Міністерство освіти і науки України
Харківська національна академія міського господарства

Методичні вказівки

до самостійного вивчення дисципліни

«Наукові дослідження»

(для студентів 5 курсу денної форми навчання спеціальності
7.092103 (7.06010103) «Міське будівництво і господарство», спеціалізації
«Технічне обслуговування, ремонт і реконструкція будівель»
та слухачів другої вищої освіти)

Харків ХНАМГ 2008

Методичні вказівки до самостійного вивчення дисципліни «Наукові дослідження» (для студентів 5 курсу денної форми навчання спеціальності 7.092103 (7.06010103) «Міське будівництво і господарство», спеціалізації «Технічне обслуговування, ремонт і реконструкція будівель» та слухачів другої вищої освіти) / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: О.О. Алексахін, І.Л. Деркач. – Х.: ХНАМГ, 2008. – 34 с.

Укладачі: О.О. Алексахін,

І.Л. Деркач

Рекомендовано кафедрою теплохолодопостачання,

протокол № 8 від 28.04.2008 р.

Зміст

ВСТУП

Експеримент заклав основи багатьох сучасних уявлень про фізичну картину світу. Практика і, отже, дослід є відправною точкою, метою і критерієм істинності будь-якої дійсно наукової теорії.

Експеримент на ранніх стадіях розвитку будь-якої науки має описувальний характер. Однак дійсно науковий зміст має тільки кількісний експеримент, який дозволяє встановлювати зв’язки між різними фізичними величинами. Кількісна інформація отримується з досліду через вимірювання.

Вимірюванням називається процес порівняння деякої величини з встановленим еталоном. В якості еталонів, як правило, використовуються величини, які пов’язані з будь-яким стабільним природним процесом. Наприклад, еталоном довжини є довжина хвилі випромінювання, відповідного визначеному енергетичному переходу в атомі криптона-86; 1 метр є основною одиницею Міжнародної системи (СИ), дорівнює 1650763,73 довжин хвиль цього випромінювання. Порівняння з еталоном виконується не безпосередньо, а за допомогою вимірювальних приладів, які з більшою або меншою точністю відтворюють еталонні величини. Вимірювальні прилади підлягають регулярній перевірці спеціальною метрологічною службою, яка діє на кожному великому підприємстві.

Вимірювання можуть бути прямими й посередніми. При **прямих** значення величин, що вимірюються, визначають безпосередньо за шкалою вимірювального прилада, при **посередніх** – величину, що вимірюється, розраховують за робочою формулою, до якої входять величини, що визначаються в результаті прямих вимірювань [1].

1. КЛАСИФІКАЦІЯ ПОМИЛОК ВИМІРЮВАНЬ

Абсолютно точно виміряти фізичну величину неможливо. Результат вимірювання може бути лише більш або менш близький до дійсного значення величини, що вимірюється. Інакше говорячи, результат вимірювання завжди має деяку експериментальну похибку.

Величина помилки вимірювання характеризується величиною абсолютної і відносної похибки. **Абсолютна похибка** ε являє собою різницю між значенням $x_{вим}$, що виміряне, і дійсним X значення величини x, що вимірюється: $\varepsilon = x_{вим} - X$. Більш наглядно експериментальна помилка характеризується **відносною похибкою вимірювання** E_x, яка дорівнює відношенню абсолютної похибки до дійсного значення величини, що вимірюється, вираженої у відсотках:

$$E_x=(\varepsilon / X)100\%.$$

В інженерній практиці користуються поняттям достатньої точності. Достатня точність вимірювань повинна встановлюватися залежно від вимог конкретного технічного або наукового завдання. Наприклад, при виготовленні крупногабаритних будівельних деталей і конструкцій достатньо проводити вимірювання довжини з похибкою порядку 1 мм. Для виробництва точних оптико-механічних приладів потрібно, щоб похибка вимірювання довжини не перевищувала 10^{-3} мм.

Потрібна в науковому експерименті точність вимірювань також лежить у широких межах. Так, досліди з дослідження теплообміну в газах або рідинах є достатньо точними при відносній похибці вимірювань у 10-15 %.

Розвиток техніки висуває дві основних вимоги до проведення вимірювань: з одного боку, забезпечити достатньо високу точність і, з іншого – правильно оцінити величини експериментальних похибок, що визначають цю точність. Дійсно, без науково обґрунтованого аналізу похибок неможливо забезпечити підвищення точності вимірювань, що визначає прогрес усіх галузей науки і техніки.

Помилки вимірювань поділяються на два основних класи: випадкові й систематичні похибки.

Випадковими називаються помилки, викликані факторами, діючими різним чином при повторенні вимірювань. До таких факторів відносяться, наприклад, коливання фундамента будівлі, короткочасні вимірювання температури повітря внаслідок його циркуляції у приміщенні, періодичні вимірювання водорозбору гарячої води споживачами.

Систематичними називаються помилки, викликані факторами, діючими однаково при повторенні вимірювань. Систематична помилка може бути викликана: зсувом початку відрахування за шкалою вимірювального приладу, недостатньою точністю робочої формули при посередніх вимірюваннях, похибкою методики проведення експеримента. До систематичних помилок відносяться також **приладні помилки вимірювання**, розгляданню яких присвячений окремий розділ цих вказівок.

Зовнішньою ознакою, за якою можна визначити, до якого типу відноситься експериментальна помилка, є результат повторення вимірювань. Якщо результат декількох вимірювань є незмінним, похибка визначається **систематичною помилкою, величина якої не залежить від числа вимірювань**. У випадку отримання різних значень величини, що вимірюється в серії дослідів, можна говорити, що результат вимірювань вміщує випадкову помилку, причому **величина випадкової помилки швидко убуває із зростанням числа вимірювань**.

Таким чином, покращити точність вимірювань шляхом їх багатократного повторення можна лише у випадку малих систематичних похибок, коли помилка вимірювань викликана випадковими факторами. Якщо величина систематичної помилки є суттєвою, можна організувати експеримент так, щоб фактор, який викликав цю помилку, діяв при повторенні вимірювань різним чином; тоді систематична помилка вимірювань перетвориться у випадкову. Переведення систематичної помилки у випадкову називається **рандомізацією** похибки вимірювання. Прикладом рандомізації похибки є використання в серії вимірювань теплопровідності металу декількох різних зразків. Якщо систематична помилка, що викликана недосконалістю кожного із зразків (змінністю перерізу, наявністю домішок, механічними дефектами), має індивідуальну величину, експериментальні значення теплопровідності будуть змінюватися при переході від зразка до зразка. Це й означає, що похибка вимірювань визначається випадковою помилкою.

Особливим типом помилок є **промахи вимірювань** – помилки, які грубо викривляють дослідні результати. Причинами промахів вимірювань можуть бути неуважність спостерігача або будь-які зовнішні дії, що порушують нормальну роботу вимірювального прилада (різкий стрибок напруги в електромережі, недопустимий струс приладного столу і т.ін.). Промахом вимірювання, наприклад, буде помилково зчитане зі шкали термометра значення 80 ^{o}C замість дійсного значення 800 ^{o}C, яке показує прилад. Ознака промаху вимірювань – суттєва різниця результатів від більшості експериментальних значень величини, що вимірюється, отриманих в серії вимірювань.

Очевидно, що перед проведенням розрахунків похибок експериментів необхідно виділити з отриманих даних промахи вимірювань. Якщо відкинути експериментальні значення, що дійсно не є промахами, оцінка точності результатів буде завишеною. Навпаки, якщо серед експериментальних значень залишаться промахи, розрахована точність результату вимірювань знизиться.

Контрольні питання до розділу 1

1. Вказати, яку помилку називають абсолютною.

2. Сформулювати порядок обчислення відносної помилки експериментальних вимірювань.

3. Назвати, які похибки називають випадковими і які систематичними.

4. Визначити, які експериментальні дані з наведеного переліку можна вважати випадковими помилками:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$Y(x)$	10	13	17	22,5	40	41	50	72

5. Навести приклади причин, що обумовлюють систематичні помилки.

6. Пояснити, що таке рандомізація помилки вимірювань.

7. Назвати причини промахів вимірювань.

8. Пояснити, як зміниться похибка експериментів, якщо результати містять промахи.

2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПОМИЛОК

Якщо похибка вимірювання визначається величиною випадкової помилки, результати вимірювання фізичної величини, що повторюються, виявляються різними. Практичний інтерес у цьому випадку мають два питання: як оцінити **дійсне значення величини, що вимірюється**, і **випадкову помилку в її визначенні** за експериментальними даними. Відповіді на ці запитання дає теорія випадкових помилок [2].

2.1. Середнє арифметичне значення

Нехай в результаті n вимірювань величини x отриманий набір експериментальних значень: x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n. Абсолютна похибка i-го вимірювання дорівнює

$$\varepsilon_i = X - x_i.$$

Підсумовуючи абсолютні похибки, отримуємо:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = nX - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Вирішимо останнє рівняння відносно величини X:

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \tag{2.1}$$

У правій частині рівняння (2.1) перша складова являє собою середнє арифметичне значення величини x, друга складова прямує до нуля при безконечному збільшенні числа вимірювань (оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i$=обм, оскільки випадкові помилки можуть приймати як позитивні, так й негативні значення).

Таким чином, з рівняння (2.1) видно, що при достатньо великому числі вимірювань можна приймати

$$X \approx \bar{x}, \tag{2.2}$$

або середнє арифметичне значення є **оцінкою дійсного значення величини**. При фіксованому числі вимірювань рівняння (2.2) тим точніше, чим менше розкид результатів вимірювань, який характеризується величиною суми абсолютних похибок $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i$. Теорія випадкових помилок викладається далі для встановлення зв'язку між помилкою у величині x і розкидом результатів у **кількісній формі**.

