МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРТ-
ВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для практичних занять, контрольних робіт і самостійної роботи з розділу “ДИНАМІКА” курсу теоретичної механіки

(для студентів спеціальностей 6.092100 – „Промислове і цивільне будівництво”, 6.092103 – „Міське будівництво та господарство”, 6.092108 – „Теплогазопостачання та вентиляція”, 6.092600 – „Водопостачання та водовідведення”, 6.092201 – „Електричні системи і комплекси транспортних засобів”, 6.092202 – „Електричний транспорт”, 6.092203 – „Електромеханічні системи автоматизації та електропривод”**)**

ХАРКІВ - ХНАМГ – 2008

Методичні вказівки для практичних занять, контрольних робіт і самостійної роботи з розділу “ Динаміка” курсу теоретичної механіки (для студентів спеціальностей 6.092100 – „Промислове і цивільне будівництво”, 6.092103 – „Міське будівництво та господарство”, 6.092108 – „Теплогазопостачання та вентиляція”, 6.092600 –„Водопостачання та водовідведення”, 6.092201 – „Електричні системи і комплекси транспортних засобів”, 6.092202 – „Електричний транспорт”, 6.092203 – „Електромеханічні системи автоматизації та електропривод”). Укл.: Шпачук В.П., Золотов М.С., Рубаненко О.І., Гарбуз А.О. - Харків, 2008. - 79 с.

Укладачі: Шпачук В.П.,

Золотов М.С.,

Рубаненко О.І.,

Гарбуз А.О.

Рецензент: В.О. Пушня

Рекомендовано до друку рішенням засідання кафедри теоретичної і будівельної механіки від 11.06.2008 р. протокол № 15

Методичні вказівки мають на меті підвищити ефективність роботи студентів при спілкуванні з викладачем, так і в позаудиторний час.

Матеріали методичних вказівок використовуються також викладачами кафедри при проведенні самостійних, контрольних робіт, тестового контролю, захисту змістових модулів, при прийомі розрахунково-графічних робіт, заліків і комплектуванні задач в екзаменаційних білетах.

Методичні вказівки містять тридцять варіантів задач по трьом темам розділу «Динаміка»: «Динаміка матеріальної точки при прямолінійному русі» (містить у собі теми "Диференціальні рівняння руху матеріальної точки і їх інтегрування», «Загальні теореми динаміки точки» і «Прямолінійні коливання матеріальної точки») і «Дослідження руху механічної системи з одним ступенем волі» (містить у собі теми «Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи», «Загальне рівняння динаміки» і «Рівняння Лагранжа другого роду»). Для кожної теми розібраний приклад розв’язання задачі.

При самостійному освоєнні теми студентам рекомендується закріпити знання теоретичного матеріалу, розібрати задачу і розв’язати ще кілька задач із запропонованих тридцяти варіантів (останні п'ять варіантів містять задачі підвищеної труднощі).

Використання методичних вказівок допоможе освоїти методи теоретичної механіки - однієї з основних фундаментальних дисциплін в ступені бакалавра й спеціаліста будь-якої спеціальності.

1. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПРИ ПРЯМОЛІНІЙНОМУ РУСІ

Для дослідження прямолінійного руху матеріальної точки при дії на неї постійних сил можна скористатися або основним законом динаміки точки (другим законом Ньютона), або загальними теоремами динаміки точки.

1.1. Основний закон динаміки точки має вигляд

$$m\bar{a} = \sum_k \bar{F}_k \,, \tag{1.1}$$

де m - маса точки; $\bar{a}$ - вектор прискорення точки; $\bar{F}_k$ - вектор k-*й* сили, прикладеної до точки. При дослідженні прямолінійного руху точки у випадку, коли діючі сили розташовані в одній площині, векторне рівняння (1.1) потрібно спроектувати на осі декартової системи координат xOy:

$$m\ddot{x} = \sum_k F_{kx} \,; \tag{1.2}$$

$$m\ddot{y} = \sum_k F_{ky} \,,$$

де $\ddot{x}, \ddot{y}$ - проекції прискорення точки; F_{kx}, F_{ky} - проекції k-*й* сили на осі X і $У$ відповідно.

Якщо одну з осей, наприклад Ox, сумістити з прямою, по якій рухається точка, то її прискорення також буде спрямовано за цією прямою. Отже, проекція прискорення точки на вісь Oy $a_y = \ddot{y} = 0$ і рівняння (1.2) будуть мати вигляд:

$$m\ddot{x} = \sum_k F_{kx} \,; \tag{1.3}$$

$$0 = \sum_k F_{ky} \,.$$

Друге з рівнянь (1.3) є алгебраїчним і використовується для визначення нормальної складової реакції поверхні $\bar{N}$ у випадку, коли за умо-

вами задачі на точку діє сила тертя ковзання, обумовлена законом Кулона:

$$F_{тр} = f \cdot N, \tag{1.4}$$

де f - коефіцієнт тертя ковзання.

Перше з рівнянь (1.3) являє собою диференціальне рівняння 2-го порядку. Для визначення рівняння руху точки $x(t)$ його потрібно проінтегрувати. При інтегруванні з'являються дві постійні інтегрування C_1 і C_2, що визначаються за допомогою початкових умов: значень координати точки і її похідної (проекції швидкості) у деякий фіксований момент часу t_0 (звичайно при $t_0 = 0$):

$$x\big|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}\big|_{t=0} = V_{0x}, \tag{1.5}$$

де x_0, V_{0x} – початкове положення і початкова швидкість точки.

На підставі отриманого закону руху точки ведеться подальше розв’язання задачі в залежності від її постановки.

При визначенні характеристик руху точки на деякій ділянці AB розв’язання задачі рекомендується проводити відповідно до наступної методики.

1. Накреслити ділянку руху AB і зобразити матеріальну точку в вільному положенні (між точками A и B).

2. Вибрати систему координат, записати початкові умови (1.5) і умови в кінцевій точці B ділянки:

$$x\big|_{t=\tau} = x_B; \quad \dot{x}\big|_{t=\tau} = V_{Bx}, \tag{1.6}$$

де τ - час руху матеріальної точки на ділянці AB; x_B - координата точки B у обраній системі координат; V_{Bx} - проекція швидкості матеріальної точки на вісь Ox у кінцевій точці ділянки.

Систему координат зручно вибрати так, щоб початок координат збігався з початковою точкою ділянки A (при цьому буде $x_A = 0$), а вісь x була спрямована вздовж прямої AB у бік руху матеріальної точки.

3. Показати задані сили і реакції в'язей, а також визначити їх величини.

4. Скласти диференціальне й алгебраїчне рівняння руху (1.3).

5. Перетворити диференціальне рівняння до виду, зручному для інтегрування.

6. Проінтегрувати диференціальне рівняння руху точки.

7. За допомогою початкових умов (1.5) визначити постійні інтегрування C_1, C_2 і записати рівняння руху точки $x(t)$ і вираз для проекції швидкості $\dot{x}(t) = V_x(t)$.

8. Підставити умови (1.6) у вирази $x(t)$, $V_x(t)$.

9. З отриманої системи двох алгебраїчних рівнянь визначати дві шукані величини.

ПРИКЛАД 1.1. Важка точка *M* піднімається по шорсткій похилій площині, що складає кут $\alpha = 30^0$ з горизонтом. У початковий момент швидкість точки дорівнювала 15 м/с. Коефіцієнт тертя ковзання f = 0,1. Який шлях пройде точка до зупинки? За який час точка пройде цей шлях?

Розв'язання.

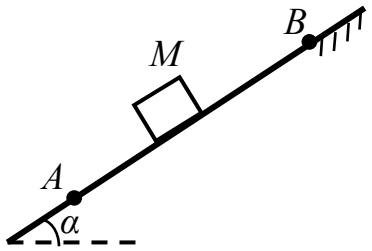


Рис. 1.1.

1. Намалюємо ділянку руху *AB* і зобразимо матеріальну точку *M* в довільному положенні (рис. 1.1).

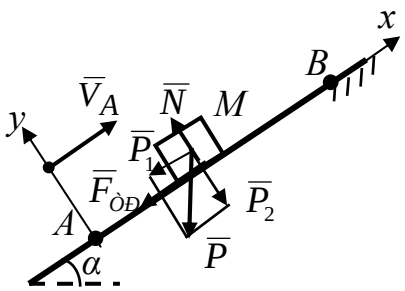


Рис. 1.2.

2. Виберемо систему координат *Axy*, помістивши її початок у початковій точці *A* ділянки *AB* і спрямував вісь *Ax* уздовж прямої *AB* убік руху (рис. 1.2). При такому виборі системи координат початкові умови (1.5) будуть наступними:

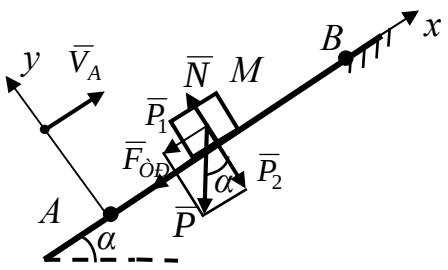
$$x_0 = 0, \qquad V_{0x} = V_{Ax} = V_A.$$

В кінцевій точці B ділянки (1.6):

$$x_B = AB, \qquad V_{Bx} = V_B = 0,$$

де $V_B = 0$, тому що точка M за умовою задачі зупиняється в кінцевій точці B ділянки.

Покажемо швидкість $\overline{V}_A$ на схемі руху. Швидкість $V_B = 0$, тому на схемі руху її не показано.

 Рис. 1.3	3. Покажемо сили і реакції в'язей (рис. 1.3). На точку M будуть діяти: сила ваги $\overline{P}$, яку розкладемо на координатні складові $\overline{P}_1$ ($P_1 = P \cdot sin\alpha$) і $\overline{P}_2$ ($P_1 = P \cdot cos\alpha$), нормальна реакція поверхні $\overline{N}$; сила тертя ковзання $\overline{F}_{TP}$ ($F_{TP} = fN$) спрямована убік, протилежний руху точки.

4. Складемо рівняння (1.3):

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -P_1 - F_{TP}; \\ 0 = N - P_2 \Rightarrow N = P_2 = P\cos\alpha. \end{cases} \tag{1.7}$$

5. Спочатку виразимо силу ваги $P = mg$ через масу точки m і прискорення вільного падіння g, а силу тертя визначимо, скориставшись другим рівнянням системи (1.7):

$$F_{TP} = fN = fP\cos\alpha = fmg\cos\alpha.$$

Тоді перше рівняння (1.7) набуде вигляду

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha = -mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)$$

Скоротимо обидві частини рівняння на m:

$$\ddot{x} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

6. Для інтегрування отриманого диференціального рівняння замінимо $\ddot{x}$ на $\frac{d\dot{x}}{dt}$ і розділимо змінні:

$$d\dot{x} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot dt.$$

Візьмемо невизначені інтеграли від обох частин рівняння:

$$\int d\dot{x} = \int -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot dt.$$

Вираз $-g(\sin\alpha + f\cos\alpha) = const$, тому його можна винести з-під знака інтеграла. У результаті одержимо

$$\dot{x} = V_x = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t + C_1, \tag{1.8}$$

де C_1 - постійна інтегрування.

Представивши $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ і зробивши аналогічні дії, одержимо

$$x = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \tag{1.9}$$

де C_2 - постійна інтегрування.

7. Підставимо початкові умови ($V_{ox} = V_A$, $x_0 = 0$) у вирази (1.8) і (1.9):

$$\begin{cases} V_A = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot 0 + C_1 \\ 0 = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot\dfrac{0}{2} + C_1\cdot 0 + C_2. \end{cases} \tag{1.10}$$

Розв’язавши рівняння (1.10), визначимо постійні інтегрування:

$$C_1 = V_A; \tag{1.11}$$

$$C_2 = 0.$$

Підставивши (1.11) у (1.8) і (1.9), одержимо:

$$\dot{x} = V_x = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot t + V_A; \tag{1.12}$$

$$x = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot\frac{t^2}{2} + V_A t.$$

8. Підставимо далі умови в кінцевій точці B ділянки ($V_B = 0$, $x_B = AB$) у вираз (1.12):

$$\begin{cases} 0 = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot\tau + V_A \\ AB = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot\dfrac{\tau^2}{2} + V_A\tau. \end{cases} \tag{1.13}$$

9. Розв’язавши систему алгебраїчних рівнянь (1.13), визначимо шу-

кані величини τ й AB.

З першого рівняння (1.13)

$$\tau = \frac{V_A}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = \frac{15}{10\cdot(0{,}5 + 0{,}1\cdot 0{,}87)} = \frac{15}{5{,}87} = 2{,}5 \text{ (с)}.$$

З другого рівняння (1.13):

$$AB = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot\frac{\tau^2}{2} + V_A\tau = -5{,}87\cdot\frac{15^2}{2\cdot 5{,}87^2} + 15\cdot\frac{15}{5{,}87} =$$

$$= \frac{15^2}{5{,}87}\cdot\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{15^2}{5{,}87\cdot 2} = \frac{225}{11{,}74} = 20 \text{ (м)}.$$

ВІДПОВІДЬ: Точка до зупинки пройде шлях AB = 20 м за час $\tau = 2{,}5$ с.

