МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

$\boxed{\text{А. І. Колосов}}$, А. В. Якунін

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 1

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти за спеціальністю
126 – Інформаційні системи та технології*)

**Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2021**

УДК [512.6+517](042.4)
К61

Колосов А. І. Вища математика. Модуль 1 : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 126 – Інформаційні системи та технології / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 157 с.

Автори:
д-р фіз.-мат. наук, проф. А. І. Колосов,
канд. техн. наук, доц. А. В. Якунін

Рецензент

Ламтюгова Світлана Миколаївна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 12 від 04.05.2021.

Конспект лекцій подано у стислому вигляді з відображенням основних складників дисципліни, що відповідають першому модулю навчання за спеціальністю 126 – Інформаційні системи та технології, для концентрації уваги на вузлових поняттях і положеннях математичного апарату. Послідовність, форма та стиль викладення узгоджені з усталеною структурою, наповненістю та теоретичним рівнем програм із вищої математики технічного університету.

Опрацювання студентами поданого матеріалу сприятиме підготовці до занять, поточного та підсумкового контролю з курсу вищої математики.

ЗМІСТ

Математика – не ізольована наука, а основа і ключ до всіх людських знань.
Л. Ейлер

Математика має на меті знайти загальні методи для досягнення ефективних результатів при мінімальних можливостях і витратах у різних сферах людської діяльності.
Д. Граве

ВСТУП

У конспекті лекцій викладено матеріал, що відповідає змістовим модулям першого семестру курсу вищої математики – Модуль 1 «Лінійна та векторна алгебра. Вступ до математичного аналізу. Інтегральне числення» – за діючою навчальною програмою для студентів спеціальності 126 – Інформаційні системи та технології. Головна увага приділяється розкриттю в стислій формі суті понять, їх взаємозв’язків без надмірної строгості викладу з об’єднуючою прикладною спрямованістю. Теоретичні відомості подаються коротко, чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Частина викладеного матеріалу розрахована на самостійне опрацювання. До всіх лекцій додаються контрольні запитання та практичні завдання для поглиблення і закріплення вивченого.

За основу взято цикл лекцій з вищої математики, які читаються студентам за відповідною спеціальністю підготовки бакалавра в Навчально-науковому інституті енергетичної, інформаційної та транспортної інфраструктури Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Конспект лекцій призначений для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зазначеної спеціальності та може бути використаний для студентів спеціальностей 122 – Комп’ютерні науки та 151 – Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології.

Змістовий модуль 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА
ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Лекція 1.1 Матриці, визначники та операції над ними

План

1.1.1 Матриці та дії над ними. Обернена матриця

1.1.2 Визначники та їх властивості. Обчислення визначників. Обчислення оберненої матриці за допомогою визначників (алгебраїчних доповнень)

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *матриця, операції над матрицями, обернена матриця, визначник, мінор і алгебраїчне доповнення, властивості визначника.*

1.1.1 Матриці та дії над ними. Обернена матриця

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з m ***рядків*** і n ***стовпців***.

Числа a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ називаються ***елементами*** матриці. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Матриці A і B називаються ***рівними***, якщо вони мають однаковий розмір $m \times n$ і їх відповідні елементи рівні:

$$A_{m\times n} = B_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}, \; i = \overline{1, m}; \; j = \overline{1, n} .$$

Матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, називається ***нульовою*** та позначається 0.

Матриця, у якої число стовпців дорівнює числу рядків $m = n$, називається ***квадратною*** n***-го порядку***.

Якщо $m \neq n$, то матриця називається ***прямокутною***.

Матриця, яка складається тільки з одного рядка $m = 1$, називається ***матрицею-рядком*** (***вектором-рядком***).

Матриця, яка складається тільки з одного стовпця $n = 1$, називається ***матрицею-стовпцем*** (***вектором-стовпцем***).

Для квадратної матриці A n-го порядку сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ називається ***головною діагоналлю***, а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$ – ***побічною діагоналлю***.

Головна діагональ матриці проходить з лівого верхнього кута у правий нижній, а побічна діагональ – з правого верхнього кута у лівий нижній.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що містяться вище (нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***нижнє*** (***верхнє***) ***трикутною***):

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}; \; U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця D, у якої всі елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною***.

Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається ***одиничною*** та позначається E.

Сумою матриць A і B однакового розміру $m \times n$ називається така матриця $C = A + B$ того самого розміру, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів вихідних матриць:

$$C = A + B \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n} \; .$$

Аналогічно вводиться ***різниця*** матриць:

$$C = A - B \iff c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n} \; .$$

Добутком матриці A розміру $m \times n$ ***та числа*** α називається така матриця $C = \alpha A$ того самого розміру, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента вихідної матриці на це число:

$$C = \alpha A \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n} \ .$$

Отже, *операції додавання та віднімання матриць і множення матриці на число виконуються поелементно*.

Приклад 1. Для заданих матриць A і B знайти їх вказану лінійну комбінацію $C = 2A - 3B$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

□ $$2A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -8 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \ 3B = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ -9 & -12 & 6 \end{pmatrix};$$

$$C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} -19 & 18 & -17 \\ 15 & 12 & -8 \end{pmatrix}. \quad ■$$

Добутком матриці A розміру $m \times p$ ***на матрицю*** B розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, кожний елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка першого співмножника A та j-го стовпця другого співмножника B:

$$C_{m\times n} = A_{m\times p} B_{p\times n} \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}, \ \ i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n} \ .$$

Зауваження. Добуток AB існує тільки тоді, коли розміри матриць A і B ***узгоджені***: перший співмножник A має число стовпців, яке дорівнює числу рядків другого співмножника B. Навіть коли обидва добутки AB і BA мають смисл, то в загальному випадку $AB \neq BA$.

Приклад 2. Для заданих матриць A і B узгоджених розмірів знайти добутки AB і BA:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -4\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}.$$

□ $$C_{2\times2}=A_{2\times3}\,B_{3\times2}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot3+3\cdot2+(-4)\cdot4 & -2\cdot(-1)+3\cdot0+(-4)\cdot1\\ 3\cdot3+2\cdot2+(-5)\cdot4 & 3\cdot(-1)+2\cdot0+(-5)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -2\\ -7 & -8\end{pmatrix};$$

$$D_{3\times3}=B_{3\times2}\,A_{2\times3}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot(-2)+(-1)\cdot3 & 3\cdot3+(-1)\cdot2 & 3\cdot(-4)+(-1)\cdot(-5)\\ 2\cdot(-2)+0\cdot3 & 2\cdot3+0\cdot2 & 2\cdot(-4)+0\cdot(-5)\\ 4\cdot(-2)+1\cdot3 & 4\cdot3+1\cdot2 & 4\cdot(-4)+1\cdot(-5)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-9 & 7 & -7\\ -4 & 6 & -8\\ -5 & 14 & -21\end{pmatrix}.\ ■$$

Якщо в матриці A поміняти місцями відповідні рядки та стовпці, то одержимо ***транспоновану*** матрицю A^T. Операція переходу від матриці A до матриці A^T називається ***транспонуванням***.

