	13.1	Неявні функції та їх диференціювання....	110
	13.2	Частинні похідні вищих порядків.....	112
	13.3	Частинні диференціали вищих порядків...	116
ЛЕКЦІЯ 14		ПОНЯТТЯ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ.....	118
	14.1	Необхідна умова екстремуму функції двох змінних.....	118
	14.2	Достатня умова екстремуму функції двох змінних.....	120
ЛЕКЦІЯ 15		НАЙМЕНШЕ ТА НАЙБІЛЬШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ У ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ.....	123
	15.1	Найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області.....	123
	15.2	Умовний екстремум функції двох змінних.....	126

ЛЕКЦІЯ 16	ДОТИЧНА ПЛОЩИНА І НОРМАЛЬНА ПРЯМА ДО ПОВЕРХНІ. ПОХІДНА ЗА НАПРЯМКОМ І ГРАДІЄНТ.....	130
	16.1 Дотична площина та нормаль до поверхні	130
	16.2 Похідна за напрямком і градієнт. Зв'язок градієнта з поверхнями рівня.....	133
ЛЕКЦІЯ 17	ПОНЯТТЯ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ. ЗАГАЛЬНИЙ І ЧАСТИННИЙ РОЗВ'ЯЗКИ ТА ЇХ ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ. УМОВИ ІСНУВАННЯ Й ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ.....	139
	17.1 Поняття про диференціальне рівняння. Загальний і частинний розв'язки та їх геометричний зміст.....	139
	17.2 Початкові та граничні умови. Початкова задача і крайова задача.....	141
	17.3 Умови існування та єдності розв'язку задачі Коші.....	143
ЛЕКЦІЯ 18	ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ. ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.....	144
	18.1 Рівняння з відокремлюваними змінними	144
	18.2 Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.....	146
ЛЕКЦІЯ 19	ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ.	151
	19.1 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.....	151
	19.2 Рівняння Бернуллі.....	154
ЛЕКЦІЯ 20	ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ШЛЯХОМ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ.....	156
	20.1 Найпростіше диференціальне рівняння вищих порядків.....	157
	20.2 Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно шуканої функції	

	у, тобто має вигляд $F(x, y', y'') = 0$ .....	159
	20.3 Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно незалежної змінної $x$ , тобто має вигляд: $F(y, y', y'') = 0$ ..	162
ЛЕКЦІЯ 21	ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. СТРУКТУРА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ. ЛІНІЙНЕ ОДНОРІДНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. СТРУКТУРА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.....	164
	21.1 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Структура загального розв'язку.....	164
	21.2 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	166
	21.3 Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Принцип суперпозиції.....	169
ЛЕКЦІЯ 22	ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА З ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ....	171
ЛЕКЦІЯ 23	ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА З ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ (ПРОДОВЖЕННЯ).....	180
ЛЕКЦІЯ 24	ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА З ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ (ПРОДОВЖЕННЯ).....	185

ЛЕКЦІЯ 25 РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ.....	190
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	194



## ВСТУП

Конспект лекцій побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами курсу «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 194 – **Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології**.

Конспект лекцій розрахований на засвоєння матеріалу другого модуля. За програмою охоплені такі розділи вищої математики: «Інтегрування функцій однієї змінної», «Функції декількох змінних» та «Диференціальні рівняння».

Кожна лекція має достатню кількість прикладів. Це дає змогу студентам денної, заочної форм навчання самостійно опанувати даний курс вищої математики.

Доступне, коротке подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів для практичного закріплення вивченого.

# ЛЕКЦІЯ 1

## ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ

### 1.1 Первісна функція і невизначений інтеграл

Займаючись диференціюванням функції, ми ставили перед собою завдання знайти похідну даної функції. Обернене завдання: знайти функцію, знаючи її похідну.

**Визначення.** Первісною функції  $f(x)$  називається функція  $F(x)$ , похідна якої дорівнює даній функції

$$F'(x) = f(x).$$

Нехай  $y = x^2$ . Похідна від якої функції дорівнює  $x^2$ ?

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

Тому первісною від  $x^2$  є функція  $\frac{x^3}{3}$ , але не тільки вона, похідною від функції  $\frac{x^3}{3} - 5$  і  $\frac{x^3}{3} + 14$ , також є  $x^2$ , тобто  $\frac{x^3}{3} + C$ , де  $C$  – довільна постійна. Будь-яка функція  $\frac{x^3}{3} + C$  є первісною функції  $x^2$ .

**Теорема.** Будь-яка неперервна функція має нескінченну множину первісних, причому будь-які дві з них відрізняються одна від одної лише постійним доданком.

$$(F(x) + C)' = f(x);$$

$$F'(x) = f(x).$$

**Визначення.** Знаходження первісної називається невизначеним інтегруванням, а множина всіх первісних від функції  $f(x)$  називається невизначеним інтегралом від функції  $f(x)$  і позначається, як

$$\int f(x)dx,$$

де  $f(x)$  – підінтегральна функція;  $f(x)dx$  – підінтегральний вираз;  $x$  – змінна інтегрування.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де  $F(x)$  – первісна функції  $f(x)$ ,  $C$  – довільна постійна.

Невизначене інтегрування є дією, оберненою до диференціювання. Правильність інтегрування можна перевірити диференціюванням отриманого виразу.

Графік первісної функції  $f(x)$  називається інтегральною кривою функції  $y = f(x)$  (рис. 1.1).

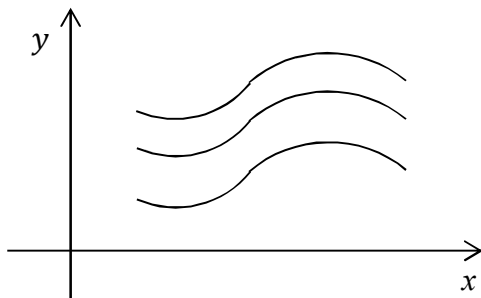


Рисунок 1.1

Невизначений інтеграл графічно представляється множиною всіх інтегральних кривих, отриманих при неперервному паралельному русі.

## 1.2 Основні властивості невизначеного інтеграла

1.  $(\int f(x)dx)' = f(x)$ .
2.  $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$ .
3.  $\int dF(x) = F(x) + C$ .

4. **Теорема 1.** Сталій множник підінтегральної функції можна виносити за символ інтеграла:

$$\int C f(x) dx = C \int f(x) dx,$$

де  $C$  – константа.

5. **Теорема 2.** Інтеграл від алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі інтегралів від кожної з функцій:

$$\begin{aligned} & \int (f(x) + \varphi(x) + \dots + \psi(x)) dx = \\ & = \int f(x) dx + \int \varphi(x) dx + \dots + \int \psi(x) dx, \end{aligned}$$

де  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$ , ...,  $\psi(x)$  – функції незалежної змінної  $x$ .

6. **Теорема 3.** Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд при підстановці замість незалежної змінної будь-якої диференційованої функції від неї, тобто якщо

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(U) du = F(U) + C,$$

де  $U = \varphi(x)$  – диференційована функція від  $x$ .

**Доведення.** З того що

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

випливає  $F'(x) = f(x)$ . Якщо  $F(U) = F(\varphi(x))$ , то маємо:

$$dF(U) = F'(U) dU = f(U) dU,$$

звідси:

$$\int f(U) dU = \int dF(U) = F(U) + C.$$

7.  $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$

### 1.3 Таблица основних інтегралів

1.  $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1, \alpha \in \mathbb{R}.$
2.  $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$
3.  $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$
4.  $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$
5.  $\int a^u = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$
6.  $\int e^u du = e^u + C.$
7.  $\int \sin u du = -\cos u + C.$
8.  $\int \cos u du = \sin u + C.$
9.  $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$
10.  $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$
11.  $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$
12.  $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C, a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$
13.  $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C, |a| > |u|, a \neq 0.$
14.  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + A}| + C.$

Зауважимо, що  $\alpha, A$  і  $a$  – сталі,  $u$  – незалежна змінна або будь-яка диференційована функція від незалежної змінної.

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл.

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \sin 5x \, dx &= \left. \begin{array}{l} u = 5x \\ du = (5x)' = 5dx \\ dx = \frac{du}{5} \end{array} \right| = \int \sin u \frac{du}{5} = \\ &= -\frac{1}{5} \cos u + C = -\frac{1}{5} \cos 5x + C ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int e^{-3x} \, dx &= \left. \begin{array}{l} u = -3x \\ du = -3dx \\ dx = -\frac{du}{3} \end{array} \right| = \int e^u \left(-\frac{du}{3}\right) = -\frac{1}{3} e^u + C = \\ &= -\frac{1}{3} e^{-3x} + C. \end{aligned}$$

Для безпосереднього інтегрування будемо використовувати таку формулу:

$$\int f(kx + b) \, dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2+3x}}$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[5]{2+3x}} &= \int \frac{dx}{(2+3x)^{\frac{1}{5}}} = \int (2+3x)^{-\frac{1}{5}} \, dx = \frac{1}{3} \frac{(2+3x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + C \\ &= -\frac{5^5 \sqrt{(2+3x)^4}}{12} + C. \end{aligned}$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{dx}{1+9x}$ .

*Розв'язання.*

$$\int \frac{dx}{1+9x} = \frac{1}{9} \ln|1+9x| + C.$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{dx}{3x^2+12}$ .  
*Розв'язання.*

$$\int \frac{dx}{3x^2+12} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}}$ .

*Розв'язання.*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

## ЛЕКЦІЯ 2

### МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЗАМІНОЮ ЗМІННОЇ. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

#### 2.1 Метод інтегрування заміною змінної

*Метод заміни змінної (підстановки)*, що ґрунтується на властивості інваріантності, є основним при інтегруванні. Зокрема, підведення під знак диференціала можна розглядати як неявне застосування цього методу.

Нехай необхідно обчислити інтеграл  $\int f(x)dx$ , але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона існує.

Запишемо інтеграл  $\int f(x)dx$  у вигляді  $\int q(\varphi(x))\varphi'(x) dx$ , тобто виділимо диференціал деякої функції  $\varphi(x)$  і, застосовуючи підстановку  $u = \varphi(x)$ , перейдемо в інтегралі  $\int q(\varphi(x))\varphi'(x) dx$  до нової змінної:

$$\int q(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int q(u) du.$$

Після цього знайдемо розв'язок інтегралу. Повернемося до попередньої змінної  $x$ , припустивши, що  $u = \varphi(x)$ :

$$\begin{aligned} \int q(\varphi(x))\varphi'(x) dx &= \left| \begin{array}{l} q(\varphi(x))\varphi'(x)dx = q(u)du \\ u = \varphi(x) \end{array} \right| = \\ &= \int q(u)du = Q(u) + C = Q(\varphi(x)) + C. \end{aligned}$$

*Зауваження.* За нову змінну вибирають функцію, похідна (диференціал) якої у вигляді множника, по суті, вже міститься у підінтегральному виразі.

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}}$ .

*Розв'язання.*



$$\int \frac{x dx}{\sqrt{8-3x^2}} = \left| \begin{array}{l} u = 8 - 3x^2 \\ du = -6x dx \\ x dx = -\frac{1}{6} du \end{array} \right| = -\frac{1}{6} \int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{u} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{8-3x^2} + C.$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{e^{\arctg 2x}}{1+4x^2} dx$ .

*Розв'язання.* Заданий інтеграл можна подати у вигляді:

$$\int \frac{e^{\arctg 2x}}{1+4x^2} dx = \int e^{\arctg 2x} \cdot \frac{1}{1+4x^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = \arctg 2x \\ du = \frac{2}{1+4x^2} dx \\ \frac{du}{2} = \frac{1}{1+4x^2} dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int e^u \cdot du = \frac{1}{2} e^{\arctg 2x} + C.$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}+7}}$ .

*Розв'язання.* Маємо:

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}+7}} = \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{(x^6)^2+7}} = \left| \begin{array}{l} t = x^6 \\ dt = 6x^5 dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{6x^5 dx}{\sqrt{(x^6)^2+7}} = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}} =$$

$$= \frac{1}{6} \ln \left| t + \sqrt{t^2+7} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| x^6 + \sqrt{x^{12}+7} \right| + C.$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл:

а)  $\int \sin^4 x \cos x dx$ , б)  $\int \operatorname{ctg} x dx$ .

Розв'язання. а)  $\int \sin^4 x \cos x dx = \int (\sin x)^4 \cos x dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right| = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{(\sin x)^5}{5} + C;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int \operatorname{ctg} x dx &= \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{du}{u} = \\ &= \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C. \end{aligned}$$

## 2.2 Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен

Інтеграли, які мають вигляд  $\int \frac{dx}{Ax^2+Bx+C}$  або  $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$

Щоб проінтегрувати ці інтеграли, необхідно виділити повний квадрат у знаменнику підінтегральної функції. Використуємо формулу «квадрат суми (різниці)»  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$  і виконаємо наступні дії:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= \left| \begin{array}{l} a^2 = Ax^2; a = x\sqrt{A}; \\ 2ab = Bx; 2x\sqrt{A}b = Bx; \\ b = \frac{B}{2\sqrt{A}}; b^2 = \frac{B^2}{4A} \end{array} \right| = \\ &= Ax^2 + Bx + \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{4A} + C = \left( Ax^2 + Bx + \frac{B^2}{4A} \right) + \left( C - \frac{B^2}{4A} \right) = \\ &= \left( x\sqrt{A} + \frac{B}{2\sqrt{A}} \right)^2 \pm k^2, \end{aligned}$$

де  $k^2 = C - \frac{B^2}{4A}$ . Знак плюс або мінус обирається залежно від того, яким є другий доданок: додатним чи від'ємним.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{dx}{x^2-8x+13}$ .

*Розв'язання.* Виділимо повний квадрат у виразі, розміщеному в знаменнику підінтегральної функції. Отже:

$$x^2 - 8x + 13 = \left| \begin{array}{ll} a^2 = x^2 & a = x \\ 2ab = 8x & 2xb = 8x \\ b = 4 & b^2 = 16 \end{array} \right| =$$

$$= (x^2 - 8x + 16) - 16 + 13 = (x - 4)^2 - 3.$$

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 13} = \int \frac{dx}{(x - 4)^2 - 3} = \left| \begin{array}{l} u = x - 4 \\ du = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{du}{u^2 - 3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{u - \sqrt{3}}{u + \sqrt{3}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - 4 - \sqrt{3}}{x - 4 + \sqrt{3}} \right| + C.$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{5+6x-x^2}}$ .

*Розв'язання.* Виділимо повний квадрат у виразі, під коренем в знаменнику підінтегральної функції:

$$5 + 6x - x^2 = -(x^2 - 6x - 5) = \left| \begin{array}{ll} a^2 = x^2 & a = x \\ 2ab = 6x & 2xb = 6x \\ b = 3 & b^2 = 9 \end{array} \right| =$$

$$= -(x^2 - 6x + 9 - 9 - 5) = -((x - 3)^2 - 14) = 14 - (x - 3)^2.$$

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5+6x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{14 - (x - 3)^2}} = \left| \begin{array}{l} u = x - 3 \\ du = dx \end{array} \right| =$$

$$= \arcsin \frac{u}{\sqrt{14}} + C = \arcsin \frac{x - 3}{\sqrt{14}} + C.$$

**Інтеграл, які мають вигляд  $\int \frac{(Mx+N)dx}{Ax^2+Bx+C}$  або  $\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$**

Розглянемо більш загальні інтегралі. Зауважимо, що в чисельнику розташовано многочлен першого порядку, а в знаменнику (або в підкореновому виразі знаменника) – многочлен другого порядку. За методом інтегрування заміною змінної знаменник (або підкореновий вираз знаменника) позначимо як  $u$  і доповнюємо чисельник до вигляду отриманого  $du$  шляхом тотожних перетворень.

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{x+3}{x^2+4x-2} dx$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2+4x-2} dx &= \left| u = x^2 + 4x - 2 \right| = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+3)}{x^2+4x-2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+6+4-4}{x^2+4x-2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+4)+2}{x^2+4x-2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x-2} dx + \int \frac{dx}{x^2+4x-2} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Знайдемо отримані інтегралі:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x-2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+4x-2| + C; \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2+4x-2} = \left| \begin{array}{l} a^2 = x^2; a = x \\ 2ab = 4x; 2xb = 4x \\ b = 2; b^2 = 4 \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 - 4 - 2} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 - 6} = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = x + 2 \\ du = dx \end{array} \right| = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x+2-\sqrt{6}}{x+2+\sqrt{6}} \right| + C.
\end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 2} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4x - 2| + \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x+2-\sqrt{6}}{x+2+\sqrt{6}} \right| + C$$

## ЛЕКЦІЯ 3 ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

### 3.1 Інтегрування раціональних дробів

Розглянемо методику інтегрування одного з найважливіших класів елементарних функцій – **раціональних функцій**. Будь-яка елементарна функція  $R(x)$  може бути представлена у вигляді дробу  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ , де  $P_m(x)$  і  $Q_n(x)$  – многочлени:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}.$$

Нагадаємо, що якщо максимальний степінь чисельника менший за максимальний степінь знаменника ( $m < n$ ), дріб називається **правильним**, якщо максимальний степінь чисельника більший або дорівнює максимальному степеню знаменника ( $m \geq n$ ), дріб називається **неправильним**. Якщо  $m \geq n$ , то виконавши операцію ділення многочленів, будь-який неправильний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлену (ціла частина) і правильного дробу (отриманий многочлен – результат ділення; чисельник отриманого правильного дробу – залишок від ділення):

$$R(x) = N(x) + \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}.$$

Інтегрувати можна лише правильні раціональні дроби. Інтегрування многочлену  $N(x)$  не складає труднощів, проблема полягає в інтегруванні правильного раціонального дробу.

### 3.2 Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та різні

Нехай дано правильний раціональний дріб  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , знаменник якого має дійсні різні корені:

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Тоді раціональний дріб можна розкласти на найпростіші дробу:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - a_1} + \frac{B}{x - a_2} + \dots + \frac{N}{x - a_n}.$$

Інтеграл від такого дробу зводиться до

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= A \int \frac{dx}{x - a_1} + B \int \frac{dx}{x - a_2} + \dots + N \int \frac{dx}{x - a_n} = \\ &= A \ln|x - a_1| + B \ln|x - a_2| + \dots + N \ln|x - a_n|. \end{aligned}$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$ .

*Розв'язання.* Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більший, ніж степінь знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши чисельник на многочлен знаменник:

$$\begin{array}{r} \frac{x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 8}{x^5 + 0x^4 - 4x^3} \quad \left| \frac{x^3 + 0x^2 - 4x}{x^2 + x + 4} \right. \\ \underline{-x^4 + 4x^3 + 0x^2 + 0x - 8} \\ x^4 + 0x^3 - 4x^2 \\ \underline{-x^4 + 0x^3 - 4x^2} \\ 4x^3 + 4x^2 + 0x - 8 \\ \underline{-4x^3 + 0x^2 - 16x} \\ 4x^2 + 16x - 8 \quad (\text{залишок}). \end{array}$$

Подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного раціонального дробу:

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}, \quad \text{тоді}$$

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left( x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дроби

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$$

має три прості корені:  $x = 0$ ,  $x = 2$  і  $x = -2$ , то його можна подати у вигляді суми трьох дроби:

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}.$$

Зведемо дроби до спільного знаменника, прирівнюємо чисельники:

$$x^2 + 4x - 2 = A(x - 2)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2).$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів використовують методом невизначених коефіцієнтів, за якого порівнюються коефіцієнти ліворуч та праворуч при однакових функціях, у цьому випадку степенів  $x$ . У випадку дійсних і різних коренів знаменника набагато швидше знаходять коефіцієнти, послідовно підставляючи відомі корені знаменника:

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & -2 = -4A, \\ x = 2 & 10 = 8B, \\ x = -2 & -6 = 8C. \end{array}$$

Звідси  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{5}{4}$ ,  $C = -\frac{3}{4}$ .



Отже:

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2},$$

а шуканий інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \\ &+ 4 \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \int \frac{dx}{x} + 5 \int \frac{dx}{x-2} - 3 \int \frac{dx}{x+2} = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

### 3.3 Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та серед яких є кратні

Нехай дано правильний раціональний дріб  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , знаменник якого має дійсні корені, серед яких є кратні:

$$Q(x) = (x - a_1)^n (x - a_2)^m \dots (x - a_n)^k.$$

В такому випадку раціональний дріб може бути розкладений на найпростіші дроби в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A}{(x - a_1)^n} + \frac{B}{(x - a_1)^{n-1}} + \frac{C}{(x - a_1)^{n-2}} + \dots + \frac{L}{x - a_1} + \\ &+ \dots + \frac{N}{x - a_n}. \end{aligned}$$

Отже, зрозуміло, що кореню  $a_1$  кратності  $n$  відповідає  $n$  доданків; кожен наступний дріб має степінь на одиницю меншу від попереднього і так до першої. Інтегрування отриманих дробів

виконується за формулами таблиці інтегралів. Проілюструємо це на прикладі.

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx$$

*Розв'язання.* Переконаємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що многочлен

$$\begin{aligned}(x - 1)(x^3 - 4x^2 + 3x) &= x(x - 1)(x^2 - 4x + 3) = \\ &= x(x - 1)(x - 1)(x - 3) = x(x - 1)^2(x - 3)\end{aligned}$$

має чотири корені, з яких  $x = 0$  і  $x = 3$  є простими, а  $x = 1$  – двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x(x - 1)^2(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 1)^2} + \frac{D}{x - 1}.$$

Приведемо праву частину отриманого виразу до загального знаменника. Унаслідок рівності дробів та їх знаменників отримаємо рівність чисельників, отже, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів  $A, B, C, D$ :

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 3 &= A(x - 3)(x - 1)^2 + Bx(x - 1)^2 + \\ &+ Cx(x - 3) + Dx(x - 1)(x - 3).\end{aligned}$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом (підстановкою коренів знаменника в отриману тотожність та порівняння коефіцієнтів, які розташовані біля однакового степеня змінної):

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & 3 = -3A, \\ x = 3 & 6 = 12B, \\ x = 1 & 2 = -2C, \\ x^3 & 0 = A + B + D. \end{array}$$

Звідси:  $A = -1$ ,  $B = \frac{1}{2}$ ,  $C = -1$ ,  $D = \frac{1}{2}$ , отже,

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x(x-1)^2(x-3)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1},$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx = \\ & = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} \right) dx = \\ & = \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-3| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

### 3.4 Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника якого є комплексні

Нехай дано правильний раціональний дріб  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , знаменник якого має комплексні різні корені:

$$Q(x) = (x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_sx + q_s).$$

У такому випадку раціональний дріб набуває вигляду:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{Nx + M}{x^2 + p_sx + q_s}.$$

Обчислення інтегралів такого вигляду ми розглядали раніше (див. лекцію 2 п. 2.2), тому відразу звернемося до прикладів.

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{4x - 10}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} dx.$$

*Розв'язання.* Переконаємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що  $x^2 - 2x + 10 = 0$ ,  $D = 4 - 40 = -36 < 0$ , маємо

$$\frac{4x - 10}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 10}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів  $A, B, C$ :

$$4x - 10 = A(x^2 - 2x + 10) + (Bx + C)(x + 2).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{l|l} x = -2 & -18 = 18A, \\ x^2 & 0 = A + B, \\ x^0 & -10 = 10A + 2C, \end{array}$$

звідси:  $A = -1, B = 1, C = 0$ , отже,

$$\frac{4x - 10}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} = -\frac{1}{x + 2} + \frac{x}{x^2 - 2x + 10}.$$

Отримаємо:

$$\int \frac{4x - 10}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} dx = \int \left( -\frac{1}{x + 2} + \frac{x}{x^2 - 2x + 10} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 2x + 10 \\ du = (2x - 2)dx \end{array} \right| = - \int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 2x + 10} dx = \\
&= -\ln|x+2| + \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2 + 2}{x^2 - 2x + 10} dx = \\
&= -\ln|x+2| + \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 10} dx + \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10} = \\
&= \left| \begin{array}{l} a^2 = x^2; a = x \\ 2ab = 2x; 2xb = 2x \\ b = 1; b^2 = 1 \end{array} \right| = \\
&= -\ln|x+2| + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 10| + \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 9} = \\
&= -\ln|x+2| + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 10| + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{3} + C.
\end{aligned}$$

## ЛЕКЦІЯ 4

### МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Нехай  $u(x)$  і  $v(x)$  – неперервні диференційовані функції незалежної змінної. Диференціал їх добутку має вигляд

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Звідси 
$$udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруємо обидві частини отриманої рівності, отримаємо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

або 
$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Суть методу інтегрування частинами полягає в тому, що підінтегральний вираз  $f(x)dx$  може бути представлений у вигляді добутку множників  $u$  і  $dv$ . Далі знаходимо  $v$  по відомому виразу  $dv$  шляхом інтегрування, і потім беремо інтеграл  $\int vdu$ . Цей метод застосовують, якщо обидва ці інтеграли легко знаходяться, а заданий інтеграл безпосередньо знайти неможливо.

Метод інтегрування частинами надзвичайно важливий, він охоплює інтегрування великого класу функцій і має практичне застосування при розв'язанні прикладних задач.

Отже, методом інтегрування частинами обчислюються інтеграли, що мають підінтегральну функцію виду:

1. Добуток степеневі функції  $P_n(x)$  на тригонометричну:

$$\int P_n(x) \cdot \begin{matrix} \sin(ax + b) \\ \cos(ax + b) \\ \operatorname{tg}(ax + b) \\ \operatorname{ctg}(ax + b) \end{matrix} \cdot dx, \quad (u = P_n(x));$$

Зрозуміло, що береться одна з тригонометричних функцій.

2. Добуток степеневі функції  $P_n(x)$  на показникову:

$$\int P_n(x) a^x dx, \quad (u = P_n(x))$$

3. Логарифмічна функція:

$$\int \log_a(ax + b) dx, \quad (u = \log_a(ax + b));$$

4. Добуток степеневі функції  $P_n(x)$  на логарифмічну:

$$\int P_n(x) \log_a(ax + b) dx; \quad (u = \log_a(ax + b));$$

5. Обернена тригонометрична функція:

$$\int \begin{matrix} \arcsin(ax + b) \\ \arccos(ax + b) \\ \operatorname{arctg}(ax + b) \\ \operatorname{arcctg}(ax + b) \end{matrix} \cdot dx; \quad \left( u = \begin{matrix} \arcsin(ax + b) \\ \arccos(ax + b) \\ \operatorname{arctg}(ax + b) \\ \operatorname{arcctg}(ax + b) \end{matrix} \right);$$

6. Добуток степеневі функції  $P_n(x)$  на обернену тригонометричну:

$$\int P_n(x) \cdot \begin{matrix} \arcsin(ax + b) \\ \arccos(ax + b) \\ \operatorname{arctg}(ax + b) \\ \operatorname{arcctg}(ax + b) \end{matrix} \cdot dx; \quad \left( u = \begin{matrix} \arcsin(ax + b) \\ \arccos(ax + b) \\ \operatorname{arctg}(ax + b) \\ \operatorname{arcctg}(ax + b) \end{matrix} \right);$$

і багато-багато інших...

*Зауваження.* Перший та другий тип інтегралів з даного переліку інтегрується частинами  $n$  разів; тобто кількість інтегрування частинами дорівнює степеню многочлена  $P_n(x)$ .

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int (x - 3)e^{2x} dx$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned}\int (x - 3)e^{2x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x - 3, \quad du = dx \\ dv = e^{2x} dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \\ &= (x - 3) \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x - 3}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C.\end{aligned}$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^2 \sin 3x dx.$$

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x dx \\ dv = \sin 3x dx, \quad v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x - \int \left( -\frac{1}{3} \cos 3x \right) 2x dx = \\ &= -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \int x \cos 3x dx.\end{aligned}$$

До останнього інтеграла застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned}\int x \cos 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos 3x dx, \quad v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx = \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x.\end{aligned}$$



Отже, остаточно маємо:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin 3x dx &= -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x \right) + C = \\ &= -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{9} x \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + C.\end{aligned}$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^3 \ln x dx.$$

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx, \quad v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{16} \cdot x^4 + C.\end{aligned}$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int x \cdot \arctg x dx$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned}\int x \cdot \arctg x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arctg x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left( x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \right) =$$

Отриманий інтеграл – це інтеграл від неправильного раціонального дробу, який має степінь чисельника рівну степені знаменника, тому необхідно виділити цілу частину, шляхом доповнення чисельника до виду знаменника.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left( x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) + C. \end{aligned}$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int e^x \cdot \sin 3x dx$ .