1.2. Загальні теореми динаміки точки

Із загальних теорем динаміки точки для дослідження прямолінійного руху можна використовувати теореми про зміну кількості руху і зміну кінетичної енергії, записані в інтегральній формі:

$$m\overline{V}_1 - m\overline{V}_0 = \sum_k \overline{S}_k\,; \tag{1.14}$$

$$m\frac{V_1^2}{2} - m\frac{V_0^2}{2} = \sum_k A_k\,, \tag{1.15}$$

де $\overline{V}_0, \overline{V}_1$ - вектори швидкості в початковому і кінцевому положеннях; $\overline{S}_k$ - імпульс $k-$й сили; A_k - робота $k-$й сили.

Імпульсом сили $\overline{F}$ за проміжок часу $[\,0, \tau\,]$ називається векторна величина

$$\overline{S} = \int_0^{\tau} \overline{F}dt\,. \tag{1.16}$$

Якщо сила постійна за величиною і напрямком, то формула (1.16) спрощується:

$$\bar{S} = \int_0^{\tau} \bar{F} dt = \bar{F} \int_0^{\tau} dt = \bar{F}\tau . \qquad (1.17)$$

Робота сили на переміщенні точки її прикладання з одного положення M_0 в інше M_1 , якщо сила постійна, а точка її прикладання переміщується прямолінійно, визначається по формулі:

$$A = \bar{F} \cdot \bar{r} = Fr \cos\gamma , \qquad (1.18)$$

де $r = M_0 M_1$ - переміщення точки; γ - кут між вектором сили $\bar{F}$ і напрямком переміщення $\bar{r}$ (рис. 1.4).

Враховуючи, що $F_r = F \cdot \cos\gamma$ є проекція сили на напрямок переміщення (рис. 1.5), роботу сили можна визначити таким способом:

$$A = F_r \cdot M_0 M_1 . \qquad (1.19)$$

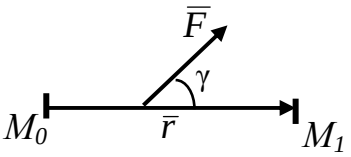


Рис. 1.4

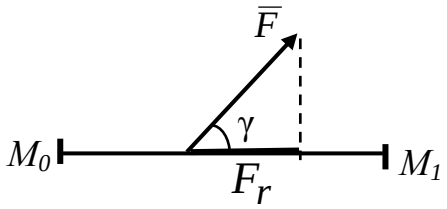


Рис. 1.5

При розв'язанні задач векторне рівняння (1.14) потрібно проектувати на осі декартовой системи координат Оху:

$$mV_1 - mV_{0x} = \sum_k S_{kx} ; \qquad (1.20)$$

$$mV_1 - mV_{0y} = \sum_k S_{ky} , \qquad (1.21)$$

де S_{kx}, S_{ky} - проекції імпульсу *k-й* сили на осі *Ox, Oy* відповідно. Якщо сила постійна за величиною, то

$$S_{kx} = F_{kx}\tau . \qquad (1.22)$$

Методику розв'язання задач за допомогою загальних теорем динаміки розглянемо на наступному прикладі.

ПРИКЛАД 1.2. Умова задачі, схема руху точки і шукані величини співпадають з прикладом 1.1.

Розв'язання.

Пункти 1, 2, 3 методик розв'язання задач в прикладах 1.1 і 1.2 співпадають. Тобто відповідно до п.п. 1 ÷ 3 намалюємо ділянку руху *AB*, зобразимо матеріальну точку в довільному положенні, виберемо систему координат *Axy* (її початок помістимо в початкову точку *A* ділянки, а вісь *Ax* направимо уздовж прямої *AB* убік руху), покажемо сили і реакції в'язей, зобразимо вектори швидкості в точках *A* и *B*.

4. Складемо далі рівняння теорем про зміну кількості руху і зміну кінетичної енергії. При цьому врахуємо, що швидкості $V_{Ay} = V_{Bx} = V_{By} = 0$. При визначенні проекцій імпульсів і робіт сил будемо використовувати формули (1.22) і (1.19):

В результаті отримаємо:

з рівняння (1.21) –

$$m \cdot 0 - m \cdot V_A = (P_1 - F_{TP}) \cdot \tau = (-P \sin\alpha - F_{TP}) \cdot \tau; \quad (1.23)$$

з рівняння (1.22) –

$$m \cdot 0 - m \cdot 0 = (N - P_2) \cdot \tau = (N - P\cos\alpha) \cdot \tau; \quad (1.24)$$

з рівняння (1.15) –

$$m \cdot \frac{0}{2} - m\frac{V_A^2}{2} = (-P_1 - F_{TP}) \cdot AB = (-P \sin\alpha - F_{TP}) \cdot AB. \quad (1.25)$$

5. Розв'яжемо отриману систему алгебраїчних рівнянь. З (1.24) одержимо $N = P \cdot \cos\alpha$.

Тоді $F_{тр} = fN = fP\cos\alpha = fmg\cos\alpha$ (1.26)

і вираз (1.23) можна записати у виді:

$$-m \cdot V_A = -mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) \cdot \tau,$$

відкіля

$$\tau = \frac{V_A}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = \frac{15}{10\cdot(0{,}5 + 0{,}1\cdot 0{,}87)} = \frac{15}{5{,}87} = 2{,}5 \text{ (с)}.$$

Підставляючи вирази для сили тертя (1.26) у рівняння (1.25), одержимо:

$$-m\cdot\frac{V_A^2}{2} = -mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot AB,$$

остаточно

$$AB = \frac{V_A^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = \frac{15^2}{2\cdot 5{,}87} = \frac{225}{11{,}74} = 20 \text{ (м)}.$$

ВІДПОВІДЬ: Точка до зупинки пройде шлях AB = 20 м за час $\tau = 2{,}5$ с.

Варіанти задач до теми 1:

1. Тіло вагою P = 50 Н рухається нагору по похилій площині AB під дією постійної сили тяги F. Початкова швидкість тіла в точці A - $V_A = 0$. У точці B тіло має швидкість V_B = 6 м/с. Кут нахилу площини $\alpha = 30^0$ довжина пройденого шляху AB = 40 м. Визначити час руху на ділянці AB і величину сили тяги F.

2. Автомобіль рухається по горизонтальній прямолінійній ділянці шляху. При гальмуванні розвивається постійна сила опору, рівна 0,2 ваги автомобіля. У момент початку гальмування швидкість автомобіля дорівнює 54 км/годину. Знайти час гальмування і гальмовий шлях.

3. Коефіцієнт тертя лиж об сніг при русі лижника по схилу гори вниз f = 0,1. Кут схилу 60^0, а його довжина 100 м. Визначити час спуску і швидкість лижника наприкінці схилу, якщо на початку спуска вона дорівнювала нулю. Опором повітря зневажити.

4. Точка M рухається нагору по похилій площині, що складає з горизонтом кут $\alpha = 30^0$, починаючи свій рух з положення A зі швидкістю V_A. У точці B її швидкість дорівнює V_B = 10 м/с. Визначити початкову швидкість точки M і величину пройденого шляху, якщо час переміщення τ = 2 сек, а коефіцієнт тертя f =0,1.

5. Снаряд вагою P = 360 Н вилетів з горизонтально розташованого дула гармати зі швидкістю 450 м/с. Довжина дула гармати дорівнює 2 м. Визначити значення сили тиску F_m газів на снаряд, вважаючи її постійною, при русі снаряда в дулі гармати. Скільки часу рухається снаряд у дулі гармати? У початковий момент снаряд знаходився в спокої. Силами опору руху зневажити.

6. Тіло рухається вниз по гладкій похилій площині, що утворює з горизонтом кут α = 60^0. Знайти час руху тіла і швидкість наприкінці ділянки шляху довжиною 12 м, якщо швидкість на початку ділянки дорівнювала 2 м/с.

7. Важка точка M піднімається по гладкій похилій площині, що складає кут α =30^0 з горизонтом, під дією постійної сили тяги F = 300 Н. У початковий момент швидкість точки дорівнювала 1 м/с. Визначити швидкість точки через 5 сек після початку руху, якщо вона пройшла за цей час шлях довжиною 50 м. Визначити також масу точки.

8. Дрезина рухається по горизонтальній прямолінійній ділянці дороги зі швидкістю 72 км/годину. У деякий момент двигун виключають. Вважаючи опір руху постійним і рівним 0,1 ваги дрезини, визначити час і шлях, пройдений дрезиною від моменту вимикання двигуна до її зупинки.

9. Хлопчик з'їжджає на санках з гірки під кутом 60^0 до горизонту без початкової швидкості. Визначити швидкість санок через 4 сек і шлях, пройдений за цей час, якщо коефіцієнт тертя санок об сніг при русі f = 0,05.

10. Тіло масою m піднімається по шорсткій похилій поверхні, коефіцієнт тертя якої f =0,1 із точки A в точку B за час τ =3 сек. Визначити довжину AB і початкову швидкість V_A, якщо V_B = 10 м/с і кут нахилу поверхні α = 30^0 .

11. Буєр (вітрильник) вагою P = 2000 Н рухається прямолінійно по горизонтальній поверхні льоду під дією сили тиску вітру F_m. Коефіцієнт тертя буєра об лід f = 0,1. У початковий момент часу він мав швидкість V_A. Визначити величину швидкості V_A, якщо за час τ = 3 сек буєр пройшов відстань AB = 45 м і мав у точці B швидкість V_B = 20 м/с. Визначити також величину сили тиску F_m, вважаючи її постійною. Опором повітря зневажити.

12. Тіло M спускається по шорсткій площині, нахиленій до горизонту під кутом $\alpha = 60^0$. Коефіцієнт тертя тіла об площину $f = 0{,}2$. Через скільки годин швидкість тіла збільшиться від $V_A = 2$ м/с до $V_B = 10$ м/с? Чому дорівнює пройдений шлях AB?

13. Лижник під'їжджає до нижньої точки A трампліна AB, нахиленого нагору стосовно горизонту під кутом $\alpha = 30^0$, зі швидкістю V_A. Який повинний бути коефіцієнт тертя лиж об сніг, якщо лижник, пройшовши за час $\tau = 1$ с шлях $AB = 10$ м, має в точці B швидкість $V_B = 18$ м/с? Чому дорівнює його швидкість у точці A?

14. Потяг вагою $P = 2 \cdot 10^6$ Н рухається по прямолінійній горизонтальній ділянці шляху і у момент початку гальмування має швидкість 90 км/годину. Визначити силу гальмування, вважаючи її постійною, якщо потяг зупинився, пройшовши шлях 300 м. Знайти час руху.

15. Важка точка M починає свій рух з положення A вниз по гладкій похилій площині, що складає кут $\alpha = 30^0$ з горизонтом без початкової швидкості під дією постійної сили тяги $F = 24$ Н. Через 15 сек точка здобуває швидкість $V_B = 12$ м/с. Визначити довжину ділянки AB і масу точки. Опором руху зневажити.

16. Тіло M внаслідок отриманого поштовху піднімається нагору по шорсткій похилій площині, що складає кут $\alpha = 60^0$ з горизонтом. Коефіцієнт тертя $f = 0{,}2$. За який час швидкість точки зменшиться від $V_A = 24$ м/с до $V_B = 12$м/с? Чому дорівнює пройдений шлях?

17. Тверде тіло вагою $P = 400$ Н починає рухатися зі стану спокою по шорсткій горизонтальній площині під дією постійної сили $F = 2000$ Н. Яку швидкість придбає тіло через $\tau = 5$ сек після початку руху, якщо коефіцієнт тертя $f = 0{,}1$? Чому дорівнює пройдений шлях?

18. Важка деталь сковзає вниз по гладкому лотку, маючи в початковий момент часу швидкість V_A. Під яким кутом до горизонтальної площини повинний розташовуватися лоток, щоб деталь за 2 сек, пройшовши шлях $AB = 12$ м, придбала швидкість $V_B = 11$ м/с? Чому повинна дорівнювати початкова швидкість V_A? Опором руху зневажити.

19. Потяг масою $m = 3\cdot10^5$ кг входить на підйом, кут нахилу якого до горизонту α = 0,05 рад (при малих кутах можна вважати $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha = 1$). Через τ =40 сек після входу потяга на підйом його швидкість падає від $V_A =$ 20 м/с до $V_B =$ 12 м/с. Визначити сумарну силу гальмування, вважаючи її постійною, а також шлях *AB*, пройдений потягом за цей час.

20. Який повинний бути коефіцієнт тертя *f* коліс загальмованого автомобіля об дорогу, якщо при швидкості їзди $V_A =$ 90 км/годину він зупиняється через τ = 9 сек після початку гальмування? Чому дорівнює пройдений шлях *AB*? Опором повітря зневажити.

21. Вагон під час маневрів рухається з гірки, нахиленої під кутом α =15^0 до горизонту ($\sin 15^0 \approx 0{,}26$). У верхній точці *A* він має швидкість V_A = 4 м/с. Сумарна сила опору руху складає 0,18 від ваги вагона. Визначити швидкість вагона в нижній точці *B* гірки, а також час руху τ на ділянці *AB*, якщо довжина *AB* = 30 м.