Приклад 3. $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & -4\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix};\quad A^T=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -5 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}.$

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо виконується умова:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

Приклад 4. Перевіряючи рівності $AB=E$ і $BA=E$ для заданих матриць A і B, переконатися, що A і B є взаємно оберненими матрицями:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -7\\ -3 & 5\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-5 & -7\\ -3 & -4\end{pmatrix}.$$

□ $$AB=\begin{pmatrix}4 & -7\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & -7\\ -3 & -4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot(-5)+(-7)\cdot(-3) & 4\cdot(-7)+(-7)\cdot(-4)\\ -3\cdot(-5)+5\cdot(-3) & -3\cdot(-7)+5\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E;$$

$$BA=\begin{pmatrix}-5 & -7\\ -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -7\\ -3 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-5\cdot 4+(-7)\cdot(-3) & -5\cdot(-7)+(-7)\cdot 5\\ -3\cdot 4+(-4)\cdot(-3) & -3\cdot(-7)+(-4)\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E. \quad ■$$

За допомогою операцій над матрицями можна розв’язувати різні задачі техніко-економічного змісту: обчислювати обсяги продукції, приріст обсягів виробництва, вартість виробленої продукції, розподіл виручки по підприємствам і таке інше.

Наступні приклади розберіть самостійно поза часу лекції.

Приклад 5. Обсяги виробництва трьома підприємствами чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задані відповідно матрицями A і B:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 12 & 22 & 9\\ 8 & 9 & 25 & 8\\ 6 & 13 & 34 & 11\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}9 & 15 & 18 & 7\\ 10 & 11 & 22 & 6\\ 6 & 7 & 29 & 15\end{pmatrix},$$

де рядкам відповідають підприємства, а стовпчикам – види продукції.

Знайти: 1) обсяг виробленої продукції за перше півріччя; 2) приріст обсягів продукції в другому кварталі порівняно з першим за видами та підприємствами; 3) вартість виробленої продукції за перше півріччя (в умовних одиницях) за видами та підприємствами, якщо $\lambda=3$ – курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

□ 1) Обсяг продукції за перше півріччя знайдемо як суму матриць:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 22 & 9 \\ 8 & 9 & 25 & 8 \\ 6 & 13 & 34 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 15 & 18 & 7 \\ 10 & 11 & 22 & 6 \\ 6 & 7 & 29 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 27 & 40 & 16 \\ 18 & 20 & 47 & 14 \\ 12 & 20 & 63 & 26 \end{pmatrix}.$$

2) Приріст обсягів продукції в другому кварталі порівняно з першим за видами та підприємствами знайдемо як різницю матриць:

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 18 & 7 \\ 10 & 11 & 22 & 6 \\ 6 & 7 & 29 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 12 & 22 & 9 \\ 8 & 9 & 25 & 8 \\ 6 & 13 & 34 & 11 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Аналізуючи отримані результати, бачимо, що на першому та другому підприємствах обсяги виробництва перших двох видів продукції зросли, а двох останніх – зменшились. На третьому підприємстві виробництво першого виду продукції не змінилося, другого та третього – зменшилося, а четвертого – зросло.

3) Вартість виробленої продукції за перше півріччя (в умовних одиницях) за видами та підприємствами знайдемо як добуток матриці на число:

$$K = \lambda \cdot C = 3 \cdot \begin{pmatrix} 14 & 27 & 40 & 16 \\ 18 & 20 & 47 & 14 \\ 12 & 20 & 63 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 81 & 120 & 48 \\ 54 & 60 & 141 & 42 \\ 36 & 60 & 189 & 78 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

Приклад 6. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею-рядком

$$A = (120 \quad 200 \quad 350).$$

Ця продукція реалізується в п’яти регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 9 & 10 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

де рядкам відповідають види продукції, а стовпчикам – регіони.

Знайти матрицю виручки за регіонами C.

□ Матрицю виручки за регіонами обчислимо як:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 120 & 200 & 350 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 9 & 10 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\,570 & 4\,300 & 4\,030 & 3\,880 & 4\,110 \end{pmatrix}. \ ■$$

Аналіз одержаних результатів показує, що у другому регіоні виручка – максимальна та складає 4 300 грошових одиниць.

Приклад 7. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми витрат i–го виду ресурсу на виробництво одиниці продукції j–го типу задані матрицею A. Кількість продукції кожного типу, яку виготовило підприємство за певний період часу, задана матрицею-стовпцем X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю відображена у вигляді матриці-рядка P:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 300 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 40 & 60 & 100 & 50 \end{pmatrix}.$$

Знайти: 1) S – матрицю повних витрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї вказаної продукції; 2) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів.

□ 1) Матриця повних витрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції обчислюється як добуток:

$$S = A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 + 1\,350 + 1\,500 \\ 800 + 300 + 900 \\ 1\,400 + 450 + 2\,400 \\ 400 + 750 + 900 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\,450 \\ 2\,000 \\ 4\,250 \\ 2\,050 \end{pmatrix}.$$

2) Повну вартість усіх витрачених ресурсів також можна знайти як матричний добуток:

$$C = P \cdot S = (40 \quad 60 \quad 100 \quad 50) \cdot \begin{pmatrix} 3\,450 \\ 2\,000 \\ 4\,250 \\ 2\,050 \end{pmatrix} =$$

$$= (138\,000 + 120\,000 + 425\,000 + 102\,500) = (785\,500). \quad \blacksquare$$

1.1.2 Визначники та їх властивості. Обчислення визначників. Обчислення оберненої матриці за допомогою визначників (алгебраїчних доповнень)

Кожній квадратній матриці A n-го порядку ставиться у відповідність число, яке позначається

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

і обчислюється за певним правилом, що наведене далі. Це число називається ***визначником*** (***детермінантом***) матриці A. Число n називають порядком визначника. ***Визначник n-го порядку*** часто позначають як Δ_n.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку Δ_n називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержується з визначника Δ_n видаленням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається за формулою: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Загальне правило обчислення визначника має рекурентний характер (визначник n-го порядку Δ_n виражається через визначники $(n-1)$-го порядку Δ_{n-1}):

а) *визначник першого порядку* $\Delta_1 \quad (n=1)$ *дорівнює самому елементу* a_{11} : $\quad \Delta_1 = a_{11}$;

б) *визначник* n *-го порядку* $\Delta_n \quad (n \geq 2)$ *дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення*:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}$$

(***розклад визначника за елементами першого рядка***).

Із загального правила можна одержати спрощені співвідношення для визначників другого та третього порядків:

1) визначник другого порядку Δ_2 обчислюється за формулою:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

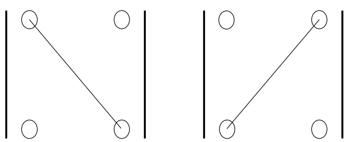
(*правило «хреста» (схема на рис. 1.1*):
визначник другого порядку Δ_2 *дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей*);

2) визначник третього порядку Δ_3 обчислюється за формулою

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} -$$

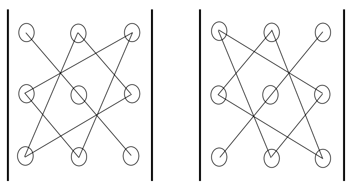
$$- a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}\,a_{11}$$

(*правило «трикутників» (схема на рис. 1.2*):



«+» «–»

Рисунок 1.1



«+» «–»

Рисунок 1.2

визначник третього порядку дорівнює сумі шести доданків, кожне з яких є добутком трьох елементів: три добутки елементів, розміщених на головній діагоналі й у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна головній діагоналі, беруться зі знаком «+», а *три добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі й у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна побічній діагоналі, беруться зі знаком* «−»).