*Розв'язання.*

Маємо підінтегральну функцію, що є добутком показникової функції на тригонометричну. Такі інтеграли відносяться до інтегралів, що інтегруються частинами, але окрім цього це так звані «зворотні» інтеграли. Вони інтегруються частинами двічі. За  $u$  можемо обрати будь-яку з функцій, але при повторному інтегруванні за  $u$  обираємо ту саму функцію.

$$\int e^x \cdot \sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x; \quad du = e^x dx; \\ dv = \sin 3x dx; \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= e^x \left( -\frac{1}{3} \cos 3x \right) - \int -\frac{1}{3} \cos 3x \cdot e^x dx = \\
&= -\frac{1}{3} e^x \cos 3x + \frac{1}{3} \int e^x \cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x; \quad du = e^x dx \\ dv = \cos 3x dx; \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x. \end{array} \right. \\
&= -\frac{1}{3} e^x \cos 3x + \frac{1}{3} \left( e^x \cdot \frac{1}{3} \sin 3x - \int \frac{1}{3} \sin 3x \cdot e^x dx \right) = \\
&= -\frac{1}{3} e^x \cos 3x + \frac{1}{9} e^x \sin 3x - \frac{1}{9} \int e^x \cdot \sin 3x dx.
\end{aligned}$$

Позначимо початковий інтеграл як  $I$ , тоді маємо:

$$I = -\frac{1}{3} e^x \cos 3x + \frac{1}{9} e^x \sin 3x - \frac{1}{9} I;$$

$$I + \frac{1}{9} I = -\frac{1}{3} e^x \cos 3x + \frac{1}{9} e^x \sin 3x;$$

$$\frac{10}{9} I = -\frac{1}{3} e^x \cos 3x + \frac{1}{9} e^x \sin 3x;$$

$$I = -\frac{3}{10} e^x \cos 3x + \frac{1}{10} e^x \sin 3x + C.$$

Тому остаточно маємо:

$$\int e^x \cdot \sin 3x dx = -\frac{3}{10} e^x \cos 3x + \frac{1}{10} e^x \sin 3x + C.$$

## ЛЕКЦІЯ 5

### ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

#### 5.1 Інтегрування тригонометричних функцій

Інтеграл виду  $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

1. Якщо  $m$  і  $n$  – цілі числа і принаймні одне з цих чисел є непарним додатним числом, наприклад  $m = 2k + 1$ , то

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx &= \int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^n x dx = \\ &= \int \sin^{2k} x \cdot \sin x \cdot \cos^n x dx = \\ &= \int (\sin^2 x)^k \cdot \cos^n x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cdot \cos^n x \cdot \sin x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = - \int (1 - t^2)^k \cdot t^n \cdot dt.\end{aligned}$$

Якщо ж непарним буде число  $n = 2p + 1 > 0$ , то необхідно застосувати підстановку  $t = \sin x$ .

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл

$$\int \cos^4 x \cdot \sin^5 x dx.$$

*Розв'язання.* Тут  $m = 5, n = 4$ . Враховуючи, що  $m$  непарне, виконаємо перетворення:

$$\int \cos^4 x \cdot \sin^5 x dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \cos^4 x \cdot (\sin^2 x)^2 \cdot \sin x dx = \\
&= \int \cos^4 x \cdot (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \\
&= - \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = - \int t^4 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \\
&= \int (2t^6 - t^4 - t^8) dt = \frac{2t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^9}{9} + C = \\
&= \frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^9 x}{9} + C.
\end{aligned}$$

2. Якщо обидва показники  $m$  і  $n$  – парні невід’ємні числа (зокрема один з них може бути рівним нулю), то доцільно застосувати формули зниження степеню:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx.$$

*Розв’язання.* В прикладі  $m = 4$ ,  $n = 2$  обидва додатні і парні, тобто маємо:

$$\begin{aligned}
&\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \\
&= \int \sin^2 x \cdot (\sin x \cdot \cos x)^2 dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \cdot \frac{1}{4} \sin^2 2x dx =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8} \left( \int \sin^2 2x dx - \int \cos 2x \cdot \sin^2 2x dx \right).$$

Розглянемо отримані інтеграли окремо:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sin^2 2x dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \int dx - \int \cos 4x dx \right) = \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + C_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \cos 2x \cdot \sin^2 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin 2x \\ du = 2 \cos 2x dx \\ \cos 2x dx = \frac{du}{2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int u^2 du = \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} + C = \frac{u^3}{6} + C_2 = \frac{\sin^3 2x}{6} + C_2. \end{aligned}$$

Підставляючи отримані вирази та вважаючи, що  $C_1 + C_2 = C$ , отримаємо розв'язок:

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

3. Якщо обидва показники парні, причому принаймні один із них від'ємний, то необхідно виконати заміну  $\operatorname{tg} x = t$  або  $\operatorname{ctg} x = t$ .

Тоді:

$$x = \operatorname{arctg} t \quad (x = \operatorname{arcctg} t),$$

$$dx = \frac{dt}{t^2+1} \quad \left( dx = -\frac{dt}{t^2+1} \right).$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ .

*Розв'язання.* Тут  $m = 2, n = -4 < 0$  і  $m$  і  $n$  парні, тому

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

## 5.2 Інтеграли виду $\int \sin ax \cos bx dx$ , $\int \cos ax \cos bx dx$ , $\int \sin ax \sin bx dx$

Щоб знайти ці інтеграли, необхідно перейти від добутку тригонометричних функцій до суми за відомими формулами:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x),$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x),$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x).$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл

$$\int \sin 4x \cdot \cos 3x dx.$$

*Розв'язання.* Застосуємо формулу

$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$ , отримаємо:

$$\begin{aligned}\int \sin 4x \cdot \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 7x + \sin x) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 7x}{7} - \frac{1}{2} \cdot \cos x + C = \\ &= -\frac{\cos 7x}{14} - \frac{\cos x}{2} + C.\end{aligned}$$

**Інтеграл**и виду  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , де  $R$  – раціональна функція від  $\sin x$  і  $\cos x$ . За допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки  $tg \frac{x}{2} = t$  ( $-\pi < x < \pi$ ) інтеграл зводиться до інтегралу від раціональної функції. При цьому

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, & \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x &= 2 \arctg t, & dx &= \frac{2dt}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Зауважимо, що іноді замість підстановки  $tg \frac{x}{2} = t$  зручніше зробити підстановку  $ctg \frac{x}{2} = t$ .

Слід також визначити, що в силу своєї універсальності підстанoвка  $tg \frac{x}{2} = t$  часто призводить до занадто громіздких викладок, що ускладнює знаходження інтеграла. Тому в окремих випадках доцільно застосовувати інші підстановки, які також раціоналізують інтеграл. Наприклад:

1. Якщо виконується рівність



$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

то застосуємо підстановку  $\cos x = t$ .

2. Якщо виконується рівність

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

то застосуємо підстановку  $\sin x = t$ .

3. Якщо виконується рівність

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

то застосовуємо підстановку  $\operatorname{tg} x = t$ , при цьому,

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x = \operatorname{arctg} t,$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} dx$ .

*Розв'язання.* Тут  $m = -\frac{4}{5}$ ,  $n = 3 > 0$  і непарне, тому

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} \cdot \cos x dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} \cdot \cos x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1 - t^2}{t^{\frac{4}{5}}} \cdot dt = \int t^{-\frac{4}{5}} dt - \int t^{\frac{6}{5}} dt = \\ &= 5t^{1/5} - \frac{5t^{11/5}}{11} + C = \end{aligned}$$

$$= 5t^{1/5} \left(1 - \frac{t^2}{11}\right) + C = 5\sqrt[5]{\sin x} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{7}\right) + C.$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$ .

*Розв'язання.*

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x \cdot \cos x}.$$

Якщо у виразі  $\frac{1}{2\sin^2 x \cdot \cos x}$  виконати заміну  $\cos x$  на  $-\cos x$ , то дріб змінить знак на протилежний, тому тут необхідно застосувати підстановку  $\sin x = t$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x} &= \int \frac{dx}{2\sin^2 x \cdot \cos x} = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \sin x, \quad x = \arcsin t \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} = \\ &= -\frac{1}{2t} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = -\frac{1}{2\sin x} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

### 5.3 Інтегрування ірраціональних функцій

**Інтеграли виду**  $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_p}{n_p}}\right) dx$ , де  $R$  – раціональна функція,  $m_i$  і  $n_i$  – натуральні числа ( $i = 1, 2, \dots, p$ ). Даний інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки  $x = t^k$ ,

де  $k$  – найменше спільне кратне знаменників дробів  $\frac{m_i}{n_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ).

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$ .

*Розв'язання.* Тут  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 4$ , тому  $k = 12$  (найменше спільне кратне чисел 2, 3 і 4). Тобто

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} &= \left| \begin{array}{l} x = t^{12} \\ dx = 12 \cdot t^{11} dt \\ t = \sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6}{t^8 - t^3} 12 \cdot t^{11} dt \\ &= 12 \int \frac{t^{17}}{t^3(t^5 - 1)} dt = 12 \int \frac{t^{14} dt}{t^5 - 1} = I \end{aligned}$$

Отримали інтеграл від неправильного раціонального дробу. Вилучаємо цілу частину діленням многочлена на многочлен:

$$\begin{aligned} & - \frac{t^{14}}{t^{14} - t^9} \left| \frac{t^5 - 1}{t^9 + t^4} \right. \\ & \quad \left. - \frac{t^9}{t^9 - t^4} \right. \\ & \quad \left. \frac{t^4}{t^4} \right. \\ I &= 12 \int \left( t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5 - 1} \right) dt = \\ &= 12 \left( \int t^9 dt + \int t^4 dt + \int \frac{t^4 dt}{t^5 - 1} \right) = \left| \begin{array}{l} z = t^5 - 1 \\ dz = 5t^4 dt \\ t^4 dt = \frac{dz}{5} \end{array} \right| = \\ &= 12 \left( \frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5} \int \frac{d(t^5 - 1)}{t^5 - 1} \right) = \\ &= \frac{6}{5} (t^{10} + 2t^5 + 2 \ln|t^5 - 1|) + C. \end{aligned}$$

Повертаючись до змінної  $x$ , остаточно будемо мати:

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \frac{6}{5} \left( \sqrt[6]{x^5} + 2 \sqrt[12]{x^5} + 2 \ln \left| \sqrt[12]{x^5} - 1 \right| \right) + C.$$

**Інтеграли виду**  $\int R \left[ x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_p}{n_p}} \right] dx$ , де  $R$  – раціональна функція,  $m_i$  і  $n_i$  – натуральні числа ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) і визначник  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$  ( $a, b, c, d$  – сталі дійсні числа). Цей інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

де  $k$  – найменший спільний знаменник дробів  $\frac{m_i}{n_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ).

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+7)^2} - \sqrt{2x+7}}.$$

*Розв'язання:* Маємо інтеграл другого виду від ірраціональної функції. Тут:  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 2$ , тому  $k = 6$ . Зробимо підстановку:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+7)^2} - \sqrt{2x+7}} &= \left| \begin{array}{l} 2x+7 = t^6 \\ x = \frac{1}{2}(t^6 - 7) \\ dx = 3t^5 dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3 \int \frac{t^5 dt}{t^3(t-1)} = I. \end{aligned}$$

Скоротивши дріб і поділивши чисельник на знаменник, отримаємо:

$$\begin{aligned} I &= 3 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = 3 \int \left( t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= 3 \left( \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) + C. \end{aligned}$$

Оскільки  $t = \sqrt[6]{2x+7}$ , то повертаючись до змінної  $x$ , будемо мати:

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+7)^2} - \sqrt{2x+7}} = \\ &= 3 \left( \frac{\sqrt[3]{2x+7}}{2} + \sqrt[6]{2x+7} + \ln|\sqrt[6]{2x+7} - 1| \right) + C. \end{aligned}$$

**ЛЕКЦІЯ 6**  
**ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ЗА**  
**ДОПОМОГОЮ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПІДСТАНОВОК.**  
**ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ**  
**ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА.**

**ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦЯ**

**6.1** Інтеграли виду  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ ,  
 $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ ,  $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$

зводяться до інтегралів від раціональної функції відносно  $\sin x$  і  $\cos x$  за допомогою відповідної тригонометричної підстановки.

1. Для знаходження інтеграла виду  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ , застосовують підстановку:

$$x = a \cdot \sin t; dx = a \cdot \cos t dt;$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos t; t = \arcsin \frac{x}{a}.$$

2. Для знаходження інтеграла виду  $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ , застосовують підстановку:

$$x = a \cdot \operatorname{tg} t; dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\sin t}; t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

3. Для знаходження інтеграла виду  $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ , застосовують підстановку:

$$x = \frac{a}{\cos t}; dx = \frac{a \cdot \sin t}{\cos^2 t} dt;$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a \cdot \sin t}{\cos t}; t = \arccos \frac{a}{x}.$$

*Приклад.* Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}} &= \left| \begin{array}{l} x = 4\sin t \\ dx = 4\cos t dt \\ \sqrt{16-x^2} = 4\cos t \\ t = \arcsin \frac{x}{4} \end{array} \right| = \int \frac{16 \cdot \sin^2 t \cdot 4\cos t dt}{4\cos t} = \\ &= 16 \int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\cos t} = 16 \int \sin^2 t dt = 16 \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= 8 \int dt - 8 \int \cos 2t dt = 8t - 8 \cdot \frac{1}{2} \sin 2t + C = 8t - 4\sin 2t + C. \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} \sin 2t &= 2\sin t \cdot \cos t = 2\sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} = \\ &= 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} = \frac{x}{8} \sqrt{16 - x^2}, \end{aligned}$$

остаточно будемо мати:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}} = 8\arcsin \frac{x}{4} - \frac{x}{2} \sqrt{16-x^2} + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$ .

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = 3 \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{3dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{x^2 + 9} = \frac{3}{\cos t} \\ t = \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{3dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{3}{\cos t}\right)^3} =$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{\cos^3 t dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{9} \int \cos t dt = \frac{1}{9} \sin t + C.$$

Оскільки

$$\sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$$

то остаточно отримаємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \frac{1}{9} \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + C.$$

## 6.2 Визначений інтеграл

Визначений інтеграл відіграє значну роль як у суто теоретичних дослідженнях, так і в практичних застосуваннях. До його обчислення зводяться задачі знаходження площі фігури, об'єму тіла, центру ваги плоскої кривої, моменту інерції та інші.

Знайдемо площу криволінійної трапеції, яка обмежена кривою  $y = f(x)$  та прямими  $x = a$ ,  $x = b$  і  $y = 0$  (рис. 6.1). Функція  $y = f(x)$  визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку  $[a; b]$ . Розіб'ємо відрізок  $[a; b]$  на  $n$  довільних елементарних частин точками поділу  $x_i$ ,  $i = \overline{0, n}$  такими, що  $a = x_0 < x_1 < \dots <$



$x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ . На кожному частинному відрізку  $[x_{i-1}; x_i]$  візьмемо довільну точку  $c_i, i = \overline{1, n}$ . Обчислимо значення функції  $f(c_i)$  і помножимо його на довжину відповідного частинного відрізка  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . У такий спосіб отримаємо площу  $i$ -го частинного прямокутника.

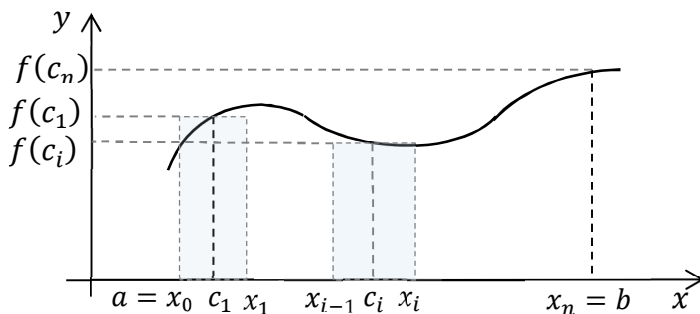


Рисунок 6.1

Складемо суму отриманих добутків:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + \dots + f(c_i)\Delta x_i + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i.$$

Цей вираз називається **інтегральною сумою** для функції  $f(x)$  на відрізку  $[a; b]$ .

*Зауваження.* Інтегральна сума  $S_n$  не залежить ні від способу розбиття, тобто від вибору точок поділу  $x_i, i = \overline{0, n}$ , ні від вибору точок  $c_i, i = \overline{1, n}$ , в кожному частинному відрізку.

Добуток  $f(c_i)\Delta x_i$  чисельно дорівнює площі прямокутника  $S_i$  з основою  $\Delta x_i$  і висотою  $f(c_i)$ . Інтегральна сума  $S_n$  чисельно дорівнює площі східчастої фігури, утвореної з таких прямокутників, і *служить наближенням значенням площі криволінійної трапеції:  $S \approx S_n$ .*

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

її інтегральна сума на  $[a; b]$ . Позначимо через  $\Delta x_i$  найбільшу з довжин відрізків  $[x_{i-1}; x_i]$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум при умові  $\Delta x_i \rightarrow 0$ . Очевидно, що при цьому число  $n$  при розбитті на елементарні частини, прямує до нескінченності  $n \rightarrow \infty$ .

**Визначеним інтегралом** від функції  $f(x)$  на відрізку  $[a; b]$  називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому розбитті відрізка  $[a; b]$ :

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx,$$

де  $a$  і  $b$  – відповідно *нижня* і *верхня межі інтегрування*;  $[a; b]$  – *відрізок інтегрування*.

**Геометричний зміст.** Нехай функція  $f(x)$  визначена, невід’ємна і неперервна на відрізку  $[a; b]$ . Тоді *визначений інтеграл*  $\int_a^b f(x) dx$ , чисельно дорівнює площі  $S$  відповідної *криволінійної трапеції*:  $S = \int_a^b f(x) dx$ .

Розглядаючи визначені інтеграли, надалі будемо припускати підінтегральну функцію неперервною на проміжку інтегрування.

### 6.3 Властивості визначеного інтеграла

1. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з функцій:

$$\int_a^b (f(x) + \varphi(x) + \dots + \psi(x)) dx = \\ = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx + \dots + \int_a^b \psi(x) dx.$$

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

3. Якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

4. Якщо функція  $f(x)$  інтегрована на відрізку  $[a, b]$  і  $a < c < b$ , то ця функція інтегрована і на відрізках  $[a, c]$  і  $[c, b]$ , причому:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

5. Сталій множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx.$$

6. Якщо  $f(x)$  – інтегрована функція на відрізку  $[a, b]$  і  $f(x) \geq 0$  для  $x \in [a, b]$ , то:

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

7. Якщо на відрізку  $[a; b]$ , де  $a < b$ , функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  задовольняють нерівності  $f(x) \leq \varphi(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Інакше кажучи, нерівність між неперервними функціями можна інтегрувати почленно при умові, що верхня межа інтегрування більша нижньої.

#### 6.4 Формула Ньютона-Лейбниця

**Теорема (Ньютона-Лейбниця).** Нехай функція  $y = f(x)$  неперервна на відрізку  $[a; b]$  і  $F(x)$  – яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[a; b]$  дорівнює приросту первісної  $F(x)$  на цьому відрізку:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

**Доведення.**

$$I(x) = \int_a^x f(x) dx = F(x) + C_1,$$

знайдемо  $I(a) = F(a) + C_1$ , але оскільки

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

то маємо  $F(a) + C_1 = 0$ ;  $F(a) = -C_1$ .

Отже:

$$I(x) = F(x) - F(a).$$

При  $x = b$  маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b \text{ або}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

*Приклад.* Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx.$$

*Розв'язання.* Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона-Лейбниці, одержимо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = \frac{-1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) = -\frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2}.$$

*Зауваження.* Формула Ньютона-Лейбниці залишається справедливою для будь-якої інтегрованої на відрізку  $[a; b]$  функції  $f(x)$ , що має неперервну первісну  $F(x)$ , яка задовольняє умови  $F'(x) = f(x)$  на всьому відрізку  $[a; b]$  за винятком хіба що скінченного числа точок.

*Приклад.* Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+3x)^2}.$$

*Розв'язання.* Скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца, одержимо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(1+3x)^2} &= \int_0^1 (1+3x)^{-2} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3x)^{-1}}{-1} \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+3x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{3}{4} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

*Приклад.* Обчислити визначений інтеграл

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$$

*Розв'язання.* Доповнимо підкореневий вираз до повного квадрату:

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} &= \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \arcsin \frac{x-2}{3} \Big|_2^5 = \\ &= \arcsin \frac{5-2}{3} - \arcsin \frac{2-2}{3} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

## ЛЕКЦІЯ 7

### ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ І ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ

#### 7.1 Заміна змінної у визначеному інтегралі

**Теорема.** Нехай функція  $y = f(x)$  неперервна на відрізку  $[a; b]$ , а функція  $x = \varphi(t)$  неперервна разом зі своєю похідною  $x' = \varphi'(t)$  і монотонна на відрізку  $[\alpha; \beta]$ , причому  $\varphi(\alpha) = a$  і  $\varphi(\beta) = b$ . Тоді справедлива **формула заміни змінної у визначеному інтегралі**

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t); t = \varphi^{-1}(x); \\ dx = \varphi'(t) dt; \alpha = \varphi^{-1}(a); \beta = \varphi^{-1}(b) \end{array} \right| \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \end{aligned}$$

де  $t = \varphi^{-1}(x)$  – обернена функція.

**Доведення.** Якщо  $F(x)$  – деяка первісна для функції  $f(x)$ , то можемо записати

$$\int f(x) dx = F(x) + C; \quad \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Справедливість останньої рівності перевіряється диференціюванням обох частин по змінній  $t$ . З рівностей відповідно маємо:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a);$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt =$$

$$= F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Праві частини одержаних виразів рівні, отже, ліві частини також рівні:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

*Зауваження 1.* При заміні змінної значення функції  $\varphi(t)$  не повинні виходити за межі відрізка  $[a; b]$ , коли аргумент  $t$  змінюється на проміжку  $[\alpha; \beta]$ , причому  $\varphi(\alpha) = a$  і  $\varphi(\beta) = b$ .

*Зауваження 2.* Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної.

*Приклад.* Обчислити інтеграл  $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}}$ .

*Розв'язання.*

$$\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}} = \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 5; du = 2xdx; \\ u_{\text{н}} = 6; u_{\text{в}} = 9 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_6^9 \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{u} \Big|_6^9 = 3 - \sqrt{6}.$$



*Приклад.* Обчислити інтеграл  $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^3 x dx$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^3 x dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin^2 x \sin x dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^4 x (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \cos x; du = -\sin x dx; \\ u_{\text{н}} = \cos 0 = 1; u_{\text{в}} = \cos \pi/2 = 0 \end{array} \right| = \\ &= \int_1^0 u^4 (1 - u^2) (-du) = \int_0^1 (u^4 - u^6) du = \left( \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}. \end{aligned}$$

## 7.2 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Нехай  $U = U(x)$  і  $V = V(x)$  – диференційовні функції від  $x$  на відрізьку  $[a; b]$ . Тоді  $(UV)' = U'V + UV'$ . Інтегруємо обидві частини рівності у межах від  $a$  до  $b$ , маємо

$$\int_a^b (UV)' dx = \int_a^b U'V dx + \int_a^b UV' dx.$$

Оскільки  $\int (UV)' dx = UV + C$ , тому  $\int_a^b (UV)' dx = UV \Big|_a^b$

$$U'V dx = VdU, \quad UV' dx = UdV$$

Отже,  $UV \Big|_a^b = \int_a^b V dU + \int_a^b U dV$ . Звідси отримаємо

**формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі**

$$\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU,$$

що відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування.

*Приклад.* Обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^3 x \ln x \, dx.$$

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \int_1^3 x \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{l} U = \ln x; \, dV = x dx; \\ dU = \frac{dx}{x}; \, V = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{9}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{9}{2} \ln 3 - \frac{1}{4} (9 - 1) = \frac{9}{2} \ln 3 - 2. \end{aligned}$$

*Приклад.* Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx.$$

*Розв'язання.*

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx = \left| \begin{array}{l} U = \arcsin x; \, dV = dx; \\ dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \, V = x \end{array} \right| = x \arcsin x \Big|_0^1 -$$

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} &= \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2; dt = -2xdx; \\ t_H = 1; t_B = 0 \end{array} \right| = \\ &= \arcsin 1 - 0 + \frac{1}{2} \int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{t} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

## ЛЕКЦІЯ 8

### НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

При вивченні визначеного інтеграла виходили з двох умов:

- а) скінченність проміжку інтегрування;
- б) неперервність (або хоча б обмеженість) підінтегральної функції.

У випадку нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на  $n$  частинних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума явно не має скінченної границі.

Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до невластного інтеграла – інтеграла на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

#### 8.1 Невласні інтеграли по нескінченному проміжку (першого роду)

Нехай функція  $f(x)$  визначена на проміжку  $[a, \infty)$  і інтегровна на відрізку  $[a, b]$ . Тоді визначений інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  існує при будь-якому  $b > a$  і, отже, він є деякою функцією від  $b$ , визначеною на проміжку  $[a, \infty)$ :

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо функція  $I(b)$  при  $b \rightarrow +\infty$  має скінченну границю  $A$ , то цю границю *називають невластним інтегралом* від функції  $f(x)$  на проміжку  $[a, \infty)$  і позначають так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Отже, за означенням:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невластний інтеграл називають **збіжним**, а підінтегральну функцію  $f(x)$  – **інтегровною** на нескінченному проміжку  $[a, \infty)$ . Сама границя приймається за **значення** цього **інтеграла**. При цьому вважають, що невластний інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  збігається (до числа  $A$ ).

Якщо ж вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то невластний інтеграл називається **розбіжним**, а функція  $f(x)$  – **неінтегровною** на  $[a, \infty)$ .

Аналогічно визначається **невластний інтеграл з нескінченною нижньою межею**. Якщо функція  $f(x)$  визначена на проміжку  $(-\infty, b]$  і інтегровна на відрізку  $[a, b]$  при будь-якому  $a < b$ , то за означенням:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Невластний інтеграл  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$  називають збіжним, якщо існує скінченна границя, що стоїть у правій частині рівності і розбіжним, якщо такої скінченної границі не існує.

Нарешті, якщо функція  $f(x)$  визначена на проміжку  $(-\infty, +\infty)$ , то за означенням:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx,$$

де  $c$  – будь-яке сталє число, причому невласний інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  називають збіжним, якщо збігаються обидва невласних інтеграли, які стоять у правій частині рівності. Якщо ж принаймні один з цих інтегралів розбігається, то невласний інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  називають розбіжним.

*Приклад.* Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^6 x}.$$

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^6 x} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{dx}{x \ln^6 x} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ t_H = 1, t_B = \ln b \end{array} \right| = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^{\ln b} \frac{dt}{t^6} = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^{\ln b} t^{-6} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{5t^5} \Big|_1^{\ln b} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{5 \ln^5 b} + \frac{1}{5} \right) = \\ &= -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Отже, за означенням, даний інтеграл збігається.

*Приклад.* Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x - 7}$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x - 7} &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{dx}{x^2 + 4x - 7} = \\ &= \left| \begin{array}{l} x^2 + 4x - 7 = \\ x^2 + 4x + 4 - 4 - 7 = \\ = (x + 2)^2 - 11 \end{array} \right| = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{dx}{(x + 2)^2 - 11} = \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \left( \frac{1}{2\sqrt{11}} \ln \left| \frac{x + 2 - \sqrt{11}}{x + 2 + \sqrt{11}} \right| \right) \Big|_a^b = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{11}} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{b + 2 - \sqrt{11}}{b + 2 + \sqrt{11}} \right| - \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{a + 2 - \sqrt{11}}{a + 2 + \sqrt{11}} \right| = 0. \end{aligned}$$

Отже, за означенням, цей інтеграл також збігається.

## 8.2 Невласні інтеграли від розривних функцій (другого роду)

Інтеграл у скінченному проміжку від розривної функції також називають невластним інтегралом другого роду.

Розглянемо інтеграл  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ . За формулою Ньютона-Лейбниця маємо:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -(1 + 1) = -2.$$

Отримали хибний результат – від’ємне значення інтеграла від додатної функції. Це пояснюється неправомірним застосуванням формули до розривної функції.

*Використаємо наступний підхід:*

1) ізолюємо точку розриву разом з невеликим околom;  
 2) обчислимо інтеграл на кожному з відрізків, що залишились;

3) зробимо граничний перехід при стягуванні околу ізоляції в точку розриву. Якщо існує скінченна границя, то візьмемо її за значення інтеграла.

