МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

А. І. Колосов, А. В. Якунін

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для здобувачів першого (бакалаврського) рівня*
вищої освіти за спеціальністю
126 – Інформаційні системи та технології)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2021

УДК [517.4+517.5+517.9](042.4)
К61

Колосов А. І. Вища математика. Модуль 2 : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 126 – Інформаційні системи та технології / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 239 с.

Автори:
д-р фіз.-мат. наук, проф. А. І. Колосов,
канд. техн. наук, доц. А. В. Якунін

Рецензент

Ламтюгова Світлана Миколаївна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 12 від 04.05.2021.

Конспект лекцій подано у стислому вигляді з відображенням основних складників дисципліни, що відповідають другому модулю навчання за спеціальністю 126 – Інформаційні системи та технології, для концентрації уваги на вузлових поняттях і положеннях математичного апарату. Послідовність, форма та стиль викладення узгоджені з усталеною структурою, наповненістю та теоретичним рівнем програм із вищої математики технічного університету.

Опрацювання студентами поданого матеріалу сприятиме підготовці до занять, поточного та підсумкового контролю з курсу вищої математики.

ЗМІСТ

Математика подає майстерні винаходи, здатні задовольнити допитливість, полегшити ремесла і зменшити працю людей.

Р. Декарт

Математика – це мистецтво називати різні речі одним і тим же ім'ям.

А. Пуанкаре

ВСТУП

У конспекті лекцій викладено матеріал, що відповідає змістовим модулям другого семестру курсу вищої математики – Модуль 2 «Диференціальні рівняння, ряди, операційне числення» – за діючою навчальною програмою для студентів спеціальності 126 – Інформаційні системи та технології. Головна увага приділяється розкриттю в стислій формі суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю. Теоретичні відомості подаються коротко, чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Частина викладеного матеріалу розрахована на самостійне опрацювання. До всіх лекцій додаються контрольні запитання та практичні завдання для поглиблення і закріплення вивченого.

За основу взято цикл лекцій з вищої математики, які читаються студентам за відповідною спеціальністю підготовки бакалавра в Навчально-науковому інституті енергетичної, інформаційної та транспортної інфраструктури Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Конспект лекцій призначений для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зазначеної спеціальності та може бути використаний для студентів спеціальностей 122 – Комп'ютерні науки та 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології.

Змістовий модуль 1 ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ

Лекція 1.1 Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

План

1.1.1 Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь

1.1.2 Поняття про звичайне диференціальне рівняння. Порядок рівняння. Загальний і частинний розв'язки та їх геометричний зміст. Початкові та граничні умови. Початкова задача (задача Коші) і крайова задача

1.1.3 Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *диференціальне рівняння, порядок рівняння, загальний і частинний розв'язки, початкові та крайові умови, початкова задача (задача Коші) та крайова задача, рівняння з відокремлюваними змінними.*

1.1.1 Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь

При вивченні різноманітних явищ у науці, техніці та інших сферах часто не вдається безпосередньо встановити функціональну залежність між значеннями шуканих і відомих величин, проте можливо виявити зв'язки між нескінченно малими приростами (диференціалами) змінних, що фігурують у задачі. Диференціальні зв'язки завдяки лінеаризації, як правило, суттєво простіші скінченних. Крім того, результати спостережень чи експериментів часто подаються в диференціальній формі. Тому для моделювання неперервних динамічних процесів широко використовуються диференціальні та інші споріднені з ними рівняння. Далі наведемо декілька прикладів подібних задач.

Задача 1. Тіло масою m падає з деякої висоти. Потрібно встановити закон $v = v(t)$ зміни швидкості v з бігом часу t, якщо на тіло діють сила тяжіння $F_1 = mg$ (g − прискорення вільного падіння) і гальмуюча сила опору повітря $F_2 = -kv$, пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності $k > 0$). За другим законом Ньютона $ma = F$, де $a = dv/dt$ − прискорення рухомого тіла, а $F = F_1 + F_2 = mg - kv$ − рівнодійна сил, діючих на тіло. Отже, $dv/dt = mg - kv$. Одержано диференціальне рівняння відносно невідомої функції $v = v(t)$.

Задача 2. Спостереження показують, що швидкість росту молодого листка «Вікторії регії» пропорційна радіусу листка і кількості світла, що падає на нього. Кількість сонячного світла пропорційне площі листка і косинусу кута між напрямом променів і вертикаллю до листка. Потрібно відновити, як змінювалась площа листка $S = S(t)$ протягом світлої пори деякого дня з бігом часу t, $t \in [6;18]$, якщо о 6 годині ранку ця площа була $S(6) = 1\,600\ см^2$, а о 18 годині того ж дня $S(18) = 2\,500\ см^2$.

Вважаємо, що кут $\alpha = \alpha(t)$ між напрямом сонячних променів і вертикаллю до поверхні листя є лінійною зростаючою функцією часу t, при цьому о 6 годині ранку і о 18 годині вечора маємо $\alpha(6) = -\pi/2$ і $\alpha(18) = \pi/2$, а о півдні $\alpha(12) = 0$. Звідси знаходимо $\alpha(t) = \pi t/12 - \pi$.

Отже, швидкість росту листка описується рівнянням

$$dS/dt = k\,r\,Q,$$

$$Q = \gamma\,S\cos\alpha = \gamma\,S\cos(\pi t/12 - \pi) = -\gamma\,S\cos(\pi t/12),$$

де k і γ − коефіцієнти пропорційності, які будемо вважити сталими; r − радіус листка; Q − кількість сонячного світла.

Задача 3. Повні витрати V залежать від об’єму (кількості одиниць) виробленої продукції x. Знайти функцію $V = V(x)$, якщо відомо: швидкість росту витрат dV/dx для всіх значень x дорівнює середнім витратам на одиницю продукції V/x.

Отже, маємо диференціальне рівняння $dV/dx = V/x$, розв’язком якого при додатковій умові $V(1) = V_0$ служить лінійна функція: $V = V_0 x$.

Задача 4. Нехай в початковий момент $t=0$ часу t на деякій фірмі вироблялося x_0 одиниць продукції, а швидкість зростання dx/dt випуску продукції x в довільний момент часу t прямо пропорційна поточному об'єму інвестування $I(t)$ зі сталим коефіцієнтом пропорційності k. Знайти залежність $x=x(t)$ кількості виробленої продукції від часу при сталому інвестуванні $I(t)=I_0$.

Отже, приходимо до диференціального рівняння $dx/dt=kI_0$. Розв'язком цього рівняння при додатковій умові $x(0)=x_0$ служить лінійна функція: $x=kI_0t+x_0$.

Задача 5. Відомо, що швидкість зростання dK/dt інвестованого капіталу K в довільний момент часу t прямо пропорційна поточній величині капіталу $K(t)$ з коефіцієнтом пропорційності $p/100$, де p – узгоджений відсоток неперервного зростання капіталу. Знайти закон зростання $K=K(t)$ інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової інвестиції $K(0)=K_0$.

Отже, маємо диференціальне рівняння $\dfrac{dK}{dt}=\dfrac{p}{100}K$, розв'язком якого при додатковій умові $K(0)=K_0$ служить експонента: $K=K_0e^{pt/100}$.

Задача 6. Нехай ведеться виборча компанія. У початковий момент часу $t_0=0$ агітаційну інформацію про кандидата A мають x_0 громадян, загальна кількість яких дорівнює X. Далі ця інформація поширюється через спілкування людей між собою. Припустимо, що швидкість цього процесу dx/dt (зростання числа громадян $x=x(t)$, ознайомлених з даною інформацією за час t) прямо пропорційна як числу x вже проінформованих на даний момент t людей, так і числу $X-x$ громадян, ще не охоплених агітацією.

Отже, приходимо до диференціального рівняння

$$dx/dt = kx(X - x) \quad \text{або} \quad dx/dt = kXx - kx^2,$$

де k − додатний сталий коефіцієнт пропорційності.

Розв'язком цього рівняння при додатковій умові $x(0) = x_0$ служить ***логістична крива***: $x = X \Big/ \left(1 + (X / x_0 - 1)\, e^{-Xkt}\right)$.

Подібне диференціальне рівняння моделює поширення технічних нововведень, зростання популяції певного виду тварин при обмежених ресурсах та інші процеси.

1.1.2 Поняття про звичайне диференціальне рівняння. Порядок рівняння. Загальний і частинний розв'язки та їх геометричний зміст. Початкові та граничні умови. Початкова задача (задача Коші) і крайова задача

Рівняння називається ***диференціальним***, якщо воно містить похідні (диференціали) шуканої функції.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної (диференціала), що входить у нього.

Коли шукана функція $y = y(x)$ є функцією однієї змінної x, то диференціальне рівняння (ДР) називають ***звичайним***. Далі будемо займатися лише звичайними ДР.

Диференціальне рівняння n***–го порядку*** зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'', ..., \ y^{(n)}$ (чи відповідні диференціали).

Диференціальне рівняння n–го порядку можна подати в ***загальному вигляді*** $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, де $y = y(x)$ – шукана функція.

Це неявна форма запису ДР. Розв'язуючи рівняння відносно найвищої похідної, отримаємо ***канонічний*** (***нормальний***) ***вигляд*** ДР $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$.

Розв'язком (***інтегралом***) диференціального рівняння називається довільна функція $y = y(x)$, що при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність. Графік розв'язку ДР називається ***інтегральною кривою***. Процес знаходження розв'язку ДР називається його ***інтегруванням***.

Щоб знайти шукану функцію з ДР n-го порядку, треба в загальному випадку виконати n операцій інтегрування, що дає n довільних сталих. Таким чином, диференціальне рівняння має безліч розв'язків.

Загальним розв'язком (***інтегралом***) диференціального рівняння n-го порядку є функція $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, що містить n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ і задовольняє диференціальному рівнянню при будь-яких допустимих значеннях $C_1, C_2, ..., C_n$.

Геометричний зміст: *загальному розв'язку відповідає сім'я інтегральних кривих*. При цьому через кожну внутрішню точку області визначення сім'ї проходить єдина інтегральна крива.

Частинним розв'язком (***інтегралом***) диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального розв'язку при конкретних фіксованих значеннях довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$.

Геометричний зміст: частинному розв'язку відповідає конкретний екземпляр з сім'ї інтегральних ліній.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = 3x^2$.

Вказати довільно три його частинні розв'язки.

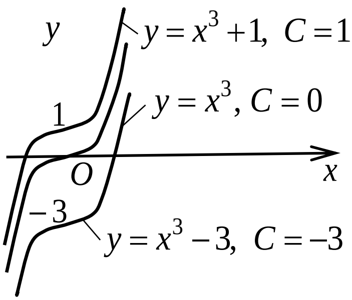

Рисунок 1.1

□ $dy / dx = 3x^2$; $dy = 3x^2 dx$;

$$y = 3\int x^2 dx = x^3 + C.$$

Отже, $y = x^3 + C$ – загальний розв'язок. Геометрично йому відповідає однопараметрична сім'я інтегральних кривих. Поклавши послідовно $C = -3$, $C = 0$ і $C = 1$, отримаємо три частинні розв'язки, зображені на рис. 1.1. ■

Для знаходження конкретних значень довільних сталих, що входять у загальний розв'язок, звичайно використовуються:

1) ***початкові умови*** – відомі значення функції та її похідних в деякій одній фіксованій точці $x = x_0$;   або

2) ***крайові*** (***граничні чи межові***) ***умови*** – відомі значення функції та її похідних в декількох різних фіксованих точках.

Початкових або крайових умов повинно бути стільки, скільки довільних сталих, тобто який порядок рівняння.

Для ДР n-го порядку початкові умови мають вигляд:

$$y(x_0)=y_0;\ y'(x_0)=y_0';\dots;\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

де $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ – відомі числа (початкові дані).

Диференціальне рівняння разом з початковими умовами називають ***початковою задачею*** (***задачею Коші***).

Диференціальне рівняння разом з крайовими умовами називають ***крайовою*** (***граничною***) ***задачею***.

Зауваження. У диференціального рівняння можуть існувати так звані ***особливі розв'язки***, які неможливо одержати із загального розв'язку ні при яких значеннях довільних сталих.

Наприклад, нехай маємо рівняння $y'=y^{2/3}$. При $y\neq 0$ отримаємо: $y^{-2/3}y'=1$; $(3y^{1/3})'=1$; $3y^{1/3}=x+C$. Звідси $y=(1/27)(x+C)^3$ – загальний розв'язок. Але розв'язок $y(x)\equiv 0$ у нього не входить і тому є особливим.

Зауваження. У практичних застосуваннях *задача Коші, при певних обмеженнях, має єдиний розв'язок*, крайова задача може мати довільну кількість розв'язків.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші (знайти частинний розв'язок заданого ДР, що задовольняє вказаним початковим умовам):

$$y''=12x;\quad y(1)=3;\ \ y'(1)=-1.$$

□ Знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$y'=12\int x\,dx;\ \ y'=6x^2+C_1;\ \ y=\int(6x^2+C_1)\,dx;$$

$$y=2x^3+C_1x+C_2.$$

В отриманий загальний розв'язок та його першу похідну підставимо задані початкові умови і знайдемо C_1, C_2:

$$3=2+C_1+C_2;\quad -1=6\cdot 1+C_1;\quad C_1=-7,\quad C_2=8.$$

Звідси шуканий частинний розв'язок: $y_K=2x^3-7x+8$. ■

1.1.3 Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння першого порядку має ***загальний вигляд*** $F(x, y, y') = 0$, де $y = y(x)$ – шукана функція незалежної змінної x.

Припустимо, що це рівняння можна розв’язати відносно похідної і подати його в ***нормальній формі*** $y' = f(x, y)$. Для таких рівнянь справджується

теорема Коші (*умови існування та єдиності розв’язку*). *Нехай у рівнянні* $y' = f(x, y)$ *функція* $f(x, y)$ *та її частинна похідна* $f_y'(x, y)$ *неперервні у деякій області* D *площини* Oxy. *Тоді для довільної внутрішньої точки* $M_0(x_0; y_0)$ *цієї області існує визначений і диференційовний у деякому околі точки* x_0 *єдиний розв’язок* $y = y(x)$ *даного рівняння, що задовольняє початковій умові* $y(x_0) = y_0$.

З неперервності правої частини $f(x, y)$ випливає існування розв’язку, а умова неперервності похідної $f_y'(x, y)$ забезпечує його єдиність. Особливістю є те, що в умові теореми відсутня вимога наявності похідної $f_x'(x, y)$.

Геометричний зміст: для кожної внутрішньої точки $M_0(x_0; y_0)$ області D існує і причому єдина інтегральна крива ДР $y' = f(x, y)$, яка проходить через цю точку.

Особливими точками ДР $y' = f(x, y)$ називаються ті, в яких не виконуються умови теореми Коші, тобто де права частина $f(x, y)$ або її похідна $f_y'(x, y)$ мають розрив. Такі точки можуть бути ізольованими чи утворювати ***особливі лінії***.

Не існує єдиного аналітичного методу точного розв’язування ДР першого порядку. Далі розглянемо окремі типи таких рівнянь і відповідні методи знаходження аналітичного розв’язку.

Зауваження. Для розв’язування рівнянь, що одночасно відносяться до різних типів треба вибирати їх найзручніше подання.

Диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ називається ***рівнянням з відокремлюваними змінними***, якщо його права частина $f(x, y)$ може бути подана як добуток $f(x, y) = h(x)\, g(y)$ двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної.

Щоб знайти розв'язок такого ДР $y' = h(x)\, g(y)$, треба відокремити змінні: похідну записати як відношення диференціалів $y' = dy/dx$, а потім обидві його частини помножити на dx і поділити на такий вираз $g(y)$, щоб в одну частину рівняння входила тільки змінна y, а в іншу − тільки змінна x. Шуканий розв'язок $y = y(x)$ перетворює одержане рівняння $dy/g(y) = h(x)\,dx$ у тотожність. Інтегруючи її, знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$\int dy/g(y) = \int h(x)\,dx + C, \text{ де } C \text{ – довільна стала.}$$

Для спрощення запису загального розв'язку ДР часто довільну сталу подають у вигляді деякого виразу з іншою довільною сталою C, при умові, що цей вираз приймає довільні значення. Наприклад, $(1/2)\ln C$, де $C > 0$.

Зауваження. При діленні обох частин рівняння на вираз, який містить змінні, можна «втратити» розв'язки, що перетворюють цей вираз у нуль. Такі випадки треба розглядати окремо.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

а) $xyy' = 1 + y^2$; б) $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$;

в) $(x + xy^2)\,dx + (9y - x^2 y)\,dy = 0$.

□ а) Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 + y^2; \quad \frac{ydy}{1+y^2} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{2ydy}{1+y^2} = 2\int \frac{dx}{x};$$

$$\ln(1 + y^2) = 2\ln|x| + \ln|C|.$$

Вигляд одержаного загального інтеграла можна спростити потенціюванням. Саме тому довільна стала записана як логарифм іншої довільної сталої. Тоді загальний інтеграл можна записати так:

$1+y^2=Cx^2$. Далі $y=\pm\sqrt{Cx^2-1}$ – загальний розв’язок в явній формі.

Виконуючи ділення, припускали, що $x\neq 0$, і могли втратити розв’язок $x=0$. Підставляючи $x=0$ у рівняння, переконуємося, що ця функція його не задовольняє, тобто не є розв’язком.

б) Перенесемо синуси в один бік від знака рівності та перетворимо їх різницю в добуток, користуючись відповідною тригонометричною тотожністю:

$$y'=\sin(x-y)-\sin(x+y)\,;$$

$$y'=2\sin((x-y-x-y)/2)\cos((x-y+x+y)/2)\,;$$

$$y'=2\sin(-y)\cos x; \quad y'=-2\sin y\cos x.$$

Відокремимо змінні й проінтегруємо:

$$dy/\sin y=-2\cos x\,dx; \quad \int\frac{dy}{\sin\,y}=-2\int\cos x\,dx+\ln|C|;$$

$$\ln\left|tg(y/2)\right|=-2\sin\,x+\ln|C|; \quad \ln\left|tg(y/2)\right|=\ln\left|Ce^{-2\sin x}\right|;$$

$tg(y/2)=Ce^{-2\sin x}$ – загальний розв’язок у неявній формі (загальний інтеграл).

Виконуючи ділення, припускали, що $\sin y\neq 0$, і могли втратити розв’язки $y=\pi n,\ n\in Z$. Підставляючи $y=\pi n,\ n\in Z$ у рівняння, переконуємося, що ці функції його задовольняють при умові $n=2m,\ m\in Z$. Однак відповідні розв’язки $y=2\pi m,\ m\in Z$ одержуються із загального розв’язку $tg(y/2)=Ce^{-2\sin x}$ при $C=0$.

в) Спочатку винесемо з перших дужок x, з других $-$ y, а потім відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$x(1+y^2)\,dx+y(9-x^2)\,dy=0\,;$$

$$\frac{x\,dx}{9-x^2}+\frac{y\,dy}{1+y^2}=0; \quad \int\frac{x\,dx}{9-x^2}+\int\frac{y\,dy}{1+y^2}=\frac{1}{2}\ln C\,.$$

Зробимо заміну змінної: у першому інтегралі $s=9-x^2$, у другому − $t = 1 + y^2$. Отримаємо

$$-\frac{1}{2}\int\frac{ds}{s} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln C;$$

$$(-1/2)\ln|s| + (1/2)\ln|t| = (1/2)\ln C; \quad \ln|t/s| = \ln C.$$

Здійснюючи обернену підстановку та потенціювання, одержимо загальний інтеграл рівняння: $(1+y^2)/(9-x^2) = C$.

Звідси $y = \pm\sqrt{C(9-x^2)-1}$ – загальний розв’язок в явній формі.

Виконуючи ділення, припускали, що $9 - x^2 \neq 0$ і $1 + y^2 \neq 0$, та могли втратити розв’язки $x = \pm 3$. Підставляючи $x = \pm 3$ у рівняння, переконуємося, що ці функції його задовольняють, тобто слугують його розв’язками. Оскільки ці розв’язки не входять у загальний розв’язок $y = \pm\sqrt{C(9-x^2)-1}$, то вони є особливими. ■

Приклад 2. Розв’язати задачу Коші:

а) $y/y' = \ln y$, $y(2) = 1$; б) $e^x y' + xy^2 = 0$, $y(0) = -1$.

□ а) Спочатку знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$y' = \frac{y}{\ln y}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}; \quad \frac{\ln y\, dy}{y} = dx; \quad \int\frac{\ln y\, dy}{y} = \int dx.$$

Зробивши заміну $t = \ln y$, отримаємо

$$(1/2)\ln^2 y = x + C.$$

Враховуючи початкову умову $y(2) = 1$, підставимо у рівняння замість x значення 2, замість y значення 1 і знайдемо C:

$$(1/2)\ln^2 1 = 2 + C; \quad 2 + C = 0; \quad C = -2.$$

Отримуємо частинний розв’язок у неявній формі (частинний інтеграл): $\ln^2 y = 2(x-2)$.

Звідси $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ – частинний розв’язок в явній формі.

б) Розв’язати самостійно. Відповідь: $y = -e^x \big/ (x+1)$. ■

Запитання для самоконтролю

1. Що таке диференціальне рівняння (ДР)? Як визначається його порядок?
2. Який загальний вигляд ДР n–го порядку? Його канонічний (нормальний) вигляд?
3. Що називається розв'язком ДР?
4. Що таке інтегральна крива ДР?
5. Що називається загальним розв'язком ДР? Частинним розв'язком? Який їх геометричний зміст?
6. Що таке початкові та крайові умови? Як ставиться початкова задача (задача Коші)? Крайова задача?
7. Що таке особливий розв'язок ДР?
8. Як для ДР першого порядку формулюється теорема Коші (умови існування та єдиності розв'язку)? У чому її геометричний зміст?
9. Що таке ДР з відокремлюваними змінними?
10. Опишіть метод інтегрування диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Перевірити, чи є задана функція частинним розв'язком вказаного диференціального рівняння:

а) $y=\dfrac{tg\,x}{x}$; $\quad xy'+y-\dfrac{1}{\cos^2 x}=0$;

б) $y=x\sqrt{6\ln x}$; $\quad y'=(y^2+3x^2)\big/xy$.

Відповідь: а) і б) функція слугує частинним розв'язком.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок:

а) $\sqrt{4-x^2}dy-3ydx=0$; б) $\cos^2 x\cdot y'+(1+2\cos^3 x)\mathrm{y}^2=0$.

Відповідь: а) $y=Ce^{3\arcsin(x/2)}$; б) $y=\frac{\cos x}{(\sin x+\sin 2x+C\cos x)}$.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші:

а) $2x\sqrt{y^2+9}dx+(x^2-8)dy=0$; $\;y(3)=-4$;

б) $y'+\mathrm{y}\ln y\cdot\mathrm{tg}\,x=0$; $\;y(0)=e$.

Відповідь: а) $y + \sqrt{y^2+9} = |x^2-8|^{-1}$; б) $y = e^{\cos x}$.

Лекція 1.2 Однорідні та лінійні рівняння першого порядку

План

1.2.1 Однорідні функції двох змінних. Рівняння першого порядку з однорідною правою частиною

1.2.2 Лінійні рівняння першого порядку. Метод Лагранжа. Підстановка Бернуллі

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *однорідна функція двох змінних, диференціальне рівняння першого порядку з однорідною правою частиною (однорідне рівняння), лінійне однорідне рівняння першого порядку, лінійне неоднорідне рівняння першого порядку, метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа), підстановка Бернуллі.*

1.2.1 Однорідні функції двох змінних. Рівняння першого порядку з однорідною правою частиною

Функція $f(x,y)$ називається ***однорідною*** k***-го порядку однорідності***, якщо виконується тотожність $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$.

Приклад 1. Переконатися, що функція

$$f(x,y) = xy + 5y^2 \sin(x/y) + \sqrt{x^4+y^4} - x^5/(x^3+y^3)$$

є однорідною і знайти порядок однорідності.

□ $$f(tx,ty) = tx\cdot ty + 5(ty)^2 \sin(tx/ty) + \sqrt{(tx)^4+(ty)^4} -$$

$$-(tx)^5/((tx)^3+(ty)^3) = t^2xy + 5t^2y^2\sin(x/y) + t^2\sqrt{x^4+y^4} -$$

$$-t^2x^5/(x^3+y^3) = t^2(xy + 5y^2\sin(x/y) + \sqrt{x^4+y^4} -$$

$$-x^5/(x^3+y^3)) = t^2 f(x,y); \quad k=2.$$

Отже, задана функція є однорідною другого порядку однорідності. ■

Диференціальним рівнянням з однорідною правою частиною (***однорідним рівнянням***) називається рівняння, яке можна подати у вигляді $y' = f(y/x)$ або $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, де $f(y/x)$ − однорідна функція нульового порядку однорідності; $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ − однорідні функції одного порядку однорідності.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною $u = y/x$, де $u = u(x)$ − допоміжна шукана функція. Тоді $y = ux,\quad y' = u'x + u$ і ДР $y' = f(y/x)$ після перетворень приймає вигляд $du/\big(f(u) - u\big) = dx/x$.

Зауваження. Якщо $f(u) - u = 0$, тобто $f(y/x) - y/x = 0$. Тоді $f(y/x) = y/x$. Рівняння $y' = f(y/x)$ приймає вигляд ДР з відокремлюваними змінними $y' = y/x$ і розв'язується відповідним чином.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y' = -3xy/(x^2 - y^2)$; б) $\sqrt{x^2 - y^2}\,dx + y\,dx - x\,dy = 0$.

□ а) Це рівняння – однорідне, оскільки його права частина є однорідною функцією нульового порядку однорідності:

$$f(tx,ty) = -3(tx)(ty)/((tx)^2 - (ty)^2) = -3t^2xy/(t^2(x^2 - y^2)) =$$

$$= -3xy/(x^2 - y^2) = f(x,y).$$

Зробимо заміну $u = y/x$, де u − нова шукана функція аргументу x. Тоді $y = ux,\quad y' = u'x + u$. Вихідне рівняння набуває вигляду:

$$u'x + u = -3x \cdot ux/(x^2 - u^2x^2) = 3u/(u^2 - 1);$$

$$u'x = \frac{3u}{u^2 - 1} - u;\quad u'x = \frac{3u - u^3 + u}{u^2 - 1};\quad \frac{du}{dx}\,x = -\frac{u(u^2 - 4)}{u^2 - 1}.$$

Припускаючи, що $x \ne 0$ і $u(u^2 - 4) \ne 0$, тобто $u \ne 0$, $u \ne \pm 2$, відокремимо змінні:

$$\frac{(u^2-1)du}{u(u^2-4)}=-\frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування обох частин рівняння знайдемо

$$\int\frac{(u^2-1)\,du}{u(u^2-4)}=\int\frac{(u^2-1)\,du}{u(u+2)(u-2)}=\int\left(\frac{A}{u}+\frac{B}{u+2}+\frac{C}{u-2}\right)du=$$

$$=\Big|A(u+2)(u-2)+Bu(u-2)+Cu(u+2)=u^2-1;$$

$$\left.\begin{array}{r}u=0:\\ u=2:\\ u=-2:\end{array}\begin{cases}-4A=-1, & A=1/4;\\ 8C=3, & C=3/8;\\ 8B=3; & B=3/8\end{cases}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}+\frac{3}{8}\int\frac{du}{u+2}+$$

$$+\frac{3}{8}\int\frac{du}{u-2}=\frac{1}{4}\ln|u|+\frac{3}{8}\ln|u+2|+\frac{3}{8}\ln|u-2|+C=$$

$$=\frac{1}{8}\ln|u^2(u^2-4)^3|+C;\quad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C;$$

$$(1/8)\ln|u^2(u^2-4)^3|=-\ln|x|+(1/8)\ln|C|;$$

$$\ln|u^2(u^2-4)^3|=\ln|Cx^{-8}|;\ \ u^2(u^2-4)^3=Cx^{-8}.$$

Підставляючи значення $u=y/x$, одержимо загальний інтеграл рівняння:

$$(y/x)^2((y/x)^2-4)^3=Cx^{-8}\ \text{ або }\ y^2((y^2-4x^2)^3=C.$$

Виконуючи ділення, могли втратити розв'язки $x=0$, $u=0\Rightarrow y=0$, $u=\pm2\Rightarrow y=\pm2x$. Підставляючи їх у початкове рівняння, переконуємося, що функція $x=0$ не є розв'язком, а функції $y=0$ та $y=\pm2x$ служать розв'язками, причому входять у загальний інтеграл при $C=0$.

б) Функції $P(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}+y$ та $Q(x,y)=-x$ є однорідними одного (першого) порядку однорідності. Це означає, що задане ДР є однорідним. Розв'яжемо його відносно похідної $y'=dy/dx$:

$$\sqrt{x^2-y^2}+y=x\,dy/dx\,;\quad y'=\sqrt{1-(y/x)^2}+y/x\,.$$

Покладемо $u=y/x$. Тоді $y=ux$, $y'=xu'+u$. Підставляючи в рівняння вирази для y та y', отримаємо $x\,du/dx=\sqrt{1-u^2}$.

Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$du/\sqrt{1-u^2}=dx/x\,;\quad \int du/\sqrt{1-u^2}=\int dx/x\,;$$

$$\arcsin u=\ln x+\ln C\,;\quad \arcsin u=\ln Cx\,.$$

Замінюючи u на y/x, будемо мати загальний інтеграл

$\arcsin(y/x)=\ln Cx$ або $y=x\sin\ln Cx$ – загальний розв’язок в явній формі.

Крім того, розв’язками є $x=0$ та $u=\pm1\Rightarrow\ y=\pm x$, що могли бути втрачені при діленні. Ці розв’язки не містяться в загальному розв’язку і є особливими. ■

1.2.2 Лінійні рівняння першого порядку. Метод Лагранжа. Підстановка Бернуллі

Диференціальне рівняння першого порядку, яке алгебраїчними перетвореннями можна звести до вигляду $y'+p(x)y=q(x)$, де $p(x)$ і $q(x)$ – відомі неперервні функції від x (або сталі), називається ***лінійним***. Тобто, таке ДР є лінійним відносно шуканої функції $y=y(x)$ та її похідної $y'=dy/dx$.

Якщо права частина $q(x)\equiv0$, то рівняння називається ***лінійним однорідним*** (***ЛОДР***) (***лінійним рівнянням з нульовою правою частиною***). В іншому разі – ***лінійним неоднорідним*** (***ЛНДР***) (***лінійним рівнянням з ненульовою правою частиною***).

Лінійне однорідне рівняння – це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його відповідним чином:

$$y'+p(x)\,y=0\,;\quad dy/y=-p(x)\,dx\,;\quad \int dy/y=-\int p(x)\,dx\,;$$

$\ln|y|=-\int p(x)\,dx+\ln|C|\,;\quad y=C\,e^{-\int p(x)\,dx}$ – загальний розв’язок.

Для розв'язування ЛНДР застосуємо ***метод варіації довільної сталої*** (***метод Лагранжа***). За цим методом загальний розв'язок шукаємо в такому ж самому вигляді, як і розв'язок відповідного однорідного ДР, одержаного відкиданням правої частини $q(x)$ (поклавши $q(x) \equiv 0$), але вважаємо C не сталою, а невідомою функцією x, тобто $y = C(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}$.

Знайдемо похідну y':

$$y' = C'(x)\, e^{-\int p(x)dx} - C(x)\, e^{-\int p(x)dx} p(x).$$

Підставимо вирази для y і y' в неоднорідне ДР і отримаємо співвідношення для знаходження функції $C(x)$:

$$C'(x)\, e^{-\int p(x)dx} - C(x)\, e^{-\int p(x)dx} p(x) + p(x)\, C(x)\, e^{-\int p(x)dx} =$$

$$= q(x);\ C'(x)\, e^{-\int p(x)dx} = q(x);\ \ C'(x) = q(x)\, e^{\int p(x)dx}.$$

Інтегруючи, одержуємо

$$C(x) = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + \tilde{C},$$ де $\tilde{C}$ – довільна стала.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + \tilde{C} \right) e^{-\int p(x)\, dx}.$$

Зауваження. Загальний розв'язок ЛНДР можна подати у вигляді суми:

$$y = \tilde{C} e^{-\int p(x)\, dx} + \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx \right) e^{-\int p(x)\, dx} = \bar{y} + y_*,$$

де $\bar{y} = \tilde{C} e^{-\int p(x)\, dx}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння; $y_* = \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx\right) e^{-\int p(x)\, dx}$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (при $\tilde{C} = 0$).

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок ЛНДР першого порядку $x^2 y' - x^2 y \cos x = 3e^{\sin x}$ методом варіації довільної сталої.

□ Ділячи обидві частини ДР на x^2, зводимо його до стандартного вигляду $y' - y\cos x = (3/x^2)e^{\sin x}$.

Розв'язуємо відповідне однорідне ДР (без правої частини):

$$y' - y\cos x = 0;\ \ dy/dx = y\cos x;\ \ dy/y = \cos x\,dx;$$

$$\int dy/y = \int \cos x\,dx;\ \ \ln|y| = \sin x + \ln|C|;\ \ y = Ce^{\sin x}$$

– загальний розв'язок.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)e^{\sin x}$. Тоді $y' = C'(x)\,e^{\sin x} - C(x)\,e^{\sin x}\cos x$.

Підставляємо в неоднорідне ДР і знаходимо невідому функцію $C(x)$:

$$C'(x)\,e^{\sin x} - C(x)\,e^{\sin x}\cos x + C(x)\,e^{\sin x}\cos x = (3/x^2)e^{\sin x};$$

$$C'(x) = 3/x^2;\ \ C(x) = 3\int dx/x^2 = -3/x + \tilde{C}.$$

Отже, $y = (-3/x + \tilde{C})e^{\sin x}$ – загальний розв'язок неоднорідного ДР. ■

Лінійне неоднорідне ДР можна розв'язати безпосередньо ***методом Бернуллі***. Згідно з ним загальний розв'язок будуємо у вигляді добутку двох функцій від x: $y = u(x)v(x)$ (***підстановка Бернуллі***). Оскільки при такій заміні вже відшукуються дві функції, то виникає додатковий ступінь вільності, що дозволяє розщепити лінійне ДР на два рівняння з відокремлюваними змінними.

Диференціюємо добуток: $y' = u'v + uv'$. Підставляючи цей вираз у початкове рівняння, матимемо:

$$u'v + uv' + puv = q \text{ або } u'v + u(v' + pv) = q.$$

Використовуючи наявний ступінь вільності, виберемо функцію v такою, що $v' + pv = 0$.

Це співвідношення є рівнянням з відокремлюваними змінними для функції $v = v(x)$. Інтегруючи його, виберемо найпростіший за формою частинний розв'язок $v = e^{-\int p(x)\,dx}$.

Підставимо знайдену функцію у передостаннє ДР (враховуючи, що $v' + pv = 0$) і отримаємо для функції $u = u(x)$ рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'v = q \quad \text{або} \quad du/dx = q(x)/v(x),$$

звідки $u = \int \big(q(x)/v(x)\big)dx + C$ – загальний розв’язок. Тут C – довільна стала.

Підставляючи u і v у вираз для шуканої функції y, остаточно дістанемо: $y = uv = \left(\int \big(q(x)/v(x)\big)dx + C\right)v(x)$.

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок ЛНДР першого порядку $y' + 2y = e^x$ за допомогою підстановки Бернуллі.

□ Рівняння є лінійним відносно шуканої функції y та її похідної y'. Зробимо заміну $y = u(x)\cdot v(x)$, тоді $y' = u'v + uv'$. Отримаємо рівняння

$$u'v + uv' + 2uv = e^x \quad \text{або} \quad u'v + u(v' + 2v) = e^x.$$

Знайдемо функцію v як частинний розв’язок рівняння $v' + 2v = 0$. Це ДР з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні і проінтегруємо його:

$$dv/dx + 2v = 0;\quad dv = -2v\,dx;\quad dv/v = -2\,dx;$$

$$\int dv/v = -2\int dx;\quad \ln v = -2x.$$

Потенціюючи обидві частини рівняння, отримаємо $v = e^{-2x}$. Враховуючи, що $v' + 2v = 0$, підставимо цю функцію у ДР, де виконали заміну, і одержимо рівняння з відокремлюваними змінними для функції $u = u(x)$: $u'e^{-2x} = e^x$.

Розв’язавши його, знайдемо функцію u:

$$e^{-2x}du/dx = e^x;\ du = e^{3x}dx;\ \int du = \int e^{3x}dx;\ u = (1/3)e^{3x} + C.$$

Тоді загальний розв’язок початкового рівняння:

$$y = uv = ((1/3)e^{3x} + C)e^{-2x} \quad \text{або} \quad y = (1/3)e^x + Ce^{-2x}. \quad ■$$

Приклад 3. Розв’язати задачу Коші і знайти значення $\tilde{y} = y_K(\tilde{x})$ отриманого розв’язку $y_K = y_K(x)$ при вказаному значенні аргументу $\tilde{x}$:

а) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 2$; $\tilde{x} = -1$;

б) $y' + y\,ctg\,x = -6\cos^2 x$, $y(\pi/2) = \sqrt{2}$; $\tilde{x} = \pi/4$.

□ а) Задане рівняння – лінійне. Спочатку знайдемо його загальний розв'язок за допомогою підстановки Бернуллі $y = uv$. Здійснимо заміну:

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}; \; u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}.$$

Знайдемо v як деякий частинний розв'язок рівняння $v' + 2xv = 0$:

$$dv/dx = -2xv; \;\; dv/v = -2x\,dx; \;\; \int dv/v = -2\int x\,dx;$$

$$\ln v = -x^2; \;\; v = e^{-x^2}.$$

Підставимо отриману функцію у рівняння, в якому зробили заміну, і розв'яжемо його відносно u:

$$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}; \; du/dx = x; \; du = x\,dx; \; u = x^2/2 + C.$$

Одержуємо загальний розв'язок початкового ДР:

$$y = uv = (x^2/2 + C)e^{-x^2}.$$

Виділимо частинний розв'язок, що задовольняє початковій умові $y(0) = 2$. Для цього знайдемо відповідне значення довільної сталої C:

$$2 = (0/2 + C)e^0; \; C = 2.$$

Підставивши $C = 2$ у загальний розв'язок, дістаємо шуканий частинний розв'язок (розв'язок задачі Коші):

$$y_K = (x^2/2 + 2)e^{-x^2}.$$

Обчислимо значення цього розв'язку в точці $\tilde{x} = -1$:

$$y_K(-1) = ((-1)^2/2 + 2)e^{-(-1)^2} = (5/2)e^{-1}.$$

б) Розв'язати самостійно. Відповідь:

$$y_K = \left(2\cos^3 x + \sqrt{2}\right)/\sin x; \quad y_K(\pi/4) = 3. \;\; ■$$

Запитання для самоконтролю

1. Яка функція називається однорідною k-го порядку однорідності?
2. Що таке ДР з однорідною правою частиною (однорідне рівняння)?
3. За допомогою якої підстановки однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?
4. Яке ДР першого порядку називається лінійним однорідним? Лінійним неоднорідним?
5. Як будується розв'язок ЛНДР першого порядку методом варіації довільної сталої?
6. Як розв'язується ЛНДР першого порядку методом Бернуллі?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння з однорідною правою частиною:

а) $y' = \frac{x+y}{x-y}$; б) $xdy - \left(y - x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}\right)dx = 0$.

Відповідь: а) $\mathrm{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = \ln Cx$;

б) $\sin\frac{y}{x} = Ce^{-x}$.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

а) $xy' - 2y = 2x^4 - x$; б) $y' + 2xy = -2x^3$.

Відповідь: а) $y = x^4 + x + Cx^2$; б) $y = 1 - x^2 + Ce^{-x^2}$.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші:

а) $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$; $y(1) = 3$;

б) $y' + y \cdot \mathrm{tg}\,x = \frac{8\sin x}{\cos^2 x}$; $y(0) = 5$.

Відповідь: а) $y = x \cdot \sqrt[3]{27 + 3\ln x}$; б) $y = 4\cos^{-1}x + \cos x$.

Лекція 1.3 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

План

1.3.1 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Основні поняття

1.3.2 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Структура загального розв'язку. Метод Ейлера. Характеристичне рівняння

1.3.3 Побудова загального розв'язку однорідного диференціального рівняння у випадку дійсних різних, дійсних кратних і комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння. Розв'язування задачі Коші

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *лінійні диференціальні рівняння вищих порядків, лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку, лінійно незалежні розв'язки, структура загального розв'язку, характеристичне рівняння.*

1.3.1 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Основні поняття

Лінійним диференціальним рівнянням n ***-го порядку*** $(n \geq 1)$ називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x),$$

де $y = y(x)$ − шукана функція аргументу x; $a_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ та $f(x)$ − відомі неперервні функції від x (або сталі), причому $a_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ − ***коефіцієнти***, $f(x)$ − ***права частина***. Тобто таке ДР є лінійним відносно шуканої функції $y = y(x)$ та всіх її похідних.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння називається ***лінійним однорідним*** ДР (ЛОДР) (***лінійним рівнянням з нульовою правою частиною***),. В іншому разі, коли $f(x) \neq 0$, − ***лінійним неоднорідним*** (ЛНДР) (***лінійним рівнянням з ненульовою правою частиною***).

Загальні властивості лінійних ДР вищих порядків розглянемо на прикладі ***лінійного ДР другого порядку***

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x),$$

де $p(x)$ і $q(x)$ − коефіцієнти; $f(x)$ − права частина.

Система функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ $(n\geq 2)$ називається ***лінійно залежною*** в інтервалі $(a;b)$, якщо існують сталі числа $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$, не всі рівні нулю, такі, що для відповідної лінійної комбінації у кожній точці $x\in(a;b)$ виконується рівність:

$$\mu_1 y_1(x)+\mu_2 y_2(x)+...+\mu_n y_n(x)\equiv 0.$$

Якщо ця тотожність виконується лише за умови, коли всі $\mu_i=0$, $i=\overline{1,n}$, то система функцій $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ називається ***лінійно незалежною*** в інтервалі $(a;b)$. У випадку двох функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ умову лінійної залежності можна подати у вигляді: $y_1(x)/y_2(x)=C=const$, $\forall x\in(a;b)$.

Наприклад, а) функції $y_1(x)=\ln x$ і $y_2(x)=\lg x$ лінійно залежні на півпрямій $(0;+\infty)$, оскільки

$$y_1(x)/y_2(x)=\ln x/\lg x=\ln 10=const;$$

б) функції $y_1(x)=\sin x$ і $y_2(x)=\sin 2x$ лінійно незалежні на множині дійсних чисел R, оскільки

$$y_1(x)/y_2(x)=\sin x/\sin 2x=1/(2\cos x)\neq const.$$

1.3.2 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Структура загального розв’язку. Метод Ейлера. Характеристичне рівняння

Розглянемо систему двох функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$, що є частинними розв’язками деякого одного ЛОДР другого порядку і тому двічі диференційовані. Сформуємо функціональний визначник:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

що називається ***визначником Вронського*** (***вронськіаном***) даної системи.

Ознаку лінійної залежності чи незалежності такої системи виражає наступна ***теорема***. *Якщо вронськіан* $W(x)$ *системи частинних розв'язків* $y_1(x), y_2(x)$ *якого-небудь одного ЛОДР другого порядку дорівнює нулю в деякій точці* $x_0 \in (a;b)$, *то ця система розв'язків – лінійно залежна, причому вронськіан* $W(x)$ *тотожно рівний нулю на всьому проміжку* $(a;b)$. *Якщо вронськіан* $W(x)$ *системи* $y_1(x), y_2(x)$ *відмінний від нуля в деякій точці* $x_0 \in (a;b)$, *то ця система розв'язків – лінійно незалежна, причому вронськіан* $W(x)$ *не перетворюється в нуль у жодній точці проміжку* $(a;b)$.

Для заданого ЛОДР другого порядку будь-яка лінійно незалежна система двох його частинних розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називається ***фундаментальною***.

Структуру загального розв'язку ЛОДР другого порядку відображає така ***теорема***. *Якщо функції* $y_1(x), y_2(x)$ *утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків ЛОДР другого порядку, то їх лінійна комбінація* $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, *де* C_1 *і* C_2 *− довільні сталі, слугує загальним розв'язком цього рівняння*.

□ Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ − фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР другого порядку $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

Перевіримо, чи їх лінійна комбінація $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ також є розв'язком (задовольняє ЛОДР). Для цього підставимо функцію $\bar{y}$ та її похідні у рівняння:

$$\bar{y}' = C_1 y_1' + C_2 y_2'; \quad \bar{y}'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'';$$

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1(y_1'' +$$

$$+ p y_1' + q y_1) + C_2(y_2'' + p y_2' + q y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Далі покажемо, що для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'$$

знаходяться єдині конкретні значення сталих C_1 і C_2.

Справді, для визначення C_1 і C_2 дістаємо лінійну алгебраїчну систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0; \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0', \end{cases}$$

визначником якої служить вронськіан $W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$.

Для фундаментальної системи $y_1(x)$, $y_2(x)$ вронськіан відмінний від нуля $W(x_0) \neq 0$. Тому система лінійних рівнянь відносно C_1 і C_2 завжди має і причому єдиний розв’язок.

Отже, $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ − загальний розв’язок ЛОДР. ■

Наприклад, частинними розв’язками ЛОДР другого порядку $y'' + y = 0$ є функції $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$. (Перевірте це самостійно). Їх вронськіан відмінний від нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Тому ці розв’язки − лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему. Отже, загальний розв’язок ЛОДР можна подати у вигляді $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Зауваження. Очевидний нульовий розв’язок ЛОДР $y = 0$ не утворює фундаментальної системи з довільними іншими частинними розв’язками, оскільки при цьому вронськіан тотожно рівний нулю.

Приклад 1. Перевірити, що функції $y_1 = e^{-2x} \cos 3x$ і $y_2 = e^{-2x} \sin 3x$ слугують частинними розв’язками ЛОДР другого порядку $y'' + 4y' + 13y = 0$ та утворюють фундаментальну систему. Записати загальний розв’язок цього ЛОДР.

(Розв’язати самостійно).

Для ***ЛОДР*** n ***-го порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_n y=0,\;\; a_i=const\in R,\; i=\overline{1,n}$$

Ейлером розроблено загальний метод його розв'язування шляхом побудови фундаментальної системи та на її основі загального розв'язку. Розглянемо його на прикладі ***ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***:

$$y''+py'+qy=0,\;\; p=const\in R;\; q=const\in R.$$

Частинні розв'язки шукаємо у вигляді експоненти $y=e^{kx}$, де k − невідомий сталий коефіцієнт. Підставимо цю функцію $y=e^{kx}$ та її похідні $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$ у рівняння і дістанемо: $(k^2+pk+q)e^{kx}=0$. Оскільки $e^{kx}\neq 0$, то для визначення k отримуємо співвідношення $k^2+pk+q=0$, яке називають ***характеристичним рівнянням*** даного ЛОДР.

1.3.3 Побудова загального розв'язку однорідного диференціального рівняння у випадку дійсних різних, дійсних кратних і комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння. Розв'язування задачі Коші

Для ЛОДР другого порядку характеристичне рівняння $k^2+pk+q=0$ є квадратним відносно k і на множині комплексних чисел завжди має два розв'язки k_1 і k_2. При цьому можливі три випадки, в залежності від знака дискримінанта $D=p^2-4q$.

Випадок 1. $D>0$. Обидва корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1\neq k_2$: $k_{1,2}=\left(-p\pm\sqrt{D}\right)/2$. Тоді $y_1=e^{k_1x}$ і $y_2=e^{k_2x}$ − лінійно незалежні розв'язки, що утворюють фундаментальну систему. Загальний розв'язок має вигляд $\bar{y}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок $y''-8y'+12y=0$.

$$\square\;\; k^2-8k+12=0;\; D=64-48=16>0;$$

$$k_1=6,\; k_2=2;\; \bar{y}=C_1e^{6x}+C_2e^{2x}.\quad\blacksquare$$

Випадок 2. $D=0$. Корені k_1 і k_2 − дійсні рівні числа: $k_1=k_2=k=-p/2$. Тобто, $k=-p/2$ − один корінь кратності $r=2$. Тоді $y_1=e^{kx}$ − частинний розв'язок. Знайдемо другий лінійно незалежний з ним розв'язок y_2. Скористаємося ***методом збурень***.

Вважатимемо, що k_1 і k_2 відрізняються на нескінченно малу величину Δk: $k_1=k$; $k_2=k+\Delta k$; $\Delta k\to 0$. Таким чином, повертаємося до випадку 1. Тоді лінійна комбінація $y_{2*}=\left(e^{(k+\Delta k)x}-e^{kx}\right)/\Delta k$ − теж частинний розв'язок. Переходячи у y_{2*} до границі при $\Delta k\to 0$, дістаємо невизначеність типу $0/0$, що розкривається за правилом Лопіталя:

$$y_2=\lim_{\Delta k\to 0} y_{2*}=\lim_{\Delta k\to 0}\left(e^{(k+\Delta k)x}-e^{kx}\right)/\Delta k=\left|0/0\right|=$$

$$=\lim_{\Delta k\to 0}(e^{(k+\Delta k)x}-e^{kx})'/(\Delta k)'=\lim_{\Delta k\to 0} e^{(k+\Delta k)x}x=xe^{kx}.$$

Перевіримо, що одержана функція $y_2=x\,e^{kx}$ є розв'язком ЛОДР:

$$y_2'=e^{kx}+kxe^{kx};\;\; y_2''=ke^{kx}+ke^{kx}+k^2xe^{kx}=2ke^{kx}+k^2xe^{kx};$$

$$2ke^{kx}+k^2xe^{kx}+p(e^{kx}+kxe^{kx})+qxe^{kx}=e^{kx}(k^2x+2k+$$

$$+p+pkx+qx)=\left|k=-p/2\right|=e^{kx}((-p/2)^2x+2(-p/2)+$$

$$+p+p(-p/2)x+qx)=-(1/4)e^{kx}(p^2-4q)x=$$

$$=\left|p^2-4q=D=0\right|=-xe^{kx}\cdot 0=0.$$

До того ж, вронськіан системи $y_1=e^{kx}$, $y_2=x\,e^{kx}$ відмінний від нуля:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{kx} & x\,e^{kx}\\ k\,e^{kx} & e^{kx}+kx\,e^{kx}\end{vmatrix}=e^{2kx}\neq 0.$$

Тому ці розв'язки $y_1=e^{kx}$ і $y_2=x\,e^{kx}$ − лінійно незалежні та утворюють фундаментальну систему.

Отже, загальний розв'язок ЛОДР можна подати у вигляді

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок $y'' - 6y' + 9y = 0$.

□ $k^2 - 6k + 9 = 0$; $D = 36 - 36 = 0$, $k_1 = k_2 = k = 3$;

$$\bar{y} = e^{3x}(C_1 + C_2 x). \ ■$$

Випадок 3. $D < 0$. Характеристичне рівняння має два комплексно спряжені корені $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, де $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{-D}/2$, $D = p^2 - 4q < 0$, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Тоді $y_{1к} = e^{k_1 x} = e^{(\alpha+\beta i)x}$, $y_{2к} = e^{k_2 x} = e^{(\alpha-\beta i)x}$ – комплексні лінійно незалежні розв'язки. Їх лінійна комбінація

$$\bar{y}_к = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}$$

є комплексним загальним розв'язком.

Але ДР має дійсні коефіцієнти, тому бажано мати розв'язки в дійсній формі. На основі формули Ейлера маємо:

$$y_{1к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x); \quad y_{2к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Можна показати, що *для комплекснозначної функції, яка є розв'язком диференціального рівняння, її уявна та дійсна частини також будуть його розв'язками*. (Зробіть це самостійно).