22. Мотоцикліст піднімається нагору по похилій поверхні *AB*, яка складає кут $\alpha = 30^0$ з горизонтом, під дією постійної сили тяги *F*. Маса мотоцикліста разом з мотоциклом $m =$ 300 кг. Визначити величину сили тяги *F*, а також початкову швидкість V_A, якщо мотоцикліст проїхав за $\tau =$ 5 сек відстань *AB* = 75 м і має в точці *B* швидкість $V_B =$ 10 м/с. Опором руху зневажити.

23. Літак рухається по злітній смузі зі стану спокою під дією постійної сили тяги $F = 8\cdot10^4$ Н. Маса літака 10^4 кг. Визначити довжину розбігу *AB*, якщо злітна швидкість літака $V_B =$ 360 км/ годину, а час розбігу τ = 20 с. Визначити також величину сумарної сили опору руху F_0, вважаючи її постійною.

24. У результаті отриманого поштовху цегла почала сковзати вниз з початковою швидкістю V_A = 4 м/с по нерухомій стрічці конвеєра, розташованої під кутом α = 30^0 до горизонту. Який повинний бути коефіцієнт тертя ковзання цегли об стрічку конвеєра, якщо відомо, що пройшовши шлях *AB* = 3,5 м, цегла має швидкість $V_B =$ 3 м/с? За який час τ цегла пройшла цей шлях?

25. Велосипедист, не обертаючи педалями, в'їжджає на підйом, що складає кут $\alpha = 15^0$ з горизонтом ($\sin 15^0 \approx 0{,}26$), маючи в початковий момент часу швидкість 10 м/с. Визначити швидкість велосипедиста через 2 сек і шлях, пройдений за цей час, якщо сила опору руху постійна і складає 0,1 ваги велосипедиста разом з велосипедом.

26. Тіло масою 10 кг, що рухалося по гладкій горизонтальній поверхні вправо, у деякій точці A має швидкість V_A = 5 м/с. З цього моменту на нього починає діяти постійна горизонтальна сила F = 20 Н, спрямована вліво. Визначити, через який проміжок часу τ тіло виявиться в іншій точці поверхні B, якщо відстань AB = 6 м. Визначити також швидкість V_B у цій точці. Опором руху зневажити. (Задача має три рішення).

27. Внаслідок отриманого поштовху тіло M починає сковзати вниз по похилій площині, що складає кут α = 30^0 з горизонтом. Рух тіла по похилій площині відбувається в рідині, при цьому підйомна сила Архімеда F_a складає 0,4 від ваги тіла, а сила опору руху F_0, постійна і складає 0,5 величини нормальної реакції N площини. Визначити початкову V_A і кінцеву V_B швидкості тіла, якщо ділянку AB = 5 м воно проходить за τ = 2,5 сек.

28. Вантаж масою m = 2 кг за допомогою троса піднімається вгору по негладкій похилій площині, розташованої під кутом α =30^0 до горизонту. Трос нахилений до площини, по якій рухається вантаж, під кутом β =45^0. Визначити силу натягу троса F_H, вважаючи її постійною, якщо в початковий момент швидкість вантажу V_A = 2 м/с, а через τ =5 с у деякій точці B дорівнювала V_B = 10,5 м/с. Визначити також величину переміщення вантажу AB. Коефіцієнт тертя вантажу об похилу площину f = 0,2.

29. Матеріальна точка вагою 30 Н рухалася по горизонтальній прямій вліво зі швидкістю 6 м/с. До неї приклали постійну горизонтальну силу F, спрямовану вправо. Дія сили припинилася через 6 сек, і тоді швидкість точки виявилася рівною 12 м/с і спрямованою вправо. Знайти величину сили F і шлях S, пройдений точкою за цей час. Опором руху зневажити.

30. Тіло масою m =1 кг рухалося вниз по похилій площині, що утворює кут α =45^0 з горизонтом. У деякій точці A, коли швидкість тіла дорівнювала V_A= 14 м/с, на нього почала діяти постійна сила F = 10 Н, розташована горизонтально і спрямована до площини. Чому повинний дорівнювати коефіцієнт тертя f, щоб тіло, пройшовши вниз по похилій площині відстань AB = 70 м, зупинилося. Визначити також час руху тіла на цій ділянці.

2. ПРЯМОЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Механічні рухи, які періодично повторюються, називаються механічними коливаннями. При цьому на матеріальну точку можуть діяти поновлюючі сили (сили, що намагаються повернути точку в положення рівноваги), сила опору руху, яка залежить від швидкості точки, та збуджуюча сила, задана функцією часу. Рух точки здійснюється по прямій, яка співпадає з сумісною лінією дії вказаних сил.

Залежно від комбінації цих сил розрізняють такі види коливального руху.

2.1. Вільні коливання

Вільні коливання, які відбуваються під дією тільки поновлюючої сили $\overline{F}_B(x)$, величина якої пропорційна відхиленню x матеріальної точки від положення її статичної рівноваги.

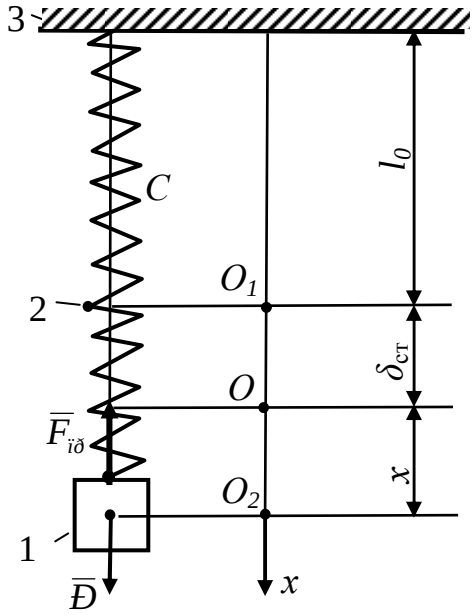


Рис. 2.1

Механічна схема, яка моделює вільні прямолінійні коливання вантажу (матеріальної точки) масою m у напрямку осі Ox показана на рис. 2.1, де 1 - вантаж; 2 - пружина; 3 - нерухома основа. Тут: l_0 - довжина недеформованої пружини; $\delta_{ст}$ - статична деформація пружини під дією вантажу; x - поточна координата вантажу відносно положення рівноваги при його русі; $\overline{P}$ - сила ваги ($P = m \cdot g$);

$\overline{F}_{пр}(x)$ - сила пружності пружини, яка є різновидністю поновлюючої сили ($F_{пр} = -c \cdot \Delta$, де $\Delta = \delta_{ст} + x$ - повна деформація пружини; c - коефіцієнт

жорсткості (пружності) пружини; точка O_1 - положення статичної рівноваги вантажу (початок відліку координати x); точка O_2 - поточне положення вантажу на осі Ox. Основне рівняння динаміки вантажу має вигляд:

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{пр} \tag{2.1}$$

або

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x), \tag{2.2}$$

де $\bar{a}, \ddot{x}$ - прискорення вантажу.

У положенні статичної рівноваги вантаж 1 нерухомий, координата $x = 0$, а сила ваги ($P = m \cdot g$) зрівноважується силою пружності пружини, яка дорівнює $c \cdot \delta_{ст}$.

Тому диференціальні рівняння приймають вигляд

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

або

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{2.3}$$

де $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ - кругова (циклічна, власна) частота коливань вантажу (матеріальної точки).

Закон коливань вантажу в цьому випадку буде

$$x = C_1 \cdot \cos\omega_0 t + C_2 \cdot \sin\omega_0 t = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{2.4}$$

а вираз для швидкості $\dot{x} = -C_1\omega_0 \, sin\,\omega_0 t + C_2\omega_0 \, cos\,\omega_0 t$, (2.5)

де $C_1 = x_0$, $C_2 = \dot{x}_0 / \omega_0$ - постійні інтегрування; $x_0, \dot{x}_0$ - початкові умови (початкове положення і початкова швидкість вантажу на момент розгляду руху, тобто при $t = 0$); $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}$, $\varphi = arctg\frac{C_1}{C_2} = arctg\frac{x_0 \cdot \omega_0}{\dot{x}_0}$ - амплітуда і початкова фаза коливань точки.

У відповідності з (2.4) вантаж (матеріальна точка) здійснює гармонічний коливальний рух. Розглянута на рисунку механічна система називається консервативною.

Пружини, які з’єднують вантаж з основою, можуть утворювати систему паралельно, послідовно і паралельно-послідовно (змішано)

з'єднаних пружних елементів. У цьому випадку подані на рисунках вихідні механічні схеми необхідно методом еквівалентних перетворень звести до розрахункової схеми з одним пружним елементом, який має еквівалентну жорсткість c. Еквівалентна пружина на розрахунковій схемі при паралельному з'єднанні пружних елементів буде мати жорсткість $c = c_1 + c_2$ (рис. 2.2), при послідовному з'єднанні $c = c_1 \cdot c_2 / (c_1 + c_2)$ (рис. 2.4), а при змішаному з'єднанні $c = (c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3)/(c_1 + c_2 + c_3)$ (рис. 2.3)

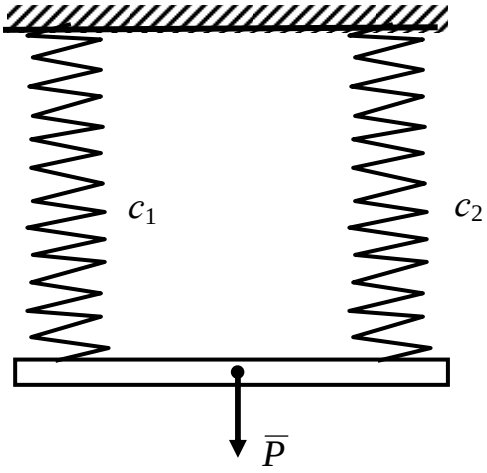


Рис. 2.2

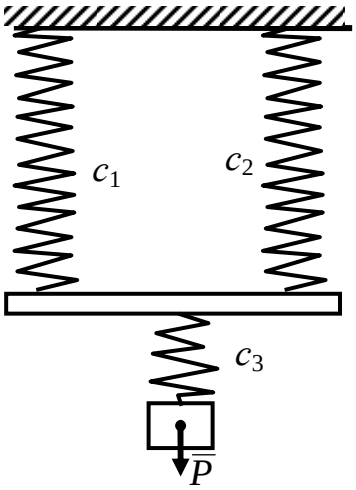


Рис. 2.3

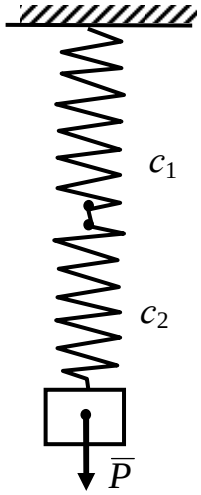


Рис. 2.4

2.2. Вільні коливання матеріальної точки при наявності сил опору

При русі в середовищі (рідина), а також при деформації реальних пружин на матеріальну точку діє сила опору, яку при малих швидкостях руху можна вважати прямо пропорційною швидкості точки: $\overline{R}_{(\overline{V})} = -b\overline{V}$, де b - коефіцієнт опору.

Механічна система, яка моделює в цьому випадку коливання вантажу наведена на рисунку. Умовні позначення на рисунках співпадають.

Диференціальне рівняння руху вантажу буде мати вигляд

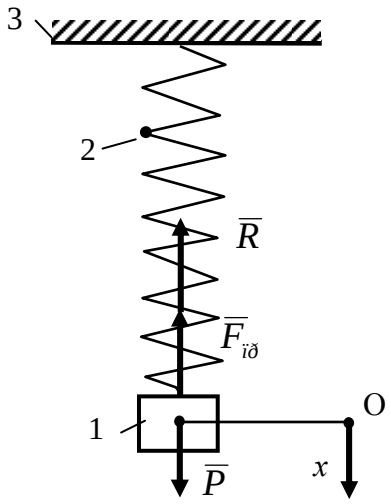


Рис. 2.5

$$m\overline{a} = \overline{P} + \overline{F}_{ïð} + \overline{R}$$

або $$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{\text{ст}} + x) - b\dot{x},$$

або $$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0,$$

або $$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ де } 2h = \frac{b}{m}. \qquad (2.6)$$

Характер руху вантажу істотним чином залежить від співвідношення h і ω_0. Закон коливання вантажу у випадку малого опору $(h < \omega_0)$ має вигляд

$$x = e^{-ht}\left(C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t\right) = A \cdot e^{-ht} \sin\left(\omega_0^* t + \varphi_0\right), \qquad (2.7)$$

$$\dot{x} = -he^{-ht}\left(C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t\right) + e^{-ht}\omega_0^*\left(-C_1 \sin \omega_0^* t + C_2 \cos \omega_0^* t\right), \qquad (2.8)$$

де $$\tilde{N}_1 = x_0; \quad C_2 = \left(\dot{x}_0 + hx_0\right)/\omega_0^*; \quad \grave{A} = \sqrt{x_0^2 + \frac{\left(\dot{x}_0 + hx_0\right)^2}{\omega_0^{*2}}},$$

$$\varphi = arctg\frac{x_0 \cdot \omega_0^*}{\dot{x}_0 + hx_0}; \quad \omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}; \quad \omega_0 = \sqrt{c/m}.$$

Відповідно рисунку механічна система називається дисипативною, а рух вантажу має затухаючий коливальний характер. При цьому амплітуда коливань Ae^{-ht} з часом спадає за експоненціальним законом до нуля.