Нехай функція  $f(x)$  неперервна на всьому відрізку  $[a, b]$  за винятком скінченного числа точок, у яких функція необмежена. Точка  $c \in [a, b]$  називається **особливою точкою** функції  $f(x)$ , якщо функція необмежена в ній, тобто  $f(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow c$ .

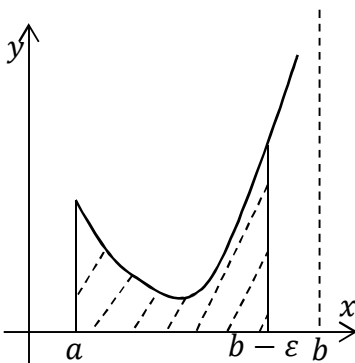


Рисунок 8.1

*Зауваження.* В особливій точці  $c$  функція  $f(x)$  має вертикальну асимптоту  $x = c$ . Такою може бути внутрішня точка області визначення, в якій функція має розрив другого роду, або кінцева точка інтервалу області визначення.

Нехай  $x = b$  – єдина особлива точка функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ , тобто  $f(x)$  неперервна на інтервалі  $[a, b)$  і



$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty \text{ (рис. 8.1).}$$

Тоді функція  $f(x)$  інтегровна на відрізку  $[a, b - \varepsilon]$  при довільному  $\varepsilon > 0$  такому, що  $b - \varepsilon > a$ . Невласним інтегралом від необмеженої функції називається границя

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невластний інтеграл називають **збіжним**, а підінтегральну функцію  $f(x)$  – **інтегровою** на відрізку  $[a, b]$ . Сама границя приймається за **значення** цього **інтеграла**. Якщо ж ця границя нескінченна або взагалі не існує, то інтеграл називають **розбіжним**.

Аналогічно, якщо  $x = a$  – єдина особлива точка, то невластний інтеграл визначається так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Якщо  $f(x)$  необмежена в околі деякої однієї внутрішньої точки  $c \in (a; b)$ , то за умови існування обох невластних інтегралів

$$\int_a^c f(x) dx \text{ і } \int_c^b f(x) dx$$

за означенням вважають:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Нарешті, якщо  $a$  та  $b$  – особливі точки, то за умови існування обох невласних інтегралів

$$\int_a^d f(x) dx \quad \text{і} \quad \int_d^b f(x) dx$$

за означенням вважають:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

де  $d$  – довільна фіксована точка інтервалу  $(a; b)$ .

*Зауваження.* Невласний інтеграл другого роду за своїм записом нічим не відрізняється від звичайного визначеного інтеграла. Тому необхідно перевіряти, чи не містить проміжок інтегрування особливих точок (точок де функція не існує).

*Приклад.* Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_0^1 \ln x \, dx.$$

*Розв'язання.*

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \left. \begin{array}{l} f(x) = \ln x; \\ \text{ОБФ: } x > 0 \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \ln x \, dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| U = \ln x; dV = dx; \right. \\
&\quad \left. dU = \frac{dx}{x}; V = x \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( x \ln x \Big|_{0+\varepsilon}^1 - \int_{0+\varepsilon}^1 x \frac{dx}{x} \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \ln 1 - \varepsilon \ln \varepsilon - x \Big|_{0+\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon \ln \varepsilon - 1) = |0 \cdot \infty| = \\
&= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{1/\varepsilon} - 1 = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\ln \varepsilon)'}{(1/\varepsilon)'} - 1 = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} - 1 = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon - 1 = 0 - 1 = -1.
\end{aligned}$$

Інтеграл збігається і дорівнює  $-1$ .

*Приклад.* Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x-6)^4}}.$$

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned}
\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x-6)^4}} &= \left| f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(2x-6)^4}}; \right. \\
&\quad \left. \text{ОБФ: } x \neq 3. \right| = \\
&= \int_0^3 (2x-6)^{-\frac{4}{3}} dx + \int_3^8 (2x-6)^{-\frac{4}{3}} dx = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{3-\varepsilon} (2x-6)^{-\frac{4}{3}} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{3+\varepsilon}^8 (2x-6)^{-\frac{4}{3}} dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( (2x-6)^{-\frac{1}{3}} \Big|_0^{3-\varepsilon} + (2x-6)^{-\frac{1}{3}} \Big|_{3+\varepsilon}^8 \right) = \\
&\left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{2x-6}} \Big|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{6-2\varepsilon-6}} - \frac{1}{\sqrt[3]{-6}} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{\sqrt[3]{-6}} = \infty \right] \\
&= -\frac{3}{2} \cdot \infty = \infty.
\end{aligned}$$

Отже, невласний інтеграл розбігається.

## ЛЕКЦІЯ 9

### ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Розглянемо задачі обчислення основних кількісних характеристик геометричних об'єктів: довжини, площі, об'єму. Для спрощення розрахунків будемо враховувати симетрію та інші особливості конкретних фігур.

#### 9.1 Площа плоскої фігури

*1. Випадок, коли лінії, що обмежують фігуру, задані рівняннями в явному вигляді у прямокутних координатах.*

Якщо на відрізку  $[a; b]$  функція  $f(x) \geq 0$ , то за геометричним тлумаченням визначеного інтеграла площа  $S$  криволінійної трапеції, обмеженої кривою  $y = f(x)$ , віссю  $Ox$  і прямими  $x = a$  і  $x = b$ , обчислюється за формулою (рис. 9.1).

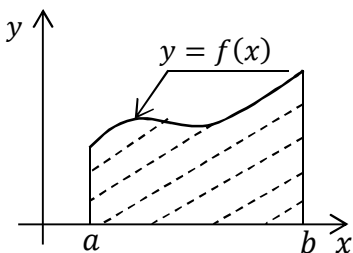


Рисунок 9.1

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Якщо  $f(x) \leq 0$  на  $[a; b]$ , то визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x) dx \text{ теж від'ємний.}$$

Площа  $S$  відповідної криволінійної трапеції задається рівністю:

$$S = - \int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Якщо  $f(x)$  скінченне число разів змінює знак на відрізку  $[a; b]$ , то для знаходження площі  $S$  відповідної криволінійної фігури необхідно знайти суму абсолютних значень інтегралів по проміжкам знакосталості. Тоді інтеграл буде додатнім на проміжках де  $f(x) \geq 0$ , і від'ємним де  $f(x) \leq 0$  (рис. 9.2) Інтеграл по всьому відрізку дає відповідно алгебраїчну суму площин, за абсолютними величинами.

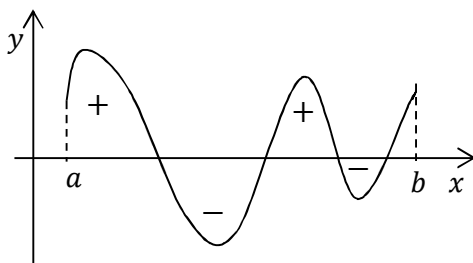


Рисунок 9.2

Якщо необхідно обчислити площу області, обмеженої кривими  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ ,  $x = a$  і  $x = b$ , при умові  $f_2(x) \geq f_1(x)$  (рис. 9.3).

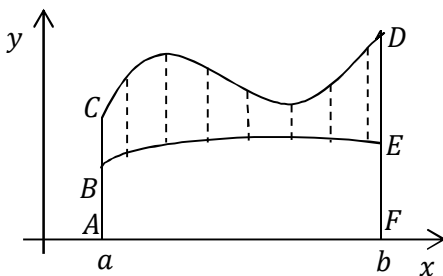


Рисунок 9.3

Знайдемо площу, як різницю площин двох криволінійних трапецій:

$$S = S_{ACDF} - S_{ABEF};$$

$$S_{ACDF} = \int_a^b f_2(x) dx,$$

$$S_{ABEF} = \int_a^b f_1(x) dx; \quad S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx,$$

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

*Приклад.* Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої кривими  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$ .

*Розв'язання.* 1. Нанесемо на координатну площину лінії  $y = x^2$  та  $y = \sqrt{x}$  (рис. 9.4).

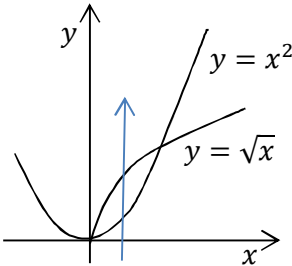


Рисунок 9.4

2. Знайдемо межі інтегрування, для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}; \quad x^2 = \sqrt{x}; \quad x^4 = x;$$

$$x^4 - x = 0; \quad x(x^3 - 1) = 0;$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

3. Знайдемо площу фігури:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left( \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ од. кв.}$$

*Приклад.* Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої віссю  $Ox$  та лініями  $y = (x + 2)^2$  та  $y = 4 - x$ .

*Розв'язання.* 1. Область, обмежена віссю  $Ox$  та лініями  $y = (x + 2)^2$  та  $y = 4 - x$  складається з двох частин  $D = D_1 + D_2$  (рис. 9.5), тому площу знаходимо, як суму площин

$$S = S_1 + S_2.$$

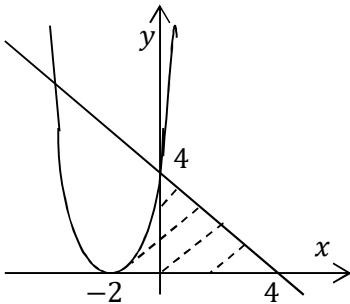


Рисунок 9.5

2. Знайдемо межі інтегрування, для цього обчислимо точки перетину параболи і прямої з віссю  $Ox$  та точку перетину параболи і прямої:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = (x + 2)^2 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 4 - x \end{cases}; \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = (x + 2)^2 \\ y = 4 - x \end{cases}; (x + 2)^2 = 4 - x;$$

$$x^2 + 5x = 0; x_1 = 0; x_2 = -5; x_1 \in [-2; 4].$$

3. Знайдемо площу фігури:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \int_{-2}^0 (x + 2)^2 dx + \int_0^4 (4 - x) dx = \\ &= \frac{(x + 2)^3}{3} \Big|_{-2}^0 - \frac{(4 - x)^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{8}{3} - 0 - 0 + 8 = \frac{32}{3} \text{ од. кв.} \end{aligned}$$

2. Випадок, коли лінії, що обмежують фігуру, задані параметрично.

Нехай рівняння  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  визначає деяку функцію  $y = f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ ,  $x(\alpha) = a$ ,  $x(\beta) = b$ , тому  $\alpha \leq t \leq \beta$ .

Отже:

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx,$$



виконаємо заміну  $y = y(t)$ ,  $dx = x'(t)dt$ , остаточно отримаємо

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \right|$$

*Приклад.* Обчислити площу області, обмеженої еліпсом

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}$$

*Розв'язання.* 1. Обчислимо площу частини еліпса, що знаходиться у першому квадранті. Знайдемо межі інтегрування з урахуванням додатного напрямку руху (проти годинникової стрілки) (рис. 9.6).

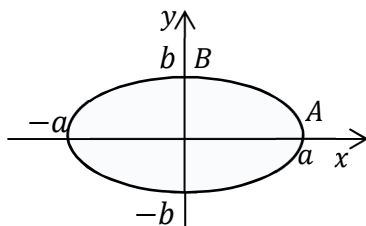


Рисунок 9.6

При  $A(a, 0)$ :

$$\begin{aligned} x = acost, \quad acost = a, \\ cost = 1, \quad t = 0. \end{aligned}$$

При  $B(0, b)$ :

$$\begin{aligned} x = acost, \quad acost = 0, \\ cost = 0, \quad t = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Обчислимо площу  $S_1$ .

З урахуванням, що  $dx = -a \sin t dt$ , маємо:

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t (-a \sin t) dt = -ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = -\frac{ab}{2} \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= -\frac{ab}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi - 0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) = -\frac{ab\pi}{4};
 \end{aligned}$$

$$S = 4|S_1| = ab\pi \text{ од. кв.}$$

3. Випадок, коли лінії, що обмежують фігуру, задані в полярній системі координат.

Нехай у полярній системі координат маємо криву, яка визначена рівнянням  $\rho = \rho(\varphi)$ , де  $\rho(\varphi)$  – неперервна функція, коли  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ . Знайдемо площу  $S$  криволінійного сектора  $OAB$ , обмеженого кривою  $\rho = \rho(\varphi)$  і координатними променями  $\varphi = \alpha$  та  $\varphi = \beta$ .

Розіб'ємо сектор  $OAB$  на  $n$  частин довільними координатними променями  $\varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_1, \dots, \varphi = \varphi_n$ , де  $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_i < \dots < \varphi_n = \beta$ . Позначимо через  $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$  кут між сусідніми променями,  $i = \overline{1, n}$  (рис. 9.7).

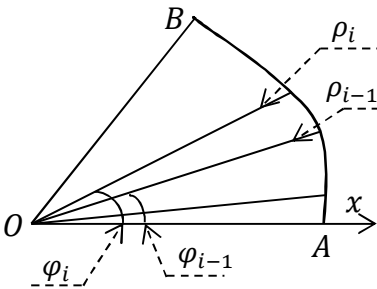


Рисунок 9.7

Розглянемо елементарний криволінійний сектор, що відповідає приросту  $\Delta\varphi_i$  полярного кута. Його площу  $\Delta S_i$  наближено дорівнює площі сектора круга з радіусом  $\rho_i$  і центральним кутом  $\Delta\varphi_i$ :  $\Delta S_i \approx \frac{1}{2} \rho_i^2 \Delta\varphi_i$ .

Сума

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i^2 \Delta\varphi_i$$

дає площу сектора зі «ступінчатою» межею, що наближено визначає шукану площу  $S$  криволінійного сектора  $OAB$ .

Ця сума є інтегральною. Здійснюючи граничний перехід при  $\max\Delta\varphi_i \rightarrow 0$ , отримуємо точне значення площі сектора  $OAB$  у вигляді визначеного інтеграла:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

*Приклад.* Обчислити площу фігури, обмеженої трипелюстковою трояндою  $\rho = \sin 3\varphi$ .

*Розв'язання.* Фігура, площу якої необхідно знайти, зображена на рисунку 9.8.

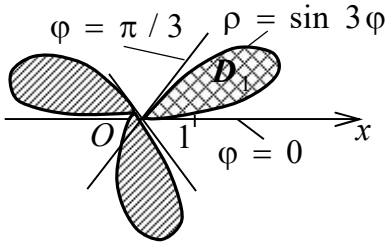


Рисунок 9.8

Як бачимо, фігура  $D$  складається з трьох однакових «пелюсток». Щоб знайти її площу  $S$ , достатньо знайти площу  $S_1$  однієї з її «пелюсток», наприклад,  $D_1$ , що на рис. 11 позначена подвійною штриховою. Тоді  $S = 3S_1$ .

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} (1 - \cos 6\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \varphi \Big|_0^{\pi/3} - \frac{1}{24} \sin 6\varphi \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{24} (\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

$$S = \frac{\pi}{4} \text{ (од. кв.)}$$

## 9.2 Довжина дуги кривої

### Лінії, що задані у декартовій системі координатах

Нехай на координатній площині  $Oxy$  задана деяка лінія рівнянням у явній формі  $y = y(x)$ . Потрібно обчислити довжину  $L$  її дуги  $L_{AB}$ . (рис. 9.9).

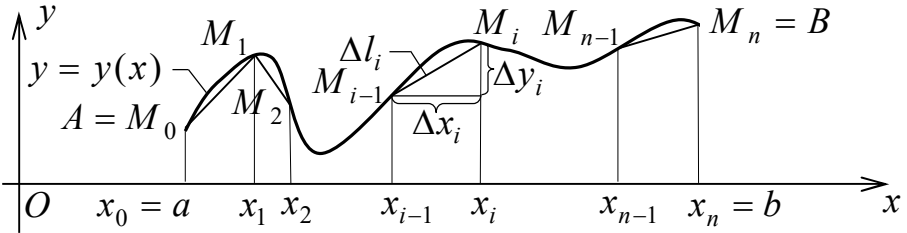


Рисунок 9.9

Розіб'ємо дугу  $L_{AB}$  довільним способом на  $n$  елементарних дуг  $\Delta l_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  точками  $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$  з абсцисами  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$  і проведемо хорди  $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{i-1}M_i, \dots, M_{n-1}M_n$ , довжини яких позначимо відповідно через  $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_i, \dots, \Delta l_n$ . Тоді маємо ламану  $M_0M_1M_2 \dots M_{i-1}M_i \dots M_{n-1}M_n$ , вписану в дугу  $L_{AB}$ .

Довжина ламаної  $L_n$  дорівнює сумі довжин її ланок:

$$L_n = \sum_{i=1}^n \Delta l_i.$$

**Довжиною  $L$  дуги  $L_{AB}$**  називають границю довжини  $L_n$  вписаної ламаної при необмеженому здрібненні розбиття, тобто коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля (при цьому

число  $n$  цих ланок прямує до нескінченності):

$$L = \lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta l_i.$$

**Теорема.** Якщо функція  $y = y(x)$ , визначена на відрізку  $[a; b]$ , неперервна разом зі своєю похідною на цьому відрізку, то довжина  $L$  дуги  $L_{AB}$ , що служить її графіком на відрізку  $[a; b]$ , обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

**Доведення.**

Позначимо  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ;  $\Delta y_i = y(x_i) - y(x_{i-1})$ . Тоді

$$\begin{aligned} \Delta l_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \\ &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right)} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i. \end{aligned}$$

За формулою Лагранжа про скінченні прирости маємо

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = y'(c_i), \quad x_{i-1} < c_i < x_i.$$

Отже,  $\Delta l_i = \sqrt{1 + (y'(c_i))^2} \Delta x_i$ , оскільки  $\Delta x_i > 0$ .

Таким чином, довжина вписаної ламаної дорівнює:

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (y'(c_i))^2} \Delta x_i.$$

За умовою похідна  $y'(x)$  – неперервна, тому функція  $\sqrt{1 + (y'(x))^2}$  теж неперервна. Тоді вираз для довжини ламаної  $L_n$

є інтегральною сумою для неперервної функції. Отже, існує визначений інтеграл – границя  $L_n$  при необмеженому здрібненні розбиття, що дає довжину  $L$  дуги  $L_{AB}$ :

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (y'(c_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Отже довжину лінії, що задана у декартовій системі координат знаходять за формулою:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

*Приклад.* Знайти довжину вказаної дуги

$$y = \ln x, \quad x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}].$$

*Розв'язання.* Похідна  $y' = \frac{1}{x}$ . Тоді:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 = t^2; x = \sqrt{t^2 - 1}; \\ dx = \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - 1}}; t = \sqrt{x^2 + 1}; \\ t_H = 2; t_B = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \cdot \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \\ &= \int_2^3 \frac{(t^2 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt = \int_2^3 dt + \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = t \Big|_2^3 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^3 = \\ &= 3 - 2 + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \quad (\text{од.}). \end{aligned}$$

## Лінії що, задані параметрично

Розглянемо дугу  $L_{AB}$  гладкої плоскої лінії, що задана параметрично  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , де функції  $x = x(t)$  і  $y = y(t)$  – неперервні разом зі своїми похідними, причому функція  $x = x(t)$  – монотонно зростаюча,  $\varphi(\alpha) = a$  і  $\varphi(\beta) = b$ . За наведеною вище формулою довжина цієї дуги

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

З урахуванням рівнянь лінії та властивостей похідної параметрично заданої функції маємо:

$$dx = x'(t)dt; \quad y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Зробимо заміну змінної в інтегралі для довжини дуги:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} x'(t)dt = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Таким чином, довжина дуги плоскої кривої, що задана параметрично, визначається за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$

*Приклад.* Знайти довжину астроїди:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

*Розв'язання.* Обчислимо довжину астроїди – замкненої кривої, що задана параметричними рівняннями (рис. 9.10). Для цього спочатку знайдемо  $x'_t$  і  $y'_t$ :

$$x'_t = 3a \cos^2 t (-\sin t);$$

$$y'_t = 3a \sin^2 t \cdot \cos t.$$

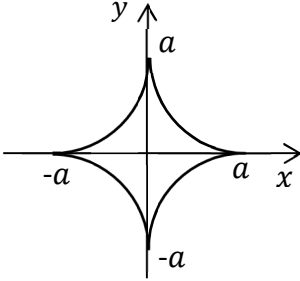


Рисунок 9.10

Чверть  $L_{AB}$  астроїди розміщена в першому квадранті від точки  $A(a; 0)$  до точки  $B(0; a)$  (рис. 9.10). Знайдемо значення параметра  $t$ , що відповідають кінцям цієї дуги:  $x = a \cos^3 t$ ,  $a \cos^3 t = a$ ,  $\cos^3 t = 1$ ,

$$\cos t = 1, t_H = 0;$$

$$a \cos^3 t = 0, \cos t = 0, t_B = \frac{\pi}{2}.$$

Тоді довжина всієї астроїди:

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \\ &= \left| u = \sin t; du = \cos t dt; \right|_{u_H=0; u_B=1} = 3a \int_0^1 u du = 3a \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3a}{2}. \end{aligned}$$

$$L = 4L_1 = 6a \text{ (од. довжини).}$$



## Лінія, задана у полярних координатах

**Теорема.** Нехай дуга  $L_{AB}$  задана в полярних координатах рівнянням  $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , де функція  $\rho(\varphi)$  неперервна разом зі своєю похідною  $\rho'(\varphi)$  на відрізку  $[\alpha; \beta]$ , причому точкам  $A$  і  $B$  відповідають значення  $\alpha$  і  $\beta$ . Тоді довжина дуги  $L_{AB}$  обчислюється за формулою:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

**Доведення.** Використовуючи формули переходу від прямокутної до полярної системи координат  $x = \rho \cos \varphi$  і  $y = \rho \sin \varphi$ , перейдемо до параметричного задання дуги  $L_{AB}$ .

Для обчислення довжини дуги застосуємо формулу  $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi$ , що відповідає параметричному випадку. Спочатку знайдемо похідні від  $x$  і  $y$  за параметром:

$$x'(\varphi) = \rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi;$$

$$y'(\varphi) = \rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & (x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = \\ & = (\rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi)^2 + (\rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi)^2 = \\ & = (\rho'(\varphi))^2 \cos^2 \varphi - 2\rho'(\varphi) \cos \varphi \rho(\varphi) \sin \varphi + (\rho(\varphi))^2 \sin^2 \varphi + \\ & + (\rho'(\varphi))^2 \sin^2 \varphi + 2\rho'(\varphi) \sin \varphi \rho(\varphi) \cos \varphi + (\rho(\varphi))^2 \cos^2 \varphi = \\ & = (\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2. \end{aligned}$$

Отже довжину дуги лінії, що задана у полярних

координатах знаходять за формулою:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Приклад. Знайти довжину кардіоїди

$$\rho = 6(1 + \sin\varphi).$$

Розв'язання. Кардіоїда – замкнена лінія, що зображена на рисунку 9.11. Вона симетрична відносно осі  $Oy$ . Тому її довжину  $L$  можна знайти, подвоївши довжину  $L_1$  її правої частини  $L_{OA}$ , що розташована в четвертій та першій чвертях і при цьому  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

$$\rho' =$$

;

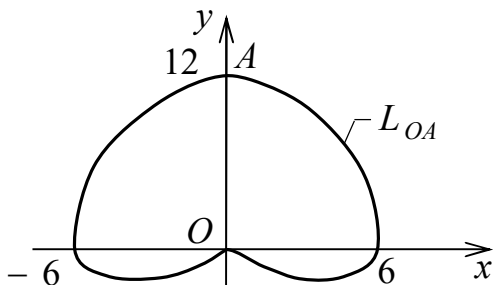


Рисунок 9.11

Проведемо  
обчислення:  
 $-6\cos\varphi$ ;

$$\begin{aligned} \rho^2 + (\rho')^2 &= (6(1 + \sin\varphi))^2 + (6\cos\varphi)^2 = \\ &= 36(1 + 2\sin\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 36(2 + 2\sin\varphi) = \\ &= 72(1 + \sin\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{72(1 + \sin\varphi)} d\varphi = 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin\varphi} \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin\varphi}}{\sqrt{1 - \sin\varphi}} d\varphi = \\
&= 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}}{\sqrt{1 - \sin\varphi}} d\varphi = 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos^2\varphi}}{\sqrt{1 - \sin\varphi}} d\varphi = \\
&= 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - \sin\varphi}} d\varphi = \left. \begin{array}{l} u = 1 - \sin\varphi; \\ du = -\cos\varphi d\varphi; \\ u_{\text{н}} = 2; u_{\text{в}} = 0 \end{array} \right| = -6\sqrt{2} \int_2^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = \\
&= 6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{u} \Big|_0^2 = 24; \quad L = 2L_1 = 48 \text{ (од.)}.
\end{aligned}$$

### 9.3 Об'єм тіла обертання

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком неперервної невід'ємної функції  $y = y(x)$ , віссю  $Ox$  і двома прямими  $x = a$  та  $x = b$ , де  $a \leq b$ . Якщо обернути цю фігуру навколо осі  $Ox$ , то утвориться тіло обертання  $T$  (рис. 9.12). Переріз цього тіла площиною, паралельною площині  $Ouz$  на відстані  $x$  від неї, – круг з площею

$$S(x) = \pi R^2 = \pi(y(x))^2$$

Об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою

$$V = \pi \int_a^b (y(x))^2 dx.$$

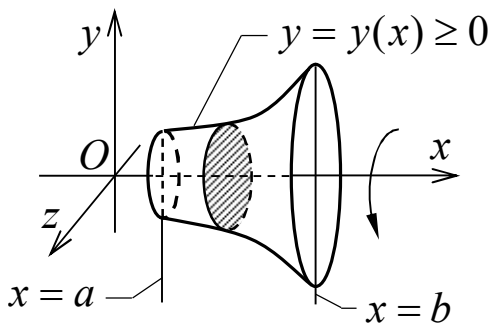


Рисунок 9.12

*Приклад.* Знайти об'єм параболоїда, утвореного обертанням параболу  $y^2 = 2px$  навколо вісі  $Ox$  і обмеженого площиною  $x = H$ .

*Розв'язання.*

$$V = \pi \int_0^H y^2 dx = \pi \int_0^H 2px dx = 2\pi r \frac{x^2}{2} \Big|_0^H = \pi r H^2 \text{ (од. куб.)}$$

## ЛЕКЦІЯ 10 ФІЗИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

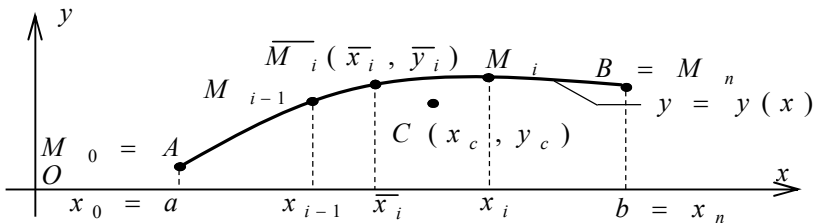
За допомогою інтегрального числення можна знаходити масу матеріальної дуги і пластинки, їх центр мас; роботу сили; сумарний електричний заряд; концентрацію електронів; напруженість електричного поля та ін.

Розглянемо застосування визначеного інтеграла для розв'язування деяких типових задач.

### 10.1 Маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої дуги

Нехай задана матеріальна неоднорідна дуга гладкої плоскої кривої  $y = y(x)$ ,  $x \in [a; b]$  з лінійною густиною  $\rho = \rho(x)$  (рис. 10.1). Знайдемо її масу  $m$ , статичні моменти  $M_x, M_y$  і моменти інерції  $I_x, I_y$  відповідно відносно координатних осей  $Ox$  і  $Oy$  та координати центра мас  $C(x_c, y_c)$ .

Поділимо відрізок  $[a; b]$  на  $n$  елементарних частин довільно вибраними точками:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ . Позначимо  $i$ -ий крок розбиття  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Припустимо, що  $\Delta x_i$  настільки мале, що масу  $\Delta m$   $i$ -ої елементарної дуги  $L_{M_{i-1}M_i}$  можна вважати зосередженою в одній точці  $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ , де  $\overline{y}_i = \overline{y}_i(\overline{x}_i)$ .



Рисунк 10.1

Тоді:

$$\Delta m_i \approx \rho(\bar{x}_i) \Delta L_i \approx \rho(\bar{x}_i) \sqrt{1 + (y'(\bar{x}_i))^2} \Delta x_i.$$

Розглядаючи розбиття дуги як систему матеріальних точок  $\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , наближено знаходимо масу  $m$  дуги:

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(\bar{x}_i) \sqrt{1 + (y'(\bar{x}_i))^2} \Delta x_i.$$

При необмеженому здрібненні розбиття, коли  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , дістаємо точне значення маси  $m$  дуги у вигляді визначеного інтеграла:

$$m = \int_a^b \rho(x) dl,$$

де  $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$  – диференціал довжини дуги.