Приклад 1. Обчислити визначник $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$ за правилом «хреста».

$$\square \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - (-4) \cdot 3 = 2. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти мінор M_{23} й алгебраїчне доповнення A_{23} елемента a_{23} визначника $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

$$\square \quad a_{23} = -1; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-4) \cdot 6 = 24;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1) \cdot 24 = -24. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Обчислити визначник, розкладаючи його за елементами першого рядка:

$$\text{а) } \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \text{б) } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad \text{а) } \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & -1\end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=-3(2-0)-2(-1-0)-4(-3+10)=-32\ ;$$

б) розв’язати самостійно. ■

Приклад 4. Обчислити визначник третього порядку за правилом «трикутників»:

$$\text{а) }\ \Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 9\end{vmatrix};\qquad \text{б) }\ \Delta_3=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 0\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}.$$

□ а) $\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 9\end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot 9+3\cdot 3\cdot 2+$

$$+(-1)\cdot 4\cdot 5-5\cdot(-2)\cdot 2-3\cdot(-1)\cdot 9-3\cdot 4\cdot 2=$$

$$=-36+18-20+20+27-24=-15;$$

б) розв’язати самостійно. ■

Основні властивості визначника

Примітка. Для скорочення формулювань будь-який рядок чи будь-який стовпець називатимемо ***рядом***.

Властивість 1. Сума добутків елементів будь-якого ряду на їх алгебраїчні доповнення не залежить від номера ряду й дорівнює значенню визначника:

– ***розклад визначника за*** i ***-м рядком***:

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}\ ;$$

– ***розклад визначника за*** j ***-м стовпцем***:

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}\ .$$

Наслідок. Визначник із нульовим рядом дорівнює нулю.

Властивість 2. Значення визначника не зміниться після заміни всіх його рядків відповідними стовпцями та навпаки.

Операція заміни всіх рядків визначника Δ_n відповідними стовпцями та навпаки називається ***транспонуванням*** визначника. Отриманий визначник Δ_n^T називається ***транспонованим***,

Властивість 3. Якщо поміняти місцями два паралельних ряди, то визначник змінить знак на протилежний, не змінившись за абсолютною величиною.

Властивість 4. Визначник із двома однаковими паралельними рядами дорівнює нулю.

Властивість 5. Спільний множник елементів будь-якого ряду можна виносити за знак визначника.

Іншими словами, *щоб помножити визначник на деяке число, треба на це число помножити всі елементи одного довільно вибраного ряду.*

Зауваження. Нагадаємо, щоб матрицю помножити на число, треба на це число помножити кожний елемент матриці в цілому.

Властивість 6. Визначник, у якого елементи двох паралельних рядів відповідно пропорційні, дорівнює нулю.

Властивість 7. Сума добутків елементів будь-якого ряду на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого паралельного йому ряду дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0, \quad i \neq j\,.$$

Властивість 8. Значення визначника не зміниться, якщо до всіх елементів якого-небудь ряду додати відповідні елементи іншого паралельного йому ряду, помножені на одне й те саме число.

Властивість 9. Якщо кожний елемент якого-небудь ряду є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких відповідний ряд складається з перших доданків, а в другому – з других доданків.

Зауваження. Для квадратних матриць A і B одного порядку справедливо:

$$\det(AB)=\det(BA)=\det A\cdot\det B.$$

Визначник, у якому всі елементи, що знаходяться нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***визначником верхнє трикутного вигляду*** (рис. 1.3). Аналогічно вводиться поняття визначника ***нижнє трикутного вигляду*** (рис. 1.4).

Будь-який визначник можна звести до трикутного вигляду, користуючись основними його властивостями.

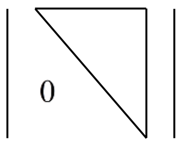


Рисунок 1.3

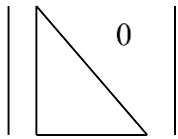


Рисунок 1.4

Теорема. Визначник трикутного вигляду дорівнює добутку елементів його головної діагоналі.

Обчислення оберненої матриці

Якщо визначник матриці A дорівнює нулю $\det A=0$, то матриця називається ***виродженою*** (***особливою*** або ***сингулярною***). Якщо ж визначник матриці A відмінний від нуля $\det A\neq 0$, то матриця називається ***невиродженою*** (***неособливою*** або ***регулярною***).

Матриця $\overline{A}$ з елементами $\overline{a}_{ij}$ називається ***приєднаною*** до матриці A, якщо $\overline{a}_{ij}=A_{ij}^{T}$, де A_{ij}^{T} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}^{T} транспонованої матриці A^{T}.

Теорема. Для будь-якої невиродженої квадратної матриці A n*-го порядку існує єдина обернена матриця* A^{-1}*, яка обчислюється за формулою:*

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\overline{A}.$$

Приклад 5. Упевнитися, що задана матриця A невироджена, і знайти обернену матрицю A^{-1}. Перевірити рівності $AA^{-1}=E$ і

$A^{-1}A = E$.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

□ а) $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 + 0 + 1 - 0 - 6 = 2 \neq 0$ –

матриця A невироджена. Отже, існує обернена матриця A^{-1}.

Знаходимо транспоновану матрицю A^T і обчислюємо алгебраїчні доповнення її елементів:

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_{11}^T = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12}^T = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13}^T = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22}^T = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{23}^T = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{31}^T = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{32}^T = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{33}^T = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

Формуємо приєднану матрицю $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 7/2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/2 & 3/2 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

Рівності $AA^{-1} = E$ і $A^{-1}A = E$ перевірте самостійно;

б) розв'язати самостійно. ■

Запитання для самоконтролю

1. Що таке матриця? Наведіть приклади матриць різного вигляду.
2. Як здійснюються операції додавання (віднімання) матриць і множення матриці на число?
3. Як здійснюється операція множення матриць? Які властивості цієї операції? Чи завжди існує добуток матриць?
4. Що таке транспонована матриця?
5. Що таке обернена матриця?
6. Що таке визначник?
7. Що таке мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника?
8. За яким правилом обчислюється значення визначника довільного n-го порядку?
9. Сформулюйте правила «хреста» і «трикутників» для обчислення відповідно визначників другого і третього порядку.
10. Сформулюйте основні властивості визначника.
11. Як знаходиться значення визначника трикутного вигляду?
12. Яка матриця називається невиродженою?
13. Як обчислюється обернена матриця?
14. Наведіть приклади застосування матриць і визначників у фаховій сфері.

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Для заданої квадратної матриці A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю A^{-1} і матрицю $B = AA^T - A^T A + A^2$.

Відповідь:

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -13 & -9 & 1 \\ -7 & -4 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 5 \\ -12 & 9 & 4 \\ -1 & -4 & 22 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Обчислити заданий визначник трьома способами:

а) розкладаючи його за елементами третього рядка;

б) розкладаючи його за елементами четвертого стовпця;

в) попередньо зводячи його до верхнє трикутного вигляду з одиницями на головній діагоналі з використанням основних властивостей визначника.

Проміжні визначники третього порядку обчислювати за правилом «трикутників».

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: $\Delta_4 = 60$.

Лекція 1.2 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

План

1.2.1 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язування за допомогою оберненої матриці та за формулами Крамера

1.2.2 Теорема Кронекера – Капеллі. Розв'язування систем методом Гауса послідовного вилучення змінних

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *системи лінійних алгебраїчних рівнянь, сумісна й несумісна системи, визначена та невизначена системи, матричний метод (метод оберненої матриці), метод Крамера, теорема Кронекера – Капеллі, метод Гауса, умова наявності ненульових розв’язків однорідної квадратної системи.*

1.2.1 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв’язування за допомогою оберненої матриці та за формулами Крамера

Система m ***лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) із*** n ***невідомими*** x_j $(j=\overline{1,n})$ виглядає так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

де a_{ij} $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ і b_i $(i=\overline{1,m})$ – задані числа, причому a_{ij} $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ – ***коефіцієнти*** при невідомих; b_i $(i=\overline{1,m})$ – ***вільні члени*** (***праві частини***).