2.2. Імовірність випадкової події

Будемо вважати, що експериментальна похибка в основному визначається випадковими факторами. Тоді не можна заздалегідь сказати, яким буде результат окремого вимірювання фізичної величини. Поява кожного дослідного значення буде, з точки зору статистики, **випадковою подією**. Ось чому можна говорити лише про **імовірність** появи того чи іншого конкретного результата в серії вимірювань. Розкриємо суть статистичного поняття „імовірність випадкової події”.

Якщо в деякій ситуації можливі два типи подій, то відношення числа подій n, що нас цікавлять (в теорії імовірності такі події прийнято називати сприятливими) до повного числа подій $(m+n)$ називається імовірністю сприятливої події. $P(n)=n/(m+n)$. Відношення $P(m)=m/(n+m)$ являє собою імовірність іншої, несприятливої події. Вочевидь, що $P(n)+P(m)=1$, тобто імовірність того, що відбудеться одна з двох можливих подій, дорівнює одиниці. У теорії імовірності показується, що імовірність того, що декілька незалежних випадкових подій відбудуться одночасно, дорівнює добутку імовірностей кожної події. Для випадку, який розглядається: $P(n_1, n_2)=P(n_1)\cdot P(n_2)$.

Для того, щоб встановити імовірність випадкової події відповідно з наведеним визначенням, необхідно знати число сприятливих подій і повне число подій, можливих у даній ситуації. У вимірювальній практиці безпосередньо можна визначити лише відношення числа вимірювань K, в яких отримано будь-який результат, що цікавить експериментатора, до загального числа вимірювань N. Величина K/N, що являє собою **частоту появи випадкової події**, пов’язана з імовірністю появи цієї події $P(n)$ **законом великих чисел**, згідно з яким завжди можна обрати достатньо велике N, щоб виконувалась умова

$$|P(n)- K/N|<\varepsilon,$$

де $\varepsilon>0$ – може бути дуже малим. Іншими словами, при збільшенні числа вимірювань частота появи деякого результату прямує до імовірності його появи. Таким чином, закон великих чисел дає можливість встановлювати імовірність випадкової події, визначаючи частоту її появи дослідним шляхом.

Подію можна вважати **певною**, якщо імовірність її появи незначно відрізняється від одиниці, і, навпаки, практично **неможливою**, коли імовірність її з’явлення близька до нуля. Класичний приклад неможливої події – „чудо Бореля”, яке припускає, що дика мавпа, яка вільно натискає пальцем клавіши друкарської машинки, надрукує вірш Блока „Незнайомка”. Імовірність такої події складає 10^{-2600}! Результат досліду можна вважати певним не абсолютно, а тільки з вказівкою точності вимірювання. Наприклад, прибуття потягу на станцію відповідно до розкладу можна вважати певним, якщо час прибуття визначати з точністю до 1 хвилини. Однак прибуття потягу в момент часу, що визначається з точністю до 1 с, буде вже випадковою подією.

2.3. Розподіл результатів вимірювань

Розподілимо інтервал експериментальних значень величини, що вимірюється, на ряд рівних інтервалів $\Delta x=(x_n-x_1)/p$, де p – ціле число. Побудуємо діаграму, яка показує, як часто в серії вимірювань з'являлись значення, що лежать у кожному з виділених нами інтервалів. Характерний вид такої діаграми показаний на рис. 2.1. По осі абсцис відкладені величини інтервалів Δx_i, по осі ординат – число результатів вимірювань k, які попадають до кожного з інтервалів Δx_i. Діаграма, зображена на рис. 2.1, називається **гістограмою**. Якщо число вимірювань достатньо велике, ширину інтервалу Δx можна вибрати дуже малою; при цьому в кожному інтервалі буде все таки велике число експериментальних значень величини x. Частка значень, що лежать в будь-якому інтервалі шириною dx,

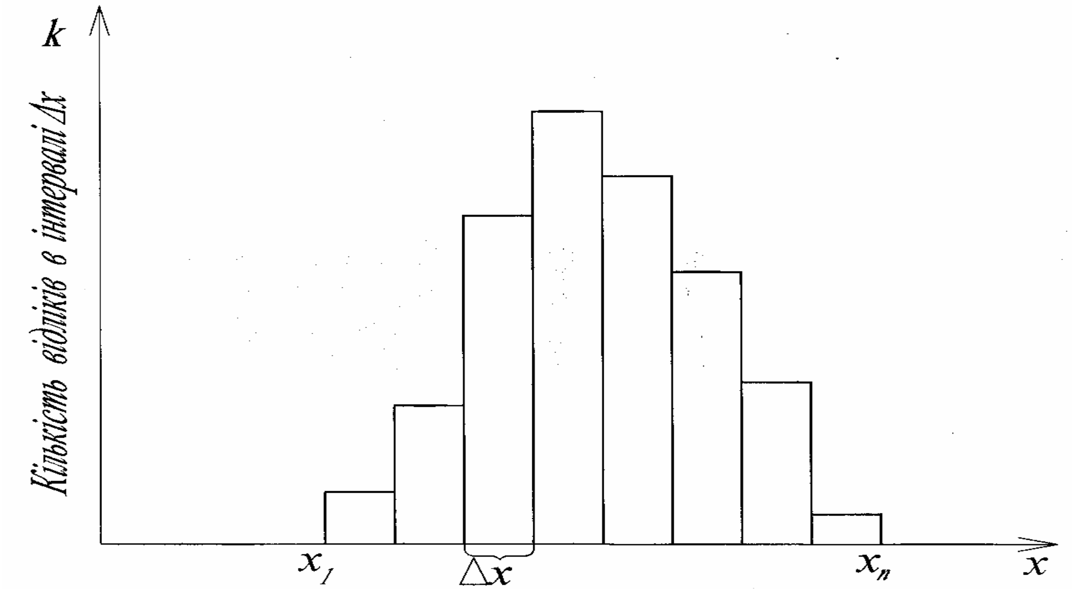

Рис. 2.1 - Гістограма, що характеризує результати вимірювань

у цьому випадку може характеризуватися за допомогою кривої розподілу, яка подана на рис. 2.2. Функція $f(x)$, відкладена по осі ординат, називається **функцією розподілу**. Фізична суть функції розподілу в тому, що добуток $f(x)\,dx$, який дорівнює площі прямокутника на рис. 2.2, являє собою частку значень dn/n, які лежать в інтервалі dx, тобто добуток $f(x)\,dx$ рівний імовірності попадання результату вимірювання в інтервал $[x, x+dx]$. Максимум функції розподілу відповідає значенню $x=X$. Вочевидь, що функція розподілу відповідає **умові нормування** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$. Нескінчені межі інтегрування беруть з метою математичної строгості. На практиці експериментальні значення величини x не дуже відрізняються від дійсного значення X; крім того, величини, що вимірюються, часто в принципі не можуть приймати негативні значення. Отже вид функції розподілу повинен забезпечувати її швидке убування із зростанням абсолютних значень величини $(x-X)$, тоді умова нормування виконується, незважаючи на те, що межі інтегрування нескінченні.

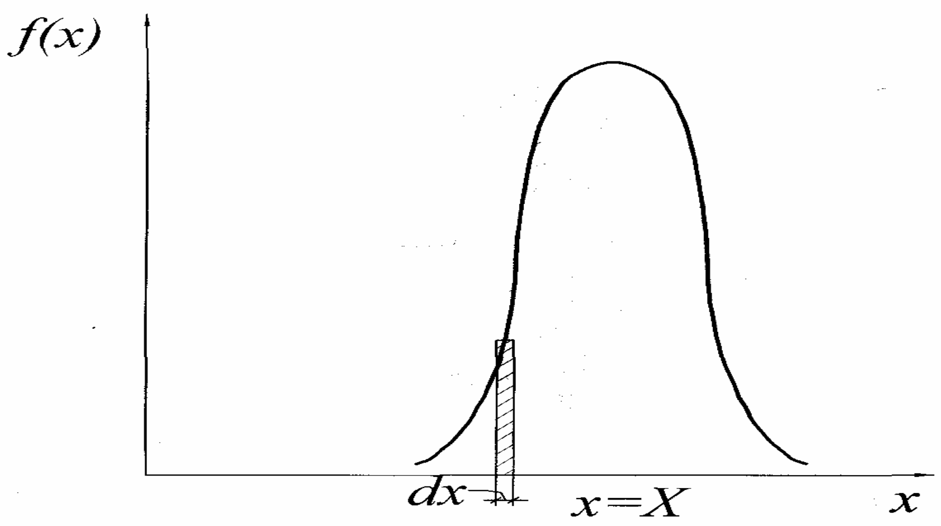

Рис. 2.2 - Крива розподілу випадкової величини x

Виразимо середнє значення величини, що вимірюється, через функцію розподілу. За визначенням $f(x)$ маємо:

$$f(x)\,dx=dn/n,$$

або

$$nf(x)\,dx=dn.$$

Сума значень величини, що вимірюється, в інтервалі від x до $x+dx$:

$$xnf(x)dx=xdn.$$

Звідси, за визначенням середнього арифметичного:

$$x=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xnf(x)dx}{n}=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\,. \qquad (2.3)$$

При достатньо великій кількості вимірювань і відсутності систематичних помилок можна вважатити дійсне значення величини, що вимірюється, рівним середньому арифметичному, яке визначається співвідношенням (2.3).