Отже, дістаємо лінійно незалежні дійсні частинні розв'язки $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, що утворюють фундаментальну систему. Дійсним загальним розв'язком є їх лінійна комбінація:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x =$$

$$= e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок $y'' + 4y' + 29y = 0$.

□ $k^2 + 4k + 29 = 0$; $D = 16 - 116 = -100 < 0$;

$$\sqrt{D} = 10i; \quad k_{1,2} = (-4 \pm 10i)/2 = -2 \pm 5i;$$

$$\alpha=-2;\ \beta=5;\quad \bar{y}=e^{-2x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x).\quad \blacksquare$$

При розв'язуванні задачі Коші потрібно знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє вказаним початковим умовам. Звичайно спочатку знаходять загальний розв'язок. А потім використовують початкові умови та обчислюють відповідні значення довільних сталих, підставляючи які у загальний розв'язок, отримують розв'язок задачі Коші.

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші:

а) $y''+9y'=0;\quad y(1)=-2;\ y'(1)=0$;

б) $y''-9y=0;\quad y(0)=3;\ y'(0)=-3$;

в) $y''+4y'+4y=0;\quad y(0)=1;\ y'(0)=3$;

г) $y''+9y=0;\quad y(\pi/2)=6;\ y'(\pi/2)=2$;

д) $y''+6y'+25y=0;\quad y(0)=0;\ y'(0)=12$.

□ а) Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2+9k=0;\ k(k+9)=0;\ k_1=0;\ k_2=-9.$$

Оскільки корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1\neq k_2$, то маємо випадок 1. У відповідній формі записуємо загальний розв'язок: $\bar{y}=C_1e^{0x}+C_2e^{-9x}=C_1+C_2e^{-9x}$.

Конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2 знаходимо, враховуючи початкові умови:

$$\bar{y}'=-9C_2e^{-9x};\quad \begin{matrix} y(1)=-2: \\ y'(1)=0: \end{matrix}\quad \left\{\begin{aligned} -2&=C_1+C_2e^{-9\cdot 1}; \\ 0&=-9C_2e^{-9\cdot 1}; \end{aligned}\right.\quad \left\{\begin{aligned} C_2&=0; \\ C_1&=-2. \end{aligned}\right.$$

Тоді $y_K=-2$ − розв'язок задачі Коші.

б) $k^2-9=0;\ k^2=9;\ k_{1,2}=\pm 3;\ \bar{y}=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$;

$$\bar{y}'=3C_1e^{3x}-3C_2e^{-3x};\quad \left\{\begin{aligned} 3&=C_1e^{3\cdot 0}+C_2e^{-3\cdot 0}; \\ -3&=3C_1e^{3\cdot 0}-3C_2e^{-3\cdot 0}; \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3; \\ C_1 - C_2 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = 2; \end{cases} \quad y_K = e^{4x} + 2e^{-4x}.$$

в) $k^2 + 4k + 4 = 0$; $D = 16 - 16 = 0$; $k_1 = k_2 = k = -2$;

$$\bar{y} = e^{-2x}(C_1 + C_2 x); \ \bar{y}' = C_2 e^{-2x} - 2(C_1 + C_2 x)e^{-2x};$$

$$\begin{cases} 1 = e^{-2\cdot 0}(C_1 + C_2 \cdot 0); \\ 3 = C_2 e^{-2\cdot 0} - 2(C_1 + C_2 \cdot 0)e^{-2\cdot 0}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 - 2C_1 = 3; \ C_2 = 5; \end{cases}$$

$$y_{\text{К}} = e^{-2x}(1 + 5x).$$

г) $k^2 + 9 = 0$; $k^2 = -9$; $k_{1,2} = \pm 3i$; $\alpha = 0$; $\beta = 3$;

$$\bar{y} = e^{0x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x;$$

$$\bar{y}' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x;$$

$$\begin{matrix} y(\pi/2) = 6: \\ y'(\pi/2) = 2: \end{matrix} \quad \begin{cases} 6 = C_1 \cos(3\cdot\pi/2) + C_2 \sin(3\cdot\pi/2); \\ 2 = -3C_1 \sin(3\cdot\pi/2) + 3C_2 \cos(3\cdot\pi/2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 = -C_2; \ C_2 = -6; \\ 2 = 3C_1; \ C_1 = 2/3; \end{cases} \quad y_K = (2/3)\cos 3x - 6\sin 3x.$$

д) $k^2 + 6k + 25 = 0$; $D = 36 - 100 = -64 < 0$;

$$k_{1,2} = (-6 \pm \sqrt{-64})/2 = (-6 \pm 8i)/2 = -3 \pm 4i; \quad \alpha = -3; \ \beta = 4;$$

$$\bar{y} = e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x); \quad \bar{y}' = -3e^{-3x}(C_1 \cos 4x +$$

$$+ C_2 \sin 4x) + e^{-3x}(-4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x);$$

$$\begin{cases} 0 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0); \\ 12 = -3e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0(-4C_1 \sin 0 + 4C_2 \cos 0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = C_1; \\ 12 = -3C_1 + 4C_2; \ C_2 = 3; \end{cases} \quad y_K = 3e^{-3x}\sin 4x. \ \blacksquare$$

Запитання для самоконтролю

1. Яке ДР n-го порядку називається лінійним однорідним? Лінійним неоднорідним?
2. Яка система функцій $y_1(x),\ y_2(x), ...,\ y_n(x)$ $(n \geq 2)$ називається лінійно залежною? Лінійно незалежною?
3. Сформулюйте ознаку лінійної залежності чи незалежності системи двох частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x)$ одного ЛОДР другого порядку.
4. Що таке фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР?
5. Яка структура загального розв'язку ЛОДР другого порядку?
6. Що таке характеристичне рівняння для ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
7. Як скласти характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
8. За якими формулами будується загальний розв'язок ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами в залежності від виду коренів характеристичного рівняння?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок:

а) $y'' + 2y' - 3y = 0$; б) $y'' + 8y' + 16y = 0$;

в) $y'' + 4y' + 40y = 0$.

Відповідь: а) $y = C_1e^x + C_2e^{-3x}$; б) $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$;

в) $y = e^{-2x}(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x)$.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші:

а) $y'' - 6y' + 8y = 0;\ y(0) = 3;\ y'(0) = -8$;

б) $y'' + 10y' + 25y = 0;\ y(0) = -3;\ y'(0) = 9$;

в) $y'' + 2y' + 26y = 0;\ y(\pi) = 1;\ y'(\pi) = -1$.

Відповідь: а) $y = 10e^{2x} - 7e^{4x}$;

б) $y = -3(1 + 2x)e^{-5x}$; в) $y = -e^{-(x-\pi)} \cos 5x$.

Лекція 1.4 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку

План

1.4.1 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду

1.4.2 Відшукання частинного розв'язку, що відповідає вигляду правої частини. Розв'язування задачі Коші

1.4.3 Застосування лінійних диференціальних рівнянь у прикладних задачах

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку, структура загального розв'язку, принцип суперпозиції, права частина спеціального вигляду, метод невизначених коефіцієнтів.*

1.4.1 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду

Структуру загального розв'язку ЛНДР другого порядку визначає така *теорема*. *Загальний розв'язок ЛНДР другого порядку*

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

можна зобразити у вигляді суми загального розв'язку $\bar{y}$ *відповідного ЛОДР* $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ *і якого-небудь частинного розв'язку* y_* *ЛНДР*: $y=\bar{y}+y_*$.

Принцип суперпозиції розв'язків ЛНДР другого порядку відображає наступна ***теорема***. *Якщо у ЛНДР другого порядку*

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

права частина є сумою двох функцій $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ *, то його частинний розв'язок також можна подати у вигляді суми* $y_*=y_{*1}+y_{*2}$ *, де* y_{*1} *і* y_{*2} *– частинні розв'язки рівнянь*

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x) \quad \text{і} \quad y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$$

з тією ж самою частиною ліворуч і відповідними функціями $f_1(x)$, $f_2(x)$ *праворуч.*

Розглянемо ***ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$y''+py'+qy=f(x), \quad p=const\in R;\ q=const\in R,$$

де права частина має ***спеціальний вигляд***

$$f(x)=e^{ax}(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx).$$

Тут $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ − многочлени відповідно степеня n і m; a і b − дійсні сталі, з яких формується ***характеристичне комплексне число*** $z=a+bi$.

Зауваження. m і n − довільні невід'ємні цілі числа, $m\geq 0$, $n\geq 0$; a і b − довільні дійсні числа, в тому числі $a=0,\ b=0$.

1.4.2 Відшукання частинного розв'язку, що відповідає вигляду правої частини. Розв'язування задачі Коші

Щоб знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння, необхідно знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння та будь-який частинний розв'язок неоднорідного: $y=\bar{y}+y_*$. Процедури знаходження загального розв'язку однорідного диференціального рівняння $\bar{y}$ вже розглянуто. Залишається опрацювати способи відшукання деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння y_*. Будемо розглядати тільки рівняння з правими частинами спеціального вигляду, деталізуючи окремі важливі випадки.

Згідно з ***методом невизначених коефіцієнтів*** *структура частинного розв'язку* y_* *ЛНДР формується за виглядом правої частини* $f(x)$ *з урахуванням того, коренем якої кратності* r $(r\geq 0)$ *служить характеристичне число* $z=a+bi$ *для характеристичного рівняння. Невідомі параметри (коефіцієнти) цієї структури знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь, які одержуються прирівнюванням коефіцієнтів при подібних відносно* x *членах.*

У загальному випадку правої частини спеціального вигляду $f(x)=e^{ax}(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx)$ *частинний розв'язок* y_* *шукаємо у відповідній формі:*

$$y_*=x^r e^{ax}(\overline{P_s}(x)\cos bx+\overline{Q}_s(x)\sin bx),$$

де $\overline{P_s}(x)$ і $\overline{Q}_s(x)$ − *многочлени степеня* $s=\max\{n,m\}$ *з невідомими коефіцієнтами.*

Приклад 1. Записати структуру частинного розв'язку y_*:

$$y''+4y'+20y=e^{-2x}(x^2\cos 4x-\sin 4x).$$

□ $y''+4y'+20y=0$; $k^2+4k+20=0$; $D=-64$;

$k_{1,2}=-2\pm 4i$; $z=a+bi=-2+4i$ − корінь кратності $r=1$;

$s=\max\{2;0\}=2$; $y_*=x^1e^{-2x}((Ax^2+Bx+C)\cos 4x+(Dx^2+$ $+Ex+F)\sin 4x)$, де A,B,C,D,E,F – невідомі коефіцієнти. ■

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y''-2y'-3y=e^x(10\cos x-25\sin x)$.

□ $y''-2y'-3y=0$; $k^2-2k-3=0$; $D=16$; $k_1=3$;

$k_2=-1$; $\bar{y}=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$; $z=a+bi=1+i$ − не є коренем $(r=0)$; $s=\max\{0;0\}=0$; $y_*=e^x(A\cos x+B\sin x)$;

$$y_*'=e^x(A\cos x+B\sin x)+e^x(-A\sin x+B\cos x)=e^x(A\cos x+$$
$$+B\sin x-A\sin x+B\cos x);\quad y_*''=e^x(A\cos x+B\sin x-$$
$$-A\sin x+B\cos x)+e^x(-A\sin x+B\cos x-A\cos x-B\sin x)=$$
$$=e^x(-2A\sin x+2B\cos x);$$

$$e^x(-2A\sin x+2B\cos x)-2e^x(A\cos x+B\sin x-A\sin x+$$
$$+B\cos x)-3e^x(A\cos x+B\sin x)=e^x(10\cos x-25\sin x)\,|:e^x\neq 0;$$
$$-5A\cos x-5B\sin x=10\cos x-25\sin x;$$

$$\begin{aligned} \cos x: &\ \begin{cases} -5A=10; & A=-2; \\ -5B=-25; & B=5; \end{cases} \\ \sin\ x: & \end{aligned}$$

Отже, маємо загальний розв'язок:

$$y=\bar{y}+y_*=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+e^x(-2\cos x+5\sin x)\,.\ \blacksquare$$

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші:

а) $y''+6y'+8y=16x^2+10$; $\quad y(0)=7;\ y'(0)=-9$;

б) $y''+2y'+5y=12e^{-x}\sin 2x$; $\quad y(0)=0;\ y'(0)=5$.

□ а) Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, шукати його будемо у вигляді: $y=\bar{y}+y_*$.

Запишемо відповідне однорідне рівняння: $y''+6y'+8y=0$.

Складемо і розв'яжемо його характеристичне рівняння:

$$k^2+6k+8=0;\ \ D=36-32=4;\ k_1=-4;\ \ k_2=-2\,.$$

Тоді маємо: $\bar{y}=C_1e^{-4x}+C_2e^{-2x}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР.

Далі формуємо частинний розв'язок y_* ЛНДР, що відповідає вигляду правої частини:

$$z=a+bi=0+0i=0\ -\text{не є коренем;}\ \ n=2;\ \ y_*=Ax^2+Bx+C\,.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів обчислимо значення невідомих A, B, C. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх разом з y_* у початкове рівняння:

$$y_*'=2Ax+B;\ y_*''=2A;\quad 2A+6(2Ax+B)+8(Ax^2+Bx+C)=$$

$$=16x^2+10;\ \ 8Ax^2+(12A+8B)x+(2A+6B+8C)=16x^2+10;$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \begin{cases} 8A=16; & A=2; \\ 12A+8B=0; & B=-(3/2)A=-3; \\ 2A+6B+8C=10; & C=(5-A-3B)/4=3; \end{cases} \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

Тоді $y_* = 2x^2 - 3x + 3$ − частинний розв’язок y_* ЛНДР за виглядом правої частини.

Складаємо загальний розв’язок ЛНДР:

$$y = \bar{y} + y_*; \quad y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-2x} + 2x^2 - 3x + 3.$$

Для виділення із загального розв’язку частинного, що задовольняє початковим умовам, − розв’язку задачі Коші − потрібно знайти відповідні значення довільних сталих. Для цього спочатку знайдемо похідну загального розв’язку, а потім у сам загальний розв’язок і в його похідну підставимо початкові дані. Далі розв’яжемо одержану систему та дістанемо конкретні значення довільних сталих і сформуємо шуканий частинний розв’язок:

$$y' = -4C_1 e^{-4x} - 2C_2 e^{-2x} + 4x - 3;$$

$$\begin{matrix} y(0) = 7: \\ y'(0) = -9: \end{matrix} \begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 + 3 = 7; \\ -4C_1 e^0 - 2C_2 e^0 - 3 = -9; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 4; \\ -4C_1 - 2C_2 = -6; \end{cases}$$

$$-\begin{cases} C_1 + C_2 = 4; \\ 2C_1 + C_2 = 3; \end{cases} \quad -C_1 = 1;\ C_1 = -1;\ C_2 = 4 - C_1 = 5.$$

Таким чином, маємо розв’язок задачі Коші:

$$y_K = -e^{-4x} + 5e^{-2x} + 2x^2 - 3x + 3.$$

б) $y'' + 2y' + 5y = 0$; $k^2 + 2k + 5 = 0$; $D = 4 - 20 = -16$;

$k_{1,2} = -1 \pm 2i$; $\bar{y} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$;

$z = a + bi = -1 + 2i$ − корінь кратності $r = 1$; $s = \max\{0; 0\} = 0$;

$$y_* = x^1 e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x); \quad y_*' = e^{-x}(A\cos 2x +$$

$$+ B\sin 2x) - xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 2xe^{-x}(-A\sin 2x +$$

$$+ B\cos 2x); \quad y_*'' = -2e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 4e^{-x} \times$$

$$\times (-A\sin 2x + B\cos 2x) - 3xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) -$$

$$-4xe^{-x}(-A\sin 2x + B\cos 2x);$$

$$-2e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+4e^{-x}(-A\sin 2x+B\cos 2x)-$$

$$-3xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)-4xe^{-x}(-A\sin 2x+B\cos 2x)+$$

$$+2e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)-2xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+$$

$$+4xe^{-x}(-A\sin 2x+B\cos 2x)+5xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)=$$

$$=12e^{-x}\sin 2x \ \mid \div e^{-x}\neq 0\,;$$

$$-2A\cos 2x-2B\sin 2x-4A\sin 2x+4B\cos 2x-3Ax\cos 2x-$$
$$-3Bx\sin 2x+4Ax\sin 2x-4Bx\cos 2x+2A\cos 2x+$$
$$+2B\sin 2x-2Ax\cos 2x-2Bx\sin 2x-4Ax\sin 2x+$$
$$+4Bx\cos 2x+5Ax\cos 2x+5Bx\sin 2x=12\sin 2x\,;$$
$$4B\cos 2x-4A\sin 2x=12\sin 2x\,;$$

$$\begin{array}{c|} \cos 2x \\ \sin 2x \end{array}\ \begin{cases} 4B=0; & B=0;\\ -4A=12; & A=-3;\end{cases}\quad y_*=-3xe^{-x}\cos 2x\,;$$

$$y=\bar{y}+y_*=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-3xe^{-x}\cos 2x\,;$$

$$y'=-e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+2e^{-x}(-C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)-$$

$$-3e^{-x}\cos 2x+3xe^{-x}\cos 2x+6xe^{-x}\sin 2x\,;$$

$$\begin{array}{r} y(0)=0: \\ y'(0)=5: \end{array}\begin{cases} C_1=0; & C_1=0;\\ -C_1+2C_2-3=5; & C_2=4;\end{cases}$$

Таким чином, маємо розв’язок задачі Коші:

$$y_K=4e^{-x}\sin 2x-3xe^{-x}\cos 2x\,.\quad\blacksquare$$

Зауваження. Якщо права частина $f(x)$ не має спеціального вигляду, то часто її можна подати як скінченну суму

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x),$$

де кожний доданок $f_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ уже має спеціальний вигляд. Тоді за принципом суперпозиції $y_*=y_{*1}+y_{*2}+\ldots+y_{*n}$, де y_{*i} – частинний розв’язок рівняння $y''+p(x)y'+q(x)y=f_i(x)$ з тією ж самою лівою і відповідною правою частиною, $i=\overline{1,n}$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок:

а) $y''-2y'+6y=18e^{2x}-29\sin x$; б) $y''+4y=12e^{-2x}+8x$;

в) $y''+6y'+13y=3x^2+4\cos 2x$.

□ а) Для відповідного ЛОДР $y''-2y'+6y=0$ розв'язуємо характеристичне рівняння: $k^2-2k+6=0$; $D=-20$; $k_{1,2}=1\pm\sqrt{5}i$ і записуємо його загальний розв'язок:

$$\bar{y}=e^{x}(C_1\cos\sqrt{5}x+C_2\sin\sqrt{5}x).$$

Права частина $f(x)=18e^{2x}-29\sin x$ не має спеціального вигляду, але її можна подати як суму двох доданків спеціального вигляду $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, де $f_1(x)=18e^{2x}$, $f_2(x)=-29\sin x$.

Тоді $y_*=y_{*1}+y_{*2}$. Знайдемо окремо y_{*1} і y_{*2}:

$$z_1=a_1+b_1i=2+0i=2 \text{ – не є коренем; } y_{*1}=\overline{A}e^{2x};$$

$$y'_{*1}=2\overline{A}e^{2x};\quad y''_{*1}=4\overline{A}e^{2x};\quad 4\overline{A}e^{2x}-2\cdot 2\overline{A}e^{2x}+6\overline{A}e^{2x}=$$

$$=18e^{2x};\quad 6\overline{A}e^{2x}=18e^{2x};\quad \overline{A}=3;\quad y_{*1}=3e^{2x};$$

$$z_2=a_2+b_2i=0+1i=i \text{ – не є коренем; } y_{*2}=\overline{A}\cos x+\overline{B}\sin x;$$

$$y'_{*2}=-\overline{A}\sin x+\overline{B}\cos x;\quad y''_{*2}=-\overline{A}\cos x-\overline{B}\sin x;$$

$$-\overline{A}\cos x-\overline{B}\sin x-2(-\overline{A}\sin x+\overline{B}\cos x)+6(\overline{A}\cos x+$$

$$+\overline{B}\sin x)=-29\sin x;$$

$$-(5\overline{A}-2\overline{B})\cos x+(2\overline{A}+5\overline{B})\sin x=-29\sin x;$$

$$\begin{array}{c|}\cos x\\ \sin x\end{array}\ \begin{cases}5\overline{A}-2\overline{B}=0;\\ 2\overline{A}+5\overline{B}=-29;\end{cases}\quad \begin{cases}\overline{B}=(5/2)\overline{A};\\ 2\overline{A}+5\cdot(5/2)\overline{A}=-29;\end{cases}$$

$$\overline{A}=-2;\quad \overline{B}=-5;\quad y_{*2}=-2\cos x-5\sin x.$$

Тоді $y_*=y_{*1}+y_{*2}=3e^{2x}-2\cos x-5\sin x$.

Отже, загальний розв’язок ЛНДР: $y = \bar{y} + y_* =$

$$= e^{x}(C_1 \cos\sqrt{5}x + C_2 \sin\sqrt{5}x) + 3e^{2x} - 2\cos x - 5\sin x .$$

(Рівняння б) і в) розв’язати самостійно). ■

1.4.3 Застосування лінійних диференціальних рівнянь у прикладних задачах

До ЛНДР другого порядку приводить вивчення проходження струму в електричному колі. Розглянемо електричний контур, що складається з послідовно сполучених активного опору R, індуктивності L і ємності C, які підключенні до джерела електрорушійної сили (ЕРС) E, що змінюється з бігом часу t за відомим законом $E = E(t)$ (рис. 1.2). Дослідимо, як змінюється сила струму в контурі $I = I(t)$ з часом t.

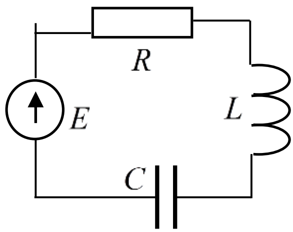

Рисунок 1.2

Для елементів R, L і C виконуються відомі з фізики співвідношення, що зв’язують падіння напруги на кінцях елемента $U(t)$ та силу струму в ньому $I(t)$:

$$U_R(t) = R\,I_R(t);\;\; U_L(t) = L\,\frac{dI_L(t)}{dt};\;\; U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I_C(t)\,dt + U_C(0),$$

де $U_C(0)$ – падіння напруги на ємності в початковий момент часу $t = 0$.

При послідовному сполученні сила струму у всіх елементах однакова: $I_R(t) = I_L(t) = I_C(t) = I(t)$. За другим законом Кірхгофа алгебраїчна сума падінь напруги на всіх елементах замкнутого контура дорівнює ЕРС: $U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = E(t)$. Тому

$$R\,I(t) + L\,\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt + U_C(0) = E(t).$$

Диференціюючи по t отриману рівність, дістанемо для сили струму $I = I(t)$ ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$R\,\frac{dI(t)}{dt}+L\,\frac{d^2I(t)}{dt^2}+\frac{1}{C}I(t)=\frac{dE(t)}{dt}; \quad I''+2\alpha I'+\omega_0^2 I=(1/L)E',$$

де $\alpha = R/(2L)$; $\omega_0^2 = 1/(LC)$ і для скорочення запису опущено аргумент t.

Загальний розв'язок ЛНДР можна подати у вигляді $I=\bar{I}+I_*$, де $\bar{I}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР, I_* – деякий частинний розв'язок ЛНДР.

Розглянемо відповідне однорідне ДР $I''+2\alpha I'+\omega_0^2 I=0$, характеристичне рівняння якого $k^2+2\alpha k+\omega_0^2=0$, у деяких практично важливих ситуаціях.

1. Нехай активний опір відсутній $R=0$, тоді $\alpha=0$ і ЛОДР набуває вигляду $I''+\omega_0^2 I=0$. Спрощене характеристичне рівняння $k^2+\omega_0^2=0$ має уявні спряжені корені $k_{1,2}=\pm\omega_0 i$. Загальний розв'язок $\bar{I}=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t$ відповідає вільним незатухаючим коливанням і його можна записати як $\bar{I}=A\sin(\omega_0 t+\varphi)$, де A і φ – нові довільні сталі, що зв'язані з C_1 і C_2 рівностями $C_1=A\sin\varphi$ і $C_2=A\cos\varphi$. Використовується наступна термінологія: ω_0 – власна кругова частота; A – амплітуда; φ – початкова фаза.

2. Нехай активний опір такий великий, що $\alpha>\omega_0$. Тоді для ЛОДР характеристичне рівняння має різні дійсні корені $k_1=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}<0$ і $k_2=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}<0$. Загальний розв'язок $\bar{I}=C_1e^{k_1t}+C_2e^{k_2t}$ не містить періодичних складових (коливання відсутні) і прямує до нуля при $t\to\infty$.

3. Нехай активний опір задовольняє умову $\alpha=\omega_0$. Тоді для ЛОДР характеристичне рівняння $k^2+2\alpha k+\omega_0^2=0$ має один дійсний корінь $k=-\alpha<0$ кратності $r=2$. Загальний розв'язок $\bar{I}=(C_1+C_2t)e^{-\alpha t}$, як і в попередньому випадку, не містить періодичних складових (коливання відсутні) і прямує до нуля при

$t \to \infty$.

4. Нехай активний опір такий малий, що $\alpha < \omega_0$. Тоді для ЛОДР характеристичне рівняння має пару комплексно спряжених коренів $k_{1,2} = -\alpha \pm \omega i$, де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} > 0$. Загальний розв'язок $\bar{I} = (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) e^{-\alpha t}$ відповідає затухаючим коливанням з круговою частотою ω. Його можна записати у формі $I = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$, де A і φ – нові довільні сталі, що зв'язані з C_1 і C_2 рівностями $C_1 = A \sin \varphi$ і $C_2 = A \cos \varphi$. Амплітуда коливань $Ae^{-\alpha t}$ прямує до нуля при $t \to \infty$.

При розгляді неоднорідного ДР обмежимося лише найважливішим випадком малого опору R, коли $\alpha < \omega_0$, і періодичної ЕРС $E = E_0 \sin \tilde{\omega} t$, де E_0 – амплітуда; $\tilde{\omega}$ – кругова частота. Тоді права частина ЛНДР $f(t) = (1/L)E' = (\tilde{\omega} E_0 / L) \cos \tilde{\omega} t$ має спеціальний вигляд. Частинний розв'язок I_* шукаємо у відповідній формі $I_* = \bar{A} \cos \tilde{\omega} t + \bar{B} \sin \tilde{\omega} t$, оскільки характеристичне число $z = a + bi = 0 + \tilde{\omega} i = \tilde{\omega} i$ не є коренем характеристичного рівняння. Знайдемо коефіцієнти $\bar{A}$ і $\bar{B}$:

$$I_*' = -\bar{A}\tilde{\omega} \sin \tilde{\omega} t + \bar{B} \tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t; \quad I_*'' = -\bar{A}\tilde{\omega}^2 \cos \tilde{\omega} t - \bar{B}\tilde{\omega}^2 \sin \tilde{\omega} t;$$

$$-\bar{A}\tilde{\omega}^2 \cos \tilde{\omega} t - \bar{B}\tilde{\omega}^2 \sin \tilde{\omega} t + 2\alpha(-\bar{A}\tilde{\omega} \sin \tilde{\omega} t + \bar{B}\tilde{\omega} \cos \tilde{\omega} t) +$$

$$+ \omega_0^2 (\bar{A} \cos \tilde{\omega} t + \bar{B} \sin \tilde{\omega} t) = (\tilde{\omega} E_0 / L) \cos \tilde{\omega} t; \quad (-\tilde{\omega}^2 \bar{A} + 2\alpha \tilde{\omega} \bar{B} +$$

$$+ \omega_0^2 \bar{A}) \cos \tilde{\omega} t - (\tilde{\omega}^2 \bar{B} + 2\alpha \tilde{\omega} \bar{A} - \omega_0^2 \bar{B}) \sin \tilde{\omega} t = (\tilde{\omega} E_0 / L) \cos \tilde{\omega} t;$$

$$\begin{array}{c|l} \cos \tilde{\omega} t & \left\{ \begin{array}{l} -\tilde{\omega}^2 \bar{A} + 2\alpha \tilde{\omega} \bar{B} + \omega_0^2 \bar{A} = \tilde{\omega} E_0 / L; \\ -(\tilde{\omega}^2 \bar{B} + 2\alpha \tilde{\omega} \bar{A} - \omega_0^2 \bar{B}) = 0; \end{array} \right. \\ \sin \tilde{\omega} t & \end{array}$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2) \bar{A} + 2\alpha \tilde{\omega} \bar{B} = \tilde{\omega} E_0 / L; \\ 2\alpha \tilde{\omega} \bar{A} - (\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2) \bar{B} = 0; \end{cases} \quad \bar{B} = (2\alpha \tilde{\omega} \bar{A}) \big/ (\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2);$$

$$(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2) \bar{A} + 2\alpha \tilde{\omega} (2\alpha \tilde{\omega} \bar{A}) \big/ (\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2) = \tilde{\omega} E_0 / L;$$

$$\overline{A}=\frac{\tilde{\omega}E_0(\omega_0^2-\tilde{\omega}^2)}{L((\omega_0^2-\tilde{\omega}^2)^2+4\alpha^2\tilde{\omega}^2)};\quad \overline{B}=\frac{2\alpha\tilde{\omega}^2E_0}{L((\omega_0^2-\tilde{\omega}^2)^2+4\alpha^2\tilde{\omega}^2)}.$$

Частинний розв'язок I_* відповідає вимушеним коливанням. Його можна подати у вигляді $I_*=\overline{N}\sin(\tilde{\omega}t+\overline{\varphi})$, де амплітуда $\overline{N}$ знаходиться за формулою:

$$\overline{N}=\sqrt{\overline{A}^2+\overline{B}^2}=\left(\tilde{\omega}E_0/L\right)\Big/\sqrt{(\omega_0^2-\tilde{\omega}^2)^2+4\alpha^2\tilde{\omega}^2}.$$

Амплітуда $\overline{N}$ вимушених коливань, як функція від $\tilde{\omega}$, досягає максимуму при $\tilde{\omega}=\omega_0$ (дослідження на екстремум за допомогою похідної проробіть самостійно) і

$$\overline{N}_{max}=E_0/(2L\alpha)=E_0/(2L\cdot R/(2L))=E_0/R.$$

Якщо частота $\tilde{\omega}$ зовнішнього збудження співпадає з частотою ω_0 вільних коливань $\tilde{\omega}=\omega_0$, то амплітуда вимушених коливань при досить малому активному опорі R досягає дуже великого значення $\overline{N}_{max}=E_0/R$. Це явище називається ***резонансом***.

У простих економічних моделях (як модель Еванса) функціонування ринку припускають, що попит $q=q(t)$ і пропозиція $s=s(t)$ залежать тільки від поточної ціни $p=p(t)$ на товар, де t – час. Але у реальних ситуаціях попит і пропозиція залежать не тільки від ціни $p=p(t)$, але й від тенденції ціноутворення (тобто від похідної p'), і від темпів зміни ціни (тобто від другої похідної p'').

Приклад 1. Нехай з бігом часу t функції попиту $q=q(t)$ і пропозиції $s=s(t)$ на деякий товар визначаються співвідношеннями:

$$q(t)=3p''-4p'-5p+90;\quad s(t)=4p''+2p'+5p+60,$$

де $p=p(t)$ – функція ціни товару. Нехай також у початковий момент часу $t=0$ відома ціна: $p(0)=2$, а також попит і пропозиція: $q(0)=s(0)=21$. Потрібно, виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції: $q(t)=s(t)$ (умова ринкової рівноваги), знайти залежність ціни від часу: $p=p(t)$.

□ Виходячи з умови ринкової рівноваги – відповідності попиту пропозиції, дістанемо:

$$q(t) = s(t);\;\; 3p'' - 4p' - 6p + 90 = 4p'' + 2p' + 4p + 60;$$

$$3p'' - 4p' - 6p - 4p'' - 2p' - 4p = 60 - 90;$$

$-p'' - 6p' - 10p = -30;\quad p'' + 6p' + 10p = 30$ – ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами та з правою частиною спеціального вигляду – сталою функцією $f(x) = 30$ (многочленом нульового степеня).

Загальний розв'язок цього рівняння є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $p'' + 6p' + 10p = 0$ та якогось його частинного розв'язку.

Складаємо та розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 6k + 10 = 0;\;\; D = 36 - 40 = -4;\;\; k_{1,2} = -3 \pm i;\;\; \alpha = -3;\;\; \beta = 1.$$

Звідси загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд: $\overline{p} = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin\ t)$.

Оскільки права частина ЛНДР – многочлен нульового степеня, то $s = \max\{0; 0\} = 0$. Характеристичне число $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $p_* = A$:

$$p_*' = 0;\;\; p_*'' = 0;\;\; 0 + 6 \cdot 0 + 10A = 30;\;\; A = 3.$$

Отже, маємо частинний розв'язок $p_* = 3$, що є сталою величиною. Його прийнято називати ***стаціонарною ціною***.

Складаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$p = \overline{p} + p_* = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin\ t) + 3.$$

Легко побачити, що $p \to p_* = 3$ при $t \to \infty$, тобто всі ціни з коливаннями прямують до стаціонарної ціни, причому амплітуда цих коливань з бігом часу затухає.

Для виділення із загального розв'язку частинного, що задовольняє початковим умовам, − розв'язку задачі Коші − потрібно знайти відповідні значення довільних сталих, що враховують початкові умови. Звернемо увагу, що вони задані дещо нестандартно: замість значення похідної в початковій точці задано співвідношення, що включає відповідні значення самої функції та її першої й другої похідної. Тому спочатку двічі продиференціюємо загальний розв'язок і обчислимо значення самого загального розв'язку та його похідних у початковій точці:

$$p(0) = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + 3 = C_1 + 3;$$

$$p' = -3e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-3t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t);$$

$$p'(0) = -3e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) =$$

$$= -3C_1 + C_2; \qquad p'' = 9e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) -$$

$$-3e^{-3t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) - 3e^{-3t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) +$$

$$+ e^{-3t}(-C_1 \cos t - C_2 \sin t) = 8e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) -$$

$$-6e^{-3t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t); \quad p''(0) = 8e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) -$$

$$-6e^0(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) = 8C_1 - 6C_2.$$

З першої початкової умови $p(0) = 2$ маємо:

$$C_1 + 3 = 2; \; C_1 = -1.$$

Тоді

$$p'(0) = -3 \cdot (-1) + C_2 = C_2 + 3; \; p''(0) = 8 \cdot (-1) - 6C_2 = -(6C_2 + 8).$$

Скористаємось другою початковою умовою $q(0) = 21$:

$$-3 \cdot (6C_2 + 8) - 4(C_2 + 3) - 5 \cdot 2 + 45 = 21;$$

$$-18C_2 - 24 - 4C_2 - 12 - 10 + 45 = 21; \quad -22C_2 = 22; \; C_2 = -1.$$

Отже, маємо розв'язок задачі Коші:

$$p_K = e^{-3t}(-1 \cdot \cos t - 1 \cdot \sin t) + 3 = 3 - e^{-3t}(\cos t + \sin t).$$

Усі величини – ціна, попит і пропозиція – за економічним змістом є невід'ємними. Щоб контролювати виконання цих обмежень, додатково знайдемо попит (і пропозицію $s(t) = q(t)$):

$$q(t)=3\Big(8e^{-3t}(C_1\cos\ t+C_2\sin\ t)-6e^{-3t}(-C_1\sin\ t+C_2\cos\ t)\Big)-$$
$$-4\Big(-3e^{-3t}(C_1\cos t+C_2\sin\ t)+e^{-3t}(-C_1\sin\ t+C_2\cos t)\Big)-$$
$$-5\Big(e^{-3t}(C_1\cos t+C_2\sin\ t)+3\Big)+90=$$
$$=e^{-3t}\Big((31C_1-22C_2)\cos t+(22C_1+31C_2)\sin\ t\Big)+75.$$

При знайдених значеннях $C_1=-1$ і $C_2=-1$ маємо:

$$q_K(t)=75-e^{-3t}(9\cos\ t+53\sin\ t).$$

Обмеження $p_K(t)\geq 0$ і $q_K(t)\geq 0$ виконуються при всіх $t\geq 0$ (перевірте самостійно). ■

Запитання для самоконтролю

1. Яка структура загального розв'язку ЛНДР другого порядку?
2. У чому полягає принцип суперпозиції розв'язків ЛНДР?
3. Для ЛНДР що таке права частина спеціального вигляду?
4. Як методом невизначених коефіцієнтів будується частинний розв'язок ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає правій частині спеціального вигляду?
5. Який вигляд має ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, яке описує процеси в електричному контурі, що складається з послідовно сполучених активного опору, індуктивності і ємності? У чому полягає явище резонансу в такому електричному колі?
6. Наведіть приклад застосування диференціальних рівнянь в економічних задачах.

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок:

а) $y''+2y'-35y=24e^{5x}$;

б) $y''+25y=30\sin 5x$;

в) $y''-6y'+13y=13x^2-12x$;

г) $y''+6y'+9y=8e^{-3x}+18.$

Відповідь: а) $y = C_1 e^{-7x} + C_2 e^{5x} + 2xe^{5x}$;

б) $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x - 3x \cos 5x$;

в) $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + x^2 - 2/13$.

г) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x} + 4x^2 e^{-3x} + 2$.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші:

а) $y'' + 6y' = 36x^2 + 4;\ y(0) = 3;\ y'(0) = 7$;

б) $y'' + 4y' + 8y = 40 \cos 2x;\ y(0) = 5;\ y'(0) = 0$;

в) $y'' - 25y = 20e^{-5x};\ y(0) = 5;\ y'(0) = -3$;

г) $y'' - 4y' - 5y = 26 \sin x - 5;\ y(0) = 3;\ y'(0) = 3$.

Відповідь: а) $y = 4 - e^{-6x} + 2x^3 - x^2 + x$;

б) $y = e^{-2x}(3 \cos 2x - \sin 2x) + 2 \cos 2x + 4$;

в) $y = 3e^{-5x} + 2e^{5x} + 2xe^{-5x}$;

г) $y = -e^{-x} + e^{5x} + 2 \cos x - 3 \sin x + 1$.

Приклад 3. Нехай з бігом часу t попит $q = q(t)$ і пропозиція $s = s(t)$ на деякий товар визначаються співвідношеннями: $q(t) = 2p'' - p' - p + 15;\ s(t) = 3p'' + p' + p + 5$, де p – ціна на товар; p' – тенденція формування ціни; p'' – темп зміни ціни. Нехай також у початковий момент часу $t = 0$ відома ціна $p(0) = 6$, а також попит і пропозиція: $q(0) = s(0) = 10$. Потрібно, виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції: $q(t) = s(t)$ (умова ринкової рівноваги), знайти залежності ціни і попиту від часу: $p = p(t)$ і $q = q(t)$.

Відповідь: $p = e^{-t} \cos t + 5;\ q(t) = 5e^{-t} \sin t + 10$.

Лекція 1.5 Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

План

1.5.1 Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальні поняття

1.5.2 Розв'язування лінійної диференціальної системи методом вилучення – зведенням до одного диференціального рівняння вищого порядку

1.5.3 Розв'язування лінійної однорідної диференціальної системи матричним методом (за допомогою характеристичного рівняння)

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *нормальна система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, однорідна та неоднорідна нормальна диференціальна система, фундаментальна система частинних розв'язків, метод вилучення, матричний метод*.

1.5.1 Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальні поняття

У багатьох задачах потрібно знайти не одну, а декілька невідомих функцій, які характеризують взаємодіючі об'єкти. що описуються системою диференціальних рівнянь.

Наприклад, задача про рух матеріальної точки під дією сили $\vec{F}$ зводиться до системи трьох диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(t,x,y,z,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right) \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y\left(t,x,y,z,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right), \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z\left(t,x,y,z,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right) \end{cases}$$

де m – маса точки; t – час; $x(t),\ y(t),\ z(t)$ – шукані функції, що є декартовими координатами матеріальної точки в момент часу t; $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ – проєкції вектора швидкості на осі координат; $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ – проєкції вектора прискорення на осі координат; F_x, F_y, F_z – проєкції вектора сили $\vec{F}$ на осі координат. Самі рівняння виражають у проєкціях відомий з механіки другий закон Ньютона.

При розгляді специфічних підходів до розв'язування диференціальних систем обмежимося лише найпростішою ***нормальною системою лінійних ДР першого порядку* (*СЛДР*) *зі сталими коефіцієнтами***, де у лівих частинах стоять похідні першого порядку, а праві частини не містять похідних. Така система має вигляд:

$$\begin{cases} dx_1/dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ dx_2/dt = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dx_n/dt = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{cases},$$

де t − аргумент; $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), ..., x_n = x_n(t)$ − шукані функції; $a_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ − сталі коефіцієнти (відомі дійсні числа); $b_1(t), b_2(t), ..., b_n(t)$ − вільні члени (відомі неперервні функції). Число n називається ***порядком*** системи.

Якщо всі вільні члени $b_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ тотожно рівні нулю, то система називається ***однорідною***, в іншому разі – ***неоднорідною***.

У матричній формі однорідну та неоднорідну системи можна записати відповідно так:

$$\frac{dX}{dt} = AX; \qquad \frac{dX}{dt} = AX + B,$$

де

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix};\quad \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix}dx_1/dt\\dx_2/dt\\\dots\\dx_n/dt\end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}\\a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n}\\\dots\\a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn}\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_n\end{pmatrix}.$$

Розв'язком системи називається матриця-стовпець функцій $X=(x_1(t)\ x_2(t)\ \dots\ x_n(t))^T$, підстановка яких у рівняння системи перетворює їх у вірні тотожності. У $(n+1)$-вимірному просторі $(t,x_1,x_2,\dots,x_n)$ йому відповідає ***інтегральна крива***.

За аналогією з диференціальними рівняннями визначаються ***загальний*** і ***частинний розв'язки***.

Загальний розв'язок неоднорідної СЛДР $dX/dt=AX+B$ можна зобразити у вигляді суми загального розв'язку $\overline{X}$ відповідної однорідної системи $dX/dt=AX$ і будь-якого частинного розв'язку X_* неоднорідної системи: $X=\overline{X}+X_*$.

Загальний розв'язок однорідної СЛДР має вигляд лінійної комбінації

$$\overline{X}=C_1X_1+C_2X_2+\dots+C_nX_n=M(t)C,$$

де $M(t)=(X_1\ X_2\ \dots\ X_n)$ − ***фундаментальна матриця розв'язків***, складена з n лінійно незалежних частинних розв'язків $X_i=(x_{1i}\ x_{2i}\ \dots\ x_{ni})^T$, $i=\overline{1,n}$, що утворюють ***фундаментальну систему***; $C=(C_1\ C_2\ \dots\ C_n)^T$ − матриця-стовпець довільних сталих.

Фундаментальна матриця є квадратною n-го порядку і невиродженою (її визначник відмінний від нуля $|M(t)|\neq 0$).

Якщо нормальну систему доповнити ***початковими умовами*** $X(t_0)=X_0$, де $X_0=(x_{10}\ x_{20}\ \dots\ x_{n0})^T$ − матриця-стовпець; x_{i0}, $i=\overline{1,n}$ − задані дійсні числа, то одержимо для неї ***задачу Коші***. У цьому випадку справедлива відповідна теорема існування та єдиності розв'язку.

1.5.2 Розв’язування лінійної диференціальної системи методом вилучення – зведенням до одного диференціального рівняння вищого порядку

Нормальну неоднорідну СЛДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} dx_1 / dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1(t) \\ dx_2 / dt = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2(t) \end{cases}$$

можна звести до одного лінійного неоднорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, вилучаючи невідомі функції $x_i(t),\ \ i = \overline{1,2}$, крім довільно вибраної однієї, наприклад, $x_1(t)$. Розв’язуючи його, дістанемо відповідну шукану функцію $x_1(t)$. Потім знайдемо іншу функцію з набору $x_i(t)$, $i = \overline{1,2}$, використовуючи операцію диференціювання.

Застосовуючи ***метод вилучення***, спочатку перше рівняння системи продиференціюємо по t

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_{11}\frac{dx_1}{dt} + a_{12}\frac{dx_2}{dt} + \frac{db_1(t)}{dt}.$$

В одержане співвідношення замість похідної dx_2 / dt підставимо її вираз з нормальної системи

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_{11}\frac{dx_1}{dt} + a_{12}\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2(t)\right) + \frac{db_1(t)}{dt}.$$

Звідси

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_{11}\frac{dx_1}{dt} + a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 + a_{12}b_2(t) + \frac{db_1(t)}{dt}.$$

Якщо $a_{12} \neq 0$, то останнє рівняння вже не містить функції $x_2(t)$). Нехай $a_{12} \neq 0$. Тоді з першого рівняння нормальної системи виразимо функцію $x_2(t)$

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}}\left(\frac{dx_1}{dt} - a_{11}x_1 - b_1(t)\right)$$

і підставимо в останнє рівняння

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_{11} + a_{12}a_{21}x_1 + a_{22}\left(\frac{dx_1}{dt} - a_{11}x_1 - b_1(t)\right) +$$

$$+ a_{12}b_2(t) + \frac{db_1(t)}{dt}.$$

У результаті дістанемо ЛНДР другого порядку відносно функції $x_1(t)$ вигляду:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + p\frac{dx_1}{dt} + qx_1 = f(t).$$

Знайдемо його загальний розв’язок $x_1(t)$, а потім іншу функцію $x_2(t)$ визначимо з попередніх проміжних співвідношень, в які потрібно підставити загальний розв’язок $x_1(t)$ та його похідну.

Приклад 1. Розв’язати задачу Коші для неоднорідної СЛДР методом вилучення (зведенням до одного ДР вищого порядку). Обчислити значення $\tilde{x}_1 = x_{1K}(\tilde{t})$; $\tilde{x}_2 = x_{2K}(\tilde{t})$ отриманого розв’язку в заданій точці $\tilde{t}$:

а) $\begin{cases} dx_1/dt = 4x_1 - x_2 - 6e^{2t} \\ dx_2/dt = x_1 + 2x_2 - 8e^{2t} \end{cases}$; $x_1(0) = 3$; $x_2(0) = 2$; $\tilde{t} = 2$;

б) $\begin{cases} dx_1/dt = -x_1 + 2x_2 + 4\cos t \\ dx_2/dt = -4x_1 + 3x_2 \end{cases}$; $x_1(0) = 2$; $x_2(0) = 0$; $\tilde{t} = \pi$.

Записати систему та знайдений розв’язок і його обчислені значення у матричній формі.

□ а) Обидві частини першого рівняння системи диференціюємо по t і отримуємо ДР другого порядку:

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - dx_2/dt - 12e^{2t}.$$

Замість похідної dx_2/dt підставимо вираз із другого рівняння системи:

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - (x_1 + 2x_2 - 8e^{2t}) - 12e^{2t};$$

$$d^2x_1/dt^2 = 4dx_1/dt - x_1 - 2x_2 - 4e^{2t}.$$

З першого рівняння системи виразимо функцію x_2:

$$x_2 = -dx_1/dt + 4x_1 - 6e^{2t}$$

і підставимо цей вираз замість x_2 у останнє рівняння:

$$d^2x_1/dt^2 = 4dx_1/dt - x_1 - 2(-dx_1/dt + 4x_1 - 6e^{2t}) - 4e^{2t};$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 6\frac{dx_1}{dt} - 9x_1 + 8e^{2t}; \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} - 6\frac{dx_1}{dt} + 9x_1 = 8e^{2t}.$$

Для одержаного ЛНДР другого порядку спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного ДР за допомогою характеристичного рівняння:

$$d^2x_1/dt^2 - 6dx_1/dt + 9x_1 = 0; \quad k^2 - 6k + 9 = 0; \quad k_1 = k_2 = 3;$$

$$\bar{x}_1 = (C_1 + C_2t)e^{3t}.$$

Оскільки права частина ЛНДР має спеціальний вигляд – експонента зі сталим множником, то його частинний розв'язок x_{1*} будуємо методом невизначених коефіцієнтів:

$z = a + bi = 2 + 0i = 2$ − не є коренем; $x_{1*} = Ae^{2t}$; $x'_{1*} = 2Ae^{2t}$;

$x''_{1*} = 4Ae^{2t}$; $4Ae^{2t} - 6\cdot 2Ae^{2t} + 9Ae^{2t} = 8e^{2t}$; $Ae^{2t} = 8e^{2t}$; $A = 8.$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного ДР можна подати у вигляді суми: $x_1 = \bar{x}_1 + x_{1*} = (C_1 + C_2t)e^{3t} + 8e^{2t}$.

Знайдемо похідну отриманого загального розв'язку:

$$dx_1/dt = C_2e^{3t} + 3(C_1 + C_2t)e^{3t} + 16e^{2t}$$

і підставимо вирази для $x_1(t)$, dx_1/dt у співвідношення для x_2:

$$x_2 = -C_2e^{3t} - 3(C_1 + C_2t)e^{3t} - 16e^{2t} + 4(C_1 + C_2t)e^{3t} + 32e^{2t} - 6e^{2t} =$$

$$= (-C_2 - 3C_1 - 3C_2t + 4C_1 + 4C_2t)e^{3t} + 10e^{2t} =$$

$$= (C_1 - C_2 + C_2t)e^{3t} + 10e^{2t}.$$

Для знаходження конкретних значень довільних сталих C_1 і C_2 використаємо початкові умови:

$$\begin{matrix} x_1(0)=3: \\ x_2(0)=2: \end{matrix} \begin{cases} C_1+8=3 \\ C_1-C_2+10=2 \end{cases}; \quad \begin{matrix} C_1=-5; \\ -C_2=2-10+5; \; C_2=3. \end{matrix}$$

Отже, маємо розв'язок задачі Коші:

$$x_{1K}=(-5+3t)e^{3t}+8e^{2t}; \; x_{2K}=(-8+3t)e^{3t}+10e^{3t}.$$

Обчислимо значення отриманого розв'язку в заданій точці:

$$\tilde{x}_1=x_{1K}(2)=(-5+3\cdot 2)e^{3\cdot 2}+8e^{2\cdot 2}=e^6+8e^4;$$

$$\tilde{x}_2=x_{2K}(2)=(-8+3\cdot 2)e^{3\cdot 2}+10e^{2\cdot 2}=-2e^6+10e^4.$$

Запишемо СЛДР та її розв'язок і його обчислені значення у матричній формі:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \; A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \; B=\begin{pmatrix} -6e^{2t} \\ -8e^{2t} \end{pmatrix}; \; \frac{dX}{dt}=AX+B;$$

$$\begin{pmatrix} x_{1K} \\ x_{2K} \end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix} -5+3t \\ -8+3t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8e^{2t} \\ 10e^{2t} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}=e^6\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8e^4 \\ 10e^4 \end{pmatrix}.$$

(Задачу б) розв'язати самостійно). ■

1.5.3 Розв'язування лінійної однорідної диференціальної системи матричним методом (за допомогою характеристичного рівняння)

Матричний метод є видозміненим методом Ейлера розв'язування однорідних лінійних диференціальних рівнянь.

Подаючи нормальну однорідну СЛДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами як єдине матричне ДР $dX/dt=AX$, ненульовий розв'язок $X\neq 0$ шукаємо у вигляді добутку сталого матричного множника на змінний скаляр: $X=Pe^{kt}$, де $P=(p_1\, p_2\, \dots\, p_n)^T$ − матриця-стовпець невідомих сталих, $P\neq 0$; k − невідомий сталий коефіцієнт.