Система, в якій число рівнянь m дорівнює числу невідомих n, називається ***квадратною*** n***-го порядку***.

Система називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю $b_i = 0$ $(i=\overline{1,m})$, і – ***неоднорідною***, якщо хоча б один із вільних членів відмінний від нуля.

Система називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв’язок, і ***несумісною*** (***суперечливою***), якщо вона не має жодного розв’язку. Сумісна система називається ***визначеною***, якщо її розв’язок єдиний, і ***невизначеною*** – в іншому разі.

Однорідна СЛАР завжди сумісна, бо має тривіальний (нульовий) розв’язок $x_j = 0$ $(j=\overline{1,n})$.

Уведемо матричні позначення:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$C=\left(A \mid B\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ {}_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

де X – ***матриця-стовпець невідомих*** розміру $n\times 1$; A – ***основна матриця*** системи, складена з коефіцієнтів при невідомих розміру $m\times n$; B – ***матриця-стовпець вільних членів*** (***правих частин***) розміру $m\times 1$; C – ***розширена матриця*** системи розміру $m\times(n+1)$.

Тоді СЛАР можна подати в матричній формі $AX=B$.

Теорема. Якщо основна матриця A *квадратної системи* $AX=B$ *невироджена (тобто,* $\det A\neq 0$*), то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою:* $X=A^{-1}B$.

□ Оскільки матриця A – невироджена, то існує обернена матриця A^{-1}. Тоді

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B;\quad \left(A^{-1}A\right)X=A^{-1}B;$$

$$EX=A^{-1}B;\quad X=A^{-1}B.\quad ■$$

Приклад 1. Розв'язати квадратну систему за допомогою оберненої матриці (***матричним методом***):

$$\text{а) }\begin{cases} 3x-2y-5z=-7 \\ 2x+y+2z=0 \\ 2x-y-3z=-4 \end{cases};\quad \text{б) }\begin{cases} 4x+3y=5 \\ 5x+2y=1 \end{cases}.$$

□ а) $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; $AX=B$;

$\det A=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-3\neq 0$ – матриця A невироджена.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-1; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=10;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-4; \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1; \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1; \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-16;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7; \quad A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -16 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}B; \quad X=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -16 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7+0-4 \\ -70+0+64 \\ 28+0-28 \end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} x=-1 \\ y=2 \\ z=0 \end{matrix};$$

б) розв'язати самостійно. ■

Розв'язання квадратної системи з невиродженою основною матрицею можна подати безпосередньо через визначники.

Для квадратної системи $AX = B$ визначник Δ_n, складений з коефіцієнтів при невідомих, називається ***основним визначником***:

$$\Delta_n = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

*Теорема (**правило Крамера**). Якщо основний визначник квадратної системи $AX = B$ відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою:*

$$x_j = \Delta_n^{(j)} / \Delta_n, \qquad j = \overline{1, n},$$

де $\Delta_n^{(j)}$ – ***допоміжний визначник***, одержаний з основного визначника Δ_n заміною j -го стовпця стовпцем вільних членів:

$$\Delta_n^{(j)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Приклад 2. Розв'язати квадратну систему ***методом Крамера***:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = -3 \\ 2x - y + 3z = -4 \end{cases}; \quad \text{б)} \begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 7x + 2y = 12 \end{cases}.$$

□ а) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$; $\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$;

$$\Delta^{(2)}=\begin{vmatrix}3&1&1\\1&-3&2\\2&-4&3\end{vmatrix}=0;\quad \Delta^{(3)}=\begin{vmatrix}3&-2&1\\1&-1&-3\\2&-1&-4\end{vmatrix}=8;\quad x=\frac{\Delta^{(1)}}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1;$$

$$y=\Delta^{(2)}/\Delta=0/-4=0;\quad z=\Delta^{(3)}/\Delta=8/-4=-2;$$

б) розв’язати самостійно. ■

1.2.2 Теорема Кронекера – Капеллі. Розв’язування систем методом Гауса послідовного вилучення змінних

Виділимо в матриці A розміру $m\times n$ будь-які k рядків і k стовпців $\left(1\le k\le \min\{m,n\}\right)$. Визначник, складений з елементів, які стоять на перетині виділених рядів, називається ***мінором*** M_k k-го порядку матриці A.

Рангом $rankA$ матриці A розміру $m\times n$ називається найбільший порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці.

Базисним мінором матриці A називається довільний відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці.

Елементарними перетвореннями матриці називаються наступні операції:

1) переставлення місцями будь-яких двох паралельних рядів;

2) множення елементів будь-якого ряду на довільне ненульове число;

3) додавання до всіх елементів будь-якого ряду відповідних елементів будь-якого іншого паралельного йому ряду, помножених на одне і те ж довільне число.

Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними***, якщо одну з них можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначається $A\sim B$.

Теорема. Еквівалентні матриці мають один і той же ранг:

$$A\sim B\ \Rightarrow\ rankA=rankB.$$

Іншими словами, *елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.*

Метод елементарних перетворень знаходження рангу матриці полягає у зведені даної матриці A розміру $m\times n$ за допомогою елементарних перетворень рядків і переставлення стовпців до еквівалентної східчастої верхнє трапецієвидної (зокрема, верхнє трикутної) матриці $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \ldots & \widetilde{a}_{1r} & \widetilde{a}_{1(r+1)} & \ldots & \widetilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \widetilde{a}_{2r} & \widetilde{a}_{2(r+1)} & \ldots & \widetilde{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \widetilde{a}_{1(r+1)} & \ldots & \widetilde{a}_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

в якій ненульові елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.

Тоді $rank\,A = rank\,\widetilde{A} = r$, де r – число ненульових рядків трапеції. За базисний мінор $\widetilde{M}_r$ матриці $\widetilde{A}$ можна взяти кутовий мінор:

$$\widetilde{M}_r=\begin{vmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \ldots & \widetilde{a}_{1r} \\ 0 & 1 & \ldots & \widetilde{a}_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Теорема Кронекера – Капеллі. *Система m лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими $AX = B$ сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг розширеної матриці $C = (A \mid B)$ дорівнює рангу основної матриці A: $rankC = rankA = r$. У разі сумісності:* 1) *якщо ранг цих матриць дорівнює числу невідомих $r = n$, то система має єдиний розв'язок (є визначеною);* 2) *якщо цей спільний ранг менше числа невідомих $r < n$, то система є невизначеною та має безліч розв'язків, які залежать від $n - r$ довільних сталих (параметрів) (рис. 1.5).*

Якщо сумісна система є невизначеною $rankC = rankA = r < n$, то ті r невідомі x_j, коефіцієнти при яких входять у вибраний базисний мінор M_r, називаються ***базисними***, а решта $n-r$ невідомі x_j називаються ***вільними***.