Мірою випадкової помилки служить корінь квадратний із середнього квадрата абсолютної похибки:

$$\sigma=\sqrt{\overline{\varepsilon^2}}\,.$$

Величина σ називається середньоквадратичним, або стандартним, відхиленням. Величина σ^2 називається генеральною дисперсією розподілу.

Середньоквадратичне відхилення характеризує ширину кривої розподілу, або розкид результатів вимірювань. Більш точні вимірювання дають результати, які описуються кривою розподілу з вузьким максимумом і відповідно малим σ. Для результатів більш грубих вимірювань крива розподілу матиме більш пологий максимум, що свідчить про велике середньоквадратичне відхилення результатів від дійсного значення величини.

2.4. Розподіл Гаусса

В якості функції розподілу часто використовують функцію:

$$f(x)=(1/\sigma\sqrt{2\pi})\exp\left\{-(x-X)^2/2\sigma^2\right\}. \qquad (2.4)$$

Розподіл, що описується такою функцією, називається **гауссовим** або **нормальним розподілом** випадкової величини *x*. Графік **функції Гаусса**, який визначається виразом (2.4), представлений на рис. 2.3. Основними властивостями функції Гаусса є:

а) наявність максимуму при $x=X$;

б) симетричність відносно значення $x=X$;

в) швидке прямування до нулю із зростанням різниці $(x-X)$;

г) підпорядкованість умові нормування: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$.

Таким чином, функція Гаусса підходить для використання як функції розподілу.

Записуючи вираз (2.4) з урахуванням визначення абсолютної похибки $\varepsilon=x-X$, отримуємо функцію розподілу випадкової величини ε:

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\{-\varepsilon^2/2\sigma^2\},\ -\infty\le\varepsilon\le+\infty. \qquad (2.5)$$

Графік функції $f(\varepsilon)$ показано на рис. 2.4.

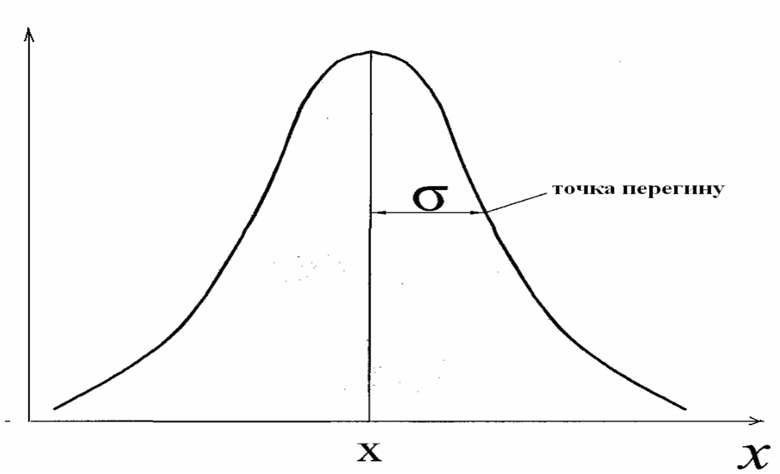

Рис. 2.3 - Нормальний розподіл випадкової величини *x*

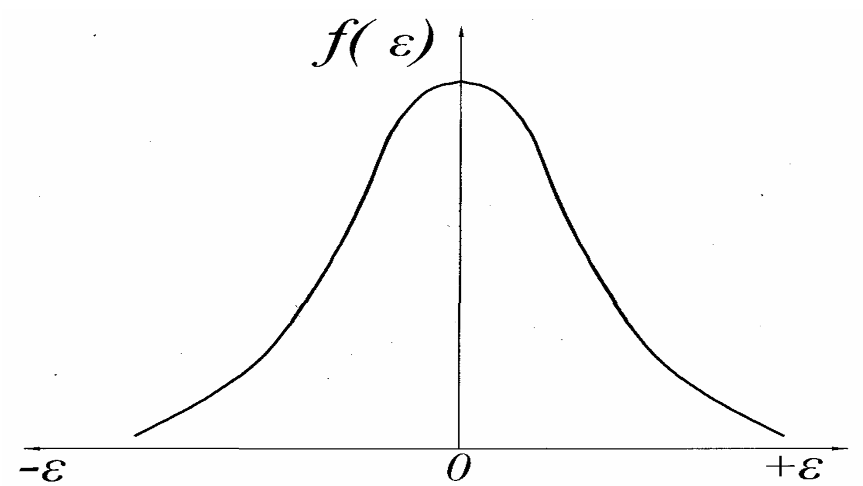

Рис. 2.4 - Нормальний розподіл випадкових помилок

Знайдемо середнє значення квадрата абсолютної похибки, використовуючи гауссову функцію розподілу, що виражена співвідношенням (2.5):

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 f(\varepsilon) d\varepsilon = \sigma^2,$$

тобто параметр функції Гаусса σ^2 є дисперсією цього розподілу.
Вид гауссової функції розподілу при різних значеннях σ показаний на рис. 2.5.

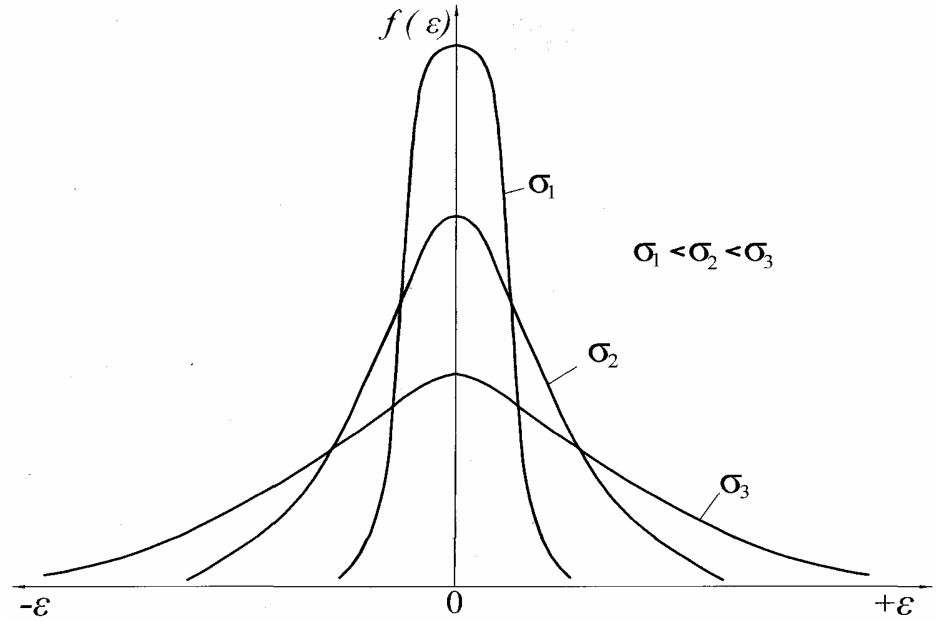

Рис. 2.5 - Вид функції Гаусса при різних значеннях σ

Найбільш важлива теорема математичної статистики – **центральна гранична теорема** стверджує, що коли випадкова величина x має дійсне значення X і дисперсію σ^2, то при прямуванні числа вимірювань до безконечності розподіл вибіркового середнього $\bar{x}$ прямуватиме до гауссового з середнім значенням X і дисперсією σ^2/n.

2.5. Довірений інтервал і довірена імовірність

Частка значень величини, що вимірюється, які лежать у деякому інтервалі, характеризує імовірність попадання результатів вимірювань у даний інтервал, або частка значень випадкової помилки, які лежать у деякому інтервалі, характеризує імовірність попадання випадкової помилки в цей інтервал.

Імовірність α попадання випадкової помилки в інтервал значень $-\delta \le \varepsilon \le +\delta$ визначається як $\alpha(\delta) = \int_{-\delta}^{+\delta} f(\varepsilon) d\varepsilon$. Використовуючи в якості $f(\varepsilon)$ функцію розподілу Гаусса, отримаємо:

$$\alpha(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} \exp\left(-\varepsilon^2 / 2\sigma^2\right) d\varepsilon. \tag{2.6}$$

Величина $\alpha(\delta)$ чисельно дорівнює площі фігури на рис. 2.6. За рівнянням (2.6) значення імовірності α для обраного інтервала значень ε залежить від ширини розподілу, що визначається величиною σ.

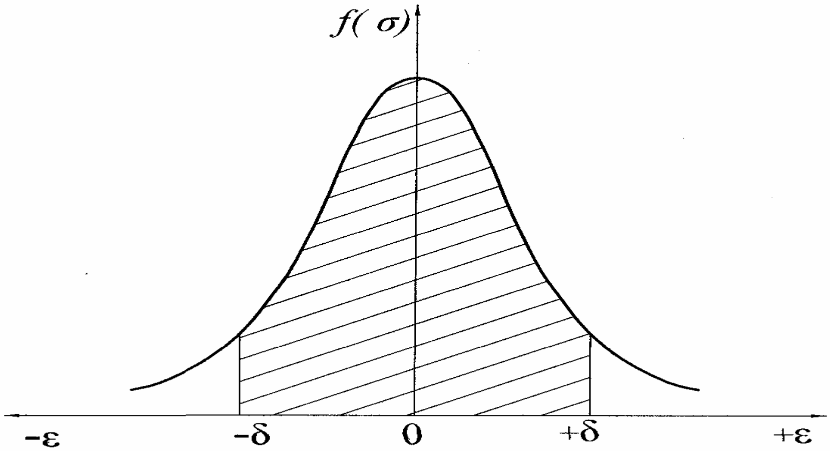

Рис. 2.6 - Довірений інтервал і довірена імовірність

Введемо нову змінну $t=\varepsilon/\sigma$, тоді, позначаючи $z=\delta/\sigma$, перетворюємо рівняння (2.6) до вигляду

$$\alpha(z)=\sqrt{2/\pi}\int_0^z \exp\left(-t^2/2\right)dt. \qquad (2.7)$$

Значення імовірності $\alpha(z)$, які розраховані за формулою (2.7), будуть такі:

z:	0;	1;	2;	3;	4;
$\alpha(z)$:	0;	0,683;	0,954;	0,9973;	0,99994.