Підставляючи функцію $X = Pe^{kt}$ у рівняння, ліворуч при диференціюванні можна винести сталий матричний множник:

$$dX/dt = (Pe^{kt})' = P(e^{kt})' = Pe^{kt}k = kPe^{kt},$$

а праворуч у матричному добутку можна винести сталий скаляр:

$$AX = A(Pe^{kt}) = e^{kt}AP.$$

Ділячи обидві частини матричного рівняння на відмінну від нуля експоненту e^{kt}, дістанемо:

$$kP = AP \quad \text{або} \quad (A - kE)P = 0,$$

що є матричним записом квадратної однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Відомо, що така система має ненульовий розв’язок $P \neq 0$, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\det(A - kE) = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Це алгебраїчне рівняння називається ***характеристичним***, його порядок n співпадає з порядком системи.

Шукані значення параметра k служать його коренями.

Характеристичне рівняння степеня n має рівно n коренів, враховуючи їх кратності. Вони можуть бути дійсні чи комплексні, прості чи кратні. Можливі такі випадки:

1) усі корені k_i, $i = \overline{1,n}$ − дійсні й різні: $k_i \neq k_j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{i+1,n}$; $k_i \in R,\ i = \overline{1,n}$;

2) усі корені k_i різні, але серед них є комплексні попарно спряжені;

3) серед дійсних і комплексно спряжених коренів k_i є кратні.

Для простоти обмежимося розглядом лише випадку 1). При цьому кожному кореню k_i відповідає частинний розв’язок $X_i = P_i e^{k_i t}$, де матриця-стовпець $P_i = (p_{1i}\ p_{2i}\ \dots\ p_{ni})^T$ визначається з однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$(A-k_iE)P_i=0 \text{ або } \begin{cases} (a_{11}-k_i)p_{1i}+a_{12}p_{2i}+...+a_{1n}p_{ni}=0 \\ a_{21}p_{1i}+(a_{22}-k_i)p_{2i}+...+a_{2n}p_{ni}=0 \\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ... \\ a_{n1}p_{1i}+a_{n2}p_{2i}+...+(a_{nn}-k_i)p_{ni}=0 \end{cases}.$$

Ця система невизначена і має безліч розв'язків, що залежать від однієї довільної сталої. Шукаючи один її частинний розв'язок, можна в матриці-стовпці P_i один з елементів вибрати довільно, наприклад, покласти рівним одиниці перший з них $p_{1i}=1$, а решту знайти з даної системи, заздалегідь відкидаючи з неї будь-яке одне рівняння, наприклад, останнє.

Частинні розв'язки $X_i=P_ie^{k_it}$, $i=\overline{1,n}$, − лінійно незалежні й утворюють фундаментальну систему. Таким чином, загальний розв'язок $\overline{X}$ однорідної СЛДР має вигляд їх лінійної комбінації:

$$\overline{X}=M(t)C=C_1X_1+C_2X_2+...+C_nX_n \text{ або}$$

$$\overline{X}=\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ ... \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{11}\ p_{12}\ \cdots\ p_{1n} \\ p_{21}\ p_{22}\ \cdots\ p_{2n} \\ ...\ ...\ ...\ ...\ ... \\ p_{n1}\ p_{n2}\ \cdots\ p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^{k_1t} \\ C_2e^{k_2t} \\ ... \\ C_ne^{k_nt} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1. Записати однорідну СЛДР в матричній формі та знайти її загальний розв'язок матричним методом (за допомогою характеристичного рівняння) і подати його в матричній формі та звичайному скалярному вигляді:

$$\begin{cases} dx_1/dt=6x_1-3x_2; \\ dx_2/dt=x_1+2x_2. \end{cases}$$

□ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\dfrac{dX}{dt}=AX$ − матричний запис однорідної СЛДР.

Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$\det(A-kE)=0; \quad \begin{vmatrix} 6-k & -3 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix}=0; \quad (6-k)(2-k)+3=0;$$

$$k^2-8k+15=0; \quad k_1=5; \quad k_2=3.$$

Кореню $k_1=5$ відповідає частинний розв'язок $X_1=P_1e^{k_1t}$, де матриця-стовпець $P_1=(p_{11}\,p_{21})^T$ визначається з однорідної лінійної алгебраїчної системи:

$$(A-k_1E)P_1=0; \quad \begin{cases}(6-5)p_{11}-3p_{21}=0 \\ p_{11}+(2-5)p_{21}=0\end{cases}; \quad \begin{cases}p_{11}-3p_{21}=0 \\ p_{11}-3p_{21}=0\end{cases}.$$

Покладаючи $p_{11}=1$ і вилучаючи з системи друге рівняння, знаходимо значення p_{21}: $p_{11}-3p_{21}=0$; $p_{21}=(1/3)p_{11}$; $p_{21}=1/3$.

Аналогічно, кореню $k_2=3$ відповідає частинний розв'язок $X_2=P_2e^{k_2t}$, де матриця-стовпець $P_2=(p_{12}\,p_{22})^T$ визначається з однорідної лінійної алгебраїчної системи:

$$(A-k_2E)P_2=0; \quad \begin{cases}(6-3)p_{12}-3p_{22}=0 \\ p_{12}+(2-3)p_{22}=0\end{cases}; \quad \begin{cases}3p_{12}-3p_{22}=0 \\ p_{12}-p_{22}=0\end{cases}.$$

Покладаючи $p_{12}=1$ і видаляючи з системи останнє рівняння, дістаємо значення p_{22}: $3p_{12}-3p_{22}=0$; $p_{22}=p_{12}$; $p_{22}=1$.

Далі знаходимо загальний розв'язок у матричній формі:

$$\overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{x}_1 \\ \overline{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1e^{k_1t} \\ C_2e^{k_2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1/3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1e^{5t} \\ C_2e^{3t}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}C_1e^{5t}+C_2e^{3t} \\ (1/3)C_1e^{5t}+C_2e^{3t}\end{pmatrix}.$$

Звідси маємо загальний розв'язок у скалярній формі:

$$\overline{x}_1=C_1e^{5t}+C_2e^{3t}; \quad \overline{x}_2=(1/3)C_1e^{5t}+C_2e^{3t}. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші, застосовуючи матричний метод:

$$\begin{cases} dx_1/dt = 6x_1 - 3x_2 \\ dx_2/dt = 7x_1 - 4x_2 \end{cases}; \quad x_1(0) = -8; \ \ x_2(0) = 4.$$

□ Спочатку матричним методом знаходимо загальний розв'язок:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \ \ A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}; \ \ \frac{dX}{dt} = AX; \ \ \det(A - kE) = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 6-k & -3 \\ 7 & -4-k \end{vmatrix} = 0; \ \ k^2 - 2k - 3 = 0; \ \ \begin{matrix} k_1 = -1; \\ k_2 = 3; \end{matrix}$$

$$X_1 = P_1 e^{k_1 t} = P_1 e^{-t}; \ \ P_1 = (p_{11}\, p_{21})^T; \ \ (A - k_1 E)P_1 = 0;$$

$$\begin{cases} (6+1)p_{11} - 3p_{21} = 0 \\ 7p_{11} + (-4+1)p_{21} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 7p_{11} - 3p_{21} = 0 \\ 7p_{11} - 3p_{21} = 0 \end{cases};$$

$$p_{11} = 1; \ 7p_{11} - 3p_{21} = 0; \ \ p_{21} = (7/3)p_{11} = 7/3;$$

$$X_2 = P_2 e^{k_2 t} = P_2 e^{3t}; \ \ P_2 = (p_{12}\, p_{22})^T; \ \ (A - k_2 E)P_2 = 0;$$

$$\begin{cases} (6-3)p_{12} - 3p_{22} = 0 \\ 7p_{12} + (-4-3)p_{22} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3p_{12} - 3p_{22} = 0 \\ 7p_{12} - 7p_{22} = 0 \end{cases};$$

$$p_{12} = 1; \ 3p_{12} - 3p_{22} = 0; \ \ p_{22} = p_{12} = 1;$$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{k_1 t} \\ C_2 e^{k_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{3t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} + (7/3)C_2 e^{3t} \\ C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} \overline{x}_1 = C_1 e^{-t} + (7/3)C_2 e^{3t} \\ \overline{x}_2 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \end{cases}.$$

Далі з початкових умов визначаємо конкретні значення довільних сталих:

$$\begin{matrix} x_1(0) = -8: \\ x_2(0) = 4: \end{matrix} \begin{cases} C_1 + (7/3)C_2 = -8 \\ C_1 + C_2 = 4 \end{cases}; \quad \begin{matrix} (7/3)C_2 - C_2 = -8 - 4 \\ C_2 = -9; \ \ C_1 = 4 + 9 = 13 \end{matrix}.$$

Отже, розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} x_{1K} = 13e^{-t} + (7/3)\cdot(-9)e^{3t} = 13e^{-t} - 21e^{3t} \\ x_{2K} = 13e^{-t} - 9e^{3t} \end{cases}. \quad \blacksquare$$

Запитання для самоконтролю

1. Який вигляд має нормальна система лінійних ДР першого порядку (СЛДР) зі сталими коефіцієнтами? Наведіть матричний запис однорідної та неоднорідної систем.
2. Що називається розв'язком системи диференціальних рівнянь? Який його геометричний зміст?
3. Який вигляд має загальний розв'язок однорідної СЛДР?
4. Що таке фундаментальна система частинних розв'язків однорідної СЛДР? Що таке фундаментальна матриця розв'язків?
5. Як ставиться початкова задача (задача Коші) для диференціальної системи?
6. У чому полягає матричний метод розв'язування однорідних систем?
7. У чому полягає метод вилучення розв'язування однорідної та неоднорідної СЛДР?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок:

а) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -8x - y \end{cases}$; б) $\begin{cases} x' = 2x + y - 2\mathrm{e}^{-t} \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x' = 3x + y - 3t + 5 \\ y' = -2x + 5y + 2t \end{cases}$;

г) $y'' + 6y' + 9y = 8e^{-3x} + 18$.

Відповідь:

а) $x = C_1e^{-3t} + C_2e^{3t};\ y = 4C_1e^{-3t} - 2C_2e^{3t}$;

б) $x = C_1e^{t} + C_2e^{5t} + \frac{5}{6}e^{-t};\ y = -C_1e^{t} + 3C_2e^{5t} - \frac{1}{2}e^{-t}$;

в) $x = e^{4t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + t - \frac{20}{17}$;

$$y = (C_1 + C_2)e^{4t} \cos t + (C_2 - C_1)e^{4t} \sin t - \frac{8}{17}.$$

Приклад 2. Розв’язати задачу Коші:

$$\begin{cases} x' = 4x + 5y + 6\cos t \\ y' = -5x - 4y - 2\sin t \end{cases}; \quad x(\pi) = -6;\ y(\pi) = 4.$$

Відповідь: $x = 3\cos 3t + 4\sin 3t + 3\cos t - 2\sin t$;

$$y = 5\sin 3t - 4\cos t + \sin t,$$

Приклад 3. ***(Динамічна модель Леонтьєва)***. Розглядається господарство деякої країни у розрізі двох галузей. Вважається, що економіка замкнена, тобто все споживається самими галузями. Функціонування економіки описується динамічною моделлю Леонтьєва у матричній формі:

$$\frac{dX}{dt} = K^{-1}X;\ \ K^{-1} = (E - A)B^{-1},$$

де $X = (x_1\ x_2)^T$ – матриця-стовпець національного доходу в розрізі двох галузей; K – квадратна матриця коефіцієнтів повної приростної капіталоємності; A – квадратна матриця коефіцієнтів прямих витрат; B – квадратна матриця коефіцієнтів капіталоємності приростів виробництва; E – одинична матриця; t – час.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix};\ \ B = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Знайти динаміку зростання з бігом часу t національного доходу $X = X(t)$ з врахуванням галузевої структури, якщо відомий початковий розподіл національного доходу за галузями:

$$X(0) = \left(x_1(0)\ \ x_2(0)\right)^T = (30\ \ \ 20)^T.$$

Відповідь: $x_1 = 10{,}8e^{-13t} + 19{,}2e^{0{,}3t}$;

$$x_2 = -8{,}12e^{-13t} + 28{,}1e^{0{,}3t}.$$

Лекція 1.6 Диференціальні рівняння з частинними похідними. Методи розв'язування задач математичної фізики

План

1.6.1 Диференціальне рівняння з частинними похідними та його розв'язок. Початкові та граничні умови. Крайові задачі. Рівняння математичної фізики. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними

1.6.2 Рівняння коливань струни, рівняння поширення тепла у стержні

1.6.3 Методи розв'язування задач математичної фізики

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *диференціальне рівняння з частинними похідними, початкові та граничні (межові) умови, крайові задачі, основні рівняння математичної фізики гіперболічного, параболічного та еліптичного типу, метод відокремлення змінних.*

1.6.1 Диференціальне рівняння з частинними похідними та його розв'язок. Початкові та граничні умови. Крайові задачі. Рівняння математичної фізики. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними

Розв'язками звичайних диференціальних рівнянь слугують функції одного аргументу. Проте велика кількість прикладних задач приводить до диференціальних рівнянь відносно функції двох, трьох і більшого числа змінних. Функції багатьох змінних описують різноманітні явища в електродинаміці, теорії пружності, гідродинаміці та інших галузях науки і техніки. Їх частинні похідні відображають найважливіші фізичні величини (швидкість, прискорення, потік, струм тощо). Використання принципів і законів, що зв'язують вказані величини, приводить до рівнянь з частинними похідними.

Диференціальним рівнянням з частинними похідними (ДРЧП) називається рівняння, яке зв'язує незалежні змінні, шукану функцію та її частинні похідні. Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називається його ***порядком***.

Диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними для шуканої функції $u = u(x, y)$ двох незалежних змінних x і y має ***загальний вигляд***:

$$F\left(x, y, u(x, y), \partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial^2 u/\partial x^2, \partial^2 u/\partial y^2, \partial^2 u/\partial x\partial y\right) = 0 .$$

Розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними називається будь-яка функція, що при підстановці у диференціальне рівняння замість шуканої функції перетворює його на тотожність.

Загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння (ЗДР) містить довільні сталі, число яких дорівнює порядку рівняння. Аналогічно, ***загальний розв'язок*** ДРЧП містить довільні функції, число яких дорівнює порядку цього рівняння.

Розв'язок ДРЧП, який входить до складу загального розв'язку при певних фіксованих довільних функціях, називається ***частинним розв'язком***.

Для виділення цілком певного розв'язку ДРЧП треба вказати додаткові умови. Усі явища вивчають, починаючи з деякого моменту часу і у відповідних областях, що мають певні межі. Тому для однозначного зображення реального процесу, крім диференціального рівняння, необхідно задати ще ***початкові умови***, що відображають початковий стан процесу, а також ***крайові*** (***граничні*** чи ***межові***) ***умови***, що вказують значення шуканої функції та її похідних на межі області визначення D процесу.

Сукупність диференціального рівняння і додаткових умов відображає математичне формулювання реальної фізичної задачі та називається ***задачею математичної фізики***.

У випадку необмеженої області D граничні умови відпадають. Задача відшукання розв'язку ДРЧП у необмеженій області при заданих початкових умовах називається ***задачею Коші*** (***початковою задачею***).

Наприклад, нехай вивчаються коливання струни, яка досить довга, а цікавить поведінка її точок, що досить віддалені від її кінців, причому за досить малий проміжок часу. Тоді режим на кінцях не буде спричиняти суттєвого впливу на ці точки і ним можна знехтувати, вважаючи струну нескінченною.

Задача відшукання розв'язку ДРЧП в обмеженій області при заданих початкових і граничних умовах називається ***крайовою*** (***граничною***) ***задачею***.

Задача Коші та крайова задача формулюються для ДРЧП, які виникають при вивчені ***нестаціонарних процесів***, що змінюються з перебігом часу. Рівняння, що описують ***стаціонарні процеси***, не містять часу t. Тому для таких рівнянь початкові умови відсутні. Указані ДРЧП розв'язуються тільки при граничних умовах.

Залежно від типу граничних умов розрізняють ***три типи крайових задач математичної фізики***:

1. Задача знаходження розв'язку ДРЧП при відомих значеннях шуканої функції u на межі S області D (***граничні умови першого типу***) $u\big|_S = g(S)$ називається ***крайовою задачею Діріхле*** (***першою крайовою задачею***).

2. Задача знаходження розв'язку ДРЧП при відомих значеннях нормальної похідної (похідної за напрямом зовнішньої нормалі $\vec{n}$) $\partial u/\partial n$ на межі S області D (***граничні умови другого типу***) $\partial u/\partial n\big|_S = g(S)$ називається ***крайовою задачею Неймана*** (***другою крайовою задачею***).

3. Якщо на межі S області D задано ***граничні умови третього*** (***змішаного***) ***типу*** $\left(\alpha u + \beta \partial u/\partial n\right)\big|_S = g(S)$, то маємо ***третю*** (***змішану***) ***крайову задачу***. Тут α і β - задані числа.

Початкові та межові умови, що доповнюють ДРЧП, на практиці є результатом деяких вимірювань, що виконуються з похибками. Можливі небажані ситуації, коли малі похибки в початкових та граничних умовах призводять до значних похибок у розв'язку.

Задача називається ***коректно*** (***правильно***) ***поставленою***, якщо:

1) задача має розв'язок;

2) розв'язок єдиний;

3) розв'язок неперервно залежить від початкових і межових умов (***розв'язок стійкий*** до малих змін цих умов).

Задача, що не задовольняє хоча б одній з трьох указаних умов, називається ***некоректно*** (***неправильно***) ***поставленою***.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\partial^2 u/\partial x\partial y = 8x^3 y - 3y^2$, де $u = u(x, y)$.

□ Зробимо заміну $\partial u / \partial x = v$. Тоді рівняння прийме вигляд: $\partial v / \partial y = 8x^3 y - 3y^2$. Інтегруючи за y (при цьому змінна x вважається фіксованою), маємо:

$v = \int \left(8x^3 y - 3y^2\right) dy = 4x^3 y^2 - y^3 + \overline{C}_1(x)$, де $\overline{C}_1(x)$ – довільна функція від x.

Звідси $\partial u / \partial x = 4x^3 y^2 - y^3 + \overline{C}_1(x)$. Інтегруючи за x (при цьому змінна y вважається фіксованою), дістаємо шуканий розв'язок:

$$u = \int \left(4x^3 y^2 - y^3 + \overline{C}_1(x)\right) dx = x^4 y^2 - y^3 x + \int \overline{C}_1(x) dx + C_2(y) =$$

$$= x^4 y^2 - y^3 x + C_1(x) + C_2(y),$$

де $C_2(y)$ – довільна функція від y; $C_1(x) = \int \overline{C}_1(x)\, dx$. ■

Найбільш загальні результати одержані для лінійних ДРЧП другого порядку, які традиційно називають ***рівняннями математичної фізики***.

Диференціальне рівняння з частинними похідними називається ***лінійним***, якщо воно лінійне відносно шуканої функції та всіх її частинних похідних.

Лінійне ДРЧП другого порядку для функції $u = u(x, y)$ двох змінних x і y має ***загальний вигляд***:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu = F,$$

де $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$, $C = C(x, y)$, $D = D(x, y)$, $E = E(x, y)$, $G = G(x, y)$, $F = F(x, y)$ – відомі функції, причому A, B, C, D, E, G називаються ***коефіцієнтами***; F – ***правою частиною***.

Якщо $F = 0$, то рівняння називається ***однорідним***, в іншому вмпадку – ***неоднорідним***.

Принцип суперпозиції: *Довільна лінійна комбінація зі сталими коефіцієнтами розв'язків лінійного однорідного ДРЧП також є розв'язком цього рівняння.*

Усе різноманіття лінійних рівнянь можна поділити на три класи (типи). У кожному класі є найпростіші рівняння, які називають ***канонічними***. Розв'язки рівнянь одного і того самого типу мають багато спільних властивостей. Для вивчення цих властивостей досить розглянути канонічні рівняння, оскільки інші рівняння даного класу можуть бути зведені до канонічного вигляду.

Належність рівняння до того чи іншого класу – класифікація рівнянь – визначається коефіцієнтами при старших похідних.

У залежності від знака ***дискримінанта*** $\Delta = B^2 - AC$ квазілінійне ДРЧП другого порядку відноситься до одного з наступних трьох типів:

1) якщо $\Delta = B^2 - AC > 0$, то рівняння ***гіперболічного типу***, його ***канонічний вигляд*** $\partial^2 u / \partial x \partial y = f\left(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y\right)$;

2) якщо $\Delta = B^2 - AC = 0$, то рівняння ***параболічного типу***, його ***канонічний вигляд*** $\partial^2 u / \partial y^2 = f\left(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y\right)$;

3) якщо $\Delta = B^2 - AC < 0$, то рівняння ***еліптичного типу***, його ***канонічний вигляд*** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y\right)$.

Зауваження. Розбиття ДРЧП на гіперболічні, параболічні та еліптичні рівняння відповідає розбиттю фізичних процесів на три основні класи: хвильові, дифузійні та стаціонарні.

Найважливіші рівняння математичної фізики вказаних типів:

1) ***одновимірне хвильове рівняння*** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (гіперболічний тип);

2) ***одновимірне рівняння теплопровідності*** (***рівняння Фур'є***) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (параболічний тип);

3) ***двовимірне рівняння Лапласа*** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (еліптичний тип).

Тут a – сталий коефіцієнт, $a > 0$.

1.6.2 Рівняння коливань струни, рівняння поширення тепла у стержні

Розглянемо натягнену струну довжини l, закріплену на кінцях. Якщо її вивести з положення рівноваги (наприклад, легко смикнути), то вона буде коливатися. Моделлю струни є пружна невагома (дією сили тяжіння можна знехтувати порівняно з силою натягу струни) і абсолютно гнучка (не чинить опору згину) нитка. Будемо розглядати малі плоскі поперечні коливання, коли рух усіх точок струни відбувається в одній площині перпендикулярно до її прямолінійного положення рівноваги – осі Ox (рис. 1.3). Лівий кінець струни співпадає з точкою $x=0$, а правий – з точкою $x=l$. Процес коливань характеризується однією функцією $u(x,t)$ – відхиленням точки струни з абсцисою x у момент часу t. При фіксованому значенні t графік функції $u(x,t)$ дає форму (профіль) струни у цей момент часу.

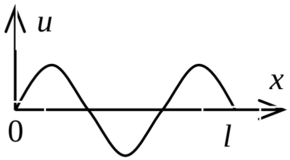

Рисунок 1.3

Виділимо довільний елемент струни $[x, x+\Delta x]$, який при коливанні деформується в дугу $\cup MM_1$ (рис. 1.4). Довжина цієї дуги

$$\Delta l = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\partial u/\partial x\right)^2}\,dx \approx \Delta x,$$

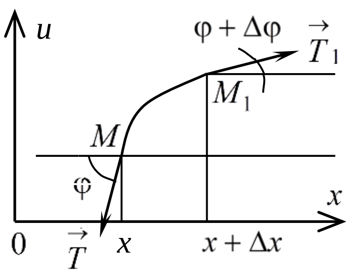

Рисунок 1.4

оскільки при малих коливаннях $\partial u/\partial x = o(\Delta x)$. Тобто видовження струни не відбувається. Тоді на підставі закону Гука сила натягу $\vec{T}$ в кожній точці струни направлена вздовж дотичної до її профілю і не змінюється за величиною, тобто $|\vec{T}| = T_0 = const$.

Якщо вважати струну однорідною з лінійною густиною $\rho = \rho_0 = const$, то маса елемента $\cup MM_1$: $m = \rho\Delta l \approx \rho_0 \Delta x$. Вертикальне (в напрямку осі Ou) прискорення w довільної точки цього елемента приблизно дорівнює вертикальному прискоренню точки M з координатою x, тобто $w \approx \partial^2 u(x,t) / \partial t^2$.

Рівняння коливань струни безпосередньо випливає з другого закону Ньютона $mw = F_u$ для елемента $\cup MM_1$ в напрямі осі Ou та має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (0 < x < l;\ t > 0),\text{ де } a^2 = T_0/\rho_0,$$

тобто є ***одновимірним однорідним хвильовим рівнянням***.

Це рівняння гіперболічного типу і для нього задаються дві початкові умови (ПУ) $u(x,0) = \varphi(x)$ $(0 < x < l)$ (початкове положення струни) і $\partial u(x,0)/\partial t = \psi(x)$ $(0 < x < l)$ (початкова швидкість струни). Якщо кінці струни $x = 0$ і $x = l$ жорстко закріплені, то граничні умови (ГУ) $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ $(t > 0)$. Якщо кінці струни $x = 0$ і $x = l$ вільні, то граничні умови: $\partial u(0,t)/\partial x = 0$, $\partial u(l,t)/\partial x = 0$ $(t > 0)$.

Розглянемо (рис. 1.5) тонкий циліндричний однорідний стержень довжини l і сталого поперечного перерізу S. Припустимо, що бічна поверхня стержня теплоізольована і теплообмін може здійснюватися тільки через торці циліндра, а температура у всіх точках поперечного перерізу однакова. Вісь стержня приймемо за координатну вісь Ox, причому лівий кінець стержня співпадає з точкою $x = 0$, а правий – з точкою $x = l$. Будемо вважати, що всередині стержня теплові джерела відсутні.

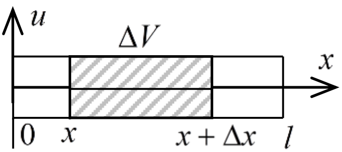

Рисунок 1.5

Нехай $\rho = const$ – густина речовини стержня; $C = const$ – питома теплоємність; $k = const$ – коефіцієнт теплопровідності. Величиною, яка характеризує процес поширення тепла в стержні, служить функція $u(x,t)$ – температура стержня в перерізі з абсцисою x в момент часу t.

Розглянемо довільний елемент стержня об'ємом $\Delta V = S\Delta x$, який розміщений між перерізами з абсцисами x і $x + \Delta x$. Складемо для нього рівняння теплового балансу (з точністю до нескінченно малих більш високого порядку порівняно з Δx, Δt):

$$c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t. \quad \text{Звідси} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Таким чином, маємо ***одновимірне однорідне рівняння теплопровідності*** $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<l;\ t>0)$, де $a^2 = k/(c\rho)$.

Це рівняння параболічного типу. Параболічні рівняння виникають при моделюванні явищ переносу (теплопередачі, дифузії, фільтрації, випромінювання нейтронів і таке інше).

На відміну від гіперболічних рівнянь, для рівняння теплопровідності задається тільки одна початкова умова $u(x,0) = \varphi(x)$ $(0 < x < l)$ (початковий розподіл температури).

Якщо торці стержня підтримуються при певних температурах, то граничні умови: $u(0,t) = g_1(t)$, $u(l,t) = g_2(t)$ $(t>0)$. Якщо торці стержня теплоізольовані, то граничні умови:

$$\partial u(0,t)/\partial x = 0; \quad \partial u(l,t)/\partial x = 0.$$

1.6.3 Методи розв'язування задач математичної фізики

Серед розмаїття підходів до розв'язування задач математичної фізики зупинимось на класичному аналітичному методі відокремлення змінних та сучасному числовому методі сіток.

Метод відокремлення змінних (***метод стоячих хвиль*** або ***метод Фур'є***) – один з найбільш ефективних аналітичних способів розв'язування крайових задач для широкого кола лінійних ДРЧП. Звичайно його застосовують тоді, коли рівняння і граничні умови є лінійними та однорідними. У багатьох випадках на його основі можна побудувати розв'язки крайових задач і для неоднорідних ДРЧП з неоднорідними граничними умовами.

Суть методу відокремлення змінних полягає у відшуканні розв'язку крайової задачі у вигляді ряду Фур'є за деякою ортогональною системою функцій, пов'язаних з цією задачею, де довільний член ряду є добутком функцій, кожна з яких залежить тільки від одного аргументу.

Загальна схема методу для випадку одновимірного однорідного лінійного ДРЧП гіперболічного (чи параболічного) типу:

1. Знаходження всієї нескінченної множини нетривіальних

(ненульових) розв'язків спеціального вигляду добутку функцій $u(x,t) = X(x)T(t)$, кожна з яких залежить тільки від одного аргументу, з врахуванням однорідних граничних умов. У результаті ДРЧП розщеплюється на звичайні диференціальні рівняння, кожне з яких включає лише одну функцію-співмножник. Потім знаходять розв'язки цих звичайних диференційних рівнянь, які задовольняють виділені нульові граничні умови на межі області дослідження. Однорідні елементарні розв'язки узгоджуються між собою і з них формується нескінченна послідовність розв'язків.

2. Побудова на основі принципу суперпозиції розв'язку однорідного лінійного ДРЧП, який задовольняє як граничним, так і початковим умовам, у вигляді нескінченного ряду, що формується з одержаної на першому етапі послідовності елементарних розв'язків. У класичному припущенні цей ряд повинен бути рівномірно збіжним разом з рядами, які одержуються з нього диференціюванням необхідне число разів за незалежними змінними.

Розглянемо задачу про вільні коливання однорідної струни довжини l з жорстко закріпленими кінцями $x = 0$, $x = l$. Припустимо, що середовище опору не чинить і зовнішні сили на струну не діють. Математично вона формулюється як ***перша крайова задача для одновимірного однорідного хвильового рівняння***:

знайти розв'язок $u(x,t)$ ДРЧП $\partial^2 u / \partial t^2 = a^2\, \partial^2 u / \partial x^2$ $(0 < x < l;\ t > 0)$, який задовольняє початковим умовам $u(x,0) = \varphi(x)$, $\partial u(x,0)/\partial t = \psi(x)$ $(0 < x < l)$ і однорідним граничним умовам першого типу $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ $(t > 0)$, де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – відомі функції; a, l – відомі числа, $a > 0$, $l > 0$.

Згідно з методом відокремлення змінних розв'язування цієї задачі розбивається на два етапи:

1. Знаходження нескінченної послідовності елементарних розв'язків, що задовольняють однорідним граничним умовам.

Шукаємо ненульові розв'язки у вигляді $u(x,t) = X(x)T(t)$, де $X(x)$ – функція тільки від x, а $T(t)$ – тільки від t. Підставимо цей вираз у рівняння і дістанемо $X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$.

Відокремимо змінні в одержаному рівнянні, ділячи обидві його частини на $a^2 X(x)T(t)$: $\dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$.

Ця тотожна рівність двох відношень, кожне з яких залежить тільки від x чи тільки від t, справджується лише у випадку, коли обидва відношення дорівнюють одній і тій же сталій величині. Позначимо її через λ: $\dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$. Звідси дістанемо два звичайні диференціальні рівняння $X'' - \lambda X = 0$ і $T'' - a^2 \lambda T = 0$, де λ – довільне дійсне число (***параметр розщеплення***).

Розв’яжемо ці рівняння для трьох можливих випадків значень параметра розщеплення λ:

а) якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, тоді: $X'' + \beta^2 X = 0$; $k^2 + \beta^2 = 0$; $k_{1,2} = \pm\beta i$; $X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$; $T'' + a^2\beta^2 T = 0$; $k^2 + a^2\beta^2 = 0$; $x_{1,2} = \pm a\beta i$; $T = C\cos(a\beta t) + D\sin(a\beta t)$;

б) якщо $\lambda = 0$, тоді: $X'' = 0$; $X' = A$; $X = Ax + B$; $T'' = 0$; $T' = C$; $T = Ct + D$;

в) якщо $\lambda = \beta^2 > 0$, тоді: $X'' - \beta^2 x = 0$; $k^2 - \beta^2 = 0$; $k_{1,2} = \pm\beta$; $X = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$; $T'' - a^2\beta^2 T = 0$; $k^2 - a^2\beta^2 = 0$; $k_{1,2} = \pm a\beta$; $T = Ce^{a\beta t} + De^{-a\beta t}$.

У силу довільності сталих A, B, C, D, λ маємо нескінченну множину розв’язків хвильового рівняння. Виділимо з неї підмножину розв’язків, які задовольняють зазначеним однорідним граничним умовам. Для цього підставимо в них вираз $u(x,t) = X(x)T(t)$ і дістанемо: $X(0)T(t) = 0$; $X(l)T(t) = 0$ $(t > 0)$.

Оскільки для ненульових розв’язків $T(t) \neq 0$ $(t > 0)$, то $X(0) = 0$; $X(l) = 0$. Таким чином, крайова задача для звичайного диференціального рівняння:

(ЗДР) $X'' - \lambda X = 0$ $(0 < x < l)$; (ГУ) $X(0) = 0$; $X(l) = 0$

дає можливість відібрати ненульові розв’язки хвильового рівняння.

Значення λ, для якого остання крайова задача має ненульовий розв'язок, називається ***власним значенням (власним числом)***, а відповідний розв'язок $X(x)$ – ***власною функцією***. Множина всіх власних значень називається ***спектром***, а поставлена задача про відшукання спектра і відповідної йому ***системи власних функцій – спектральною задачею*** або ***задачею Штурма – Ліувілля***.

Зазначимо, що *власні функції визначаються з точністю до сталого множника*.

Розглянемо три можливих випадки значень параметра розщеплення λ:

а) якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, то загальний розв'язок ЗДР визначається формулою $X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$. Підставляючи його у граничні умови, дістанемо: $A = 0$; $A\cos(\beta l) + B\sin(\beta l) = 0$. Звідси $B\sin(\beta l) = 0$. Якщо покласти $B = 0$, то отримаємо нульовий розв'язок $X(x) = 0$. Тому треба вважати, що $\sin(\beta l) = 0$;

Розв'язуючи одержане тригонометричне рівняння, знаходимо власні значення $\beta l = \pi n, n \in Z$; $\beta_n = \pi n / l$; $\lambda_n = -\pi^2 n^2 / l^2$; $n = 1,2,...$ і відповідні їм власні функції $X_n(x) = B_n \sin(\pi n x / l)$, $n = 1,2,...$, де B_n – довільна стала, відмінна від нуля.

Зазначимо, що нема необхідності розглядати значення $n = 0,$ $-1, -2,...$. При $n = 0$ маємо нульовий розв'язок $X_0(0) = 0$, а при $n = -1,-2,...$ власні функції відрізняються тільки знаком від знайдених $X_n(x)$ і тому не поповнюють набір власних функцій новими ***лінійно незалежними функціями***.

У цьому випадку функція $T(t)$ набуває вигляду:

$$T_n(t) = C_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + D_n \sin\frac{\pi n a t}{l}, \text{ де } C_n, D_n \text{ – довільні сталі.}$$

Відповідно ненульові розв'язки хвильового рівняння, що задовольняють однорідним граничним умовам, одержуються у вигляді:

$$u_n(x,t) = \sin(\pi n x / l)\left(a_n \cos(\pi n a t / l) + b_n \sin(\pi n a t / l)\right),$$

де a_n, b_n – довільні сталі, причому сталі B_n, C_n, D_n введено до складу a_n, b_n, $n = 1,2,...$;

б) якщо $\lambda = 0$, то загальний розв'язок ЗДР має вигляд $X = Ax + B$. Підставляючи його в граничні умови, одержимо $B = 0;\quad Al + B = 0$. Звідси $A = 0; B = 0$, тобто маємо нульовий розв'язок $X(x) = 0$;

в) якщо $\lambda = \beta^2 > 0$, то загальний розв'язок ЗДР має вигляд $X = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$. Підставляючи його в граничні умови, дістанемо систему для знаходження A і B:

$$A + B = 0; \quad Ae^{\beta l} + Be^{-\beta l} = 0.$$

Оскільки $\beta \neq 0$, то звідси одержимо $A = 0; B = 0$. Тобто, при будь-якому значенні $\lambda = \beta^2 > 0$ крайова задача має тільки нульовий розв'язок $X(x) = 0$.

Таким чином, всі ненульові розв'язки хвильового рівняння, що задовольняють однорідні граничні умови, утворюють послідовність

$$u_n(x,t) = \sin(\pi nx/l)\left(a_n \cos(\pi nat/l) + b_n \sin(\pi nat/l)\right),\quad n = 1,2,... .$$

2. Знаходження розв'язку, який задовольняє як граничним, так і початковим умовам.

Оскільки задане хвильове рівняння і граничні умови лінійні й однорідні, то згідно з принципом суперпозиції сума його розв'язків також є розв'язком. Більше того, функція $u(x,t)$, що задається рядом

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi nat}{l} + b_n \sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l},$$

також є розв'язком, який задовольняє однорідні граничні умови.

Для знаходження коефіцієнтів a_n, b_n скористаємося початковими умовами. Дістанемо співвідношення

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\pi nx/l) = \varphi(x); \quad \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (\pi na/l) b_n \sin(\pi nx/l) = \psi(x),$$

які можна розглядати як розвинення відомих функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ у ряди Фур'є за синусами на проміжку $[0; l]$. Вважаючи, що умови розвинення цих функцій у ряд Фур'є виконані, скористаємося відомими формулами для коефіцієнтів Фур'є і дістанемо:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx\,;\ \ b_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx \quad (n=1,2,...)\,.$$

Отже, розв'язок крайової задачі для хвильового рівняння можна подати у вигляді функціонального ряду:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\pi nat/l) + b_n\sin(\pi nat/l)\right)\sin(\pi nx/l)\,.$$

Зауваження. При розв'язуванні крайової задачі методом відокремлення змінних суттєва однорідність граничних умов. Якщо граничні умови ненульові, то заміною змінних задачу треба попередньо звести до випадку однорідних (нульових) граничних умов. Наприклад, якщо задано граничні умови $u(0,t) = g_1(t)$; $u(l,t) = g_2(t) \quad (t > 0)$, то використовується заміна $u = v + w$. Тут $v = v(x,t)$ – довільно задана функція, що задовольняє вказаним граничним умовам, зокрема, можна покласти

$$v = (1 - x/l)g_1(t) + (x/l)g_2(t)\,;$$

$w = w(x,t)$ – нова шукана функція, що задовольняє однорідним граничним умовам. Звичайно, диференціальне рівняння і початкові умови при цьому дещо ускладнюються.

Якщо треба розв'язати крайову задачу для неоднорідного ДРЧП з однорідними граничними умовами, то її розв'язок шукають у вигляді функціонального ряду за власними функціями $X_n(x)$ відповідної однорідної задачі (***метод розвинення за власними функціями***).

Зауваження. Знайдений розв'язок першої крайової задачі для хвильового рівняння можна подати у вигляді:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(\pi nx/l)\sin(\pi nat/l + \alpha_n)\,,$$

де $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $\sin\alpha_n = a_n\Big/\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $\cos\alpha_n = b_n\Big/\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Кожний член $u_n(x,t) = A_n\sin(\pi nx/l)\sin(\pi nat/l + \alpha_n)$ одержаного розвинення – це так звана ***стояча хвиля*** або ***власне***

коливання. Сталі A_n і α_n називаються відповідно ***амплітудою*** і ***початковою фазою*** стоячої хвилі $u_n(x,t)$. Кожна точка струни з фіксованою абсцисою x здійснює гармонічні коливання $u_n(x,t)$ з амплітудою $A_n \sin(\pi n x/l)$, різною для різних точок струни, і з однаковими ***частотою*** $\omega_n = \pi n a/l$ і ***початковою фазою*** α_n. Вся струна розбивається на n рівних ділянок, причому точки однієї і тієї ж ділянки знаходяться в одній і тій же ***фазі*** $\pi n a/l + \alpha_n$, а точки сусідніх ділянок – в прямо протилежних фазах. На рис. 1.6 зображені послідовні положення струни для випадків $n = 1, 2, 3$.

Точки, які відділяють одну ділянку від іншої, знаходяться в спокої. Це так звані ***вузли***. Середини ділянок, які називають ***пучностями***, коливаються з найбільшою амплітудою A_n. ***Основний тон***, який характеризує ***висоту*** звуку, визначається першою складовою $u_1(x,t)$. Інші ***тони (обертони)***, $u_n(x,t)$, $n = 2, 3, \ldots$, які видає струна одночасно з основним тоном, характеризують певне забарвлення (***тембр***) звуку. Рух струни в цілому є накладанням різних власних коливань.

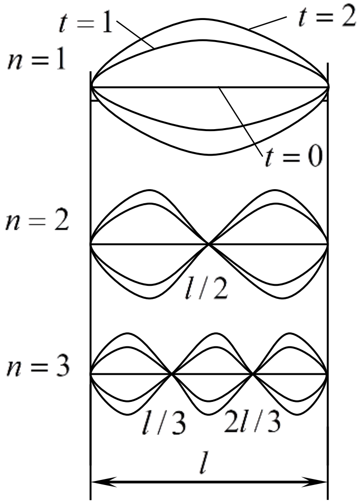

Рисунок 1.6

Приклад 1. Знайти закон коливань струни довжиною l, що розміщена на відрізку $[0;l]$, якщо в початковий момент часу струні надають форми синусоїди $\varphi(x) = A\sin(4\pi x/l)$, а потім її відпускають без початкової швидкості. Кінці струни закріплені, зовнішні сили відсутні.

□ З математичної точки зору маємо першу крайову задачу: знайти розв’язок однорідного хвильового рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < l, \quad t > 0)$, який задовольняє початковим умовам

$$u(x,0)=A\sin(4\pi x/l);\;\; \partial u(x,0)/\partial t=0 \quad (0<x<l)$$

і однорідним граничним умовам першого типу

$$u(0,t)=0;\quad u(l,t)=0 \quad (t>0).$$

Згідно з методом відокремлення змінних розв’язок поставленої задачі можна подати у вигляді функціонального ряду:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\pi nat/l)+b_n\sin(\pi nat/l)\right)\sin(\pi nx/l).$$

Знайдемо його коефіцієнти:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l A\sin\frac{4\pi}{l}x\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\begin{cases}0, & n\neq 4;\\ A, & n=4;\end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{\pi na}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}dx=0.$$

Тоді шуканий розв’язок $u(x,t)=A\cos(4\pi at/l)\sin(4\pi x/l)$. ■

Приклад 2. Провідник довжиною l, по якому тече змінний струм, вкритий такою якісною ізоляцією, що втрати через його поверхню G практично відсутні. Крім того, активний опір R настільки малий, що ним можна знехтувати. Початкове значення сили струму в провіднику дорівнює нулю $i(x,0)=0$, а початкова напруга задається формулою $u(x,0)=E_0\sin(5\pi x/(2l))$. Обидва кінці провідника ізольовані. Знайти силу струму $i(x,t)$ в кожній точці провідника в довільний момент часу.

□ Сила струму $i(x,t)$ задовольняє телеграфному рівнянню

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}-\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+\frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{RG}{LC}i=0.$$

Оскільки за умовою задачі втрати через ізоляцію G і активний опір R відсутні, тобто $G=0$, $R=0$, то це рівняння переходить в однорідне хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$$, де $a^2 = \frac{1}{LC}$; L – індуктивність, C – ємність.

З рівняння $Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ (падіння напруги) дістанемо: $\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{L}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{R}{L} i$. З умови задачі $R = 0$, $i(x,0) = 0$ і $\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = \frac{5\pi E_0}{2l}\cos\frac{5\pi x}{2l}$. Тоді $\frac{\partial i(x,0)}{\partial t} = -\frac{5\pi E_0}{2lL}\cos\frac{5\pi x}{2l}$.

Оскільки кінці провідника ізольовані, то функція $i(x,t)$ задовольняє однорідним граничним умовам: $i(0,t) = 0$, $i(l,t) = 0$.

Таким чином, задача допускає наступне математичне формулювання: знайти розв'язок однорідного хвильового рівняння $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$, який задовольняє початковим умовам $i(x,0) = 0$; $\frac{\partial i(x,0)}{\partial t} = -\frac{5\pi E_0}{2lL}\cos\frac{5\pi x}{2l}$ і однорідним граничним умовам $i(0,t) = 0$, $i(l,t) = 0$.

За методом відокремлення змінних розв'язок цієї задачі знаходимо у вигляді функціонального ряду

$$i(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\pi nat/l) + b_n \sin(\pi nat/l)\right)\sin(\pi nx/l).$$

Обчислимо його коефіцієнти:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0;\quad b_n = \frac{2}{\pi na}\int_0^l\left(-\frac{5E_0\pi}{2lL}\cos\frac{5\pi x}{2l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}dx =$$

$$= -\frac{5E_0}{nalL}\cdot\frac{1}{2}\int_0^l\left(\sin\frac{(2n+5)\pi x}{2l} + \sin\frac{(2n-5)\pi x}{2l}\right)dx = -\frac{5E_0}{2nalL}\times$$

$$\times\left(-\frac{2l}{(2n+5)\pi}\cos\frac{(2n+5)\pi x}{2l} - \frac{2l}{(2n-5)\pi}\cos\frac{(2n-5)\pi x}{2l}\right)\Bigg|_0^l =$$

$$= -\frac{5E_0}{\pi naL}\cdot\left(\frac{1}{2n+5}+\frac{1}{2n-5}\right) = \frac{20E_0}{\pi aL\,(25-4n^2)}.$$

Тоді шуканий розв'язок

$$i(x,t) = \frac{20E_0}{\pi aL}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{25-4n^2}\sin\frac{\pi nat}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}. \quad \blacksquare$$

Вивчення усталених (стаціонарних) процесів приводить до ДРЧП еліптичного типу. Наприклад, якщо в двовимірному однорідному рівнянні теплопровідності

$$\partial u/\partial t = a^2\left(\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2\right)$$

вважати, що шукана температура u не залежить від часу t, тобто $u = u(x,y)$, то похідна $\partial u/\partial t$ тотожно дорівнює нулю і для знаходження $u(x,y)$ одержуємо ***двовимірне рівняння Лапласа*** $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$, яке відноситься до еліптичного типу.

Для рівнянь еліптичного типу вказуються лише граничні умови, а початкові умови відсутні.

Нехай у крузі радіуса ρ_0 з центром у початку координат треба знайти розв'язок $u(\rho,\varphi)$ ***рівняння Лапласа*** (***в полярних координатах***)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (0 < \varphi < 2\pi;\ 0 < \rho < \rho_0),$$

який задовольняє граничній умові $u(\rho_0,\varphi) = g(\varphi) \quad (0 < \varphi < 2\pi)$, а також додатковим умовам, що випливають з фізичних міркувань:

$u(\rho,\varphi)$ – неперервна функція в крузі $0 \le \rho \le \rho_0$ (а, отже, обмежена в даному крузі); $u(\rho,\varphi)$ – періодична функція відносно φ з періодом 2π, тобто $u(\rho,\varphi+2\pi) = u(\rho,\varphi)$.

Тут φ – полярний кут; ρ – полярний радіус; $g(\varphi)$ – відома періодична функція з періодом 2π.

Розв'язок поставленої ***першої крайової задачі для рівняння Лапласа у крузі*** шукаємо методом відокремлення змінних у вигляді $u = R(\rho)\,\Phi(\varphi)$ Підставляючи цей вираз у рівняння, маємо:

$$\Phi(\varphi)R''(\rho)+(1/\rho)\,\Phi(\varphi)R'(\rho)+\left(1/\rho^2\right)\Phi''(\varphi)R(\rho)=0;$$

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=-\lambda\,,\quad \text{де}\quad \lambda\ge 0\,.$$

Зазначимо, що при $\lambda<0$ розв’язок неперіодичний. (Перевірте це самостійно).

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0;\qquad \rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0\,.$$

Якщо $\lambda=0$, то

$$\Phi''(\varphi)=0;\;\; \Phi(\varphi)=A\varphi+B;\quad \rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)=0;$$

$$R'(\rho)=v(\rho);\;\; \rho v'+v=0;\;\; \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{d\rho}{\rho};\quad \ln v=-\ln\rho+\ln C;$$

$$v=\frac{C}{\rho};\quad R'(\rho)=\frac{C}{\rho};\;\; R\rho=C\int\frac{d\rho}{\rho};\;\; R\rho=C\ln\rho+D;$$

$u_0(\rho,\varphi)=(A\varphi+B)(C\ln\rho+D)$, де A, B, C, D – довільні сталі.

Оскільки функція $u_0(\rho,\varphi)$ – періодична по φ, то $A=0$. Із неперервності функції $u_0(\rho,\varphi)$ у центрі круга при $\rho=0$ маємо $C=0$. Отже, $u_0(\rho,\varphi)=a_0/2$, де a_0 – довільна стала, в яку введено B і D.

Якщо $\lambda>0$, то $\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0$; $k^2+\lambda=0$;

$$k=\pm\sqrt{\lambda}i\;;\;\; \Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi;$$

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0;\;\; R(\rho)=\rho^{\alpha};$$

$$\rho^2\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}+\rho\alpha\rho^{\alpha-1}-\lambda\rho^{\alpha}=0;\;\; \alpha(\alpha-1)+\alpha-\lambda=0;$$

$$\alpha^2-\lambda=0;\;\; \alpha=\pm\sqrt{\lambda}\;;\quad R(\rho)=C\rho^{-\sqrt{\lambda}}+D\rho^{\sqrt{\lambda}};$$

$$u(\rho,\varphi)=\left(A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi\right)\left(C\rho^{-\sqrt{\lambda}}+D\rho^{\sqrt{\lambda}}\right),$$

де A, B, C, D – довільні сталі.

Оскільки розв’язок $u(\rho,\varphi)$ неперервний у центрі круга при

$\rho = 0$, то $C = 0$. Тоді $u(\rho,\varphi) = \left(a\cos\sqrt{\lambda}\varphi + b\sin\sqrt{\lambda}\varphi\right)\rho^{\sqrt{\lambda}}$, де $a,\ b$ – довільні сталі.

Знайдений розв'язок має період $2\pi/\sqrt{\lambda}$. Цей період дорівнює 2π або ціле число разів міститься в 2π тоді та тільки тоді, коли $\sqrt{\lambda}$ – ціле додатне число, тобто $\sqrt{\lambda} = n$; $\lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, ...)$.

Отже, $u_n(\rho,\varphi) = (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)\rho^n$.

Згідно з принципом суперпозиції довільна сума знайдених функцій $u_n(\rho,\varphi) \quad (n = 0, 1, 2, ...)$ і навіть ряд

$$u(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)\rho^n$$

також буде розв'язком рівняння Лапласа.

Довільні сталі $a_0,\ a_n,\ b_n \quad (n = 1, 2, ...)$ знаходимо з граничної умови:

$$u(\rho_0,\varphi) = g(\varphi): \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)\rho_0^n = g(\varphi);$$

$$g(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\rho_0^n \cos n\varphi + b_n\rho_0^n \sin n\varphi\right).$$

Розглядаючи останній вираз як розвинення функції $g(\varphi)$ в ряд Фур'є і використовуючи формули для коефіцієнтів ряду Фур'є, одержимо:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi; \qquad a_n = \frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi.$$

Розглянута крайова задача має важливе значення в фізичних застосуваннях. Зокрема, її можна інтерпретувати як задачу про знаходження електростатичного потенціалу кругового диску за відомим розподілом потенціалу на його межі $\rho = \rho_0$ або як задачу про стаціонарний розподіл температури всередині круга при відомій температурі на його межі.

Приклад 3. Знайти розподіл електростатичного потенціалу $u(\rho,\varphi)$ на однорідній тонкій круглій пластині радіуса $\rho_0 = 1$, якщо потенціал на її межі задається формулою $u(1,\varphi) = 8\sin^2 2\varphi$.