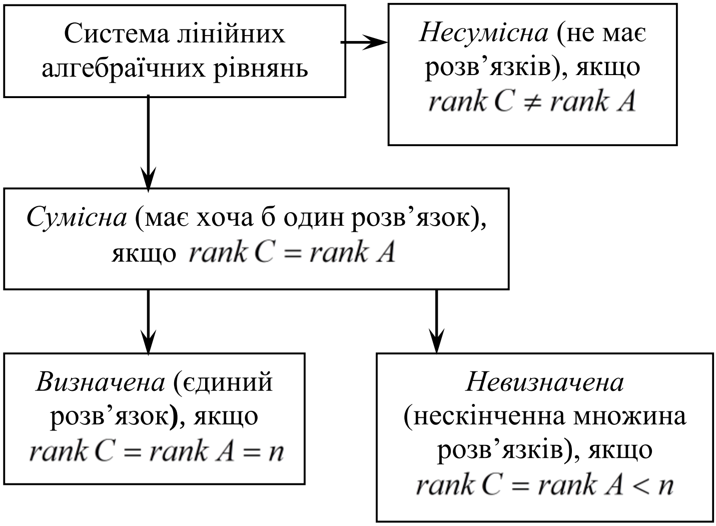


Рисунок 1.5

Приклад 1. Перевірити систему на сумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 3 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -1 \\ 6x_1 - 8_2 + 8x_3 = -7 \\ -9x_1 + 12x_2 - 12x_3 = 4 \end{cases}.$$

□ а) Для знаходження рангу використовуємо метод елементарних перетворень. За допомогою елементарних перетворень рядків розширеної матриці $C = (A \mid B)$ та переставлення стовпців тільки основної матриці A зводимо розширену матрицю C до східчастої форми з верхнє трапецієвидною основною матрицею A. Ранг основної матриці A дорівнює числу рядків трапеції. Якщо в розширеній матриці C нижче рядків трапеції A всі елементи нульові, то її ранг дорівнює рангу основної матриці $rankC = rankA$. В іншому разі ранг розширеної матриці на одиницю більший $rankC = rankA + 1$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 4 & -4 & 7 & -5\end{pmatrix};\quad C=\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2\\ 4 & -4 & 7 & -5 & 3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left|\begin{matrix}R_2:=R_2-R_1\\ R_3:=R_3-4R_1\end{matrix}\right|\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1\end{array}\right)\sim\left|R_3:=R_3-3R_2\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\end{array}\right)\sim\left|R_3:=-R_3/4\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left|S_2\leftrightarrow S_4\right|\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Звідси $rankA=2;\quad rankC=3$.

Оскільки $rankC\neq rankA$, то система несумісна.

б) $rankA=1$; $rankC=2$. (Обчислення провести самостійно).

Оскільки $rankC\neq rankA$, то система несумісна. ■

Метод Гауса (***метод вилучення***) дослідження та розв'язування довільної прямокутної системи $AX=B$ складається з двох основних етапів.

На першому етапі (***прямий хід*** методу Гаусса – зверху вниз) здійснюють послідовне виключення невідомих, зводячи розширену матрицю $C=\left(A \;\vdots\; B\right)$ до східчастої форми з верхнє трапецієвидною основною матрицею A, в якій відмінні від нуля елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці. Використовуються елементарні перетворення рядків розширеної матриці C і переставлення стовпців тільки основної матриці A (перенумеровування невідомих). У наслідок цього система зводиться до рівносильної східчастої форми:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{1r}\tilde{x}_r + \tilde{a}_{1(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_1 \\ \tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{2r}\tilde{x}_r + \tilde{a}_{2(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{x}_r + \tilde{a}_{r(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{rn}\tilde{x}_n = \tilde{b}_r \\ 0 = \tilde{b}_{r+1} \\ 0 = \tilde{b}_{r+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \tilde{b}_m \end{cases}.$$

Якщо хоча б один з вільних членів $\tilde{b}_j$ $\left(j = \overline{r+1,\, m}\right)$, що лежать нижче трапеції A, відмінний від нуля, то система несумісна, тобто не має розв'язків, і розв'язування системи закінчено.

Якщо ж усі вказані вільні члени дорівнюють нулю $\tilde{b}_j = 0$ $\left(j = \overline{r+1,\, m}\right)$, то система сумісна і $rankA = rankC = r$, а верхній кутовий мінор приймається за базисний. Відповідно, перші r невідомі $\tilde{x}_j$ $\left(j = \overline{1,\, r}\right)$ є базисними, а решта $n-r$ невідомі $\tilde{x}_j$ $\left(j = \overline{r+1,\, n}\right)$ – вільні. Тоді здійснюють перехід до другого етапу.

На другому етапі (***зворотний хід*** методу Гауса – знизу вгору) вільні невідомі приймають за довільні сталі (параметри): $\tilde{x}_j = C_{j-r}$ $\left(j = \overline{r+1,\, n}\right)$. Відкидають нульові рівняння (тотожності $0 = 0$). Переносять у праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержують систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих $\tilde{x}_j$ $\left(j = \overline{1,\, r}\right)$.

Цю систему розв'язують, підіймаючись знизу вгору. Спочатку з самого нижнього рівняння знаходять останнє базисне невідоме $\tilde{x}_r$. Потім одержане значення $\tilde{x}_r$ підставляють у передостаннє рівняння та визначають з нього $\tilde{x}_{r-1}$ і так далі, доки не знайдуть $\tilde{x}_1$.

Зауваження. Існують різні модифікації методу Гауса, що забезпечують обчислювальну стійкість комп'ютерних процедур.

Приклад 2. Розв’язати систему методом Гауса:

$$\text{а)}\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3-x_4+2x_5=4 \\ 2x_1+2x_2-x_3+4x_4+x_5=1 \\ 5x_1+3x_2+x_3+3x_4+3x_5=5 \\ 7x_1+5x_2 \qquad -x_4+5x_5=-1 \end{cases};\ \text{б)}\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-3x_4=2 \\ 2x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-6 \\ 3x_1+x_2-x_3+x_4=5 \end{cases}.$$

□ а) *Прямий хід*. Будемо використовувати елементарні перетворення рядків, починаючи з першого і далі вниз, розширеної матриці та переставлення стовпців основної матриці:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left| S_1 \leftrightarrow S_2 \right| \sim$$

$$\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 3R_1 \\ R_4 := R_4 - 5R_1 \end{array} \right| \sim$$

$$\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21 \end{array}\right) \sim \left| R_2 := -R_2/4 \right| \sim$$

$$\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} R_3 := R_3 + 4R_2 \\ R_4 := R_4 + 8R_2 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7 \end{array}\right) \end{array} \sim |R_3 \leftrightarrow R_4| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim |S_3 \leftrightarrow S_5| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_5 & x_4 & x_3 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3/4 & -3/2 & 5/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Система сумісна, але невизначена і

$$rankC = rankA = r = 3 < n = 5,$$

де x_2, x_1, x_5 – базисні невідомі; x_4, x_3 – вільні невідомі.

(Зверніть увагу на переставлення стовпців основної матриці, що приводить до відповідного переставлення (перенумеровування) змінних. Елементарні перетворення можна здійснювати по-різному. Звичайно намагаються стовпці не переставляти та працювати лише з рядками.)

Зворотний хід.

Вільні невідомі приймаємо за довільні сталі (параметри):

$$x_4 = C_1; \quad x_3 = C_2.$$

Відкидаємо тотожність $0 = 0$, яка відповідає останньому рядку. Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_2, x_1, x_5:

$$\begin{cases} x_2+3x_1+2x_5=4+C_1-2C_2 \\ x_1+\frac{3}{4}x_5=\frac{7}{4}+\frac{3}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2 \\ x_5=-7+8C_1 \end{cases}.$$

Цю систему розв’язуємо, підіймаючись знизу вгору, починаючи з останнього рівняння:

$$x_4=C_1;\;\; x_3=C_2;\;\; x_5=-7+8C_1;\;\; x_1=\frac{7}{4}+\frac{3}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2-$$

$$-\frac{3}{4}x_5=\frac{7}{4}+\frac{3}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2-\frac{3}{4}(-7+8C_1)=7-\frac{9}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2;$$

$$x_2=4+C_1-2C_2-3x_1-2x_5=4+C_1-2C_2-$$

$$-3\left(7-\frac{9}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2\right)-2(-7+8C_1)=-3-\frac{3}{2}C_1+\frac{7}{4}C_2.$$