Статичний момент  $\Delta M_l$  матеріальної точки відносно осі дорівнює добутку її маси  $\Delta m$  на відхилення  $r$  від осі:  $\Delta M_l = \Delta m \cdot r$ .

Момент інерції  $\Delta I_l$  матеріальної точки відносно осі дорівнює добутку її маси  $\Delta m$  на квадрат відхилення  $r$  від осі:  $\Delta I_l = \Delta m \cdot r^2$ .

Момент системи матеріальних точок дорівнює сумі відповідних моментів всіх її складових.

Центром мас  $C(x_c, y_c)$  системи матеріальних точок називається матеріальна точка з їх сумарною масою  $m = \sum \Delta m_i$ , що має ті самі сумарні статичні моменти  $M_x = \sum \Delta M_{xi}$  і  $M_y = \sum \Delta M_{yi}$ . Координати центра мас  $C(x_c, y_c)$  обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$
$$M_x = \int_a^b y \rho(x) dl; \quad M_y = \int_a^b x \rho(x) dl;$$

$$I_x = \int_a^b y^2 \rho(x) dl; \quad I_y = \int_a^b x^2 \rho(x) dl;$$

де  $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$  – диференціал довжини дуги.

*Приклад.* Для дуги кола  $y = \sqrt{9 - x^2}$ ,  $x \in [0; 3]$ , розташованої у першій координатній чверті, знайти масу  $m$ , статичні моменти  $M_x$ ,  $M_y$  і моменти інерції  $I_x$ ,  $I_y$  відносно осей  $Ox$  та  $Oy$ , а також координати центра мас  $C(x_c, y_c)$ . Лінійна густина  $\rho(x) = \rho_0 = const$ .

*Розв'язання.* Знайдемо диференціал довжини дуги:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{9 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}};$$

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\right)^2} dx = \\ &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}} dx = \frac{3dx}{\sqrt{9 - x^2}} \end{aligned}$$

Обчислимо масу дуги:

$$\begin{aligned} m &= \int_a^b \rho(x) dl = \int_0^3 \rho_0 \frac{3dx}{\sqrt{9 - x^2}} = 3\rho_0 \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \\ &= 3\rho_0 \cdot \arcsin \frac{x}{3} \Big|_0^3 = 3\rho_0 (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{3}{2} \pi \rho_0. \end{aligned}$$

Знайдемо статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_a^b y \rho(x) dl = \left[ \text{за умовою} \right] = \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \cdot \rho_0 \cdot \frac{3dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \\ &= 3\rho_0 \int_0^3 dx = 3\rho_0 x \Big|_0^3 = 9\rho_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_a^b x\rho(x)dl = \int_0^3 x\rho_0 \frac{3dx}{\sqrt{9-x^2}} = 3\rho_0 \int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = 9 - x^2; du = -2xdx; \\ xdx = -\frac{du}{2}; u_H = 9; u_B = 0. \end{array} \right| = -\frac{3}{2}\rho_0 \int_9^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = \\
 &= 3\rho_0 \sqrt{u} \Big|_0^9 = 9\rho_0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_a^b y^2\rho(x)dl = \left[ \text{за умовою} \right] = \int_0^3 (9-x^2)\rho_0 \frac{3dx}{\sqrt{9-x^2}} = \\
 &= 3\rho_0 \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t; dx = 3\cos t dt; \\ \sqrt{9-x^2} = 3\cos t; t = \arcsin \frac{t}{3}; \\ t_H = \arcsin 0 = 0; t_B = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\
 &= 3\rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t \cdot 3\cos t dt = 27\rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\
 &= \frac{27}{2}\rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{27}{2}\rho_0 \left( t + \frac{1}{2}\sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{27}{4}\pi\rho_0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_a^b x^2\rho(x)dl = \int_0^3 x^2\rho_0 \frac{3dx}{\sqrt{9-x^2}} = 3\rho_0 \int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t; dx = 3\cos t dt; \\ \sqrt{9-x^2} = 3\cos t; t = \arcsin \frac{t}{3}; \\ t_H = \arcsin 0 = 0; t_B = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 3\rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9\sin^2 t \cdot 3\cos t dt}{3\cos t}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 27\rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt = \frac{27}{2} \rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \\
&= \frac{27}{2} \rho_0 \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{27}{4} \pi \rho_0. \\
x_c = \frac{M_y}{m} &= \frac{\frac{27}{4} \pi \rho_0}{\frac{3}{2} \pi \rho_0} = \frac{9}{2}; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{27}{4} \pi \rho_0}{\frac{3}{2} \pi \rho_0} = \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

## 10.2 Маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої області

Нехай задана матеріальна неоднорідна плоска фігура  $D$ , що має вигляд криволінійної трапеції, обмеженої зверху графіком неперервної невід'ємної функції  $y = y(x) \geq 0$ , знизу віссю  $Ox$ , а з боків вертикальними прямими  $x = a$  і  $x = b$ , де  $a < b$ , причому поверхнева густина  $\rho = \rho(x)$  залежить тільки від  $x$  (рис. 10.2).

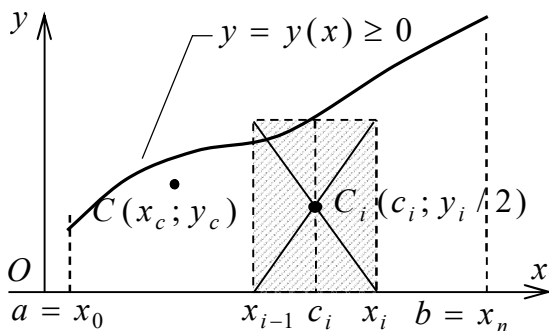


Рисунок 10.2

Знайдемо її масу  $m$ , статичні моменти  $M_x$ ,  $M_y$  і моменти інерції  $I_x$ ,  $I_y$  відповідно відносно координатних осей  $Ox$  і  $Oy$  та координати центра мас  $C(x_c, y_c)$ .

Розіб'ємо відрізок  $[a; b]$  на  $n$  довільних частин точками:

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ . Через кожен точку поділу  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  проведемо пряму, паралельну осі  $Oy$ , і розіб'ємо криволінійну трапецію на елементарні смужки – частинні криволінійні трапеції. Смужку, що міститься між прямими  $x = x_{i-1}$  і  $x = x_i$ , наближено можна вважати однорідним прямокутником з основою  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  і висотою  $y_i = y(c_i)$ , де  $c_i$  – середина частинного відрізка  $[x_{i-1}; x_i]$ . Площа такого прямокутника  $\Delta S_i = y_i \Delta x_i$ , а його маса:

$$\Delta m_i = \rho(c_i) \Delta S_i = \rho(c_i) y_i \Delta x_i.$$

З механіки відомо, що центр мас прямокутника зі сталою поверхневою густиною  $\rho = const$  знаходиться в точці перетину його діагоналей  $C_i \left( c_i; \frac{y_i}{2} \right)$ . Якщо припустити, що вся маса кожного частинного прямокутника зосереджена в його центрі мас  $C_i$ , то дістанемо систему матеріальних точок  $\Delta m_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тоді маса  $m$  криволінійної трапеції  $D$ , її статичні моменти  $M_x$ ,  $M_y$  і моменти інерції  $I_x$ ,  $I_y$  відповідно відносно осей  $Ox$  і  $Oy$  наближено визначаються співвідношеннями для такої системи:

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(c_i) y_i \Delta x_i;$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \frac{y_i}{2} \approx \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{2} \rho(c_i) y_i \Delta x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho(c_i) y_i^2 \Delta x_i;$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n \Delta m_i c_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(c_i) x_i y_i \Delta x_i;$$

$$I_x \approx \sum_{i=1}^n \Delta m_i \left( \frac{y_i}{2} \right)^2 \approx \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \rho(c_i) y_i^3 \Delta x_i;$$

$$I_y \approx \sum_{i=1}^n \Delta m_i (x_i)^2 \approx \sum_{i=1}^n \rho(c_i) x_i^2 y_i \Delta x_i.$$

Застосовуючи граничний перехід при  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , для вказаних величин одержуємо точні розрахункові формули:

$$m = \int_a^b \rho(x) dS = \int_a^b \rho(x) y(x) dx;$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y(x) \rho(x) dS = \frac{1}{2} \int_a^b \rho(x) y^2(x) dx;$$

$$M_y = \int_a^b x \rho(x) dS = \int_a^b x \rho(x) y(x) dx;$$

$$I_x = \frac{1}{4} \int_a^b y^2(x) \rho(x) dS = \frac{1}{4} \int_a^b y^3(x) \rho(x) dx;$$

$$I_y = \int_a^b x^2 \rho(x) dS = \int_a^b x^3 \rho(x) y(x) dx,$$

де  $dS = y(x) dx$  – диференціал площі криволінійної трапеції.

Аналогічно для координат центра мас  $C(x_c, y_c)$  криволінійної трапеції дістаємо формули:

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

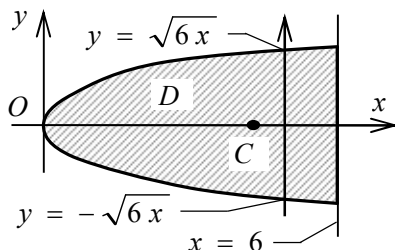
*Приклад.* Для параболічного сегмента  $D$ , який відсікає від параболи  $y^2 = 6x$  пряма  $x = 6$ , знайти масу  $m$ , статичні моменти  $M_x, M_y$  і моменти інерції  $I_x, I_y$  відповідно відносно осей  $Ox$  та  $Oy$ , а також координати центра мас  $C(x_c, y_c)$ . Поверхнева густина  $\rho =$

$\rho_0 = \text{const}$  (фігура однорідна).

Дана область  $D$  є правильною (в обох напрямках  $Ox$  та  $Oy$ ) і однорідною. Тому задачу можна розв'язати двома способами:

- розглядаючи область  $D$  як правильну в напрямку  $Oy$ ;
- розглядаючи область  $D$  як правильну в напрямку  $Ox$ .

*Розв'язання.* Розв'яжемо задачу способом а). Відповідне подання фігури  $D$  – на рисунку 10.3.



Рисунк 10.3

Обчислимо масу області  $D$ :

$$\begin{aligned} m &= \int_a^b \rho(x) dS = \left| \int_a^b \rho(x) (y_2(x) - y_1(x)) dx \right| = \\ &= \int_a^b \rho(x) (y_2(x) - y_1(x)) dx = \int_0^6 \rho_0 (\sqrt{6x} + \sqrt{6x}) dx = \\ &= 2\sqrt{6}\rho_0 \int_0^6 x^{\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{6}\rho_0 \left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^6 = 48\rho_0. \end{aligned}$$

Знайдемо статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас пластинки  $D$ .

По-перше, в силу однорідності й симетрії відносно осі  $Ox$ ,

маємо:  $M_x = 0$ ;  $y_c = 0$ . Далі обчислюємо:

$$M_y = \int_a^b x\rho(x)dS = \int_a^b x\rho(x)(y_2(x) - y_1(x))dx;$$

$$M_y = \int_0^6 x\rho_0(\sqrt{6x} + \sqrt{6x})dx = 2\sqrt{6}\rho_0 \int_0^6 x^{\frac{3}{2}}dx =$$

$$= 2\sqrt{6}\rho_0 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^6 = \frac{864}{5}\rho_0;$$

$$I_x = \frac{1}{4} \int_a^b \rho(x)(y_2^3(x) - y_1^3(x))dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^6 \rho_0((6x)^{\frac{3}{2}} + (6x)^{\frac{3}{2}})dx = 3\rho_0\sqrt{6} \int_0^6 x^{\frac{3}{2}}dx =$$

$$= 3\rho_0\sqrt{6} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^6 = \frac{1296}{5}\rho_0;$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x)x^2(y_2(x) - y_1(x))dx =$$

$$= \int_0^6 \rho_0x^2(\sqrt{6x} + \sqrt{6x})dx = 2\rho_0\sqrt{6} \int_0^6 x^{\frac{5}{2}}dx = 2\rho_0\sqrt{6} \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \Big|_0^6 =$$

$$= \frac{5184}{7}\rho_0.$$

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{864}{5}\rho_0}{48\rho_0} = \frac{18}{5}; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{0}{48\rho_0} = 0.$$

**ЛЕКЦІЯ 11**  
**ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ЛІНІЇ РІВНЯ**  
**ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ. ПОВЕРХНІ РІВНЯ ФУНКЦІЇ**  
**ТРЬОХ ЗМІННИХ. ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ**  
**ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ**

**11.1 Поняття функції багатьох змінних.**

**Область визначення.**

Нехай  $n$  – деяке фіксоване натуральне число. Упорядкована множина  $n$  довільних дійсних чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  називаються  $n$ -вимірною точкою і позначається однією буквою, наприклад,  $M$ . Числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  називаються *координатами* точки  $M$ . Позначається  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Множина всіх  $n$ -вимірних точок називається  $n$ -вимірним точковим простором  $R^n$ .

Нехай задано деяку  $n$ -вимірну непорожню множину  $D$ . Якщо за вказаним правилом (*законом відповідності*)  $f$  кожній точці  $M$  цієї множини відповідає одне цілком певне значення дійсної змінної  $U$ , то кажуть, що задано *функцію  $n$  змінних*  $U = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . При цьому множину  $D$  називають *областю визначення* функції  $U = f(M)$ . Незалежні змінні  $x_1, x_2, \dots, x_n$  називають *аргументами*, а залежну змінну  $U$  – *функцією*.

Якщо  $D$  – область на координатній площині  $Oxy$  (плоска, двовимірنا), то функція  $z = f(M) = f(x, y)$  є *функцією двох змінних  $x, y$* .

Якщо  $D$  – область у тривимірному координатному просторі  $Oxyz$ , то функція  $U = f(M) = f(x, y, z)$  є *функцією трьох змінних  $x, y, z$* .

Аналітичне завдання функції означає, що задається формула, за допомогою якої за заданим значенням незалежних змінних отримують значення функції. При аналітичному завданні функції за область визначення  $D$  приймають множину значень  $x$  і  $y$ , для яких  $z$  отримує дійсні значення.

*Приклад.* Знайти і зобразити штриховкою на координатній площині  $Oxy$  область визначення  $D$  заданої функції

$$z = \ln(25 - x^2 - y^2).$$

*Розв'язання:* Область визначення  $D$  даної функції  $z = \ln(25 - x^2 - y^2)$  – множина всіх тих точок  $(x, y)$ , для яких,  $25 - x^2 - y^2 > 0$ , бо логарифм визначений тільки для додатних значень аргументу, а жодних інших обмежень на змінні  $x, y$  немає.

Щоб зобразити область  $D$  геометрично, знайдемо її межу:

$$25 - x^2 - y^2 = 0; \quad x^2 + y^2 = 25.$$

Це рівняння кола з радіусом  $R=5$ . Дане коло у залежності від знаку виразу  $25 - x^2 - y^2$  ділить всю координатну площину  $Oxy$  на дві частини – внутрішню і зовнішню (рис. 11.1).

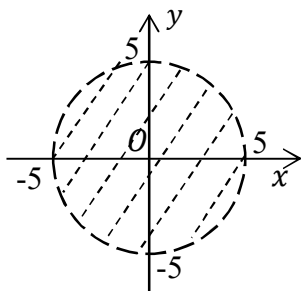


Рисунок 11.1

Щоб виявити, яка з частин входить у область визначення, тобто задовольняє умову  $x^2 + y^2 < 25$ , необхідно взяти довільно по одній пробній внутрішній точці з кожної частини і для них перевірити цю

умову. Наприклад  $O(0, 0)$ , для точки умова виконується  $0^2 + 0^2 < 25$ ,  $0 < 25$ , тому внутрішня область, обмежена колом, входить в  $D$ . Для точки  $B(1, 5)$  ця умова не виконується  $1 + 25 < 25$ , тому область, що лежить поза колом, не входить в  $D$ .

Отже, внутрішніми точками області визначення  $D$  даної

функції є точки, обмежені колом. Саме коло не належить області  $D$ , тому що для його точок  $x^2 + y^2 = 25$ . Область  $D$  – відкрита, її межа позначена пунктиром.

## 11.2 Поверхня як графік функції двох змінних

Множина всіх точок  $P(x, y, z)$  простору, координати яких задовольняють рівняння, називається *графіком* функції двох змінних  $z = f(x, y)$ . Звичайно графіком є деяка поверхня  $S$ , що проектується на площину  $Oxy$  на область визначення  $D$  (рис. 11.2).

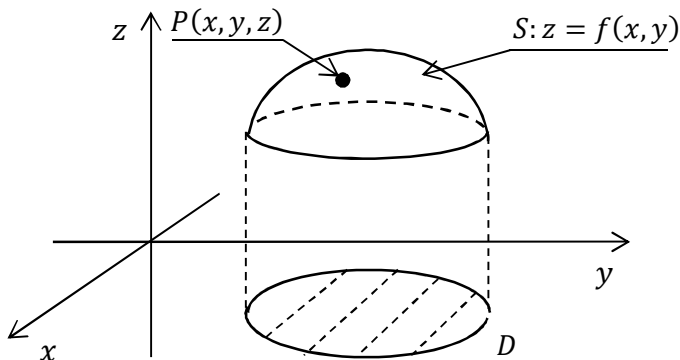


Рисунок 11.2

*Приклад.* Побудувати поверхню, яка є графіком функції  $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$  (еліптичний параболоїд).

Використовуємо метод паралельних перерізів.

Знайдемо головні перерізи (перерізи координатними площинами).

$Oyz$ :  $x = 0$ ;  $z = \frac{y^2}{4}$ ;  $y^2 = 4z$  – парабола з вершиною у початку координат  $O(0, 0)$  і віссю  $Oz$ .

$Oxz$ :  $y = 0$ ;  $z = x^2$  – парабола з вершиною у початку



координат  $O(0, 0)$  і віссю  $Oz$ .

$Oxy$ :  $z = 0$ ;  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 0$ ;  $O(0, 0)$  – початок координат (вершина параболоїда).

Додатково знаходимо переріз поверхні площиною, що паралельна координатній площині  $Oxy$   $z = 9$ ;  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 9$ ;

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 - \text{еліпс.}$$

Еліптичний параболоїд  $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$  зображений на рисунку 11.3.

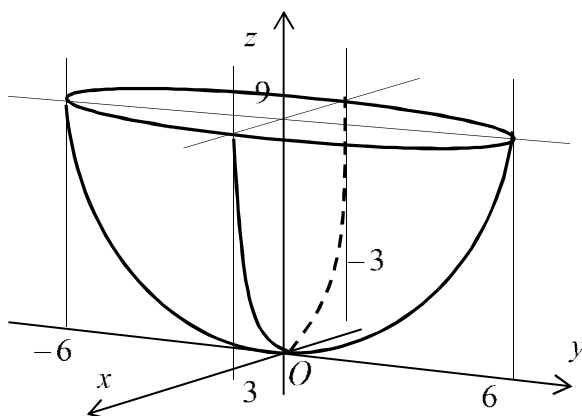


Рисунок 11.3

### 11.3 Лінії рівня функції двох змінних. Поверхні рівня функції трьох змінних

Для графічного зображення функцій двох і трьох змінних використовуються також відповідно лінії та поверхні рівня.

*Лінією рівня функції двох змінних  $z = f(x, y)$*  називається множина всіх точок координатної площини  $Oxy$ , в яких ця функція набуває одного й того ж значення  $z = C$ ,  $C = \text{const}$ . Рівняння лінії

рівня

$$f(x, y) = C.$$

Через кожну точку  $M_0(x_0, y_0)$  області  $D$  проходить єдина лінія рівня  $f(x, y) = f(M_0)$ .

При різних  $C$  дістанемо різні лінії рівня для даної функції  $z = f(x, y)$ , кожна з яких служить проекцією лінії перетину поверхні  $z = f(x, y)$  площиною  $z = C$ .

Якщо вибрати числа  $C_1, C_2, \dots, C_n$  так, щоб вони утворювали арифметичну прогресію з різницею  $d$   $C_{n+1} = C_n + d$ , то отримаємо топографічну карту рельєфу поверхні  $z = f(x, y)$ . По взаємному розміщенню ліній рівня можна судити про характер рельєфу: там, де лінії розміщуються густіше, функція  $z = f(x, y)$  змінюється швидше (поверхня крутіша); там, де лінії розміщуються рідше, функція змінюється повільніше (поверхня більш полого).

*Поверхнею рівня* функції трьох змінних  $u = f(x, y, z)$  називається множина всіх точок простору  $Oxyz$ , в яких ця функція набуває одного й того ж значення  $u = C$ ,  $C = const$ . Рівняння поверхні рівня

$$f(x, y, z) = C.$$

#### 11.4 Границя та неперервність функції багатьох змінних

**Визначення.** Число  $A$  називається границею функції  $z = f(x, y)$  при  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ , якщо для всіх значень  $x$  і  $y$ , що досить мало відрізняються відповідно від чисел  $x_0$  і  $y_0$ , відповідне значення функції  $f(x, y)$  як завгодно мало відрізняється від числа  $A$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

В цьому визначенні функція  $z = f(x, y)$  визначена в деякому околі точки  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  крім, можливо, самої точки  $P_0$  і тому ми вважаємо, що або  $x \neq x_0$ , або  $y \neq y_0$ .

Аналогічно визначається границя функції  $n$  незалежних змінних при  $n > 2$ .

Нехай точка  $P_0(x_0, y_0)$  належить області визначення функції  $z = f(x, y)$ . Приростом функції  $z = f(x, y)$  в даній точці  $P_0$  називається різниця

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0),$$

де  $\Delta x$  і  $\Delta y$  – приріст аргументів.

**Визначення.** Функція  $z = f(x, y)$  називається неперервною в точці  $P_0(x_0, y_0)$ , якщо вона визначена в деякому околі цієї точки і якщо нескінченно малим приростам незалежних змінних  $x$  і  $y$  відповідає нескінченно малий приріст функції  $z$ , тобто

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0.$$

Позначивши  $x_0 + \Delta x = x$  і  $y_0 + \Delta y = y$ , умову неперервності функції  $f(x, y)$  записати у вигляді

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [f(x, y) - f(x_0; y_0)] = 0$$

або

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0; y_0).$$

Останнє означає, що функція неперервна в точці  $(x_0; y_0)$ , якщо її границя дорівнює значенню функції в цій точці.

**Визначення.** Функція, яка неперервна в кожній точці області, називається неперервною в цій області.

Точка на площині  $Oxy$ , в якій не виконується умова неперервності функції, називається *точкою розриву* функції  $z = f(x, y)$ , а сама функція  $z = f(x, y)$  називається *розривною* в точці

Точка  $P_0$  є точкою розриву функції  $z = f(x, y)$ , зокрема, в таких випадках:

1) функція визначена в деякому околі точки  $P_0$ , крім самої точки  $P_0$ ;

2) функція визначена в усіх точках деякого околу точки  $P_0$ , але не існує скінченної границі  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ ;

3) функція визначена в усіх точках деякого околу точки  $P_0(x_0, y_0)$  та існує скінченна границя  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ , але

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \neq f(x_0; y_0).$$

**ЛЕКЦІЯ 12**  
**ЧАСТИННІ ПОХІДНІ. ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ**  
**ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. СКЛАДЕНІ**  
**ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ДИФЕРЕНЦІОВАННЯ**

**12.1 Частинні похідні. Частинні диференціали.**  
**Повний диференціал функції багатьох змінних**

Нехай функція  $z = f(x, y)$  – функція двох незалежних змінних  $x$  і  $y$ . Приріст, що отримує функція  $z = f(x, y)$ , коли змінюється тільки одна змінна, називається *частинним приростом функції за відповідною змінною*. Надамо змінній  $x$  приросту  $\Delta x$ , залишаючи змінну  $y$  фіксованою.

*Частинною похідною функції  $z = f(x, y)$  за змінною  $x$*  називається границя відношення частинного приросту по  $x$  цієї функції  $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$  до відповідного приросту аргументу  $\Delta x$ , коли останній прямує до нуля:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Застосовуються також позначення:

$$z'_x; f'_x; f'_x(x, y); \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Отже:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left( \frac{dz}{dx} \right) \Big|_{y=const}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left( \frac{dz}{dy} \right) \Big|_{x=const}.$$

*Приклад.* Знайти частинні похідні функцій:

$$\text{а) } z = x^{lgy}, \text{ б) } z = 3x^2y + 6y - x^9.$$

*Розв'язання.*

$$\text{а) } \frac{\partial z}{\partial x} = lgy \cdot x^{lgy-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^{lgy} \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10}.$$

$$\text{б) } \frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 9x^8; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 6.$$

**Визначення.** Частинним диференціалом за змінною  $x$  функції  $z = f(x, y)$  називається головна частина частинного приросту  $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ , яка пропорційна приросту  $\Delta x$  незалежної змінної  $x$ .

Аналогічно визначається частинний диференціал за змінною  $y$ .

Диференціали незалежних змінних  $x$  і  $y$  дорівнюють їх приростам, тобто

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y.$$

Частинний диференціал функції  $z = f(x, y)$  за змінною  $x$ , як і  $y$  випадку функції однієї змінної, зв'язаний з відповідною частинною похідною співвідношенням

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx.$$

Аналогічно, частинний диференціал за змінною  $y$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Таким чином, частинний диференціал функції двох незалежних змінних дорівнює добутку відповідної частинної похідної на диференціал цієї змінної.

*Приклад.* Знайти частинні похідні, частинні диференціали функції:

$$z = \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right).$$

*Розв'язання.* Частинні похідні знаходимо від складної функції:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{(x^2 + y^2)'_x(x^3 + y^3) - (x^3 + y^3)'_x \cdot (x^2 + y^2)}{(x^3 + y^3)^2} = \\ &= -\sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2xy^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= -\sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{(x^2 + y^2)'_y(x^3 + y^3) - (x^3 + y^3)'_y \cdot (x^2 + y^2)}{(x^3 + y^3)^2} = \\ &= -\sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2x^3y - y^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2}. \end{aligned}$$

Частинні диференціали функції:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = -\sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2xy^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2} \cdot dx;$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2x^3y - y^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2} \cdot dy.$$

Функція  $z = f(x, y)$ , називається *диференційовною* в точці  $P(x, y)$ , якщо її повний приріст

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

де  $A, B$  – незалежні від  $\Delta x$  і  $\Delta y$  величини;  $\alpha(\Delta x, \Delta y)$  і  $\beta(\Delta x, \Delta y)$  – нескінченно малі при  $\Delta x \rightarrow 0$  і  $\Delta y \rightarrow 0$  функції.

**Визначення.** Повним диференціалом  $dz$  функції  $z = f(x, y)$  в точці  $P(x, y)$  називається головна частина її повного приросту в цій точці, лінійна щодо приростів  $\Delta x$  і  $\Delta y$  аргументів:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

**Теорема 1** (необхідна умова диференційовності). Якщо функція  $z = f(x, y)$  диференційовна в деякій точці  $P(x, y)$ , то вона неперервна в цій точці.

**Доведення.**

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y) =$$

$$= A \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta x + B \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta y + \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0.$$

Оскільки диференціали незалежних змінних збігаються з їх приростами  $dx = \Delta x$  і  $dy = \Delta y$ , то

$$dz = A dx + B dy.$$



**Теорема 2.** Якщо функція  $z = f(x, y)$  диференційовна в точці  $P(x, y)$ , тобто  $dz = Adx + Bdy$ , то ця функція має в точці  $P(x, y)$  частинні похідні  $z'_x$  і  $z'_y$ , причому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Іншими словами, повний диференціал функції  $z = f(x, y)$  дорівнює сумі добутків частинних похідних цієї функції на диференціали відповідних аргументів

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

**Теорема 3.** (Достатня умова диференційовності). Якщо функція  $z = f(x, y)$  має в деякій точці  $P(x, y)$  неперервні частинні похідні  $f'_x(x, y)$  і  $f'_y(x, y)$ , то ця функція диференційовна в точці  $P$ .

(Прийmemo теорему без доведення).