□ Треба знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \quad (0 < \varphi < 2\pi;\, 0 < \rho < 1),$$

який задовольняє граничній умові $u(1,\varphi) = 8\sin^2 2\varphi \quad (0 < \varphi < 2\pi)$. а також додатковим умовам, що випливають з фізичних міркувань:

Будемо шукати розв'язок у вигляді ряду

$$u(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right)\rho^n .$$

Обчислимо його коефіцієнти:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 8\sin^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi = \frac{4}{\pi}\varphi\Big|_0^{2\pi} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sin 4\varphi\Big|_0^{2\pi} = 8; \quad a_n = \frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi = \frac{1}{\pi\cdot 1^n}\int_0^{2\pi} 8\sin^2 2\varphi\times$$

$$\times\cos n\varphi d\varphi = \frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi = \frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\varphi\,d\varphi - \frac{2}{\pi}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\left(\cos(n+4)\varphi + \cos(n-4)\varphi\right)d\varphi = \frac{4}{n\pi}\sin n\varphi\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{(n+4)\pi}\times$$

$$\times\sin(n+4)\varphi\Big|_0^{2\pi} - \begin{cases}(2/\pi)\varphi\Big|_0^{2\pi} = -4, \quad n = 4;\\ \left((2/\pi)/(n-4)\right)\sin(n-4)\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0,\ n \neq 4;\end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi = \frac{1}{\pi_0 1^n}\int_0^{2\pi} 8\sin^2 2\varphi\sin n\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\sin n\varphi d\varphi = \frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin n\varphi d\varphi + \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sin(n+4)\varphi +$$

$$+ \sin(n-4)\varphi\Big)d\varphi = 0 .$$

Тоді $u(\rho,\varphi) = 8/2 + (-4)\rho^4 \cos 4\varphi = 4 - 4\rho^4 \cos 4\varphi$. ■

Метод сіток або ***метод скінченних різниць*** є одним із найбільш розповсюджених підходів до числового розв'язування задач автоматики та систем керування, де використовуються диференціальні рівняння з частинними похідними. Ідея методу полягає в заміні похідних скінченно-різницевими співвідношеннями. Далі обмежимось розглядом випадку двох незалежних змінних.

Розглянемо лінійне ДРЧП другого порядку

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Gu = F$$

в деякій плоскій області $\widetilde{D}$ координатної площини Oxy (рис. 1.7).

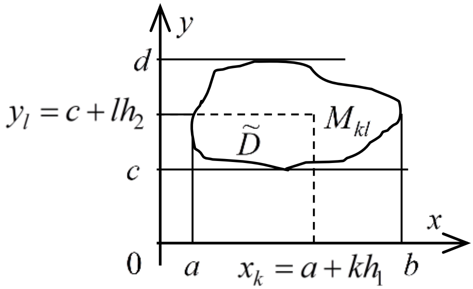

Рисунок 1.7

Нехай $[a;b]$ і $[c;d]$ – проекції області $\widetilde{D}$ на осі Ox і Oy; h_1 і h_2 – достатньо малі додатні числа; $M_{kl}(x_k; y_l)$, $k, l = 0,1,2,...$ – множина точок області $\widetilde{D}$, які служать ***вузлами прямокутної сітки***, утвореної прямими $x_k = a + kh_1$, $y_l = c + lh_2$; $k, l = 0,1,2,...$ і накладеної на область $\widetilde{D}$. Кожна комірка сітки – прямокутник зі сторонами h_1 і h_2.

Числове розв'язання ДРЧП в області $\widetilde{D}$ *методом сіток полягає в знаходженні чисел* u_{kl} *(значень* u_{kl} *сіткової функції), які наближено дорівнюють відповідним значенням шуканої функції* $u = u(x, y)$ *у вузлах сітки* $M_{kl} \in \widetilde{D}: \quad u_{kl} = u(x_k, y_l)$.

Два вузли є ***сусідніми***, якщо вони віддалені один від іншого в напрямку обох осей Ox та Oy на відстань, яка не перевищує кроку сітки h_1 або h_2 відповідно. Вузол сітки називається ***внутрішнім***, якщо він належить області $\widetilde{D}$ разом зі всіма чотирма своїми сусідніми вузлами. В іншому разі вузол називається ***межовим***. Межові вузли можуть належати області $\widetilde{D}$, а можуть їй не належати.

Виділяємо ***розрахункові вузли***, які включають усі внутрішні вузли, а також усі ті межові вузли, кожен з яких має сусідній внутрішній вузол сітки. Інші межові вузли далі не розглядаються.

У конкретних задачах необхідно знайти розв'язок ДРЧП при виконанні деяких додаткових умов, яким задовольняє шукана функція на межі S області $\widetilde{D}$. Природно вважати, що значення u_{kl} для виділених межових точок $M_{kl}(x_k; y_l)$, підкоряються початковим та граничним умовам. Відповідно у кожному межовому вузлі з виділених розрахункових на основі заданих граничних і початкових умов визначається значення шуканого розв'язку.

Далі у кожному внутрішньому вузлі $M_{kl}(x_k; y_l)$ диференціальне рівняння з частинними похідними замінюється відповідним скінченно-різницевим рівнянням.

Згідно означенню частинних похідних:

$$\frac{\partial u(M_{kl})}{\partial x} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{u(x_{k+1}, y_l) - u(x_k, y_l)}{h_1};$$

$$\frac{\partial u(M_{k\ell})}{\partial x} = \lim_{h_2 \to 0} \frac{u(x_k, y_{l+1}) - u(x_k, y_l)}{h_2}.$$

Для малих значень h_1 і h_2 одержуємо ***скінченно-різницеву апроксимацію частинних похідних***:

$$\frac{\partial u(M_{kl})}{\partial x} \approx \frac{u_{k+1,l} - u_{kl}}{h_1}; \quad \frac{\partial u(M_{kl})}{\partial y} \approx \frac{u_{k,l+1} - u_{kl}}{h_2}.$$

Аналогічно можна отримати ***скінченно-різницеву апроксимацію других частинних похідних***:

$$\frac{\partial^2 u(M_{kl})}{\partial x^2} \approx \frac{u_{k+1,l} - 2u_{kl} + u_{k-1,l}}{h_1^2}; \qquad \frac{\partial^2 u(M_{kl})}{\partial y^2} \approx$$

$$\approx \frac{u_{k,l+1} - 2u_{kl} + u_{k,l-1}}{h_2^2}; \quad \frac{\partial^2 u(M_{kl})}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{k+1,l+1} - u_{k+1,l} - u_{k,l+1} + u_{kl}}{h_1 h_2}.$$

Приймаючи вказані наближення, можна вважати, що числа u_{kl} задовольняють системі алгебраїчних рівнянь, які одержуються при підстановці в ДРЧП замість u невідомих u_{kl}, а замість частинних похідних – їх скінченно-різницевих апроксимацій. При цьому функції-коефіцієнти A, B, C, D, E, G, F потрібно розглядати в точках $M_{kl}(x_k; y_l)$, $k, l = 0,1,2,\ldots$.

Таким чином, числове розв'язання крайової задачі методом сіток зводиться до розв'язання деякої системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих u_{kl}, причому значення u_{kl} в точках межі S області $\tilde{D}$ підкоряються граничним умовам.

Зауваження. Докладне вивчення основних понять теорії ***різницевих схем*** – апроксимація, стійкість і збіжність – виходить за рамки навчальної програми. Зазначимо лише, що *зі стійкості й апроксимації випливає збіжність схеми*, і, очевидно, при збіжності *чим більш густа сітка, тим точніший числовий розв'язок*.

Приклад 4. Поставлено крайову задачу Діріхле для однорідного рівняння Лапласа в прямокутнику:

(ДРЧП) $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\big((x; y) \in \tilde{D};\ \tilde{D}:\ 0 < x < \alpha;\ 0 < y < \beta;\ \alpha = mh;\ \beta = nh\big);$

(ГУ) $\quad u\big|_S = g(x, y) = x - y,$

де S – межа області $\tilde{D}$; h – задане дійсне додатне число; m, n – задані цілі додатні числа.

Необхідно побудувати скінченно-різницеву апроксимацію цієї

диференціальної крайової задачі та розв’язати одержану ***сіткову крайову задачу*** при $h = 0{,}1$; $m = 3$; $n = 3$.

□ Зазначимо, що поставлена диференціальна крайова задача має і причому єдиний розв’язок.

Нехай $h_1 = h_2 = h$; $M_{kl}(x_k; y_l)$, $x_k = a + kh$, $y_l = c + lh$; $k = 0,1,2,...,m$, $l = 0,1,2,...,n$. Диференціальній крайовій задачі відповідає наступна система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих u_{kl}:

$$\frac{u_{k+1,l} - 2u_{kl} + u_{k-1,l}}{h^2} + \frac{u_{k,l+1} - 2u_{kl} + u_{k,l-1}}{h^2} = 0 \text{ або}$$

$$u_{k-1,l} + u_{k,l-1} + u_{k+1,l} + u_{k,l+1} - 4u_{kl} = 0$$

$$(k = 1,2,...,\ m-1;\ \ l = 1,2,...,\ n-1);$$

$$u_{0l} = f(0, hl) \qquad (l = 1,2,...,\ n-1);$$

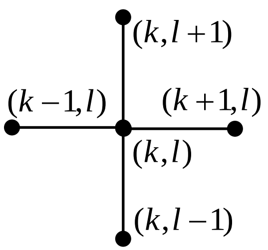

Рисунок 1.8

$$u_{kn} = f(kh; nh) \quad (k = 1,2,...,\ m-1);$$

$$u_{ml} = f(mh; lh) \quad (l = 1,2,...,\ n-1);$$

$$u_{k0} = f(kh; 0) \quad (k = 1,2,...,\ m-1).$$

Сіткова крайова задача включає всього $(m+1)(n+1) - 4$ різницевих рівнянь: $(m-1)(n-1)$ рівнянь, що апроксимують ДРЧП у внутрішніх вузлах відповідно до шаблону на рисунку 1.8, і $2(m+n) - 4$ рівнянь, що апроксимують граничні умови у виділених межових вузлах –визначають значення змінних u_{kl} на межі S області $\widetilde{D}$. Якщо підставити ці значення у різницеву апроксимацію ДРЧП, то одержимо квадратну систему з $(m-1)(n-1)$ неоднорідних лінійних рівнянь з $(m-1)(n-1)$ невідомими u_{kl} ($k = 1,2,...,\ m-1$; $l = 1,2,...,\ n-1$).

Цю лінійну алгебраїчну систему можна подати в стандартній матричній формі: $AU = B$, де U – матриця-стовпець невідомих;

B – матриця-стовпець вільних членів; A – квадратна матриця коефіцієнтів системи. Елементами матриці U служать числа u_{kl}, які відповідають внутрішнім точкам M_{kl} області $\widetilde{D}$; елементами матриці B – числа u_{kl}, які відповідають точкам межі області $\widetilde{D}$.

Випишемо і розв'яжемо сіткову крайову задачу для заданих конкретних значень: $h = 0{,}1$; $m = 3$; $n = 3$.

У цьому випадку (рис. 1.9) внутрішніми точками є $M_{11}(x_1; y_1)$, $M_{12}(x_1; y_2)$, $M_{21}(x_2; y_1)$, $M_{22}(x_2; y_2)$ і розрахункова система алгебраїчних рівнянь має вигляд:

$$AU = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}25 & -1 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0 & -1 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & -1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -(u_{01} + u_{10})/4 \\ -(u_{02} + u_{13})/4 \\ -(u_{20} + u_{31})/4 \\ -(u_{23} + u_{32})/4 \end{pmatrix}; \; U = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}.$$

Значення $u_{10}, u_{20}, u_{31}, u_{32}, u_{23}, u_{13}, u_{02}, u_{01}$ у межових точках $x_k = 0{,}1k$, $y_e = 0{,}1l$ співпадають із заданими значеннями функції $g(x, y) = x - y$ на межі S області $\widetilde{D}$:

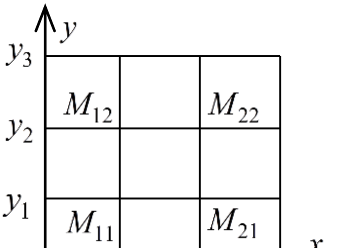

Рисунок 1.9

$$u_{10} = g(x_1, y_0) = 0{,}1 \cdot 1 - 0{,}1 \cdot 0 = 0{,}1;$$

$$u_{20} = g(x_2, y_0) = 0{,}1 \cdot 2 - 0{,}1 \cdot 0 = 0{,}2;$$

$$u_{31} = g(x_3, y_1) = 0{,}1 \cdot 3 - 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}2;$$

$$u_{32} = g(x_3, y_2) = 0{,}1 \cdot 3 - 0{,}1 \cdot 2 = 0{,}1;$$

$$u_{23} = g(x_2, y_3) = 0{,}1 \cdot 2 - 0{,}1 \cdot 3 = -0{,}1;$$

$$u_{13} = g(x_1, y_3) = 0{,}1 \cdot 1 - 0{,}1 \cdot 3 = -0{,}2;$$

$$u_{01} = g(x_0; y_1) = 0{,}1 \cdot 0 - 0{,}1 \cdot 1 = -0{,}1;$$

$$u_{02} = g(x_0, y_2) = 0{,}1 \cdot 0 - 0{,}1 \cdot 2 = -0{,}2.$$

Тоді

$$B=\begin{pmatrix} -(-0{,}1+0{,}1)/4 \\ -(0{,}2+(-0{,}2))/4 \\ -(0{,}2+0{,}2)/4 \\ -(-0{,}1+0{,}1)/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}2 \\ -0{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На практиці алгебраїчна система $AU=B$ має велику розмірність і, як правило, розв'язується тим чи іншим ітераційним методом на комп'ютері. У даному модельному випадку цю систему невисокого – четвертого – порядку будемо розв'язувати прямим методом – ***методом вилучення Гауса***.

1. *Прямий хід*:

$$(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & -1 & 0 & 0{,}25 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0 & -1 & 0{,}25 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} S_2' = S_2 + 0{,}25S_1; \\ S_3' = S_3 + 0{,}25S_1 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}9375 & 0{,}0625 & 0{,}25 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}0625 & -0{,}9275 & 0{,}25 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} S_2' = S_4; \\ S_4' = S_2 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}0625 & -0{,}9325 & 0{,}25 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}9375 & 0{,}0625 & 0{,}25 & 0{,}1 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} S_3' = S_3 - 0{,}25S_2; \\ S_4' = S_4 + 3{,}75S_2 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0{,}5 & -0{,}1 \\ 0 & 0 & 1 & -3{,}5 & 0{,}1 \end{array}\right) \sim \left| S_4' = S_4 + S_3 \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0{,}5 & -0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

2. *Зворотний хід*:

$$\begin{cases} -u_{11} + 0{,}25u_{12} + 0{,}25u_{21} & = 0; \\ \qquad 0{,}25u_{12} + 0{,}25u_{21} - u_{22} & = 0; \\ \qquad\qquad -u_{21} \quad + 0{,}5u_{22} & = -0{,}1; \\ \qquad\qquad\qquad -3u_{22} & = 0; \end{cases}$$

$$u_{22} = 0; \quad u_{21} = 0{,}5u_{22} + 0{,}1 = 0{,}1;$$

$$u_{12} = \left(u_{22} - 0{,}25u_{21}\right)/\,0{,}25 = -0{,}1;$$

$$u_{11} = 0{,}25u_{12} + 0{,}25u_{21} = -0{,}025 + 0{,}025 = 0.$$

Отже, $u_{11} = 0$; $u_{12} = -0{,}1$; $u_{21} = 0{,}1$; $u_{22} = 0$ – шукані значення u_{kl} функції $u = u(x,t)$ у внутрішніх вузлах сітки M_{kl} $(k = 1, 2, \ldots, m-1;\ \ l = 1, 2, \ldots, n-1)$. ■

Приклад 5. Поставлено першу крайову задачу для рівняння теплопровідності:

(ДРЧП) $\partial u/\partial t = a^2\ \partial^2 u/\partial x^2 \quad (0 < x < s;\ t > 0)$;

(ПУ) $u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 \le x \le s)$;

(ГУ) $u(0,t) = g_1(t);\quad u(s,t) = g_2(t) \quad (t > 0)$.

Необхідно у півсмузі $0 \le x \le s;\ t > 0$, використовуючи прямокутну сітку, утворену прямими: $x_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$; $t_l = l\tau$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, де $s = mh$, побудувати скінченно-різницеву апроксимацію цієї ***диференціальної крайової задачі*** та розв’язати одержану ***сіткову крайову задачу*** в прямокутнику $0 \le x \le s;\ 0 \le t \le T$ для значень u_{kl}, $k = \overline{1, m-1}$, $l = \overline{1, n}$, де $T = n\tau$, покладаючи:

$$a^2 = 0{,}5; \quad s = 1; \quad T = 0{,}06; \quad h = 0{,}1; \quad m = s/h = 1/0{,}1 = 10;$$

$$\varphi(x) = 10\cos(\pi/3)(x - 0{,}5) - 5\sqrt{3}; \quad g_1(t) = 0; \quad g_2(t) = 0.$$

□ Зазначимо, що поставлена диференціальна крайова задача має і до того ж єдиний розв’язок.

Якщо у кожному внутрішньому вузлі (k, l), $k = \overline{1, m-1}$, $l = \overline{1, n}$ для скінченно-різницевої апроксимації диференціального рівняння скористатися ***явною схемою***, шаблон якої подано на рисунку 1.10, то дістанемо:

$$\frac{u_{k,l+1} - u_{kl}}{\tau} = a^2 \frac{u_{k+1,l} - 2u_{kl} + u_{k-1,l}}{h^2}$$

або $u_{k,l+1} = (1 - 2\lambda)u_{kl} + \lambda\left(u_{k+1,l} + u_{k-1,l}\right)$, де $\lambda = \tau a^2 / h^2$.

Якщо ж у кожному внутрішньому вузлі (k, l), $k = \overline{1, m-1}$, $l = \overline{1, n}$ для побудови наближеної заміни ДРЧП застосувати ***неявну схему***, трафарет якої зображено на рисунку 1.11, то одержимо скінченно-різницеве співвідношення:

$$\frac{u_{kl} - u_{k,l-1}}{\tau} = a^2 \frac{u_{k+1,l} - 2u_{kl} + u_{k-1,l}}{h^2} \text{ або}$$

$$(1 + 2\lambda)u_{kl} - \lambda\left(u_{k+1,l} + u_{k-1,l}\right) - \lambda u_{k,l-1} = 0.$$

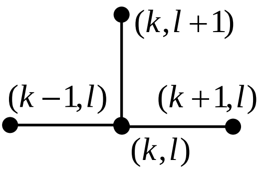

Рисунок 1.10

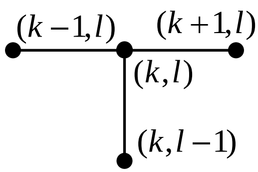

Рисунок 1.11

Зауваження. З наведених скінченно-різницевих апроксимацій явна схема стійка за умови $0 < \lambda \le 1/2$, а неявна схема стійка при будь-якому значенні λ, тобто *неявний шаблон дозволяє вибирати кроки* h *і* τ *незалежно один від одного*.

Різницеві рівняння, побудовані за явною схемою, дозволяють обчислити шукані значення функції u_{kl}, $k=\overline{1,\,m-1}$, $l=\overline{1,\,n}$ на кожному $(l+1)$-му шарі безпосередньо через значення на попередньому l-му шарі. Різницеві співвідношення, одержані за неявною схемою, такої властивості не мають: доводиться на кожному $(l+1)$-му шарі розв'язувати лінійну алгебраїчну систему високої розмірності.

Найбільш зручний вигляд скінченно-різницеві співвідношення за явною схемою набувають при крайньому допустимому значенні $\lambda=0{,}5$:

$$u_{k,l+1}=0{,}5\left(u_{k+1,l}+u_{k-1,l}\right),\;\; k=\overline{1,\,m-1}.$$

Далі для розв'язування поставленої крайової задачі з конкретними даними будемо користуватися останньою формулою. При цьому оцінка абсолютних похибок наближених розв'язків у прямокутнику $0\le x\le s;\, 0\le t\le T$ має вигляд:

$$\Delta=\left|u-\tilde{u}\right|\le(1/3)TM_1h^2,$$

де $\tilde{u}$ – точний розв'язок крайової задачі; M_1 – стала, що визначається як:

$$M_1=\max\left\{\left|\varphi^{(4)}(x)\right|,\;\left|g_1^{\prime\prime}(t)\right|,\;\left|g_2^{\prime\prime}(t)\right|\right\}\;\text{ при }\;0\le x\le s;\,0\le t\le T.$$

Оскільки за умовою $h=0{,}1$, $a^2=0{,}5$ і прийнято $\lambda=0{,}5$, то крок за часом визначається так:

$$\lambda=\tau a^2\big/h^2;\quad \tau=\lambda\,h^2\big/a^2=0{,}5\cdot0{,}1^2\big/0{,}5=0{,}01.$$

Відповідно, виходячи зі значення $T=0{,}06$, знайдемо максимальне число розрахункових кроків за часом:

$$T=n\tau;\;\; n=T/\tau=0{,}06/0{,}01=6.$$

Помічаємо, що для конкретних даних задачі початкові та межові умови симетричні відносно прямої $x=0{,}5$. Тому шуканий розв'язок також симетричний відносно цієї прямої, що дозволяє заповнювати таблицю 1.1 з розрахунковими значеннями u_{kl} тільки для $x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5$.

На початковому часовому шарі $l = 0$ з початкових умов маємо:

$$u_{00} = \varphi(0) = 0;\ \ u_{10} = \varphi(0{,}1) = 10\cos(\pi/3)(x - 0{,}5) - 5\sqrt{3} = 0{,}475\ 2;$$

$$u_{20} = \varphi(0{,}2) = 0{,}850\,3;\ u_{30} = \varphi(0{,}3) = 1{,}121\,2;\ u_{40} = \varphi(0{,}4) = 1{,}285\,0;$$

$$u_{50} = \varphi(0{,}5) = 1{,}339\ 7;\ u_{60} = \varphi(0{,}6) = 1{,}285\ 0;\ ...;\ u_{10,0} = \varphi(1) = 0.$$

Значення функції u_{k1}, $k = \overline{0,\ m}$ на першому часовому шарі $l = 1$ знаходимо, використовуючи значення u_{k0}, $k = \overline{1,\ m-1}$ на початковому шарі $l = 0$ та граничні умови при $l = 1$:

$$u_{01} = g_1(0{,}01) = 0;\ u_{11} = 0{,}5\left(u_{20} + u_{00}\right) = 0{,}5(0{,}850\,3 + 0) = 0{,}425\,2;$$

$$u_{21} = 0{,}5\left(u_{30} + u_{10}\right) = 0{,}5(1{,}121\,2 + 0{,}475\,2) = 0{,}798\,2;$$

$$u_{31} = 0{,}5\left(u_{40} + u_{20}\right) = 0{,}5(1{,}285\,0 + 0{,}850\,3) = 1{,}067\,7;$$

$$u_{41} = 0{,}5\left(u_{50} + u_{30}\right) = 0{,}5(1{,}339\,7 + 1{,}121\,2) = 1{,}230\,5;$$

$$u_{51} = 0{,}5\left(u_{60} + u_{40}\right) = 0{,}5(1{,}285\,0 + 1{,}285\,0) = 1{,}285\,0;$$

$$u_{61} = 0{,}5\left(u_{70} + u_{50}\right) = 1{,}230\ 5;\ \ ...;\ u_{10,1} = g_2(0{,}01) = 0.$$

Аналогічно обчислюємо шукані значення функції послідовно на наступних часових шарах $l = \overline{2,\ n}$ та заповнюємо таблицю 1.1.

Таблиця 1.1 – Числовий розв’язок крайової задачі

l	k	0	1	2	3	4	5
	t \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0,475 2	0,850 3	1,121 2	1,285 0	1,339 7
1	0,01	0	0,425 2	0,798 2	1,067 7	1,230 5	1,285 0
2	0,02	0	0,399 1	0,746 5	1,014 4	1,176 4	1,230 5
3	0,03	0	0,373 3	0,706 8	0,961 5	1,122 5	1,176 4
4	0,04	0	0,353 4	0,667 4	0,914 7	1,069 0	1,122 5
5	0,05	0	0,333 7	0,634 1	0,868 2	1,018 6	1,069 0
6	0,06	0	0,317 1	0,601 0	0,826 4	0,968 6	1,018 6

Знайдемо оцінку абсолютної похибки отриманого числового розв'язку. Для поставленої крайової задачі:

$$\varphi(x)=10\cos\frac{\pi(x-0{,}5)}{3}-5\sqrt{3};\quad \varphi'(x)=-\frac{10\pi}{3}\sin\frac{\pi(x-0{,}5)}{3};$$

$$\varphi''(x)=-\frac{10\pi^2}{9}\cos\frac{\pi(x-0{,}5)}{3};\ \varphi'''(x)=\frac{10\pi^3}{27}\sin\frac{\pi(x-0{,}5)}{3};$$

$$\varphi^{(4)}(x)=\frac{10\pi^4}{81}\cos\frac{\pi(x-0{,}5)}{3};$$

$$g_1(t)=0;\ g_1''(t)=0;\ g_2(t)=0;\ g_2''(t)=0.$$

Тоді $M_1=\max\left\{\left|\varphi^{(4)}(x)\right|,\ \left|g_1''(t)\right|,\ \left|g_2''(t)\right|\right\}=(10/81)\pi^4.$

Отже, дістанемо:

$$\Delta=\left|u-\tilde{u}\right|\le(1/3)TM_1h^2=(1/3)\cdot 0{,}06\cdot(10/81)\pi^4\cdot 0{,}1^2=0{,}0024.$$

Звідси одержимо оцінку максимальної відносної похибки:

$$\delta=(0{,}0024/0{,}3171)\cdot 100\%=0{,}76\%.$$

Отже, спостерігаємо досить високу точність наближеного числового розв'язку. ■

Зауваження. Розглянуті методи не вичерпують усіх відомих способів розв`язування задач математичної фізики. Перелічимо деякі найбільш вживані методи:

1. Метод відокремлення змінних.
2. Метод характеристик.
3. Метод інтегральних перетворень (зокрема, застосування перетворення Лапласа – операційний метод).
4. Метод перетворення координат.
5. Метод заміни незалежних і залежних змінних.
6. Метод функцій Гріна (функцій джерела).
7. Метод інтегральних рівнянь.
8. Варіаційні методи (замість крайової задачі для ДРЧП розв`язується деяка задача оптимізації).
9. Числові методи (метод сіток, апроксимація сплайнами, метод скінченних елементів і таке інше).

Запитання для самоконтролю

1. Дайте означення диференціального рівняння з частинними похідними (ДРЧП), його загального і частинного розв'язку.
2. Наведіть приклади інженерних задач, які описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних.
3. З чим пов'язана наявність у формулюванні задач математичної фізики, окрім диференціальних рівнянь, додаткових умов на шукану функцію?
4. Що таке початкова задача (задача Коші) для ДРЧП?
5. Укажіть основні типи граничних (межових) умов і відповідні типи крайових задач.
6. Яка задача математичної фізики називається коректно поставленою?
7. Який загальний вигляд лінійного ДРЧП другого порядку?
8. Дайте класифікацію лінійних ДРЧП другого порядку. Наведіть відповідний канонічний вигляд лінійного ДРЧП другого порядку кожного типу.
9. Виведіть рівняння коливань струни.
10. Виведіть рівняння теплопровідності.
11. Як формулюється перша крайова задача для однорідного одновимірного хвильового рівняння? Як розв'язується ця задача методом відокремлення змінних?
12. Як формулюється перша крайова задача для двовимірного рівняння Лапласа у крузі? Як розв'язується ця задача методом відокремлення змінних?
13. Які основні ідеї розв'язання ДРЧП методом сіток? Що називається вузлами сітки? Які вузли називаються сусідніми? Які вузли називаються внутрішніми? Які вузли називаються межовими? Які межові вузли включаються в множину розрахункових вузлів?
14. Як конструюються обчислювальні різницеві шаблони для частинних похідних? Запишіть скінченно-різницеві наближення для перших і других частинних похідних.
15. Як записується рівняння Лапласа в скінченно-різницевих наближеннях? Як розв'язується класична задача Діріхле для рівнянь Лапласа в прямокутній області різницевим методом?
16. Як записати одновимірне рівняння теплопровідності в скінченно-різницевих наближеннях? Чим відрізняється явна

схема методу сіток від неявної? Як вибираються кроки сітки при розв'язуванні ДРЧП?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Струна довжиною l, що розміщена на відрізку $[0;l]$, закріплена на кінцях. У початковий момент часу вона відтягнута в середній точці на відстань $l/10$, а потім відпущена без поштовху. Знайти відхилення $u(x,t)$ точок струни в довільний момент часу, якщо $l=10$ і $a=2$.

Вказівка. З математичної точки зору маємо першу крайову задачу: знайти розв'язок однорідного хвильового рівняння $\partial^2 u/\partial t^2 = a^2\,\partial^2 u/\partial x^2$ $(0<x<l,\ \ t>0)$, який задовольняє початковим умовам:

$$u(x,0)=\begin{cases} x/5, & 0\le x\le l/2 \\ (l-x)/5, & l/2\le x\le l \end{cases};\quad \partial u(x,0)/\partial t = 0\quad (0<x<l)$$

і однорідним граничним умовам першого типу:

$$u(0,t)=0;\quad u(l,t)=0\quad (t>0).$$

Відповідь: $u(x,t)=\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cdot\cos\dfrac{\pi n}{5}t\cdot\sin\dfrac{\pi n x}{10}.$

Приклад 2. Кінці стержня довжиною l, що розміщений на відрізку $[0;l]$, підтримуються при температурі, яка дорівнює нулю, а бокова поверхня теплоізольована. Початкова температура задається формулою $u(x,0)=5\sin(\pi x/l)-2\sin(3\pi x/l)$. Визначити температуру стержня в довільний момент часу, якщо $l=3$ і $a=3$.

Вказівка. Математична постановка задачі: знайти розв'язок однорідного рівняння теплопровідності $\partial u/\partial t = a^2\,\partial^2 u/\partial x^2$ $(0<x<l,\ \ t>0)$, який задовольняє початковій умові:

$$u(x,0)=5\sin(\pi x/l)-2\sin(3\pi x/l)\ \ (0<x<l)$$

і однорідним граничним умовам першого типу:

$$u(0,t)=0;\quad u(l,t)=0\quad (t>0).$$

Відповідь: $u(x,t)=5e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x/3)-2e^{-9\pi^2 t}\sin\pi x.$

Приклад 3. Знайти стаціонарний розподіл температури $u(\rho,\varphi)$ на однорідній тонкій круглій пластині радіуса $\rho_0=1$, якщо температура на колі, що обмежує цю пластину, задається формулою $u(1,\varphi)=3\varphi(2\pi-\varphi)$.

Вказівка. З математичної точки зору, застосовуючи полярні координати з полюсом у центрі пластини, маємо першу крайову задачу: знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \quad (0<\varphi<2\pi;\ 0<\rho<\rho_0),$$

який задовольняє граничній умові:

$$u(1,\varphi)=3\varphi(2\pi-\varphi) \quad (0<\varphi<2\pi).$$

Відповідь: $u(\rho,\varphi)=2\pi^2-12\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\rho^n\cos n\varphi.$

Приклад 4. На прямокутній сітці, що утворена прямими: $x_k=kh$, $k=0,1,2,\dots$; $t_l=l\tau$, $l=0,1,2,\dots$, використовуючи скінченно-різницеву апроксимацію $u_{k,l+1}=0{,}5\left(u_{k+1,l}+u_{k-1,l}\right)$, знайти в прямокутнику $0\le x\le 1;\ 0\le t\le 0{,}025$ чисельний розв'язок першої крайової задачі для рівняння теплопровідності:

(ДРЧП) $\partial u/\partial t=\partial^2 u/\partial x^2 \quad (0<x<1;\ \ t>0)$;

(ПУ) $u(x,0)=\sin\pi x \quad (0\le x\le 1)$;

(ГУ) $u(0,t)=0$; $u(1,t)=0 \quad (t>0)$.

Вказівка. Застосувати скінченно-різницеву апроксимацію $u_{k,l+1}=0{,}5\left(u_{k+1,l}+u_{k-1,l}\right)$, що відповідає $\lambda=\tau/h^2=0{,}5$. Значення кроку за просторовою координатою взяти $h=0{,}1$. Тоді

$$\tau=\lambda h^2=0{,}5\cdot 0{,}1^2=0{,}005.$$

Для перевірки розрахунків використати точний аналітичний розв'язок задачі: $u(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin\pi x$.

Змістовий модуль 2 РЯДИ

Лекція 2.1 Числовий ряд. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

План

2.1.1 Числовий ряд, члени ряду, часткові суми. Збіжність і розбіжність ряду. Сума ряду. Залишок ряду. Необхідна ознака збіжності та достатня ознака розбіжності. Властивості дій з рядами

2.1.2 Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів. Інтегральна ознака Коші. Еталонні ряди: ряд геометричної прогресії та узагальнений гармонічний ряд. Основна ознака порівняння. Гранична ознака порівняння. Ознака Даламбера. Радикальна ознака Коші

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *числові ряди, необхідна ознака збіжності, знакододатні ряди, інтегральна ознака збіжності, основна ознака порівняння, гранична ознака порівняння, еталонні (стандартні) ряди, ознака Дпламбера, радикальна ознака збіжності.*

2.1.1 Числовий ряд, члени ряду, часткові суми. Збіжність і розбіжність ряду. Сума ряду. Залишок ряду. Необхідна ознака збіжності та достатня ознака розбіжності. Властивості дій з рядами

Нехай $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – нескінченна числова послідовність. Нескінченна сума $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***числовим рядом***, а її доданки $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – відповідними (за номером) ***членами ряду***, причому n***-й член*** u_n також має назву ***загального члена***.

Скінченна сума $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ всіх перших членів ряду до u_n включно називається n***-ю частковою сумою ряду*** ($n = 1, 2, ...$).

Ряд називається ***збіжним***, якщо існує скінченна границя при $n \to \infty$ послідовності $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ його часткових сум: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. При цьому число S називають ***сумою ряду*** і пишуть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Якщо вказана границя нескінченна чи взагалі не існує, то ряд називається ***розбіжним***.

Ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+k} + ...$, який утворюється з початкового ряду $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ відкиданням перших n членів називається n***-м залишком ряду*** ($n = 1, 2, ...$).

Властивості числових рядів:

1. *Збіжність або розбіжність ряду не порушиться, якщо змінити, відкинути чи добавити скінченне число членів* (для збіжного ряду значення суми при цьому, в загальному випадку, змінюється).

Зокрема, *ряд і будь-який його залишок збігаються чи розбігаються одночасно*.

2. *Для збіжного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ *його* n*-й залишок* $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} = R_n$ *служить похибкою наближення* $S \approx S_n$ *суми ряду* S *його* n*-ю частковою сумою* S_n*. При цьому* $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

3. *Якщо члени ряду помножити на один і той самий відмінний від нуля сталий множник* $C = const \neq 0$*, то його збіжність не порушиться. У випадку збіжного ряду його сума буде помножена на* C: $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

4. *Два збіжні ряди* $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *можна почленно додавати і віднімати. Одержані ряди також збігаються і при цьому*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = (u_1 + v_1) + ... + (u_n + v_n) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) = (u_1 - v_1) + ... + (u_n - v_n) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

5. *Сума (різниця) збіжного і розбіжного рядів є розбіжним рядом*.

6. *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збігається, то довільний ряд, отриманий з даного групуванням його членів, що не змінює порядку їх розташування, також збігається і має ту саму суму*.

Зауваження. Про суму (різницю) розбіжних рядів нічого певного стверджувати не можна: результуючий ряд може як збігатися, так і розбігатися.

При дослідженні числових рядів перш за все цікавить головне питання: чи буде заданий ряд збіжним? Обчислення границі часткових сум, у загальному випадку, досить складна справа. Проте на практиці часто досить знати лише відповідь на принципове питання про збіжність ряду. Для цього використовуються ***ознаки збіжності***, що ґрунтуються на властивостях загального члена ряду.

Приклад 1. Користуючись означенням, дослідити ряд на збіжність. Для збіжного ряду вказати його суму:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln(1-1/n)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n-1)(5n+4)}$.

□ а) Перетворимо загальний член ряду:

$$u_n = \ln(1-1/n) = \ln\big((n-1)/n\big) = \ln(n-1) - \ln n.$$

Тоді часткову суму S_n можна подати у замкненій формі:

$$S_n = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ldots + \ln(n-1) - \ln n = \ln 1 - \ln n = \ln n,$$

вигляд якої не залежить від числа n. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty.$$

Отже, ряд розбігається.

б) Розкладемо загальний член ряду на найпростіші дроби:

$$u_n = \frac{1}{(5n-1)(5n+4)} = \frac{A}{5n-1} + \frac{B}{5n+4} =$$

$$= \left| A(5n+4) + B(5n-1) = 1; \quad \begin{matrix} n = 1/5: \\ n = -4/5: \end{matrix} \begin{cases} 5A = 1; & A = 1/5; \\ -5B = 1; & B = -1/5 \end{cases} \right| =$$

$$=\frac{1/5}{5n-1}+\frac{-1/5}{5n+4}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-1}-\frac{1}{5n+4}\right).$$

Тоді часткову суму S_n можна подати у замкненій формі, де кількість доданків не залежить від числа n:

$$S_n=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{14}+\frac{1}{14}-\frac{1}{19}+...+\frac{1}{5n-6}-\frac{1}{5n-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5n-1}-\frac{1}{5n+4}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5n+4}\right).$$

Знайдемо границю: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5n+4}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$.

Отже, ряд збігається і його сума $S=1/20$. ■

При розгляді числових рядів розв'язують дві основні задачі: 1) дослідити ряд на збіжність; 2) знайти суму збіжного ряду.

На практиці перш за все цікавить головне питання: чи буде заданий ряд збіжним? Обчислення границі часткових сум, у загальному випадку, досить складна справа. Проте на практиці часто досить знати лише відповідь на принципове питання про збіжність ряду. Для цього використовуються ***ознаки збіжності***, що ґрунтуються на властивостях загального члена ряду.

Теорема (***необхідна ознака збіжності***). *Якщо ряд збігається, то його загальний член* u_n *прямує до нуля при* $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

□ Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, де S – сума ряду (стала величина). Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S$, бо при $n\to\infty$ і $n-1\to\infty$. Віднімаючи з першої рівності другу, дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0 \quad \text{або} \quad \lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0.$$

Але $S_n-S_{n-1}=u_n$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. ■

Зауваження. Розглянута ознака є тільки необхідною, але не є достатньою. Тобто, з того що загальний член u_n при $n\to\infty$ прямує до нуля, ще не випливає, що ряд збігається. Наприклад, для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+1/n)$ з *прикладу 1* а) необхідна ознака виконується $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+1/n) = \ln 1 = 0$, але ряд розбігається.

Наслідок (***достатня ознака розбіжності***). *Якщо границя загального члена* u_n *при* $n\to\infty$ *відмінна від нуля, тобто* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0.$ *то ряд розбігається.*

Приклад 2. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+5}$ на збіжність.

□ Знайдемо границю n-го члена u_n при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+5} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+5/n} = \frac{1}{3} \neq 0$$. Ряд розбігається. ■

2.1.2 Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів. Інтегральна ознака Коші. Еталонні ряди: ряд геометричної прогресії та узагальнений гармонічний ряд. Основна ознака порівняння. Гранична ознака порівняння. Ознака Даламбера. Радикальна ознака Коші

Числовий ряд $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***знакододатним***, якщо $u_n \geq 0$, $n = 1, 2, ...$.

Послідовність часткових сум знакододатного ряду є зростаючою. Згадуючи, що обмежена монотонна змінна має границю, дістаємо ***необхідну і достатню умову збіжності знакододатного ряду***:

знакододатний ряд збігається, якщо послідовність його часткових сум обмежена зверху, і розбігається в іншому випадку.

Розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності.

Теорема (***інтегральна ознака Коші***). *Якщо члени знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0$, $n = 1, 2, ...$ *утворюють спадну послідовність* ($u_{n+1} \leq u_n$, $n = 1, 2, ...$) *і на проміжку* $[1;+\infty)$

існує спадна неперервна невід'ємна функція $f(x)$ *така, що при натуральних значеннях аргументу співпадає з членами ряду (* $f(n)=u_n$, $n=1,2,...$*), тоді вказаний ряд і невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *ведуть себе однаково: збігаються чи розбігаються одночасно*.

□ Зобразимо даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ геометрично точками на координатній площині Oxy, відкладаючи на осі Ox номери 1, 2, ..., n, ..., а на осі Oy – відповідні значення його членів $u_1=f(1)$, $u_2=f(2)$, …, $u_n=f(n)$, … (рис. 2.1).

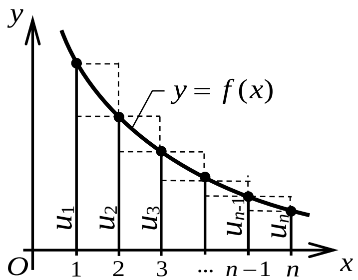

Рисунок 2.1

Побудуємо на цьому рисунку також графік указаної функції $f(x)$. Площа відповідної криволінійної трапеції, що спирається на відрізок $[1;n]$, дорівнює визначеному інтегралу

$$I_n=\int_1^n f(x)dx .$$

Впишемо в цю трапецію і опишемо навколо неї східчасті фігури, утворені з прямокутників, основами яких є проміжки $[1;2]$, $[2;3]$, а висоти дорівнюють u_1, u_2, …, u_n.

Порівнюючи площі цих об'єктів, дістанемо:

$$u_2+u_3+...+u_n<I_n<u_1+u_2+...+u_{n-1}$$

або $S_n-u_1<I_n<S_n-u_n$, де $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ – часткова сума ряду. Звідси $S_n<u_1+I_n$ і $S_n>u_n+I_n$. Нехай інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним. Його значення $I=\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. Тоді $S_n<u_1+I$.

Отже, зростаюча послідовність часткових сум S_n обмежена зверху і тому має границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається.

Нехай тепер інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ є розбіжним. У даному випадку це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = +\infty$. Тоді, переходячи до нерівності $S_n > u_n + I_n$ до границі при $n \to \infty$, отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Отже, послідовність часткових сум S_n необмежена і має нескінченну границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається. ■

Зауваження. На практиці функцію $f(x)$ одержують, замінюючи у виразі загального члена u_n ряду дискретну змінну n на неперервну x.

Наслідок. Для суми S і n-го залишку R_n збіжного знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ справедливі оцінки:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx < S < u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx; \quad R_n < \int_n^{+\infty} f(x)dx,$$

остання з яких дозволяє судити, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми S ряду частковою сумою S_n отримати задану похибку.

Зауваження. Інтегральна ознака, як і всі інші, справедлива, коли послідовність членів ряду задовольняє відповідним умовам, починаючи хоча б з деякого номеру.

Приклад 1. За допомогою інтегральної ознаки дослідити на збіжність ***узагальнений гармонічний ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$.

□ Покладемо $f(x) = 1/x^p$. Ця функція задовольняє умовам інтегральної ознаки. Розглянемо невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} (1/x^p)\, dx$.

При $p=1$ маємо ***гармонічний ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Для нього

$\int_1^{+\infty} (1/x)\, dx = \lim\limits_{N\to\infty} \ln|x|\Big|_1^N = +\infty$. Інтеграл і ряд розбіжні.

Нехай $p \neq 1$. Тоді

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{N\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^N=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right).$$

Коли $p>1$, то $\int_1^{+\infty}(1/x^p)\,dx=1/(p-1)$. Інтеграл і ряд збіжні.

Коли $p<1$, то $\int_1^{+\infty}(1/x^p)\,dx=+\infty$. Інтеграл і ряд розбіжні.

Остаточно маємо:

узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p$ *збігається при* $p>1$ *і розбігається при* $p\le 1$. ■

Приклад 2. За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити на збіжність задані знакододатні ряди:

а) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\sqrt[3]{\ln(5n-2)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-n}$.

□ а) Розглянемо функцію $f(x)=1\big/(x\ln^3 x)$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[4;+\infty)$, причому $f(n)=u_n$. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\int_2^{+\infty}f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{N\to+\infty}\int_2^N\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{N\to+\infty}\int_2^N\frac{d\ln x}{\ln^3 x}=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\int_2^N\ln^{-3}x\,d(\ln x)=\lim_{N\to+\infty}\left.\frac{\ln^{-2}x}{-2}\right|_x^N=-\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\left.\frac{1}{\ln^2 x}\right|_2^N=$$

$$=-(1/2)\lim_{N\to+\infty}\left(1\big/\ln^2 N-1\big/\ln^2 2\right)=1\big/(2\ln^2 2)\ne\infty.$$

Отже, цей невласний інтеграл збігається, а тому даний ряд теж збігається.

б) Введемо функцію $f(x)=\dfrac{1}{(5x-2)x\sqrt[3]{\ln(5x-2)}}$, що додатна, неперервна і монотонно спадна на інтервалі $[1;+\infty)$, причому $f(n)=u_n$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(5x-2)\sqrt[3]{\ln(5x-2)}} = \lim_{N\to+\infty} \int_1^{N} \frac{dx}{(5x-2)\sqrt[3]{\ln(5x-2)}} =$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = \ln(5x-2); & du = 5dx/(5x-2) \\ u_1 = \ln 3; & u_2 = \ln(5N-2) \end{array} \right| = \frac{1}{5} \lim_{N\to+\infty} \int_{\ln 3}^{\ln(5N-2)} u^{-1/3} du =$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{N\to+\infty} \frac{u^{2/3}}{2/3} \Bigg|_{\ln 3}^{\ln(5N-2)} = \frac{3}{10} \lim_{N\to+\infty} (\ln^{2/3}(5N-2) - \ln^{2/3} 3) = +\infty .$$

Оскільки цей невласний інтеграл розбігається, то даний ряд теж розбігається.

Завдання в) розв’язати самостійно. ■

Зауваження. Інтегральна ознака є однією з «сильних» ознак. Тобто, у тих випадках, коли багато інших ознак «не працюють» і потрібне додаткове дослідження, можна скористатися інтегральною ознакою. Але не треба звертатися до потужного інструменту, коли проблему можна вирішити без його застосування. Тобто, краще обійтися без інтегрування, якщо можна успішно застосувати інші простіші ознаки, наприклад, граничну ознаку порівняння.

При застосуванні наступних ознак порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що досліджується на збіжність, порівнюється з ***еталонним рядом*** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, про який відомо збігається він чи розбігається. За еталонні ряди часто приймають ***узагальнений гармонічний ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ і ***геометричний ряд*** (ряд геометричної прогресії) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$.

Ряд геометричної прогресії збігається при $|q|<1$ *і розбігається при* $|q|\ge 1$.

Теорема (***перша*** (***основна***) ***ознака порівняння***).

а) *Нехай маємо збіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *причому* $u_n \le v_n$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *теж збігається.*

(Якщо $u_n > v_n$, то жодних висновків робити не можна).

б) *Нехай маємо розбіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *, причому* $u_n \geq v_n$ *,* $n = 1, 2, \ldots$ *. Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *теж розбігається.*

(Якщо $u_n < v_n$, то ніяких висновків робити не можна).

Таким чином, з розбіжним рядом порівнюємо «у бік більше»; а зі збіжним рядом – «у бік менше».

Приклад 3. За допомогою основної ознаки порівняння дослідити на збіжність задані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n \ln(3n)}; \qquad \text{б) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 - 2n - 1}.$$

□ а) Застосуємо основну ознаку порівняння з «більшим» збіжним рядом геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (1/5)^n$ зі знаменником $q = 1/5 < 1$:

$$u_n = 1/(5^n \ln(3n)) < 1/5^n = (1/5)^n = v_n, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Оскільки $u_n \leq v_n$, то «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n \ln(3n)}$ також збігається.

б) Оскільки $u_n = \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 - 2n - 1} \geq \frac{\sqrt{n^3}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} = v_n$ при $n \geq 3$ і «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом з $p = 1/2 \leq 1$, то за ознакою порівняння «більший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 - 2n - 1}$ також розбігається. ■

Теорема (***друга*** (***гранична***) ***ознака порівняння***). *Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя* $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = c$, $(0 < c < +\infty)$ *відношення загальних членів двох знакододатних рядів* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *і*

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *то обидва ряди поводять себе однаково щодо збіжності: одночасно збігаються чи розбігаються*.

Зауваження. Для порівняння треба підбирати еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, загальний член якого v_n є нескінченно малою того ж порядку, що і загальний член u_n ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, який досліджується.

Приклад 4. За допомогою граничної ознаки порівняння дослідити на збіжність задані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+4/n\right); \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5}+4}{6n^4-n^2+3}.$$

□ а) Відомо, що $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$. Звідси при $n \to \infty$ маємо: $4/n \to 0$; $\ln\left(1+4/n\right) \sim 4/n = O^*(1/n)$. Тому для даного ряду застосуємо граничну ознаку порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається:

$$u_n = \ln\left(1+4/n\right),\ v_n = 1/n; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+4/n\right)}{1/n} =$$

$$= 4\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+4/n\right)}{1/n} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\, \alpha = 4/n \to 0 \ \textit{при}\ \ n \to \infty \right| =$$

$$= 4\lim_{\alpha\to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 4 \ \ (\neq 0, \neq \infty).$$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+4/n\right)$ розбігається.

б) Оскільки $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^5}+4}{6n^4-n^2+3} \sim \dfrac{\sqrt[3]{n^5}}{6n^4} = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{n^{7/3}} = O^*(1/n^{7/3})$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{7/3}$, $p = 7/3 > 1$, що збігається:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{7/3}(n^{5/3}+4)}{6n^4-n^2+3} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1+4/n^{5/3}}{6-1/n^2+3/n^4} =$$

$$= 1/6 \quad (\neq 0, \neq \infty).$$ Даний ряд теж збігається. ■

Теорема (***ознака Даламбера***). *Якщо для знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ *відношення наступного члена до попереднього, то* а) *при* $l < 1$ *ряд збігається*; б) *при* $l > 1$ *ряд розбігається*; в) *при* $l = 1$ *не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається*.

Зауваження. На практиці при дослідженні на збіжність найчастіше використовується саме ознака Даламбера. *Щоб не натрапити на випадок невизначеності* $l = 1$*, її застосовують до таких рядів, загальний член яких містить у своєму складі факторіал і/або показникову функцію від* n , наприклад:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^{2n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{(3n+2)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}\sqrt{n}}{(2n-1)!}.$$

Приклад 5. За допомогою ознаки Даламбера дослідити на збіжність задані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-4}{\sqrt[3]{n^2 \cdot 10^{2n}}}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^2+2n}.$$

□ а) Загальний член цього ряду можна записати у вигляді $u_n = \dfrac{7n-4}{10^{(2/3)n}\sqrt[3]{n^2}}$. До його складу входить показникова функція $10^{(2/3)n}$. Тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{7(n+1)-4}{10^{(2/3)(n+1)}\sqrt[3]{(n+1)^2}} = \frac{7n+3}{10^{(2/3)n+2/3}\sqrt[3]{(n+1)^2}};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(7n+3)10^{(2/3)n}\sqrt[3]{n^2}}{10^{(2/3)n+2/3}\sqrt[3]{(n+1)^2}\,(7n-4)} = \frac{1}{10^{2/3}} \lim_{n\to\infty} \frac{7n+3}{7n-4} \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2}{(n+1)^2}} = 10^{-2/3} \lim_{n\to\infty} \frac{7+3/n}{7-4/n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{(1+1/n)^2}} =$$

$$= 10^{-2/3} \cdot 1 \cdot \sqrt[3]{1} = 10^{-2/3} < 1.$$ Ряд збігається.