При $h > \omega_0$ (випадок великого опору) закон коливань вантажу буде мати вигляд

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \qquad (2.9)$$

де $$p_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}; \qquad p_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2};$$

$$C_1 = \frac{p_2 x_0 - \dot{x}_0}{p_2 - p_1}; \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0 - p_1 x_0}{p_2 - p_1}.$$

Це рівняння описує аперіодично затухаючий рух. Координата x вантажу при $t \to 0$ монотонно зменшується, а вантаж наближається до положення статичної рівноваги.

Гранично аперіодичний рух (граничний випадок) має місце при $h = \omega_0$. Тут закон руху вантажу буде

$$x = e^{-ht}\left(C_1 + C_2 \cdot t\right), \tag{2.10}$$

де $C_1 = x_0$; $C_2 = \dot{x}_0 + h \cdot x_0$.

Розглянутий рух (7) також є аперіодичним затухаючим ($x \to 0$ при $t \to \infty$).

2.3. Вимушені коливання

У випадку, коли збуджуюча сила $Q = H \cdot \sin \omega_B t$ змінюється за гармонійним законом (де H - амплітуда збуджуючої сили; ω_B - частота вимушених коливань).

Силове збудження коливань

При силовому збудженні коливань збуджуюча сила $\overline{Q}$ прикладена безпосередньо до матеріальної точки (вантажу).

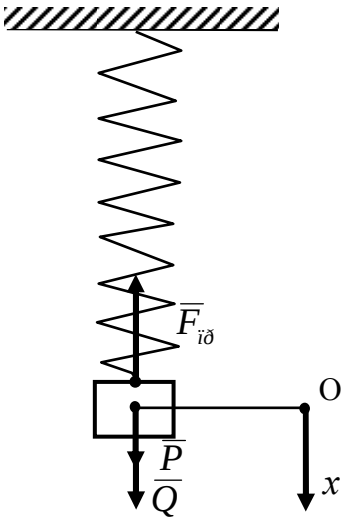


Рис. 2.6

Розглянемо випадок консервативної системи: $\overline{F}_{ïð} \neq 0$; $b = 0$; $\overline{R}(\overline{V}) = 0$ (рис. 2.6).

Диференціальне рівняння руху вантажу має вигляд

$$m\overline{a} = \overline{P} + \overline{F}_{пр} + \overline{Q}$$

або $$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x) + H \sin \omega_B t,$$

або $$m\ddot{x} + cx = H \sin \omega_B t,$$

або $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = h_B \sin \omega_B t, \tag{2.11}$$

де $h_B = \dfrac{H}{m}$.

Закон коливання вантажу:

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \sin \omega_B t, \qquad (2.12)$$

$$\dot{x} = C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t - \frac{h_B \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cos \omega_B t \qquad (2.13)$$

де $C_1 = x_0$; $C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0 \left(c - m\omega_B^2\right)}$; $\omega_0 = \sqrt{c/m}$.

Характер руху вантажу істотно залежить від співвідношення величин ω_0 (власної частоти консервативної системи) і ω_B (частоти збуджуючої сили).

Якщо $\omega_0 < \omega_B$ або $\omega_0 > \omega_B$, то закон коливань вантажу бігармонійний (двочастотний). Відбувається накладення вільних коливань консервативної механічної системи на її коливання з частотою збуджуючої сили. При цьому амплітуда і початкова фаза вільних коливань вантажу залежить одночасно і від початкових умов $x_0, \dot{x}_0$ вантажу, параметрів H, ω_B збуджуючої сили, і від механічних характеристик *m*, *c* самої системи.

У випадку близькості частоти збуджуючої сили до частоти власних коливань ($\omega_0 \approx \omega_B$), виникає явище биття, при якому закон коливань вантажу (2.11) перетворюється, наприклад, при нульових початкових умовах $(x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0)$ на вигляд

$$x = \frac{2H}{m\left(\omega_0^2 - \omega_B^2\right)} \cdot \sin\left(\frac{\omega_B - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \cos \omega_B t. \qquad (2.14)$$

Такий рух називається биттям: коливальних рух, який відбувається з частотою ω_B збуджуючої сили та амплітудою, яка являється періодичною (з частотою $(\omega_{\hat{A}} - \omega_0)/2$) функцією часу.

При співпаданні частоти збуджуючої сили з власною частотою ($\omega_B = \omega_0$) вантаж коливається за законом

$$x = x_0 \cdot \cos\omega_B t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_B} + \frac{H}{2\omega_B^2}\right) \cdot \sin\omega_B t - \frac{H}{2\omega_B} t \cdot \cos\omega_B t\,. \qquad (2.15)$$

З часом амплітуда вимушених коливань вантажу безмежно зростає. Таке явище називається резонансом. В реальних конструкціях явище резонансу може служити причиною їхнього руйнування.

Для дисипативної системи, коли $\overline{F}_{пр}(x) \neq 0$; $b \neq 0$; $\overline{R}(\overline{V}) \neq 0$ та $h < \omega_0$ (випадок малого опору) (рис. 2.8) диференціальне рівняння руху вантажу має вигляд.

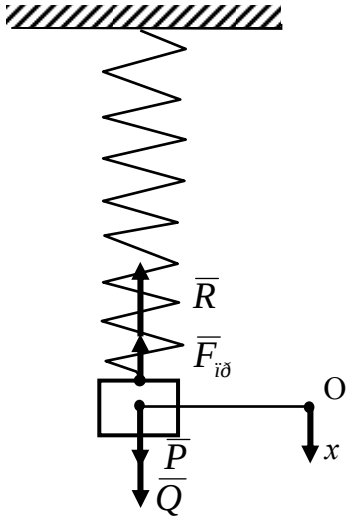


Рис. 2.7

$$m\overline{a} = \overline{P} + \overline{F}_{пр} + \overline{R} + \overline{Q}\,,$$

або $\quad m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x) - b\dot{x} + H_0 \sin\omega_B t\,,$

або $\quad m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = H_0 \sin\omega_B t\,,$

або $\quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \sin\omega_B t\,. \qquad (2.16)$

де $h = b/2m$ – коефіцієнт демпфування.

При заданих початкових умовах $x_0, \dot{x}_0$ вантаж здійснює коливання за законом

$$x = e^{-ht}\left(C_1 \cos\omega_0^* t + C_2 \sin\omega_0^* t\right) + \frac{H_0}{\sqrt{\left(c - m\omega_B^2\right) + b^2\omega_B^2}} \sin\left(\omega_B t + \varphi_0\right), \qquad (2.17)$$

де $\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$; $\varphi = arctg\,\dfrac{x_0 \cdot \omega_0^*}{\dot{x}_0 + hx_0}$;

$$\tilde{N}_1 = x_0 - \frac{H_0}{\sqrt{\left(c - m\omega_B^2\right) + b^2\omega_B^2}} \sin\varphi_0\,;$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{\dot{x}_0 + x_0 h}{\omega_0^*} - \frac{h \cdot \sin\varphi_0 + \omega_B \cdot \cos\varphi_0}{\omega_0^*} \frac{H}{\sqrt{\left(c - m\omega_B^2\right)^2 + b^2\omega_B^2}}\,.$$

Коливання вантажу є двочастотними: вони відбуваються одночасно як з частотою ω_0^* вільних коливань дисипативної системи, так і з частотою ω_B. Наявність множника у першому доданку призводить до швидкого затухання коливального руху вантажу з частотою ω_0^*. Проте вимушені

коливання з частотою збуджуючої сили відбуваються постійно, незалежно від часу, амплітудою $A_B = H / \left(\left(c - m\omega_B^2\right)^2 + b^2\omega_B^2\right)^{1/2}$ і зсувом фаз φ_0, величини яких визначаються конкретним значенням частоти ω_B. Якщо значення частоти збуджуючої сили дорівнює $\omega_B = \sqrt{\omega_0^2 - 2h^2}$, а параметри механічної системи задовольняють нерівності $0 < \zeta < 0{,}707$, де $\zeta = h / \omega_0$ - відносне демпфування, то амплітуда вимушених коливань вантажу буде найбільшою:

$$A_{b\max} = H \Big/ \left(2c \cdot \zeta \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}\right).$$

При $(\omega_B = \omega_0)$ в системі наступає явище резонансу. Однак, на відміну від консервативної системи, амплітуда змушених коливань вантажу в дисипативній системі необмежено не зростає, а приймає кінцеве значення, яке дорівнює

$$A_{bрез} = H / 2c \cdot \zeta .$$

2.4. Кінематичне збудження коливань

При кінематичному збудженні коливань вантажу заданий рух здійснює основа у точці *B* прикріплення до нього вільного кінця пружини за законом $\xi = A \cdot \sin \omega_B t$ (де A - амплітуда вимушених коливань) (рис. 2.8).

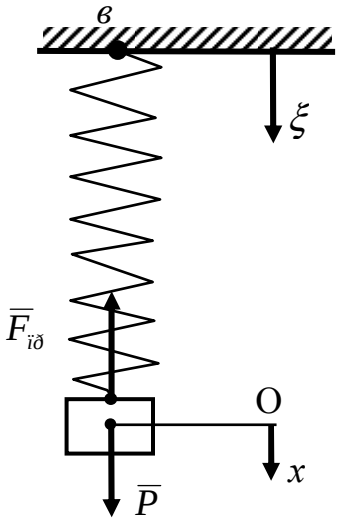


Рис.2.8

Для консервативної системи диференційне рівняння коливань вантажу буде:

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{їд}$$

або $m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x - \xi)$,

або $m\ddot{x} + cx = c \cdot A \cdot \sin \omega_B t$,

або $\ddot{x} + \omega_0^2 x = h_B \sin \omega_B t$, (2.18)

де $h_B = \dfrac{cA}{m}$.

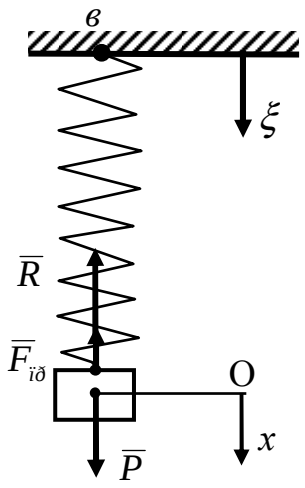


Рис. 2.9

Закон вимушених коливань вантажу має вигляд (2.12), або

$$x = x_0 \cdot \cos\omega_0 t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0} - \frac{cA\cdot\omega_B}{\omega_0\left(c - m\omega_B^2\right)}\right)\times \\ \times \sin\omega_0 t - \frac{cA}{c - m\omega_B^2}\sin\omega_B t \qquad (2.19)$$

Для дисипативної системи диференціальне рівняння коливального руху вантажу буде

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{їд} + \bar{R}$$

або $$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x - \xi) - b\dot{x}$$

або $$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = c\cdot H\cdot\sin\omega_B t\,,$$

або $$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = h_B\, sin\,\omega_B t\,. \qquad (2.20)$$

Вантаж буде здійснювати при заданих початкових умовах рух за законом

$$x = e^{-ht}\left(\left(x_0 - \frac{c\cdot A\cdot\sin\varphi_0}{\sqrt{\left(c - m\omega_B^2\right)^2 + b^2\omega_B^2}}\right)\cdot\cos\omega_0^* t + \right. \\ \left. + \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 h}{\omega_0^*} - \frac{h\cdot\sin\varphi_0 + \omega_B\cdot\cos\varphi_0}{\omega_0^*}\,\frac{cA}{\sqrt{\left(c - m\omega_B^2\right)^2 + b^2\omega_B^2}}\right)\right)\cdot\sin\omega_0^* t + \qquad (2.21) \\ + \frac{cA}{\sqrt{\left(c - m\omega_B^2\right)^2 + b^2\omega_B^2}}\cdot\sin\left(\omega_B t + \varphi_0\right),$$

де $\varphi_0 = -arctg\,\dfrac{b\omega_B}{c - m\omega_B^2}$ - початкова фаза.

2.5. Приклади розв'язання задач по дослідженню коливального руху матеріальної точки

ПРИКЛАД 2.1. Знайти рівняння коливального руху вантажу *D* по гладенькій похилій площині у напрямку осі *x*, що співпадає з віссю двох послідовно з'єднаних пружин (рис.2.10).

УМОВА ЗАДАЧІ. Система встановлених на пружинах вантажів D (m_D = 20кг) і E (m_E =10 кг) знаходиться в положенні статичної рівноваги.