Отже, розв’язок системи (***загальний розв’язок***) виглядає так:

$$x_1=7-\frac{9}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2;\;\; x_2=-3-\frac{3}{2}C_1+\frac{7}{4}C_2;\;\; x_3=C_2;$$

$$x_4=C_1;\quad x_5=-7+8C_1,\quad \text{де}\quad C_1,\, C_2 \text{ – довільні сталі.}$$

Якщо вільні невідомі покласти рівними нулю: $x_3=C_2=0$ і $x_4=C_1=0$, то із загального розв’язку дістанемо так званий ***опорний розв’язок***:

$$x_1=7;\;\; x_2=-3;\;\; x_3=0;\;\; x_4=0;\;\; x_5=-7,$$

як окремий випадок ***частинного розв’язку***, що відповідає конкретним значенням довільних сталих;

б) система несумісна (розв’язати самостійно). ■

Теорема. Однорідна квадратна система $AX=0$ *має ненульовий розв’язок (має безліч розв’язків) тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю* $\det A=0$. *Якщо цей визначник відмінний від нуля, то система має лише нульовий розв’язок.*

Приклад 3. Переконатись, що дана однорідна квадратна СЛАР має безліч розв’язків. Знайти її загальний розв’язок і будь-який ненульовий частинний розв’язок.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}; \qquad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$\square \text{ а) } \Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, система має безліч розв’язків. Розв’яжемо систему методом Гауса.

$$\textit{Прямий хід. } C = \left(A \mid 0\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{vmatrix} R_2 := R_2 - 3R_1 \\ R_3 := R_3 - 5R_1 \end{vmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & -13 & 0 \\ 0 & 9 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim \left|R_3 := R_3 - R_2\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left|R_2 := R_2/9\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -13/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $rankC = rankA = r = 2 < n = 3$. Тут x_1, x_2 – базисні невідомі; x_3 – вільне невідоме.

Зворотний хід. Відкидаємо тотожність $0 = 0$, яка відповідає останньому рядку. Вільне невідоме приймаємо за довільну сталу (параметр): $x_3 = C$.

Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільне невідоме. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3 \\ x_2 = (13/9)x_3 \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему, починаючи з останнього рівняння:

$x_3 = C$; $x_2 = (13/9)\ C$; $x_1 = 2x_2 - 4C = 2\cdot(13/9)\ C - 4C = -(10/9)\ C$.

Отже, загальний розв'язок:

$$x_1 = -(10/9)\ C;\quad x_2 = (13/9)\ C;\quad x_3 = C,\quad C \in R.$$

Покладемо $C = 9$. Тоді маємо ненульовий частинний розв'язок: $x_1 = -10$; $x_2 = 13$; $x_3 = 9$;

б) розв'язати самостійно. ■

Вирішення різних техніко-економічних проблем включає розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Наступний приклад розберіть самостійно поза часу лекції.

Приклад 4. Цех з виробництва будівельних сумішей спеціалізується на випуску трьох видів продукції, для виготовлення яких використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми витрат сировини на кожну одиницю виробів та об'єм витрат сировини за 1 день задані таблицею 1.1. Знайти щоденний об'єм випуску кожного виду будівельних сумішей.

Таблиця 1.1 – Норми та об'єми витрат сировини

Вид сировини	Норми витрат на кожну одиницю продукції			Витрати сировини за 1 день
	Будівельна суміш № 1	Будівельна суміш № 2	Будівельна суміш № 3	
S_1	4	5	2	4 700
S_2	5	2	4	5 500
S_3	2	3	1	2 500

□ Як шукані невідомі виступають щоденні об'єми випуску кожного виду продукції. Відповідно позначимо: x_1 – щоденний об'єм випуску будівельної суміші № 1; x_2 – щоденний об'єм випуску будівельної суміші № 2; x_3 – щоденний об'єм випуску будівельної суміші № 3. Використовуючи дані з таблиці 1.1 можна записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4\,700 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5\,500. \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2\,500 \end{cases}$$

Розв’яжемо систему, наприклад, методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 40 + 30 - 8 - 25 - 48 = -3;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4\,700 & 5 & 2 \\ 5\,500 & 2 & 4 \\ 2\,500 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 9\,400 + 50\,000 + 33\,000 -$$

$$-10\,000 - 27\,500 - 56\,400 = -1\,500;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4\,700 & 2 \\ 5 & 5\,500 & 4 \\ 2 & 2\,500 & 1 \end{vmatrix} = 22\,000 + 37\,600 + 25\,000 -$$

$$-22\,000 - 23\,500 - 40\,000 = -900;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 4\,700 \\ 5 & 2 & 5\,500 \\ 2 & 3 & 2\,500 \end{vmatrix} = 20\,000 + 70\,500 + 55\,000 -$$

$$-18\,800 - 62\,500 - 66\,000 = -1\,800;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1\,500}{-3} = 500; \quad x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-900}{-3} = 300;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1\,800}{-3} = 600.$$

Отже, цех щоденно випускає 500 одиниць будівельної суміші № 1, 300 одиниць будівельної суміші № 2 і 600 одиниць будівельної суміші № 3. ■

Запитання для самоконтролю

1. Який вигляд має система m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими?
2. Яка система називається сумісною? Несумісною? Визначеною? Невизначеною? Однорідною? Неоднорідною?

3. Що називається рангом матриці? Базисним мінором?
4. Які операції називаються елементарними перетвореннями матриці?
5. Які матриці називаються еквівалентними?
6. Як знаходиться ранг матриці методом елементарних перетворень?
7. Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі для лінійних систем.
8. Як знаходиться розв'язок квадратної СЛАР за допомогою оберненої матриці? Чи завжди можна безпосередньо розв'язати довільну квадратну СЛАР цим методом?
9. Як розв'язується квадратна СЛАР методом Крамера? Чи можна безпосередньо розв'язати довільну квадратну СЛАР цим методом?
10. Як розв'язується довільна СЛАР методом Гауса? Опишіть прямий хід і зворотній хід цього методу.
11. Сформулюйте умову наявності в однорідної квадратної СЛАР ненульових розв'язків.
12. Наведіть приклади застосування СЛАР у фаховій сфері.

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами: 1) методом Крамера; 2) за допомогою оберненої матриці; 3) методом Гауса. Зробити перевірку.

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}.$$

Відповідь: а) $(3;-2)$; б) $(2;-1;3)$.

Приклад 2. Знайти значення параметра α, при яких задана однорідна квадратна система має безліч розв'язків:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + \alpha x_2 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - \alpha x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + \alpha x_3 = 0 \end{cases}.$$

Відповідь: а) $\alpha = -6/5$; б) $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 13$.

Змістовий модуль 2 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА, ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ, ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Лекція 2.1 Комплексні числа. Векторні та комплексні функції дійсної змінної

План

2.1.1 Комплексні числа. Алгебраїчна, тригонометрична і показникова форми комплексного числа. Дії над комплексними числами

2.1.2 Многочлени та їх корені. Основна теорема алгебри. Розкладання многочлена на множники

2.1.3 Векторні та комплексні функції дійсної змінної. Лінії на комплексній площині. Поняття функції комплексної змінної

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *комплексне число, дійсна та уявна частини, модуль і аргумент, формули Муавра, основна теорема алгебри, розв'язування квадратного рівняння на комплексній площині, векторні та комплексні функції дійсної змінної, функція комплексної змінної.*

2.1.1 Комплексні числа. Алгебраїчна, тригонометрична і показникова форми комплексного числа. Дії над комплексними числами

Один зі способів побудови комплексних чисел полягає в тому, що множину дійсних чисел розширюють приєднанням до неї нового числового об'єкта – кореня i рівняння $x^2+1=0$.