б) У загальний член цього ряду $u_n = (n-1)! \big/ (n^2+2n)$ входить факторіал $(n+3)!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1-1)!}{(n+1)^2+2(n+1)} = \frac{n!}{n^2+4n+3} = \frac{(n-1)!n}{n^2+4n+3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n(n^2+2n)}{(n^2+4n+3)(n-1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2}{n^2+4n+3} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{1/n+4/n^2+3/n^3} = \left|\frac{1}{0}\right| = +\infty > 1.$$ Ряд розбігається. ■

Теорема (***радикальна ознака Коші***). *Якщо для знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$, *то* а) *при* $l<1$ *ряд збігається*; б) *при* $l>1$ *ряд розбігається*; в) *при* $l=1$ *не можна зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду*.

Зауваження. Радикальну ознаку зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції від n, *з яких досить просто добувається корінь* n*-го степеня*. Наприклад:

$$\sum_{n=1}^{\infty} tg^{n+3}\frac{n^2-1}{n^4+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln^{5n}\frac{4n+1}{2n+3};\ \sum_{n=1}^{\infty}\big((4n-3)/(9n+2)\big)^{n^2}.$$

Приклад 6. За допомогою радикальної ознаки Коші дослідити на збіжність задані знакододатні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\left(n^2\big/(n^3+1)\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \big/ arctg^{n-4}\left(n^2\big/(n+3)\right)$.

□ а) Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\sin\left(n^2\big/(n^3+1)\right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n\left(n^2\big/(n^3+1)\right)} = \lim_{n\to\infty}\sin\left(n^2\big/(n^3+1)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sin\left((1/n)/(1+1/n^3)\right) = \sin 0 = 0 < 1.$$ Ряд збігається.

б) Загальний член ряду $u_n = 2^n : arctg^{n-4}\left(n^2\big/(n+3)\right)$ містить степені з показниками n та $n-4$, що залежать від n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n : arctg^{\,n-4}\left(n^2/(n+3)\right)}=$$

$$=2:\lim_{n\to\infty} arctg^{(n-4)/n}\frac{n^2}{n+3}=2:\lim_{n\to\infty} arctg^{1-4/n}\frac{1}{1/n+3/n^2}=$$

$$=2:arctg(+\infty)=4/\pi>1.$$ Ряд розбігається. ■

Зауваження. У випадку невизначеності $l=1$, радикальна ознака, як і «рівносильна» їй ознака Даламбера, відповіді не дає. Потрібні додаткові дослідження на основі інших більш «сильних» ознак, до яких відносяться всі наведені вище.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається числовим рядом, частковою сумою, загальним членом, залишком ряду?
2. Який числовий ряд називається збіжним (розбіжним)? Що називається сумою збіжного ряду?
3. У чому полягає необхідна ознака збіжності та відповідна достатня ознака розбіжності ряду?
4. Сформулюйте властивості дій з рядами.
5. Який числовий ряд називається знакододатним? Сформулюйте необхідну та достатню умову збіжності знакододатного ряду.
6. У чому полягає інтегральна ознака Коші? Як оцінюються сума і залишок збіжного знакододатного ряду, спираючись на інтегральну ознаку?
7. Що таке еталонні ряди? При яких умовах збігаються і розбігаються найпоширеніші еталонні ряди – узагальнений гармонічний ряд і ряд геометричної прогресії?
8. Сформулюйте основну ознаку порівняння.
9. У чому полягає гранична ознака порівняння? З яких міркувань потрібно підбирати еталонний ряд?
10. Сформулюйте ознаку Даламбера. Коли краще застосовувати ознаку Даламбера, щоб не натрапити на випадок невизначеності?
11. У чому полягає радикальна ознака Коші? Коли краще застосовувати радикальну ознаку, щоб не натрапити на випадок невизначеності?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Користуючись означенням, дослідити на збіжність числовий ряд та у разі збіжності знайти його суму. Для кожного ряду знайти третю часткову суму S_3.

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+11)(4n+15)}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16^n-5^n}{80^n}.$$

Вказівка. Усі обчислення проводити з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

Відповідь:

а) ряд збігається, його сума $S=0{,}0227$; $S_3=0{,}0119$;

б) ряд збігається, його сума $S=0{,}1833$; $S_3=0{,}1814$.

Приклад 2. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin\frac{n}{n^4+5}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+4}{5n^2+1}}.$$

Вказівка. Рекомендовано використати необхідну ознаку збіжності (достатню ознаку розбіжності).

Відповідь: а) ряд розбігається; б) ряд розбігається.

Приклад 3. Дослідити на збіжність задані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3n}{5n^6+n^2-4n+1}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\sqrt[3]{n^7}+7n}{3n^2+8n-3}.$$

Вказівка. Рекомендовано використати граничну ознаку порівняння або достатню ознаку розбіжності.

Відповідь: а) ряд збігається; б) ряд розбігається.

Приклад 4. Дослідити на збіжність задані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(7n+2)\ln^3(7n+2)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)e^{-n}.$$

Вказівка. Рекомендовано використати інтегральну ознаку Коші.

Відповідь: а) ряд збігається; б) ряд збігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність задані знакододатні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+9}{5^{2n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n)!}{(n!)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+4)\,arctg\,\dfrac{1}{6^n}$.

Вказівка. Рекомендовано використати ознаку Даламбера.

Відповідь:

а) ряд збігається; б) ряд розбігається; в) ряд збігається.

Приклад 6. Дослідити на збіжність задані знакододатні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(tg\,\dfrac{\pi(n^4+8)}{6n^4-1}\right)^{2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n+5}{4n+3}\right)^{3n^2}$.

Вказівка. Рекомендовано використати радикальну ознаку Коші.

Відповідь: а) ряд збігається; б) ряд розбігається.

Лекція 2.2 Знакозмінні ряди

План

2.2.1 Знакозмінні ряди. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбниця

2.2.2 Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду. Абсолютна й умовна збіжність

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *знакозмінні ряди, знакопочергові ряди, ознака Лейбниця, достатня ознака збіжності знакозмінного ряду, абсолютна й умовна збіжність знакозмінного ряду.*

2.2.1 Знакозмінні ряди. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбниця

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, що містить нескінченну кількість членів обох знаків + і -, називається ***знакозмінним***.

Знакозмінний ряд, два довільні сусідні члени якого мають різні знаки, називається ***знакопочерговим*** або ***рядом Лейбниця***. Його вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots,\ \text{де}\ a_n=|u_n|\geq 0.$$

Теорема (***достатня ознака Лейбниця***). *Якщо для знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n \geq 0$ *виконуються дві умови*: 1) $a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною і прямує до нуля, тоді цей ряд є збіжним, причому його сума* S *додатна і не перевищує модуля першого члена*: $0 < S \leq a_1$.

□ Розглянемо часткову суму з парним числом членів:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} =$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Кожна різниця в дужках додатна, оскільки $a_n > a_{n+1}$. Тому $S_{2n} > 0$ і послідовність $\{S_{2n}\}$ – зростаюча. Крім того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1,$$

оскільки кожна дужка знову-таки додатна. Тобто послідовність $\{S_{2n}\}$ обмежена зверху.

Отже, послідовність $\{S_{2n}\}$ монотонно зростає і обмежена, тому має границю. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, тоді $0 < S \leq a_1$.

Обчислимо границю часткових сум з непарними номерами:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = S + 0 = S.$$

Таким чином, часткові суми як з парними, так і з непарними номерами мають спільну границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$.

Звідси випливає, що вся послідовність часткових сум $\{S_n\}$ також має, причому ту ж саму границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, Тобто ряд збігається. При цьому $0 < S \leq a_1$. ■

Приведемо графічну ілюстрацію послідовності часткових сум (рис. 2.2). З неї видно, що послідовність часткових сум $\{S_n\}$ прямує до границі S і є коливальною; сума ряду менша за будь-яку суму з непарним індексом, а тому менша, ніж перший член ряду u_1.

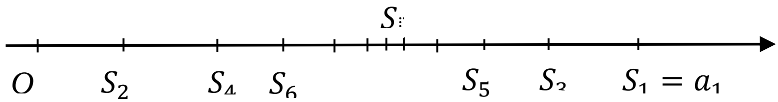

Рисунок 2.2

Наслідок. Абсолютна похибка Δ_n *від заміни суми* S *збіжного знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *будь-якою його частковою сумою* S_n *не перевищує модуля першого з відкинутих членів*. Іншими словами, *модуль залишку* R_n *збіжного знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *не перевищує модуля першого з відкинутих членів*. Тобто $\Delta_n = |S - S_n| = |R_n| \le a_{n+1}$.

Зауваження. Друга умова ознаки Лейбниця $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, як розглянуто раніше, є необхідною для збіжності. Тому спочатку перевіряють саме її.

Приклад 1. За допомогою ознаки Лейбниця дослідити на збіжність дані знакопочергові ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^3 - 1}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n^2}.$$

□ а) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$2)\ \lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n^3 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{4 - 1/n^3} = 0;$$

$$1)\ |u_n| = \frac{n}{4n^3 - 1} > \frac{n+1}{4(n+1)^3 - 1} = |u_{n+1}|, \quad n = 1, 2, \ldots$$ (доведіть самостійно, безпосередньо переконавшись, що $|u_n| - |u_{n+1}| > 0$).

Отже, умови виконуються. Даний ряд збігається.

б) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Двічі скористаємося правилом Лопіталя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{(5^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\ln 5}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \frac{\ln 5}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(5^x)'}{x'} = \frac{\ln 5}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\ln 5}{1} = +\infty.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = +\infty \ne 0$. Оскільки друга умова ознаки Лейбниця не виконується, то даний ряд розбігається. ■

2.2.2 Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду. Абсолютна й умовна збіжність

Теорема (***достатня ознака збіжності знакозмінного ряду***). *Якщо для знакозмінного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *збігається ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, *складений з модулів його членів, то даний ряд також збігається*.

Зауваження. Наведена ознака є лише достатньою, але не необхідною: існують збіжні знакозмінні ряди, яким відповідають розбіжні ряди, утворені з модулів їх членів. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ збіжний за ознакою Лейбниця, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ з модулів його членів, розбіжний як гармонічний ряд.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, складений з модулів його членів, збігається, та ***умовно збіжним***, коли сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ з модулів його членів розбігається.

З попередньої ознаки випливає, що *довільний абсолютно збіжний ряд є збіжним*.

Підкреслимо, що *виконання ознаки Лейбниця гарантує не* *абсолютну, а лише умовну збіжність знакопочергового ряду.*

Зауваження. В абсолютно збіжному ряді, подібно до скінченної суми, члени можна переставляти як завгодно. При цьому він залишається абсолютно збіжним і його сума не змінюється. Навпаки, в умовно збіжному ряді перестановка членів може привести до зміни його суми і навіть до розбіжності.

Дослідження знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на збіжність доцільно розпочинати з виявлення абсолютної збіжності як більш «сильної», застосовуючи відомі ознаки збіжності знакододатних рядів до ряду з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Якщо ряд з модулів збігається, то сам знакозмінний ряд абсолютно збіжний і дослідження завершене. Якщо ж ряд з модулів розбігається, то інколи можна відразу зробити висновок про розбіжність і самого знакозмінного ряду (наприклад, при невиконанні необхідної ознаки збіжності). Але частіше далі треба провести більш «тонке» дослідження безпосередньо самого знакозмінного ряду на умовну збіжність.

Приклад 1. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність дані знакозмінні ряди:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^4}; \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}; \quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1+1/n)^{3n^2}.$$

□ а) До ряду з модулів членів даного ряду застосуємо основну ознаку порівняння:

$$|u_n| = \left| \frac{\sin n}{n^4} \right| = \frac{|\sin n|}{n^4} \le \frac{1}{n^4} = v_n.$$

Оскільки більший ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$ є збіжним узагальненим гармонічним рядом з $p = 4 > 1$, то менший ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ теж збіжний. Отже, даний ряд абсолютно збіжний.

б) Ряд з модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом з $p = 1/2 \le 1$.

Сам даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n^{1/2}$ є знакопочерговим. Він задовольняє обидві умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0; \ |u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = |u_{n+1}|, \ n = 1, 2, ...$$

і тому є збіжним. Отже, даний ряд умовно збіжний.

в) Модуль загального члена даного ряду $|u_n| = (1+1/n)^{3n^2}$ є степенем з показником $3n^2$ виразу $(1+1/n)$, тому до ряду з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+1/n)^{3n^2}} = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{3n} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n\right)^3 = e^3 > 1.$$ Ряд з модулів розбігається.

З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ за радикальною ознакою випливає $\lim_{n\to\infty}|u_n| \neq 0$. Звідси $\lim_{n\to\infty}u_n \neq 0$.

Таким чином, для даного ряду не виконується необхідна ознака збіжності, тому він розбігається. ■

Запитання для самоконтролю

1. Який числовий ряд називається знакозмінним?
2. Що таке знакопочерговий ряд (ряд Лейбниця)?
3. У чому полягає ознака Лейбниця збіжності знакопочергового ряду?
4. Як оцінюються сума і залишок збіжного знакопочергового ряду, спираючись на ознаку Лейбниця?
5. Який знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним? Умовно збіжним?
6. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності довільного (у тому числі, знакозмінного) числового ряду. Сформулюйте достатню ознаку розбіжності.
7. Сформулюйте достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.

8. В якому порядку краще досліджувати знакозмінний ряд на абсолютну й умовну збіжність?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність задані знакопочергові числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+2}{7n-5}\right)^{2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[3]{5n^7+2}}{9n^3+8\sqrt{n}-4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+5)\sqrt{\ln(2n+5)}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg^{n^2}\frac{\pi(n+1)}{6n+5}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(8n^4-3\sqrt[5]{n^2+6}\right)}{5n^2+9\sqrt{n}-4}$.

Вказівка. Спочатку досліджувати на абсолютну збіжність, розглядаючи відповідний ряд з модулів і вибираючи найбільш раціональну ознаку збіжності знакододатних рядів.

Відповідь: пункти а), в), д) ряд збігається абсолютно;

пункти б), г) ряд збігається умовно; пункт е) ряд розбігається.

Лекція 2.3 Степеневі ряди. Область збіжності

План

2.3.1 Функціональний ряд. Область збіжності функціонального ряду. Рівномірна збіжність. Ознака Вейерштрасса

2.3.2 Степеневі ряди. Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду. Область збіжності степеневого ряду

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *функціональні ряди, область збіжності функціонального ряду, абсолютна та рівномірна збіжність функціонального ряду, степеневі ряди, теорема Абеля, радіус і інтервал збіжності степеневого ряду, властивості степеневих рядів.*

2.3.1 Функціональний ряд. Область збіжності функціонального ряду. Рівномірна збіжність. Ознака Вейерштрасса

Функціональним називається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, членами якого є функції $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, визначені на деякій непорожній множині D зміни аргументу x.

Якщо аргументу x надати деякого значення x_0 з ***області визначення*** D ряду, то дістанемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, що може збігатися чи розбігатися. Відповідно x_0 називається ***точкою збіжності*** чи ***точкою розбіжності*** функціонального ряду.

Множина D_s всіх точок збіжності називається ***областю збіжності*** функціонального ряду. Очевидно, що D_s є деякою підмножиною області визначення D: $D_s \subseteq D$.

В області збіжності ряду його сума S є функцією x: $S = S(x)$. Записують $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ і кажуть, що ***функція*** $S(x)$ ***розвивається (розкладається) в ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Для залишку $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ збіжного функціонального ряду виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Наприклад, функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ – це ряд геометричної прогресії зі знаменником x, що збігається при $|x| < 1$ і розбігається при $|x| \geq 1$. Сума ряду $S(x)$ може бути визначена лише в області його збіжності $x \in (-1; 1)$ і дорівнює $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається ***абсолютно збіжним*** в деякій області D_a, якщо в довільній точці x_0 цієї області абсолютно збігається відповідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається ***умовно збіжним*** у деякій області D_{us}, якщо в цій області сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

збігається, а ряд з модулів його членів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ розбігається.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені та неперервні на деякому відрізку $[a;b]$.

Рівномірною нормою функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число $\| f \|_1 = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$.

Рівномірною відстанню між функціями $f(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається рівномірна норма їх різниці:

$$\rho_1(f,g) = \| f - g \|_1 = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|.$$

Нехай відрізок $[a;b]$ міститься в області визначення D функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Цей ряд називається ***рівномірно збіжним*** на відрізку $[a;b]$ до суми $S(x)$, якщо виконується умова

$$\lim_{n \to \infty} \rho_1(S, S_n) = 0.$$

Числовий знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$ називається ***мажоруючим*** (***підсилюючим***) функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ для всіх значень x з деякого відрізка $[a;b]$, якщо виконується умова

$$|u_n(x)| \le a_n, \ \forall x \in [a;b], \ n = 1, 2, \dots .$$

Теорема Вейєрштрасса (***достатня ознака рівномірної збіжності функціонального ряду***). *Функціональний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *збігається абсолютно і рівномірно на деякому відрізку* $[a;b]$ *області визначення, якщо на цьому відрізку для нього існує збіжний мажоруючий знакододатний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$.

Приклад 1. Дослідити на збіжність функціональний ряд:

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2^3} + \frac{\cos 3x}{3^3} + \dots + \frac{\cos nx}{n^3} + \cdots.$$

□ Очевидно, що областю визначення D даного ряду є вся множина дійсних чисел: $D = R$.

При $x \in R$ кожний член заданого функціонального ряду за модулем не перевищує відповідного члена збіжного узагальненого гармонічного ряду: $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$. Оскільки мажоруючий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ збіжний при $x \in R$, то за достатньою ознакою рівномірної збіжності маємо, що заданий функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ збігається абсолютно та рівномірно при $x \in R$. ■

2.3.2 Степеневі ряди. Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду. Область збіжності степеневого ряду

Важливим для прикладних задач окремим випадком функціональних рядів є степеневі ряди.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$ називається функціональний ряд вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots,$$

де x – дійсна змінна (***аргумент***); x_0 – дійсне фіксоване число (***центр розвинення*** або ***опорна точка***); $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – дійсні сталі (***коефіцієнти***).

При $x_0 = 0$ одержується більш зручний за формою степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ за степенями x. До цього спрощеного вигляду довільний степеневий ряд зводиться лінійною заміною $x - x_0 = t$.

Очевидно, що довільний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ збіжний в точці $x = x_0$ до суми $S = a_0$. Детальніші відомості про збіжність дає така

теорема Абеля. а) *Якщо степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збігається при деякому* $x = x_1 \ne 0$, *то він абсолютно збігається при всіх значеннях* x, *для яких* $|x| < |x_1|$. *б) Якщо степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *розбігається при деякому* $x = x_2$, *то він розбігається при всіх значеннях* x, *для яких* $|x| > |x_2|$.

□ а) Оскільки за умовою ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний в точці $x = x_1 \neq 0$, то збіжним є числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$. За необхідною ознакою $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. Звідси випливає, що послідовність $\left\{a_n x_1^n\right\}$ обмежена, тобто існує таке додатне число M, що

$$|a_n x_1^n| \leq M, \quad n = 0,1,2,\ldots .$$

Враховуючи, що для $|x| < |x_1|$ величина $q = |x / x_1| < 1$, маємо:

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot |x / x_1|^n \leq M q^n, \; n = 0,1,2,\ldots .$$

Тобто модуль кожного члена степеневого ряду не перевищує відповідного члена збіжного геометричного ряду $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$ зі знаменником $|q| < 1$. Тоді за основною ознакою порівняння при $|x| < |x_1|$ цей ряд абсолютно збіжний.

б) Нехай тепер існує таке значення $x = x_2$, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбіжний. Доведемо методом від супротивного, що тоді цей ряд буде розбіжним і для всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_2|$. Справді, припускаючи, що ряд збіжний в якій-небудь точці x_*, яка задовольняє цю нерівність, за доведеним в пункті а) дістанемо, що він повинен бути збіжним і в точці x_2, бо $|x_2| < |x_*|$. Але це суперечить умові, що в точці x_2 ряд розбігається. ■

Теорема Абеля дозволяє розділити множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Існує таке невід'ємне число R, яке називається ***радіусом збіжності*** степеневого ряду, що при $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний (рис. 2.3). Симетричний інтервал $(-R;R)$ називається ***інтервалом збіжності*** степеневого ряду. Його довжина дорівнює подвоєному радіусу.

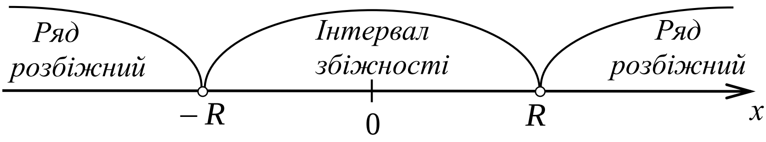

Рисунок 2.3

Зауваження. На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x=\pm R$, питання про збіжність розв'язується окремо для кожного конкретного ряду. У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку ($R=0$), у інших – інтервалом збіжності є вся числова пряма $(-\infty;+\infty)$ ($R=+\infty$).

Інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ за степенями двочлена $x-x_0$ має вигляд $(x_0-R;x_0+R)$ і є симетричним відносно центру розвинення x_0.

Зауваження. Інтервал збіжності степеневого ряду можна знайти безпосередньо за ознакою Даламбера або за радикальною ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів даного ряду. Для дослідження кінців інтервалу використовуються більш «сильні» ознаки.

Приклад 1. Знайти інтервал і область збіжності:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n^{6n}}$; в) $\sum\limits_{n=6}^{\infty}\frac{(-1)^n n!\,(x-2)^{n+5}}{3^n}$.

□ а) Для даного ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n};\ \ u_{n+1}=\frac{(x-1)^{3(n+1)}}{(4(n+1)+5)8^{n+1}}=\frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}}:\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}\right|=\frac{|x-1|^3}{8}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{4n+9}=\frac{|x-1|^3}{8}\lim_{n\to\infty}\frac{4+5/n}{4+9/n}=\frac{|x-1|^3}{8};\ \ \frac{|x-1|^3}{8}<1;$$

$$|x-1|^3<8;\ |x-1|<2;\ -2<x-1<2;\ -1<x<3.$$

Таким чином, $(-1;3)$ – інтервал збіжності даного ряду і $R=(3-(-1))/2=2$ – його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $x=-1$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{4n+5},$$

який є умовно збіжним за ознакою Лейбниця. (Переконайтеся в цьому самостійно).

При $x=3$ дістаємо знакододатний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(3)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+5},$$

який розбігається за граничною ознакою порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n=\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. (Переконайтеся в цьому самостійно).

Отже, областю збіжності даного ряду є півінтервал $[-1;3)$.

б) Для даного ряду скористаємося радикальною ознакою:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(x+4)^n/n^{6n}\right|}=|x+4|\lim_{n\to\infty}1/n^6=0.$$

Оскільки $0<1$ при всіх дійсних значеннях x, то інтервалом і областю збіжності ряду є вся числова пряма $(-\infty;+\infty)$ і його радіус збіжності $R=+\infty$.

в) До даного ряду застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n=(-1)^n n!\,(x-2)^{n+5}/3^n; \quad u_{n+1}=(-1)^{n+1}(n+1)!\times$$

$$\times(x-2)^{n+1+5}/3^{n+1}=(-1)^{n+1}n!\,(n+1)(x-2)^{n+6}/3^{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}n!\,(n+1)(x-2)^{n+6}/3^{n+1}}{(-1)^n n!\,(x-2)^{n+5}/3^n}\right|=$$

$$=\frac{|x-2|}{3}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\begin{cases}0 \ \ \textit{при} \ \ x=2\\ +\infty \ \ \textit{при} \ \ x\neq 2\end{cases}.$$

Отже, інтервалом і областю збіжності ряду є тільки одна точка

$x=2$ і його радіус збіжності $R=0$. ■

Основні властивості степеневих рядів.

1) *Степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку* $[a;b]$, *який цілком міститься в інтервалі збіжності* $(-R;R)$.

2) *Сума степеневого ряду* $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *неперервна на інтервалі збіжності* $(-R;R)$.

3) *Степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку* $[a;b]$, *який належить інтервалу збіжності* $(-R;R)$. *Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності*.

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

4) *Степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *можна почленно диференціювати в інтервалі збіжності* $(-R;R)$. *Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності*.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R;R).$$

Зауваження. При диференціюванні чи інтегруванні степеневого ряду інтервал збіжності не змінюється, але може змінитися збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

Зазначені властивості степеневих рядів використовуються в теоретичних дослідженнях і наближених обчисленнях.

Приклад 2. Знайти інтервал збіжності та суму ряду

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

□ Продиференціюємо заданий ряд почленно:

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n / (2n+1) \right) (x^{2n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n.$$

Одержаний ряд геометричної прогресії з першим членом $a=1$ і знаменником $q=-x^2$ при $x\in(-1;1)$ є збіжним, оскільки $|q|<1$. Знайдемо його суму: $S'(x)=1/(1+x^2)$.

Інтегруючи цю рівність на відрізку $[0;x]\subset(-1;1)$, дістанемо:

$$S(x)=\int_0^x S'(x)\,dx=\int_0^x dx/(1+x^2)=arctg\,x,\ \ |x|<1. \ \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти суму ряду $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, інтервал збіжності якого $(-1;1)$.

□ Інтегруючи заданий ряд почленно, дістанемо:

$$\int_0^x S(x)dx=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^x x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}.$$

Отриманий ряд геометричної прогресії з першим членом $a=x$ і знаменником $q=x$ збігається при $x\in(-1;1)$, оскільки $|q|<1$. Знайдемо його суму й одержимо: $\int_0^x S(x)\,dx=x/(1-x)$.

Диференціюючи ліву та праву частини здобутої рівності, дістанемо: $S(x)=1/(1-x)^2$. $\blacksquare$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається функціональним рядом? Що таке його точка збіжності і точка розбіжності? Область збіжності?
2. Який функціональний ряд називається абсолютно збіжним?
3. Що називається рівномірною нормою функції, яка неперервна на відрізку?
4. Що називається рівномірною відстанню між функціями, які неперервні на відрізку?
5. Який функціональний ряд називається рівномірно збіжним?
6. У чому полягає ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду?
7. Сформулюйте властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.
8. Який функціональний ряд називається степеневим?

9. У чому полягає теорема Абеля про збіжність степеневого ряду? Доведіть теорему Абеля.
10. Що таке інтервал збіжності та радіус збіжності степеневого ряду?
11. Яким може бути радіус збіжності степеневого ряду?
12. Чим область збіжності степеневого ряду може відрізнятися від інтервалу збіжності? Наведіть приклади різних за типом областей збіжності степеневого ряду,
13. Як досліджується збіжність степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності?
14. Сформулюйте властивості степеневих рядів.

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Знайти інтервал I, радіус R і область збіжності D степеневого ряду:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n n!}{n^2+9}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+6)^n n^n}{(2n)!}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-1)^{3n}\, 8^{n-1}}{\sqrt{n+9}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x+4)^n}{3^n(4n-1)\ln^2(4n-1)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\sin^n\frac{\pi n}{6n-1}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\ln 4n}$.

Відповідь: а) $I=\{2\}$; $R=0$; $D=\{2\}$; б) $I=(-\infty;+\infty)$; $R=+\infty$; $D=(-\infty;+\infty)$; в) $I=(1/2;\,3/2)$; $R=1/2$; $D=(1/2;\,3/2]$; г) $I=(-7;\,-1)$; $R=3$; $D=[-7;\,-1]$; д) $I=(-4;\,4)$; $R=4$; $D=(-4;\,4)$; е) $I=(2;\,4)$; $R=1$; $D=[2;\,4)$.

Приклад 2. Двічі застосовуючи почленне диференціювання та формулу суми ряду збіжної геометричної прогресії, а потім двічі інтегруючи отриманий результат, знайти при $x\in(-1;1)$ суму ряду

$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$, область збіжності якого $[-1;1]$.

Відповідь: $S(x)=x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)$.

Лекція 2.4 Розвинення функцій у степеневі ряди

План

2.4.1 Ряди Тейлора і Маклорена
2.4.2 Розвинення функцій у степеневі ряди
Запитання для самоконтролю
Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *ряди Тейлора і Маклорена, розкладання функцій у степеневі ряди, спосіб безпосередньої побудови, спосіб формальних перетворень.*

2.4.1 Ряди Тейлора і Маклорена

В області збіжності сумою степеневого ряду є деяка функція, що неперервна в інтервалі збіжності ряду та яку можна нескінченне число разів диференціювати в інтервалі збіжності.

Вважатимемо тепер, що функція задана, і з’ясуємо, за яких умов цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти його коефіцієнти.

Подання функції $f(x)$ рядом необхідне для її наближеного задання сумою відомих елементарних функцій як базових

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + ... + a_n\varphi_n(x) + ...$$

при застосуванні комп’ютерів: щоб запам’ятати функцію $f(x)$, потрібно занести в пам’ять лише вектор коефіцієнтів (a_1, a_2, …, a_n), якщо функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x),...$ вже є у відповідних програмах.

Степеневі функції дуже зручні в аналізі, оскільки з їх диференціюванням та інтегруванням не виникає проблем. Заміна складних функцій степеневими рядами дозволяє проводити наближені обчислення, розв’язувати диференціальні рівняння, інтегрувати функції, первісні яких знайти аналітично не можливо, тощо.

Покажемо, що *у вигляді степеневого ряду можна подати функції, що неперервні та безліч разів диференційовані*.

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі деякої точки x_0 і в цій точці нескінченне число разів диференційована. Припустимо, що в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ функцію $f(x)$ можна подати у вигляді степеневого ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ...,$$

У цьому разі кажуть, що ***функція*** $f(x)$ ***розвинена*** (***розкладена***) ***в степеневий ряд*** в околі точки x_0 (за степенями двочлена $x - x_0$).

Знайдемо коефіцієнти цього ряду через значення самої функції $f(x)$ та її похідних у центрі розвинення x_0. Для цього послідовно диференціюватимемо ряд і підставлятимемо в ліву та праву частини одержаних розкладів значення $x = x_0$, а потім розв'язуватимемо знайдені вирази відносно шуканих коефіцієнтів:

$$f(x_0) = a_0 = 1 \cdot a_0 = 0! a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0)/0!;$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + ... + n a_n (x - x_0)^{n-1} + ...;$$

$$f'(x_0) = a_1 = 1 \cdot a_1 = 1!\, a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(x_0)/1!;$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + ... + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + ...;$$

$$f''(x_0) = 2a_2 = 1 \cdot 2a_2 = 2! a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = f''(x_0)/2!;$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + ... + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + ...;$$

$$f'''(x_0) = 3 \cdot 2a_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 = 3!\, a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = f'''(x_0)/3!;$$

… … … … … … ... … … … … … … … … … …

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)...2a_n + (n+1)n...2a_{n+1}(x - x_0) + ...;$$

$$f^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2)...2a_n = n! a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = f^{(n)}(x_0)/n!;$$

… … … … … … ... … … … … … … … … … …

Підставляючи одержані значення коефіцієнтів, дістанемо ***ряд Тейлора*** для даної функції $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0 = 0$, то отримаємо ***ряд Маклорена*** для даної функції $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots .$$

Зауваження. Після побудови для даної функції $f(x)$ її ряду Тейлора треба знайти його область збіжності та встановити, чи збігається він саме до цієї функції $f(x)$.

Наведемо без доведення декілька важливих теорем про єдиність, збіжність і умови існування ряду Тейлора.

Теорема 1. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ можна подати у вигляді ряду $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ за степенями двочлена $x - x_0$, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції, тобто $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 2. Ряд Тейлора $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(n)}(x_0)/n! \right) (x - x_0)^n$ збігається до самої функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ тоді та тільки тоді, коли функція $f(x)$ має похідні всіх порядків на цьому інтервалі та залишок ряду $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, що дорівнює залишковому члену її формули Тейлора $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$, прямув до нуля при $n \to \infty$ для всіх x з цього інтервалу, тобто $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ має похідні всіх порядків та існує число $M > 0$ таке, що $| f^{(n)}(x) | \le M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ для всіх $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$, то цю функцію можна розкласти в ряд Тейлора $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(n)}(x_0)/n! \right) (x - x_0)^n$.

2.4.2 Розвинення функцій у степеневі ряди

Розвинення функцій в степеневі ряди в загальному випадку ґрунтується на використанні рядів Тейлора чи Маклорена.

За ***способом безпосередньої побудови*** для даної функції $f(x)$ здійснюють наступне:

а) знаходять похідні $f'(x)$, $f''(x)$ ..., $f^{(n)}(x)$, ...;

б) обчислюють значення похідних у заданій точці $x = x_0$;

в) записують шуканий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(n)}(x_0)/n! \right)(x - x_0)^n$;

г) знаходять інтервал і область його збіжності;

д) визначають проміжок, в якому виконуються умови теореми 2 чи теореми 3. Якщо такий проміжок існує, то в ньому дана функція $f(x)$ і сума її ряду Тейлора співпадають:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(n)}(x_0)/n! \right)(x - x_0)^n .$$

За цим способом одержують ***стандартні розвинення*** основних елементарних функцій (табл. 2.1).

Таблиця 2.1 – Стандартні розвинення в ряд Маклорена

№ з/п	Функція та її розвинення в ряд Маклорена
1	2
1	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R$
2	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in R$
3	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in R$
4	$\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in [-1;1]$
5	$\arcsin x = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}, \ x \in [-1;1]$, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1), \ (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)$

Продовження таблиці 2.1

1	2
6	$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, $x\in(-1;1]$
7	$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in(-1;1)$
8	$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$ $=1+\alpha x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$, $x\in(-1;1)$

Оскільки ряд Тейлора чи ряд Маклорена для даної функції $f(x)$ не залежить від способу його побудови, то на практиці частіше застосовують ***спосіб формальних перетворень*** – без знаходження виразів для похідних довільного n-го порядку, а за допомогою формальних перетворень уже відомих (стандартних) розвинень. Тоді залишається обґрунтувати збіжність і саме до даної функції отриманого розкладу на певному проміжку.

Зокрема, корисно використовувати почленне диференціювання чи інтегрування відомих рядів, оскільки в інтервалах збіжності одержані ряди збігаються до відповідних функцій.

Приклад 1. Розвинути в ряд Маклорена задані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

$$\text{а) } f(x)=\cos^2 x; \quad \text{б) } f(x)=12\big/(x^2-2x-3)..$$

□ а) *Спосіб I* – безпосередня побудова. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(0)$, $n=0,1,2,...$, що входять у ряд Маклорена $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x)=\cos^2 x; \qquad f(0)=1;$$

$$f'(x) = -2\sin x\cos x = -\sin 2x = \sin(2x + (\pi/2)\cdot 2);\ \ f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = -2\cos 2x = 2\sin(2x + (\pi/2)\cdot 3);\qquad f''(0) = -2;$$

$$f'''(x) = 2^2\sin 2x = 2^2\sin(2x + (\pi/2)\cdot 4);\qquad f'''(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(x) = 2^3\cos 2x = 2^3\sin(2x + (\pi/2)\cdot 5);\qquad f^{(4)}(0) = 2^3;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}(n+1)\right);\ \ f^{(n)}(0) = 2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Підставимо отримані значення похідних у формулу ряду Маклорена і дістанемо:

$$\cos^2 x = \underbrace{1}_{u_0} + \underbrace{0}_{u_1} - \underbrace{(2/2!)x^2}_{u_2} + \underbrace{0}_{u_3} + \underbrace{(2^3/4!)x^4}_{u_4} + \ldots +$$

$$+\underbrace{\frac{2^{n-1}\sin((\pi/2)\cdot(n+1))}{n!}x^n}_{u_n} + \ldots = \left| \begin{array}{l} u_n = \dfrac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!}x^{2m},\ n = 2m; \\ u_n = 0,\ n = 2m+1,\ \ m = 0,1,2,\ldots \end{array} \right| =$$

$$= 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!}x^{2m} + \ldots =$$

$$= |n = m| = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 2^{2n-1}/(2n)!\right)x^{2n}.$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{(-1)^n 2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}\right| = 4x^2 \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\left(1/((2n+1)(2n+2))\right) = 0 < 1,\ \ x \in R.$$

Отже, інтервал і область збіжності ряду $(-\infty; +\infty)$.

Спосіб 2 – формальні перетворення. Скористаємося відомими тотожностями для перетворення даної функції, основними властивостями збіжних степеневих рядів і стандартними розвиненнями.

Подамо функцію $f(x)=\cos^2 x$ у вигляді:

$$f(x)=\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2=1/2+(1/2)\cos 2x .$$

Використаємо відоме розвинення

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+..., \quad x\in(-\infty;+\infty),$$

замінюючи x на $2x$. Дістанемо:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-...+\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}+...\right)=1-$$

$$-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+...+\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} .$$

Як бачимо, обидва способи дають однакове розвинення. Його область збіжності $(-\infty;+\infty)$ знайдена вище.

б) *Спосіб I* – безпосередня побудова. (Розв’яжіть самостійно).

Спосіб 2 – формальні перетворення. Подамо дану раціональну функцію $f(x)=\dfrac{12}{x^2-2x-3}$ у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{12}{x^2-2x-3}=\frac{12}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=$$

$$=\left| A(x-3)+B(x+1)=12; \quad \begin{aligned} x=-1: \\ x=3: \end{aligned}\begin{cases} -4A=12, & A=-3 \\ 4B=12; & B=3 \end{cases}\right|=$$

$$=\frac{-3}{x+1}+\frac{3}{x-3}=-3\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+(-x/3)} .$$

Застосуємо відоме розвинення (біноміальний ряд):

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n , \quad x\in(-1;1),$$

де для другого дробу замінимо x на $-x/3$ і отримаємо:

$$\frac{1}{1+(-x/3)}=1-(-x/3)+(-x/3)^2-(-x/3)^3+\ldots+(-1)^n(-x/3)^n+\ldots=$$

$$=1+(1/3)x+(1/3^2)x^2+(1/3^3)x^3+\ldots+(1/3^n)x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(1/3^n)\,x^n\ ;$$

$$(-x/3)\in(-1;1)\,;\qquad x\in(-3;3)\,.$$

Враховуючи, що ряд для першого дробу збігається при $x\in(-1;1)$, а ряд для другого дробу – при $x\in(-3;3)$, маємо, що обидва ряди одночасно збігаються при $x\in(-1;1)$. Тоді в інтервалі $(-1;1)$ їх можна почленно додавати зі сталими множниками:

$$\frac{12}{x^2-2x-3}=-3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n}x^n\ .$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{((-1)^{n+2}3^{n+2}-1)\,x^{n+1}}{3^{n+1}}:\frac{((-1)^{n+1}3^{n+1}-1)\,x^n}{3^n}\right|=$$

$$=\frac{|x|}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}3^{n+2}-1}{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}\right|=\frac{|x|}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}-1/3^{n+2}}{(-1)^{n+1}/3-1/3^{n+2}}\right|=$$

$$=\big(|x|/3\big)\cdot 3=|x|;\ \ |x|<1;\ \ x\in(-1;1)\,.$$

Дослідимо кінці інтервалу збіжності. При $x=-1$ маємо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n}(-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-3^{n+1}}{3^n}\,,$$

що розбігається, бо для нього не виконується необхідна ознака збіжності:

$$\lim_{n\to\infty}u_n(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}-3^{n+1}}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\Big((-1)^{n+1}/3^n-3\Big)=-3\neq 0\,.$$

При $x=1$ маємо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n}1^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n}\,,$$

що також розбігається, оскільки:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(3(-1)^{n+1} - 1/3^n\right) \text{ не існує.}$$

Отже, $(-1;1)$ – область збіжності одержаного ряду. ■

Приклад 2. Розвинути в ряд Тейлора задані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

а) $f(x) = 1/(4x-5)$ за степенями двочлена $x-3$;

б) $f(x) = \cos(\pi x/4)$ за степенями двочлена $x+2$.

□ а) *Спосіб I* – безпосередня побудова. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n = 0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(3)$, $n = 0,1,2,...$, що входять у ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n = f(3) + \frac{f'(3)}{1!}(x-3) +$$

$$+ \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n + ...,$$

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x) = 1/(4x-5); \qquad f(3) = 1/7;$$

$$f'(x) = -1\cdot 4/(4x-5)^2; \qquad f'(3) = -1\cdot 4/7^2;$$

$$f''(x) = 1\cdot 2\cdot 4^2/(4x-5)^3; \qquad f''(3) = 1\cdot 2\cdot 4^2/7^3;$$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … … …

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, 4^n/(4x-5)^{n+1}; \quad f^{(n)}(3) = (-1)^n n!\, 4^n/7^{n+1};$$

… …

Підставимо знайдені значення похідних в ряд Тейлора і дістанемо:

$$\frac{1}{x-5} = \frac{1}{7} - \frac{1\cdot 4/7^2}{1!}(x-3) + \frac{1\cdot 2\cdot 4^2/7^3}{2!}(x-3)^2 + ... +$$

$$+ \frac{(-1)^n n!\cdot 4^n/7^{n+1}}{n!}(x-3)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}.$$

Звернемося до ознаки Даламбера для дослідження отриманого ряду на збіжність:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}(x-3)^{n+1}}{7^{n+2}} : \frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}\right| =$$

$$= (4/7)\,|\,x-3\,|<1;\;\; -7/4 < x-3 < 7/4;\;\; 5/4 < x < 19/4.$$

На кінцях інтервалу збіжності $(5/4;19/4)$ маємо ряди $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(5/4) = (1/7)\sum_{n=0}^{\infty} 1$ і $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(19/4) = (1/7)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, що розбігаються, оскільки для них не виконується необхідна ознака збіжності. Отже, $(5/4;19/4)$ – область збіжності одержаного ряду.

Спосіб 2 – формальні перетворення. Спочатку подамо функцію $f(x) = 1/(4x-5)$ через нову змінну $z = x-3$ – відхилення від центру розвинення $x = x_0 = 3$:

$$x = z+3; \quad f(x) = \frac{1}{4(z+3)-5} = \frac{1}{4z+7} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1+4z/7}.$$

Скористаємося біноміальним рядом

$$1/(1+x) = 1 - x + ... + (-1)^n x^n + ... = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1;1),$$

в який замість x підставимо $4z/7$. Отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1+4z/7} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (4z/7)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n z^n}{7^{n+1}}.$$

Поклавши $z = x-3$, повернемося до початкової змінної x і дістанемо шукане розвинення $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}$.

Його область збіжності $(5/4;19/4)$ знайдена вище.

б) *Спосіб I* – безпосередня побудова. (Розв’яжіть самостійно).

Спосіб 2 – формальні перетворення. Введемо нову змінну $z = x+2$ – відхилення від центру розвинення $x = x_0 = -2$. Дістанемо:

$$x = z - 2; \;\; f(x) = \cos\frac{\pi x}{4} = \cos\frac{\pi(z-2)}{4} = \cos\left(\frac{\pi z}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi z}{4}.$$

Потім скористаємося відомим розвиненням

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \;\; x \in R,$$

в яке замість x підставимо $\pi z/4$. Отримаємо:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi z/4)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!\, 4^{2n+1}}.$$

Далі повернемося до початкової змінної x і дістанемо шукане розвинення: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} (x+2)^{2n+1}}{(2n+1)!\, 4^{2n+1}}$.

Область збіжності ряду $(-\infty; +\infty)$. (Переконайтеся в цьому самостійно, застосовуючи ознаку Даламбера). ■

Запитання для самоконтролю

1. За якої загальної умови функцію можна розкласти в степеневий ряд?
2. Який вигляд мають ряди Тейлора і Маклорена? За якими формулами обчислюються коефіцієнти цих степеневих рядів?
3. Запишіть розвинення основних елементарних функцій у ряд Маклорена.
4. У чому полягає теорема про єдиність розвинення функції в ряд Тейлора?
5. Сформулюйте теореми про умови існування й збіжності ряду Тейлора. За якої умови степеневий ряд збігається до заданої функції?
6. Які основні способи побудови розкладу функцій у ряди Тейлора і Маклорена?
7. Опишіть алгоритм розвинення функції в ряд Тейлора за способом безпосередньої побудови.
8. Опишіть алгоритм розвинення функції в ряд Тейлора за способом формальних перетворень.

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Розвинути в ряд Маклорена задані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

а) $f(x)=x^3\Big/\sqrt{9-x^2}$; б) $f(x)=3\big/(2x^2+7x+5)$; в) $f(x)=\sin^3 x$.

Вказівка. Рекомендовано використати спосіб формальних перетворень. Функцію відповідно подати у вигляді:

а) $f(x)=(x^3/3)\cdot\left(1-x^2/9\right)^{-1/2}$; б) $f(x)=-\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{1+2x/5}+\dfrac{1}{1+x}$;

в) $f(x)=(3/4)\sin x-(1/4)\sin 3x$.

Відповідь:

а) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!\cdot 2^n\cdot 3^{2n+1}}x^{2n+3}$, $x\in(-3;\,3)$;

б) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-(2/5)^{n+1}\right)x^n$, $x\in(-1;\,1)$;

в) $f(x)=\dfrac{3}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(3^{2n}-3)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $x\in(-\infty;+\infty)$.

Приклад 2. Розвинути в ряд Тейлора задані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

а) $f(x)=1/(x-3)$ за степенями двочлена $x-5$;

б) $f(x)=\sin(\pi x/4)$ за степенями двочлена $x-2$.

Вказівка. Рекомендовано використати спосіб формальних перетворень. Кожну функцію попередньо подати через новий аргумент – відхилення від центру розвинення.

Відповідь: а) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-5)^n}{2^{n+1}}$, $x\in(3;7)$;

б) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\pi^{2n}(x-2)^{2n}}{2^{4n}(2n)!}$, $x\in(-\infty;+\infty)$.

Лекція 2.5 Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

План

2.5.1 Наближене обчислення значень функцій
2.5.2 Наближене обчислення визначених інтегралів
2.5.3 Наближене розв’язування диференціальних рівнянь
Запитання для самоконтролю
Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *застосування степеневих рядів до наближених обчислень функцій та інтегралів, застосування степеневих рядів для наближеного розв’язування диференціальних рівнянь.*

2.5.1 Наближене обчислення значень функцій

У часи тотального застосування калькуляторів, які є обов’язковими в будь-якому сучасному електронному пристрої, корисно з’ясувати, як саме здійснюються наближені обчислення.

У наближених обчисленнях степеневі ряди широко застосовують, зокрема, для: обчислення значень функцій; обчислення границь; обчислення інтегралів; розв’язування диференціальних рівнянь.

Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути в степеневий ряд в деякому інтервалі $(a; b)$, що містить точку x_0, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене – частковій сумі $S_n(x_0)$: $f(x_0) \approx S_n(x_0)$. Абсолютна похибка $\Delta = \left| f(x_0) - S_n(x_0) \right|$ характеризує точність наближення. Вона дорівнює модулю залишку ряду $\Delta = \left| R_n(x_0) \right|$.

Питання про кількість членів, які необхідно взяти для обчислення із заданою точністю, можна розв’язати, спираючись на оцінку залишку ряду. У випадку знакопочергового ряду це можна зробити за допомогою наслідку з ознаки Лейбниця, у випадку довільного знакододатного чи знакозмінного ряду – підбором іншого збіжного знакододатного ряду, члени якого більші за модулем відповідних членів залишку ряду, що досліджується, а його сума легко обчислюється.

Потрібно також враховувати похибки округлення при обчисленні самих залишених у частковій сумі $S_n(x_0)$ членів ряду.

Приклад 1. Обчислити наближено значення $\sin 12^\circ$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}0001$.

□ Скористаємося розвиненням функції $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; x \in R,$$

де покладемо $x = 12^\circ = /15 = 0{,}209\ 439\ 3$ і дістанемо знакопочерговий ряд:

$$\sin 12^\circ = \sin\frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{15} - \frac{\pi^3}{15^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{15^5 \cdot 5!} + \ldots + \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{15^{2n+1} \cdot (2n+1)!} + \ldots .$$

Точність обчислення ε задає граничну загальну абсолютну похибку $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, яка складається з абсолютної похибки округлення ε_2 при обчисленні залишених у частковій сумі членів ряду та величини модуля залишку ряду $|R_n| \le \varepsilon_1$. Звичайно беруть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$.

Для заданої точності $\varepsilon = 0{,}0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2 = 0{,}000\ 1/2 = 0{,}000\ 05.$$

Знайдемо спочатку, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми $f(x_0)$ ряду частковою сумою $S_n(x_0)$ отримати граничну абсолютну похибку $\varepsilon_1 = 0{,}00005$ залишку.

За наслідком з ознаки Лейбниця $|R_n| \le |u_{n+1}|$. Тоді:

$$|R_n| \le |u_{n+1}| = \frac{(\pi/15)^{2n+3}}{(2n+3)!} \le \varepsilon_1 = 0{,}000\,05; \quad \frac{(\pi/15)^{2n+3}}{(2n+3)!} \le 0{,}000\,05.$$

Розв’яжемо цю нерівність методом підбору:

$$n = 0: \quad |u_1| = (\pi/15)^3/3! = 0{,}001\ 531\ 2 > \varepsilon_1 = 0{,}000\ 05;$$

$$n=1:\quad |u_2|=(\pi/15)^5/5!=0{,}000\ 003\le\varepsilon_1=0{,}000\ 05.$$

Отже, досить взяти два перших члени ряду u_0 і u_1 ($n=2$).

Тепер визначимо кількість k десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5\cdot 10^{-k}\cdot n\le\varepsilon_2;\quad 0{,}5\cdot 10^{-k}\cdot 2\le 0{,}000\ 05;$$

$$10^{-k}\le 0{,}000\ 05;\quad k\ge \lg 20\,000;\quad k=5.$$

Отже, члени ряду округляємо до п’яти десяткових знаків.

Тоді маємо:

$$\sin 12^\circ\approx S_1=\pi/15-(\pi/15)^3/3!=0{,}209\ 44-0{,}001\ 53=0{,}207\ 91.$$

Остаточно $\sin 12^\circ\approx 0{,}207\ 9$. ■

Приклад 2. Обчислити наближено значення $\sqrt{e}$ з точністю до $\varepsilon=0{,}000\,01$.

□ Скористаємося розвиненням експоненти e^x у ряд Маклорена, враховуючи, що $\sqrt{e}=e^{1/2}$:

$$\sqrt{e}=e^{1/2}=1+\frac{1/2}{1!}+\frac{(1/2)^2}{2!}+\ldots+\frac{(1/2)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\ldots+\frac{1}{2^n n!}+\ldots.$$

Оцінимо n-й залишок цього знакододатного ряду:

$$R_n(1/2)=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}+\frac{1}{2^{n+2}(n+2)!}+\ldots=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2^2(n+2)(n+3)}+\frac{1}{2^3(n+2)(n+3)(n+4)}+\ldots\right).$$

Замінимо у знаменниках множник $(n+3)$ на менший множник $(n+2)$, множник $(n+4)$ на менший $(n+2)$ і т. д., від чого кожний дріб тільки збільшиться, тому маємо:

$$R_n(1/2) < \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2^2(n+2)^2} + \frac{1}{2^3(n+2)^3} + \ldots\right).$$

У дужках стоїть збіжна геометрична прогресія, сума якої $S = a_1/(1-q)$, де $a_1 = 1$, $q = 1/(2(n+2))$. Тоді

$$R_n(1/2) < \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - 1/(2(n+2))} = \frac{n+2}{2^n(2n+3)(n+1)!}.$$

Тепер треба підібрати n і число вірних десяткових цифр k при обчисленні кожного доданка так, щоб загальна похибка була б менша ніж $\varepsilon = 0{,}000\,01$. Пригадаємо, що $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ і $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2.$. Тоді $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}000\ 01/2 = 0{,}000\ 005.$

Спочатку підбором знайдемо n. Візьмемо, наприклад, $n = 5,$ тоді:

$$R_5(1/2) < \frac{5+2}{2^5(2\cdot 5+3)(5+1)!} \approx 0{,}000\ 023\ 4 > \varepsilon_1 = 0{,}000\ 005.$$

Беремо $n = 6,$ тоді:

$$R_6(1/2) < \frac{6+2}{2^6(2\cdot 6+3)(6+1)!} \approx 0{,}000\ 001\ 65 < \varepsilon_1 = 0{,}000\ 005.$$

Отже, досить взяти $n = 6.$

Тепер визначимо кількість k десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot n \le \varepsilon_2; \quad 0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot 6 \le 0{,}000\ 005; \quad 10^k \ge 600\ 000;$$

$$k \ge \lg 600\,000; \quad k \ge 6.$$

Отже, члени ряду округляємо до шести десяткових знаків. Тоді маємо:

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2\cdot 1!} + \frac{1}{2^2\cdot 2!} + \frac{1}{2^3\cdot 3!} + \frac{1}{2^4\cdot 4!} + \frac{1}{2^5\cdot 5!} + \frac{1}{2^6\cdot 6!} \approx 1 + 0{,}5 +$$

$$+ 0{,}125 + 0{,}020\,333 + 0{,}002\,604 +$$

$$+ 0{,}000\,260 + 0{,}000\,022 \approx 1{,}648\,219.$$

Остаточно $\sqrt{e} \approx 1{,}648\ 22.$ ■

2.5.2 Наближене обчислення визначених інтегралів

Нехай потрібно знайти інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, який не береться в елементарних функціях або складний і незручний для безпосередніх обчислень. Розглянемо випадок, коли підінтегральну функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд, інтервал збіжності якого охоплює відрізок інтегрування $[a;b]$. Тоді на цьому відрізку ряд можна почленно проінтегрувати, використовуючи відповідну властивість степеневих рядів. Одержаний ряд дає точне значення інтеграла. Наближене значення дорівнює частковій сумі. Похибка обчислень визначається так само, як і при знаходженні значень функцій.