У момент часу $t = 0$ вантаж E знімають з вантажу D. Одночасно вантажу D надають початкову швидкість $V_0 = \dot{x}_0 = 0{,}1$ м/с у напрямку позитивного відліку координати x. Коефіцієнти жорсткості пружин дорівнюють $c_1 = c_2 = 400$ Н/см. Кут $\alpha = 30^0$.

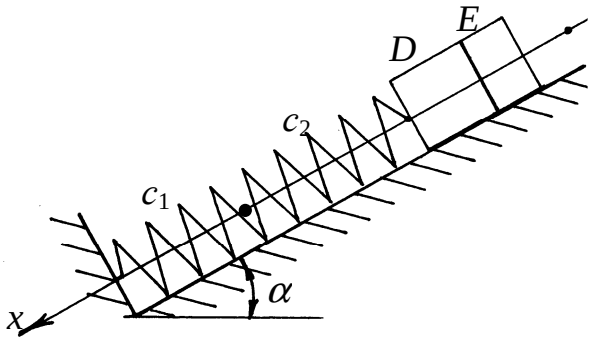


Рис. 2.10

Розв'язання.

Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рис. 2.11, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу D і його довільне положення під час коливань, точка A – положення вантажу D в момент початку коливань (положення рівноваги системи вантажів D і E) , δ_{cm_D} - статична деформація пружини під дією вантажу D, $\overline{P}_D, \overline{N}, \overline{F}_{np}$ - відповідно сила ваги вантажу, нормальна реакція поверхні та сила пружності пружини.

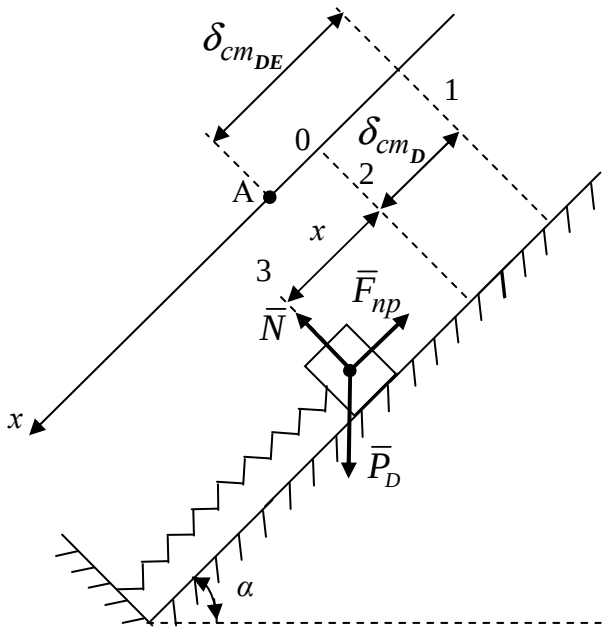


Рис. 2.11

В даній схемі в положенні статичної рівноваги вантажу D сила пружності $\overline{F}_{np}$ пружини зрівноважує не всю силу ваги вантажу $\overline{P}_D$, а тільки її складову $P_{Dx} = P_D \cdot \sin\alpha$ у напрямку осі Ox, яка співпадає з віссю пружини.

Знаходимо еквівалентну жорсткість c (див. рис.2.4):

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \frac{400 \cdot 400}{400 + 400} = 200 \text{ Н/см} = \ = 2 \cdot 10^4 \text{ Н/м}.$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m_D \ddot{x} = P_D - F_{пр} = P_D \cdot \sin\alpha - c(\delta_{cm_D} + x) =$$
$$= P_D \cdot \sin\alpha - c\delta_{cm_D} - cx = -cx,$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + cx = 0, \quad \text{або} \quad \ddot{x} + \frac{c}{m_D} x = 0,$$

позначимо $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m_D}$, тоді $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Отримане рівняння має форму (2.3) диференціального рівняння вільних коливань. Його розв'язок – функція $x(t)$ (2.4), і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вид (2.5)

$$x = C_1 \cdot \cos\omega_0 t + C_2 \cdot \sin\omega_0 t,$$
$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin\omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos\omega_0 t.$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови (точка А на рис.2.11):

$$x\big|_{t=0} = \delta_{cm_{DE}} - \delta_{cm_D} = \delta_{cm_E}, \quad \dot{x}\big|_{t=0} = V_0$$

і підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$

$$\begin{cases} \delta_{cm_E} = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки, з урахуванням значень $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, сталі інтегрування будуть

$$C_1 = \delta_{cm_E}, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_0}.$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = \delta_{cm_E} \cdot \cos\omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \cdot \sin\omega_0 t\,.$$

Підрахуємо значення сталих параметрів:

величина статичної деформації $\delta_{cm_E} = \dfrac{m_E g \cdot \sin\alpha}{c} \approx \dfrac{10 \cdot 10 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^4} = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м,

значення власної частоти $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m_D}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 10^4}{20}} = \sqrt{1000} \approx 31,6\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$,

$$\frac{V_0}{\omega_0} = \frac{0,1}{31,6} \approx 0,32 \cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 31,6\text{t} + 0,32 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 31,6\text{t}\,(\text{м}).$$

ПЕРЕВІРКА: При $t = 0$ одержимо $x\big|_{t=0} = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0.

ВІДПОВІДЬ: Вантаж здійснює вільні коливання за законом $x = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 31,6\text{t} + 0,32 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 31,6\text{t}$ (м), з коловою частотою 31,6 $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Графік залежності координати x від часу t приведений на рис.2.12. Був обчислений період вільних коливань за формулою $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, який дорівнює 0,2 с. Крок за часом був обраний у 0,02 с і на графіку наведено три періоди коливань.

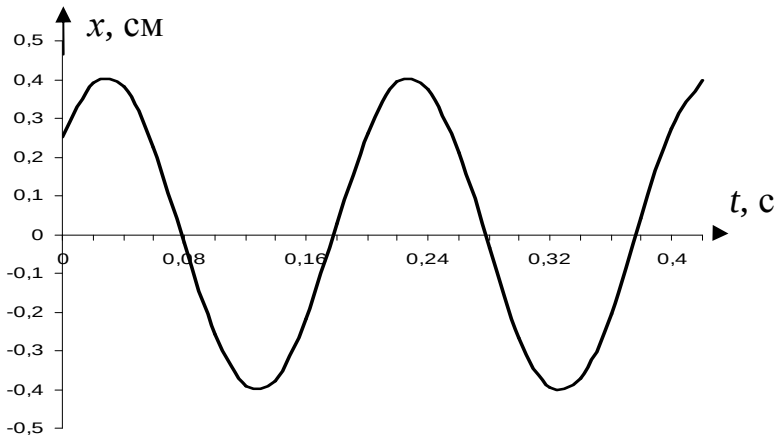


Рис. 2.12

ПРИКЛАД 2.2. Знайти рівняння коливального руху вантажу *D* (рис. 2.13), вважаючи його матеріальною точкою, у напрямку горизонтальної осі *x*. Брусок, який зв'язує пружину і демпфер, є невагомим. Рух бруска, який займає у стані спокою вертикальне положення, вважати поступальним.

УМОВА ЗАДАЧІ. Маса вантажу $m_D = 4$ кг. Коефіцієнти жорсткості двох пружин c_1 = 2 Н/см, c_2 = 3 Н/см, коефіцієнт опору демпфера $b = 16$ Н·с/м. Перед початком руху вантаж відхиляють на величину $\lambda = 3$ см у напрямку від'ємного відліку координати *x* у момент часу $t = 0$, надаючи вантажу початкову швидкість $V_0 = 0{,}6$ м/с, спрямовану вліво.

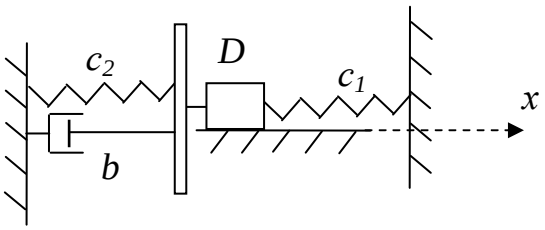


Рис. 2.13

Розв'язання.

Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рис.2.14, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу *D* (яке для горизонтальної пружини співпадає з рівнем 1; в цьому разі $\delta_{cm} = 0$) і його довільне положення під час коливань, точка *A* – положення вантажу *D* в момент початку коливань, $\overline{V}_0$ - вектор початкової швидкості, $\overline{P}, \overline{N}, \overline{F}_{пр}, \overline{R}$ - відповідно сила ваги вантажу, нормальна реакція поверхні, сила пружності пружини та сила опору.

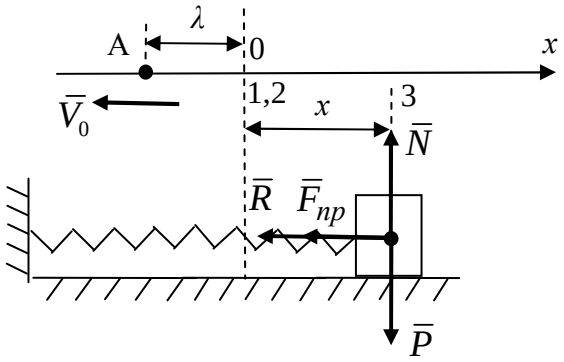


Рис. 2.14

Схема розташування вантажу поміж двома пружинами еквівалентна паралельному з'єднанню пружних елементів (див. рис.2.2).

Знаходимо еквівалентну жорсткість *c*:

$$c = c_1 + c_2 = 2 + 3 = 5 \text{ Н/см} = 5 \cdot 10^2 \text{ Н/м}.$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m_D \ddot{x} = -F_{пр} - R = -cx - b\dot{x},$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \quad \text{або} \quad \ddot{x} + \frac{b}{m_D}\dot{x} + \frac{c}{m_D}x = 0.$$

Позначимо $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m_D}$, $2h = \dfrac{b}{m}$, тоді $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Отримане рівняння має форму (2.6) диференціального рівняння вільних коливань при наявності опору. Підрахуємо значення власної частоти вільних коливань: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m_D}} = \sqrt{\dfrac{5 \cdot 10^2}{4}} = \sqrt{125} \approx 11,2 \ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$,

та коефіцієнта опору: $h = \dfrac{b}{2m} = \dfrac{16}{2 \cdot 4} = 2 \ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Зрівнюючи ці параметри, маємо $h < \omega_0$ - випадок малого опору. В цьому разі функція $x(t)$ і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вид (2.7), (2.8)

$$x = e^{-ht} \cdot \left(C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t\right),$$

$$\dot{x} = -h \cdot e^{-ht} \cdot (C_1 \cdot \cos \omega_0^* t + C_2 \cdot \sin \omega_0^* t) + e^{-ht} \cdot \omega_0^* \cdot (-C_1 \cdot \sin \omega_0^* t + C_2 \cdot \cos \omega_0^* t).$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови (точка А на рис.2.14):

$$x\big|_{t=0} = -\lambda, \quad \dot{x}\big|_{t=0} = -V_0$$

і підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$

$$\begin{cases} -\lambda = e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0), \\ -V_0 = -h \cdot e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0) + e^0 \cdot \omega_0^* \cdot (-C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0). \end{cases}$$

Звідки, з урахуванням значень $e^0 = 1$, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, сталі інтегрування будуть

$$C_1 = -\lambda, \quad C_2 = \frac{-V_0 - h\lambda}{\omega_0^*}.$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = -e^{-ht} \cdot \left(\lambda \cdot \cos \omega_0^* t + \frac{V_0 + h\lambda}{\omega_0^*} \cdot \sin \omega_0^* t \right).$$

Підрахуємо значення сталих параметрів:

значення власної частоти затухаючих коливань

$$\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} = \sqrt{125 - 4} = \sqrt{121} = 11 \ \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$\frac{V_0 + h\lambda}{\omega_0^*} = \frac{0,6 + 2 \cdot 0,03}{11} = \frac{0,66}{11} \approx 0,06 \ \text{м}.$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = -\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \cdot (0,03 \cdot \cos 11\mathrm{t} + 0,06 \cdot \sin 11\mathrm{t}) \ (\text{м}).$$

ПЕРЕВІРКА: При $t = 0$ одержимо $x\big|_{t=0} = -0,03$ м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0.

ВІДПОВІДЬ: Вантаж здійснює затухаючі коливання за законом $x = -\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}} \cdot (0,03 \cdot \cos 11\mathrm{t} + 0,06 \cdot \sin 11\mathrm{t})$ (м), з коловою частотою $11 \ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Графік залежності координати x від часу t приведений на рис.2.15. Був обчислений період затухаючих коливань $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0^*}$, який дорівнює 0,58 с. Крок за часом був обраний у 0,06 с і на графіку наведено три періоди коливань.