*Приклад.* Знайти повний диференціал функції

$$U(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

*Розв'язання.* Маємо функцію трьох змінних. При диференціюванні по одній змінній дві інші змінні вважаємо сталими величинами. Отже:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}};$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-x}{(\sqrt{y^2 + z^2})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^2 + z^2}} \cdot 2y = \frac{-xy}{(y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{-x}{(\sqrt{y^2 + z^2})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^2 + z^2}} \cdot 2z = \frac{-xz}{(y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Повний диференціал:

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{y^2 + z^2}} - \frac{x(ydy + zdz)}{(y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

## 12.2 Складені функції та їх диференціювання

Обмежимося розглядом трьох важливих випадків у припущенні, що всі частинні похідні неперевні.

1. Нехай задана функція двох змінних  $z = f(x, y)$ , аргументи якої самі є функціями незалежної змінної  $t$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Тоді повна похідна складеної функції однієї змінної  $t$   $z = f(x(t), y(t))$  обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

2. Якщо аргументи функції двох змінних  $z = f(x, y)$  самі є функціями інших двох незалежних змінних  $x = x(u, v)$  і  $y = y(u, v)$ . Тоді частинні похідні складеної функції двох змінних  $z = f(x(u, v), y(u, v))$  обчислюються за формулами:

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{dz}{dv} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

3. Нехай задана функція двох змінних  $z = f(x, y)$ , де другий аргумент  $y$  сам є функцією першого аргументу  $x$ :  $y = y(x)$ . Тоді *повна похідна* за  $x$  складеної функції однієї змінної  $z = f(x, y(x))$  обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

*Зауваження.* Праворуч у цій формулі перший доданок  $\frac{\partial z}{\partial x}$  – це частинна похідна за  $x$ , обчислена в припущенні, що  $y = const$ . У лівій частині маємо  $\frac{dz}{dx}$  – повну похідну за  $x$ , обчислену при умові, що  $y$  є функцією від  $x$ :  $y = y(x)$ .

Третій випадок безпосередньо впливає з першого, якщо прийняти  $t = x$ .

*Приклад.* Знайти похідну функції  $z = e^{x^2+y^2}$ , якщо

$$x = a \cdot \cos t; \quad y = a \cdot \sin t.$$

*Розв'язання.* Підставимо в функцію значення  $x, y$ :

$$z = e^{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = e^{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = e^{a^2},$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = (e^{a^2})'_t = 0.$$

*Приклад.* Знайти  $\frac{dz}{dt}$ , якщо  $z = x^5 + 2xy - y^3$  і, де:

$$x = \cos 2t; \quad y = \operatorname{arctg} t.$$

*Розв'язання.* Безпосередня підстановка значень  $x, y$  в функцію спрощення не дає, тому:

$$\frac{dz}{dx} = 5x^4 + 2y; \quad \frac{dz}{dy} = 2x - 3y^2; \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -2\cos 2t;$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Маємо:

$$\frac{dz}{dt} = (5x^4 + 2y) \cdot (-2\cos 2t) + (2x - 3y^2) \frac{1}{1+t^2}.$$

Підставимо замість  $x$  та  $y$  відомі вирази, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= (5(\cos 2t)^4 + 2\arctg t) \cdot (-2\cos 2t) + \\ &+ (2\cos 2t - 3(\arctg t)^2) \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

*Приклад.* Знайти диференціал функції

$$z = \frac{x^2}{y}, \text{ якщо } x = u - 2v \text{ і } y = 2u + v.$$

*Розв'язання.* Обчислимо всі частинні похідні та диференціали по відповідним змінним:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x^2}{y^2}; \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -2; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1;$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv; \quad dx = du - 2dv;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv; \quad dy = 2du + dv.$$

Отже, диференціал даної функції матиме вигляд:

$$dz = \frac{2x}{y} (du - 2dv) - \frac{x^2}{y^2} (2du + dv) = \left( \frac{2x}{y} - \frac{2x^2}{y^2} \right) du -$$

$$-\left(\frac{4x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) dv = \frac{x}{y} \left[ 2 \left(1 - \frac{x}{y}\right) du - \left(4 + \frac{x}{y}\right) dv \right] =$$

Переходимо до змінних  $u, v$ :

$$\begin{aligned} dz &= \frac{u - 2v}{2u + v} \left[ 2 \left(1 - \frac{u - 2v}{2u + v}\right) du - \left(4 + \frac{u - 2v}{2u + v}\right) dv \right] = \\ &= \frac{u - 2v}{(2u + v)^2} [2(u + 3v)du - (9u + 2v)dv]. \end{aligned}$$

*Зауваження 2.* Очевидно, значення похідних будуть ті самі, якщо у вираз для зовнішньої функції  $z = f(x, y)$  попередньо підставити замість  $x$  та  $y$  відповідні внутрішні функції, а потім знайти шукані похідні за внутрішніми аргументами звичайним методом.

**ЛЕКЦІЯ 13**  
**НЕЯВНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ.**  
**ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ЧАСТИННІ**  
**ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ**  
**13.1 Неявні функції та їх диференціювання**

**Теорема 1.** (умови існування неявної функції). Якщо функція  $F(x, y)$  та її частинні похідні  $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$  визначені та неперервні в деякому околі точки  $P(x_0, y_0)$ , причому  $F(x_0, y_0) = 0$ , а  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , то рівняння  $F(x, y) = 0$  в деякому околі точки  $P(x_0, y_0)$  визначає єдину неявну неперервну і диференційовну функцію  $y = y(x)$ , причому  $y_0 = y(x_0)$ .

**Теорема 2.** Нехай функція  $y = y(x)$  задається неявно рівнянням  $F(x, y) = 0$ , де функція  $F(x, y)$  та її частинні похідні  $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$  неперервні в околі деякої точки  $P(x, y)$ , координати якої задовольняють це рівняння, причому  $F'_y(x, y) \neq 0$ . Тоді в цій точці

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

*Приклад.* Написати рівняння дотичної до кривої

$$l: x^3 y^4 - 5xy^2 = -2 \text{ у точці } P_0(2; 1).$$

*Розв'язання.* Перевіримо, чи задовольняє точка  $P_0(2; 1)$  рівняння лінії:

$$F(x, y) = x^3 y^4 - 5xy^2 + 2; \quad x^3 y^4 - 5xy^2 + 2 = 0;$$

$$P_0(2; 1): F(x_0, y_0) = 8 - 10 + 2 = 0; \quad 0 = 0; \quad P_0(2; 1) \in l.$$

$$\text{Рівняння дотичної прямої: } y - y_0 = y'_0(x - x_0).$$

Знайдемо шукану похідну  $y'_0 = y'_x|_{P_0}$ :

$$F'_x = 3x^2y^4 - 5y^2; F'_y = 4x^3y^3 - 10xy;$$

$$y'_x = -\frac{3x^2y^4 - 5y^2}{4x^3y^3 - 10xy} = \frac{3x^2y^3 - 5y}{10x - 4x^3y^2};$$

$$y'_x|_{P_0} = -\frac{7}{12}.$$

Рівняння шуканої дотичної

$$y - 1 = -\frac{7}{12}(x - 2); y = -\frac{7}{12}x + \frac{13}{6}.$$

*Приклад.* Знайти частинні похідні функції  $z(x, y)$ , заданої рівнянням

$$e^z + z - x^2y + 1 = 0$$

*Розв'язання.* Маємо  $F(x, y, z) = e^z + z - x^2y + 1$ , тому:

$$F'_x = -2xy; F'_y = -x^2; F'_z = e^z + 1. \text{ Отже:}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{2xy}{e^z + 1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{x^2}{e^z + 1}.$$

*Зауваження.* Нехай рівняння  $F(x, y, z) = 0$  задає неявно функцію двох змінних  $z = f(x, y)$ . Тоді, фіксуючи  $y$ , за теоремою 2 дістаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_z(x, y)}.$$

Фіксуючи  $x$ , аналогічно маємо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_z(x, y)}.$$

*Приклад.* Знайти частинні похідні функції, та обчислити їх з точністю 0,001 у точці  $M_0(2, 1, 1)$ :

$$z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 0.$$

*Розв'язання.*  $F'_x = 6xy + z - 2$ , ( $y, z$  вважаємо постійними);

$$F'_y = 3x^2 + 2yz^2 + 1, \quad (x, z \text{ вважаємо постійними});$$

$$F'_z = 3z^2 + x + 2y^2z, \quad (x, y \text{ вважаємо постійними});$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{6xy + z - 2}{3z^2 + x + 2y^2z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} / (2, 1, 1) = -\frac{11}{6} \approx -1,83333; \quad \frac{\partial z}{\partial y} / (2, 1, 1) = -\frac{15}{6} \approx -2,500.$$

### 13.2 Частинні похідні вищих порядків

Припустимо, що функції  $z = f(x, y)$  має частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y);$$

ці похідні в свою чергу є функціями незалежних змінних  $x$  і  $y$ . Частинні похідні від цих функцій називаються *другими частинними похідними* або *частинними похідними другого порядку* від даної функції  $z = f(x, y)$ . Кожна похідна першого порядку має дві частинні похідні, тому ми отримуємо чотири частинні похідні другого порядку, які позначаються так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$



Аналогічно визначають частинні похідні 3-го, 4-го і більш високого порядку.

Частинні похідні другого або більш високого порядку, знайдені за різними змінними називаються мішаними. Такими є, наприклад, мішані похідні другого порядку  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

**Теорема Шварца.** Якщо частинні похідні вищого порядку неперервні, то мішані похідні одного порядку, які відрізняються лише порядком диференціювання, рівні між собою.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

*Приклад.* Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 8.$$

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 4x^3 - 4xy^3; & \frac{\partial z}{\partial y} &= -6x^2y^2 + 5y^4; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 12x^2 - 4y^3; & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -12x^2y + 20y^3; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -12xy^2; & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -12xy^2. \end{aligned}$$

Як виявилось

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12xy^2.$$

*Приклад.* Для заданої функції  $z = \cos \frac{y}{x}$  знайти частинні похідні другого порядку та перевірити рівність мішаних частинних похідних.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \sin \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2y}{x^3} \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2} \cdot \cos \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{2y}{x^3} \sin \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^4} \cdot \cos \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2} \cdot \cos \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \cdot \cos \frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \cdot \cos \frac{y}{x}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

*Приклад.* Для заданої функції  $z = y \ln x$  перевірити рівність мішаних частинних похідних  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ .

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{1}{x^2}.$$

Це не випадково. За теоремою Шварца, якщо частинні похідні вищого порядку неперервні, то мішані похідні одного

порядку, які відрізняються лише порядком диференціювання, рівні між собою.

*Приклад.* Перевірити, що задана функція  $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$  задовольняє вказаній умові:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

*Розв'язання.*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{(y^2 + x^2)^2} \cdot 2x = -\frac{2xy}{(y^2 + x^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x}{(y^2 + x^2)^2} \cdot 2y = \frac{2xy}{(y^2 + x^2)^2}.$$

Підставимо знайдені частинні похідні у дане рівняння:

$$-\frac{2xy}{(y^2 + x^2)^2} - \frac{2xy}{(y^2 + x^2)^2} - 4 \frac{y}{y^2 + x^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2 + x^2}\right) = 0;$$

$$-\frac{4xy}{(y^2 + x^2)^2} + \frac{4xy}{(y^2 + x^2)^2} = 0;$$

$$0 = 0.$$

### 13.3 Частинні диференціали вищих порядків

Повний диференціал функції  $z = f(x, y)$  називають також диференціалом першого порядку.

Якщо функція має неперервні частинні похідні другого порядку, то диференціал другого порядку визначається за формулою:

$$\begin{aligned}d^2z &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \\&= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy = \\&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.\end{aligned}$$

*Приклад.* Знайти  $d^2z$ , якщо  $z = \arctg \frac{y}{x}$ .

*Розв'язання.* Послідовність дій наступна:

1. Знаходимо перший диференціал:

$$\begin{aligned}dz &= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy; \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

2. Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2};\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

3. Маємо диференціал другого порядку:

$$\begin{aligned}d^2 z &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx^2 + 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy^2 = \\ &= \frac{2}{(x^2 + y^2)^2} (xy dx^2 + (y^2 - x^2) dx dy - xy dy^2).\end{aligned}$$

## ЛЕКЦІЯ 14

### ПОНЯТТЯ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

#### 14.1 Необхідна умова екстремуму функції двох змінних

Нехай функція  $z = f(x, y)$  визначена в області  $D$ . Точка  $P_0(x_0, y_0) \in D$ .

**Визначення.** Точка  $P_0(x_0, y_0)$  називається *точкою екстремуму* (максимуму або мінімуму) функції  $z = f(x, y)$ ,  $f(x_0, y_0)$ , є відповідно найбільше або найменше значення функції  $f(x, y)$  в деякому  $\varepsilon$ -околі точки  $P_0(x_0, y_0)$ .

При цьому значення  $f(x_0, y_0)$  називають *екстремальним значенням* функції (відповідно максимальним або мінімальним).

Відзначимо, що максимум і мінімум мають локальний (місцевий) характер. В області  $D$  функція може мати декілька екстремумів, або не мати їх взагалі.

**Теорема (необхідна умова існування екстремуму).** Якщо в точці  $P_0(x_0, y_0)$  диференційована функції  $z = f(x, y)$  має екстремум, то її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} = 0.$$

**Доведення.** Розглянемо припущення, що функція  $z = f(x, y)$  має в точці  $P_0(x_0, y_0)$  екстремум.

Відповідно до визначення екстремуму функція  $z = f(x, y)$  при постійному значенні  $y = y_0$ , як функція однієї змінної  $x$ , досягає екстремум при  $x = x_0$ . Як відомо, необхідною

умовою цього є рівність нулю похідної від функції  $z = f(x, y_0)$  при  $x = x_0$ , тобто

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} = 0.$$

Аналогічно функція  $z = f(x, y)$  при постійному значенні  $x = x_0$ , як функція однієї змінної  $y$ , досягає екстремум при  $y = y_0$ :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} = 0,$$

що і було необхідно довести.

Точки, в яких виконуються вимоги

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} = 0$$

називаються *стаціонарними*.

*Приклад.* Знайти стаціонарні точки функції

$$z = 2x^3 - xy^2 + y^2 + 5x^2$$

*Розв'язання.* Знайдемо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - y^2 + 10x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4xy + 2y.$$

Знайдемо розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ -2xy + 2y = 0 \end{cases}.$$

З другого рівняння маємо  $y = 0$ , або  $x = 1$ . Підставляючи по черзі ці значення в перше рівняння, отримаємо стаціонарні точки функції:

$$M_1(0, 0), M_2\left(-\frac{5}{3}, 0\right), M_3(1, 4), M_4(1, -4).$$

## 14.2 Достатня умова екстремуму функції двох змінних

Достатня умова екстремуму для функцій багатьох змінних має більш складний характер, чим для функцій однієї змінної. Розглянемо достатню умову екстремуму без доведення тільки для функцій двох змінних.

Аналогічно функції однієї змінної, наявність і характер екстремуму функції двох змінних у стаціонарній точці визначається знаком другого диференціала

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Нехай точка  $P_0(x_0, y_0)$  є стаціонарною точкою функції  $z = f(x, y)$ , тобто

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} = 0.$$

Обчислимо в точці  $P_0(x_0, y_0)$  значення частинних похідних другого порядку для функції  $z = f(x, y)$  і позначимо їх відповідно  $A, B, C$ :

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{P_0} = A, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{P_0} = B, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{P_0} = C.$$

**Теорема (достатня умова екстремуму).** Нехай в стаціонарній точці  $P_0(x_0, y_0)$  і її  $\varepsilon$  – околі функція  $z = f(x, y)$  має неперервні частинні похідні до другого порядку включно.

$$\text{Обчислимо визначник } \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$



Якщо  $\Delta = AC - B^2 > 0$ , то функція  $z = f(x, y)$  має в точці  $P_0(x_0, y_0)$  екстремум: максимум при  $A < 0$  і мінімум при  $A > 0$ .

Якщо  $\Delta = AC - B^2 < 0$ , то функція  $z = f(x, y)$  не має в точці  $P_0(x_0, y_0)$  екстремуму.

Якщо  $\Delta = AC - B^2 = 0$ , то ніякого висновку про характер стаціонарної точки зробити не можна, необхідні додаткові дослідження

*Приклад.* Знайти екстремум функції  $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ .

*Розв'язання.* 1. Область визначення функції:  $x \in R, y \in R$ . Знаходимо стаціонарні точки (необхідна умова існування екстремуму)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 3x^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3.$$

Виконаємо умову:  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x(2y - x) = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases};$$

$$3x = 0, x = 0; \quad 2y - x = 0, x = 2y.$$

Підставляючи в друге рівняння системи отримаємо стаціонарні точки  $M_1(6,3)$ ,  $M_2(0,0)$

2. Достатня умова існування екстремуму:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y - 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y^2.$$

Знайдемо значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках:  $M_1(6,3)$ :

$$A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_1} = 6 \cdot 3 - 6 \cdot 6 = -18;$$

$$B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_1} = 6 \cdot 6 = 36;$$

$$C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_1} = -12 \cdot 9 = -108.$$

$\Delta = AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 20$ ,  $\Delta > 0$ ;  $A < 0 \Rightarrow M_1(6,3)$  – точка максимуму.

$$z_{max}(6,3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 27$$

Аналогічно в точці  $M_2(0,0)$ :

$$A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_2} = 0; \quad B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_2} = 0; \quad C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_2} = 0.$$

Отже,  $\Delta = AC - B^2 = 0$ .

Проведемо додаткові дослідження:

а)  $z(0,0) = 0$ .

б) якщо  $x = 0$ , то функція набуває вигляду:  $z = -y^4$ ;  $z < 0$ ;

якщо  $y = 0$ , то функція набуває вигляду:  $z = -x^3$ ;  $z > 0$ , якщо  $x < 0$ ;  $z < 0$  якщо  $x > 0$ . Тобто в  $\varepsilon$  – околі точки  $(0,0)$  функція приймає значення різних знаків.

Отже, в точці  $M_2(0,0)$  екстремуму немає.

## ЛЕКЦІЯ 15

### НАЙМЕНШЕ ТА НАЙБІЛЬШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ У ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ

#### 15.1 Найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області

Нехай функція  $z = f(x, y)$  визначена і неперервна в обмеженій замкненій області  $D$ . Тоді вона досягає в цій області найбільшого  $M$  і найменшого  $m$  значень (так званій глобальний екстремум). Ці точки розташовані всередині області, або на її межі.

Знаходження найбільшого та найменшого значень функції  $z = f(x, y)$  в обмеженій замкненій області  $D$  полягає у наступних діях:

1. Знаходження всіх стаціонарних точок, які належать внутрішній частині області  $D$  і обчислення значень функції в цих точках.
2. Знаходження всіх стаціонарних точок, які належать межі області  $D$  і обчислення значень функції в цих точках.
3. Порівняння всіх знайдених значень функції з метою вибору найбільшого та найменшого значень функції.

*Приклад.* Знайти найбільше та найменше значення функції  $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$  в замкненій області:

$$\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} = 1.$$

*Розв'язання.* Область визначення функції:  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ .

1. Досліджуємо функцію на екстремум і визначаємо, які точки знаходяться всередині області  $D$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -10y^2 + 2x + 10; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -20xy;$$

$$\begin{cases} -10y^2 + 2x + 10 = 0; \\ -20xy = 0 \end{cases};$$

Одержали точки:  $M_1(0,1)$  ,  $M_2(0,-1)$ ,  $M_3(-5,0)$ , які всі належать області  $D$ . Обчислимо:  $z_1(0,1) = 1$ ,  $z_2(0,-1) = 1$   $z_3(-5,0) = -24$ .

2. Досліджуємо функцію на межі області  $D$ :

$$\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} = 1.$$

Межа – це ромб  $ABCE$  (рис. 15.1).

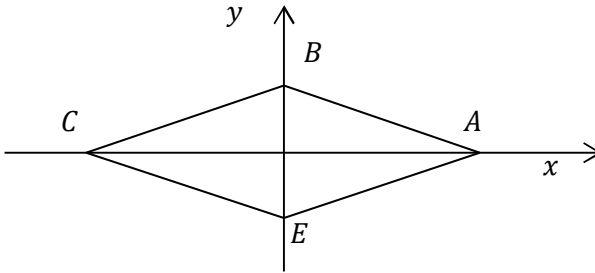


Рисунок 15.1

Обчислимо значення функції у вершинах ромба:  
 $A(7, 0)$ :  $z_4(A) = -10 \cdot 7 \cdot 0 + 7^2 + 10 \cdot 7 + 1 = 120$ ;

$B(0, 2)$ :  $z_5(B) = -10 \cdot 0 \cdot 2^2 + 0 + 10 \cdot 2 + 1 = 1$ ;

$C(-7, 0)$ :  $z_6(C) = -10 \cdot (-7) \cdot 0 + (-7)^2 - 10 \cdot 7 + 1 = -20$ ;

$E(0,-2)$ :  $z_7(E) = -10 \cdot 0 \cdot (-2)^2 + 0 + 0 + 1 = 1$ .

$z(B) = z(E)$ , тобто симетрія відносно осі  $Ox$ . Отже, достатньо дослідити  $\Delta ABC$ : знайдемо рівняння прямої  $AB$ :

$$\frac{x-7}{0-7} = \frac{y-0}{2-0}; \quad \frac{x-7}{-7} = \frac{y}{2}; \quad -7y = 2x - 14;$$

$$y = -\frac{2}{7}x + 2, \quad x \in [0,7];$$

Підставимо отриманий вираз у функцію:

$$z = -10x \cdot \left(-\frac{2}{7}x + 2\right)^2 + x^2 + 10x + 1;$$

$$z = -\frac{40}{49}x^3 + \frac{87}{7}x^2 - 30x + 1.$$

$$z'_x = -\frac{120}{49}x^2 + \frac{174}{7}x - 30.$$

$$z'_x = 0; \quad -\frac{120}{49}x^2 + \frac{174}{7}x - 30 = 0;$$

$$x_1 = \frac{7}{5} \in [0,7]; \quad y = \frac{8}{5}.$$

$$x_2 = \frac{35}{4} \in [0,7]; \quad y_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$z_8\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) = -10 \cdot \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 + 10 \cdot \frac{7}{5} + 1 = -18,88.$$

Отримаємо рівняння  $BC$ :

$$\frac{x+7}{0+7} = \frac{y-0}{2-0}; \quad \frac{x+7}{7} = \frac{y}{2}; \quad y = \frac{2}{7}x + 2, \quad x \in [-7; 0] \cup$$

Підставимо отриманий вираз у функцію:

$$z = -10x \cdot \left(\frac{2}{7}x + 2\right)^2 + x^2 + 10x + 1;$$

$$z = -\frac{40}{49}x^3 + \frac{73}{7}x^2 - 30x + 1.$$

$$z'_x = -\frac{120}{49}x^2 + \frac{146}{7}x - 30 = 0;$$

$$-120x^2 + 1022x - 1470 = 0;$$

$$60x^2 - 511x + 735 = 0;$$

$$x_1 = -\frac{11}{6}; \quad y = \frac{3}{2}; \quad M_4\left(-\frac{11}{6}; \frac{3}{2}\right); \quad z_9(M_4) = -25,9.$$

$$x_2 = -6,65; \quad y_2 = 0,1; \quad M_5(-6,65; 0,1); \quad z_{10}(M_5) = -22,9.$$

Порівняємо  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}$ .

Найбільше значення функція приймає в точці  $A(7,0)$   $z(A) = 120$ .

Найменше значення – в точці  $M_4\left(-\frac{11}{6}; \frac{3}{2}\right)$ ;  $z(M_4) = -25,9$ .

## 15.2 Умовний екстремум функції двох змінних

Розглянутий раніше локальний екстремум є *безумовним*, тобто не передбачає виконання ніяких додаткових умов чи обмежень.

*Умовним екстремумом* функції  $z = f(x, y)$  двох змінних називається екстремум цієї функції, який досягається за додаткової умови, що змінні  $x, y$  зв'язані рівнянням зв'язку  $\varphi(x, y) = 0$ .

*Зауваження 1.* З геометричної точки зору у випадку безумовного екстремуму відшукується екстремум поверхні  $z = f(x, y)$  у деякій області  $D$ , а у випадку умовного екстремуму він відшукується на заданій лінії  $\varphi(x, y) = 0$  (рис. 15.2). Умовний екстремум, якщо він існує, досягається на лінії перетину  $L$  заданої поверхні  $z = f(x, y)$  з вертикальним циліндром  $\varphi(x, y) = 0$ , твірні якого паралельні осі  $Oz$ .

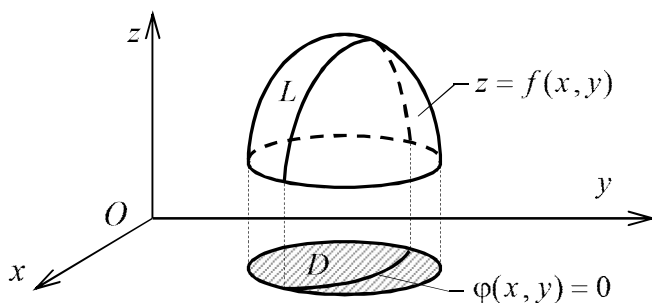


Рисунок 15.2

*Зауваження 2.* Якщо рівняння зв'язку  $\varphi(x, y) = 0$  можна розв'язати відносно однієї зі змінних, тобто подати, наприклад, у вигляді  $y = \psi(x)$ , тоді цю умову можна врахувати, безпосередньо зводячи функцію  $z = f(x, y)$  двох змінних підстановкою  $y = \psi(x)$  до функції однієї змінної  $z = f(x, \psi(x))$ , яка далі досліджується на безумовний екстремум.

Згідно з *методом множників Лагранжа* задача знаходження умовного екстремуму зводиться до дослідження на звичайний безумовний екстремум *функції Лагранжа*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

де допоміжна змінна (параметр)  $\lambda$  називається *множником Лагранжа*.

*Необхідні умови* такого екстремуму задаються системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Розв'язки цієї системи визначають стаціонарні точки функції Лагранжа. Якщо  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  – стаціонарна точка функції Лагранжа  $L(x, y, \lambda)$ , то  $M_0(x_0, y_0)$  – точка, що “підозріла” на умовний екстремум функції  $z = f(x, y)$ .

Достатні умови умовного екстремуму можна встановити за знаком диференціала другого порядку  $d^2L$  функції Лагранжа з урахуванням рівняння зв'язку. При визначенні знака  $d^2L$  диференціал допоміжної змінної  $d\lambda$  не враховується, тобто вважається

$$d^2L(x, y, \lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2$$

де диференціали  $dx$  і  $dy$  зв'язані залежністю  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ , яка виражає рівність нулю повної похідної за  $x$  складеної функції  $\varphi(x, y(x))$ , що впливає з рівняння зв'язку  $\varphi(x, y) = 0$ .

Нехай  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  – стаціонарна точка функції Лагранжа  $L(x, y, \lambda)$ . Тоді: 1) якщо  $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ , то  $M_0(x_0, y_0)$  – точка умовного мінімуму; 2) якщо  $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ , то  $M_0(x_0, y_0)$  – точка умовного максимуму.

*Приклад.* Знайти екстремум функції

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

за умови  $2x + y - 10 = 0$ .

*Розв'язання.* Складаємо функцію Лагранжа:

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1; \quad \varphi(x, y) = 2x + y - 10;$$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + 1 + \lambda(2x + y - 10)$$



Згідно з необхідними умовами екстремуму:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2\lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ 2x + y - 10 = 0 \end{cases};$$

$$x = -\lambda; \quad y = -\frac{\lambda}{2}; \quad 2 \cdot (-\lambda) - \frac{\lambda}{2} - 10 = 0 \rightarrow \lambda = -4; \quad x = 4; \quad y = 2$$

Отже,  $P_0(4, 2, -4)$  – стаціонарна точка функції Лагранжа;  
 $M_0(4, 2)$  – точка можливого умовного екстремуму. При  $\lambda = -4$   
функція Лагранжа набуває вигляду:

$$L(x, y, -4) = x^2 + y^2 + 1 - 4(2x + y - 10);$$

$$L(x, y, -4) = x^2 + y^2 - 8x - 4y + 41.$$

Дослідимо точку  $M_0(4, 2)$  на умовний екстремум, використовуючи достатні умови екстремуму:

$$\left. \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \right|_{M_0} = 2; \quad \left. \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \right|_{M_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right|_{M_0} = 2.$$

З рівняння зв'язку  $2x + y - 10 = 0$ , розглядаючи  $y$  як функцію від  $x$  і знаходячи повну похідну по  $x$  від лівої та правої частин цього рівняння, дістаємо  $2 + \frac{dy}{dx} = 0$ ;  $dy = -2dx$ .

$$\begin{aligned} \text{Тоді } d^2L(x, y, -4)|_{M_0} &= 2 \cdot dx^2 + 2 \cdot 0 \cdot dx dy + 2 \cdot dy^2 = \\ &= 2 \cdot dx^2 + 2 \cdot (-2dx)^2 = 10dx^2. \end{aligned}$$

Оскільки  $d^2L(x, y, -4)|_{M_0} = 10dx^2 > 0$ , то  $M_0(4, 2)$  – точка умовного мінімуму заданої функції.