Приклад 1. Обчислити наближено визначений інтеграл $I=\int_0^{1/2} x^4(e^{x^2}-1)\,dx$ з точністю до $\varepsilon=0{,}0001$.

□ Формула Ньютона – Лейбниця тут не застосовна, тому що первісна від $f(x)=x^4(e^{x^2}-1)$ не виражається в елементарних функціях. Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використовуючи стандартний розклад для експоненти e^x, де замість x підставимо x^2, потім віднімемо 1 і почленно помножимо на x^4:

$$x^4(e^{x^2}-1)=x^4\Big((1+x^2/1!+x^4/2!+\ldots+x^{2n}/n!+\ldots)-1\Big)=$$
$$=x^6/1!+x^8/2!+\ldots+x^{2n+4}/n!+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

Оскільки $[0;1/2]\subseteq(-\infty;+\infty)$, то цей степеневий ряд можна проінтегрувати почленно на $[0;1/2]$. Дістанемо:

$$I=\int_0^{1/2}\Big(x^6/1!+x^8/2!+x^{10}/3!+\ldots+x^{2n+4}/n!+\ldots\Big)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^7}{1!\cdot 7}+\frac{x^9}{2!\cdot 9}+\frac{x^{11}}{3!\cdot 11}+\ldots+\frac{x^{2n+5}}{n!\cdot(2n+5)}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{1!\cdot 7\cdot 2^7}+$$

$$+1\big/(2!\cdot 9\cdot 2^9)+1\big/(3!\cdot 11\cdot 2^{11})+\ldots+1\big/\Big(n!\cdot(2n+5)\cdot 2^{2n+5}\Big)+\ldots.$$

Шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакододатного ряду. З’ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon = 0{,}0001$.

Для заданої точності $\varepsilon = 0{,}0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon / 2 = 0{,}000\,1/2 = 0{,}0000\,5.$$

Спочатку оцінимо n-й залишок:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!\cdot 2^{2n+7}}\left(\frac{1}{2n+7} + \frac{1}{2(n+2)(2n+9)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^2(n+2)(n+3)(2n+11)} + \ldots\right) < \frac{1}{2^{2n+7}(n+1)!\cdot(2n+7)} \times$$

$$\times(1 + 1/2 + 1/2^2 + \ldots).$$

Тут добутки $(n+2)(2n+9)$, $(n+2)(n+3)(2n+11)$, …, що стоять у знаменниках другого, третього, … дробів, замінено на менший вираз $2n+7$, від чого кожний дріб збільшився. У дужках записана нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $q = 1/2$. Її сума $S = 1/(1-1/2) = 2$. Тоді

$$R_n < 1\Big/\left(2^{2n+7}(n+1)!\cdot(2n+7)\right)\cdot 2 < 1\Big/\left(2^{2n+6}(n+1)!\cdot(2n+7)\right).$$

Підберемо n так, щоб виконувалася умова

$$R_n < 1\Big/\left(2^{2n+6}(n+1)!\cdot(2n+7)\right) \le \varepsilon_1 = 0{,}000\,05:$$

$$n = 1: \quad R_1 < 1\Big/\left(2^8\, 2!\cdot 9\right) = 0{,}000\,217 > \varepsilon_1 = 0{,}000\,05;$$

$$n = 2: \quad R_2 < 1\Big/\left(2^{10}\, 3!\cdot 11\right) = 0{,}000\,015 < \varepsilon_1 = 0{,}000\,05.$$

Отже, досить взяти $n = 2$ – два перших члени ряду.

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5\cdot 10^{-k}\cdot n \le \varepsilon_2 = 0{,}000\,05; \quad k \ge \lg 20\,000; \quad k = 5.$$

Отже:

$$I \approx S_2 = \frac{1}{1!\cdot 7\cdot 2^7} + \frac{1}{2!\cdot 9\cdot 2^9} = 0{,}001\,12 + 0{,}000\,11 = 0{,}001\,23.$$

Остаточно $I \approx 0{,}0012$. ■

Приклад 2. Обчислити інтеграл Лапласа

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx.$$

□ При вивченні теорії ймовірностей дуже важливим є інтеграл ймовірностей (функція Лапласа), який знайти аналітично в скінченному вигляді неможливо. Тому для його обчислення застосовують розвинення експоненти e^x в ряд Маклорена, виконуючи заміну $x\to -x^2/2$:

$$e^{-x^2/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2/2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}.$$

Далі, інтегруючи почленно, знаходимо:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_0^x x^{2n}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}\cdot\left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n(2n+1)n!}.$$

Отриманий ряд збігається на всій числовій прямій. Обчислювати значення функції Лапласа дуже зручно, тому що цей ряд швидко збігається. На основі отриманої формули складені таблиці, якими користуються при вивченні теорії ймовірностей. ■

2.5.3 Наближене розв’язування диференціальних рівнянь

Коли точно проінтегрувати диференціальне рівняння за допомогою елементарних функцій не вдається або досить складно, його розв’язок $y=y(x)$ можна шукати у вигляді ряду Тейлора або Маклорена.

Зокрема, при розв’язуванні задачі Коші:

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

використовується ряд Тейлора з центром розвинення у початковій точці x_0:

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

де $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$, а решта похідних $y^{(n)}(x_0)$, $n=2,3,\ldots$ знаходиться ***методом послідовного диференціювання*** чи ***методом невизначених коефіцієнтів***. Суть цих методів далі розглянемо на прикладах.

Зауваження. Питання про те, за яких умов розв'язок диференціального рівняння можна шукати у вигляді степеневого ряду, а також яка похибка цього розв'язку, тут не розглядаються.

Приклад 1. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших чотирьох членів включно частинний розв'язок диференціального рівняння $y'=y^2-x^3$, що задовольняє початковій умові $y(1)=2$.

□ Застосовуємо метод послідовного диференціювання. Шукаємо розв'язок $y=y(x)$ у вигляді ряду Тейлора з центром розвинення в початковій точці $x=1$:

$$y(x)=y(1)+\frac{y'(1)}{1!}(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3+\ldots,$$

де згідно умови задачі явно виписані перші чотири члени.

За умовою $y(1)=2$. Підставляючи $x=1$ і $y=y(1)=2$ у диференціальне рівняння $y'=y^2-x^3$, знаходимо

$$y'(1)=2^2-1^3=3.$$

Далі диференціюємо послідовно диференціальне рівняння по x і в отримані вирази підставляємо відомі на даному кроці величини. Одержуємо похідні $y''(1)$ і $y'''(1)$:

$$y''=2y\,y'-3x^2;\quad y''(1)=2\cdot y(1)\cdot y'(1)-3\cdot 1^2=2\cdot 2\cdot 3-3=9;$$

$$y'''=2(y'y'+y\,y'')-6x=2(y')^2+2y\,y''-6x;$$

$$y'''(1)=2(y'(1))^2+2y(1)\cdot y''(1)-6\cdot 1=2\cdot 3^2+2\cdot 2\cdot 9-6=42.$$

Отже, $y(x)=2+(3/1!)(x-1)+(9/2!)(x-1)^2+(42/3!)\times$

$$\times(x-1)^3+\ldots=2+3(x-1)+(9/2)(x-1)^2+7(x-1)^3+\ldots.\ \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших трьох членів включно частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = y^2 - 64\ln(1 + x/2)$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 4$.

□ Застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів. Шукаємо розв'язок $y = y(x)$ у вигляді степеневого ряду

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

з центром розвинення у початковій точці $x = 0$. Тут згідно умови задачі явно виписані перші три члени з невідомими коефіцієнтами a_n, $n = 0,1,2$.

З початкової умови $y(0) = 4$ дістаємо $a_0 = y(0) = 4$. Тоді розв'язок $y = y(x)$ набуває вигляду: $y(x) = 4 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$.

Далі диференціюємо цей розв'язок: $y'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots$.

Використовуючи стандартне розвинення для $\ln(1 + x)$, в якому замінюємо x на $x/2$, дістаємо степеневий ряд з центром в тій же початковій точці $x = 0$ для функції $\ln(1 + x/2)$ в правій частині:

$$\ln(1 + x/2) = x/2 - x^2/(2^2 \cdot 2) + \ldots = x/2 - x^2/8 + \ldots,$$

де відповідно до умови задачі явно виписані тільки перші члени до степеню x^2 включно.

Отримані вирази підставляємо в диференціальне рівняння:

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots = \left(4 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\right)^2 - 64 \cdot \left((1/2)x - (1/8)x^2 + \ldots\right);$$

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots = 16 + a_1^2 x^2 + a_2^2 x^4 + 8a_1 x + 8a_2 x^2 +$$

$$+ 2a_1 a_2 x^3 + \ldots - 32x + 8x^2 - \ldots.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва та справа у цій тотожності:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & a_1 = 16; \\ x & 2a_2 = 8a_1 - 32; \\ \ldots & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \end{array}$$

Звідси знаходимо: $a_1 = 16$; $a_2 = 4a_1 - 16 = 4 \cdot 16 - 16 = 48$.

Підставляємо отримані значення коефіцієнтів у степеневий ряд і дістаємо: $y(x) = 4 + 16x + 48x^2 + \ldots$ ■

Запитання для самоконтролю

1. Які основні способи побудови розвинення функцій у ряди Тейлора і Маклорена?
2. Наведіть приклади застосування степеневих рядів до наближених обчислень значень функцій, визначених інтегралів і розв'язування диференціальних рівнянь.
3. Як знаходяться коефіцієнти розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння методом послідовного диференціювання?
4. Як знаходяться коефіцієнти розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів?
5. Які недоліки розвинення функцій у степеневі ряди?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Використовуючи розвинення в степеневі ряди, обчислити наближено з точністю до $\varepsilon = 0{,}000\,1$ задане значення функції:

$$\text{а) } \cos 10^\circ; \qquad \text{б) } \sqrt[4]{17}.$$

Вказівка. Рекомендовано проміжні обчислення проводити з точністю до шести десяткових знаків після коми (з двома запасними десятковими знаками).

Відповідь: а) $\cos 10^\circ \approx 0{,}984\,8$; б) $\sqrt[4]{17} \cong 2{,}030\,5$.

Приклад 2. Наближено обчислити заданий визначений інтеграл з граничною абсолютною похибкою $\varepsilon = 0{,}001$, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд і потім інтегруючи його почленно:

$$\text{а) } I = \int_0^{0{,}6} \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,dx; \quad \text{б) } I = \int_0^{0{,}8} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx;$$

$$\text{в)}\ I = \int_0^{0,5} \frac{e^x - 1}{x} dx; \quad \text{г)}\ I = \int_0^{1} \frac{1 - \cos x^2}{x^3} dx.$$

Вказівка. Рекомендовано проміжні обчислення проводити з точністю до п'яти десяткових знаків після коми (з двома запасними десятковими знаками).

Відповідь: а) $I \approx 0{,}166$; б) $I \approx 0{,}295$; в) $I \approx 0{,}569$; г) $I \approx 0{,}243$.

Приклад 3. Знайти k перших членів розвинення в ряд Тейлора

$$y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{y^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!} \cdot (x - x_0)^{k-1} + \ldots$$

в околі початкової точки x_0 частинного розв'язку $y = y(x)$ заданого диференціального рівняння, що задовольняє вказаним початковим умовам:

а) $y' = x^2 - y^3$, $y(2) = -1$, $k = 4$;

б) $y'' = x\,y^2 - 2\sqrt{y'}$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$, $k = 5$;

в) $y'' = \cos y' + xy$, $y(3) = -1$, $y'(3) = 0$, $k = 5$.

Вказівка. Рекомендовано використати метод послідовного диференціювання.

Відповідь:

а) $y = -1 + 5(x-2) - \dfrac{11}{2}(x-2)^2 + \dfrac{185}{6}(x-2)^3 + \ldots;$

б) $y = 2 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + \dfrac{1}{2}(x-1)^4 + \ldots.$

в) $y = -1 - (x-3)^2 - \dfrac{1}{6}(x-3)^3 - \dfrac{5}{12}(x-3)^4 + \ldots.$

Лекція 2.6 Тригонометричні ряди Фур'є

План

2.6.1 Ортогональність функцій. Приклади ортогональних систем функцій
2.6.2 Розвинення періодичних функцій у тригонометричний ряд Фур'є
2.6.3 Умови збіжності ряду Фур'є
Запитання для самоконтролю
Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *ортогональні системи функцій, ряди Фур'є, умови збіжності ряду Фур'є.*

2.6.1 Ортогональність функцій. Приклади ортогональних систем функцій

Функціональні ряди використовуються для подання довільної функції $f(x)$ у вигляді: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, де $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, … – система відомих (***базисних***) функцій; a_n $(n=0,1,\ldots)$ – сталі коефіцієнти.

Розглянуті вище степеневі ряди (ряди Тейлора чи Маклорена) дозволяють подавати функції, що безліч разів диференційовані, тобто дуже гладкі. Крім того, у загальному випадку:

а) швидкість збіжності (кількість членів, які треба залишити для досягнення заданої точності наближення) значно зростає при віддалені від центру розвинення;

б) n-а часткова сума S_n ряду Тейлора чи Маклорена не є найкращим середньо квадратичним наближенням функції $f(x)$ серед поліномів n-го степеня.

Для розвинення розривних функцій чи функцій з розривами похідних потрібні інші функціональні ряди. Необхідність усунення зазначених та інших недоліків обумовлює переважне використання рядів з ортогональними базисними функціями.

Як і при розгляді степеневих рядів, виникають питання:

а) за яких умов на задану функцію $f(x)$ можливе відповідне розвинення?

б) як обчислити його коефіцієнти?

в) який характер збіжності?

Далі дано відповіді для найбільш поширеної тригонометричної системи ортогональних базисних функцій.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені та неперервні на деякому відрізку $[a;b]$. Їх можна розглядати як нескінченновимірні вектори і ввести відповідні означення.

Скалярним добутком функцій $f(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$.

Функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються ***ортогональними*** на відрізку $[a;b]$, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx=0.$$

Скінченна або нескінченна система функцій $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, …, які неперервні на відрізку $[a;b]$ і не дорівнюють тотожно нулю, називається ***ортогональною*** на цьому відрізку, якщо всі ці функції попарно ортогональні, тобто

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ A_n\neq 0, & m=n\end{cases} \quad (m=0,1,\ldots;\ n=0,1,\ldots).$$

Зауваження. При доведенні наступної теореми і подальших розрахунках обчислення можна спростити, враховуючи парність чи непарність підінтегральної функції та використовуючи наступну властивість визначеного інтеграла по симетричному проміжку $[-l;l]$, $l>0$: *величина визначеного інтеграла по симетричному відрізку від парної функції дорівнює подвійному значенню відповідного інтеграла по правій половині проміжку інтегрування, а від непарної функції – дорівнює нулю.*

Теорема. Система тригонометричних функцій

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx, \ldots$$

ортогональна на відрізку $[-\pi;\pi]$, довжина якого дорівнює їх спільному періоду $T=2\pi$.

□ Враховуючи співвідношення $\sin n\pi = 0$ і $\cos n\pi = (-1)^n$ ($n \in Z$), безпосереднім обчисленням можна показати (зробіть це самостійно), що

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx = 2\pi\,;\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi\,;\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi\,;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = 0\,;\ \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = 0\,;\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cos nx\,dx = 0\,;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cos nx\,dx = 0\ (m \neq n);\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\,dx = 0\ (m \neq n). \blacksquare$$

Зауваження. Тригонометрична система має значне практичне застосування, оскільки описує поширені у різних сферах коливальні процеси. Однак існує багато інших ортогональних систем функцій. Зокрема, часто використовуються системи ортогональних многочленів Лежандра, Чебишова, Ерміта, Лагерра.

Система ортогональних на відрізку $[-1;1]$ многочленів Лежандра має вигляд:

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x,\ \varphi_2(x) = (3x^2 - 1)/2,\ \varphi_3(x) = (5x^3 - 3x)/2,\ \ldots.$$

Система ортогональних на відрізку $[-1;1]$ многочленів Чебишова першого роду має вигляд:

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x,\ \ldots.$$

2.6.2 Розвинення періодичних функцій у тригонометричний ряд Фур'є

За наведеною раніше ортогональною тригонометричною системою складемо відповідний ***тригонометричний ряд***:

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,,$$

де a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ – сталі коефіцієнти.

Нехай $f(x)$ – задана 2π-періодична функція. Знайдемо такі конкретні значення коефіцієнтів a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$, щоб справджувалося розвинення:

$$\boxed{f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}.$$

Будемо припускати, що цей розклад і одержані з нього далі ряди можна почленно інтегрувати на відрізку $[-\pi;\pi]$ довжиною в період.

Інтегруючи ряд для $f(x)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ дістанемо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = (a_0/2)\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\,.$$

Звідси $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = (a_0/2)\int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi$; $\boxed{a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$.

Домножуючи обидві частини розвинення для $f(x)$ на $\cos mx$ та інтегруючи почленно на відрізку $[-\pi;\pi]$, отримаємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = (a_0/2)\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\,dx\,.$$

Звідси при $m = n$: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = a_n\pi$;

$$\boxed{a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Аналогічно, домножуючи ряд для $f(x)$ на $\sin mx$ та інтегруючи в межах від $-\pi$ до π, знайдемо:

$$\boxed{b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Числа a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$, які обчислюються за отриманими формулами, називаються ***коефіцієнтами Фур'є*** функції $f(x)$. Тригонометричний ряд, коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають ***рядом Фур'є*** цієї функції.

Приклад 1. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x^2/\pi, & 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

□ Задана функція графічно подана на рисунку 2.4. Знайдемо її коефіцієнти Фур'є:

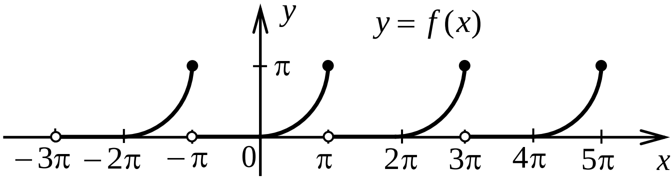

Рисунок 2.4

$$a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = (1/\pi)\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_0^{\pi} (x^2/\pi)\,dx\right) =$$

$$= (1/\pi^2)(x^3/3)\Big|_0^{\pi} = \pi/3\,; \quad a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= (1/\pi)\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nx\,dx + \int_0^{\pi} (x^2/\pi)\cos nx\,dx\right) = (1/\pi^2)\times$$

$$\times\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x^2; \quad du = 2x\,dx; \\ dv = \cos nx\,dx;\ v = (1/n)\sin nx \end{array}\right| = \frac{1}{\pi^2}\times$$

$$\times\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right) = -\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \left| u = x; \quad du = dx\,;\ dv = \sin nx\,dx;\ v = -(1/n)\cos nx \right| =$$

$$= -\frac{2}{\pi^2 n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) = -\frac{2}{\pi^2 n}\Big(-\pi(-1)^n/n +$$

$$+ (1/n^2)\sin nx\Big|_0^{\pi}\Big) = 2(-1)^n/(\pi n^2)\,; \quad b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx =$$

$$= (1/\pi)\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin nx\,dx + \int_0^{\pi} (x^2/\pi)\sin nx\,dx\right) = (1/\pi^2)\times$$

$$\times\int_0^{\pi} x^2\sin nx\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x^2; \quad du = 2x\,dx; \\ dv = \sin nx\,dx;\ v = -(1/n)\cos nx \end{array}\right| = \frac{1}{\pi^2}\times$$

$$\times\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx\right)=-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=$$

$$=\left|u=x;\ du=dx;\ dv=\cos nx dx;\ v=(1/n)\sin nx\right|=(-1)^{n+1}/n+$$

$$+\frac{2}{\pi^2 n}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi^2 n^2}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi^2 n^3}((-1)^n-1)=\frac{(-1)^{n+1}\pi^2 n^2+2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^3}.$$

Розвинення заданої функції в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x)=\frac{\pi}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}\pi^2 n^2+2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^3}\sin nx. \blacksquare$$

Зауваження. Інтеграли у формулах для коефіцієнтів Фур'є можна обчислювати на довільному проміжку $[a;a+2\pi]$, довжина якого дорівнює періоду $T=2\pi$ функції $f(x)$.

2.6.3 Умови збіжності ряду Фур'є

Знайдено декілька *достатніх ознак збіжності ряду Фур'є.*

Функція $f(x)$ називається ***кусково-монотонною*** на відрізку $[a;b]$, якщо виконуються наступні умови (***умови Діріхле***):

1) функція на відрізку $[a;b]$ неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду;

2) відрізок $[a;b]$ можна розбити на скінченне число частин так, що всередині кожної з них функція монотонна.

Зокрема, окремим випадком кусково-монотонної функції є кусково-гладка функція.

Функція $f(x)$ називається ***гладкою*** на відрізку $[a;b]$, якщо вона неперервна разом з своєю першою похідною в кожній точці цього проміжку. Функція $f(x)$ називається ***кусково-гладкою*** на відрізку $[a;b]$, якщо цей відрізок можна розбити на скінченну кількість частин, на кожній з яких функція гладка.

Графіком гладкої функції слугує суцільна та плавна (гладка) лінія, що не містить ані «дірок», ані розривів, ані кутових точок, ані точок повернення. Графік кусково-гладкої функції складається зі скінченної кількості гладких дуг.

Теорема Діріхле (***достатня ознака розвинення функції в ряд Фур'є***). *Якщо функція* $f(x)$ *має період* $T = 2\pi$ *і кусково-монотонна на відрізку* $[-\pi;\pi]$, *то її ряд Фур'є збігається на всій числовій осі, причому сума ряду* $S(x)$ *в точках неперервності функції* $f(x)$ *дорівнює їй самій* $S(x) = f(x)$, *а у кожній точці розриву* x_0 *функції* $f(x)$ *– середньому арифметичному односторонніх границь при* $x \to x_0$ *зліва та справа:* $S(x_0) = \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \right)$, *зокрема* $S(-\pi) = S(\pi) = \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x \to -\pi + 0} f(x) + \lim\limits_{x \to \pi - 0} f(x) \right)$. *При цьому збіжність ряду Фур'є рівномірна на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції* $f(x)$.

Отже, у ряд Фур'є можна розвивати функції достатньо загального вигляду. Оскільки всі функції основної тригонометричної системи є періодичними зі спільним періодом 2π, то сума ряду Фур'є буде періодичною з періодом 2π. Графік суми ряду $S(x)$ є сукупністю дуг кривих та ізольованих точок. Він майже всюди співпадає з графіком самої функції $f(x)$, за винятком її точок розриву першого роду, де сума ряду приймає згладжене значення, що дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь.

Як приклад, на рисунку 2.5 зображено графік деякої кусково-монотонної 2π-періодичної функції $f(x)$, а на рисунку 2.6 – графік суми $S(x)$ її ряду Фур'є.

Зауваження. Швидкість збіжності ряду Фур'є тим більша, чим гладкіша функція. Часткова сума S_n ряду Фур'є є найкращим середньо квадратичним наближенням функції $f(x)$ серед тригонометричних многочленів відповідного вигляду.

Ряди Фур'є можна використовувати для знаходження сум числових рядів. Якщо x_0 – точка неперервності функції $f(x)$, то за теоремою Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) = f(x_0) - a_0/2$.

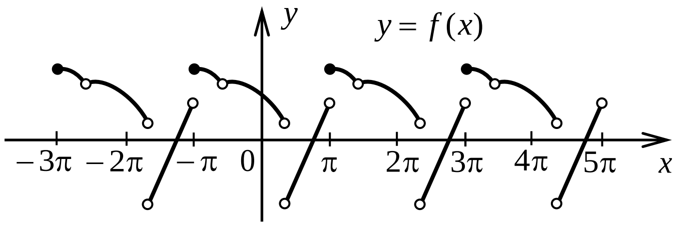

Рисунок 2.5

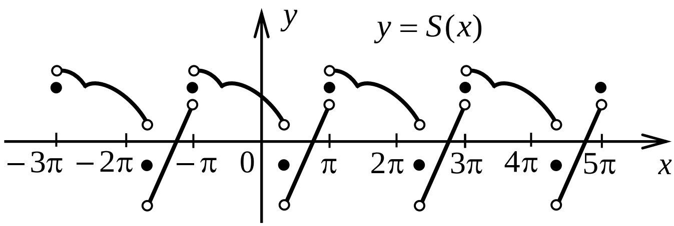

Рисунок 2.6

Теорема. Якщо ряди $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ *з модулів коефіцієнтів збігаються, то ряд Фур'є збігається рівномірно і його сума* $f(x)$ *є неперервною функцією.*

Зауваження. Ряд Фур'є для парної функції набуває вигляду:

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

де $a_0 = (2/\pi)\int_0^{\pi} f(x)dx;$ $a_n = (2/\pi)\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$.

Ряд Фур'є непарної функції має вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ де } b_n = (2/\pi)\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Приклад 1. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію:

$$f(x)=\begin{cases}-x/\pi, & -\pi\le x<0\\ (1-\cos x)/2, & 0<x<\pi\end{cases}.$$

Користуючись одержаним розвиненням, обчислити суму числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

(Проаналізувати самостійно далі наведений хід розв'язання).

□ Задана функція графічно подана на риунку 2.7. Знайдемо її коефіцієнти Фур'є:

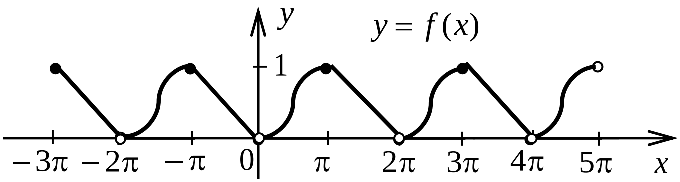

Рисунок 2.7

$$a_0=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=(1/\pi)\Big(\int_{-\pi}^{0}(-x/\pi)\,dx+$$

$$+\int_0^{\pi}((1-\cos x)/2))\,dx\Big)=-\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{0}x\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}dx-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi^2}\cdot x^2/2\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{2\pi}\cdot x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2\pi}\cdot\sin x\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1;$$

$$a_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=$$

$$=(1/\pi)\Big(\int_{-\pi}^{0}(-x/\pi)\cos nx\,dx+\int_0^{\pi}((1-\cos x)/2))\cdot\cos nx\,dx\Big)=$$

$$=-\frac{1}{\pi^2}\underbrace{\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,dx}_{I_1}+\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos nx\,dx}_{I_2}-\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos x\cdot\cos nx\,dx}_{I_3};$$

$$I_1=\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,dx=\left|\begin{array}{l}u=x;\quad du=dx;\\ dv=\cos nx\,dx;\ v=(1/n)\sin nx\end{array}\right|=$$

$$=\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx=\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{1-(-1)^n}{n^2};$$

$$I_2=\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}=0;$$

$$n=1:\ \ I_3=\int_0^{\pi}\cos x\cdot\cos nx\,dx=\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$n\neq 1:\ \ I_3=\int_0^{\pi}\cos x\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big(\cos(x+nx)+$$

$$+\cos(x-nx)\big)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(n+1)x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(n-1)x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2(n+1)}\sin(n+1)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2(n-1)}\sin(n-1)x\Big|_0^{\pi}=0;$$

$$a_1=-\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1-(-1)^1}{1^2}+\frac{1}{2\pi}\cdot 0-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi^2}-\frac{1}{4}=-\frac{\pi^2+8}{4\pi^2};$$

$$a_n=-\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n^2}+\frac{1}{2\pi}\cdot 0-\frac{1}{2\pi}\cdot 0=\frac{(-1)^n-1}{\pi^2 n^2},\quad n\neq 1;$$

$$b_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=$$

$$=(1/\pi)\Big(\int_{-\pi}^{0}(-x/\pi)\sin nx dx+\int_0^{\pi}((1-\cos x)/2))\cdot\sin nx dx\Big)=$$

$$=-\frac{1}{\pi^2}\underbrace{\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx}_{I_1}+\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx}_{I_2}-\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{0}^{\pi}\cos x\cdot\sin nx\,dx}_{I_3};$$

$$I_1=\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx=\left|\begin{array}{l} u=x; \quad du=dx; \\ dv=\sin nx\,dx; \ v=-(1/n)\cos nx \end{array}\right|=$$

$$=\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx dx=\frac{(-1)^n\pi}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{(-1)^n\pi}{n};$$

$$I_2=\int_0^{\pi}\sin nx dx=-(1/n)\cos nx\Big|_0^{\pi}=(1/n)\left(1-(-1)^n\right);$$

$$n=1:\ \ I_3=\int_0^{\pi}\cos x\cdot\sin nx\,dx=\int_0^{\pi}\cos x\cdot\sin x\,dx==-\frac{1}{2}\cos^2 x\Big|_0^{\pi}=0;$$

$$n\neq 1:\ \ I_3=\int_0^{\pi}\cos x\cdot\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\sin(nx+x)+\sin(nx-x)\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(n+1)x\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(n-1)x\,dx=-\frac{1}{2(n+1)}\cos(n+1)x\Big|_0^{\pi}-$$

$$-\frac{1}{2(n-1)}\cos(n-1)x\Big|_0^{\pi}=\frac{1+(-1)^n}{2(n+1)}+\frac{1+(-1)^n}{2(n-1)}=\frac{n\left(1+(-1)^n\right)}{n^2-1};$$

$$b_1=-\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^1\pi}{1}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-(-1)^1}{1}-\frac{1}{2\pi}\cdot 0=\frac{2}{\pi};$$

$$b_n=-\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^n\pi}{n}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n}-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{n\left(1+(-1)^n\right)}{n^2-1}=$$

$$=\frac{3(-1)^{n+1}}{2\pi n}-\frac{1}{2\pi n(n^2-1)},\ \ n\neq 1.$$

Розвинення заданої функції в ряд Фур’є має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{\pi^2+8}{4\pi^2}\cos x+\frac{2}{\pi}\sin x+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi^2 n^2}\cos nx+\left(\frac{3(-1)^{n+1}}{2\pi n}-\frac{1}{2\pi n(n^2-1)}\right)\sin nx\right).$$

Знайдений ряд збіжний до функції $f(x)$ при всіх $x\neq 2n\pi$, $n\in Z$.

У точках $x=2n\pi$, $n\in Z$ функція $f(x)$ зазнає розривів першого роду (усувні розриви – «дірки» на графіку). У цих точках сума ряду:

$$S(2n\pi)=\frac{1}{2}\big(f(2n\pi-0)+f(2n\pi+0)\big)=0.$$

Тобто сума $S(x)$ цього ряду є всюди неперервною функцією.

При $x=\pi$ функція $f(x)$ неперервна. У цій точці $f(\pi)=S(\pi)$.

Тоді одержимо: $f(\pi)=\frac{1}{2}-\frac{\pi^2+8}{4\pi^2}\cos\pi+\frac{2}{\pi}\sin\pi+$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi^2 n^2}\cos n\pi+\left(\frac{3(-1)^{n+1}}{2\pi n}-\frac{1}{2\pi n(n^2-1)}\right)\sin n\pi\right);$$

$$1=\frac{1}{2}-\frac{\pi^2+8}{4\pi^2}\cdot(-1)+\frac{2}{\pi}\cdot 0+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi^2 n^2}(-1)^n+\left(\frac{3(-1)^{n+1}}{2\pi n}-\frac{1}{2\pi n(n^2-1)}\right)\cdot 0\right);$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{\pi^2+8}{4\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2};$$

$$n=2m+1:\quad 1=\frac{1}{2}+\frac{\pi^2+8}{4\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2};$$

$$m=n:\ \ 1=\frac{1}{2}+\frac{\pi^2+8}{4\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Звідси:

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=1-\frac{1}{2}-\frac{\pi^2+8}{4\pi^2};\ \ \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2-8}{4\pi^2};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2-8}{8}.\ \ \blacksquare$$

Зауваження. Ряд Фур'є періодичної функції $f(x)$ з довільним періодом $T=2l,\ l>0$ має вигляд:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right);$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Широке практичне застосування розвинення в ряд Фур'є за тригонометричними функціями зумовлене перш за все тим, що воно відображає структуру фізичних процесів як суперпозиції коливань. Процес і результат розвинення функції $f(x)$ в ряд Фур'є називається ***гармонічним аналізом***.

Застосовуючи тригонометричний метод уведення допоміжного аргументу, ***ряд Фур'є*** можна подати ***в амплітудно-фазовій формі***: $f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(\omega_n x+\varphi_n)$, де $A_0=a_0/2$ – ***середнє значення функції*** $f(x)$ ***за період***; $\cos(\omega_n x+\varphi_n)$ – n***-а гармоніка*** ($n=1,2,\ldots$), що має ***кругову частоту*** (***хвильове число***) $\omega_n=n\pi/l$, ***амплітуду*** A_n і ***початкову фазу*** φ_n:

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2};\ \ a_n=A_n\cos\varphi_n;\ b_n=-A_n\sin\varphi_n\ \ (n=1,2,\ldots).$$

Хвильові числа утворюють послідовність $\{\omega_n\}=\{n\pi/l\}$ – ***спектр***. Спектр має дискретний характер зі сталим кроком $\Delta\omega=\pi/l$. Відповідна послідовність амплітуд $\{A_n\}$ називається

амплітудним спектром.

На гармонічному аналізі ґрунтується більшість видів неруйнівного контролю технічних систем. В електротехніці при дослідженні лінійних ланцюгів частотним методом спочатку вхідний сигнал розкладається на елементарні гармонічні складові (аналіз), які потім перетворюються у відповідні гармонічні складові на виході ланцюга. Одержані гармоніки підсумовуються, що визначає вихідний сигнал (синтез).

Приклад 2. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію, що задана на відповідному відрізку $[-l;l]$ довжиною в період $T=2l$. Зобразити діаграму амплітудного спектра $A_n = A_n(\omega_n)$, $n=\overline{1,4}$:

$$f(x) = |x| + x,\ -3 < x \le 3.$$

□ Задана функція є кусково-монотонною, тому може бути розвинена в ряд Фур'є. Функція має півперіод $l=3$. Її можна подати співвідношенням:

$$f(x) = |x| + x = \begin{cases} -x + x = 0, & -3 < x < 0; \\ x + x = 2x, & 0 \le x \le 3. \end{cases}$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = (1/l)\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = (2/3)\int_0^3 x\,dx = (1/3)\,x^2\Big|_0^3 = 3;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^3 x\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = \Big|\, u = x;\ du = dx;$$

$$dv = \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx;\ v = \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\,\Big| = \frac{2}{3}\left(x\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 - \right.$$

$$\left. -\frac{3}{n\pi}\int_0^3 \sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right) = \frac{6}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 = \frac{6((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2};$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^3 x\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx = \Big|\, u = x;\ du = dx;$$

$$dv = \sin\frac{n\pi x}{3}dx;\ v = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg| = \frac{2}{3}\left(-x\cdot\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{n\pi}\int_0^3 \cos\frac{n\pi x}{3}dx\right) = -\frac{6(-1)^n}{n\pi} + \frac{6}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3 = \frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Дістанемо ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3} + \frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right).$$

Знайдемо амплітуди гармонік і відповідні хвильові числа:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\left(\frac{6((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}\right)^2} =$$

$$= 6\sqrt{2 + (-1)^{n+1} + n^2\pi^2}\Big/\left(n^2\pi^2\right);$$

$$A_1 \approx 2{,}18;\quad A_2 \approx 0{,}97;\quad A_3 \approx 0{,}65;\quad A_4 \approx 0{,}46;$$

$$\omega_n = n\pi/l = n\pi/3;\ \omega_1 = \pi/3;\ \omega_2 = 2\pi/3;\ \omega_3 = \pi;\ \omega_4 = 4\pi/3.$$

Діаграма амплітудного спектра зображена на рисунку 2.8. ■

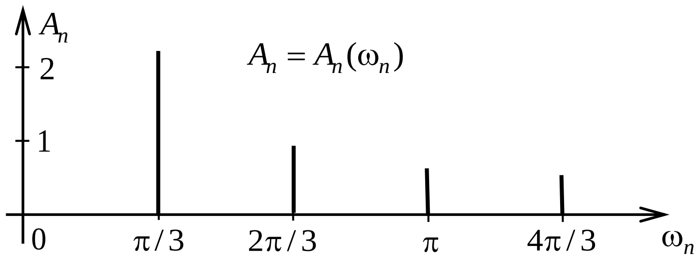

Рисунок 2.8

Зауваження. Нехай неперіодична функція $f(x)$ задана і кусково-монотонна на скінченному проміжку $[0;l]$, $l > 0$. Далі:

а) Продовжимо функцію $f(x)$, $x \in [0;l]$ парним способом на проміжок $[-l;0]$ (геометрично для цього потрібно симетрично відобразити графік функції $f(x)$ відносно осі Oy) (рис. 2.9). Для цього покладемо: $f_*(x)=\begin{cases} f(-x), & -l<x<0 \\ f(x), & 0\le x\le l \end{cases}$. А потім поширимо її періодичним способом з періодом $T=2l$ на всю числову вісь. Дістанемо розвинення в ряд косинусів:

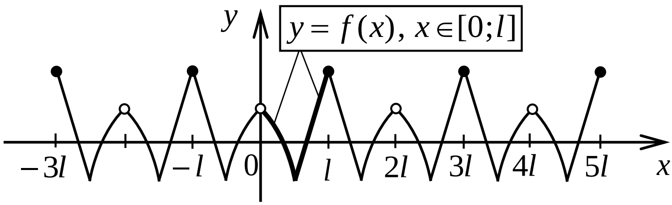

Рисунок 2.9

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\ x\in[0;l];\ a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f_*(x)dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f_*(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,\ldots.$$

При $x=0$ і $x=l$ даний ряд збігається відповідно до $f(0+0)$ і $f(l-0)$.

б) Продовжимо функцію $f(x)$, $x\in[0;l]$ непарним способом на відрізок $[-l;0]$ (геометрично для цього потрібно центрально симетрично відобразити графік функції $f(x)$ відносно початку координат O) (рис. 2.10), вважаючи: $f_*(x)=\begin{cases} -f(-x), & -l<x<0 \\ f(x), & 0\le x\le l \end{cases}$.

А потім поширимо її періодичним способом з періодом $T=2l$ на всю числову пряму. Одержимо розвинення в ряд синусів:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\ x\in[0;l];$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f_*(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,\ n=1,\,2,\ldots.$$

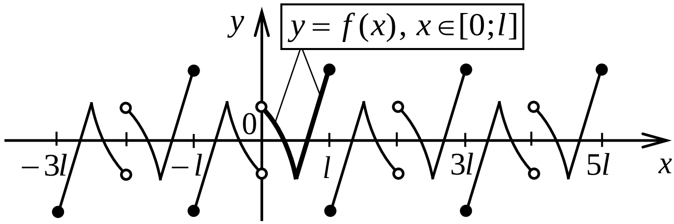

Рисунок 2.10

У точках $x=0$ і $x=l$ сума даного ряду дорівнює 0.

Приклад 3. Задану неперіодичну функцію $f(x)$, що визначена на відповідному відрізку $[0;l]$, розвинути в ряд косинусів і ряд синусів:

$$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0\le x<1;\\ 2, & 1\le x\le 2.\end{cases}$$

(Проаналізувати самостійно далі наведений хід розв’язання).

□ Задана функція є кусково-монотонною, тому може бути розвинена в ряд Фур’є. З умови задачі маємо $l=2$.

При парному продовженні задана функція $f(x)$ розкладається в ряд косинусів:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{2}\left(\int_0^1 2(1-x)\,dx+\int_1^2 2\,dx\right)=-(1-x)^2\Big|_0^1+2x\Big|_1^2=3\,;$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{2}\left(\int_0^1 2(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2 2\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=2\int_0^1(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx+2\int_1^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\left| u=1-x;\;\; dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx;\; du=-dx;\; v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right| =$$

$$=2\cdot(1-x)\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1+2\cdot\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin\frac{n\pi x}{2}dx+2\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\cdot\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{8}{n^2\pi^2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

При непарному продовженні задана функція $f(x)$ розкладається в ряд синусів:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{2}\left(\int_0^1 2(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2 2\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=2\int_0^1(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx+2\int_1^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\left| u=1-x;\;\; dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx;\; du=-dx;\; v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right| =$$

$$=2\cdot(1-x)\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-2\cdot\frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}dx+2\cdot\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2=$$

$$=\frac{4}{n\pi}-\frac{4}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\frac{4}{n\pi}(-1)^n+\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}=$$

$$=\frac{4}{n\pi}-\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n\pi}(-1)^n+\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2};$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n}(-1)^n+\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}.\quad\blacksquare$$

Запитання для самоконтролю

1. Які недоліки розвинення функцій у степеневі ряди?
2. Що називається скалярним добутком функцій, які неперервні на відрізку?
3. Яка пара функцій називається ортогональною на відрізку?
4. Яка система функцій називається ортогональною на відрізку?
5. Що називається рядом Фур'є за тригонометричною системою функцій? Як обчислюються коефіцієнти Фур'є для 2π-періодичної функції?
6. Яка функція називається кусково-монотонною на відрізку? Сформулюйте теорему Діріхле, що виражає достатню ознаку розвинення функції в ряд Фур'є.
7. Як записується неповний ряд Фур'є для 2π-періодичної парної функції? Для 2π-періодичної непарної функції? За якими формулами обчислюються коефіцієнти Фур'є для ряду косинусів і ряду синусів?
8. Як записується ряд Фур'є для періодичної функції з довільним періодом $T = 2l$, $l > 0$? За якими формулами обчислюються коефіцієнти Фур'є в цьому випадку?
9. Як будується парне (непарне) періодичне продовження функції, що задана на відрізку $[0;l]$? Як записується відповідний ряд косинусів (ряд синусів)? За якими формулами обчислюються коефіцієнти отриманого розвинення?
10. Як записується ряд Фур'є в амплітудно-фазовій формі?
11. Що називається гармонічним аналізом? Що таке гармоніка, хвильове число, амплітуда, початкова фаза? Як ці величини виражаються через коефіцієнти Фур'є?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$,що задана на відрізку $[-l;l]$ довжиною в період $T = 2l$. Побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графік заданої функції $y = f(x)$ і графік суми $y = S(x)$ одержаного ряду на відрізку $[-3l;3l]$. Знайти значення $S(0)$ і $S(l/2)$.

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & -4<x<0\\ -x/2, & 0<x\le 4\end{cases}.$$

Відповідь:

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{4}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\right);$$

$$S(0)=1;\quad S(2)=-1.$$

Приклад 2. Функцію $y=f(x)$, що задана на відрізку $[0;l]$, розвинути в неповний ряд Фур'є:

а) за синусами, спочатку продовжуючи її непарним способом на симетричний відрізок $[-l;l]$, а потім довизначаючи до періодичної функції з періодом $T=2l$;

б) за косинусами, спочатку продовжуючи її парним способом на симетричний відрізок $[-l;l]$, а потім довизначаючи до періодичної функції з періодом $T=2l$.

Для кожного розвинення побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графік відповідно продовженої періодичної функції $y=f_*(x)$ і графік суми $y=S(x)$ одержаного ряду на відрізку $[-3l;3l]$. Знайти значення $S(0)$ і $S(l/2)$.

$$f(x)=\begin{cases}1-2x, & 0<x\le 1\\ x-1, & 1<x<2\end{cases}.$$

Відповідь:

а) $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n+\cos\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{12}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2};$$

$$S(0)=0;\quad S(1)=-1/2.$$

б) $$f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\left(2+(-1)^n-3\cos\frac{n\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi x}{2};\quad S(0)=1;\quad S(1)=-1/2.$$

Змістовий модуль 3 ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Лекція 3.1 Перетворення Лапласа та його основні властивості

План

3.1.1 Оператор Лапласа. Оригінал і зображення. Таблиці операційного числення

3.1.2 Основні властивості перетворення Лапласа

3.1.3 Основні оригінали та їхні зображення

3.1.4 Приклади знаходження зображень

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *оператор Лапласа, оригінал, зображення, лінійність оператора Лапласа, зміна масштабу, зсув аргументу в оригіналі, диференціювання та інтегрування зображення та оригіналу, одинична ступінчаста функція Хевісайда*.

3.1.1 Оператор Лапласа. Оригінал і зображення. Таблиці операційного числення

Оригіналом називається довільна функція $f(t)$, що розглядається на півінтервалі $[0;+\infty)$ і має такі властивості:

1) $f(t)$ кусково-неперервна на півінтервалі $[0;+\infty)$, тобто на будь-якому скінченному інтервалі має скінченне число точок розриву першого роду (скінченних стрибків);

2) існують додатні сталі $a>0,\ M>0$ такі, що $\left|f(t)\right|<M\,e^{at}$ при довільному значенні t із півінтервалу $[0;+\infty)$.

Для таких функцій $f(t)$ вводиться ***оператор Лапласа*** (***перетворення Лапласа***) наступним чином: $L\big(f(t)\big)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt$,

де p – ***параметр***. Параметр p – це комплексна змінна $p=\alpha+i\beta$ з додатною дійсною частиною $\alpha>0$.

Інтегральний оператор Лапласа кожному оригіналу $f(t)$ ставить у відповідність єдину функцію $F(p)=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$ – його ***зображення***. Позначається

$$L(f(t))=F(p) \text{ або } f(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} F(p), \text{ або } f(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} F(p).$$

Спеціальний розділ вищої математики, в якому вивчається перетворення Лапласа та його застосування, називається ***операційним численням***. У таблицях 3.1 і 3.2 відображені його основні співвідношення.

Таблиця 3.1 – Правила операційного числення

№ з/п	Операція, властивість	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	2	3	4
1	Лінійність	$C_1 f_1(t) \pm$ $\pm C_2 f_2(t)$	$C_1 F_1(p) \pm$ $\pm C_2 F_2(p)$
2	Зміщення аргументу зображення (затухання оригіналу)	$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
3	Зміна масштабу (подібність)	$f(at)$, $a>0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
4	Зміщення аргументу оригіналу (запізнювання оригіналу)	$f(t-b)\times$ $\times \eta(t-b)$, $b>0$	$e^{-bp} F(p)$
5	Диференціюванн я зображення	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
5а	Перша похідна зображення	$t\, f(t)$	$-F'(p)$

Продовження таблиці 3.1

1	2	3	4
6	Зображення похідних оригіналу	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - - p^{n-2} f'(0) - \ldots - - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
6а	Зображення першої похідної оригіналу	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
6б	Зображення другої похідної оригіналу	$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$
7	Зображення інтеграла від оригіналу	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{p} F(p)$
8	Згортання оригіналів (множення зображень)	$\int_0^t f_1(u) \times \times f_2(t-u)du$	$F_1(p)F_2(p)$

Таблиця 3.2 – Основні оригінали та їх зображення

№ з/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	2	3
1	$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t-b) = \begin{cases} 1, & t > b \\ 0, & t < b \end{cases}$	$e^{-bp} \cdot \frac{1}{p}$
3	e^{-at}	$1/(p+a)$
4	$\sin bt$	$\frac{b}{p^2 + b^2}$
5	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2 + b^2}$

Продовження таблиці 3.2

1	2	3
6	$e^{-at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$
7	$e^{-at}\cos bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
8	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
8а	t	$\dfrac{1}{p^2}$
8б	t^2	$\dfrac{2}{p^3}$
9	$t\,\eta(t-b)$	$e^{-bp}\left(b\cdot 1/p+1/p^2\right)$
10	$t^n e^{-at}$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
10а	te^{-at}	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
11	$t\sin bt$	$\dfrac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
12	$t\cos bt$	$\dfrac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
13	$\dfrac{1}{2b^3}(\sin bt-bt\cos bt)$	$\dfrac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
14	$\delta(t)$	1
15	$\delta(t-b)$	e^{-bp}
16	$\delta'(t)$	p

Теорема (***про поведінку зображень на нескінченності***). Нехай $f(t)$ – довільний оригінал, $F(p)$ – його зображення. Тоді $\lim\limits_{p\to+\infty} F(p)=0$, тобто *будь-яке зображення прямує до нуля, коли параметр* p *прямує до нескінченності*.

Теорема (***єдиності***). *Якщо дві неперервні функції* $f_1(t)$ *і* $f_2(t)$ *мають одне і те ж зображення* $F(p)$*, то ці функції тотожно рівні,* тобто якщо $f_1(t)\doteqdot F_1(p)$; $f_2(t)\doteqdot F_2(p)$; $F_1(p)=F_2(p)$, то $f_1(t)= f_2(t)$.

Зауваження. З означення випливає, що оригінал $f(t)$ може прямувати до нескінченності при $t\to+\infty$, але не надто швидко. Наприклад, функція $f(t)=e^{t^2}$ не є оригіналом.