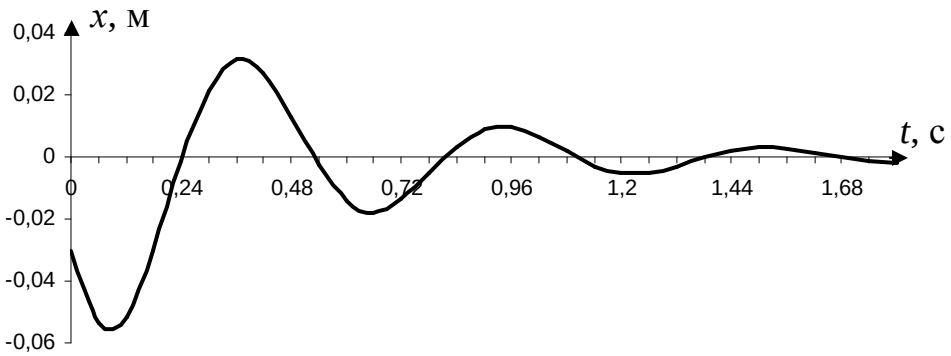


Рис. 2.15

ПРИКЛАД 2.3. Знайти рівняння коливального руху вантажу D у напрямку осі x з моменту дотику ним плити, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від плити не відділяється. Плита, яка займає в стані спокою горизонтальне положення, є невагомою. Рухи плити та основи вважати поступальними (рис.2.16).

УМОВИ ЗАДАЧІ. Пролетівши без початкової швидкості відстань $h = 0{,}2$м, вантаж D ($m_D = 20$ кг) з'єднується у момент часу $t = 0$ з плитою, яка зв'язує систему двох недеформованих паралельно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору c_1 = 100 Н/см, c_2 = 200 Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. Одночасно основа починає здійснювати рух за законом

$$\xi = a_\xi \cdot \sin \omega_B t = 0{,}5 \cdot \sin 30t \text{ (см).}$$

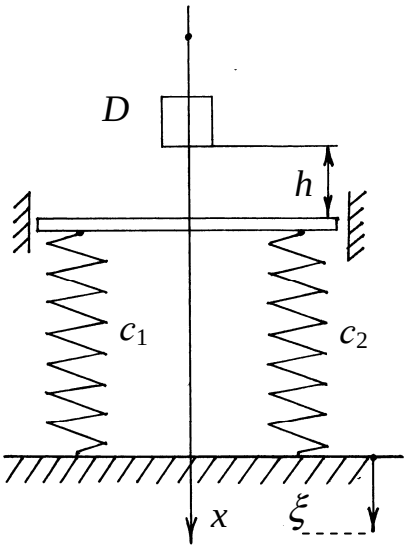


Рис. 2.16

Розв'язання.

Спочатку розглянемо допоміжну задачу про вільне падіння матеріальної точки (вантажу) з висоти $h = A_0A$ до моменту дотику з плитою.

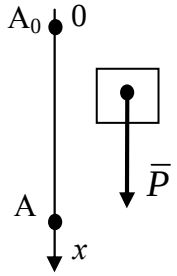


Рис.2.17

Розрахункова схема цієї задачі наведена на рис. 2.17. Диференціальне рівняння руху має вид: $m_D\ddot{x} = P$, або $m_D\ddot{x} = m_D g$, або $\ddot{x} = g$. Інтегруючи за часом обидві частини останнього рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} \dot{x} = gt + C_1, \\ x = gt^2/2 + C_1 t + C_2. \end{cases}$$

При нульових початкових умовах сталі інтегрування C_1, C_2 дорівнюють нулю.

Записуючи функції $\dot{x}, x$ у кінцевій точці А відрізку руху A_0A, матимемо систему алгебраїчних рівнянь

$\begin{cases} V_A = g\tau, \\ h = g\tau^2/2, \end{cases}$ звідки, виключаючи час руху на відрізку падіння τ, отримаємо розрахункову формулу для швидкості точки в момент дотику з плитою $V_A = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,2} = 2$ (м/с).

Розглянемо основну задачу про коливання матеріальної точки (вантажу). Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рис.2.18, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу і його довільне положення під час коливань, точка A – положення вантажу в момент дотику плити, $\delta_{ст}$ – статична деформація пружини під дією вантажу, $\bar{P}, \bar{F}_{пр}$ - відповідно сила ваги вантажу та сила пружності пружини, ξ - напрямок кінематичного збудження в точці кріплення пружини до рухомої опори.

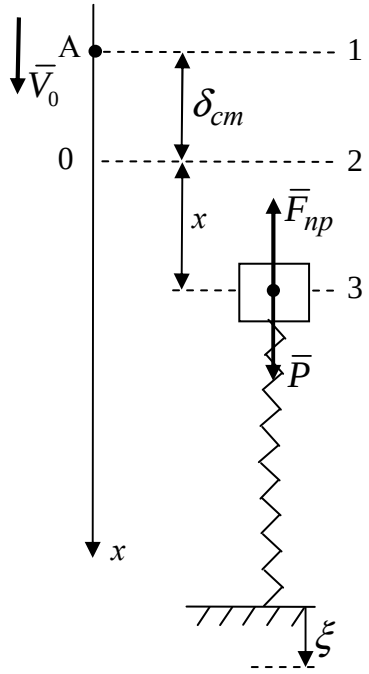


Рис. 2.18

Знаходимо еквівалентну жорсткість c (див. рис.2.2):

$$c = c_1 + c_2 = 100 + 200 = 300 \text{ Н/см} = 3 \cdot 10^4 \text{ Н/м}.$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m_D\ddot{x} = P - F_{пр} = P - c(\delta_{ст} + x - \xi) = P - c\delta_{ст} - cx + c\xi = -cx + ca_\xi \sin\omega_B t,$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D\ddot{x} + cx = ca_\xi \sin\omega_в t, \qquad \text{або} \qquad \ddot{x} + \frac{c}{m_D}x = \frac{ca_\xi}{m_D}\sin\omega_B t,$$

позначимо $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m_D}$, $h_B = \dfrac{c \cdot a_\xi}{m_D}$, тоді $\ddot{x} + \omega_0^2 x = h_B \sin\omega_B t$.

Отримане рівняння має форму (2.18) диференціального рівняння вимушених коливань. Його розв'язок – функція $x(t)$, і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вид (2.12), (2.13)

$$x = C_1 \cdot \cos\omega_0 t + C_2 \cdot \sin\omega_0 t + \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin\omega_B t\,,$$

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin\omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos\omega_0 t + \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos\omega_B t\,.$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови (точка А на рис.2.18):

$$x\big|_{t=0} = -\delta_{cm}\,, \quad \dot{x}\big|_{t=0} = V_0$$

і підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$

$$\begin{cases} -\delta_{cm} = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0 + \dfrac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + \dfrac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки, з урахуванням значень $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, сталі інтегрування будуть

$$C_1 = -\delta_{cm}\,, \;\; C_2 = \frac{1}{\omega_0} \cdot (V_0 - \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2})\,.$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = -\delta_{cm} \cdot \cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot (V_0 - \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2}) \cdot \sin\omega_0 t + \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin\omega_B t\,.$$

Підрахуємо значення сталих параметрів:

величина статичної деформації $\delta_{\text{ст}} = \dfrac{g \cdot m_D}{c} \approx \dfrac{10 \cdot 20}{3 \cdot 10^4} = 0{,}67 \cdot 10^{-2}$ м,

значення власної частоти $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m_D}} = \sqrt{\dfrac{3 \cdot 10^4}{20}} = 38{,}7\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$,

$$h_B = \frac{c \cdot a_\xi}{m_D} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}}{20} = 7{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\,,$$

$$\frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} = \frac{7{,}5}{\dfrac{3 \cdot 10^4}{20} - 30^2} = \frac{7{,}5}{1500 - 900} = 1{,}25 \cdot 10^{-2}\,\text{м}\,,$$

$$\frac{1}{\omega_0} \cdot (V_0 - \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2}) = \frac{1}{38{,}7} \cdot (2 - \frac{7{,}5 \cdot 30}{\dfrac{3 \cdot 10^4}{20} - 30^2}) = \frac{1}{38{,}7} \cdot (2 - 0{,}375) = 4{,}2 \cdot 10^{-2}\,\text{м}\,.$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = -0{,}67 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 38{,}7\text{t} + 4{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 38{,}7\text{t} + 1{,}25 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 30\text{t}\,(\text{м}).$$

ПЕРЕВІРКА: При $t = 0$ одержимо $x\big|_{t=0} = -0,67 \cdot 10^{-2}$ м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0.

ВІДПОВІДЬ: Вантаж здійснює вимушені коливання за законом $x = -0,67 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 38,7t + 4,2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 38,7t + 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 30t$ (м), з коловими частотами 38,7 і 30 $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Графік залежності координати x від часу t має вид

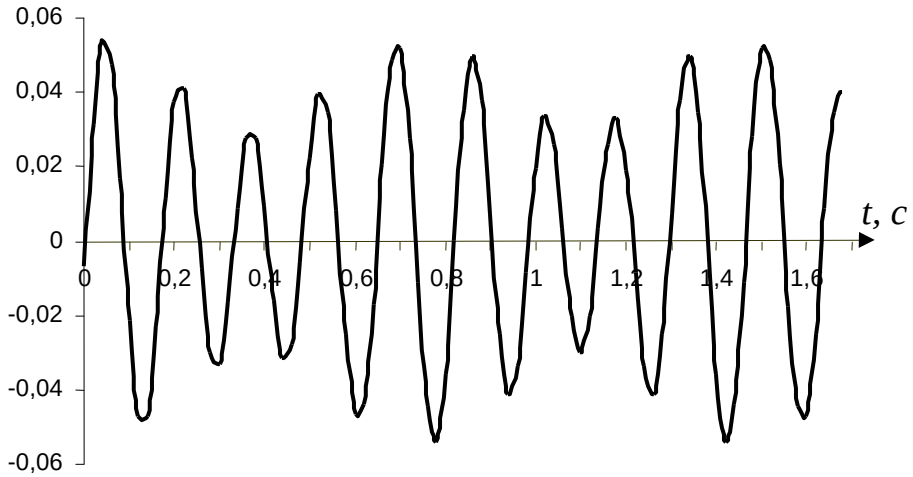


Рис. 2.19

Зауваження. Для побудови графіка будь-якої функцій треба скласти таблицю, у якій в першому стовпці задаються з певним кроком значення аргументу функції, а у другому обчислюються значення функції. Для побудови графіка періодичної функції при виборі кроку за аргументом треба мати впевненість, що кількість отриманих точок буде достатньою для описання щонайменше періоду цієї функції. У прикладі 3 були розраховані періоди $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ і $T_B = \frac{2\pi}{\omega_B}$, що відповідають частотам 38,7 і 30 $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$, значення яких дорівнюють 0,16 і 0,21 с відповідно. Для описання періоду достатньо 8 точок, тому був вибраний крок за часом у 0,02 с, що дозволив описати найменший з двох періодів - 0,16 с. Усього на графіку вимушених коливань бажано вивести 10-20 найменших періодів.

Завдання до теми 2:

Методика розв'язання задач та завдання для роботи

Розв'язання задач завдання слід проводити в такій послідовності:

- визначити тип механічної системи, вид схеми з'єднання пружних елементів вихідної схеми, вид коливального руху вантажу, а також засіб збудження його коливань;

- перетворити (у випадку необхідності) вихідну схему в розрахункову з одним пружним елементом, показати на розрахунковій схемі вісь *Ox*, і напрямок кінематичного збудження ξ, силу ваги $\overline{P}$ вантажу, сили пружності $\overline{F}_y$ та опору $\overline{R}$ пружини, положення статичної рівноваги вантажу (точка *O* на осі *Ox*), положення вантажу в момент початку ($t = 0$) руху (точки O_1 на осі *Ox*), статичну деформацію $\delta_{\text{ст}}$ пружини під дією вантажу;

- розрахувати еквівалентну жорсткість *c* пружини, враховуючи вид схеми з'єднання пружних елементів вихідної схеми, і величину статичної деформації $\delta_{\text{ст}}$ пружини, визначити початкові умови x_0 і $\dot{x}_0$ для вантажу, знайти, враховуючи тип механічної системи, частоти ω_0 або ω_0^* (для дисипативної системи) вільних коливань вантажу, коефіцієнт *h* системи;

- визначити, враховуючи тип механічної системи, вид коливального руху вантажу та засіб збудження його коливань, закон руху вантажу у загальному вигляді (для цього використати формули розділу 2), розрахувати коефіцієнти та параметри закону руху для конкретної задачі завдання;

- результати розв'язання задач перевірити для моменту часу $t = 0$ і подати у вигляді відповіді.

Це узагальнена методика розв'язання задач теми 2. У кожному конкретному випадку етапи методики і перелік визначальних механічних і динамічних характеристик руху для системи і вантажу коректуються з урахуванням умов задачі.

Варіанти задач до теми 2:

<u>Варіанти 1 - 5.</u> (рис. на стор. 49, схеми 1-5). Знайти рівняння коливального руху вантажу *D* у напрямку осі *Ox*. Стержень, який з'єднує вантажі, і брусок, який з'єднує пружини, є невагомі. Рух бруска *AB*, який займає в стані спокою горизонтальне положення, вважати поступальним.

<u>Варіант 1.</u> Вантаж *D* прикріплений до бруска *AB*, підвішеному на двох однакових паралельних пружинах, коефіцієнт жорсткості та опору кожної з яких дорівнює *c* = 3 Н/см, *b* = 6 Н·с/см. У момент часу $t = 0$ до вантажу *D*, який знаходиться в стані рівноваги, підвищують вантаж *E* ($m_{\text{E}} = 1$ кг, m_D = 2кг).