Комплексним числом (в алгебраїчній формі) називається вираз $z = x + iy$, де x, y – дійсні числа; i – ***уявна одиниця***, $i^2 = -1$. Числа x і y називаються відповідно ***дійсною й уявною частинами*** комплексного числа z. Позначаються $x = \operatorname{Re} z$; $y = \operatorname{Im} z$.

Множина всіх комплексних чисел позначається C.

Будь-яке дійсне число x можна розглядати як комплексне число $z = x + i\,0 = x$, у якого уявна частина дорівнює нулю: $y = 0$. Отже, множина дійсних чисел R є підмножиною множини комплексних чисел C: $R \subset C$.

Комплексне число $z = iy = 0 + iy$, $y \neq 0$, у якого дійсна частина дорівнює нулю, а уявна частина відмінна від нуля, називається ***чисто уявним***.

Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються ***рівними***, якщо відповідно рівні їх дійсні та уявні частини: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

Комплексне число ***рівне нулю*** $z = 0$, якщо рівні нулю його дійсна та уявна частини: $z = 0 \Leftrightarrow x = 0$ i $y = 0$.

Зауваження. Для комплексних чисел не існують поняття «більше», «менше».

Комплексне число $-z = -x - iy$ називається ***протилежним*** до числа $z = x + iy$.

Два комплексних числа $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$, у яких дійсні частини однакові, а уявні відрізняються тільки знаком, називаються ***комплексно спряженими***. Очевидно, що $\bar{\bar{z}} = z$.

Операції додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеню комплексних чисел в алгебраїчній формі здійснюються за правилами дій над многочленами з врахуванням умови $i^2 = -1$ і зведенням подібних.

Зокрема, ***ділення*** комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_2 \neq 0$ виконується так: 1) треба чисельник і знаменник дробу z_1/z_2 домножити на число $\bar{z}_2$, спряжене до знаменника z_2; 2) врахувати, що $i^2 = -1$, і звести подібні; 3) почленно розділити чисельник на знаменник і одержати частку в алгебраїчній формі:

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Зауваження. Основні властивості розглянутих арифметичних операцій над комплексними числами співпадають з відповідними властивостями аналогічних операцій над дійсними числами.

Приклад 1. Виконати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі:

$$z=(2-3i)(4+i)-(1-2i)^2+10\,(5-7i):(3-4i).$$

□ Виконуємо дії як над многочленами:

$$z=(2-3i)(4+i)-(1-2i)^2+10\,(5-7i):(3-4i)=(8+2i-$$
$$-12i-3i^2-1+4i-4i^2+10\big((5-7i)(3+4i)\big)/\big((3-4i)(3+4i)\big)=$$
$$=8+2i-12i+3-1+4i+4+10\left(15+20i-21i-28i^2\right):\left(9-\right.$$
$$\left.-16i^2\right)=14-6i+10\left(15+20i-21i+28\right):(9+16)=14-6i+$$
$$+2\left(43-i\right):5=(70-30i+86-2i):5=156/5-(32/5)\,i.\ \blacksquare$$

Подібно до того, як дійсні числа можна зображати точками на координатній прямій, комплексні числа можна зображати точками на координатній площині. Якщо на площині введено прямокутну декартову систему координат Oxy, то між множиною всіх точок цієї площини і множиною комплексних чисел C можна встановити взаємно однозначну відповідність: кожному комплексному числу $z=x+iy$ відповідає єдина точка $M(x;y)$ і навпаки (рис. 2.1). Дійсні числа зображуються точками осі абсцис Ox, тому вісь Ox називається ***дійсною віссю***. Чисто уявні числа зображуються точками осі ординат Oy, тому вісь Oy називається ***уявною віссю***. Числу $z=0$ відповідає початок координат $O(0;0)$.

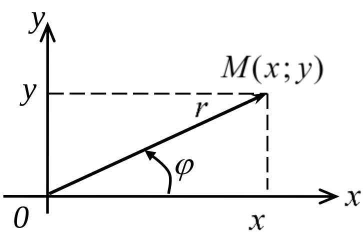


Рисунок 2.1

Координатна площина Oxy, яка зображає множину всіх комплексних чисел C, називається ***комплексною площиною*** C або z***-площиною***.

Комплексне число $z=x+iy$ також можна зобразити радіус-вектором $\overrightarrow{OM}\,(x;y)$, що виходить із початку координат $O(0;0)$ і закінчується в точці $M(x;y)$ (рис. 2.1).

Якщо на комплексній площині (рис. 2.1) ввести також полярну систему координат $Or\varphi$ з полюсом у початку декартової системи координат і полярною віссю, суміщеною з віссю Ox, то точку $M(x;y)$, що зображає комплексне число $z = x + iy$ можна задати полярними координатами $M(r;\varphi)$.

Полярний радіус r (довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$) називається ***модулем*** комплексного числа z і позначається $|z| = r$. Очевидно, що $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$.

Полярний кут φ (кут між радіус-вектором $\overrightarrow{OM}$ і полярною віссю Ox) називається ***аргументом*** комплексного числа z і позначається $Arg\, z = \varphi$. Аргумент φ, як кут повороту, визначається з точністю до сталого доданку вигляду $2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ (довільного числа повних обертів).

Для уникнення неоднозначності, що спостерігається при обчисленні аргументу комплексного числа, використовують поняття головного значення аргументу. Єдине значення φ, що задовольняє умову $-\pi < \varphi \leq \pi$, називається ***головним значенням аргументу*** і позначається $\arg z$. Отже, $Arg\, z = \arg z + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Головне значення аргументу визначається за формулою:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0; \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0; \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Зауваження. Для числа $z = 0$ модуль дорівнює нулю $r = |0| = 0$, а аргумент φ довільний.

Зауваження. У рівних комплексних чисел $z_1 = z_2$ модулі також рівні $r_1 = r_2$, а аргументи зв'язані співвідношенням $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, тобто відрізняються на $2\pi k$.

Використовуючи співвідношення $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, що випливають з розгляду відповідного прямокутного трикутника (рис. 2.1) і виражають зв'язок між декартовими і полярними координатами, комплексне число $z = x + iy$ можна подати у вигляді:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) .$$

Вираз $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ називається ***тригонометричною формою комплексного числа***. Перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми задається співвідношеннями:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ; \ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

Якщо звернутись до ***основної формули Ейлера***

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi ,$$

то від тригонометричної форми можна перейти до ***показникової форми комплексного числа*** $z = re^{i\varphi}$.