3.1.2 Основні властивості перетворення Лапласа

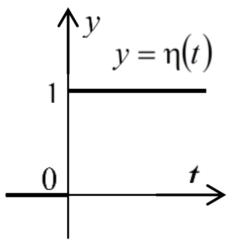

Рисунок 3.1

Функція $\eta(t)$, яка задається формулою $\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$ називається ***одиничною ступінчастою функцією Хевісайда*** (рис. 3.1). (За оригінал приймаємо $f(t)=1$). Маємо:

$$\eta(t)\doteqdot\frac{1}{p} \quad \text{або} \quad 1\doteqdot\frac{1}{p}.$$

$$\square\ L(\eta(t))=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\cdot 1dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}.\ \blacksquare$$

Теорема (***про лінійність оператора Лапласа***). *Зображення алгебраїчної суми двох функцій, помножених на сталі величини, дорівнює відповідній сумі зображень цих функцій, помножених на відповідні сталі*

$$L(C_1 f_1(t)\pm C_2 f_2(t))= C_1 L(f_1(t))\pm C_2 L(f_2(t)).$$

$$\square \quad F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)\right)dt = C_1 \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_1(t)dt \pm$$

$$\pm C_2 \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_2(t)dt = C_1 F_1(p) \pm C_2 F_2(p). \quad \blacksquare$$

Теорема (***зміщення*** (***затухання***)). *Якщо функція* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $F(p+a)$ *слугує зображенням для* $e^{-at} f(t)$: $f(t) \doteqdot F(p) \Rightarrow e^{-at} f(t) \doteqdot F(p+a)$.

$$\square \quad L\left(e^{-at} f(t)\right) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} f(t)dt = F(p+a). \ \blacksquare$$

Теорема (***подібності*** (***зміни масштабу***)). *Якщо функція* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $(1/a)F(p/a)$ *слугує зображенням функції* $f(at)$, *де* $a > 0$:

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \Rightarrow \quad f(at) \doteqdot \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a > 0.$$

$$\square \quad L(f(at)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)dt = \left| u = at; \ t = u/a; \ dt = du/a; \right.$$

$$\left. u_н = 0; \ u_в = +\infty \right| = \int_0^{+\infty} e^{-pu/a} f(u)\frac{du}{a} =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-pu/a} f(u)du = \frac{1}{a} F(p/a). \quad \blacksquare$$

Теорема (***запізнювання*** (***зсув аргументу в оригіналі***)). *Нехай функція* $f(t)$ *тотожно дорівнює нулю при* $t < 0$. *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *то функція* $e^{-bp}F(p)$ *слугує зображенням функції* $f(t-b)$, *де* $b > 0$ (рис. 3.2), тобто якщо

$$f(t) \doteqdot F(p), \text{ то } f(t-b) \doteqdot e^{-bp}F(p), \quad b>0.$$

$$\square \quad L\big(f(t-b)\big) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)\,dt = \int_0^{b} e^{-pt} f(t-b)\,dt +$$

$$+ \int_b^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)\,dt = \left| \begin{matrix} f(t-b)=0 \\ при\ \ t<b \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int_0^{b} e^{-pt} f(t-b)\,dt = 0 \right| =$$

$$= \int_b^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)\,dt = \left| \begin{matrix} u=t-b; & t=u+b; \\ du=dt; & u_н=0;\ \ u_в=+\infty \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-p(u+b)} f(u)\,du = e^{-bp} \int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)\,du = e^{-bp}F(p). \quad \blacksquare$$

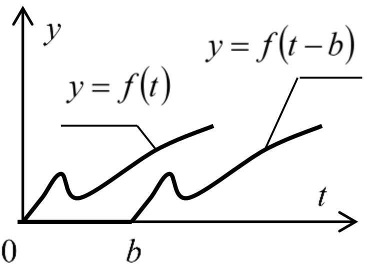

Рисунок 3.2

Зауваження. Для явного врахування умови

$$f(t-b)=0 \text{ при } t<b$$

формулу теореми запізнювання можна подати так:

$$f(t-b)\eta(t-b) \doteqdot e^{-bp}F(p),$$

$$b>0,$$

де $\eta(t-b)$ – одинична функція Хевісайда з запізнюванням, при цьому:

$$\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \eta(t-b) \doteqdot e^{-bp}\cdot\frac{1}{p}.$$

Теорема (***про диференціювання зображення***). *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$*, тоді функція* $(-1)^n \dfrac{d^n F(p)}{dp^n}$ *слугує зображенням функції* $t^n f(t)$*:*

$$f(t) \doteqdot F(p) \;\Rightarrow\; t^n f(t) \doteqdot (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}.$$

□ Диференціюючи ліву і праву частини формули $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ по параметру p, дістанемо:

$$F'(p) = \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{d}{dp}e^{-pt}\right) f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{+\infty}(-t)e^{-pt} f(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} e^{-pt} t f(t)\,dt.$$

Отже: $F'(p) \doteqdot -t\,f(t)$ або $t\,f(t) \doteqdot -F'(p)$.

Аналогічно знаходимо другу похідну зображення:

$$F''(p) = \frac{d}{dp}\left(-\int_0^{+\infty} e^{-pt} t f(t)\,dt\right) = -\int_0^{+\infty}\left(\frac{d}{dp}e^{-pt}\right) t f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^2 f(t)\,dt.$$

Отже, $t^2 f(t) \doteqdot F''(p)$.

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільної n-ої похідної зображення маємо співвідношення: $t^n f(t) \doteqdot (-1)^n F^{(n)}(p)$. ■

Теорема (***про зображення похідної оригіналу***). *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $pF(p) - f(0)$ *слугує зображенням похідної* $f'(t)$:

$$f(t) \doteqdot F(p) \;\Rightarrow\; f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0).$$

□ Використовуючи означення перетворення Лапласа і формулу інтегрування частинами, одержимо:

$$L(f'(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\,dt = \Big| u = e^{-pt};\; du = -pe^{-pt}dt;\; dv = f'(t)\,dt;$$

$$v=\int f'(t)dt=f(t)\Big|=e^{-pt}f(t)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}f(t)\times\left(-pe^{-pt}\right)dt=$$

$$=\left|\lim_{t\to+\infty}e^{-pt}f(t)=0\right|=-f(0)+p\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt=pF(p)-f(0).$$

Отже, $f'(t)\risingdotseq pF(p)-f(0).$ ■

3.1.3 Основні оригінали та їхні зображення

На основі формули інтегрування

$$\int e^{at}\sin bt\,dt=\frac{-be^{at}\cos bt+ae^{at}\sin bt}{a^2+b^2}+C$$

маємо: $L(\sin bt)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin bt\,dt=\lim_{N\to+\infty}\int_0^{N}e^{-pt}\sin bt\,dt=$

$$=\frac{1}{p^2+b^2}\lim_{N\to+\infty}\left(-be^{pt}\cos bt+(-p)e^{-pt}\sin bt\right)\Big|_0^N=$$

$$=\frac{1}{p^2+b^2}\lim_{N\to+\infty}\left(-be^{-pN}\cos bN-pe^{-pN}\sin bN+b\right)=\frac{b}{p^2+b^2},$$

бо $e^{-pN}\to 0$; $\cos bN$ і $\sin bN$ – обмежені функції.

Отже: $\boxed{\sin bt\risingdotseq\frac{b}{p^2+b^2}}.$

Аналогічно, на основі формули інтегрування

$$\int e^{at}\cos bt\,dt=\frac{ae^{at}\cos bt+be^{at}\sin bt}{a^2+b^2}+C$$

маємо: $L(\cos bt)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\cos bt\,dt=$

$$=\frac{1}{p^2+b^2}\lim_{N\to+\infty}\left(-pe^{-pt}\cos bt+be^{-pt}\sin bt\right)\Big|_0^N=\frac{p}{p^2+b^2}.$$

Отже: $\boxed{\cos bt \doteqdot \dfrac{p}{p^2+b^2}}$.

Використовуючи формули для зображення одиничної функції Хевісайда і похідної зображення, одержимо:

$$1\doteqdot 1/p \Rightarrow t=t\times 1\doteqdot -\left(1/p\right)'=-\left(-1/p^2\right)=1/p^2.\ \text{Отже,}\ \boxed{t\doteqdot\frac{1}{p^2}}.$$

Тоді:

$$t^2=t\times t\doteqdot -\left(1/p^2\right)'=\frac{2}{p^3}=\frac{1\cdot 2}{p^3};\quad t^3=t\times t^2\doteqdot -\left(2/p^3\right)'=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{p^4}.$$

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільного n маємо співвідношення $\boxed{t^n\doteqdot\dfrac{n!}{p^{n+1}}}$.

Використовуючи формули для зображення одиничної функції Хевісайда з запізнюванням $\eta(t-b)$ і похідної зображення, одержимо:

$$\eta(t-b)\doteqdot\frac{1}{p}e^{-bp}\quad\Rightarrow\quad t\,\eta(t-b)\doteqdot-\left(e^{-bp}/p\right)'=$$

$$=-\frac{e^{-bp}(-b)p-e^{-bp}}{p^2}=e^{-bp}\left(b\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right).$$

Отже: $\boxed{t\,\eta(t-b)\doteqdot e^{-bp}\left(b\cdot\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^2}\right)}$.

Використовуючи зображення функцій $\eta(t)$, t, t^n і теорему затухання, одержимо зображення функцій e^{-at}, te^{-at} і t^ne^{-at}:

$$\boxed{e^{-at}=1\cdot e^{-at}\doteqdot\frac{1}{p+a}};\quad\boxed{te^{-at}\doteqdot\frac{1}{(p+a)^2}};\quad\boxed{t^ne^{-at}\doteqdot\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}}.$$

Використовуючи формули для зображення функцій $\sin bt,\ \ \cos bt$ і похідної зображення, дістанемо:

$$\sin bt \doteq \frac{b}{p^2+b^2} \quad\Rightarrow\quad t\sin bt \doteq -\frac{d}{dp}\left(\frac{b}{p^2+b^2}\right)=$$

$$=-b\cdot\frac{-2p}{\left(p^2+b^2\right)^2}=\frac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}\,; \quad \cos bt \doteq \frac{p}{p^2+b^2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t\cos bt \doteq -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+b^2}\right)=-\frac{p^2+b^2-2p\cdot p}{\left(p^2+b^2\right)^2}=\frac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}\,.$$

Отже: $\boxed{t\sin bt \doteq \dfrac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}}$; $\boxed{t\cos bt \doteq \dfrac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}}$.

3.1.4 Приклади знаходження зображень

Проаналізувати самостійно далі наведені приклади та хід їх розв’язання.

Приклад 1. Знайти зображення заданої функції:

а) $f(t)=2+6\cos 3t-5\sin 3t$; б) $f(t)=3e^t\cos 4t+2e^t\sin 4t$.

□ а) Спираючись на властивість лінійності, за таблицею оригіналів і відповідних зображень знаходимо:

$$F(p)=2L(1)+6L(\cos 3t)-5L(\sin 3t)=$$

$$=2\cdot\frac{1}{p}+6\cdot\frac{p}{p^2+3^2}-5\cdot\frac{3}{p^2+3^2}=\frac{8p^2-15p+18}{p(p^2+9)}\,;$$

б) Аналогічно, використовуючи властивість лінійності, за таблицею оригіналів і відповідних зображень дістанемо:

$$f(t)=3e^t\cos 4t+2e^t\sin 4t \doteq 3\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+4^2}+$$

$$+2\cdot\frac{4}{(p-1)^2+4^2}=\frac{3p+5}{p^2-2p+17}\,. \quad ■$$

Приклад 2. Знайти зображення функції $f(t) = 2\sin^3 t$.

□ Скористаємося формулою Ейлера та зведемо задану функцію до лінійної комбінації основних оригіналів:

$$f(t) = 2\sin^3 t = 2\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{4i}\left(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\cdot\frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i} - \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) = \frac{3}{2}\sin 3t - \frac{1}{2}\sin t.$$

Далі, спираючись на властивість лінійності, за таблицею оригіналів і відповідних зображень знаходимо:

$$2\sin^3 t \doteqdot \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{p^2+3^2} = \frac{12}{(p^2+1)(p^2+9)}. \quad ■$$

Приклад 3. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t) = t^2\cos^2 3t - 5^{3t}$;

б) $f(t) = (2t^2 - 3)^2 + e^{5t}\sin^2 3t + \cos 2t \cdot \cos 6t.$

□ а) Скористаємося формулами $\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$ і $a^b = e^{b\ln a}$ та дістанемо:

$$f(t) = t^2\cos^2 3t - 5^{3t} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2\cos 6t - e^{3\ln 5\cdot t}.$$

Другий доданок подамо у вигляді, що допускає застосування теореми про диференціювання зображення до табличних оригіналів:

$$(1/2)t^2\cos 6t = (1/2)t\cdot(t\cos 6t).$$

Далі, спираючись на властивість лінійності та вказану теорему, за таблицею оригіналів і відповідних зображень знаходимо:

$$f(t) \doteqdot \frac{1}{2}\cdot\frac{2!}{p^3} + \frac{1}{2}\cdot(-1)\frac{d}{dp}\left(\frac{p^2 - 6^2}{\left(p^2 + 6^2\right)^2}\right) - \frac{1}{p - 3\ln 5} = \frac{1}{p^3} -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2p\cdot(p^2+36)^2-(p^2-36)\cdot 2\cdot(p^2+36)\cdot 2p}{(p^2+36)^4}-\frac{1}{p-3\ln 5}=$$

$$=\frac{1}{p^3}+\frac{p(p^2-108)}{(p^2+36)^3}-\frac{1}{p-3\ln 5}.$$

б) Для подання заданої функції у вигляді лінійної комбінації основних оригіналів піднесемо до квадрата та скористаємося формулами:

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);\;\; \cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big).$$

Дістанемо:

$$f(t)=(2t^2-3)^2+e^{5t}\sin^2 3t+\cos 2t\cdot\cos 6t=$$

$$=4t^4-12t^2+9+e^{5t}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 6t)+\frac{1}{2}(\cos(-4t)+\cos 8t)=$$

$$=4t^4-12t^2+9+\frac{1}{2}e^{5t}-\frac{1}{2}e^{5t}\cos 6t+\frac{1}{2}\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 8t.$$

Спираючись на властивість лінійності, за таблицею оригіналів і відповідних зображень одержимо:

$$f(t)\risingdotseq 4\cdot\frac{4!}{p^5}-12\cdot\frac{2!}{p^3}+9\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p-5}{(p-5)^2+6^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+8^2}.\quad\blacksquare$$

Запитання для самоконтролю

1. Яка функція називається оригіналом? Наведіть приклади оригіналів і функцій, що не є оригіналами.
2. Дайте означення перетворення (оператора) Лапласа. Що таке зображення оригіналу?
3. Сформулюйте теорему єдиності перетворення Лапласа.
4. Як веде себе будь-яке зображення на нескінченності?

5. У чому полягає властивість лінійності оператора Лапласа?
6. Що таке одинична ступінчаста функція Хевісайда? Яке її зображення?
7. У чому полягає теорема про затухання оригіналу?
8. Сформулюйте теорему про зсув аргументу в оригіналі.
9. Сформулюйте теорему подібності (зміни масштабу).
10. Який зв'язок між похідною зображення й оригіналом?
11. Як знаходиться зображення похідних оригіналу?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Використовуючи тотожні перетворення оригіналів та основні властивості перетворення Лапласа, на основі таблиці відповідності оригіналів та їхніх зображень знайти зображення $F(p)$ заданої функції $f(t)$. Результат записати без використання функцій комплексної змінної:

а) $f(t) = 6e^{-4t}\cos^2 2t + 8t\sin 2t \cdot \cos 4t - 3$;

б) $f(t) = 2e^{3t}\sin^2 4t - 4t^2 \sin 5t \cdot \sin 3t$;

в) $f(t) = 6t^3 \sin 2t - 8t^3 \cos 4t + 2t^4$;

г) $f(t) = 4ch3t \cdot \sin 4t + 6sh2t \cdot \cos 3t$;

д) $f(t) = 4sh^2 2t + 2e^{3t} ch3t$.

Вказівка. У пунктах а) і б) застосувати тригонометричні формули зниження степеня та перетворення добутку до суми.

У пункті в) можна безпосередньо застосувати теорему диференціювання зображення, проте краще $\sin 2t$ і $\cos 4t$ подати через комплексні експоненти за формулами Ейлера:

$$\sin t = \left(e^{it} - e^{-it}\right)/(2i); \ \cos t = \left(e^{it} + e^{-it}\right)/2.$$

У пунктах г) і д) гіперболічні синус $sh2t$ і косинус $ch3t$ подати через експоненти за формулами Ейлера:

$$sh\,t = \left(e^{t} - e^{-t}\right)/2; \ ch\,t = \left(e^{t} + e^{-t}\right)/2.$$

Відповідь:

а) $F(p)=\dfrac{3}{p+4}+\dfrac{3(p+4)}{(p+4)^2+16}+\dfrac{48p}{(p^2+36)^2}-\dfrac{16p}{(p^2+4)^2}-\dfrac{3}{p}$;

б) $F(p)=\dfrac{1}{p-3}-\dfrac{p-3}{(p-3)^2+64}+\dfrac{4p(p^2-12)}{(p^2+4)^3}-\dfrac{4p(p^2-192)}{(p^2+64)^3}$;

в) $F(p)=\dfrac{288p(p^2-4)}{(p^2+4)^4}-\dfrac{48(p^4-96p^2+256)}{(p^2+16)^4}-\dfrac{48}{p^5}$;

г) $F(p)=\dfrac{8}{(p-3)^2+16}+\dfrac{8}{(p+3)^2+16}+$

$$+\frac{3(p-2)}{(p-2)^2+9}-\frac{3(p+2)}{(p+2)^2+9};$$

д) $F(p)=\dfrac{1}{p-4}+\dfrac{1}{p+4}+\dfrac{1}{p-6}-\dfrac{1}{p}$.

Лекція 3.2 Обернення перетворення Лапласа. Операційний метод розв’язування диференціальних рівнянь та їх систем

План

3.2.1 Обернення перетворення Лапласа. Відшукання оригіналу зображення, що має вигляд раціонального дробу

3.2.2 Операційний метод розв’язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

3.2.3 Операційний метод розв’язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *загальна формула обернення перетворення Лапласа, правило знаходження оригіналу зображення у вигляді раціонального дробу, операційний метод розв’язування диференціальних рівнянь та їх систем.*

3.2.1 Обернення перетворення Лапласа. Відшукання оригіналу зображення, що має вигляд раціонального дробу

Знаходження оригіналу $f(t)$ за його зображенням $F(p)$ – досить складна задача: ***загальна формула обернення*** передбачає обчислення комплексного інтеграла $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{pt}F(p)dp$, де інтегрування здійснюється вздовж вертикальної прямої в області збіжності оператора Лапласа.

Обмежимося лише розв'язуванням цієї задачі за допомогою наведених вище таблиць операційного числення у випадку, коли зображення має вигляд раціонального дробу.

Правило. Нехай необхідно знайти оригінал $f(t)$ *для зображення* $F(p)$ *у вигляді раціонального дробу* $F(p)=P_m(p)/Q_n(p)$, *де* $P_m(p)$ *і* $Q_n(p)$ *– многочлени відповідно степеня* m *і* n. *Тоді*:

1. *Якщо дріб неправильний* $(m \geq n)$, *то з нього треба виділити цілу частину.*

2. *Правильний дріб* $(m < n)$ *треба розкласти на суму елементарних дробів виду*

$$\frac{A}{(p-a)^k}\ ;\quad \frac{Bp+C}{(p^2+a_1p+a_2)^k}\ ;\quad k\geq 1\ ;\quad D=a_1^2-4a_2<0\ .$$

3. *Знайти оригінали для цілої частини і кожного елементарного дробу, скористатися властивістю лінійності перетворення Лапласа і знайти оригінал початкового дробу.*

4. *Спростити одержаний вираз.*

Приклад 1. Знайти оригінал за його зображенням:

а) $F(p)=\dfrac{7p-1}{(p^2-4)(p^2+2p+5)}$; б) $F(p)=\dfrac{p^3-4p^2+2p-31}{(p^2+9)^2}$.

□ а) $F(p)=\dfrac{7p-1}{(p-2)(p+2)(p^2+2p+5)}=\dfrac{A}{p-2}+\dfrac{B}{p+2}+$

$$+\frac{Cp+D}{p^2+2p+5}=\Big|\ A(p+2)(p^2+2p+5)+B(p-2)\times$$

$$\times(p^2+2p+5)+(Cp+D)(p-2)(p+2)=7p-1;$$

$$\begin{matrix} p=2: \\ p=-2: \\ p^3: \\ p^0: \end{matrix} \begin{cases} 4\cdot 13A=13 \\ -4\cdot 5B=-15 \\ A+B+C=0 \\ 10A-10B-4D=-1 \end{cases};$$

$$\left.\begin{matrix} A=1/4;\quad B=3/4; \\ 1/4+3/4+C=0;\quad C=-1; \\ 5/2-15/2-4D=-1;\ D=-1 \end{matrix}\right| = \frac{1/4}{p-2}+\frac{3/4}{p+2}+$$

$$+\frac{-1p-1}{p^2+2p+5}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+2}-$$

$$-\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} \risingdotseq \frac{1}{4}e^{2t}+\frac{3}{4}e^{-2t}-e^{-t}\cos 2t=f(t).$$

б) $$F(p)=\frac{p^3-4p^2+2p-31}{(p^2+9)^2}=\frac{Ap+B}{(p^2+9)^2}+\frac{Cp+D}{p^2+9}=$$

$$=\left| \begin{matrix} Ap+B+(Cp+D)(p^2+9)=p^3-4p^2+2p-31; \\ Cp^3+Dp^2+(A+9C)p+(B+9D)=p^3-4p^2+2p-31; \end{matrix} \right.$$

$$\left.\begin{matrix} p^3: \\ p^2: \\ p: \\ p^0: \end{matrix} \begin{cases} C=1 \\ D=-4 \\ A+9C=2 \\ B+9D=-31 \end{cases}; \quad \begin{matrix} \\ \\ A=2-9C=-7; \\ B=-31-9D=5; \end{matrix}\right| =$$

$$=\frac{-7p+5}{(p^2+9)^2}+\frac{p-4}{p^2+9}=-7\cdot\frac{p}{(p^2+3^2)^2}+5\cdot\frac{1}{(p^2+3^2)^2}+$$

$$+\frac{p}{p^2+3^2}-4\cdot\frac{1}{p^2+3^2}=-7\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot p\cdot 3}{(p^2+3^2)^2}+5\cdot\frac{1}{(p^2+3^2)^2}+$$

$$+\frac{p}{p^2+3^2}-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+3^2}\ \risingdotseq\ -\frac{7}{6}t\sin 3t+5\cdot\frac{1}{2\cdot 3^3}\cdot(\sin 3t-$$

$$-3t\cos 3t)+\cos 3t-(4/3)\sin 3t=$$

$$=-\frac{7}{6}t\sin 3t-\frac{5}{18}t\cos 3t-\frac{67}{54}\sin 3t+\cos 3t=f(t).\quad\blacksquare$$

Зауваження. В елементарному дробі з квадратним тричленом у знаменнику для спрощення наступного переходу до оригіналу можна спочатку виділити повний квадрат двочлена, а потім подати цей дріб у вигляді

$$\frac{A(p+a)+B}{\left((p+a)^2+b^2\right)^k}.$$

Приклад 2. Знайти оригінал за його зображенням:

а) $F(p)=\dfrac{3p^2-8}{p^3-4p^2+8p}$; б) $F(p)=\dfrac{13p^2-p}{(p-2)(p^2+6p+34)}$.

□ а) $$F(p)=\frac{3p^2-8}{p(p^2-4p+8)}=\frac{3p^2-8}{p\left((p-2)^2+4\right)}=$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B(p-2)+C}{(p-2)^2+4}=$$

$$=\Big|\ A\left((p-2)^2+4\right)+\left(B(p-2)+C)\right)p=3p^2-8;$$

$$\begin{array}{l} p=0: \\ p=2: \\ p^2: \end{array}\left\{\begin{array}{ll} 8A=-8; & A=-1; \\ 4A+2C=4; & C=2-2A=4; \\ A+B=3; & B=3-A=4 \end{array}\right.\Bigg| =$$

$$=\frac{-1}{p}+\frac{4(p-2)+4}{(p-2)^2+4}=-\frac{1}{p}+4\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+4}+$$

$$+2\cdot\frac{2}{(p-2)^2+4}\ \risingdotseq\ -1+4e^{2t}\cos 2t+2e^{2t}\sin 2t=f(t).$$

Пункт б) розв’язати самостійно. ■

3.2.2 Операційний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Методи операційного числення застосовуються у процесі інтегрування диференціальних рівнянь та їх систем. За допомогою цих методів інтегрування деяких класів лінійних диференціальних рівнянь зводиться до розв'язання алгебраїчних рівнянь. З алгебраїчного рівняння знаходять зображення шуканого розв'язку, після чого за зображенням відновлюють самий розв'язок.

Нехай потрібно знайти розв'язок лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t)$, який задовольняє початковим умовам

$$y(0) = y_0;\ y'(0) = y_0';\ \ldots;\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}.$$

Припустимо, що невідома функція $y = y(t)$, її похідні $y'(t)$, …, $y^{(n)}(t)$ і права частина $f(t)$ є оригіналами. Позначимо зображення функцій $y(t)$ і $f(t)$ відповідно через $Y(p)$ і $F(p)$. Використовуючи правило диференціювання оригіналу, знайдемо зображення похідних шуканої функції. Також визначимо зображення $F(p)$ правої частини.

Застосовуючи до диференціального рівняння властивість лінійності, отримаємо рівняння в зображеннях, яке відповідає заданому диференціальному рівнянню. Розв'язуючи одержане лінійне алгебраїчне рівняння в області зображень, дістанемо зображення $Y(p)$ шуканого розв'язку. Надалі залишиться знайти відповідний оригінал $y(t)$.

Загальна схема методу показана на рис. 3.3. Застосування цієї схеми докладно розберемо на прикладах.

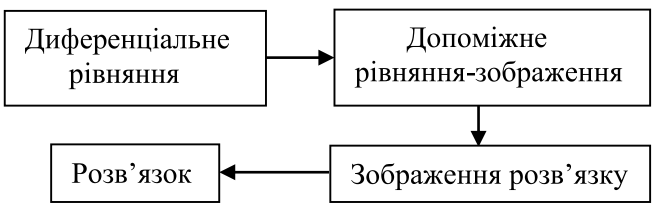

Рисунок 3.3

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку:

$$y' - 4y = 12t; \quad y(0) = 0.$$

□ Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p); \quad t \doteqdot 1/p^2.$$

Одержимо ***операторну форму*** диференціального рівняння:

$pY(p) - 4Y(p) = 12 \cdot 1/p^2$ – допоміжне рівняння-зображення.

Розв'яжемо його:

$$Y(p)(p-4) = \frac{12}{p^2}; \quad Y(p) = \frac{12}{p^2(p-4)}$$ – зображення

шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p) = \frac{12}{p^2(p-4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-4} =$$

$$= \left| 12 = Ap(p-4) + B(p-4) + Cp^2; \right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} p = 0: & \begin{cases} -4B = 12 \\ 16C = 12 \; ; \\ A + C = 0 \end{cases} \\ p = 4: & \\ p^2: & \end{array} \quad \begin{array}{l} B = -3; \\ C = 3/4; \\ A = -C = -3/4 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{-3/4}{p} + \frac{-3}{p^2} + \frac{3/4}{p-4} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p} - 3 \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p-4} \doteqdot$$

$$\doteqdot -\frac{3}{4} \cdot 1 - 3t + \frac{3}{4}e^{4t} = \frac{3}{4}e^{4t} - 3t - \frac{3}{4} = y(t)$$ – шуканий розв'язок. ■

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' - 4y' + 4y = 10e^t \sin 3t; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

□ Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 1;\quad y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - py(0) -$$

$$- y'(0) = p^2Y(p) - p;\quad e^t \sin 3t \doteqdot \frac{3}{(p-1)^2 + 3^2} = \frac{3}{p^2 - 2p + 10}.$$

Одержимо допоміжне рівняння-зображення:

$$p^2Y(p) - p - 4\left(pY(p) - 1\right) + 4Y(p) = 10 \cdot 3/(p^2 - 2p + 10).$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$Y(p) \cdot (p^2 - 4p + 4) = p - 4 + 30/(p^2 - 2p + 10);;$$

$$Y(p) \cdot (p-2)^2 = \frac{p^3 - 2p^2 + 10p - 4p^2 + 8p - 40 + 30}{p^2 - 2p + 10};$$

$$Y(p) = \frac{p^3 - 6p^2 + 18p - 10}{(p-2)^2(p^2 - 2p + 10)}$$ – зображення

шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p) = \frac{p^3 - 6p^2 + 18p - 10}{(p-2)^2(p^2 - 2p + 10)} = \frac{A}{(p-2)^2} + \frac{B}{p-2} +$$

$$+ \frac{Cp + D}{p^2 - 2p + 10} = \Big|\, A(p^2 - 2p + 10) + B(p-2)(p^2 - 2p + 10) +$$

$$+ (Cp + D)(p-2)^2 = p^3 - 6p^2 + 18p - 10;$$

$$\begin{matrix} p = 2: \\ p = 0: \\ p = 1: \\ p^3: \end{matrix} \begin{cases} 10A = 10 \\ 10A - 20B + 4D = -10 \\ 9A - 9B + C + D = 3 \\ B + C = 1 \end{cases};\quad \begin{matrix} A = 1; \\ \begin{cases} -20B + 4D = -20 \\ -9B + C + D = -6; \\ C = 1 - B \end{cases} \end{matrix}$$

$$-\begin{cases} -5B+D=-5 \\ -9B+1-B+D=-6 \end{cases}; \quad \begin{matrix} B=2/5; \\ D=5B-5=-3; \\ C=1-B=3/5 \end{matrix} \Bigg| =$$
$$5B-1=1 \;;$$

$$=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2/5}{p-2}+\frac{(3/5)p-3}{p^2-2p+10}=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+$$

$$+\frac{3}{5}\cdot\frac{p-5}{(p-1)^2+9}=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{p-1-4}{(p-1)^2+9}=$$

$$=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+9}-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{(p-1)^2+9} \risingdotseq te^{2t}+$$

$$+\frac{2}{5}e^{2t}+\frac{3}{5}e^{t}\cos 3t-\frac{4}{5}e^{t}\sin 3t=y(t)$$ – шуканий розв’язок. ■

3.2.3 Операційний метод розв’язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Перетворення Лапласа можна застосовувати для розв’язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами за аналогічною схемою, що використовувалась для окремих диференціальних рівнянь.

Приклад 1. Розв’язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} x'=x+4y-2e^{t} \\ y'=y-x+5 \end{cases}; \quad x(0)=0\;; \quad y(0)=-2\;;$

б) $\begin{cases} x'=2x+3y \\ y'=2x+y-50\sin 2t \end{cases}; \quad x(0)=0\;; \quad y(0)=0\,.$

□ а) Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$; $y(t)\risingdotseq Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв’язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень:

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p);$$

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) + 2; \ \ e^t \doteqdot 1/(p-1); \ \ 1 \doteqdot 1/p.$$

Дістанемо операторну форму диференціальної системи:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 4Y(p) - 2/(p-1) \\ pY(p) + 2 = Y(p) - X(p) + 5/p \end{cases} \text{– допоміжна}$$

система-зображення. Розв'яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, за формулами Крамера:

$$\begin{cases} (p-1) \cdot X(p) - 4Y(p) = -2/(p-1) \\ X(p) + (p-1) \cdot Y(p) = (-2p+5)/p \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -4 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^2 + 4; \ \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2/(p-1) & -4 \\ (-2p+5)/p & p-1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 + \frac{-8p+20}{p} = \frac{-10p+20}{p}; \ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & -2/(p-1) \\ 1 & (-2p+5)/p \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(p-1)(-2p+5)}{p} + \frac{2}{p-1} = \frac{-2p^3 + 9p^2 - 12p + 5}{p(p-1)};$$

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-10p+20}{p\left((p-1)^2+4\right)} \\ Y(p) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-2p^3+9p^2-12p+5}{p(p-1)\left((p-1)^2+4\right)} \end{cases} \text{– зображення}$$

шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$X(p) = \frac{-10p+20}{p\left((p-1)^2+4\right)} = \frac{A}{p} + \frac{B(p-1)+C}{(p-1)^2+4} =$$

$$= \Big| \ A\left((p-1)^2+4\right) + (B(p-1)+C)\,p = -10p+20;$$

$$\begin{array}{l} p=0: \\ p=1: \\ p^2: \end{array} \begin{cases} 5A=20 & A=4; \\ 4A+C=10; & C=10-4A=-6; \\ A+B=0 & B=-A=-4 \end{cases} \Bigg| =$$

$$= \frac{4}{p} + \frac{-4(p-1)-6}{(p-1)^2+4} = 4\cdot\frac{1}{p} - 4\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+4} -$$

$$-3\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4} \doteqdot 4\cdot 1 - 4e^t\cos 2t - 3e^t \sin 2t = x(t);$$

$$Y(p) = \frac{-2p^3+9p^2-12p+5}{p(p-1)\left((p-1)^2+4\right)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C(p-1)+D}{(p-1)^2+4} =$$

$$= \Big| A(p-1)\left((p-1)^2+4\right) + Bp\left((p-1)^2+4\right) +$$

$$+(C(p-1)+D)\,p(p-1) = -2p^3+9p^2-12p+5;$$

$$\begin{array}{l} p=0: \\ p=1: \\ p^3: \\ p=2: \end{array} \begin{cases} -5A=5 \\ 4B=0 \\ A+B+C=-2 \\ 5A+10B+2C+2D=-17 \end{cases} ; \quad \begin{array}{c} A=-1;\ B=0; \\ C=-2-A-B=-1; \\ -5-2+2D=-17; \\ D=-5 \end{array} \Bigg| =$$

$$= \frac{-1}{p} + \frac{0}{p-1} + \frac{-(p-1)-5}{(p-1)^2+4} = -\frac{1}{p} - \frac{p-1}{(p-1)^2+4} -$$

$$-\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4} \doteqdot -1 - e^t\cos 2t - \frac{5}{2}\,e^t\sin 2t = y(t).$$

Отже, шуканий розв’язок:

$$\begin{cases} x(t) = 4 - 4e^t\cos 2t - 3e^t \sin 2t \\ y(t) = -1 - e^t\cos 2t - (5/2)\,e^t \sin 2t \end{cases}.$$

Задачу б) розв’язати самостійно. Відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = -9\cos 2t + 12\sin 2t + 12e^{-t} - 3e^{4t} \\ y(t) = 14\cos 2t - 2\sin 2t - 12e^{-t} - 2e^{4t} \end{cases}. \blacksquare$$

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте правило знаходження оригіналу для зображення у вигляді раціонального дробу на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень.
2. За якою схемою здійснюється розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем методом операційного числення?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку (знайти частинний розв'язок заданого диференціального рівняння, який задовольняє вказаним початковим умовам). Результат записати без використання функцій комплексної змінної:

а) $x'' + 4x' + 20x = -6e^{2t} + 5$; $x(0) = -2$; $x'(0) = 3$;

б) $x'' + 8x' + 12x = 4e^{-2t}\sin 3t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -3$;

в) $x'' - 9x = -2t\cos t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = 0$;

г) $x'' + 16x = 3t^2 - 2t + 2$; $x(0) = 1$; $x'(0) = -1$.

Відповідь:

а) $x(t) = 5/2 - (3/16)e^{2t} - (69/16)e^{-2t}\cos 4t + (69/16)e^{-2t}\sin 4t$;

б) $x(t) = -\frac{5}{12}e^{-2t} + \frac{11}{20}e^{-6t} - \frac{2}{5}e^{-2t}\cos 3t + \frac{1}{45}e^{-2t}\sin 3t$;

в) $x(t) = \frac{2}{75}e^{-3t} - \frac{2}{75}e^{3t} - \frac{1}{9}t\sin t + \frac{4}{45}t\cos t + \frac{16}{225}\sin t$;

г) $x(t) = \frac{3}{8}t^2 - \frac{1}{8}t + \frac{13}{128} + \frac{115}{128}\cos 4t - \frac{7}{32}\sin 4t$.

Приклад 2. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь (знайти частинний розв'язок заданої диференціальної системи, який задовольняє вказаним початковим умовам). Результат записати без використання функцій комплексної змінної:

а) $\begin{cases} x' = x + 4y + 3e^{-2t} \\ y' = x - 2y + 2 \end{cases}$; $\quad x(0) = -1;\ y(0) = 3$;

б) $\begin{cases} x' = 6x - 2y + 4\sin 2t \\ y' = 5x - y - 3t \end{cases}$; $\quad x(0) = 2;\ y(0) = 0$.

Відповідь: а) $\begin{cases} x(t) = -1/6 - (47/15)e^{-3t} + (23/10)e^{2t} \\ y(t) = 1/3 - (3/4)e^{-2t} + (8/3)e^{-3t} + (3/4)e^{2t} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3}{2}t + \dfrac{15}{8} - \dfrac{22}{5}e^{t} + \dfrac{33}{8}e^{4t} + \dfrac{2}{5}\cos 2t - \dfrac{4}{5}\sin 2t \\ y(t) = \dfrac{19}{2}t + \dfrac{21}{2} - 11e^{t} + \dfrac{3}{8}e^{4t} + \dfrac{1}{8}\cos 2t - \dfrac{5}{4}\sin 2t \end{cases}$.

Лекція 3.3 Розв'язування диференціальних рівнянь із запізнюванням

План

3.3.1 Знаходження зображення оригіналу, що містить запізнювання

3.3.2 Відшукання оригіналу зображення у випадку наявності запізнювань

3.3.3 Розв'язування диференціальних рівнянь з правою частиною, що містить запізнювання

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *зображення оригіналу із запізнюванням, особливості відшукання оригіналу зображення у випадку наявності запізнювань, розв'язування операційним методом диференціальних рівнянь з правою частиною, що містить запізнювання.*

3.3.1 Знаходження зображення оригіналу, що містить запізнювання

Для знаходження зображень оригіналів, що містять запізнювання, потрібно, крім розглянутих раніше прийомів, додатково використовувати *теорему запізнювання* (*зсув аргументу в оригіналі*): $f(t-b)\cdot\eta(t-b) \doteqdot e^{-bp}F(p),\ b>0.$

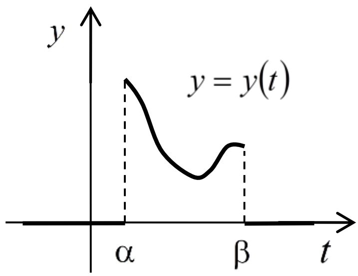

Рисунок 3.4

Довільну імпульсну функцію $y=y(t)$, яка скрізь дорівнює нулю, за винятком скінченного інтервалу $(\alpha;\beta)$ (рис. 3.4)

$$y=y(t)=\begin{cases}0, & t<\alpha;\\ f(t), & t\in(\alpha;\beta);\\ 0, & t>\beta,\end{cases}$$

можна подати однією формулою:

$$y=f(t)\big(\eta(t-\alpha)-\eta(t-\beta)\big).$$

Зображенням імпульсної функції $y=f(t)\big(\eta(t-\alpha)-\eta(t-\beta)\big)$ служить $Y(p)=\int_{\alpha}^{\beta}e^{-pt}f(t)\,dt$. Якщо у виразі для оригіналу $y(t)$ розкрити дужки і сформувати відповідні зсуви аргументу в кожному доданку: $y=g(t-\alpha)\cdot\eta(t-\alpha)-h(t-\beta)\cdot\eta(t-\beta)$, то за теоремою запізнювання відповідне зображення $Y(p)$ можна подати у вигляді:

$$Y(p)=e^{-\alpha p}G(p)-e^{-\beta p}H(p),\ \text{де}\ \ g(t)\doteqdot G(p);\ \ h(t)\doteqdot H(p).$$

Приклад 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=6\cos 4t\cdot\eta(t-\pi/2)+8e^{3t}\cdot\eta(t-2);$

б) $f(t)=4e^{-3t}\sin 2t\cdot\eta(t-\pi)+8t\cos 3t\cdot\eta(t-\pi/2).$

□ а) $f(t)=6\cos 4t\cdot\eta(t-\pi/2)+8e^{3t}\cdot\eta(t-2)=$

$$=6\cos 4((t-\pi/2)+\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2)+8e^{3((t-2)+2)}\cdot\eta(t-2)=$$

$$= 6\cos(4(t-\pi/2)+2\pi)\cdot\eta(t-\pi/2)+8e^{6}e^{3(t-2)}\cdot\eta(t-2)=$$

$$= 6\cos 4(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2)+8e^{6}e^{3(t-2)}\cdot\eta(t-2)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}$$

$$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} 6e^{-(\pi/2)p}\cdot\frac{p}{p^{2}+4^{2}}+8e^{6}e^{-2p}\cdot\frac{1}{p-3};$$

б) $f(t)=4e^{-3t}\sin 2t\cdot\eta(t-\pi)+8t\cos 3t\cdot\eta(t-\pi/2)=$

$$=4e^{-3((t-\pi)+\pi)}\sin 2((t-\pi)+\pi)\cdot\eta(t-\pi)+8((t-\pi/2)+\pi/2)\times$$

$$\times\cos 3((t-\pi/2)+\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2)=4e^{-3\pi}e^{-3(t-\pi)}\sin(2(t-\pi)+2\pi)\times$$

$$\times\eta(t-\pi)+8(t-\pi/2)\cos(3(t-\pi/2)+3\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2)+$$

$$+4\pi\cos(3(t-\pi/2)+3\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2)=4e^{-3\pi}e^{-3(t-\pi)}\sin 2(t-\pi)\times$$

$$\times\eta(t-\pi)+8(t-\pi/2)\sin 3(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2)+4\pi\sin 3(t-\pi/2)\times$$

$$\times\eta(t-\pi/2)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} 4e^{-3\pi}e^{-\pi p}\cdot\frac{2}{(p+3)^{2}+2^{2}}+$$

$$+8e^{-(\pi/2)p}\cdot\frac{2p\cdot 3}{\left(p^{2}+3^{2}\right)^{2}}+4\pi e^{-(\pi/2)p}\cdot\frac{3}{p^{2}+3^{2}}. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти зображення функції-оригіналу $f(t)$, що задана графічно на рис. 3.5.

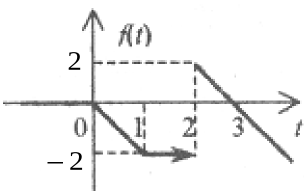

Рисунок 3.5

□ Подамо функцію $f(t)$ аналітично. З графіка випливає:

$f(t)=0,$ коли $t<0;$ $t<0;$

$f(t)=-2t,$ коли $0\le t\le 1;$

$f(t)=-2,$ коли $1<t<2;$

$f(t)=6-2t,$ коли $t\ge 2.$

За допомогою одиничної функції Хевісайда $\eta(t)$ запишемо задану функцію $f(t)$ однією формулою у вигляді:

$$f(t)=-2t\big(\eta(t)-\eta(t-1)\big)+(-2)\big(\eta(t-1)-\eta(t-2)\big)+$$

$$+(6-2t)\eta(t-2).$$

В отриманому виразі для оригіналу $f(t)$ розкриємо дужки та сформуємо відповідні зсуви аргументу в кожному доданку з відповідною одиничною функцією:

$$f(t) = -2t\,\eta(t) + (2t-2)\,\eta(t-1) + (8-2t)\,\eta(t-2) =$$

$$= -2t\,\eta(t) + 2(t-1)\,\eta(t-1) + (8-2(t-2+2))\,\eta(t-2) =$$

$$= -2t\,\eta(t) + 2(t-1)\,\eta(t-1) - 2(t-2)\,\eta(t-2) + 4\,\eta(t-2)\,.$$

Далі, застосовуючи теорему запізнювання, таблицю оригіналів та відповідних зображень і властивість лінійності, дістанемо:

$$f(t) = -2t\,\eta(t) + 2(t-1)\,\eta(t-1) - 2(t-2)\,\eta(t-2) + 4\,\eta(t-2) \doteqdot$$

$$\doteqdot -2\cdot\frac{1}{p^2} + 2\cdot e^{-p}\,\frac{1}{p^2} - 2\cdot e^{-2p}\,\frac{1}{p^2} + 4\cdot e^{-2p}\,\frac{1}{p} =$$

$$= \left(2/p^2\right)\left(-1 + e^{-p} - e^{-2p} + 2pe^{-2p}\right). \;\blacksquare$$

3.3.2 Відшукання оригіналу зображення у випадку наявності запізнювань

При відновленні оригіналу, що містить запізнювання, за його зображенням необхідно коректно врахувати запізнювання, кожному з яких у зображенні відповідає множник вигляду e^{-bp}.

Правило переходу від зображень до оригіналів із запізнюваннями:

1) в зображенні згрупувати члени, що відповідають однаковим запізнюванням, і винести спільний експоненціальний множник e^{-bp} за дужки;

2) вираз у кожних дужках подати у вигляді лінійної комбінації табличних зображень;

3) знайти оригінал для кожного зображення в дужках і врахувати відповідні запізнювання.

Приклад 1. За відомим зображенням знайти відповідний оригінал:

а) $F(p) = \dfrac{2pe^{-\pi p/3} + 2pe^{-2\pi p/3}}{p^2+9}$; б) $F(p) = \dfrac{3e^{-p} - 3e^{-2p}}{p+1}$.

□ а) $F(p)=2e^{-\pi p/3}\cdot\dfrac{p}{p^2+9}+2e^{-2\pi p/3}\cdot\dfrac{p}{p^2+9}\risingdotseq 2\cos 3(t-\pi/3)\times$

$\times\eta(t-\pi/3)+2\cos 3(t-2\pi/3)\cdot\eta(t-2\pi/3)=-2\cos 3t\cdot\eta(t-\pi/3)+$

$+2\cos 3t\cdot\eta(t-2\pi/3)=-2\cos 3t\cdot\big(\eta(t-\pi/3)-\eta(t-2\pi/3)\big)=f(t).$

Графік одержаного оригіналу подано на рисунку 3.6.

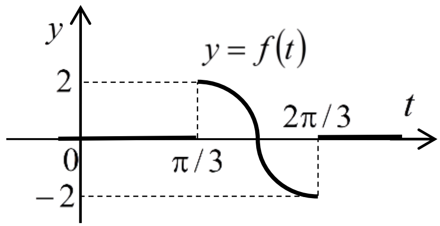

Рисунок 3.6

б) $F(p)=3e^{-p}\dfrac{1}{p+1}-$

$-3e^{-2p}\dfrac{1}{p+1}\risingdotseq$

$\risingdotseq 3e^{-(t-1)}\,\eta(t-1)-$

$$-3e^{-(t-2)}\eta(t-2)=3e^{-(t-1)}\big(\eta(t-1)-e\eta(t-2)\big)=f(t)\,.$$

(Графік отриманого оригіналу побудуйте самостійно). ■

Приклад 2. За відомим зображенням знайти відповідний оригінал:

$$F(p)=\frac{2}{p^2(p^2+4)}-\frac{4e^{-p}}{p^2(p^2+4)}+\frac{2e^{-2p}}{p^2(p^2+4)}.$$

□ $F(p)=\dfrac{2}{p^2(p^2+4)}-\dfrac{4e^{-p}}{p^2(p^2+4)}+\dfrac{2e^{-2p}}{p^2(p^2+4)}=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+4}\right)-e^{-p}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+4}\right)+\frac{1}{2}e^{-2p}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+4}\right)\risingdotseq\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)-\left((t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right)\times$$

$$\times\eta(t-1)+\frac{1}{2}\left((t-2)-\frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right)\cdot\eta(t-2)=f(t).$$ ■

3.3.3 Розв'язування диференціальних рівнянь з правою частиною, що містить запізнювання

Єдина особливість застосування операційного числення для розв'язання таких рівнянь полягає в необхідності врахування запізнювань при переході від зображення шуканого розв'язку до його оригіналу.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку, де права частина $f(t)$ задана графічно (рис. 3.7):

$$y''+9y = f(t); \quad y(0)=2; \; y'(0)=-3.$$

□ Виходячи з графіка, виразимо функцію $f(t)$ аналітично:

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t\in(-\infty;0) \\ 3t, & t\in(0;2) \\ 2, & t\in(2;5) \\ 0, & t\in(5;+\infty) \end{cases}.$$

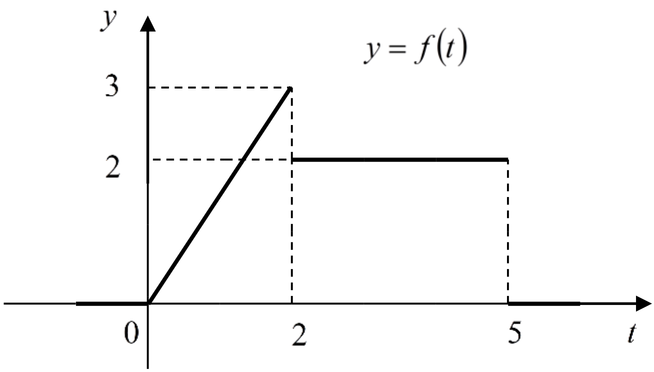

Рисунок 3.7

Застосовуючи одиничну функцію Хевісайда, запишемо функцію $f(t)$ однією формулою:

$$f(t)=3t\big(\eta(t)-\eta(t-2)\big)+2\big(\eta(t-2)-\eta(t-5)\big).$$

Отже, права частина $f(t)$ містить запізнювання.

Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p + 3;$$

$$f(t) = 3t - 3t\eta(t-2) + 2\eta(t-2) - 2\eta(t-5) \doteqdot$$

$$\doteqdot 3\cdot\frac{1}{p^2} - 3\left(2\cdot\frac{e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2}\right) + 2\cdot\frac{e^{-2p}}{p} - 2\cdot\frac{e^{-5p}}{p} =$$

$$= \frac{3}{p^2} - e^{-2p}\cdot\frac{4p+3}{p^2} - e^{-5p}\cdot\frac{2}{p} = F(p).$$

Одержимо допоміжне рівняння-зображення:

$$p^2Y(p) - 2p + 3 + 9Y(p) = \frac{3}{p^2} - e^{-2p}\cdot\frac{4p+3}{p^2} - e^{-5p}\cdot\frac{2}{p}.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$(p^2+9)Y(p) = \frac{2p^3 - 3p^2 + 3}{p^2} - e^{-2p}\cdot\frac{4p+3}{p^2} - e^{-5p}\cdot\frac{2}{p};$$

$$Y(p) = \frac{2p^3 - 3p^2 + 3}{p^2(p^2+9)} - e^{-2p}\cdot\frac{4p+3}{p^2(p^2+9)} - e^{-5p}\cdot\frac{2}{p(p^2+9)} -$$

зображення шуканого розв'язку.

Розкладаючи кожний раціональний дріб окремо в суму елементарних дробів, отримаємо:

$$Y(p) = \left(\frac{A_1}{p} + \frac{B_1}{p^2} + \frac{C_1p + D_1}{p^2+9}\right) - e^{-2p}\left(\frac{A_2}{p} + \frac{B_2}{p^2} + \frac{C_2p + D_2}{p^2+9}\right) -$$

$$-e^{-5p}\left(\frac{A_3}{p} + \frac{B_3p + C_3}{p^2+9}\right) = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2} + 2\cdot\frac{p}{p^2+9} - \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}\right) -$$

$$-e^{-2p}\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{4}{9}\cdot\frac{p}{p^2+9}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}\right)-$$

$$-e^{-5p}\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p}-\frac{2}{9}\cdot\frac{p}{p^2+9}\right).$$

Застосовуючи таблицю відповідності оригіналів та їх зображень і теорему запізнювання, знайдемо оригінал шуканого розв'язку:

$$y(t)=\frac{1}{3}t+2\cos 3t-\frac{10}{8}\sin 3t-\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{3}(t-2)-\frac{4}{9}\cos 3(t-2)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{9}\sin 3(t-2)\right)\eta(t-2)-\left(\frac{2}{9}-\frac{2}{9}\cos 3(t-5)\right)\eta(t-5). \ \blacksquare$$

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему запізнювання (про зсув аргументу в оригіналі).
2. Сформулюйте правило знаходження оригіналу для зображення у вигляді раціонального дробу на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень.
3. Сформулюйте правило знаходження оригіналу із запізнюваннями для зображення, що містить експоненціальні множники вигляду e^{-bp}, на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень з використанням теореми запізнювання.
4. За якою схемою здійснюється розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем у випадку наявності запізнювань?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=6\sin 4t\cdot\eta(t-\pi/3)+8e^{3t}\cos 3t\cdot\eta(t-2)$;

б) $f(t)=4e^{-4t}\sin 3t\cdot\eta(t-\pi)+6t^2e^{2t}\cdot\eta(t-\pi/2)$.