Обчислимо відповідне їй мінімальне значення:

$$z_{min} = 21.$$

**ЛЕКЦІЯ 16**  
**ДОТИЧНА ПЛОЩИНА І НОРМАЛЬНА ПРЯМА ДО**  
**ПОВЕРХНІ. ПОХІДНА ЗА НАПРЯМКОМ І ГРАДІЄНТ**

**16.1 Дотична площина і нормальна пряма до поверхні**

1) Нехай поверхня  $S$  задана рівнянням  $z = f(x, y)$  і  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  – деяка точка цієї поверхні (рис. 16.1). Рівняння дотичної площини  $\alpha$  у точці  $M_0$  будемо шукати у вигляді

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0),$$

де  $A, B$  – невизначені коефіцієнти.

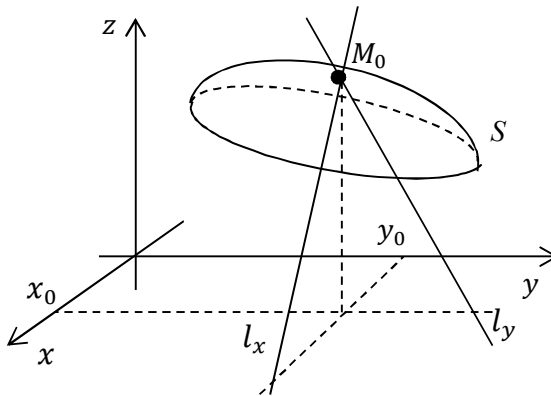


Рисунок 16.1

З геометричного змісту частинних похідних  $f'_x(x_0, y_0)$  і  $f'_y(x_0, y_0)$  випливає, що рівняння дотичних у точці  $M_0$  до ліній перетину поверхні  $S: z = f(x, y)$  площинами  $y = y_0$  і  $x = x_0$  мають відповідно вигляд:

$$l_x: \begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0); \\ y = y_0 \end{cases};$$

$$l_y: \begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}.$$

Ці дві прямі лежать у дотичній площині  $\alpha$  при перетині її відповідно з площинами  $y = y_0$  і  $x = x_0$ .

Порівнюючи ці рівняння з попередніми рівняннями дотичних прямих, знаходимо  $A = f'_x(x_0, y_0)$ ;  $B = f'_y(x_0, y_0)$ .

Отже, рівняння дотичної площини  $\alpha$  має вигляд:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Вектор нормалі дотичної площини  $\vec{n} = (A, B, C)$ , а для площини  $\alpha$

$$\vec{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$$

$\vec{n}$  є також вектором нормалі до поверхні  $S$  у точці дотику  $M_0$ .

Пряма  $l$ , яка проходить через точку  $M_0$  перпендикулярно до дотичної площини  $\alpha$  у цій точці, називається *нормальною прямою* (*нормаллю*) до поверхні  $S$  у цій точці  $M_0$ .

Взявши вектор нормалі дотичної площини за напрямний вектор, можна записати *канонічні рівняння нормальної прямої*  $l$  :

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

1. Якщо поверхня  $S$  задана неявно рівнянням  $F(x, y, z) = 0$ , то рівняння дотичної площини  $\alpha$ , позначивши  $F'_x(x_0, y_0, z_0) = F'_x|_{M_0}$ ;  $F'_y(x_0, y_0, z_0) = F'_y|_{M_0}$ ;  $F'_z(x_0, y_0, z_0) = F'_z|_{M_0}$ , маємо:

$$F'_x|_{M_0}(x - x_0) + F'_y|_{M_0}(y - y_0) + F'_z|_{M_0}(z - z_0) = 0.$$

Вектор нормалі:  $\vec{n} = (F'_x|_{M_0}, F'_y|_{M_0}, F'_z|_{M_0})$ .

Канонічні рівняння нормальної прямої  $l$ :

$$\frac{x - x_0}{F'_x|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{F'_y|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{F'_z|_{M_0}}.$$

*Приклад.* Написати рівняння дотичної площини та нормальної прямої до заданої поверхні  $z = 2x^2 - y \cos x + 3y^4$  при  $x_0 = 0, y_0 = 1$ .

*Розв'язання.* Рівняння поверхні задано явно  $z = f(x, y)$ . Знайдемо значення  $z_0$ :

$$z_0 = 0 - 1 + 3 = 2; \quad M_0(0; 1; 2).$$

Знайдемо частинні похідні та їх значення в точці  $M_0$ :

$$f'_x = 4x + y \sin x; \quad f'_x|_{M_0} = 0;$$

$$f'_y = -\cos x + 12y^3; \quad f'_y|_{M_0} = 11.$$

Рівняння дотичної поверхні:

$$z - 2 = 0(x - 0) + 11(y - 1);$$

$$11y - z - 9 = 0.$$

Рівняння нормальної прямої:

$$\frac{x}{0} = \frac{y - 1}{11} = \frac{z - 2}{-1}.$$

*Приклад.* Написати рівняння дотичної площини та нормальної прямої в точці  $M_0(-1; 2; -2)$  поверхні

$$\frac{x^2}{z} - \frac{y^2}{x} + z^3 + 3xyz = 8$$

*Розв'язання.* Перевіримо спочатку, чи лежить вказана точка

$M_0(-1; 2; -1)$  на даній поверхні. Представимо поверхню у вигляді  $F(x, y, z) = 0$ :

$$\frac{x^2}{z} - \frac{y^2}{x} + z^3 + 3xyz - 8 = 0;$$

$$\frac{(-1)^2}{-1} - \frac{2^2}{(-1)} + (-1)^3 + 3 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-1) - 8 = 0;$$

$$-1 + 4 - 1 + 6 - 8 = 0; \quad 0 = 0.$$

Вираз істинний, тому  $M_0(-1; 2; -1)$  належить поверхні.

Знайдемо частинні похідні та їх значення в точці  $M_0$ :

$$F'_x = \frac{2x}{z} + \frac{y^2}{x^2} + 3yz; \quad F'_x|_{M_0} = 2 + 4 - 6 = 0;$$

$$F'_y = -\frac{2y}{x} + 3xz; \quad F'_y|_{M_0} = 4 + 3 = 7;$$

$$F'_z = -\frac{x^2}{z^2} + 3z^2 + 3xy; \quad F'_z|_{M_0} = -1 + 3 - 6 = -4.$$

Рівняння дотичної поверхні:

$$0(x + 1) + 7(y - 2) - 4(z + 1) = 0.$$

Рівняння нормальної прямої:

$$\frac{x + 1}{0} = \frac{y - 2}{7} = \frac{z + 1}{-4}.$$

## 16.2 Похідна за напрямком і градієнт. Зв'язок градієнта з поверхнями рівня

Нехай у деякій області  $D$  простору задано скалярну функцію трьох змінних  $u = f(M) = f(x, y, z)$ . Тоді кажуть, що в

області  $D$  задане просторове скалярне поле  $u = f(M)$ .

Функція двох змінних  $z = f(x, y)$ , яка визначена у плоскій області  $D$ , задає плоске скалярне поле  $z = f(x, y)$ .

Поле – це функція  $u = f(M)$ , що розглядається разом з її областю визначення  $D$ . Приклади скалярних фізичних полів: поля температури, атмосферного тиску, електричного потенціалу.

Для геометричного зображення скалярного поля використовуються лінії рівня (на площині) та поверхні рівня (у просторі).

**Визначення.** Поверхнею рівня скалярного поля називається геометричне місце точок, в яких функція  $u$  приймає постійне значення, тобто:

$$f(x, y, z) = C, \quad \text{де } C = \text{const.}$$

Поверхні рівня (у просторі) та лінії рівня (на площині) є основними геометричними характеристиками скалярного поля.

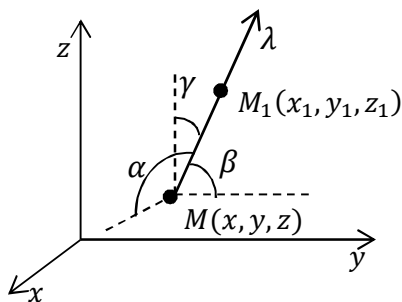


Рисунок 16.2

Нехай задано просторове скалярне поле  $u = u(x, y, z)$ . Візьмемо точку  $M(x, y, z)$  і деякий промінь  $\lambda$ , що виходить з неї. Напрямок цього променя задамо кутами  $\alpha, \beta, \gamma$ , які він утворює з напрямками осей  $Ox, Oy, Oz$  (рис. 16.2). Якщо  $e_\lambda$  – одиничний вектор,

направлений вздовж променя, то його проєкціями на вісі координат будуть напрямні косинуси  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ . У напрямі цього променя на деякій відстані візьмемо іншу точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ . Відстань  $MM_1$  позначимо  $\rho$ . Проєкція вектора  $\overline{MM_1}$

на вісі координат будуть з одного боку дорівнювати  $\rho \cos \alpha$ ,  $\rho \cos \beta$ ,  $\rho \cos \gamma$ , а з іншого  $x_1 - x$ ,  $y_1 - y$ ,  $z_1 - z$ .

Тому:

$$x_1 = x + \rho \cos \alpha, y_1 = y + \rho \cos \beta, z_1 = z + \rho \cos \gamma.$$

Розглянемо приріст функції  $u$  при переході з точки  $M$  в точку  $M_1$ :

$$\begin{aligned} & u(M_1) - u(M) = \\ & = u(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \cos \beta, z + \rho \cos \gamma) - u(x, y, z). \end{aligned}$$

Якщо  $M_1$  змінює своє положення, то у виразі різниці  $u(M_1) - u(M)$  буде змінюватися тільки  $\rho$ . Розглянемо відношення:

$$\frac{u(M_1) - u(M)}{\rho}$$

і переходячи до границі при  $\rho \rightarrow 0$ , за умови що ця границя існує.

**Визначення.** Границя

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{\rho} = \\ & = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \cos \beta, z + \rho \cos \gamma) - u(x, y, z)}{\rho} \quad (*) \end{aligned}$$

називається похідною від функції  $u(x, y, z)$  за напрямком  $\lambda$  в точці  $M$  і позначається символом  $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ .

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial \lambda}.$$

Якщо напрям  $\lambda$  співпадає з додатним напрямом вісі  $Ox$ , тобто  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ , то границя (\*) дорівнює частинній похідній від функції  $u(x, y, z)$  по  $x$ :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(x + \rho, y, z) - u(x, y, z)}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогічно, якщо напрям  $\lambda$  буде співпадати з напрямом  $Oy$ ,  $Oz$ .

Частинні похідні  $u'_x, u'_y, u'_z$  характеризують швидкість зміни функції  $u$  в напрямку координатних осей, так і  $u'_\lambda$  є швидкістю зміни функції  $u(x, y, z)$  в точці  $M$  в напрямку променя  $\lambda$ . Абсолютна величина похідної  $u'_\lambda$  визначає величину швидкості, а знак похідної – характер зміни функції (зростання або спадання).

**Теорема.** Якщо функція  $u(x, y, z)$  диференційована, то її похідна  $u'_\lambda$  в будь-якому напрямку  $\lambda$  існує і дорівнює:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

де  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  – напрямні косинуси променя  $\lambda$ .

Якщо координати вектора  $\overline{MM_1}(m_x, m_y, m_z)$ , то для обчислення напрямних косинусів необхідно знайти модуль вектора

$$|\overline{MM_1}| = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2},$$

тоді  $\cos \alpha = \frac{m_x}{|m|}$ ,  $\cos \beta = \frac{m_y}{|m|}$ ,  $\cos \gamma = \frac{m_z}{|m|}$ .

**Приклад.** Для даної функції  $u = (x^2 + y)e^z$  знайти похідну в точці  $M(6, 7, 2)$  в напрямі точки  $M_1(8, -2, 5)$ .

**Розв'язання.** Знаходимо частинні похідні функції  $u$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 + y)e^z$$

і обчислимо їх значення в точці  $M$ :



$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 12e^2; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = e^2; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = 43e^2.$$

Оскільки, координати вектора  $\overrightarrow{MM_1} = \vec{m} (2, -9, 3)$ , а модуль

$$|\vec{m}| = \sqrt{4 + 81 + 9} = \sqrt{94},$$

то його напрямні косинуси знайдемо за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{m_x}{|m|} = \frac{2}{\sqrt{94}}; \quad \cos \beta = \frac{m_y}{|m|} = \frac{-9}{\sqrt{94}}; \quad \cos \gamma = \frac{m_z}{|m|} = \frac{3}{\sqrt{94}}$$

Тому, підставляючи отримане в формулу (\*\*), отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 12e^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{94}} - e^2 \cdot \frac{9}{\sqrt{94}} + 43e^2 \cdot \frac{3}{\sqrt{94}} = \frac{144e^2}{\sqrt{94}}.$$

Знак плюс вказує, що в даному напрямі функція зростає.

*Градiєнтом* функції (скалярного поля)  $u = u(x, y, z)$  називається вектор, проєкціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

Основні правила обчислення градієнта:

- 1)  $\text{grad } (u + v + w) = \text{grad } u + \text{grad } v + \text{grad } w$  ;
- 2)  $\text{grad } (uv) = v \text{ grad } u + u \text{ grad } v$  ;
- 3)  $\text{grad } (Cu) = C \text{ grad } u$  ,  $C = \text{const}$  ;
- 4)  $\text{grad } \frac{u}{v} = \frac{v \text{ grad } u - u \text{ grad } v}{v^2}$  .

**Теорема** (Зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом).  
Похідна  $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$  за напрямом вектора  $\vec{\lambda}$  дорівнює проєкції градієнта  $\text{grad } u$  на цей вектор:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = n p_{\lambda} \operatorname{grad} u.$$

**Основні властивості градієнта:**

1. Похідна  $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$  скалярного поля  $u = u(x, y, z)$  у даній точці  $M(x, y, z)$  за напрямом вектора  $\vec{\lambda}$  має найбільше значення, коли напрям цього вектора співпадає з напрямом градієнта  $\operatorname{grad} u$ . Це найбільше значення похідної  $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$  дорівнює модулю градієнта:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_{\max} = |\operatorname{grad} u|.$$

Іншими словами, *градієнт вказує напрям найшвидшого зростання скалярного поля в даній точці, а його модуль дорівнює цій найбільшій швидкості:*

$$\operatorname{grad} u = \vec{\lambda}_{\max}; \quad |\operatorname{grad} u| = \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_{\max}$$

2. Похідна  $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$  скалярного поля  $u = u(x, y, z)$  у даній точці  $M(x, y, z)$  за напрямом вектора, який перпендикулярний до градієнта  $\operatorname{grad} u$ , дорівнює нулю:

$$\vec{\lambda} \perp \operatorname{grad} u \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0.$$

3. Градієнт  $\operatorname{grad} u$  скалярного поля  $u = u(x, y, z)$  у кожній точці  $M(x, y, z)$  перпендикулярний до поверхні рівня  $S: u(x, y, z) = C$ , яка проходить через цю точку.

$$S: u(x, y, z) = C; \quad \operatorname{grad} u \perp S \Rightarrow \vec{n} = \operatorname{grad} u.$$

## ЛЕКЦІЯ 17

### ПОНЯТТЯ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ. ЗАГАЛЬНИЙ І ЧАСТИННИЙ РОЗВ'ЯЗКИ ТА ЇХ ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ. УМОВИ ІСНУВАННЯ Й ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ

#### 17.1 Поняття про диференціальне рівняння.

#### Загальний і частинний розв'язки та їх геометричний зміст

Рівняння називається *диференціальним*, якщо воно містить похідні (диференціали) шуканої функції.

*Порядком* диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної (диференціала), що входить у нього.

Коли шукана функція  $y = y(x)$  є функцією однієї змінної  $x$ , то диференціальне рівняння (ДР) називають *звичайним*. Далі будемо займатися лише звичайними ДР.

*Диференціальне рівняння  $n$ -го порядку* зв'язує незалежну змінну  $x$ , шукану функцію  $y = f(x)$  та її похідні  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ .

Диференціальне рівняння  $n$ -го порядку можна подати в *загальному вигляді*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

де  $y = y(x)$  – шукана функція. Рівняння може не містити в явному вигляді незалежну змінну  $x$ , саму шукану функцію  $y$  та її похідні нижчих порядків  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ , але в ньому обов'язково повинна бути похідна  $y^{(n)}$ .

Це неявна форма запису ДР. Розв'язавши загальне рівняння відносно найвищої похідної, отримаємо *канонічний (нормальний) вигляд* ДР:

$$y^{(n)} = f(y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Наприклад,  $y'' - 3(y')^4 + \sin 5x - e^y = 0$  – ДР другого порядку, подане у загальній (неявній) формі;  $y^{(IV)} = y'' - 4x \cos y$  – ДР четвертого порядку, записане в канонічній (явній) формі.

Уже відома задача знаходження первісної  $y = F(x)$  для даної функції  $f(x)$  породжує найпростіше диференціальне рівняння  $y' = f(x)$ , розв'язування якого зводиться до інтегрування.

**Розв'язком** диференціального рівняння називається довільна функція  $y = y(x)$ , що при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність.

Графік розв'язку ДР називається **інтегральною кривою**.

*Зауваження 1.* Розв'язок ДР  $n$ -го порядку є  $n$  разів диференційовною функцією. Тому інтегральна крива є досить гладкою лінією.

Процес знаходження розв'язку ДР називається його **інтегруванням**.

*Зауваження 2.* Розв'язок ДР, записаний у **неявній формі**, часто називають **інтегралом** диференціального рівняння.

*Приклад.* Перевірити, що функція  $y = y(x, C)$ , яка задана в неявному вигляді співвідношенням  $-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|Cy|$ , де  $C$  – довільна стала, служить розв'язком диференціального рівняння  $dy/dx = xy/(x^2 - y^2)$ .

*Розв'язання.* Знайдемо похідну неявно заданої функції:

$$\left(-\frac{x^2}{2y^2}\right)' = (\ln|Cy|)';$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2xy^2 - 2x^2yy'}{y^4} = \frac{Cy'}{Cy}; \quad \frac{x^2yy' - xy^2}{y^4} = \frac{y'}{y};$$

$$\frac{x^2y' - xy}{y^3} = \frac{y'}{y}; \quad x^2y' - xy = y^2y';$$

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Щоб знайти шукану функцію з ДР  $n$ -го порядку, необхідно в загальному випадку виконати  $n$  операцій інтегрування, що дає  $n$  довільних сталих. Отже, диференціальне рівняння має безліч розв'язків.

**Загальним розв'язком** диференціального рівняння  $n$ -го порядку є функція  $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , що містить  $n$  довільних сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$  і задовольняє диференціальному рівнянню при будь-яких допустимих значеннях  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

**Частинним розв'язком** диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального розв'язку при конкретних фіксованих значеннях довільних сталих  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

**Геометричний зміст.** Загальному розв'язку відповідає сім'я інтегральних кривих. Частинному розв'язку відповідає конкретна інтегральна лінія.

## 17.2 Початкові та граничні умови. Початкова задача і крайова задача

Для знаходження конкретних значень довільних сталих, що входять у загальний розв'язок, звичайно використовуються:

1) **початкові умови** – відомі значення функції та її похідних в деякій одній фіксованій точці  $x = x_0$ ;

2) **крайові (граничні) умови** – відомі значення функції та її похідних в декількох різних фіксованих точках.

*Початкових або крайових умов повинно бути стільки, скільки довільних сталих.*

Для ДР  $n$ -го порядку початкові умови мають вигляд:

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де  $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$  – відомі числа.

Диференціальне рівняння разом з початковими умовами називають **початковою задачею (задачею Коші)**.

Диференціальне рівняння разом з крайовими умовами називають **крайовою (граничною) задачею**.

*Приклад.* Розв'язати задачу Коші (знайти частинний розв'язок заданого ДР, що задовольняє вказаним початковим умовам):  $y'' = e^{2x}; y(0) = 2; y'(0) = 1$ .

*Розв'язання.* Знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$y' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1;$$

$$y = \int \left( \frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2.$$

В одержаний загальний розв'язок та його першу похідну підставимо задані початкові умови і знайдемо  $C_1, C_2$ :

$$\frac{1}{2}e^0 + C_1 = 1; C_1 = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{4}e^0 + 0 + C_2 = 2; C_2 = \frac{7}{4}; y_4 = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}$$

### 17.3 Умови існування та єдності розв'язку задачі Коші

Диференціальне рівняння першого порядку має *загальний вигляд*

$$F(x, y, y') = 0,$$

де  $y = y(x)$  – шукана функція незалежної змінної  $x$ .

Припустимо, що це рівняння можна розв'язати відносно похідної і подати його в *нормальній формі*  $y' = f(x, y)$ . Для таких рівнянь виконується теорема Коші.

**Теорема Коші (існування й єдності розв'язку).** Нехай у рівнянні  $y' = f(x, y)$  функція  $f(x, y)$  та її частинна похідна  $f'_y(x, y)$  неперервні у деякій області  $D$  площини  $Oxy$ . Тоді для довільної внутрішньої точки  $P_0(x_0, y_0)$  цієї області існує визначений і диференційовний у деякому околі точки  $x_0$  єдиний розв'язок  $y = y(x)$  даного рівняння, що задовольняє початковій умові  $y(x_0) = y_0$ .

З неперервності правої частини  $f(x, y)$  впливає існування розв'язку, а умова неперервності похідної  $f'_y(x, y)$  забезпечує його єдиність.

## ЛЕКЦІЯ 18

### ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ. ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

#### 18.1 Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння першого порядку  $y' = f(x, y)$  називається *рівнянням з відокремлюваними змінними*, якщо його права частина  $f(x, y)$  може бути подана як добуток  $f(x, y) = h(x)q(y)$  двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної.

Щоб знайти розв'язок такого ДР  $y' = h(x)q(y)$ , необхідно відокремити змінні: похідну записати як відношення диференціалів

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

а потім обидві його частини помножити на  $dx$  і поділити на такий вираз  $q(y)$ , щоб в одну частину рівняння входила тільки змінна  $y$ , а в іншу – тільки змінна  $x$ . Шуканий розв'язок  $y = y(x)$  перетворює одержане рівняння

$$\frac{dy}{q(y)} = h(x)dx$$

у тотожність. Інтегруючи її, знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int h(x)dx + C,$$

де  $C$  – довільна стала.

*Зауваження.* При діленні обох частин рівняння на вираз, який містить змінні  $x$  чи  $y$ , можна «втратити» розв'язки, що перетворюють цей вираз у нуль. Такі випадки необхідно розглядати окремо.



*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xyy' = 1 - x^2$$

*Розв'язання.* Представимо  $y'$  як  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

$$\text{Маємо: } xy \frac{dy}{dx} = 1 - x^2, \quad xy \frac{dy}{dx} - (1 - x^2) = 0.$$

Помножимо рівняння на дріб  $\frac{dx}{x}$ , де  $x \neq 0$  та отримаємо:

$$ydy - \frac{1 - x^2}{x} dx = 0.$$

Запишемо загальний інтеграл:

$$\int ydy - \int \frac{1 - x^2}{x} dx = C.$$

$$\frac{y^2}{2} - \ln x + \frac{x^2}{2} = C \quad \text{або} \quad y^2 + x^2 - \ln x^2 = 2C.$$

Останній вираз є загальним розв'язком диференціального рівняння. Зауважимо, що цей розв'язок має сенс, коли  $x > 0$ .

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\sqrt{1 - y^2} dx - y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$$

*Розв'язання.*

$$y\sqrt{1 - x^2} dy = \sqrt{1 - y^2} dx$$

Поділимо рівняння на добуток  $\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} \neq 0$ .  
Отримаємо:

$$\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Запишемо загальний інтеграл:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Після виконання інтегрування загальний розв'язок диференційного рівняння має вигляд:

$$\sqrt{1-y^2} = -\arcsin x + C.$$

## 18.2 Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

*Диференціальним рівнянням з однорідною правою частиною (однорідним рівнянням)* називається рівняння, яке можна подати у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

або:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де  $f(y/x)$  – однорідна функція нульового порядку однорідності;  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  – однорідні функції одного порядку однорідності.

Якщо рівняння виду  $y' = F(x, y)$  або  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  не змінюються при заміні  $x$  на  $kx$ ,  $y$  на  $ky$  і відповідно  $dx$  на  $kdx$ , а  $dy$  на  $kdy$ ,  $y'$  на  $y'$  то вони називаються *однорідними*. Для розв'язання використовують *підстановку*:

$$y = Ux,$$

де  $U(x)$  – нова функція, яка перетворює однорідне рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціюємо підстановку:

$$y' = U'x + U,$$

і ДР  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  після перетворень приймає вигляд

$$\frac{dU}{f(U) - U} = \frac{dx}{x}.$$

*Зауваження.* Якщо  $f(U) - U = 0$ , тобто  $f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} = 0$ . Тоді  $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$ . Рівняння  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  приймає вигляд ДР з відокремлюваними змінними  $y' = \frac{y}{x}$  і розв'язується відповідним чином.

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

*Розв'язання.* Спочатку зробимо перевірку на однорідність. Зробимо заміну  $x$  на  $kx$ ,  $y$  на  $ky$ , а

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{kdy}{kdx} = y',$$

отримаємо:

$$kxy' - ky = \sqrt{k^2x^2 + k^2y^2};$$

$$k(xy' - y) = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)};$$

$$k(xy' - y) = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Після ділення обох частин рівняння на  $k$ , ми отримаємо початкове рівняння, саме це і вказує, що дане рівняння є однорідним, тому використовуємо наведену вище підстановку та її похідну і отримуємо рівняння:

$$x(U'x + U) - Ux = \sqrt{x^2 + x^2U^2};$$

$$x(U'x + U - U) = x\sqrt{1 + U^2},$$

розділимо обидві частини рівняння на  $x \neq 0$ , отримаємо:  $U'x = \sqrt{1 + U^2}$  – це рівняння з відокремленими змінними; оскільки  $U' = \frac{dU}{dx}$ , то отримаємо рівняння виду:

$$\frac{dU}{dx}x = \sqrt{1 + U^2}; \quad xdU - \sqrt{1 + U^2}dx = 0.$$

Розділимо обидві частини рівняння на вираз

$$x\sqrt{1 + U^2} \neq 0$$

$$\frac{dU}{\sqrt{1 + U^2}} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, отримуємо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dU}{\sqrt{1 + U^2}} - \int \frac{dx}{x} = C, \quad \ln |U + \sqrt{1 + U^2}| - \ln x = \ln C.$$

Загальний розв'язок диференційного рівняння має вигляд:

$$U + \sqrt{1 + U^2} = Cx.$$

Так, як  $U = \frac{y}{x}$ , то маємо:  $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx$ . Після тотожних перетворень отримуємо загальний розв'язок:

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 .$$

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0.$$

*Розв'язання.* Виконаємо перевірку на однорідність, використовуючи заміни:  $x$  на  $kx$ ,  $y$  на  $ky$  відповідно  $dx$  на  $kdy$ , а  $dy$  на  $kdy$ . Маємо:

$$(k^2y^2 - 3k^2x^2)kdy + 2kxkykdx = 0,$$

$$k^3(y^2 - 3x^2)dy + 2k^3xydx = 0.$$

Поділимо весь вираз на  $k^3$  і отримаємо початкове рівняння, отже це рівняння однорідне. Для використання підстановки необхідно розділити рівняння на  $dx$ , в результаті отримаємо:

$$(y^2 - 3x^2)y' + 2xy = 0.$$

Після відповідних підстановок матимемо:

$$(U^2x^2 - 3x^2)(U'x + U) + 2x^2U = 0,$$

$$U'x + U = \frac{-2U}{U^2 - 3}; \quad U'x = \frac{-2U}{U^2 - 3} - U; \quad U'x = \frac{U - U^3}{U^2 - 3} .$$

Заміною  $U' = \frac{dU}{dx}$ , отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dU}{dx} x = \frac{U - U^3}{U^2 - 3}; \quad \frac{U^2 - 3}{U - U^3} dU = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{U^2 - 3}{U - U^3} dU - \int \frac{dx}{x} = C.$$

Виконавши інтегрування, отримаємо загальне рішення:

$$-3 \ln U + \ln(1 + U) - \ln(1 - U) = \ln C + \ln x.$$

Використовуючи властивості логарифмічних функцій загальне рішення представимо:

$$\frac{U + 1}{U^3(1 - U)} = Cx.$$

Виконаємо зворотну підстановку  $U = \frac{y}{x}$  і рішення буде мати вигляд:

$$\frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y^3}{x^3} \left(1 - \frac{y}{x}\right)} = Cx \quad \text{або} \quad \frac{(y + x)x^2}{y^3(x - y)} = C.$$

## ЛЕКЦІЯ 19

### ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

#### 19.1 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді:

$$y' + p(x)y = g(x),$$

де  $p(x)$  і  $g(x)$  – відомі неперервні функції від  $x$  (або сталі), називається **лінійним**. Тобто, таке ДР є лінійним відносно шуканої функції  $y = y(x)$  та її похідної  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

Якщо,  $g(x) = 0$  то рівняння називається **лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР)** (лінійним рівнянням з нульовою правою частиною), у протилежному випадку – **лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР)** (лінійним рівнянням з ненульовою правою частиною).