Графік функції $\alpha(z)$ наведений на рис. 2.7. Результати розрахунку функції $\alpha(z)$ показують, що імовірність попадання випадкової помилки у заданий інтервал значень швидко зростає, прямуючи до одиниці, зі збільшенням цього інтервалу.

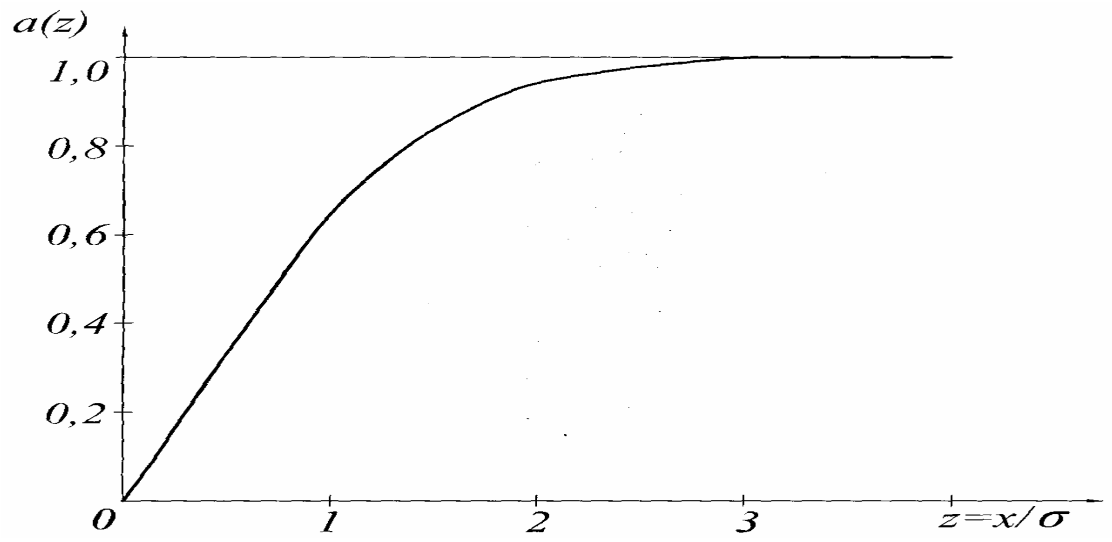

Рис. 2.7. Залежність значень довіреної імовірності від ширини довіреного інтервалу

Імовірність того, що дійсне значення величини, що вимірюється, лежить у заданому інтервалі значень, називається **довіреною імовірністю** або **надійністю** для даного інтервалу. Інтервал значень, в якому із заданою довіреною імовірністю лежить дійсне значення величини *X*, що вимірюється, називається **довіреним інтервалом**.

Таким чином, $\bar{x}-\delta \le X \le \bar{x}+\delta$ з імовірністю, яка дорівнює *α(δ)*. Це твердження можна записати у вигляді $P\left(\bar{x}-\delta \le X \le \bar{x}+\delta\right)=\alpha(\delta)$.

З наведеної таблиці видно, що:

$$P\left(\bar{x}-\sigma_{\bar{x}} \le X \le \bar{x}+\sigma_{\bar{x}}\right)=0,683;$$

$$P\left(\bar{x}-2\sigma_{\bar{x}} \le X \le \bar{x}+2\sigma_{\bar{x}}\right)=0,954;$$

$$P\left(\bar{x}-3\sigma_{\bar{x}} \le X \le \bar{x}+3\sigma_{\bar{x}}\right)=0,9973;$$

$$P\left(\bar{x}-4\sigma_{\bar{x}} \le X \le \bar{x}+4\sigma_{\bar{x}}\right)=0,99994.$$

У лабораторній практиці, як правило, виличини, що вимірюються, визначають у довіреному інтервалі $\left[\bar{x}\pm 2\sigma_{\bar{x}}\right]$.

2.6. Біноміальний розподіл і розподіл Пуассона

До теперішнього часу припускалось, що випадкова похибка може приймати безперервний ряд значень. При цьому імовірність появи випадкової помилки характеризувалась безперервною функцією розподілу, наприклад, функцією Гаусса. Однак, у вимірювальній практиці можливі випадки, коли результати вимірювань і, отже, величини випадкової помилки приймають дискретний набір значень. Тоді імовірність появи деякого результату характеризується дискретною функцією розподілу $W_N(n)$, де *N* – загальна кількість вимірювань, *n* – кількість вимірювань, в яких отримане значення, що нас цікавить. Такий випадок має місце при вимірюванні числа імпульсів, які реєструються чутливим елементом приладу.

Уявимо собі, що результат вимірювань може приймати тільки два значення. Позначимо: *p* – імовірність першого значення, *q=1-p* – імовірність другого значення. Якщо проводиться *N* вимірювань, то імовірність того, що перше значення повториться *n* разів, а друге – відповідно (*N*-*n*) разів,

$$W_N(n)=\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n}, \quad 0\le n\le N. \qquad (2.8)$$

Формула (2.8) описує **біноміальний розподіл**. Вид біноміального розподілу при *N*=10 і *p*=1/3 показаний на рис. 2.8. Біноміальний розподіл характеризується середнім значенням $\bar{n}=Np$ і середньоквадратичним відхиленням $\sigma=\sqrt{Npq}$. Функція біноміального розподілу підпорядковується умові нормування: $\sum_{n=0}^{N} W_N(n)=1$.

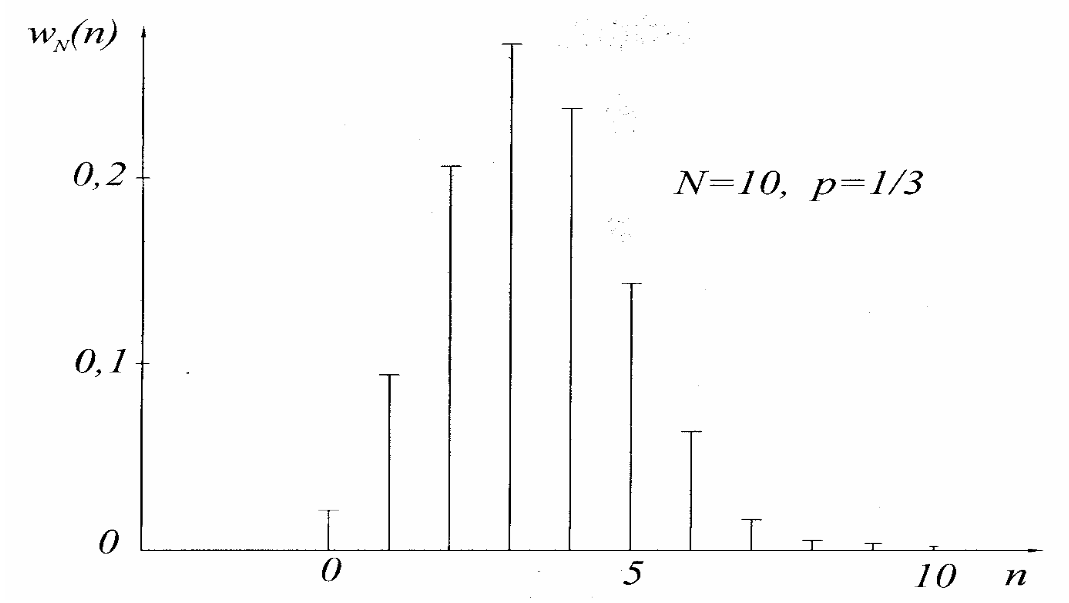

Рис. 2.8 - Біноміальний розподіл

Із зростанням числа вимірювань ($N\to\infty$) біномінальний розподіл **прямує до гаусового, якщо значення *p* фіксоване**. Збільшення числа вимірювань, **якщо фіксоване значення добутку** $N\ p=\alpha$, приводить до того, що біноміальний розподіл **прямує до розподілу Пуассона**:

$$W_\alpha(n)=exp(-\alpha)\alpha^n/n!. \qquad (2.9)$$

Середнє значення числа n і середньоквадратичне відхилення для розподілу Пуасона дорівнюють відповідно: $\bar{n}=\alpha$ і $\sigma=\sqrt{\alpha}$.

Вочевидь, що умова кінцевості величини $N\ p$ при $N\to\infty$, що приводить біномінальний розподіл до розподілу Пуассона, виконується, якщо величина p дуже мала ($p\to 0$).

Контрольні питання до розділу 2

1. Проаналізувати вплив кількості вимірювань на точність результату.

2. Сформулювати фізичний сенс функції розподілу.

3. Назвати основні властивості функції Гауса, навести її загальний вигляд.

4. Дати визначення довіреного інтервалу.

5. Охарактеризувати біноміальний розподіл. Сформулювати умови, при яких біноміальний розподіл наближається до Гауссового.

3. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

3.1 Вибір вигляду емпіричної формули з двома параметрами

У цьому розділі розглянуті найчастіше вживані математичні залежності, які можна використати при обробці експериментальних даних:

I. $y = ax + b$

II. $y = ax^b$

III. $y = ab^x$

IV. $y = a + \frac{b}{x}$

V. $y = \frac{1}{ax+b}$

VI. $y = \frac{x}{ax+b}$

VII. $y = a\lg x + b$

Необхідні умови для використання емпіричних залежностей I-VII наведені у таблиці 3.1

Таблиця 3.1-Критерії використання емпіричних формул I-VII [3]

№ п/п	$\overline{X}s$	$\overline{Y}s$	Вигляд емпіричної формули	Спосіб вирівнювання
1	2	3	4	5
I	$\frac{x_1 + x_n}{2}$ (середнє арифметичне)	$\frac{y_1 + y_n}{2}$ (середнє арифметичне)	$y = ax + b$	
II	$\sqrt{x_1 \cdot x_n}$ (середнє геометричне)	$\sqrt{y_1 \cdot y_n}$ (середнє геометричне)	$y = ax^b$	$Y = \alpha + bX$ $\partial eX = \ln x,$ $Y = iny, \alpha = \ln a$
III	$\frac{x_1 + x_n}{2}$ (середнє арифметичне)	$\sqrt{y_1 \cdot y_n}$ (середнє геометричне)	$y = ab^x, або$ $y = ae^{\beta x},$ $\partial e\beta = \ln b$	$Y = \alpha + \beta \cdot x,$ $\partial eY = \lg y,$ $\alpha = \lg a, \beta = \lg b$
IV	$\frac{2x_1 \cdot x_n}{x_1 + x_n}$ (середнє гармонічне)	$\frac{y_1 + y_n}{2}$ (середнє арифметичне)	$y = a + \frac{b}{x}$	$Y = ax + b,$ $\partial eY = xy$

Продовження табл. 3.1.

V	$\frac{x_1 + x_n}{2}$ (середнє арифметичне)	$\frac{2y_1 \cdot y_n}{y_1 + y_n}$ (середнє гармонічне)	$y = \frac{1}{ax+b}$	$Y = ax + b,$ $деY = \frac{1}{y}$
VI	$\frac{2x_1 \cdot x_n}{x_1 + x_n}$ (середнє гармонічне)	$\frac{2y_1 \cdot y_n}{y_1 + y_n}$ (середнє гармонічне)	$y = \frac{x}{ax+b}$	$Y = ax + b,$ $деY = \frac{x}{y}$
VII	$\sqrt{x_1 \cdot x_n}$ (середнє геометричне)	$\frac{y_1 + y_n}{2}$ (середнє арифметичне)	$y = a\lg x + b$	$y = aX + b,$ $деX = \lg x$

Табл. 3.1 полегшує вибір виду емпіричної формули серед наведених. Рекомендується [3] діяти наступним чином. Для перевірки придатності відповідної формули, користуючись вихідними даними, знаходимо значення $X_s = \overline{X_s}$ та Y_s і порівнюємо останнє зі значенням $\overline{Y_s}$ з табл. 3.1. Перевагу віддають формулі, яка забезпечує мінімальну різницю $\left|Y_s - \overline{Y_s}\right|$. Якщо величина $\left|Y_s - \overline{Y_s}\right|$ велика, то відповідна емпірична формула не придатна.

Треба визначити, що даний метод не є дуже точним, тому що не враховується поведінка всіх проміжних даних.

<u>Завдання 3.1.</u> Визначити вигляд емпіричної формули, що задовольняє даним табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – Вихідні данні до приклада 3.1

X	10	30	50	70	90	110
Y	150	90	65	43	40	37

<u>Розв'язання.</u> Вигляд емпіричної формули визначаємо серед математичних залежностей I-VII, наведених у табл. 3.1 за вказаним правилом. Результати обчислень, наведені у табл. 3.3, свідчать, що відповідно до критеріїв треба обрати функцію.

Таблиця 3.3 - Вибір емпіричної формули за критеріями I-VII (до прикладу 3.1)

№ п/п	$\overline{X}s$	$\overline{Y}s$	Y_s	$\lvert \overline{Y_s} - Y \rvert$	Вигляд функції
I	$\frac{x_1+x_n}{2}=\frac{10+110}{2}=60$	$\frac{y_1+y_n}{2}=\frac{150+37}{2}=93{,}5$	54	39,5	$y=ax+b$ Не підходить
II	$\sqrt{x_1\cdot x_n}=\sqrt{10\cdot 110}=33{,}16$	$\sqrt{y_1\cdot y_n}=\sqrt{150\cdot 37}=74{,}5$	85,8	11,3	$y=ax^b$ Мало підходить
III	$\frac{x_1+x_n}{2}=\frac{10+110}{2}=60$	$\sqrt{y_1\cdot y_n}=\sqrt{150\cdot 37}=74{,}5$	54	20,5	$y=ab^x$ Мало підходить
IV	$\frac{2x_1\cdot x_n}{x_1+x_n}=\frac{2\cdot 10\cdot 110}{10+110}=18{,}3$	$\frac{y_1+y_n}{2}=\frac{150+37}{2}=93{,}5$	126	32,5	$y=a+\frac{b}{x}$ Не підходить
V	$\frac{x_1+x_n}{2}=\frac{10+110}{2}=60$	$\frac{y_1+y_n}{2}=\frac{2\cdot 150\cdot 37}{150+37}=59{,}4$	54	5,4	$y=\frac{1}{ax+b}$ Краще підходить за інші формули
VI	$\frac{2x_1\cdot x_n}{x_1+x_n}=\frac{2\cdot 10\cdot 110}{10+110}=18{,}3$	$\frac{y_1+y_n}{2}=\frac{2\cdot 150\cdot 37}{150+37}=59{,}4$	126	66,6	$y=\frac{x}{ax+b}$ Не підходить
VII	$\sqrt{x_1\cdot x_n}=\sqrt{10\cdot 110}=33{,}16$	$\frac{y_1+y_n}{2}=\frac{150+37}{2}=93{,}5$	80,25	13,25	$y=a\lg x+b$ Мало підходить

$$y=\frac{1}{ax+b}\ , \tag{3.1}$$

яка забезпечує мінімальну різницю $\lvert Y_s - \overline{Y_s} \rvert$. Величину Y_s знаходимо з набору вихідних даних за величиною $X_s = \overline{X_s}$,обчисленою для даного критерію. Величину Y_s можна знайти або методом інтерполяції за даними табл. 3.2, або графічно, побудувавши попередньо графік функції (рис. 3.1)

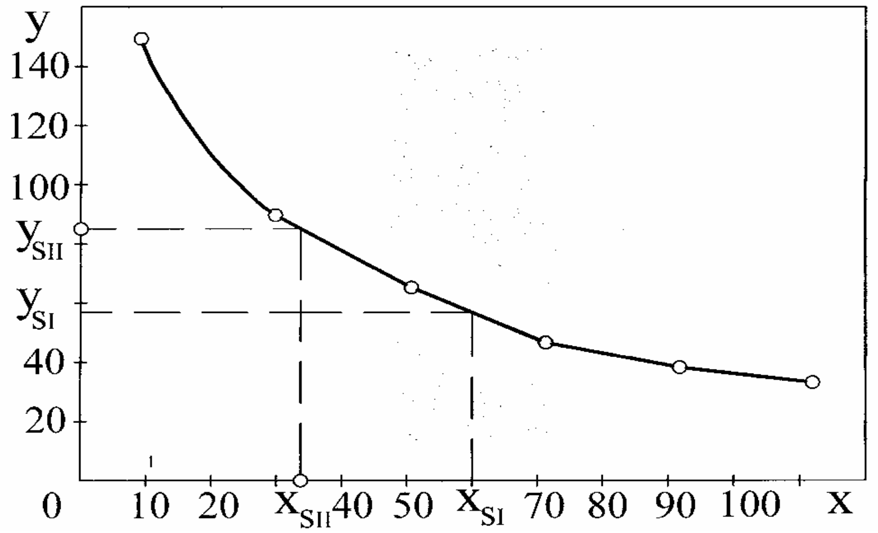

Рис. 3.1 – Вигляд функції (за даними табл. 3.2)

Завдання 3.2. Використовуючи результати завдання 3.1, знайти емпіричну формулу для поданого в таблиці 3.2 набору даних.

Розв'язання. За результатами розв'язання попереднього завдання відомо, що функція вигляду $y = \frac{1}{ax+b}$ найкращим чином інтерпретує вихідні дані. У табл. 3.1 наведено спосіб вирівнювання введенням допоміжної функції $Y = \frac{1}{y}$, що дає змогу привести функцію до лінійного закону і досить просто визначити числові значення коефіцієнтів a і b лінійного рівняння

$$y = ax + b \qquad (3.2)$$

Графічна інтерпретація результатів розрахунків, наведених у табл. 3.4, подана на рис. 3.2.