Відповідь:

а) $$F(p)=-\frac{3e^{-\pi p/3}\left(p\sqrt{3}+4\right)}{p^2+16}+\frac{8e^{6}e^{-2p}((p-3)\cos 6-3\sin 6)}{(p-3)^2+9};$$

б) $$F(p)=-\frac{12e^{-4\pi}e^{-\pi p}}{(p+4)^2+9}+\frac{12e^{\pi}\,e^{-\pi p/2}}{(p-2)^3}+$$

$$+\frac{6\pi e^{\pi}\,e^{-\pi p/2}}{(p-2)^2}+\frac{3\pi^2 e^{\pi}\,e^{-\pi p/2}}{2(p-2)}.$$

Приклад 2. Знайти зображення $F(p)$ функції $f(t)$, що задана графічно на рисунку 3.8.

Вказівка. Спочатку, використовуючи одиничну функцію Хевісайда $\eta(t)$, подати задану функцію $f(t)$ аналітично однією формулою. В отриманому виразі для оригіналу $f(t)$ розкрити дужки та сформувати відповідні зсуви аргументу в кожному доданку з відповідною одиничною функцією. Далі, застосовуючи теорему запізнювання, таблицю оригіналів та їхніх зображень і властивість лінійності, знайти шукане зображення $F(p)$.

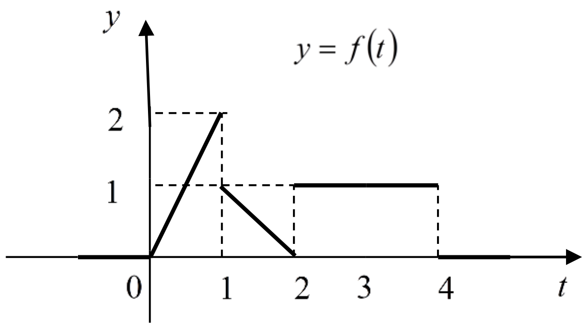

Рисунок 3.8

Відповідь: $$F(p)=\frac{2}{p^2}-\frac{e^{-p}(p+3)}{p^2}+\frac{e^{-2p}(p+1)}{p^2}-\frac{e^{-4p}}{p}.$$

Приклад 3. За відомим зображенням знайти відповідний оригінал:

$$F(p)=\frac{2}{p(p^2+4)}-\frac{6e^{-p}}{p(p^2-4)}+\frac{4e^{-3p}}{p^2(p+2)}.$$

Відповідь: $f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}e^{-2(t-1)}-\right.$

$$\left.-\frac{3}{4}e^{2(t-1)}\right)\cdot\eta(t-1)+\left(2(t-3)-1+e^{-2(t-3)}\right)\cdot\eta(t-3).$$

Приклад 4. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для диференціальне рівняння з правою частиною $f(t)$, що задана графічно на рисунку 3.9:

а) $x''+x'-6x=f(t)$;

$x(0)=x'(0)=0$;

б) $x''+4x=f(t)$;

$x(0)=1$; $x'(0)=-2$.

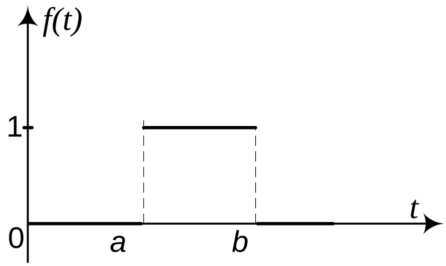

Рисунок 3.9

Відповідь:

а) $x(t)=(1/5)\left(e^{2(t-a)}-e^{-3(t-a)}\right)\cdot\eta(t-a)-$

$$-(1/5)\left(e^{2(t-b)}-e^{-3(t-b)}\right)\cdot\eta(t-b);$$

б) $x(t)=\cos 2t-\sin 2t+(1/2)\sin 2(t-a)\cdot\eta(t-a)-$

$$-(1/2)\sin 2(t-b)\cdot\eta(t-b).$$

Лекція 3.4 Згортка функцій. Розв’язування інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь

План

3.4.1 Зображення інтеграла від оригіналу. Згортка функцій та її зображення

3.4.2 Одинична імпульсна дельта-функція Дірака $\delta(t)$ та її зображення

3.4.3 Розв’язування інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *зображення інтеграла від оригіналу, згортка функцій та її зображення, одинична імпульсна дельта-функція Дірака та її зображення, розв’язування інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь.*

3.4.1 Зображення інтеграла від оригіналу. Згортка функцій та її зображення

Теорема (***зображення інтеграла від оригіналу***). *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $\frac{1}{p}F(p)$ *слугує зображенням інтеграла* $\int_0^t f(u)du$: $\int_0^t f(u)du \doteqdot \frac{1}{p}F(p)$.

□ Нехай $f(t) \doteqdot F(p)$; $\varphi(t) = \int_0^t f(u)du \doteqdot \Phi(p)$.

Знайдемо похідну інтеграла зв змінною верхньою межею

$$\varphi'(t) = \left(\int_0^t f(u)du\right)' = f(t).$$

Використаємо формулу для зображення похідної оригіналу

$$\varphi'(t) \doteqdot p\Phi(p) - \varphi(0).$$

Але $\varphi(0)=\int\limits_0^0 f(u)du=0$, тому $\varphi'(t) \doteqdot p\Phi(p)$.

Тоді: $\left.\begin{aligned} f(t)=\varphi'(t) \doteqdot p\Phi(p) \\ f(t) \doteqdot F(p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad F(p)=p\Phi(p).$

Отже $\Phi(p)=\dfrac{1}{p}F(p)$. ■

Приклад 1. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу і формулою $\cos t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}$, знайти зображення функції $\sin t$.

□ $\sin t=\int\limits_0^t \cos u du \doteqdot \dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{p}{p^2+1}=\dfrac{1}{p^2+1}$. ■

Приклад 2. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$:

$$F(p)=\frac{1}{p(p^2-4p+29)}.$$

□ $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-4p+29)}=\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1}{p^2-4p+29}=$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{5}{(p-2)^2+5^2}=\left|\frac{5}{(p-2)^2+5^2} \doteqdot e^{2t}\sin 5t\right| \doteqdot \frac{1}{5}\times$$

$$\times\int\limits_0^t e^{2u}\sin 5u\,du=\left|\int e^{at}\sin bt\,dt=\frac{-be^{at}\cos bt+ae^{at}\sin bt}{a^2+b^2}\right|=$$

$$=\frac{1}{5}\left.\frac{-5e^{2u}\cos 5u+2e^{2u}\sin 5u}{2^2+5^2}\right|_0^t=\frac{1}{145}\Big(-5e^{2t}\cos 5t+$$

$$+2e^{2t}\sin 5t+5\Big)=f(t).\ ■$$

Згорткою двох функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$ називається функція $f(t)$, яка задається рівністю $f(t)=\int\limits_0^t f_1(u)f_2(t-u)du$. Позначається $f(t)=f_1*f_2$.

Справедливо:

$$f_1*f_2=\int\limits_0^t f_1(u)f_2(t-u)du=\int\limits_0^t f_2(u)f_1(t-u)du=f_2*f_1.$$

(Доведення за допомогою заміни $t-u=z$ у правому інтегралі).

Теорема (***згортання оригіналів (множення зображень)***). *Якщо $F_1(p)$ і $F_2(p)$ – зображення відповідно функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$, то добуток $F_1(p)F_2(p)$ слугує зображенням функції* $f(t)=\int\limits_0^t f_1(u)f_2(t-u)du$: $\int\limits_0^t f_1(u)f_2(t-u)du \risingdotseq F_1(p)F_2(p)$.

Приклад 3. Користуючись теоремою згортання оригіналів, знайти оригінал за його зображенням: $F(p)=\dfrac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}$.

□ $$F(p)=\frac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}=\frac{1}{p^2+b^2}\cdot\frac{1}{p^2+b^2}=$$

$$=\left|F(p)=F_1(p)\cdot F_2(p);\ F_1(p)=F_2(p)=\frac{1}{p^2+b^2}\risingdotseq\frac{1}{b}\sin bt;\right.$$

$$\left.f(t)=\int\limits_0^t f_1(u)f_2(t-u)du\right|\risingdotseq\int\limits_0^t\frac{1}{b}\sin bu\cdot\frac{1}{b}\sin b(t-u)du=$$

$$=\frac{1}{2b^2}\int\limits_0^t\left(\cos(bu-b(t-u))-\cos(bu+b(t-u))\right)du=\frac{1}{2b^2}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^t\cos(2bu-bt)du-\cos bt\int\limits_0^t du\right)=\frac{1}{2b^2}\left(\frac{1}{2b}\sin(2bu-bt)\Big|_0^t-\right.$$

$$-\cos bt\cdot u\Big|_0^t\Bigg)=\frac{1}{2b^2}\left(\frac{1}{2b}\sin bt-\frac{1}{2b}\sin(-bt)-t\cos bt\right)=$$

$$=\frac{1}{2b^3}(\sin bt-bt\cos bt)=f(t)$$ – шуканий оригінал. ■

3.4.2 Одинична імпульсна дельта-функція Дірака δ(*t*) та її зображення

Розглянемо імпульсну функцію $\delta_h(t)$, яка задається рівністю:

$$\delta_h(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1/h, & 0<t<h,\\ 0, & t>h\end{cases}$$

де $h>0$ – ширина імпульсу (рис. 3.10).

Співвідношення для $\delta_h(t)$ можна подати однією формулою за допомогою одиничної функції Хевісайда: $\delta_h(t)=\frac{1}{h}\big(\eta(t)-\eta(t-h)\big)$.

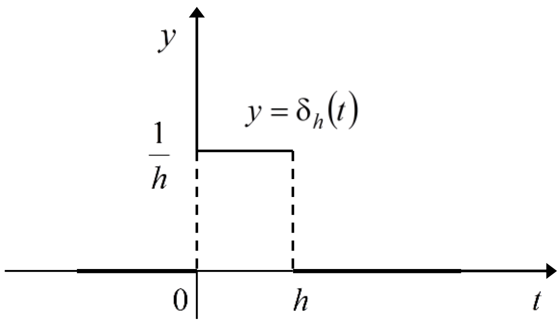

Рисунок 3.10

Знайдемо зображення цієї імпульсної функції $\delta_h(t)$:

$$\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p};\quad \eta(t-h)\risingdotseq e^{-hp}\frac{1}{p};\quad \delta_h(t)\risingdotseq\frac{1}{h}\left(\frac{1}{p}-e^{-hp}\frac{1}{p}\right)=\frac{1-e^{-hp}}{ph}.$$

Одиничною імпульсною дельта-функцією Дірака $\delta(t)$ називається ***узагальнена функція***, яка визначається умовами:

$$1)\ \delta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ +\infty, & t=0;\\ 0, & t>0\end{cases} \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1.$$

Дельта-функцію $\delta(t)$ *можна розглядати як границю імпульсної функції* $\delta_h(t)$ *при* $h\to 0$*:* $\delta(t)=\lim\limits_{h\to 0}\delta_h(t)$.

За зображення дельта-функції $\delta(t)$ природно взяти границю зображення імпульсної функції $\delta_h(t)$ при $h\to 0$:

$$\delta(t)\doteqdot\lim_{h\to 0}L(\delta_h(t))=\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-hp}}{ph}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{h\to 0}\frac{\left(1-e^{-hp}\right)'}{(ph)'}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-e^{-hp}(-p)}{p}=1.\ \text{Отже, }\ \delta(t)\doteqdot 1.$$

Механічний зміст дельта-функції Дірака. Дельта-функцію $\delta(t)$ можна трактувати як нескінченну силу, яка діє миттєво і має одиничний імпульс.

Зв'язок між одиничними функціями Дірака і Хевісайда. Використовуючи означення $\delta(t)$ і формулу для зображення інтеграла від оригіналу, одержимо:

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(u)du=\int_{0}^{t}\delta(u)du\doteqdot\frac{1}{p}\cdot 1=\frac{1}{p}.$$

Тоді на основі єдинності перетворення Лапласа маємо:

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(u)du=\eta(t).$$

Звідси, диференціюючи за змінною t, дістанемо: $\delta(t)=\dfrac{d\eta(t)}{dt}$.

Зауваження. На основі теореми запізнювання маємо:

$$\delta(t-b) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} e^{-bp}\cdot 1 = e^{-bp}.$$

Приклад 1. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$y''-2y'=4\cos 2t+8\delta(t);\;\; y(0)=0;\; y'(0)=0.$$

□ Нехай $y(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} pY(p)-y(0)=pY(p); \quad y''(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} p^2Y(p)-py(0)-$$

$$-y'(0)=p^2Y(p); \quad \cos 2t \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} \frac{p}{p^2+4}; \quad \delta(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} 1.$$

Одержимо допоміжне рівняння-зображення:

$$p^2Y(p)-2pY(p)=4\frac{p}{p^2+4}+8.$$

Розв’яжемо це рівняння:

$$Y(p)\left(p^2-2p\right)=\frac{8p^2+4p+32}{p^2+4};\;\; Y(p)=\frac{8p^2+4p+32}{p(p-2)(p^2+4)}.$$

Для отриманого зображення шуканого розв’язку знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p)=\frac{8p^2+4p+32}{p(p-2)(p^2+4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-2}+\frac{Cp+D}{p^2+4}=$$

$$=\frac{8p^2+4p+32}{p(p-2)(p^2+4)}=\Big|\, A(p-2)(p^2+4)+Bp(p^2+4)+$$

$$+(Cp+D)p(p-2)==8p^2+4p+32;$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=0: & \\ p=2: & \\ p^3: & \\ p^2: & \end{array}\begin{cases} -8A=32 \\ 16B=72 \\ A+B+C=0 \\ -2A-2C+D=8 \end{cases};\quad \begin{cases} A=-4 \\ B=9/2 \\ C=-1/2 \\ D=-1 \end{cases}\right| =$$

$$=\frac{-4}{p}+\frac{9/2}{p-2}+\frac{-(1/2)p-1}{p^2+4}=-4\cdot\frac{1}{p}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+2^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+2^2}\risingdotseq -4+\frac{9}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t=y(t).$$

Отже,

$$y(t)=-4+\frac{9}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t$$ – шуканий розв’язок. ■

3.4.3 Розв’язування інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь

Крім диференціальних рівнянь, що включають похідні невідомої функції, для математичного моделювання різних явищ використовуються також інші споріднені з ними рівняння. Зокрема, ***інтегральні рівняння***, що містять інтеграли від невідомої функції, а також ***інтегро-диференціальні рівняння***, в яких невідома функція входить як під знак похідної, так і під знак інтеграла.

Приклад 1. Розв’язати інтегральне рівняння Вольтерри першого роду:

$$\int_0^t y(u)\cos(t-u)du=t\sin t.$$

□ Нехай $y(t)\risingdotseq Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегрального рівняння до зображень:

$$\cos t\risingdotseq\frac{p}{p^2+1};\qquad t\sin t\risingdotseq\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2};$$

$$\int_0^t y(u)\cos(t-u)du \doteqdot Y(p)\cdot\frac{p}{p^2+1}.$$

Одержимо допоміжне рівняння-зображення:

$$Y(p)\cdot\frac{p}{p^2+1}=\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$Y(p)=\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}:\frac{p}{p^2+1}=\frac{2}{p^2+1}$$ – зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p)==2\cdot 1/(p^2+1) \doteqdot 2\sin t = y(t)$$ – шуканий розв'язок. ■

Приклад 2. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерри другого роду:

$$y(t)-6\int_0^t y(u)\sin 3(t-u)du = t\cos 3t.$$

□ Нехай $y(t)\doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегрального рівняння до зображень:

$$\sin 3t \doteqdot \frac{3}{p^2+9}; \quad t\cos 3t \doteqdot \frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2};$$

$$\int_0^t y(u)\sin 3(t-u)du \doteqdot Y(p)\cdot\frac{3}{p^2+9}.$$

Одержимо допоміжне рівняння в операторній формі:

$$Y(p)-6\cdot Y(p)\cdot\frac{3}{p^2+9}=\frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$Y(p)\cdot\frac{p^2+9-18}{p^2+9}=\frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2};\quad Y(p)=\frac{1}{p^2+9}$$ – зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p)=\frac{1}{p^2+9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+3^2}\doteqdot\frac{1}{3}\sin 3t=y(t).$$

Отже, $y(t)=(1/3)\sin 3t$ – шуканий розв'язок. ■

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок інтегро-диференціального рівняння $y'-2y+\int_0^t y(u)du=3$, який задовольняє початковій умові $y(0)=0$.

□ Нехай $y(t)\doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегро-диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t)\doteqdot pY(p)-y(0)=pY(p);\quad \int\limits_0^t y(u)du\doteqdot\frac{1}{p}Y(p);\quad 1\doteqdot\frac{1}{p}.$$

Дістанемо допоміжне рівняння-зображення:

$$pY(p)-2Y(p)+\frac{1}{p}Y(p)=3\cdot\frac{1}{p}.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$p^2Y(p)-2pY(p)+Y(p)=3;\quad (p^2-2p+1)Y(p)=3;$$

$Y(p)=3/(p-1)^2$ – зображення шуканого розв'язку.
Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p)=3\cdot 1/(p-1)^2\doteqdot 3\cdot te^t=y(t).$$

Отже, $y(t)=3te^t$ – шуканий розв'язок. ■

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок інтегро-диференціального рівняння $y'-2\int_0^t e^{t-u}y(u)du=e^{-2t}$, який задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

□ Нехай $y(t)\doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегро-диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t)\doteqdot pY(p)-y(0)=pY(p)-1;\quad e^{t}\doteqdot\frac{1}{p-1};$$

$$\int_0^t e^{t-u}y(u)du\doteqdot\frac{1}{p-1}Y(p);\qquad e^{-2t}\doteqdot\frac{1}{p+2}.$$

Отримаємо допоміжне рівняння в операторній формі:

$$pY(p)-1-2\,\frac{1}{p-1}Y(p)=\frac{1}{p+2}.$$

Розв’яжемо це рівняння:

$$p(p-1)(p+2)Y(p)-(p-1)(p+2)-2(p+2)Y(p)=p-1;$$

$$Y(p)(p+2)(p(p-1)-2)=p-1+(p-1)(p+2);$$

$$Y(p)=\frac{p^2+p-3}{(p^2-p-2)(p+2)}$$ – зображення шуканого розв’язку.

Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p)=\frac{p^2+p-3}{(p^2-p-2)(p+2)}=\frac{{}^{`}p^2+p-3}{(p+1)(p-2)(p+2)}=$$

$$=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p+2}=\Big|A(p-2)(p+2)+B(p+1)(p+2)+$$

$$+C(p+1)(p-2)=p^2+2p-3;$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=-1: & \left\{\begin{array}{ll} -3A=-4 & \quad A=4/3; \\ 12B=5\ ; & \quad B=5/12; \\ 4C=-3 & \quad C=-3/4; \end{array}\right. \\ p=2: & \\ p=-2: & \end{array}\right|=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+2}\doteqdot$$

$$\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} (4/3)e^{-t} + (5/12)e^{2t} - (3/4)e^{-2t} = y(t).$$

Отже, $y(t) = \dfrac{4}{3}e^{-t} + \dfrac{5}{12}e^{2t} - \dfrac{3}{4}e^{-2t}$ – шуканий розв'язок. ■

Запитання для самоконтролю

1. Як знаходиться зображення інтеграла від оригіналу?
2. Дайте означення згортки функцій. Як знаходиться її зображення?
3. Що називається інтегральним рівнянням?
4. Що називається інтегро-диференціальним рівнянням?
5. За якою схемою здійснюється розв'язування інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь?
6. Що таке одинична імпульсна дельта-функція Дірака? Яке її зображення?
7. Який зв'язок між одиничними функціями Дірака і Хевісайда?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$:

а) $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2+9)}$; б) $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2-12p+40)}$.

Відповідь: а) $f(t) = (1/9)(1-\cos 3t)$;

б) $f(t) = (1/40)(1 - e^{6t}\cos 2t + 3e^{6t}\sin 2t)$.

Приклад 2. Користуючись теоремою згортання оригіналів, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$:

а) $F(p) = \dfrac{1}{(p-2)(p^2+9)}$; б) $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+4)(p^2+36)}$.

Відповідь: а) $f(t) = (1/39)(3e^{2t} - 3\cos 3t - 2\sin 3t)$;

б) $f(t) = (1/32)(\cos 2t - \cos 6t)$.

Приклад 3. Операційним методом розв'язати інтегральне рівняння:

а) $y(t)-10\int_0^t y(u)\sin(t-u)du=9;$ б) $y(t)=5\cos t+\int_0^t e^{t-u}y(u)du.$

Відповідь: а) $y(t)=-1+5e^{3t}+5e^{-3t};$

б) $y(t)=2e^{2t}+3\cos t+\sin t.$

Приклад 4. Операційним методом знайти частинний розв'язок інтегро-диференціального рівняння $y'+3y+8\int_0^t e^{t-u}y(u)du=0$, який задовольняє початковій умові $y(0)=1.$

Відповідь: $y(t)=e^{-t}\cos 2t-e^{-t}\sin 2t.$

Лекція 3.5 Застосування операційного числення до прикладних задач

План

3.5.1 Розв'язування операційним методом задач теоретичної електротехніки

3.5.2 Застосування операційного числення до розв'язування задач математичної фізики

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *операційний метод у теоретичній електротехніці, операційний метод у математичній фізиці*.

3.5.1 Розв'язування операційним методом задач теоретичної електротехніки

Математичними моделями перехідних процесів у електричних ланцюгах служать диференціальні та споріднені з ними (інтегральні, інтегро-диференціальні, скінченно-різницеві і т. ін.) рівняння.

При складанні таких рівнянь звичайно користуються першим та другим законами Кірхгофа.

Перший закон Кірхгофа: *алгебраїчна сума всіх струмів, що протікають в довільній точці ланцюга, дорівнює нулю*.

Другий закон Кірхгофа: *для кожного замкнутого контуру алгебраїчна сума падінь напруги в окремих гілках дорівнює нулю*.

У довільний момент часу t перехідного процесу для активного опору R, індуктивності L, ємності C справедливі наступні співвідношення, що зв'язують падіння напруги на кінцях елемента $u(t)$ та силу струму в ньому $i(t)$:

$$u_R(t) = R\, i_R(t);\;\; u_L(t) = L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt};\;\; u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt + u_C(0),$$

де $u_C(0)$ – падіння напруги на ємності в початковий момент часу $t = 0$.

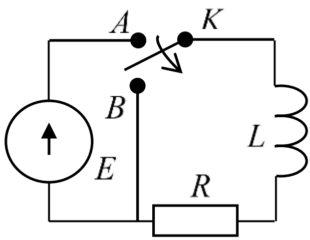

Рисунок 3.11

Приклад 1. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R та індуктивності L (рис. 3.11). Знайти закон зміни сили струму $i(t)$ в контурі при його відключенні від джерела зі сталою електрорушійною силою E і закороченні ланцюга в початковий момент часу $t = 0$ (перемикач K переводиться при $t = 0$ з положення A у положення B).

□ Нехай $i(t) \risingdotseq I(p)$ – шукана сила струму (оригінал) і відповідне зображення. У момент перемикання $t = 0$ за законом Ома сила струму $i(0) = E/R$.

Після перемикання за другим законом Кірхгофа:

$$L\,di/dt + Ri = 0.$$

Перейдемо в одержаному ДР до зображень:

$$\frac{di}{dt} \risingdotseq p\,I(p) - i(0) = p\,I(p) - E/R;$$

$L(p\,I(p) - E/R) + RI(p) = 0$ – допоміжне рівняння-зображення.

Розв'яжемо його:

$$\left(Lp+R\right)I\left(p\right)=\frac{LE}{R}; \qquad I\left(p\right)=\frac{LE/R}{Lp+R}$$ – зображення

шуканого розв’язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$I\left(p\right)=\frac{LE/R}{Lp+R}=\frac{E}{R}\cdot\frac{1}{p+R/L}\ \dot{=}\ \frac{E}{R}e^{-(R/L)t}=i\left(t\right)$$ – шуканий закон

зміни сили струму в контурі. ■

Приклад 2. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R, індуктивності L і ємності C (рис. 3.12).

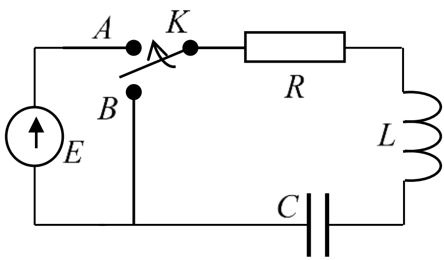

Рисунок 3.12

Знайти закон зміни сили струму в контурі при його підключенні в початковий момент часу $t=0$ до джерела зі сталою електрорушійною силою E (перемикач K переводиться при $t=0$ з положення B у положення A).

□ Нехай $i(t)\ \dot{=}\ I(p)$ – шукана сила струму (оригінал) і відповідне зображення. У початковий момент $t=0$ сила струму і початкова напруга на обкладинках конденсатора дорівнюють нулю:

$$i\left(0\right)=0; \quad u_C\left(0\right)=0.$$

Тоді згідно з другим законом Кірхгофа:

$$Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t i(z)\,dz=E\ .$$

Перейдемо в обох частинах одержаного інтегро-диференціального рівняння до зображень:

$$\frac{di}{dt}\ \dot{=}\ pI\left(p\right)-i\left(0\right)=pI\left(p\right); \quad \int_0^t i(z)\,dz\ \dot{=}\ \frac{1}{p}I(p); \quad 1\ \dot{=}\ \frac{1}{p};$$

$$RI(p)+LpI(p)+(1/C)\cdot(1/p)I(p)=E\cdot(1/p)$$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння:

$$CRp\,I(p)+CLp^2I(p)+I(p)=CE\ ;$$

$$I(p)=\frac{CE}{CLp^2+CRp+1}=\frac{E/L}{p^2+(R/L)\,p+1/(CL)}$$ – зображення шуканого розв'язку.

Знайдемо відповідний оригінал. Обмежимося найважливішим для практики випадком малого опору R і введемо позначення:

$\alpha=R/(2L)$ – коефіцієнт затухання; $\omega_0=\sqrt{1/(LC)}$ – власна кругова частота, яку мав би контур за відсутності активного опору $(R=0)$; $\omega=\sqrt{1/(LC)-\left(R/(2L)\right)^2}=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$ – кругова частота контуру. Припускаємо, що $\omega^2=\omega_0^2-\alpha^2>0$ (опір R малий).

Тоді:

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{CL}=p^2+2\cdot\frac{R}{2L}p+\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}=$$

$$=p^2+2\alpha p+\alpha^2+{\omega_0}^2-\alpha^2=(p+\alpha)^2+\omega^2\,;$$

$$I(p)=\frac{E}{L\omega}\cdot\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}\ \dot{=}\ \frac{E}{L\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t=i(t)$$ – шуканий закон зміни сили струму в контурі. ■

Приклад 3. Два однакових контури, кожний з яких складається з послідовно сполучених активного опору R, індуктивності L і ємності C, зв'язані взаємною індукцією M (рис. 3.13). Знайти закон зміни сили струму в першому $i_1(t)$ та другому $i_2(t)$ контурі при умові, що другий контур закорочений, а перший контур у початковий момент часу $t=0$ підключається до джерела зі сталою електрорушійною силою E (перемикач K переводиться при $t=0$ з положення B у положення A). Вважати, що індукційний зв'язок – ідеальний, при якому $M=L$, і активний опір R – малий.

□ Нехай $i_1(t)\ \dot{=}\ I_1(p)$, $i_2(t)\ \dot{=}\ I_2(p)$ – шукані закони зміни сили струму (оригінали) і відповідні зображення.

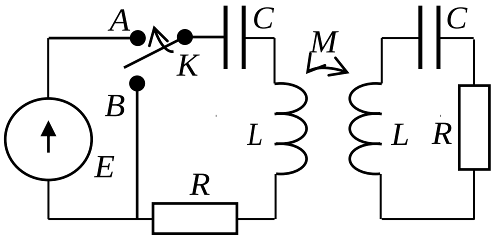

Рисунок 3.13

У початковий момент $t = 0$ обидва контури закорочені, тому початкова сила струму і початкова напруга на обкладинках конденсаторів дорівнюють нулю:

$$i_1(0) = 0;\ u_{C1}(0) = 0;\ i_2(0) = 0;\ u_{C2}(0) = 0.$$

Застосовуючи другий закон Кірхгофа до кожного з контурів, одержимо інтегро-диференціальну систему:

$$\begin{cases} Ri_1 + L\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C}\int_0^t i_1(z)\,dz + M\dfrac{di_2}{dt} = E \\ Ri_2 + L\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C}\int_0^t i_2(z)\,dz + M\dfrac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}.$$

Враховуючи умову $M = L$, маємо:

$$\begin{cases} Ri_1 + L\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C}\int_0^t i_1(z)\,dz + L\dfrac{di_2}{dt} = E \\ Ri_2 + L\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C}\int_0^t i_2(z)\,dz + L\dfrac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}.$$

Перейдемо в обох частинах одержаної інтегро-диференціальної системи до зображень:

$$\frac{di_1}{dt} \risingdotseq pI_1(p) - i_1(0) = pI_1(p);\ \int_0^t i_1(z)\,dz \risingdotseq \frac{1}{p}I_1(p);$$

$$\frac{di_2}{dt} \risingdotseq pI_2(p) - i_2(0) = pI_2(p);\ \int_0^t i_2(z)\,dz \risingdotseq \frac{1}{p}I_2(p);\ 1 \risingdotseq \frac{1}{p};$$

$$\begin{cases} R\,I_1(p) + Lp\,I_1(p) + (1/(Cp))\,I_1(p) + Lp\,I_2(p) = E/p \\ R\,I_2(p) + Lp\,I_2(p) + (1/(Cp))\,I_2(p) + Lp\,I_1(p) = 0 \end{cases} -$$

допоміжна система-зображення. Розв'яжемо цю лінійну алгебраїчну систему за формулами Крамера:

$$\begin{cases} (LCp^2 + RCp + 1)\,I_1(p) + LCp^2\,I_2(p) = EC \\ LCp^2\,I_1(p) + (LCp^2 + RCp + 1)\,I_2(p) = 0 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} LCp^2 + RCp + 1 & LCp^2 \\ LCp^2 & LCp^2 + RCp + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (RCp + 1)(2LCp^2 + RCp + 1) =$$

$$= 2RC^2L\,(p + 1/(RC))\left(p^2 + (R/(2L))\,p + 1/(2LC)\right);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} EC & LCp^2 \\ 0 & LCp^2 + RCp + 1 \end{vmatrix} = 2RC^2L\left(\frac{E}{2R}p^2 + \frac{E}{2L}p + \right.$$

$$\left. + \frac{E}{2RCL}\right); \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} LCp^2 + RCp + 1 & EC \\ LCp^2 & 0 \end{vmatrix} = -EC^2Lp^2;$$

$$\begin{cases} I_1(p) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{(E/(2R))\,p^2 + (E/(2L))\,p + E/(2RCL)}{(p + 1/(RC))\left(p^2 + (R/(2L))\,p + 1/(2LC)\right)} \\ I_2(p) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -\dfrac{(E/(2R))\,p^2}{(p + 1/(RC))\left(p^2 + (R/(2L))\,p + 1/(2LC)\right)} \end{cases} -$$

зображення шуканих сил струму.

Знайдемо відповідні оригінали. Введемо позначення:

$$\frac{1}{RC} = \alpha; \quad \frac{R}{4L} = \beta; \quad \frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2} = \omega^2 > 0.$$

Тоді:

$$p^2 + (R/(2L))\,p + 1/(2LC) = \left(p^2 + 2\cdot(R/(4L))\,p + \right.$$

$$\left. + (R/(4L))^2\right) + \left(1/(2LC) - (R/(4L))^2\right) = (p + \beta)^2 + \omega^2;$$

$$I_1(p)=\frac{(E/(2R))\,p^2+(E/(2L))\,p+E/(2RCL)}{(p+\alpha)\left((p+\beta)^2+\omega^2\right)}=\frac{E/(2R)}{p+\alpha}+$$

$$+\frac{E/(4L)}{(p+\beta)^2+\omega^2}=\frac{E}{2R}\cdot\frac{1}{p+\alpha}+\frac{E}{4L\omega}\cdot\frac{\omega}{(p+\beta)^2+\omega^2}\;\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\frac{E}{2R}\,e^{-\alpha t}+\frac{E}{4L\omega}\,e^{-\beta t}\,\sin\omega t=i_1(t);$$

$$I_2(p)=-\frac{(E/(2R))\,p^2}{(p+\alpha)\left((p+\beta)^2+\omega^2\right)}=-\frac{E/(2R)}{p+\alpha}+$$

$$+\frac{E/(4L)}{(p+\beta)^2+\omega^2}=-\frac{E}{2R}\cdot\frac{1}{p+\alpha}+\frac{E}{4L\omega}\cdot\frac{\omega}{(p+\beta)^2+\omega^2}\;\risingdotseq$$

$$\risingdotseq-\frac{E}{2R}\,e^{-\alpha t}+\frac{E}{4L\omega}\,e^{-\beta t}\,\sin\omega t=i_2(t).\;\blacksquare$$

3.5.2 Застосування операційного числення до розв'язування задач математичної фізики

Обмежимось випадком, коли шукана функція $u=u(x,t)$ залежить лише від двох незалежних змінних x і t, де x – просторова координата; t – час.

Загальна схема розв'язування задач математичної фізики ***операційним методом***:

1. Застосовуючи ***перетворення Лапласа*** за однією з незалежних змінних (як правило, за часом t), перейти від початкового диференціального рівняння з частинними похідними (ДРЧП) до звичайного диференціального ***рівняння-зображення***.

2. Розв'язати одержане допоміжне рівняння-зображення тим чи іншим методом (можна знову застосувати те чи інше перетворення) і знайти зображення шуканого розв'язку.

3. За допомогою ***формул обернення*** чи ***таблиць відповідності оригіналів та їх зображень*** перейти від зображення до оригіналу шуканого розв'язку.

Приклад 1. Розв'язати першу крайову задачу для однорідного хвильового рівняння операційним методом:

$$\text{(ДРЧП)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(0 < x < l;\ \ t > 0\right);$$

$$\text{(ПУ)} \quad u\left(x,0\right) = 0; \quad \frac{\partial u\left(x,0\right)}{\partial t} = A_0 \sin\frac{\pi x}{l} \quad \left(0 < x < l\right);$$

$$\text{(КУ)} \quad u\left(0,t\right) = 0; \quad u\left(l,t\right) = 0 \qquad \left(t > 0\right),$$

де a, A_0, l – відомі величини; $a > 0$, $l > 0$.

□ Застосуємо перетворення Лапласа за часом t. Нехай $u(x,t) \risingdotseq U(x,p)$ – шукана функція (оригінал) і відповідне зображення. Тоді:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \risingdotseq \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \risingdotseq \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \risingdotseq pU - u\left(x,0\right) = pU;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \risingdotseq p^2 U - pu\left(x,0\right) - \frac{\partial u\left(x,0\right)}{\partial t} = p^2 U - A\sin\frac{\pi x}{l};$$

$$U\left(0,p\right) = 0; \quad U\left(l,p\right) = 0.$$

Підставляючи одержані вирази в ДРЧП, переходимо до рівняння-зображення:

$$p^2 U - A_0 \sin\frac{\pi x}{l} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{A_0}{a^2} \sin\frac{\pi x}{l}.$$

Розв'язуємо одержане лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду за допомогою характеристичного рівняння:

$$k^2 - (p/a)^2 = 0; \quad k = \pm(p/a); \quad \overline{U}\left(x,p\right) = C_1 e^{-(p/a)x} + C_2 e^{(p/a)x};$$

$$U_* = A\cos\frac{\pi x}{l} + B\sin\frac{\pi x}{l}; \quad U_*' = -A\frac{\pi}{l}\sin\frac{\pi x}{l} + B\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi x}{l};$$

$$U_*'' = -\frac{\pi^2 A}{l^2}\cos\frac{\pi x}{l} - \frac{\pi^2 B}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l};$$

$$-\frac{\pi^2 A}{l^2}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{\pi^2 B}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{p^2 A}{a^2}\cos\frac{\pi x}{l}-$$

$$-\frac{p^2 B}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l}=-\frac{A_0}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l};$$

$$\cos\frac{\pi x}{l}:\quad -\frac{\pi^2 A}{l^2}-\frac{p^2 A}{a^2}=0;\quad A=0;$$

$$\sin\frac{\pi x}{l}:\quad -\frac{\pi^2 B}{l^2}-\frac{p^2 B}{a^2}=-\frac{A_0}{a^2};\quad B=\frac{A_0 l^2}{\pi^2 a^2+p^2 l^2};$$

$$U=\overline{U}+U_*=C_1 e^{-(p/a)x}+C_2 e^{(p/a)x}+\frac{A_0 l^2}{\pi^2 a^2+p^2 l^2}\sin\frac{\pi x}{l}\ -$$

загальний розв'язок лінійного ЗДР. Знаходимо конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2 з крайових умов:

$$U(0,p)=0:\quad C_1+C_2=0;$$

$$U(l,p)=0:\quad C_1 e^{-(p/a)l}+C_2 e^{(p/a)l}=0;\ C_1=0;\ C_2=0.$$

Тоді $$U(x,p)=\frac{A_0 l^2}{\pi^2 a^2+p^2 l^2}\sin\frac{\pi x}{l}=\frac{A_0}{p^2+(\pi a/l)^2}\sin\frac{\pi x}{l}\quad -$$

зображення шуканого розв'язку.

За таблицями відповідності оригіналів та їх зображень знаходимо:

$$U(x,p)=\frac{A_0 l}{\pi a}\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\frac{\pi a/l}{p^2+(\pi a/l)^2}\ \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}$$

$$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}\ \frac{A_0 l}{\pi a}\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\sin\frac{\pi a t}{l}=u(x,t)$$ – шуканий розв'язок. ■

Приклад 2. Операційним методом знайти обмежений розв'язок крайової задачі для однорідного рівняння теплопровідності:

(ДРЧП) $$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0<x<+\infty;\quad t>0);$$

(ПУ) $u(x,0)=0 \quad (0<x<+\infty)$;

(КУ) $u(0,t)=u_0\delta_0(t) \quad (t>0)$,

де $\delta_0(t)$ – одинична імпульсна дельта-функція Дірака;

$a,\, u_0$ – задані числа, $a>0$.

□ Застосуємо перетворення Лапласа за часом t. Нехай $u(x,t)\doteqdot U(x,p)$. Тоді:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\doteqdot\frac{\partial U}{\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial t}\doteqdot pU-u(x,0)=pU;\quad \delta_0(t)\doteqdot 1;\quad U(0,p)=u_0.$$

Підставляючи одержані вирази в ДРЧП, переходимо до рівняння-зображення:

$$pU=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2};\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{p}{a^2}U=0.$$

Розв'язуємо одержане лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$k^2-p/a^2=0;\quad k=\pm(1/a)\sqrt{p};\quad C_1 e^{-(x/a)\sqrt{p}}+C_2 e^{(x/a)\sqrt{p}}.$$

Оскільки за умовою задачі функція $U(x,p)$ обмежена при $x\to+\infty$, то $C_2=0$. Тоді $U=C_1\, e^{-(x/a)\sqrt{p}}$.

Значення C_1 знайдемо з крайової умови:

$$U(0,p)=u_0:\quad C_1=u_0.$$

Отже, $U(x,p)=u_0\, e^{-(x/a)\sqrt{p}}$ – зображення шуканого розв'язку.

Користуючись таблицями відповідності оригіналів та їх зображень, одержимо:

$$U(x,p)=u_0\, e^{-(x/a)\sqrt{p}} \doteqdot u_0\cdot\frac{x}{2at\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{a^2\cdot 4t}}=$$

$$=\frac{u_0 x}{2at\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}=u(x,t)$$ – шуканий розв'язок. ■

Приклад 3. Початкова напруга в напівобмеженому нескінченному однорідному провіднику $0 \le x < +\infty$ дорівнює 0. Самоіндукція і втрати через ізоляцію практично відсутні. Активний опір і ємність одиниці довжини провідника відповідно дорівнюють R і C. Починаючи з моменту часу $t = 0$ до кінця $x = 0$ провідника прикладена стала електрорушійна сила E_0. Знайти напругу $u(x,t)$ в кожній точці провідника в довільний момент часу.

□ Напруга $u(x,t)$ задовольняє телеграфному рівнянню:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{RG}{LC}u = 0 .$$

Оскільки самоіндукція L і втрати через ізоляцію G практично відсутні, тобто $L = 0$ і $G = 0$, то це рівняння набуває вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a^2 = \frac{1}{CR} .$$

Отже, приходимо до першої крайової задачі для рівняння теплопровідності:

(ДРЧП) $\partial u/\partial t = a^2\, \partial^2 u/\partial x^2 \quad (0 < x < +\infty;\ \ t > 0)$;

(ПУ) $u(x,0) = 0 \quad (0 < x < +\infty)$;

(КУ) $u(0,t) = E_0 \quad (t > 0)$.

Застосуємо перетворення Лапласа за часом t. Нехай $u(x,t) \doteqdot U(x,p)$. Тоді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \doteqdot pU - u(x,0) = pU; \quad U(0,p) = \frac{E_0}{p} .$$

Переходимо до рівняння-зображення: $pU = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

Його загальний розв'язок: $U = C_1 e^{-(x/a)\sqrt{p}} + C_2 e^{(x/a)\sqrt{p}}$.

З фізичних міркувань випливає, що $U(x,p) \to 0$ при $x \to +\infty$. Тому $C_2 = 0$. Отже, $U = C_1 e^{-(x/a)\sqrt{p}}$.

Значення сталої C_1 знайдемо з крайової умови:

$$U(0,p)=E_0/p: \quad C_1=E_0/p.$$

Користуючись розширеними таблицями відповідності оригіналів та їх зображень, одержимо шуканий розв'язок:

$$u(x,t)=E_0-E_0\phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \quad (0<x<+\infty;\ t>0),$$

де $\phi(z)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-x^2}dx$ – інтеграл похибок. ■

Зауваження. У випадках, коли неможливе вимірювання внутрішніх змінних або невідомі закони протікання процесів, математичне моделювання часто здійснюється через дослідження зовнішньої поведінки системи у термінах «вхід – вихід».

Передаточною функцією системи $W(p)$ називається відношення зображень вихідної $Y(p)$ і вхідної $U(p)$ змінних при нульових початкових умовах: $W(p)=Y(p)/U(p)$.

Перехідною функцією системи $h(t)$ називається реакція системи (значення вихідної змінної $y(t)$) на вхідну дію у вигляді одиничної ступінчастої функції Хевісайда $u(t)=\eta(t)$ при нульових початкових умовах.

Імпульсною перехідною (***ваговою***) ***функцією системи*** $\varphi(t)$ називається реакція системи (значення вихідної змінної $y(t)$) на вхідну дію у вигляді одиничної імпульсної дельта-функції Дірака $u(t)=\delta(t)$ при нульових початкових умовах.

Указані функції зв'язані співвідношеннями:

$$H(p)=W(p)/p; \quad \Phi(p)=W(p); \quad \varphi(t)=dh/dt.$$

Приклад 4. На рисунку 3.14 зображена аперіодична ланка у вигляді електричного ланцюга, що складається з активних опорів R_1, R_2 та індуктивності L. Знайти передаточну функцію $W(p)$ цієї системи.

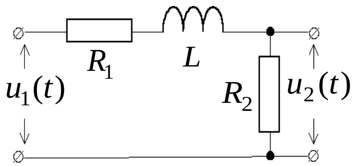

Рисунок 3.14

□ Така система описується диференціальним рівнянням першого порядку $T\dfrac{dy}{dt} + y = ku$, де $u = u_1(t)$ і $y = u_2(t)$ – відповідно вхідна та вихідна змінні (напруги на вході та виході);

T – стала часу; k – сталий коефіцієнт підсилення. При цьому:

$$T = L/(R_1 + R_2); \quad k = R_2/(R_1 + R_2).$$

Перейдемо до зображень за Лапласом при нульових початкових умовах:

$$u(t) \doteqdot U(p); \quad y(t) \doteqdot Y(p); \quad \frac{dy}{dt} \doteqdot pY(p).$$

Одержимо операторну форму рівняння динаміки аперіодичної ланки:

$$(Tp+1)Y(p) = kU(p).$$

Звідси

$$Y(p) = \big(k/(Tp+1)\big)\,U(p);$$

$$W(p) = Y(p)/U(p) = k/(Tp+1)$$ – передаточна функція аперіодичної ланки. ■

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть приклади розрахунку перехідних процесів у електричних ланцюгах за допомогою операційного числення.
2. Наведіть приклади розв’язання задач математичної фізики за допомогою операційного числення.
3. Яким диференціальним рівнянням описується аперіодична ланка (інерційна ланка першого порядку)? Що таке стала часу і коефіцієнт підсилення аперіодичної ланки?
4. Наведіть приклад аперіодичної ланки у вигляді електричного ланцюга. Наведіть вираз для передаточної функцій аперіодичної ланки.

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R та ємності C (рис. 3.15).

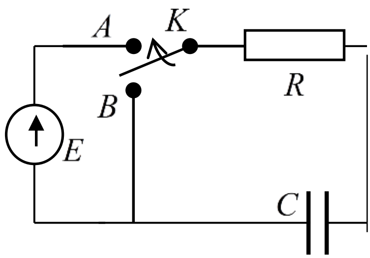

Рисунок 3.15

Знайти закон зміни сили струму в контурі $i(t)$ при його підключенні в початковий момент часу $t = 0$ до джерела зі сталою електрорушійною силою $E = const$ (перемикач K переводиться при $t = 0$ з положення B у положення A).

Відповідь:

$$i(t) = (E / R)e^{-t/(CR)}.$$

Приклад 2. Два контури, зображені на рисунку 3.16, зв'язані взаємною індукцією $M = L$. Знайти закон зміни сили струму в першому $i_1(t)$ та другому $i_2(t)$ контурі при умові, що другий контур закорочений, а перший контур у початковий момент часу $t = 0$ підключається до джерела зі сталою електрорушійною силою E (перемикач K переводиться при $t = 0$ з положення B у положення A). Вважати, що активний опір R – великий.

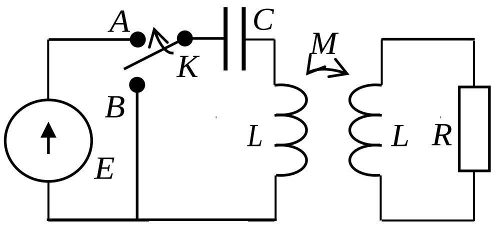

Рисунок 3.16

Відповідь: $$i_1(t) = \frac{E}{R}e^{-\beta t}\cos\omega t + \frac{E(R - \beta L)}{RL\omega}e^{-\beta t}\sin\omega t;$$

$$i_2(t) = -\frac{E}{R}e^{-\beta t}\cos\omega t + \frac{E\beta}{R\omega}e^{-\beta t}\sin\omega t.$$

де $\beta = \frac{1}{2RC}$; $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2} > 0.$

Приклад 3. Застосовуючи операційне числення, знайти розв'язок рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, який задовольняє початковим і крайовим умовам:

$$u(x,0) = A\sin\frac{n\pi x}{l},\ 0 \le x \le l; \quad u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0.$$

Відповідь: $u(x,t) = A\exp\left(-\frac{n^2a^2\pi^2}{l^2}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$

Приклад 4. Консервативна ланка (осцилятор) описується диференціальним рівнянням другого порядку $T^2\frac{d^2y}{dt^2} + y = ku.$ Знайдіть вираз для передаточної функції $W(p)$ цієї ланки.

Примітка. На рисунку 3.17 зображена консервативна ланка у вигляді електричного ланцюга, що складається з індуктивності L та ємності C. Тут $u = u_1(t)$ і $y = u_2(t)$ – відповідно вхідна та вихідна змінні (напруги на вході та виході).

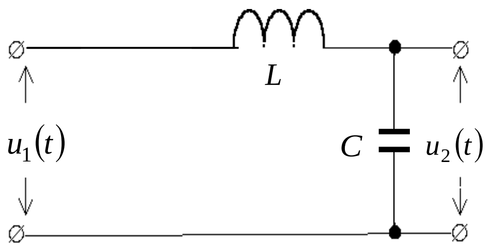

Рисунок 3.17

Відповідь: $W(p) = Y(p)/U(p) = k/\left(T^2p^2 + 1\right).$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов / А. М. Ахтямов. – М. : Физматлит, 2004. – 464 с.

2. Бізюк В. В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. – Харків : ХНАМГ, 2008. – 300 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/5934/, вільний).

3. Валєєв К. Г. Вища математика : у 2 ч. Ч.2 / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – Київ : КНЕУ, 2002. – 451 с.

4. Бізюк В. В. Елементи операційного числення [Електронний ресурс] : конспект лекцій для студентів першого курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / В. В. Бізюк, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 59 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/57508/, вільний.

5. Вища математика для електротехніків : у 3 модулях / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова та ін. ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2009.

Модуль 2 : Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Елементи варіаційного числення / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, А. О. Володченко. – 2010. – 350 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/16600/, вільний).

Модуль 3 : Числові та функціональні ряди. Функції декількох змінних. Елементи теорії поля. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Рівняння математичної фізики / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. – 2011. – 383 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/21652/, вільний).

6. Вища математика : у 2 кн. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Київ : Либідь, 2003.

Кн. 1: Основні розділи / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін. ; За ред. Г. Л. Кулініча. – 400 с.

Кн. 2: Спеціальні розділи / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін. ; За ред. Г. Л. Кулініча. – 368 с.

7. Вища математика : у 2 ч. Ч. 2 : Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за

Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи ; За заг. ред. П. П. Овчинникова ; Пер. з рос. Є. В. Бондарчук, Ю. Ю. Кострицi, Л. П. Оніщенко. – 3-тє вид., випр. – Київ : Техніка, 2004. – 792 с.

8. Гончаров О. А. Чисельні методи розв'язання прикладних задач / О. А. Гончаров, Л. В. Васильєва, А. М. Юнда. – Суми : СДУ, 2020. – 142 с.

9. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : Ігнатекс – Україна, 2013. – 648 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://dspace.nuft.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/10062/1/56.pdf, вільний).

10. Колосов А. І. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» : у 2-х модулях. Модуль 2 : Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Функції багатьох змінних. Ряди [Електронний ресурс] / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 227 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/46338/, вільний.

11. Лиман Ф. М. Вища математика / Ф. М. Лиман, В. Ф. Власенко, С. В. Петренко. – Суми : Університетська книга, 2012. – 614 с.

12. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.

13. Петрук В. А. Вища математика з комп'ютерною підтримкою. Рівняння математичної фізики : навчальний посібник / В. А. Петрук, М. Б. Ковальчук, Н. В. Сачанюк-Кавецька. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 157 с.

14. Травкін Ю. І. Математика для економістів / Ю. І. Травкін, Л. М. Малярець. – Харків : ВД «ІНЖЕК», 2005. – 816 с.

15. Эдвардс Ч. Г. Дифференциальные уравнения и краевые задачи : моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB / Ч. Г. Эдвардс, Д. Э. Пенни. – М. : Вильямс, 2008. – 1104 с.

16. Bird J. O. Higher engineering mathematics / J. O. Bird. – Oxford, Burlington MA : Newnes, 2006. – 726 p.

Навчальне видання

$\boxed{\text{**КОЛОСОВ** Анатолій Іванович}}$,

ЯКУНІН Анатолій Вікторович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 126 – Інформаційні системи та технології*)

Відповідальний за випуск *Л. П. Вороновська*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2020, поз. 68Л

Підп. до друку 06.07.2021. Формат 60 × 84/16.
Електронний документ. Ум. друк. арк. 12,5.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.