Лінійне неоднорідне ДР можна розв'язати безпосередньо **методом Бернуллі**. Згідно з ним **загальний розв'язок** будемо у вигляді добутку двох функцій від  $x$ :

$$y = U(x)V(x) \text{ (підстановка Бернуллі)}.$$

Оскільки при такій заміні вже відшукуються дві функції, то виникає додатковий ступінь вільності, що дозволяє розщепити лінійне ДР на два рівняння з відокремлюваними змінними.

$U(x), V(x)$  – нові невідомі функції, причому  $U(x) \neq 0$  довільна,  $V(x)$  – підбирають такою, щоб виконувалась умова  $V' + p(x)V = 0$ .

Похідна від добутку двох функцій:

$$y' = U'V + UV'$$

Алгоритм розв'язування лінійних неоднорідних ДР першого порядку розглянемо на прикладах.

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

*Розв'язання.* Використовуючи підстановку  $y = UV$  та її похідну  $y' = U'V + UV'$ , рівняння запишемо у вигляді:

$$U'V + UV' + 2xUV = xe^{-x^2},$$

$$U'V + U(V' + 2xV) = xe^{-x^2}.$$

За умовою знаходження функції  $V(x)$ , другий доданок останнього рівняння дорівнює нулю, тобто:

$$V' + 2xV = 0,$$

а перший доданок буде дорівнювати функції  $g(x)$ , яка стоїть праворуч, тобто:

$$U'V = xe^{-x^2}.$$

Розв'яжемо рівняння:  $V' + 2xV = 0$ ;

$$V' = -2xV; \quad \frac{dV}{dx} = -2xV;$$

$$\frac{dV}{V} = -2xdx; \quad \ln V = -x^2; \quad V = e^{-x^2}.$$



Вважаємо, що довільна стала тут дорівнює нулю.

Тепер розв'яжемо друге рівняння, але спочатку підставимо в нього знайдену функцію  $V = e^{-x^2}$ :

$$U'e^{-x^2} = xe^{-x^2}; \quad U' = x; \quad \frac{dU}{dx} = x; \quad dU = xdx; \quad U = \frac{x^2}{2} + C.$$

Знайдені значення функцій записуємо у вигляді добутку і отримуємо загальний розв'язок рівняння:

$$y = \left( \frac{x^2}{2} + C \right) \cdot e^{-x^2}.$$

*Приклад.* Розв'язати задачу Коші для рівняння:

$$y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{sec} x; \quad y(0) = 1.$$

*Розв'язання.* Застосуємо розглянутий вище алгоритм і в результаті отримаємо:

$$U'V + UV' - UV \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad U'V + U(V' - V \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Розв'яжемо рівняння:  $V' - V \operatorname{tg} x = 0$ ;  $V' = V \operatorname{tg} x$ ;

$$\frac{dV}{dx} = V \operatorname{tg} x; \quad \frac{dV}{V} = \operatorname{tg} x \, dx;$$

$$\ln V = -\ln |\cos x|; \quad \ln V = \ln \frac{1}{\cos x}; \quad V = \frac{1}{\cos x}.$$

Знайдемо розв'язок рівняння  $U'V = \frac{1}{\cos x}$ , підставляючи знайдене значення  $V$ :

$$U' \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}; U' = 1; dU = dx; U = x + C.$$

Підставляючи знайдені значення функцій отримуємо загальний розв'язок рівняння:

$$y = (x + C) \frac{1}{\cos x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок рівняння, використовуючи задані початкові умови, тобто розв'яжемо задачу Коші:

$$(0 + C) \frac{1}{\cos 0} = 1; C = 1; y = \frac{x + 1}{\cos x}.$$

*Зауваження.* Лінійними рівняння можуть бути, як відносно  $y$ , так і відносно  $x$ .

## 19.2 Рівняння Бернуллі

Рівняння виду:

$$y' + p(x)y = g(x) y^n, \quad (n \neq 0, n \neq 1, n \in \mathbb{R})$$

називають рівнянням Бернуллі.

Перетворення рівняння Бернуллі в лінійне будемо проводити в такій послідовності:

1. помножимо обидві частини рівняння на  $y^{-n}$ ;
2. введемо підстановку  $y^{1-n} = z$ . Обидві частини цієї рівності продиференціюємо:  $(1 - n) y^{-n} y' = z'$ ;  $y^{-n} y' = \frac{z'}{1-n}$ ;
3. отримане рівняння проінтегруємо як лінійне за допомогою підстановки

$$z = U \cdot V,$$

де  $U = U(x)$  і  $V = V(x)$ .

4. обчислимо похідну:

$$z' = U'V + UV'$$

5. після розв'язання лінійного рівняння відносно  $z$  повернемося до шуканої функції  $z = y^{1-n}$ .

Приклад. Знайти загальне рішення рівняння

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Розв'язок. Приведемо рівняння до виду:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x} y^2.$$

1. обидві частини рівняння помножимо на  $y^{-2}$ :

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}.$$

2. виконаємо підстановку  $y^{-1} = z$ . Продиференціюємо цей вираз:  $y^{-2}y' = z'$ .

Матимемо рівняння:

$$-z' + \frac{1}{x}z = \frac{\ln x}{x}; \quad z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x},$$

яке є лінійним відносно  $z$  і  $z'$ . Використаємо підстановку  $z = U \cdot V$  і похідну  $z' = U'V + UV'$ :

$$U'V + UV' - \frac{1}{x}UV = -\frac{\ln x}{x},$$

$$U'V + U\left(V' - \frac{V}{x}\right) = -\frac{\ln x}{x}.$$

Розв'яжемо рівняння:

$$V' - \frac{V}{x} = 0, \quad V' = \frac{V}{x}, \quad \frac{dV}{dx} = \frac{V}{x}, \quad \frac{dV}{V} = \frac{dx}{x}, \quad \ln V = \ln x, \\ V = x.$$

Розв'яжемо рівняння  $U'V = -\frac{\ln x}{x}$ , підставляючи  $V = x$ :

$$\frac{dU}{dx}x = -\frac{\ln x}{x}, \quad dU = -\frac{\ln x}{x^2}dx, \quad U = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Інтегруючи частинами одержимо:

$$U = -\left(-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2}\right) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C$$

$$z = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C\right)x = \ln x + Cx + 1, \quad y^{-1} = \ln x + Cx + 1.$$

Повертаючись до змінної  $y$ , маємо:

$$y = \frac{1}{\ln x + Cx + 1}$$

загальний розв'язок даного диференціального рівняння.

**ЛЕКЦІЯ 20**  
**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ.**  
**ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**  
**ШЛЯХОМ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ**

Диференціальне рівняння другого порядку може бути записане у *загальному вигляді*:

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Якщо це рівняння вдається розв'язати відносно старшої похідної, то воно набуває *канонічної (нормальної) форми*:

$$y'' = f(x, y, y').$$

*Загальний розв'язок* диференціального рівняння другого порядку – це функція незалежної змінної  $x$  та двох довільних сталих  $C_1$  та  $C_2$ :  $y = y(x, C_1, C_2)$ .

Для ДР другого порядку *задача Коші* має вигляд:

$$F(x, y, y', y'') = 0; \quad y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0$$

і з геометричної точки зору зводиться до побудови інтегральної кривої, що проходить через задану точку  $P_0(x_0; y_0)$ , в якій дотична має заданий кутовий коефіцієнт  $y'_0$ . За відповідною теоремою Коші при певних умовах ця крива існує й єдина.

Для ДР другого порядку може ставитися *крайова задача*, зокрема, такого вигляду:

$$F(x, y, y', y'') = 0; \quad y(a) = y_a; \quad y(b) = y_b.$$

*Зауваження.* При розв'язуванні задачі Коші (крайової задачі) зазвичай спочатку знаходять загальний розв'язок ДР, а вже потім враховують початкові (крайові) умови. Коли в задачі досить

визначити лише відповідний частинний розв'язок, то часто простіше відразу шукати цей розв'язок, враховуючи додаткові умови поступово, безпосередньо в процесі розв'язування.

### 20.1 Найпростіше диференціальне рівняння вищих порядків

$$y^{(n)} = f(x).$$

Це ДР стає рівнянням  $n - 1$  порядку в результаті заміни  $y^{(n-1)} = p$ , де  $p = p(x)$  – нова шукана функція. Тоді  $y^{(n)} = p'$ , і дістаємо ДР  $p' = f(x)$ , загальний розв'язок якого

$$p = \int f(x)dx + C_1.$$

Повертаючись до початкової змінної, знову маємо рівняння  $n - 1$  порядку. Загальний розв'язок вихідного ДР  $n - 1$  порядку:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1; \quad y = \int (\int f(x)dx + C_1)dx + C_2$$

Послідовне інтегрування  $n -$  разів дозволяє знайти загальний розв'язок ДУ.

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\sqrt[3]{x + 4}y'' = 1.$$

*Розв'язання.* Приведемо рівняння до канонічного вигляду і зробимо відповідну заміну:

$$y'' = \frac{1}{\sqrt[3]{x + 4}},$$

заміна  $p = y'$ ;  $p' = y''$ .

Отримаємо найпростіше рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, яке розв'яжемо розглянутим раніше методом:

$$p' = \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}; \quad p = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+4}} = \int (x+4)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3(x+4)^{\frac{2}{3}}}{2} + C_1;$$

$$y = \int \left( \frac{3(x+4)^{\frac{2}{3}}}{2} + C_1 \right) dx = \frac{3}{2} \frac{3(x+4)^{\frac{5}{3}}}{5} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \frac{9}{10} \sqrt[3]{(x+4)^5} + C_1 x + C_2.$$

*Зауваження.* У випадку ДР довільного  $n$ -го порядку ( $n \geq 2$ ) вигляду  $y^{(n)} = f(x)$  робиться заміна  $y^{(n-1)} = p$ , що зводить його до такого ж найпростішого рівняння першого порядку  $p' = f(x)$ . Загальний розв'язок вихідного ДР знаходиться  $n$ -кратним інтегруванням.

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = e^{2x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

*Розв'язання.* Зробимо заміну  $p = y''$ . Тоді:

$$y''' = p'; \quad p' = e^{2x} + \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad dp = \int \left( e^{2x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$y'' = p = \frac{1}{2} e^{2x} + 2\sqrt{x} + C_1.$$

Тепер зробимо заміну  $p = y'$ . Тоді:

$$y'' = p'; p' = \frac{1}{2}e^{2x} + 2\sqrt{x} + C_1; dp = \int \left( \frac{1}{2}e^{2x} + 2\sqrt{x} + C_1 \right) dx;$$

$$y' = p = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1x + C_2.$$

Тоді:

$$y = \int \left( \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1x + C_2 \right) dx;$$

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{8}{15}x^{\frac{5}{2}} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

**20.2 Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно шуканої функції  $y$ , тобто має вигляд**

$$F(x, y', y'') = 0$$

Зниження порядку досягається заміною  $y' = z$ , де  $z = z(x)$  допоміжна шукана функція від  $x$ . Тоді  $y'' = z'$ , і одержується ДР першого порядку загального вигляду  $F(x, z, z') = 0$ .

*Приклад.* Розв'язати задачу Коші для рівняння

$$y''(x^2 + 1) = 2xy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

*Розв'язання.* Використаємо тотожність  $y' = z$  та  $y'' = z'$ .

Рівняння матиме вигляд:  $(x^2 + 1)z' = 2xz$ . Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{x^2 + 1}$$

Після інтегрування отримаємо:  $\ln z = \ln(x^2 + 1) + \ln C_1$ ,

$$\ln z = \ln(C_1(x^2 + 1)); \quad z = C_1(x^2 + 1).$$

Використаємо початкову умову  $z(0) = y'(0) = 3$  для визначення  $C_1$ .

$$(0 + 1)C_1 = 3, \text{ тому } z = 3x^2 + 3, \text{ або } y' = 3x^2 + 3.$$

$$\text{Отже, } y = \int(3x^2 + 3) dx = x^3 + 3x + C_2.$$

Визначимо  $C_2$ :  $y(0) = 1$ ,  $C_2 = 1$ , тому розв'язком задачі Коші буде  $y = x^3 + 3x + 1$  – частинний розв'язок даного диференціального рівняння.

*Приклад.* Розв'язати задачу Коші:

$$xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}; \quad y(1) = 0; \quad y'(1) = 1.$$

*Розв'язання.* Зробимо заміну  $y' = z$ , де  $z = z(x)$ . Тоді  $y'' = z'$ . Отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$xz' = z \ln \frac{z}{x}; \quad z' = \frac{z}{x} \cdot \ln \frac{z}{x},$$

що є рівнянням з однорідною правою частиною. Зробимо в ньому заміну  $z = Ux$ . Тоді:  $z' = U'x + U$ .

$$U'x + U = \frac{Ux}{x} \ln \frac{Ux}{x}; \quad U'x + U = U \ln U; \quad U'x = U \ln U - U;$$

$$U'x = U(\ln U - 1); \quad \frac{dU}{dx} = \frac{U(\ln U - 1)}{x}; \quad \frac{dU}{U(\ln U - 1)} = \frac{dx}{x};$$



$$\int \frac{dU}{U(\ln U - 1)} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dU}{U(\ln U - 1)} = \left| \begin{array}{l} t = \ln U - 1; \\ dt = \frac{dU}{U}. \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| =$$

$$= \ln|\ln U - 1|; \quad \ln|\ln U - 1| = \ln|x| + \ln|C_1|;$$

$$\ln|\ln U - 1| = \ln|C_1 x|; \quad \ln U - 1 = C_1 x.$$

Повернемося до функції  $z$ , а потім до початкової функції  $y$ :

$$\ln \frac{z}{x} - 1 = C_1 x; \quad \ln \frac{y'}{x} - 1 = C_1 x;$$

Використаємо початкову умову  $y'(1) = 1$  і знайдемо  $C_1$ :

$$\ln 1 - 1 = C_1 \cdot 1; \quad C_1 = -1; \quad \ln \frac{y'}{x} - 1 = -x;$$

$$\ln \frac{y'}{x} = 1 - x; \quad \frac{y'}{x} = e^{1-x}; \quad y' = x e^{1-x}.$$

Дістали ще одне ДР першого порядку – рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$dy = x e^{1-x} dx; \quad \int dy = \int x e^{1-x} dx;$$

$$\int x e^{1-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx; \\ dv = e^{1-x} dx; \\ v = -e^{1-x} \end{array} \right| = -x e^{1-x} + \int e^{1-x} dx =$$

$$= -x e^{1-x} - e^{1-x} + C_2;$$

$$y = -xe^{1-x} - e^{1-x} + C_2.$$

Знайдемо  $C_2$ , використовуючи початкову умову  $y(1) = 0$ , і отримаємо розв'язок задачі Коші:

$$-1 \cdot e^0 - e^0 + C_2 = 0; C_2 = 2;$$

$$y = -xe^{1-x} - e^{1-x} + 2.$$

**20.3 Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно незалежної змінної  $x$ , тобто має вигляд:**

$$F(y, y', y'') = 0.$$

У цьому випадку приймаємо  $y' = p(y)$ , де  $p = p(y(x))$  – допоміжна складна функція від  $x$ , причому зовнішня функція  $p = p(y)$  проміжного аргументу  $y$  служить новою шуканою функцією. Тоді за правилом диференціювання складеної функції маємо

$$y'' = (p(y))' = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p'p$$

і приходимо до ДР першого порядку вигляду  $F(y, p, p'p)$ .

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4(y')^2 \operatorname{tg} 4y = 0.$$

*Розв'язання.* Зробимо заміну  $y' = p(y)$ . Тоді отримаємо і розв'яжемо рівняння з відокремленими змінними:

$$y'' = p'p; \quad p'p - 4p^2 \operatorname{tg} 4y = 0;$$

$$p(p' - 4p \operatorname{tg} 4y) = 0; \quad p \neq 0;$$

$$p' - 4ptg4y = 0; \quad p' = 4ptg4y;$$

$$\frac{dp}{dy} = 4ptg4y; \quad \frac{dp}{p} = 4tg4ydy; \quad \int \frac{dp}{p} = 4 \int tg4ydy;$$

$$\ln p = -\ln(\cos 4y) + \ln C_1; \quad \ln p = \ln \frac{C_1}{\cos 4y};$$

$$p = \frac{C_1}{\cos 4y}; \quad y' = \frac{C_1}{\cos 4y}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\cos 4y};$$

$$\cos 4y dy = C_1 dx; \quad \int \cos 4y dy = \int C_1 dx;$$

$$\frac{1}{4} \sin 4y = C_1 x + C_2; \quad \sin 4y = 4(C_1 x + C_2);$$

$$4y = \arcsin(4C_1 x + 4C_2);$$

$y = \frac{1}{4} \arcsin(4C_1 x + 4C_2)$  – загальний розв'язок рівняння.

## ЛЕКЦІЯ 21

### ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. СТРУКТУРА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ.

### ЛІНІЙНЕ ОДНОРІДНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. СТРУКТУРА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

#### 21.1 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Структура загального розв'язку

**Визначення.** Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння першого ступеня (лінійне) відносно шуканої функції та її похідної.

#### *Лінійні ДР другого порядку*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

де  $p(x)$  і  $q(x)$  – коефіцієнти;  $f(x)$  – права частина рівняння.

Розглянемо лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку ( $f(x) = 0$ ):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Структуру загального розв'язку ЛОДР другого порядку відображає наступна теорема.

**Теорема.** Якщо функції  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків ЛОДР другого порядку, то їх лінійна комбінація:

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – довільні сталі, служить загальним розв'язком цього рівняння.

**Доведення.** Нехай  $y_1(x)$  і  $y_2(x)$  – фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Перевіримо, що їх лінійна комбінація

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

також є розв'язком (задовольняє ЛОДР). Для цього підставимо функцію  $y$  та її похідні у рівняння:

$$y_0' = C_1 y_1' + C_2 y_2'; \quad y_0'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'';$$

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(x)(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = 0;$$

$$C_1 (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2 (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = 0;$$

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Далі покажемо, що для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'$$

існують єдині конкретні значення сталих  $C_1$  і  $C_2$ .

Справді, для визначення  $C_1$  і  $C_2$  дістаємо лінійну алгебраїчну систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

визначником якої слугує:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

Для фундаментальної системи  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  визначник відмінний від нуля. Тому система лінійних рівнянь відносно  $C_1$  і  $C_2$  завжди має і причому єдиний розв'язок.

Отже,  $y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  – загальний розв'язок ЛОДР.

*Зауваження.* Очевидний нульовий розв'язок ЛОДР  $y = 0$  не утворює фундаментальної системи з довільними іншими частинними розв'язками, оскільки при цьому визначник системи тотожно рівний нулю.

## 21.2 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Для *ЛОДР  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами:*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad a_i = \text{const.}$$

Ейлером розроблено загальний метод його розв'язування шляхом побудови фундаментальної системи і на її основі загального розв'язку. Розглянемо його на прикладі *ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами:*

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p = \text{const}, \quad q = \text{const.}$$

Частинні розв'язки шукаємо у вигляді експоненти  $y = e^{kx}$ , де  $k$  – невідомий сталий коефіцієнт. Підставимо цю функцію у =

$e^{kx}$  та її похідні  $y' = ke^{kx}$ ,  $y'' = k^2e^{kx}$  у рівняння і дістанемо  $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$ . Оскільки  $e^{kx} \neq 0$ , то для визначення  $k$  отримуємо співвідношення

$$k^2 + pk + q = 0,$$

яке називають *характеристичним рівнянням* даного ЛОДР.

Характеристичне рівняння є квадратним відносно  $k$  і на множині комплексних чисел завжди має два розв'язки  $k_1$  і  $k_2$ . При цьому можливі три випадки, в залежності від знака дискримінанта  $D$ .

**Випадок 1.**  $D > 0$ . Обидва корені  $k_1$  і  $k_2$  – дійсні різні числа  $k_1 \neq k_2$ . Тоді  $y_1 = e^{k_1x}$  і  $y_2 = e^{k_2x}$  – лінійно незалежні розв'язки, що утворюють фундаментальну систему. Загальний розв'язок має вигляд:

$$y_0 = C_1 e^{k_1x} + C_2 e^{k_2x}.$$

*Приклад.* Знайти розв'язок ДР  $y'' + 5y' + 6y = 0$ .

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 + 5k + 6 = 0;$$

$$D = 25 - 24 = 1;$$

$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2}; k_1 = -2; k_2 = -3.$$

Загальне рішення даного ДР:  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$ .

**Випадок 2.** Корені  $k_1$  і  $k_2$  рівняння дійсні та рівні:  $D = 0$ ,

$$k_1 = k_2 = k.$$

В цьому випадку загальне рішення рівняння має вигляд:

$$y_o = e^{kx}(C_1x + C_2).$$

*Приклад.* Знайти розв'язок ДР  $y'' - 8y' + 16 = 0$ .

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 - 8k + 16 = 0;$$

$$D = 64 - 64 = 0;$$

$$k_1 = k_2 = \frac{8}{2} = 4.$$

Загальне рішення даного ДР:  $y = e^{4x}(C_1x + C_2)$ .

**Випадок 3.** Корені  $k_1$  і  $k_2$  рівняння комплексні, нагадаємо, що  $i^2 = -1$ :  $D < 0$ ,  $x_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ . У цьому випадку загальне рішення рівняння має вигляд:

$$y_o = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

*Приклад.* Знайти розв'язок ДР  $y'' - 4y' + 13y = 0$ .

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 - 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i; \quad \alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

Загальне рішення даного ДР:



$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

*Приклад.* Знайти розв'язок ДР  $y'' + 25y = 0$ .

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння даного ДР має вигляд:

$$k^2 + 25 = 0;$$

$$k^2 = -25; \quad k_{1,2} = \pm 5i; \quad \beta = 5.$$

Загальне рішення даного ДР:  $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$ .

### 21.3 Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Принцип суперпозиції

*Структуру загального розв'язку ЛНДР другого порядку* визначає наступна теорема.

**Теорема.** *Загальний розв'язок ЛНДР другого порядку*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

*можна зобразити у вигляді суми загального розв'язку  $y_0$  відповідного ЛОДР*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

*і якого-небудь частинного розв'язку  $\bar{y}$  ЛНДР:  $y = y_0 + \bar{y}$ .*

**Доведення.** Перевіримо, що функція  $y = y_0 + \bar{y}$  є розв'язком ЛНДР:

$$y' = y_o' + \bar{y}'; \quad y'' = y_o'' + \bar{y}'';$$

$$y_o'' + \bar{y}'' + p(y_o' + \bar{y}') + q(y_o + \bar{y}) = 0 + f(x);$$

$$(y_o'' + p y_o' + q y_o) + (\bar{y}'' + p \bar{y}' + q \bar{y}) = f(x).$$

Оскільки  $y_o = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ , де  $y_1(x), y_2(x)$  – фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР, то розв'язок  $y = y_o + \bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \bar{y}$  містить дві довільні сталі  $C_1$  і  $C_2$ . Для довільних початкових умов  $y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'$

знаходяться єдині конкретні значення сталих  $C_1$  і  $C_2$ . Тобто розв'язок  $y = y_o + \bar{y}$  є загальним.

**Принцип суперпозиції** розв'язків ЛНДР другого порядку відображає наступна теорема.

**Теорема.** *Якщо у ЛНДР другого порядку*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

*права частина є сумою двох функцій  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , то його частинний розв'язок також можна подати у вигляді суми  $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ , де  $\bar{y}_1$  і  $\bar{y}_2$  – частинні розв'язки рівнянь*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) \quad \text{і} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

*з тією ж самою частиною ліворуч і відповідними функціями  $f_1(x), f_2(x)$  праворуч.*

**Зауваження.** Способи знаходження загального розв'язку у ЛОДР розглянуто раніше. Частинний розв'язок  $\bar{y}$  ЛНДР залежить від правої частини  $f(x)$  і для його побудови розроблені методи.

## ЛЕКЦІЯ 22

### ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА З ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Розглянемо *ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами*

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p = \text{const}, q = \text{const},$$

де права частина має *спеціальний вигляд*:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x).$$

Тут  $P_n(x)$  і  $Q_m(x)$  – многочлени відповідно степеня  $n$  і  $m$ ;  $\alpha$  і  $\beta$  – дійсні сталі, з яких формується *характерне комплексне число*  $z = \alpha \pm \beta i$ .

*Зауваження 1.*  $n$  і  $m$  – довільні невід’ємні цілі числа,  $n \geq 0$ ,  $m \geq 0$ ;  $\alpha$  і  $\beta$  – довільні дійсні числа, в тому числі  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ .

Згідно з *методом невизначених коефіцієнтів* структура частинного розв’язку  $\bar{y}$  ЛНДР формується за виглядом правої частини  $f(x)$  з урахуванням того, коренем якої кратності  $r$  ( $r \geq 0$ ) служить характерне число  $z = \alpha \pm \beta i$  для характеристичного рівняння. Невідомі параметри (коефіцієнти) цієї структури знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь, які одержуються прирівнюванням коефіцієнтів при подібних відносно  $x$  членах.

Частинний розв’язок має вигляд

$$\bar{y} = x^r e^{\alpha x} (\overline{P_s(x)} \cos \beta x + \overline{Q_s(x)} \sin \beta x),$$

де  $\overline{P_s(x)}$  і  $\overline{Q_s(x)}$  – многочлени степеня  $s = \max\{n, m\}$  з

невідомими коефіцієнтами.

Розглянемо більш детально окремі випадки правої частини спеціального вигляду і відповідні форми частинного розв'язку  $\bar{y}$  ЛНДР зі сталими коефіцієнтами.

**Випадок 1**  $f(x) = P_n(x)$ , де  $P_n(x)$  – многочлен  $n$ -ї степені.

а) корені характеристичного рівняння  $k_1 \neq 0$  і  $k_2 \neq 0$ , тоді частинне рішення нелінійного ДР має вигляд:

$$\bar{y} = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n,$$

$\bar{y}$  – многочлен степені  $n$ , а  $B_0, B_1, \dots, B_n$  – невідомі, які знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів;

б) корені характеристичного рівняння  $k_1 = 0$  і  $k_2 \neq 0$ , тоді частинне рішення нелінійного ДР має вигляд:

$$\bar{y} = (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n) \cdot x,$$

де  $B_0, B_1, \dots, B_n$  – невідомі коефіцієнти.