Таблиця 3.4 – Результати визначення складових емпіричної формули

X	10	30	50	70	90	110
$Y = \frac{1}{y}$	0,0067	0,011	0,015	0,023	0,025	0,027
b	0,0044	0,0041	0,0035	0,0069	0,0043	0,0017

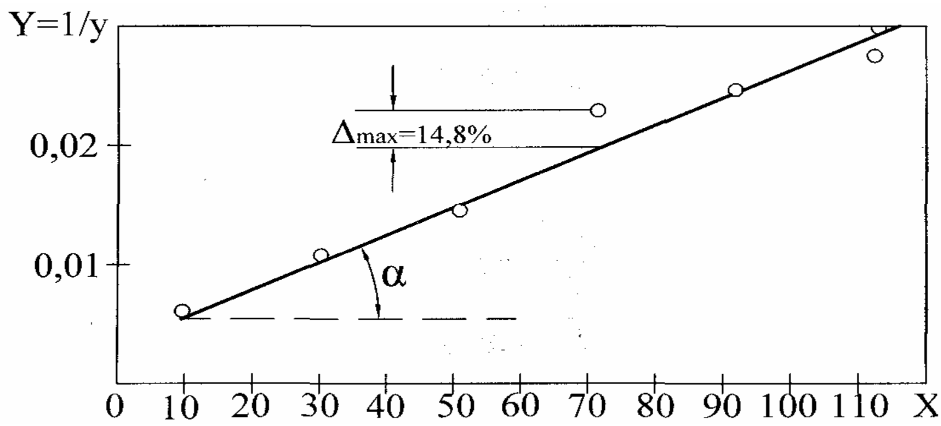

Рис. 3.2 – Визначення множника α (до завдання 3.2)

Числові значення множника a рівняння (3.1) дорівнюють тангенсу куту нахилу лінії на рис. 3.2

$$a = tg\alpha = \frac{0.03 - 0.0067}{110 - 10} = 0{,}00023$$

Локальні значення “b ” знаходять з рівняння (3.1)

$$b = Y - ax \qquad (3.3)$$

Результати обчислень подано у табл. 3.4

Середнє значення величини “b ” в діапазоні $10 \le x \le 110$ обчислюємо як середнє арифметичне локальних значень

$$\bar{b} = \frac{1}{b}(0{,}0044 + 0{,}0041 + 0{,}0035 + 0{,}0069 + 0{,}0043 + 0{,}0017) = 0{,}00415$$

Таким чином емпірична формула, що описує поданий набір даних, матиме вигляд

$$y_1 = \frac{1}{0{,}023 \cdot x + 0.00415} \qquad (3.4)$$

Порівняння результатів обчислень за формулою (3.4) з вихідними даними (табл. 3.2) здійснено у табл.. 3.5. Відносна похибка апроксимації даних обчислена за формулою

$$\Delta = \frac{y_1 - y}{y} \cdot 100\% . \qquad (3.5)$$

Таблиця 3.5 – Відносна похибка обчислень за формулою (3.3)

x	10	30	50	70	90	110
y	150	90	65	43	40	37
y_1	155	90,5	63,9	49,3	40,24	33,96
Δ,%	3,3	0,5	-1,7	14,8	0,6	-8,2

Таким чином, запропонована формула (3.3) з максимальною похибкою 14,8% апроксимує набір вихідних даних.

Завдання для самостійної роботи.

Завдання 3.3. Визначити вигляд емпіричної функції, що відповідає набору даних табл. 3.6. Обчислити значення коефіцієнтів у формулі й максимальну похибку апроксимації.

Таблиця 3.6 – Вихідні дані до завдання 3.3

Варіант	X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Y	0	3,5	7	10	13,5	17	20	25	27	30	35
2	Y	0	3,5	7	8,5	10	11	12	13	14	15	15,5
3	Y	0	3,5	7	10	15	21	27	33	41	49	58
4	Y	1000	75	50	35	26	20	15	12	9	8	7
5	Y	0	24	40	50	58	65	71	76	80	84	87
6	Y	40	45	50	55	61	66	69	76	83	87	90
7	Y	70	63	57	50	45	41	36	32	28	25	24
8	Y	20	37	50	60	67	73	79	84	89	95	99
9	Y	1000	75	51	36	25	23	26	38	48	78	1000
10	Y	10	16	24	29	34	39	43	47	51	55	58
11	Y	90	87	83	79	73	69	64	59	53	50	44
12	Y	80	70	63	58	57	55	57	59	64	72	81
13	Y	0	24	40	50	58	65	71	74	75	76	76
14	Y	0	24	40	50	58	61	62	63	61	60	57
15	Y	0	0	0,1	2	5	7	11	16	22	29	36
16	Y	10	16	26	30	35	39	44	47	52	55	58
17	Y	10	11	13	16	19	21	28	35	46	70	57
18	Y	80	79	78	77	75	72	68	64	56	42	36

3.2. Випадкові помилки прямих вимірювань

Для зручності обробки результатів прямих вимірювань, що вміщують випадкові помилки, експериментальні дані зводяться до таблиці наступної форми:

№ п/п	x_i	$d_i=x_i-\bar{x}$	$d_i^2=\left(x_i-\bar{x}\right)^2$
1	2	3	4
	$\bar{x}=$		$\sum_{i=1}^{n} d_i^2=$

У кінці графи 2 записують арифметичне значення величини $\bar{x}$, що вимірюється, а в кінці графи 4 – значення суми квадратів залишків $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$. Потім за формулою(3.7) розраховують вибіркове середньоквадратичне відхилення середнього арифметичного $S_{\bar{x}}$, після чого визначають межі довіреного інтервалу $\left[\bar{x}-\Delta x, \bar{x}+\Delta x\right]$:

$$\Delta x = t \quad \Delta x = t_{\alpha_n} S_{\bar{x}}, \tag{3.6}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n-1)}} \quad . \tag{3.7}$$

3.3. Випадкові помилки посередніх вимірювань функції однієї змінної

Нехай посередньому вимірюванню підлягає величина $z=z(x)$, яка залежить тільки від однієї величини x, що визначається шляхом прямого вимірювання, наприклад, $z=x^n$ або $z=exp\ x$.

Один з можливих видів залежності $z(x)$ графічно поданий на рис. 3.3. Якщо дійсне значення x є X, то дійсним значенням величини z буде $Z=Z(X)$. Помилці у величині обраного значення x:

$$\varepsilon_x = x - X$$

відповідає помилка у величині z:

$$\varepsilon_z = z\left(X+\varepsilon_x\right) - z(X) \approx \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=X} \varepsilon_x . \tag{3.8}$$

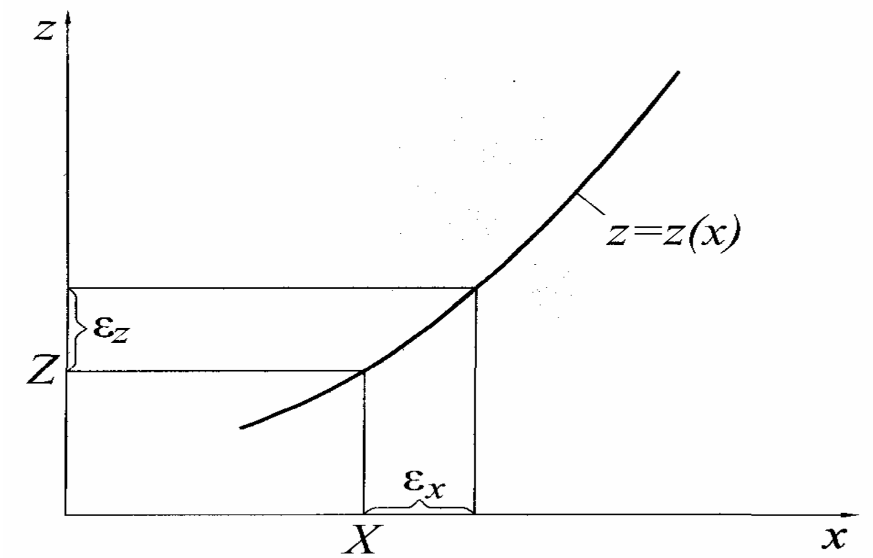

Рис. 3.3 - Помилка посереднього вимірювання функції однієї змінної

Знак приблизної рівності у виразі (3.8) стоїть у зв'язку з тим, що вона строго дотримується лише у випадку дуже малих величин ε_x, коли в інтервалі значень від X до $X+\varepsilon_x$ функція $z(x)$ може бути представлена прямою лінією.

Записуючи рівність (3.8) у формі

$\varepsilon_z = C_x \cdot \varepsilon_x$, де C_x - коефіцієнт Ст'юдента [1], $C_x = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=X}$, (3.9)

бачимо, що помилка у величині z пропорційна помилці у величині x. Вважаючи, що випадкова величина x підпорядковується розподілу з середнім значенням $\bar{x}$, піднесемо у квадрат, а потім усереднимо частини рівняння (3.9). У результаті отримаємо наступне співвідношення між середньоквадратичними помилками (або довіреними інтервалами) Δx і Δz:

$$\Delta z = C_x \cdot \Delta x. \tag{3.10}$$

Слід особливо відзначити випадок, коли залежність $z(x)$ має вигляд $z=x^n$, отже $C_x = n\bar{x}^{n-1}$. Використовуючи формулу (3.10), можна записати вираз для відносної похибки вимірювання величини z:

$$\frac{\Delta z}{z} = n\frac{\Delta x}{x}. \tag{3.11}$$

Рівняння (3.11) означає, що у разі, коли $z=x^n$, відносна середньоквадратична похибка величини z в n разів більше відносної середньоквадратичної похибки вимірювання величини x.

Отже, для розрахунку випадкової помилки посередніх вимірювань Δz функції однієї змінної можна використовувати формулу (3.10), де величина випадкової помилки прямих вимірювань Δx розраховується за формулою (3.6).

3.4. Визначення параметрів лінійної залежності

У тому випадку, коли завданням вимірювань є виявлення залежності однієї величини y, що визначається експериментально, від іншої x. У дослідах вимірюють пари значень величин x_i і y_i. Дослідні значення наносять на графік у вигляді точок. Метою обробки експериментальних даних звичайно є знаходження кривої $y=y(x)$, що проходить як омога ближче до отриманих точок.