Варіант 2. У момент часу $t = 0$ стержень, який з'єднує вантажі D ($m_D =$ 1 кг) і E ($m_E = 2$ кг) перерізають, а основа починає здійснювати рухи за законом $\xi = 1{,}5\sin 18t$. Коефіцієнти жорсткості та опору пружин дорівнюють c_1 = 12 Н/см, c_2 = 36 Н/см, $b_1 = b_2 = 0$.

Варіант 3. У момент часу $t = 0$ до нерухомого вантажу D ($m_D = 0{,}8$ кг) підвішують вантаж, E ($m_E = 1{,}2$ кг), надаючи системі вантажів D і E початкову швидкість $V_0 = 0{,}2$ м/с, спрямовану вниз. Коефіцієнт жорсткості та опору пружин дорівнює c_1 = 10 Н/см, c_2 = 4 Н/см, c_3 = 6Н/см, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Варіант 4. Система вантажів D і E прикріплена до бруска AB. Брусок зв'язує систему двох паралельно закріплених пружин. Статична деформація двох однакових з коефіцієнтом опору $в$ = 6 Нс/см пружин під спільною дією вантажів D ($m_D = 0{,}5$ кг) і E ($m_E = 1{,}5$ кг) дорівнює $\delta_{ñò} = 4$ см. У момент часу $t = 0$ стержень, який з'єднує вантажі, перерізають.

Варіант 5. У момент часу $t = 0$ до нерухомого вантажу D ($m_D = 1{,}6$ кг), закріпленому на пружині з коефіцієнтом жорсткості c = 4 Н/см та опору $b = 0$, підвішують вантаж E ($m_E = 2{,}4$ кг), а основа в точці B починає здійснювати рух за законом $\xi = 2\sin 5t$ (см).

Варіанти 6 -10 (рис. на стор. 49, схеми 6-10). Знайти рівняння коливального руху вантажу по гладенькій похилій площині у напрямку осі Ox з моменту дотику вантажу пружини або бруска, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від пружини не відділяється. Брусок, що з'єднує пружини, є невагомим. Рух бруска AB, який займає в стані покою перпендикулярне осі Ox положення, вважати поступальним.

Варіант 6. Здійснивши без початкової швидкості по нахиленій площині ($\alpha = 30^0$) відстань $S = 0{,}1$ м, вантаж D ($m_D = 4$ кг) з'єднується у моменту часу $t = 0$ з недеформованими послідовно з'єднаними пружинами, які мають коефіцієнти жорсткості та опору c_1 = 48 Н/см, c_2 = 24 Н/см, $b_1 = b_2 = 0$.

Варіант 7. У момент часу $t = 0$ вантаж ($m_D = 2$ кг) приєднують у точці A без початкової швидкості до системи недеформованих послідовно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору c_1 = 12 Н/см, c_2 = 6 Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. Одночасно основа у точці B починає здійснювати рух вздовж нахиленої площини (α = 45^0) за законом $\xi = 0{,}02\sin 20t$ (м).

Варіант 8. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 1{,}5$ кг) приєднують в точці N до системи трьох недеформованих паралельно-послідовно закріплених бруском AB пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору c_1 = 4 Н/см, c_2 = 6 Н/см, c_3 = 15 Н/см, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Одночасно вантажу D надають початкову швидкість $V_0 = 0{,}5$ м/с у напрямку позитивного відліку координати X. Прийняти кут $\alpha = 45^0$.

Варіант 9. Вантаж D ($m_D = 1{,}2$ кг), здійснивши без початкової швидкості по нахиленій площині ($\alpha = 30^0$) відстань $S = 0{,}2$ м, з'єднується з недеформованою пружиною, яка має коефіцієнти жорсткості та опору c = 4,8 Н/см, $b = 0$. В той же момент часу основа в точці B починає здійснювати рух вздовж нахиленої площини за законом $\xi = 0{,}03\sin 12t$ (м).

Варіант 10. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D =$ 1 кг) без початкової швидкості приєднується до системи зв'язаних з бруском AB двох однакових паралельно закріплених недеформованих пружин, які мають кожна коефіцієнти жорсткості та опору c = 1,5 Н/см, $b = 4$ Нс/м. Прийняти кут $\alpha = 60^0$.

Варіанти 11-15 (рис. на стор. 50, схеми 11-15). Вантаж D закріплений на кінці ідеального стержня. Інший кінець стержня закріплений у точці E на ідеальній шарнірно-нерухомій опорі. Система вантаж-стержень може здійснювати малі коливання навколо осі циліндричного шарніра нерухомої опори у площині креслення. Знайти рівняння коливального руху вантажу, вважаючи його матеріальною точкою, у напрямку горизонтальної осі Ox. Брусок AB, який зв'язує систему двох паралельних пружин, є невагомим. Рух бруска AB, який займає у стані спокою вертикальне положення, вважати поступальним. У стані рівноваги механічної системи розглядаємий стержень займає вертикальне положення, а пружини недеформовані.

Варіант 11. Вантаж D ($m_D =$ 2,4 кг) приєднаний у точці E з бруском AB. Коефіцієнти жорсткості та опору зв'язаної бруском системи двох паралельно закріплених пружин c_1 = 1 Н/см, c_2 = 1,4 Н/см, $b_1 = b_2 = 3$ Нс/м. Перед початком руху вантаж відхиляють на величину $\lambda = 2$ см у напрямку позитивного відліку координати X у момент часу $t = 0$ без початкової швидкості.

Варіант 12. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 3$ кг) утримується у стані, при якому пружина стиснута на величину $\lambda = 2$ см, відпускається без початкової швидкості. Коефіцієнти жорсткості та опору пружини c = 9 Н/см, $b = 0$. Одночасно основа у точці B починає здійснювати рух за законом $\xi = 1{,}2 \sin 8t$ (см).

Варіант 13. Вантажу D ($m_D = 1$ кг) у стані рівноваги, показаному на кресленні, надають початкову швидкість $V_0 = 0{,}5$ м/с у напрямку позитивного відліку координати X. Коефіцієнт жорсткості та опору трьох паралельно закріплених пружин c_1 = 12 Н/см, c_2 = c_3 = c = 3 Н/см, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Варіант 14. Вантаж D ($m_D = 1{,}5$ кг) з положення рівноваги, показаному на кресленні, перед початком руху відхиляють на величину $\lambda = 2{,}5$ см у напрямку позитивного відліку координати X і відпускають у момент часу $t = 0$, надаючи вантажу початкову швидкість $V_0 = 0{,}4$ м/с, спрямовану вправо. Коефіцієнти жорсткості та опору пружин c_1 = 4,4 Н/см, c_2 = 2 Н/см, c_3 = 8 Н/см, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Варіант 15. Вантаж D ($m_D = 1$ кг) утримується в стані рівноваги, показаному на кресленні, системою послідовно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору c_1 = 4 Н/см, c_2 = 12 Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. У момент часу $t = 0$ основа в точці B починає здійснювати рух за законом $\xi = 1{,}8 \sin 12t$ (см).

Варіанти 16-20 (рис. на стор. 50, схеми 16-20). Знайти рівняння коливального руху вантажу D у напрямку осі Ox. Брусок, який з'єднує пружини, є невагомим. Рух бруска AB, який займає в стані спокою горизонтальне положення, вважати поступальним. Вантажі D, E при сумісному русі один від одного не відділяються.

Варіант 16. У момент часу $t = 0$ на нерухомий вантаж D ($m_D = 10$ кг) установлюють зверху вантаж E ($m_E = 20$ кг), надаючи системі вантажів D та E початкову швидкість $V_0 = 0{,}4$ м/с у напрямку позитивного відліку координати X. Коефіцієнт жорсткості та опору системи зв'язаних бруском AB трьох паралельно-послідовно закріплених пружин c_1 = 200 Н/см, c_2 = 160 Н/см, c_3 = 140 Н/см, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Початок відліку осі Ox сумістити з положенням статичної рівноваги системи вантажів D, E.

Варіант 17. Система встановлених на пружині вантажів *D* та *E* знаходиться у положенні статичної рівноваги. У момент часу $t = 0$ вантаж *E* знімають з вантажу *D*. Кругова частота вільних коливань системи вантажів *D* та *E* $\omega_0 = 20$ рад/с, відношення мас m_D/m_E = 2/3. Початок відліку осі *Ox* сумістити з положенням статичної рівноваги вантажу *D*.

Варіант 18. Вантаж *D* встановлений на бруску *AB*, який зв'язує систему двох однакових паралельно закріплених пружин. У момент часу $t = 0$ на нерухомий вантаж *D* ($m_D = 20$ кг) встановлюють зверху вантаж *E* ($m_E = 10$ кг). Статична деформація кожної з пружин з коефіцієнтом опору $b = 30\sqrt{3}$ Нс/м під дією вантажу *D* дорівнює $\delta_{cm} = 2$ см. Початок відліку осі *Ox* сумістити з положенням статичної рівноваги системи вантажів *D*, *E*.

Варіант 19. Система вантажів *D* ($m_D = 15$ кг) та *E* ($m_E = 25$ кг), встановлених на двох послідовно закріплених пружинах, які мають коефіцієнти жорсткості та опору c_1 = 250 Н/см, c_2 = 375 Н/см, $b_1 = b_2 = 0$, знаходиться у положенні статичної рівноваги. У момент часу $t = 0$ вантаж *E* знімають з вантажу *D*. Одночасно основа у точці *B* починає здійснювати рух за законом $\xi = 0{,}05 \sin 30t$ (м).

Варіант 20. У момент часу $t = 0$ на закріплений на пружині нерухомий вантаж *D* встановлюють зверху вантаж *E*, надаючи системі вантажів *D* та *E* початкову швидкість $V_0 = 0{,}3$ м/с у напрямку позитивного відліку координати *X*. Кругова частот вільних коливань вантажу *D* на пружині $\omega_0 = 24$ рад/с, відношення мас $m_D / m_E = 3$. Початок відліку осі *Ox* сумістити з положенням статичної рівноваги системи вантажів *D* та *E*.

Варіант 21 - 25 (рис. на стор. 51, схеми 21-25). Знайти рішення коливального руху вантажу *D* по гладенькій нахиленій площині у напрямку осі *Ox*. Брусок, який з'єднує пружини, є невагомим. Рух бруска *AB*, який займає у стані спокою перпендикулярне осі *AB* положення, вважати поступальним.

Варіант 21. У момент часу $t = 0$ вантаж *D* ($m_D = 2$ кг) приєднують у точках *A* і *B* до вільних кінців системи двох недеформованих паралельно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору c_1 = 7 Н/см, c_2 = 3 Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. Одночасно вантажу *D* надають початкову швидкість $V_0 = 0{,}4$ м/с у напрямку позитивного відліку координати *X*. Прийняти кут $\alpha = 45^0$.

Варіант 22. Вантаж D у точці A прикріплений до пружини та утримується на нахиленій площині ($\alpha = 30^0$) у положенні рівноваги. При цьому статична деформація пружини $\delta_{ст} = 2$ см. У момент часу $t = 0$ основа у точці B починає здійснювати рух за законом $\xi = 0{,}01\sin 10t$ (м).

Варіант 23. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 3$ кг), без початкової швидкості приєднують до бруска AB, який зв'язує систему двох недеформованих паралельно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору c_1 = 2 Н/см, c_2 = 4 Н/см, $b_1 = b_2 = 6$ Нс/м. Прийняти кут $\alpha = 60^0$.

Варіант 24. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 1$ кг) приєднують у точці A без початкової швидкості до системи двох недеформованих послідовно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору c_1 = 12 Н/см, c_2 = 4 Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. Одночасно основа у точці B починає здійснювати рух вздовж нахиленої площини ($\alpha = 30^0$) за законом $\xi = 1{,}5\sin 10t$ (см).

Варіант 25. Вантаж D ($m_D = 1{,}5$ кг) прикріплений до бруска AB, підвішеному на двох однакових паралельних пружинах. Статична деформація кожної з пружин з коефіцієнтом опору b= 3 Нс/см під дією вантажу D, який знаходиться на нахиленій площині ($\alpha = 30^0$) дорівнює $\delta_{ст} = 4{,}9$ см. У момент часу $t = 0$ вантажу D, який знаходиться в положенні рівноваги, надають початкову швидкість $V_0 = 0{,}3$ м/с у напрямку від'ємного відліку координати X.

Варіант 26 - 30 (рис. на стор. 51, схеми 26-30). Знайти рівняння коливального руху вантажу D у напрямку осі Ox з моменту дотику ним до плити, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від плити не відділяється. Плита, яка займає в стані спокою горизонтальне положення, є невагомою. Рух плити вважати поступальним.