*Приклад.* Знайти розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3.$$

*Розв'язання.* Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 6k + 9 = 0;$$

$$D = 36 - 36 = 0;$$

$$k_{1,2} = 3.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР:

$$y_0 = e^{3x}(C_1x + C_2).$$

Права частина:  $f(x) = 2x^2 - x + 3$  – ступінь многочлена друга, тому

$$\bar{y} = B_0x^2 + B_1x + B_2.$$

Знайдемо  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}''$  і підставимо в дане рівняння отримані значення відповідно замість  $y''$ ,  $y'$  та  $y$ .

$$\bar{y}' = 2B_0x + B_1;$$

$$\bar{y}'' = 2B_0.$$

$$2B_0 - 6(2B_0x + B_1) + 9(B_0x^2 + B_1x + B_2) = 2x^2 - x + 3;$$

$$2B_0 - 12B_1x - 6B_2 + 9B_0x^2 + 9B_1x + 9B_2 = 2x^2 - x + 3.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти  $B_0$ ,  $B_1$  і  $B_2$  спираючись на рівність многочленів. Порівняємо коефіцієнти елементів при  $x^2$ :

$$x^2 | 9B_0 = 2, \quad B_0 = \frac{2}{9}.$$

Порівняємо коефіцієнти елементів при  $x$ :

$$x | -12B_0 + 9B_1 = -1; \quad -12 \cdot \frac{2}{9} + 9B_1 = -1; \quad 9B_1 = -1 + \frac{8}{3}; \quad 9B_1 = \frac{5}{3};$$

$$B_1 = \frac{5}{27}.$$

Порівняємо коефіцієнти елементів при  $x^0$ :

$$x^0 | 2B_0 - 6B_1 + 9B_2 = 3; \quad 2 \cdot \frac{2}{9} - 6 \cdot \frac{5}{27} + 9B_2 = 3;$$

$$\frac{4}{9} - \frac{10}{9} + 9B_2 = 3;$$

$$9B_2 = 3 + \frac{2}{3}; \quad 9B_2 = \frac{11}{3}; \quad B_2 = \frac{11}{27}.$$

Отже, частинний розв'язок:

$$\bar{y} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

Розв'язок неоднорідного ДР:  $y = y_0 + \bar{y}$ , тобто:

$$y = e^{3x}(C_1x + C_2) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

*Приклад.* Знайти розв'язок неоднорідного ДР

$$2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1.$$

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned} 2k^2 + 5k &= 0; \\ k(2k + 5) &= 0; \\ k_1 &= 0, \quad k_2 = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Отже, загальне рішення однорідного ДР:

$$y_0 = C_1 + C_2e^{-\frac{5x}{2}}.$$

Права частина  $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$  і  $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ , тому:

$$\bar{y} = (B_0x^2 + B_1x + B_2) \cdot x = B_0x^3 + B_1x^2 + B_2x;$$

$$\bar{y}' = 3B_0x^2 + 2B_1x + B_2;$$

$$\bar{y}'' = 6B_0x + 2B_1.$$

Підставимо отримані значення  $\bar{y}'', \bar{y}'$  та  $\bar{y}$  в початкове рівняння:

$$2(6B_0x + 2B_1) + 5(3B_0x^2 + 2B_1x + B_2) = 5x^2 - 2x - 1;$$

$$12B_0x + 4B_1 + 15B_0x^2 + 10B_1x + 5B_2 = 5x^2 - 2x - 1.$$

Знайдемо коефіцієнти  $B_0, B_1$  і  $B_2$ , як у попередньому прикладі:

$$x^2 | 15B_0 = 5; \quad B_0 = \frac{1}{3}.$$

$$x \mid 12B_0 + 10B_1 = -2; \quad 12 \cdot \frac{1}{3} + 10B_1 = -2;$$

$$10B_1 = -6; \quad B_1 = -\frac{3}{5}.$$

$$x^0 \mid 4B_1 + 5B_2 = -1; \quad 4 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 5B_2 = -1;$$

$$5B_2 = -1 + \frac{12}{5}; \quad 5B_2 = \frac{7}{5}; \quad B_2 = \frac{7}{25}.$$

Отже, частинний розв'язок:

$$\bar{y} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Рішення диференційного рівняння:  $y = y_0 + \bar{y}$ , тобто

$$y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5x}{2}} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

**Випадок 2**  $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$ , де  $e^{\alpha x}$  – показникова функція, а  $P_n(x)$  – многочлен  $n$ -ї степені.

а) корені характеристичного рівняння  $k_1 \neq \alpha$  і  $k_2 \neq \alpha$ , тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\bar{y} = e^{\alpha x} (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n);$$

б) корені характеристичного рівняння  $k_1 = \alpha$  і  $k_2 \neq \alpha$ , тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\bar{y} = e^{\alpha x} (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n) \cdot x;$$

в) корені характеристичного рівняння  $k_1 = \alpha$  і  $k_2 = \alpha$ , тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\bar{y} = e^{\alpha x} (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n) \cdot x^2.$$

*Приклад.* Розв'язати задачу Коші для диференційного рівняння

$$y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3); \quad y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

*Розв'язання.* Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k = 0;$$

$$k(k - 2) = 0;$$

$$k_1 = 0 \text{ і } k_2 = 2.$$

Загальне рішення однорідного ДР:  $y_0 = C_1 + C_2 e^{2x}$ .

Права частина рівняння:  $f(x) = e^x(x^2 + x - 3)$ .

Тут  $\alpha = 1$ ,  $k_1 \neq \alpha$  і  $k_2 \neq \alpha$  тому:

$$\bar{y} = e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2);$$

$$\begin{aligned} \bar{y}' &= e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2) + e^x(2B_0 x + B_1) = \\ &= e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 2B_0 x + B_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}'' &= e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 2B_0 x + B_1) + e^x(2B_0 x + B_1 + 2B_0) \\ &= e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 4B_0 x + 2B_1 + 2B_0). \end{aligned}$$

Підставимо отримані значення  $\bar{y}''$ ,  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}$  в початкове рівняння:

$$B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 4B_0 x + 2B_1 + 2B_0 -$$

$$- 2(B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 2B_0 x + B_1) = x^2 + x - 3;$$

$$B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 4B_0 x + 2B_1 + 2B_0 - 2B_0 x^2 - 2B_1 x - 2B_2 -$$



$$-4B_0x - 2B_1 = x^2 + x - 3;$$

$$-B_0x^2 - B_1x - B_2 + 2B_0 = x^2 + x - 3.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$$x^2 | - B_0 = 1; \quad B_0 = -1.$$

$$x | - B_1 = 1; \quad B_1 = -1$$

$$x^0 | - B_2 + 2B_0 = -3; \quad -B_2 - 2 = -3; \quad -B_2 = -1; \quad B_2 = 1.$$

Отже, частинний розв'язок:

$$\bar{y} = e^x(-x^2 - x + 1).$$

Розв'язок диференційного рівняння:  $y = y_0 + \bar{y}$ , тобто

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

Знайдемо частинний розв'язок даного ДР, підставивши початкові умови в  $y$  та  $y'$ :

$$y' = 2C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) + e^x(-2x - 1).$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 2 \\ 2C_2 + 1 - 1 = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

Задача Коші для даного диференційного рівняння має вид:

$$y = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

*Приклад.* Знайти розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3 - 4x).$$

*Розв'язання.* Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 3k + 2 = 0;$$

$$D = 9 - 8 = 1;$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}; k_1 = 2; k_2 = 1.$$

Загальне рішення однорідного ДР:  $y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$ .

Права частина рівняння:  $f(x) = e^{2x}(3 - 4x)$ . Тут  $\alpha = 2$ ,  $k_1 = \alpha$ ,  $k_2 \neq \alpha$ .

Тому  $\bar{y}$  має вид:  $\bar{y} = e^{2x}(B_0 x + B_1) \cdot x$ ,

$$\bar{y} = e^{2x}(B_0 x^2 + B_1 x);$$

$$\bar{y}' = 2e^{2x}(B_0 x^2 + B_1 x) + e^{2x}(2B_0 x + B_1) =$$

$$= e^{2x}(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1);$$

$$\bar{y}'' = 2e^{2x}(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1) +$$

$$+ e^{2x}(4B_0 x + 2B_1 + 2B_0) =$$

$$= e^{2x}(4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1).$$

Підставимо отримані значення  $\bar{y}''$ ,  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}$  в початкове рівняння:

$$4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1 -$$

$$- 3(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1) + 2(B_0 x^2 + B_1 x) = 3 - 4x;$$

$$4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1 - 6B_0 x^2 - 6B_1 x -$$

$$- 6B_0 x - 3B_1 + 2B_0 x^2 + 2B_1 x = 3 - 4x;$$

$$2B_0x + 2B_0 + B_1 = 3 - 4x.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$$x \mid 2B_0 = -4; \quad B_0 = -2.$$

$$x^0 \mid 2B_0 + B_1 = 3; \quad -4 + B_1 = 3; \quad B_1 = 7.$$

Отже, частинний розв'язок:

$$\bar{y} = e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

Розв'язок рівняння має вид:  $y = y_o + \bar{y}$ , тобто:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

## ЛЕКЦІЯ 23

### ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА З ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ (ПРОДОВЖЕННЯ)

*Випадок 3*  $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$ , де  $a$  і  $b$  – сталі.

а) корені характеристичного рівняння  $k_{1,2} \neq \pm \beta i$ , тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\bar{y} = A \cos \beta x + B \sin \beta x ,$$

де  $A$  і  $B$  – невідомі коефіцієнти.

б) корені характеристичного рівняння  $k_{1,2} = \pm \beta i$ , тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\bar{y} = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \cdot x.$$

*Приклад.* Знайти розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' + 4y' + 13 = 5 \sin 2x.$$

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння має вид:

$$\begin{aligned} k^2 + 4k + 13 &= 0; \\ D &= 16 - 52 = -36; \\ k_{1,2} &= \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i. \end{aligned}$$

Загальне рішення однорідного ДР:

$$y_0 = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Права частина рівняння:  $f(x) = 5 \sin 2x$ ,  $k_{1,2} \neq \pm 2i$ .

$$\bar{y} = A \cos 2x + B \sin 2x;$$

$$\bar{y}' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x;$$

$$\bar{y}'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Підставимо отримані значення  $\bar{y}''$ ,  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}$  в дане рівняння:

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 4(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) +$$

$$+13(A \cos 2x + B \sin 2x) = 5 \sin 2x;$$

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 8A \sin 2x + 8B \cos 2x +$$

$$+13A \cos 2x + 13B \sin 2x = 5 \sin 2x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти з рівностей, що відповідають  $\sin 2x$  та  $\cos 2x$ :

$$\sin 2x | -4B - 8A + 13B = 5;$$

$$\cos 2x | -4A + 8B + 13A = 0.$$

Отримали систему рівнянь, яку розв'яжемо за правилом Крамера:

$$\begin{cases} -8A + 9B = 5, \\ 9A + 8B = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -8 & 9 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -64 - 81 = -145,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = -45.$$

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{40}{145} = -\frac{8}{29}, \quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{45}{145} = \frac{9}{29}.$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\bar{y} = -\frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x.$$

Розв'язком неоднорідного диференційного рівняння є:

$y = y_0 + \bar{y}$ , тобто

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x.$$

*Приклад.* Знайти розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 6y' + 25 = (32x - 12) \sin 3x - 36x \cos 3x.$$

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned}k^2 - 6k + 25 &= 0; \\D &= 36 - 100 = -64; \\k_{1,2} &= \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i.\end{aligned}$$

Загальне рішення однорідного ДР:

$$y_0 = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Права частина рівняння:

$$f(x) = (32x - 12) \sin 3x - 36x \cos 3x, \quad z = \pm 4i, \quad k_{1,2} \neq z.$$

$$\bar{y} = (Ax + B) \sin 3x + (Cx + D) \cos 3x;$$

$$y' = A \sin 3x + 3(Ax + B) \cos 3x + C \cos 3x - 3(Cx + D) \sin 3x =$$

$$= (A - 3Cx - 3D) \sin 3x + (3Ax + 3B + C) \cos 3x;$$

$$y'' = -3C \sin 3x + 3(A - 3Cx - 3D) \cos 3x + 3A \cos 3x -$$

$$-3(3Ax + 3B + C) \sin 3x =$$

$$= (-3C - 9Ax - 9B - 3C) \sin 3x + (3A + 3A - 9Cx - 9D) \cos 3x.$$

Підставимо отримані значення  $\bar{y}''$ ,  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}$  у рівняння:

$$\begin{aligned}
 &(-6C - 9Ax - 9B)\sin 3x + (6A - 9Cx - 9D)\cos 3x - \\
 &-6((A - 3Cx - 3D)\sin 3x + (3Ax + 3B + C)\cos 3x) + \\
 &+25((Ax + B)\sin 3x + (Cx + D)\cos 3x) = \\
 &= (32x - 12) \sin 3x - 36x\cos 3x;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(-6C - 9Ax - 9B - 6A + 18Cx + 18D + 25Ax + 25B)\sin 3x + \\
 &+(6A - 9Cx - 9D - 18Ax - 18B - 6C + 25Cx + 25D)\cos 3x = \\
 &= (32x - 12) \sin 3x - 36x\cos 3x.
 \end{aligned}$$

Визначимо невідомі коефіцієнти:

$$\begin{array}{l|l}
 x\cos 3x & -9C - 18A + 25C = -36; \quad -18A + 16C = -36; \quad \mathbf{-9A + 8C = -18.} \\
 x\sin 3x & -9A + 18C + 25A = 32; \quad 16A + 18C = 32; \quad \mathbf{8A + 9C = 16.} \\
 \cos 3x & 6A - 9D - 18B - 6C + 25D = 0; \quad \mathbf{6A - 18B - 6C + 16D = 0.} \\
 \sin 3x & -6C - 9B - 6A + 18D + 25B = -12; \quad \mathbf{6A - 16B + 6C - 18D = 12.}
 \end{array}$$

Розв'яжемо системи рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} -9A + 8C = -18, \\ 8A + 9C = 16 \end{cases}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} -9 & 8 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -81 - 64 = -145;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -18 & 8 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} = -162 - 128 = -290; \quad A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -9 & -18 \\ 8 & 16 \end{vmatrix} = -144 + 144 = 0; \quad C = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0.$$

$$\begin{cases} 3A - 9B - 3C + 8D = 0, \\ 3A - 8B + 3C - 9D = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} 6 - 9B + 8D = 0, \\ 6 - 8B - 9D = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} -9B + 8D = -6, \\ -8B - 9D = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9B - 8D = 6, \\ 8B + 9D = 0, \end{cases}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 81 + 64 = 145;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 54; \quad B = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{54}{145};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48; \quad D = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{48}{145}.$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\bar{y} = \left(2x + \frac{54}{145}\right) \sin 3x - \frac{48}{145} \cos 3x.$$

Розв'язком неоднорідного диференційного рівняння є:

$y = y_o + \bar{y}$ , тобто:

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \left(2x + \frac{54}{145}\right) \sin 3x - \frac{48}{145} \cos 3x.$$



## ЛЕКЦІЯ 24

### ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА З ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ (ПРОДОВЖЕННЯ)

**Випадок 4**  $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x)$ ,  
 $z = \alpha \pm \beta i$

а) корені характеристичного рівняння  $k_{1,2} \neq z$ ,  
 $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$ , тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\bar{y} = e^{\alpha x}(\overline{P_s(x)} \cos \beta x + \overline{Q_s(x)} \sin \beta x);$$

б) корені характеристичного рівняння  $k_{1,2} = z$ ,  
 $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\bar{y} = e^{\alpha x}(\overline{P_s(x)} \cos \beta x + \overline{Q_s(x)} \sin \beta x) \cdot x.$$

*Приклад.* Знайти розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' - 7y' + 6y = 2e^{2x} \cos x.$$

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння має вид:

$$\begin{aligned} k^2 - 7k + 6 &= 0; \\ D &= 49 - 24 = 25; \\ k_{1,2} &= \frac{7 \pm 5}{2}; k_1 = 6; k_2 = 1. \end{aligned}$$

Загальний розв'язок однорідного ДР:  $y_0 = C_1 e^{6x} + C_2 e^x$ .

Права частина рівняння:  $f(x) = 2e^{2x} \cos x$ ,  $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$ ,  
 $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ , тому частинний розв'язок неоднорідного ДР  
шукаємо у вигляді:

$$\bar{y} = e^{2x}(A \sin x + B \cos x);$$

$$\bar{y}' = 2e^{2x}(A \sin x + B \cos x) + e^{2x}(A \cos x - B \sin x) =$$

$$= e^{2x}(2A \sin x + 2B \cos x + A \cos x - B \sin x);$$

$$\bar{y}'' = 2e^{2x}(2A \sin x + 2B \cos x + A \cos x - B \sin x) +$$

$$+ e^{2x}(2A \cos x - 2B \sin x - A \sin x - B \cos x) =$$

$$= e^{2x}(4A \sin x + 4B \cos x + 2A \cos x - 2B \sin x + 2A \cos x - 2B \sin x - A \sin x - B \cos x).$$

Підставимо отримані значення  $\bar{y}''$ ,  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}$  в дане рівняння:

$$4A \sin x + 4B \cos x + 2A \cos x - 2B \sin x + 2A \cos x -$$

$$- 2B \sin x - A \sin x - B \cos x -$$

$$- 7(2A \sin x + 2B \cos x + A \cos x - B \sin x) +$$

$$+ 6(A \sin x + B \cos x) = \cos x;$$

$$4A \sin x + 4B \cos x + 2A \cos x - 2B \sin x + 2A \cos x -$$

$$- 2B \sin x - A \sin x - B \cos x - 14A \sin x - 14B \cos x -$$

$$- 7A \cos x + 7B \sin x + 6A \sin x + 6B \cos x = \cos x.$$

Невідомі коефіцієнти визначимо з рівностей, що відповідають  $\sin x$  та  $\cos x$ :

$$\cos x | 4B + 2A + 2A - B - 14B - 7A + 6B = 1,$$

$$\sin x | 4A - 2B - 2B - A - 14A + 7B + 6A = 0,$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} -3A - 5B = 1; \\ -5A + 3B = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 25 = -34;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{3}{34};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 5 = 5, \quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{5}{34}.$$

Отже, отримаємо частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\bar{y} = e^{2x} \left( -\frac{3}{34} \sin x - \frac{5}{34} \cos x \right) = -e^{2x} \left( \frac{3}{34} \sin x + \frac{5}{34} \cos x \right).$$

$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x - e^{2x} \left( \frac{3}{34} \sin x + \frac{5}{34} \cos x \right)$  – загальний розв'язок диференціального рівняння.

*Приклад.* Знайти розв'язок диференціального рівняння та розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x} \sin 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6.$$

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння має вид:

$$\begin{aligned} k^2 + 2k + 5 &= 0; \\ D &= 4 - 20 = -16; \\ k_{1,2} &= \frac{-2 \pm 4i}{2}; \quad k_{1,2} = -1 \pm 2i. \end{aligned}$$

Загальний розв'язок однорідного ДР:

$$y_0 = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Права частина рівняння:  $f(x) = -8e^{-x} \sin 2x$ ,  $z = -1 \pm 2i$ ,  $k_{1,2} = z = -1 \pm 2i$ , тому частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді:

$$\bar{y} = e^{-x}(A \sin 2x + B \cos 2x) \cdot x = e^{-x}(Ax \sin 2x + Bx \cos 2x);$$

$$y' = -e^{-x}(Ax \sin 2x + Bx \cos 2x) +$$

$$+e^{-x}(A \sin 2x + 2Ax \cos 2x + B \cos 2x - 2Bx \sin 2x) =$$

$$= e^{-x}((-Ax + A - 2Bx) \sin 2x + (2Ax - Bx + B) \cos 2x);$$

$$y'' = -e^{-x}((-Ax + A - 2Bx) \sin 2x + (2Ax - Bx + B) \cos 2x) +$$

$$+e^{-x}((-A - 2B) \sin 2x + 2(-Ax + A - 2Bx) \cos 2x + (2A - B) \cos 2x - 2(2Ax - Bx + B) \sin 2x) =$$

$$= e^{-x}((Ax - A + 2Bx - A - 2B - 4Ax + 2Bx - 2B) \sin 2x +$$

$$+(-2Ax + Bx - B - 2Ax + 2A - 4Bx + 2A - B) \cos 2x)$$

Підставимо отримані значення  $\bar{y}''$ ,  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}$  в дане рівняння:

$$(Ax - A + 2Bx - A - 2B - 4Ax + 2Bx - 2B) \sin 2x +$$

$$+(-2Ax + Bx - B - 2Ax + 2A - 4Bx + 2A - B) \cos 2x) +$$

$$+2((-Ax + A - 2Bx) \sin 2x + (2Ax - Bx + B) \cos 2x) +$$

$$+5(Ax \sin 2x + Bx \cos 2x) = -8e^{-x} \sin 2x;$$

$$(-3Ax - 2A + 4Bx - 4B - 2Ax + 2A - 4Bx + 5Ax) \sin 2x +$$

$$\begin{aligned}
 &(-4Ax - 3Bx - 2B + 4A + 4Ax - 2Bx + 2B + 5Bx)\cos 2x = \\
 &= -8e^{-x}\sin 2x.
 \end{aligned}$$

Невідомі коефіцієнти визначимо з рівностей, що відповідають  $x\cos 2x$ ,  $x\sin 2x$ ,  $\sin 2x$  та  $\cos 2x$ :

$$x\sin 2x | - 3A + 4B - 2A - 4B + 5A = 0; 0 = 0;$$

$$x\cos 2x | - 4A - 3B + 4A - 2B + 5Bx = 0; 0 = 0;$$

$$\sin 2x | - 2A - 4B + 2A = -8; -4B = -8; B = 2;$$

$$\cos 2x | - 2B + 4A + 2B = 0; A = 0.$$

Отже, отримаємо частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\bar{y} = 2xe^{-x}\cos 2x.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 2xe^{-x}\cos 2x.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші, використаємо початкові умови:  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 6$ .

Знайдемо похідну від загального розв'язку ДР:

$$\begin{aligned}
 y' = &-e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^{-x}(-2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x) + \\
 &+(2e^{-x} - 2xe^{-x})\cos 2x - 4xe^{-x}\sin 2x.
 \end{aligned}$$

$$y(0) = 2: C_1 = 2;$$

$$y'(0) = 6: -C_1 + 2C_2 + 2 = 6; \quad 2C_2 = 6; \quad C_2 = 3;$$

$$y_ч = e^{-x}(2\cos 2x + 3\sin 2x) + 2xe^{-x}\cos 2x.$$

## ЛЕКЦІЯ 25

### РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Правило розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

1. Приводимо систему до нормального виду (всі рівняння системи є рівняннями першого порядку і *розв'язувані* відносно похідних шуканих функцій.)
2. Приводимо систему  $n$  – рівнянь першого порядку до одного диференціального рівняння  $n$ -го порядку.
3. Знаходимо загальне рішення отриманого рівняння.
4. Знаходимо інші невідомі функції.
5. Якщо необхідно знайти частинний розв'язок, знаходимо значення довільних сталих за початковими умовами і підставляємо в загальне рішення.

*Приклад.* Знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y + 3x = 0 \\ \frac{dy}{dt} - x + y = 0 \end{cases},$$

якщо  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 1$ .

*Розв'язок.* Невідомими функціями системи є  $x$  і  $y$ , а незалежною змінною –  $t$ . Приведемо систему до нормального виду, для цього розв'яжемо кожне рівняння системи відносно похідних

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - 3x \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}.$$

Розв'язання цієї системи зводиться до розв'язку одного диференціального рівняння, порядок якого дорівнює числу рівнянь, які входять в систему. Для отримання цього рівняння продиференціюємо будь-яке рівняння системи за  $t$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} - 3\frac{dx}{dt}.$$

Підставимо замість  $\frac{dy}{dt}$  і  $\frac{dx}{dt}$  відповідні вирази:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -(x - y) - 3(-y - 3x); \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= 8x + 4y.\end{aligned}$$

З першого рівняння системи отримаємо  $y = -3x - \frac{dx}{dt}$ .

Підставимо в отримане вище рівняння:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= 8x + 4\left(-3x - \frac{dx}{dt}\right); \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x &= 0; \\ x'' + 4x' + 4x &= 0.\end{aligned}$$

Отримали лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння:

$$\begin{aligned}k^2 + 4k + 4 &= 0; \\ D &= 16 - 16 = 0 \\ k_{1,2} &= \frac{-4}{2} = -2.\end{aligned}$$

Загальне рішення даного ДР:  $x = e^{-2t}(C_1t + C_2)$ .

Для знаходження невідомої функції  $y$  використаємо рівняння:

$$y = -3x - \frac{dx}{dt}.$$

Знайдемо  $\frac{dx}{dt}$ :

$$\frac{dx}{dt} = -2e^{-2t}(C_1t + C_2) + e^{-2t}C_1 = e^{-2t}(-2C_1t - 2C_2 + C_1).$$

Тоді:

$$\begin{aligned}y &= -3x - \frac{dx}{dt}; \\ y &= -3e^{-2t}(C_1t + C_2) - e^{-2t}(-2C_1t - 2C_2 + C_1) \\ &= e^{-2t}(-C_1t - C_2 - C_1).\end{aligned}$$

Отже, маємо загальне рішення системи:

$$\begin{aligned}x &= e^{-2t}(C_1t + C_2); \\ y &= -e^{-2t}(C_1t + C_2 + C_1).\end{aligned}$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо значення довільних сталих  $C_1$  і  $C_2$ : 
$$\begin{cases} e^0(C_1 \cdot 0 + C_2) = 1 \\ -e^0(C_1 \cdot 0 + C_2 + C_1) = 1 \end{cases};$$
  

$$\begin{cases} C_2 = 1 \\ -C_2 - C_1 = 1 \end{cases}; \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = -2 \end{cases}.$$

Частинне рішення системи має вид:

$$\begin{aligned} x &= e^{-2t}(-2t + 1); \\ y &= -e^{-2t}(-2t + 1 - 2) = e^{-2t}(2t + 1). \end{aligned}$$

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок системи диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}.$$

*Розв'язок.* Продиференціюємо будь-яке рівняння системи за  $t$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt}.$$

Підставимо замість  $\frac{dy}{dt}$  і  $\frac{dx}{dt}$  відповідні вирази:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x - 3y - 3(3x + y);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x - 3y - 9x - 3y;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 6y.$$

З першого рівняння системи отримаємо:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}.$$

Підставимо в отримане значення  $y$  в рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 6y;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 6\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}\right);$$



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 2x - 2\frac{dx}{dt};$$

$$x'' + 2x' + 10x = 0.$$

Отримали лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння:

$$k^2 + 2k + 10 = 0;$$

$$D = 4 - 40 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i;$$

Загальне рішення даного диференціального рівняння:  $x = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ .

Для знаходження невідомої функції у використаємо рівняння:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}$$

Знайдемо  $\frac{dx}{dt}$ :

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-x}(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) =$$

$$= e^{-x}(-C_1 \cos 3x - C_2 \sin 3x - 3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x).$$

$$y = \frac{1}{3}e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) -$$

$$-\frac{1}{3}e^{-x}(-C_1 \cos 3x - C_2 \sin 3x - 3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) =$$

$$= \frac{1}{3}e^{-x}(2C_1 \cos 3x + 2C_2 \sin 3x + 3C_1 \sin 3x - 3C_2 \cos 3x).$$

Отже, маємо загальне рішення системи:

$$x = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x);$$

$$y = \frac{1}{3}e^{-x}(2C_1 \cos 3x + 2C_2 \sin 3x + 3C_1 \sin 3x - 3C_2 \cos 3x).$$

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – СПб. : Профессия, 2001. – 432 с.
2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2006. – 736 с.
3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі: у 2 кн. / За ред. Г. Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с. ; Кн. 2 : Спеціальні розділи. – 368 с.
4. Коваленко Л.Б. Вища математика. Модуль 2 : навч. посібник / Л.Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2017. – 221 с.
5. Коваленко Л.Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2 : навч. посібник / Л.Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2017. – 192 с.
6. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2003. – 648 с.
7. Вороновська Л. П. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» Модуль 2 для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185–Нафтогазова інженерія та технології / Л. П. Вороновська; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова, 2017.–161 с.
8. Методичні вказівки з вищої математики для самостійної роботи студентів 1 курсу заочної форми навчання . Частина2. / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Л. П. Вороновська., Є. С. Пахомова, С. С. Шульгіна – Х.: ХНАМГ, 2013. – 82 с.
9. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.
10. Розендорн Э. Р. Теория поверхностей / Э. Р. Розендорн. – М. : Физматлит, 2006. – 304 с.
11. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005.–270 с.
12. Методичні вказівки з вищої математики для самостійної роботи студентів 1 курсу всіх спеціальностей, частина 2. С. С. Шульгіна, Л. П. Вороновська, Є. С. Пахомова . – Харків : ХНАМГ, 2012.–112 с.

*Навчальне видання*

**ВОРОНОВСЬКА** Лариса Петрівна

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**  
**Модуль 2**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології)*

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2021, поз. 187 Л

---

Підп. до друку 07.12.2021. Формат 60 × 84/16.

Електронний документ. Ум. друк. арк. 11,3.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.

Електронна адреса: [office@kname.edu.ua](mailto:office@kname.edu.ua)

Свідोцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017