Обмижемося розглядом практично найбільш важливого випадку обробки дослідних даних у вигляді лінійної залежності

$$y=mx+c \tag{3.12}$$

Завдання полягає у визначенні параметрів m і c, при яких пряма, що описується рівнянням (3.12), проходить через експериментальні точки найкращим чином.

Практичне значення лінійної залежності однієї експериментальної величини від іншої визначається двома обставинами. По-перше, функціональна залежність фізичної величини часто може вважатися лінійною, якщо діапазон зміни аргумента досить вузький. По-друге, навіть у випадку нелінійної залежності, обробку проводять в таких координатах, щоб отримати пряму лінію. Наприклад, для знаходження параметрів A і B експоненціальної залежності тиску насиченої пари p_s від температури T:

$$p_s=Aexp(-B/T)$$

дослідні дані обробляють у вигляді лінійної залежності в координатах $ln\, p_s=f(1/T)$. Тоді параметр A графічно виражається відрізком, що відсікається лінійною залежністю на осі ординат, а параметр B чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту цієї залежності.

Розглянемо методи знаходження найбільш імовірних значень параметрів лінійної залежності, що проходять через набір експериментальних точок.

<u>Метод найменших квадратів [4]</u>

Це один із стандартних методів статистичної обробки даних, отриманих у вигляді набору пар виміряних значень $(x_1, y_1), (x_2, y_2),\ldots, (x_n, y_n)$. Будемо вважати в подальшому, що експериментальні помилки вміщують лише значення y_i, а величини x_i виміряні точно. Таке припущення на практиці добре виправдовується, якщо похибка вимірювання величин x_i суттєво менше похибки величини y_i. (У випадку, коли треба враховувати похибку вимірювання величини x_i, обробка даних суттєво ускладнюється).

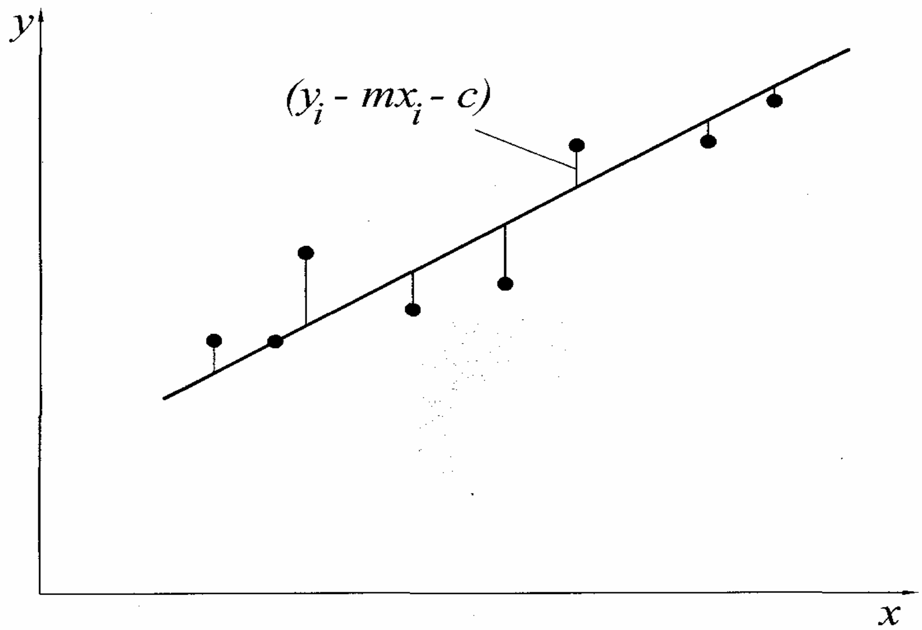

Рис. 3.4 - Метод найменших квадратів

Як видно з рис. 3.4, відхилення експериментального значення y_i від значення, що визначається залежністю $y=mx+c$,

$$y_i-mx_i-c.$$

Сума квадратів відхилень приймає мінімальне значення, якщо відхилення розраховані відносно середнього арифметичного значення. Отже, формула (3.12) даватиме середнє значення величини y, якщо параметри m і c обрати так, щоб сума

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-mx_i-c\right)^2 \qquad (3.13)$$

була мінімальною. Ось тому такий метод обробки даних називається методом найменших квадратів.

Умови мінімуму величини S, що визначається формулою (3.13), будуть наступні:

$$\frac{\partial S}{\partial m}=\sum_i\left[-2x_i\left(y_i-mx_i-c\right)\right]=0, \qquad (3.14)$$

$$\frac{\partial S}{\partial c}=\sum_i\left[-2\left(y_i-mx_i-c\right)\right]=0. \qquad (3.15)$$

Рівняння (3.14) і (3.15) можуть бути записані у вигляді

$$m\sum_i x_i^2+c\sum_i x_i=\sum_i x_i y_i; \qquad (3.16)$$

$$m\sum_i x_i+cn=\sum_i y_i. \qquad (3.17)$$

Як показує рівняння (3.17), для найкращого усереднення експериментальних даних пряма повинна проходити через точку з координатами

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i \ , \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i \ ,$$

що визначають „центр ваги” всіх дослідних точок.

Вирішуючи систему рівнянь (3.16) і (3.17) відносно параметрів m і c, отримаємо:

$$m = \frac{\sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)}{\sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2} \quad . \tag{3.18}$$

$$c = \overline{y} - m\overline{x}. \tag{3.19}$$

Відхилення експериментальних даних від усереднюючої прямої (3.12) з параметрами, які визначаються формулами (3.18) і (3.19), являють собою залишки

$$d_i = y_i - mx_i - c. \tag{3.20}$$

Вираз для дисперсій параметрів m і c, які наводяться без виведення, мають вигляд

$$\sigma^2{}_m \approx \frac{1}{D}\frac{\sum_i d_i^2}{n-2}; \tag{3.21}$$

$$\sigma^2{}_c \approx \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{D}\right)\frac{\sum_i d_i^2}{n-2}; \tag{3.22}$$

де

$$D = \sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2. \tag{3.23}$$

При умові, що пряма, яка усереднює, повинна проходити через початок координат, параметр m можна визначити з рівняння (3.16) при c=0. Тоді

$$m = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}. \tag{3.24}$$

Дисперсія цього параметра визначається виразом

$$\sigma^2{}_m \approx \frac{1}{\sum_i x_i^2}\frac{\sum_i d_i^2}{n-1}. \tag{3.25}$$

3.5. Приладні помилки прямих вимірювань

Якщо у вимірюваннях фізичної величини отримують однакові результати, це означає, що експериментальна похибка визначається приладною помилкою. Величина цієї помилки пов'язана з вирішувальною здатністю вимірювального приладу, яка залежить від його конструкції та якості виготовлення.

Приладна помилка вимірювання величини x характеризується **класом точності приладу**:

$$i = \frac{\delta_x}{x_m} 100 , \tag{3.26}$$

де x_m – граничне значення величини x, яке можна виміряти даним приладом; δ_x – величина приладної помилки.

Як видно з виразу (3.26), клас точності приладу являє собою відносну приладну помилку, виражену у відсотках. Знаючи клас точності приладу i, легко визначити величину приладної помилки:

$$\delta_x = \frac{i x_m}{100} . \tag{3.27}$$

Наприклад, приладна помилка вимірювання тиску P манометром класу точності 0,5 з межею вимірювання P=1,5 кг/см^2 дорівнює

$$\delta_P = \frac{0,5 \cdot 1,5}{100} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^2.$$

Для приладів, клас точності яких не вказаний, величину приладної помилки звичайно приймають рівною половині ціни поділки шкали (для більш грубих приладів – ціні поділки шкали).

Аналогічно поступають при визначенні **помилок округлення** констант, які входять в робочу формулу. Помилку округлення приймають рівною половині одиниці найменшого розряду, що залишили в значенні константи. Наприклад, якщо використовується число π, записане з точністю до сотих часток, π=3,14, то помилку округлення приймають рівною: $\Delta\pi$=0,005=5·10^{-3}.

Завдання для самостійної роботи.

Завдання 3.4. Визначити відносну помилку вимірювання температури теплоносія на вводі в систему опалення Т (табл. 3.7) термометром з ціною поділки шкали Ц (табл. 3.8)

Таблиця 3.7 – Результати вимірювання температури теплоносія

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Температура, ^0C	105	100	95	90	85	80	75	70	65	60

Таблиця 3.8 – Ціна поділки шкали термометра

Варіант	1	2	3	4
Ц, ^0C	5	2	1	0,5

Завдання 3.5. Визначити помилку вимірювання тиску води в системі гарячого водопостачання житлового кварталу монометром класу точності К (табл. 3.9). Величину тиску прийняти за табл. 3.10

Таблиця 3.9 – клас точності манометра

Варіант	1	2	3	4	5
К	0,4	0,6	1,0	1,5	2,5

Таблиця 3.10 – Результати вимірювання тиску

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Р, $\frac{кг}{см^2}$	5	6	7	8	9	10	10,5	11	11,5	12

3.6 Визначення похибки експериментальних вимірювань

Перед проведенням експерименту за обраною методикою і системою вимірювальних приладів виконують попередній аналіз похибок дослідів. Джерелами можливих помилок теплотехнічних досліджень є застосування вимірювальних приладів невисокого класу точності, відхилення теплового режиму роботи установки від розрахункового, неповне врахування теплових втрат тощо.