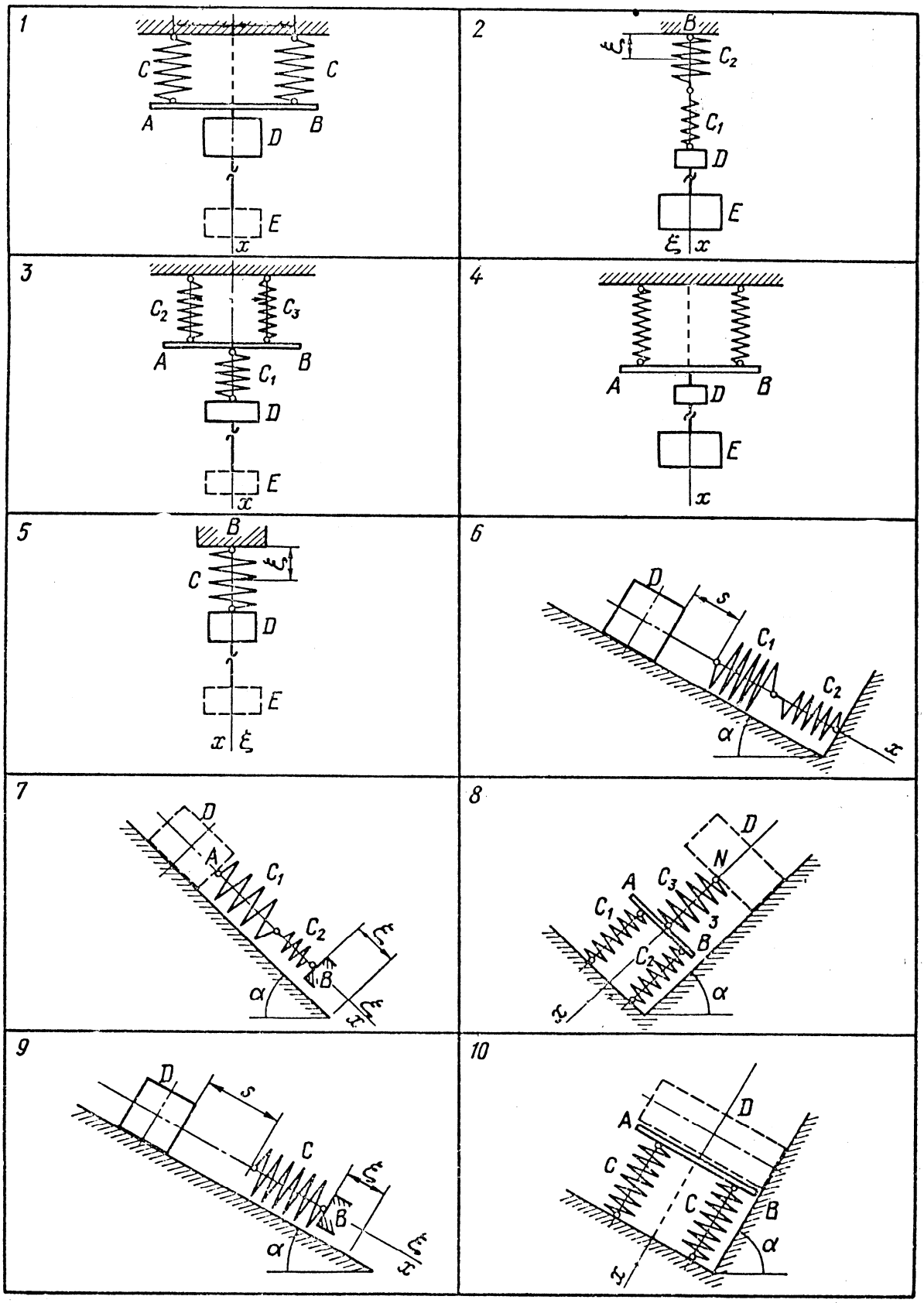
Варіант 26. Пролетівши вниз без початкової швидкості відстань h = 0,1 м, вантаж D ($m_D = 50$ кг) з'єднується в момент часу $t = 0$ з плитою, яка зв'язує систему двох недеформованих паралельно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору c_1 = 600 Н/см, c_2 = 400 Н/см, $b_1 = b_2 = 0$.

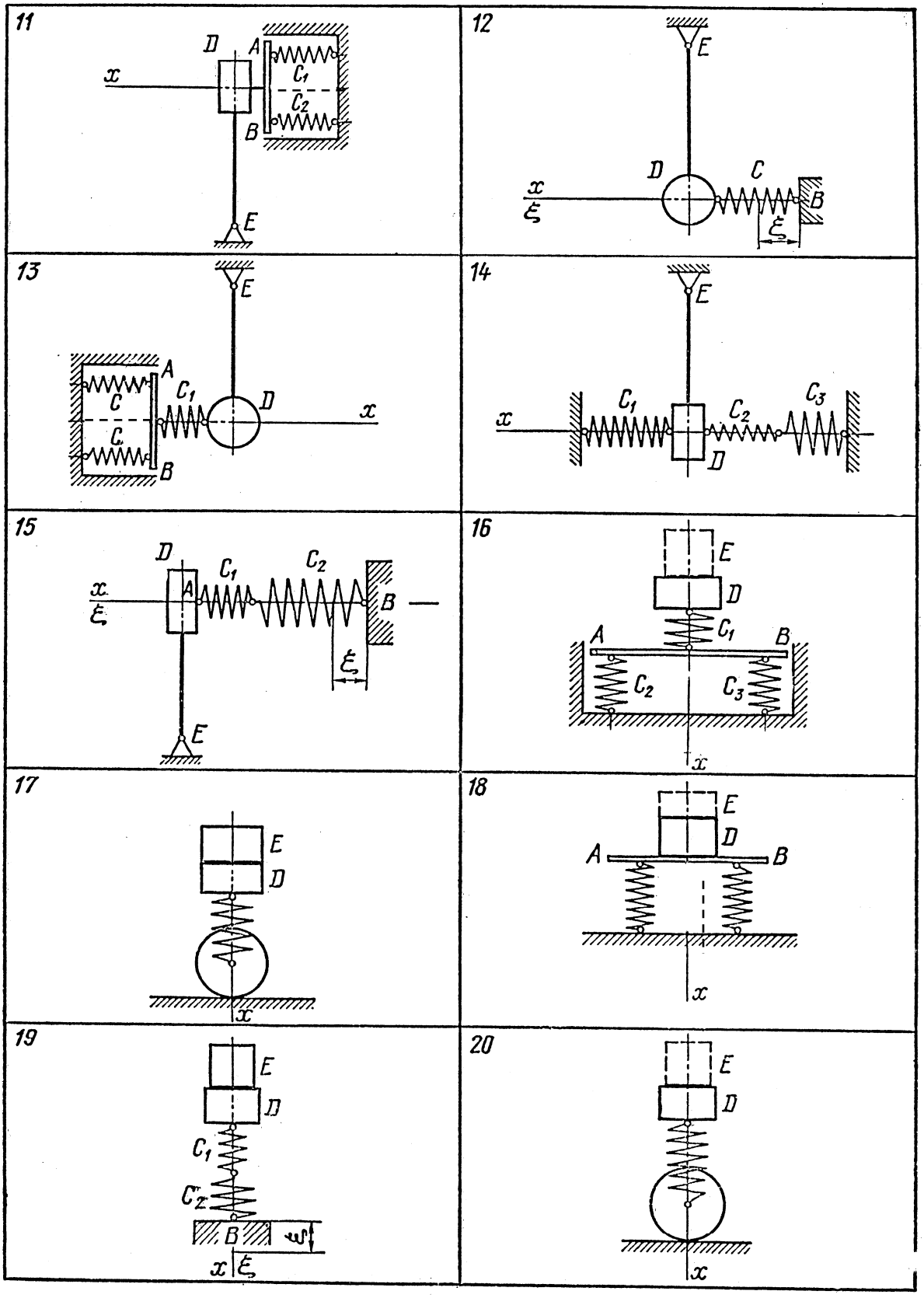
Варіант 27. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 40$ кг) встановлюють без початкової швидкості на плиту, яка зв'язує систему двох однакових паралельно закріплених недеформованих пружин, які мають кожна коефіцієнти жорсткості та опору c = 130 Н/см, b = 200 Нс/м.

Варіант 28. Вантаж D без початкової швидкості падає на плиту з висоти h = 5 см. Плита закріплена на пружині, статична деформація якої під дією вантажу дорівнює $\delta_{ст} = 1$ см.

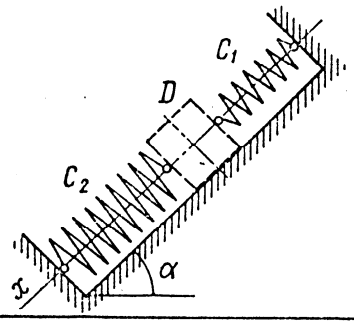
Варіант 29. Плита закріплена на двох однакових паралельних пружинах. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 200$ кг) встановлюють на плиту і приєднують до третьої, розташованої зверху вантажу пружини. Пружини мають коефіцієнти жорсткості та опору $c_1 = c_2 = 400$ Н/см, $c_3 = 200$ Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. Одночасно вантажу надають початкову швидкість $V_0 = 0{,}6$ м/с, у напрямку позитивного відліку координати X. На момент початку руху вантажу система трьох пружин знаходиться в недеформованому стані.

Варіант 30. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 100$ кг) встановлюють без початкової швидкості на плиту, яка закріплена на пружині, що має коефіцієнти жорсткості та опору c = 2000 Н/см, b = 0. Одночасно основа у точці B починає здійснювати рух за законом $\xi = 0{,}5 \sin 20t$ (см).

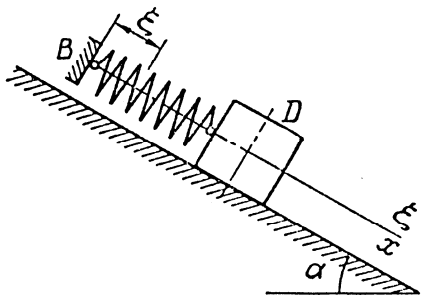

1
C
C
A
B
D
E
x
2
B
ξ
C2
C1
D
E
ξ
x
3
C2
C3
A
B
C1
D
E
x
4
A
B
D
E
x
5
B
ξ
C
D
E
x
ξ
6
D
s
C1
C2
α
x
7
D
A
C1
C2
ξ
B
α
x
8
D
N
A
C3
C1
3
B
C2
α
x
9
D
s
C
ξ
B
α
x
10
A
D
C
C
B
α
x


11
D
A
x
C1
C2
B
E
12
E
D
C
x
ξ
B
ξ
13
E
A
C1
D
x
C
C
B
14
E
x
C1
C2
C3
D
15
D
C1
C2
x
ξ
A
B
ξ
E
16
E
D
C1
A
B
C2
C3
x
17
E
D
x
18
E
D
A
B
x
19
E
D
C1
C2
B
w
x
ξ
20
E
D
x

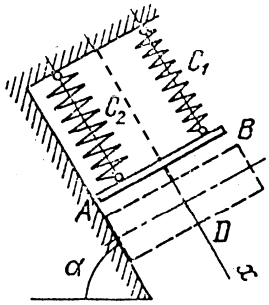
21



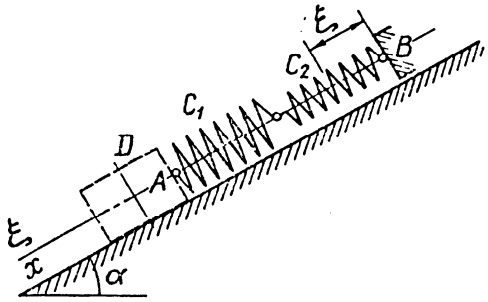
22



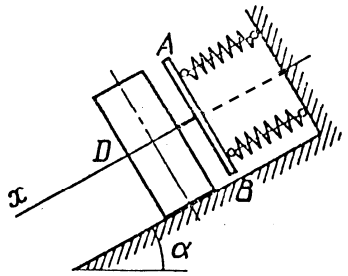
23



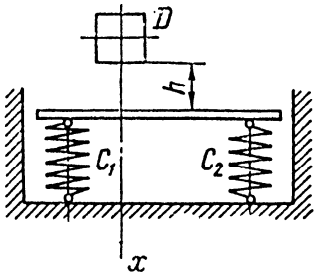
24



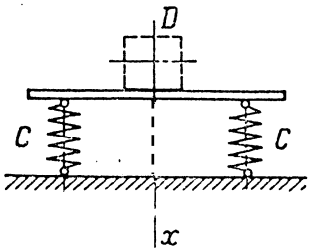
25



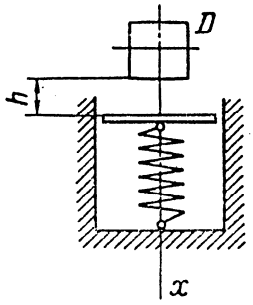
26



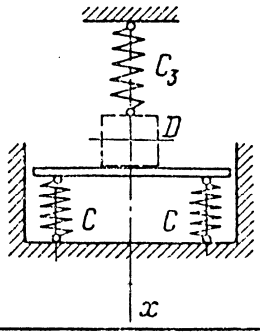
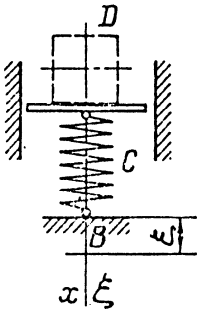
27



28



29



30