Кількісною оцінкою точності результату вимірювань є абсолютна і відносна похибки. Тому що у першому наближенні можна прийняти $\frac{\Delta u}{u}=\frac{du}{u}$, а, як відомо, $\frac{du}{u}=\mathrm{d}(\ln u)$, то відносна похибка одного досліду визначається повним диференціалом від натурального логарифма вимірюваної величини U. Якщо величина U є заданою функцією декількох незалежних перемінних $u = f\left(k_1, k_2, ...k_n\right)$, що визначаються з експерименту, то

$$\frac{du}{u}=\mathrm{d}(\ln u)=d\ln f\left(k_1,k_2,.......k_n\right) \tag{3.28}$$

Таким чином, максимальну відносну похибку вимірювань величини u можна визначити, якщо відомі максимальні відносні похибки аргументів і вигляд функціональної залежності.

Якщо вимірювання можна здійснити незалежними експериментальними методами, то обчислення похибок функції дає можливість вибрати найкращий метод дослідження.

Завдання 3.6 – Вивести формулу для обчислення відносної похибки експериментального визначення коефіцієнта теплопередачі з рівняння

$$K = \frac{Q}{F \cdot (t_1 - t_2)}. \tag{3.29}$$

Розв’зання. Логарифм функції (3.29) має вигляд

$$\ln K = \ln Q - \ln F - \ln(t_1 - t_2),$$

а повний диференціал

$$d(\ln K) = \frac{dK}{K} = \frac{dQ}{Q} + \frac{dF}{F} + \frac{d(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2}.$$

Тоді відносна похибка вимірювань коефіцієнта теплопередачі визначається формулою

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{t_1 - t_2}, \tag{3.30}$$

де Δ - абсолютні похибки вимірювань окремих величин;
F – площа поверхні теплообміну;
t_1, t_2 – температура гріючої і «холодної» речовини, відповідно;
Q – тепловий потік.

При проведенні теплотехнічних досліджень величину теплового потоку можна визначити різними методами. Якщо тепловий потік обчислюють з рівняння теплового балансу

$$Q = G_1 \cdot C_1 \cdot (t_1^{'} - t_1^{''}), \tag{3.31}$$

величину відносної похибки $\frac{\Delta Q}{Q}$ встановлюють похибками визначення витрати гріючої речовини G_1, початкової і кінцевої температури речовини $t_1^{'}, t_2^{''}$, питомої теплоємкості речовини C. Розрахункова формула для обчислення відносної похибки, при користуванні формулою (3.31) має вигляд

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta G_1}{G_1} + \frac{\Delta C_1}{C_1} + \frac{\Delta t_1^{'} + \Delta t_1^{''}}{t_1^{'} - t_1^{''}} \tag{3.32}$$

Формула отримана за наведеним раніше правилом.

З урахуванням (3.32) формула для обчислення відносної похибки коефіцієнта теплопередачі остаточно має вигляд

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta G_1}{G_1} + \frac{\Delta C_1}{C_1} + \frac{\Delta t_1^{'} + \Delta t_1^{''}}{t_1^{'} - t_1^{''}} + \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{t_1 - t_2} \tag{3.33}$$

У додатку А наведені розрахункові рівняння для деяких величин і відповідні формули для визначення максимальної відносної похибки.

Завдання 3.7. Користуючись формулою (3.33) обчислити максимальну відносну похибку, якщо для вимірювання температури гріючої речовини використані прилади з шкалою 100 ^0C і класу точності 0,5, абсолютна похибка витратоміра становить 1,5%. Відносні похибки площі поверхні і теплоємкості прийняти відповідно 0,02 та 0. Температура гріючої речовини змінюється в експерименті від $t_1^{'} = 120\ ^0C$ до $t_1^{''} = 80\ ^0C$, «холодної» - від 5 ^0C до 55 ^0C.

Розв'язання.

1. Середня температура гріючої речовини

$$t_1 = 0{,}5\left(t_1^{'} + t_1^{''}\right) = 0{,}5(120 + 80) = 100\ ^0C$$

2. Середня температура «холодної» речовини

$$t_2 = 0{,}5\left(t_2^{'} + t_2^{''}\right) = 0{,}5(5 + 55) = 30\ ^0C$$

3. Відносна похибка вимірювання температури гріючої речовини

$$\Delta t_1^{'} = \Delta t_1^{''} = \Delta t_1 = 0{,}5\ ^0C$$

4. Максимальна відносна похибка

$$\frac{\Delta K}{K} = 0{,}015 + 0 + \frac{0{,}5 + 0{,}5}{120 - 80} + 0{,}02 + \frac{0{,}5 + 1{,}0}{100 - 30} = 0{,}081$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 3.8. Вивести формулу для обчислення похибки визначення питомої теплоємкості речовини з рівняння $C = \dfrac{Q}{G \cdot \left(t_1^{''} - t_1\right)}$ при умові, що тепловий потік забезпечується електричним нагрівом і обчислюється за формулою $Q = Y \cdot U, Bm$.

Завдання 3.9. Обчислити максимальну відносну похибку визначення питомої теплоємкості за попереднім завданням, якщо сила струму вимірюється амперметром класу точності 0,5 і шкалою 10А, напруга електричного току – вольтметром класу точності 0,5 і шкалою 250В. Припустиму похибку витратоміра прийняти за табл. 3.12. Абсолютну похибку вимірювання температур прийняти рівною половині ціни поділки шкали термометра (табл.3.13). У табл. 3.13 наведені також дані про розмір шкали (максимально можливе значення вимірюваної температури).

Таблиця 3.11 – Припустима похибка витратоміра ($\Delta G/G$)

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta G/G$	0,01	0,011	0,012	0,013	0,014	0,015	0,02	0,021	0,022	0,025

Таблиця 3.12 – Температура речовини в дослідній установці

Варіант / Температура	1	2	3	4	5	6	7
На вході $t_1^{'}$ ^0C	15	17	20	23	25	30	35
На виході $t_1^{''}$ ^0C	18	21	25	30	32	35	40
Варіант / Температура	8	9	10	11	12	13	14
На вході $t_1^{'}$ ^0C	37	40	42	44	46	48	50
На виході $t_1^{''}$ ^0C	45	45	47	49	50	55	57

Таблиця 3.13 - Характеристики термометрів

Варіант / характеристики	1	2	3	4	5	6	7	8
- для вимірювання $t_1^{'}$								
- розмір шкали ^0C	20	20	30	30	40	40	50	50
- ціна поділу шкали ^0C	0,5	1,0	0,5	1,0	0,5	1,0	1,0	2,0
- для вимірювання $t_1^{''}$								
- розмір шкали ^0C	30	30	50	50	80	80	100	100
- ціна поділу шкали ^0C	0,5	1,0	1,0	2,0	1,0	2,0	2,0	5,0

ДОДАТКИ

Додаток А

Визначення максимально відносної похибки

Розрахункове рівняння	Формула для максимально відносної похибки	Номер формули
Об’ємна витрата речовини $V=W\cdot F$, м³/с, де W- швидкість F – площа перерізу каналу	$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta W}{W}+\frac{\Delta F}{F}$	(Д.1)
Масова витрата $G=\rho\cdot W\cdot F$, кг/с, де p – питома вага	$\frac{\Delta G}{G}=\frac{\Delta\rho}{\rho}+\frac{\Delta W}{W}+\frac{\Delta F}{F}$	(Д.2)
Коефіцієнт теплопроводності $\lambda=\frac{Q\cdot\delta}{(t_1-t_2)\cdot F}$, Вт/м$\cdot{}^0C$, де Q – тепловий потік δ – товщина стінки t_1, t_2 – температура поверхонь стінки F – площа поверхні	$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{\Delta Q}{Q}+\frac{\Delta\delta}{\delta}+\frac{\Delta t_1+\Delta t_2}{t_1-t_2}+\frac{\Delta F}{F}$	(Д.3)
Втрати тиску на поверхні трубопроводу через тертя $\Delta P=\lambda_T\frac{l}{d}\cdot\frac{\rho W^2}{2}$, де λ_T - коефіцієнт гідравлічного тертя l - довжина d - діаметр ділянки	$\frac{\Delta P}{P}=\frac{\Delta\lambda_T}{\lambda_T}+\frac{\Delta l}{l}+\frac{\Delta\rho}{\rho}+2\frac{\Delta W}{W}+\frac{\Delta d}{d}$	(Д.4)
Тепловий потік при електричному нагріванні $Q=I\cdot U$, Вт, де I - сила електричного струму U - напруга струму	$\frac{\Delta Q}{Q}=\frac{\Delta I}{I}+\frac{\Delta U}{U}$	(Д.5)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. - Л.: Наука, 1974. – 108 с.

2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1965. – 400 с.

3. Осипова В.Д. Экспериментальное исследование процессов теплообмена. - М.: Энергия, 1979. – 320 с.

4. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. - М.: Физматгиз, 1962. – 352 с.

5. Геращенко О.А., Гордов А.Н. и др. Температурные измерения. – К.: Наукова думка, 1989. – 704 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки до самостійного вивчення дисципліни **«Наукові дослідження»** (для студентів 5 курсу денної форми навчання спеціальності 7.092103 (7.06010103) «Міське будівництво і господарство», спеціалізації «Технічне обслуговування, ремонт і реконструкція будівель» та слухачів другої вищої освіти).

Укладачі: Алексахін Олександр Олексійович,
Деркач Ірина Леонідівна

Відповідальний за випуск: В.І. Абєлєшов

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2008, поз. 232 М

Підп. до друку 22.05.2008 Формат 60x84/16

Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 2,1

Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 731 від 19.12.2001