Приклад 2. Зобразити на комплексній площині та подати в тригонометричній і показниковій формах такі комплексні числа, що задані в алгебраїчній формі:

$$z_1 = -\sqrt{3} - i ; \ z_2 = 2 - 2i ; \ z_3 = 2i ; \ z_4 = -2 ; \ z_5 = -2 + i .$$

□ Побудуємо задані числа на комплексній площині (рис. 2.2). Знайдемо модуль і головне значення аргументу кожного з цих чисел та запишемо їх у тригонометричній і показниковій формах:

$$\underline{z_1 = -\sqrt{3} - i :} \ \ x_1 = -\sqrt{3}; \ \ y_1 = -1; \ \ |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2 ;$$

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}(y_1/x_1) - \pi, \ \ x_1 < 0, y_1 < 0 ;$$

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\left(1/\sqrt{3}\right) - \pi = \pi/6 - \pi = -5\pi/6 ;$$

$$z_1 = 2\left(\cos(-5\pi/6) + i\sin(-5\pi/6)\right); \ \ z_1 = 2e^{i(-5\pi/6)} .$$

$$\underline{z_2 = 2 - 2i :} \ \ x_2 = 2; \ \ y_2 = -2 ; \ \ |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 2\sqrt{2} ;$$

$$\arg z_2 = \operatorname{arctg}(y_2/x_2), \ \ x_2 > 0 ; \ \arg z_2 = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4 ;$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right); \ \ z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{-i(\pi/4)} .$$

$$\underline{z_3 = 2i :} \ \ x_3 = 0; \ \ y_3 = 2 ; \ \ |z_3| = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = 2 ;$$

$$\arg z_3 = \pi/2 , \ \ x = 0; \ y > 0 ;$$

$$z_3 = 2\left(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\right); \quad z_3 = 2e^{i(\pi/2)}.$$

$$\underline{z_4 = -2:} \quad x_4 = -2; \quad y_4 = 0; \quad |z_4| = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} = 2;$$

$$\arg z_4 = \operatorname{arctg}(y_4/x_4) + \pi, \quad x_4 < 0, y_4 \geq 0;$$

$$\arg z_4 = \operatorname{arctg} 0 + \pi = \pi; \quad z_4 = 2(\cos\pi + i\sin\pi); \quad z_4 = 2e^{i\pi}.$$

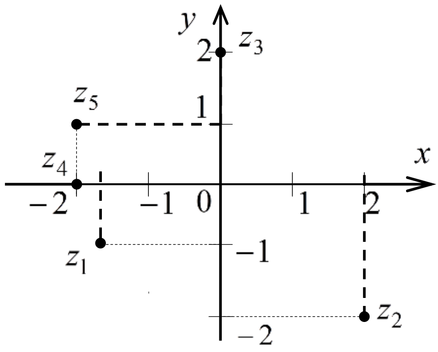


Рисунок 2.2

$$\underline{z_5 = -2 + i:}$$

$$x_5 = -2; \quad y_5 = 1;$$

$$|z_5| = \sqrt{x_5^2 + y_5^2} = \sqrt{5};$$

$$\arg z_5 = \operatorname{arctg}(y_5/x_5) + \pi,$$

$$x_5 < 0, y_5 \geq 0;$$

$$\arg z_5 = \operatorname{arctg}(-1/2) + \pi = \pi - \operatorname{arctg}(1/2);$$

$$z_5 = \sqrt{5}\, e^{i(\pi - \operatorname{arctg}(1/2))};$$

$$z_5 = \sqrt{5}\left(\cos(\pi - \operatorname{arctg}(1/2)) + i\sin(\pi - \operatorname{arctg}(1/2))\right). \quad \blacksquare$$

Дії над комплексними числами в тригонометричній
і показниковій формах

Якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ – два комплексні числа в тригонометричній формі, то їх добуток:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 +$$

$$+ i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Добутком двох комплексних чисел z_1 і z_2 є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів, а аргумент – сумі аргументів співмножників.

Якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ – два комплексні числа в тригонометричній формі, причому z_2 відмінне від нуля $z_2 \neq 0$, то їх частка:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= (r_1/r_2)\cdot(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Часткою z_1/z_2 *двох комплексних чисел* z_1 *і* z_2*, де дільник* z_2 *відмінний від нуля* $z_2 \neq 0$*, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого* z_1 *і дільника* z_2*, а аргумент – різниці аргументів діленого* z_1 *і дільника* z_2.

Зауваження. Аналогічно знаходяться добуток і частка комплексних чисел z_1 *і* z_2, поданих у показниковій формі:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Натуральним n***-м степенем*** z^n комплексного числа z називається комплексне число, отримане множенням числа z самого на себе n раз, де n – натуральне число.

Із правила множення комплексних чисел у тригонометричній формі випливає ***перша формула Муавра***:

$$z^n = (r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Приклад 3. Знайти степінь z^8, де $z = 1 + i\sqrt{3}$, і результат записати в алгебраїчній формі.

□ Подамо число $z = 1 + i\sqrt{3}$ у тригонометричній формі:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \varphi = \arg z = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}/1) = \pi/3;$$

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)).$$

За першою формулою Муавра:

$$z^8 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^8 = \left(2\left(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)\right)\right)^8 =$$
$$= 2^8\left(\cos(8\pi/3) + i\sin(8\pi/3)\right).$$

Розкриємо дужки і результат подамо в алгебраїчній формі:

$$z^8 = 2^8\cos(8\pi/3) + i\,2^8\sin(8\pi/3) = 256\cos(2\pi/3) + i\cdot 256 \times$$
$$\times\sin(2\pi/3) = 256\cdot(-1/2) + i\,256\cdot\left(\sqrt{3}/2\right) = -128 + 128\sqrt{3}i\,. \ \blacksquare$$

Коренем n***-го степеня*** $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа z називається таке комплексне число w, n-й степінь якого дорівнює z: $w^n = z$.

Очевидно, що корінь n-го степеня з нуля дорівнює нулю: $\sqrt[n]{0} = 0$. *Якщо комплексне число* z *відмінне від нуля* $z \neq 0$*, то корінь* n*-го степеня* $\sqrt[n]{z}$ *має рівно* n *різних значень*, що визначаються за ***другою формулою Муавра***:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\cdot\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; $\sqrt[n]{r}$ – арифметичне значення кореня з додатного числа. Значення кореня, що одержується при $k = 0$, часто називають ***головним***.

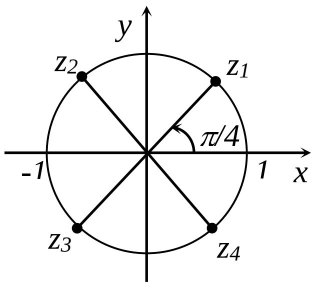


Рисунок 2.3

Приклад 4. Знайти всі значення кореня четвертого степеня $\sqrt[4]{-1}$.

□ Запишемо підкореневе число -1 у тригонометричній формі:

$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$ (див. рис. 2.3).

За другою формулою Муавра:

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\left((\pi + 2\pi k)/4\right) + \right.$$
$$\left. + i\sin\left((\pi + 2\pi k)/4\right)\right), \text{ де } k = 0,1,2,3.$$

Тобто коренями є комплексні числа:

$$z_1 = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(1 + i) \quad \text{– головне значення;}$$

$$z_2 = \cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(-1+i);$$
$$z_3 = \cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(-1-i);$$
$$z_4 = \cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(1-i),$$
які зображено на рисунку 2.3. ■

На комплексній площині всі корені n-го степеня $\sqrt[n]{z}$ з ненульового комплексного числа $z \neq 0$ зображуються вершинами правильного n-кутника, вписаного в коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{r}$.

Зауваження. Хоча б один корінь n-го степеня з додатного дійсного числа буде дійсним.

2.1.2 Многочлени та їх корені. Основна теорема алгебри. Розкладання многочлена на множники

Функція комплексної змінної
$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$
називається ***многочленом n-го степеня*** стандартного вигляду.

Тут z – комплексний аргумент: n – натуральний степінь многочлена; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – сталі комплексні ***коефіцієнти***; a_0 називається ***старшим коефіцієнтом***, причому $a_0 \neq 0$; a_n називається ***вільним членом***.

Теорема Безу. *При діленні многочлена $P_n(z)$ на різницю $z - a$ остача від ділення дорівнює $P_n(a)$.*

□ $P_n(z) = Q_{n-1}(z) \cdot (z-a) + R$. Нехай $z \to a$, тоді $P_n(a) = R$. ■

Наслідок. Якщо a – корінь многочлена $P_n(z)$, то цей многочлен $P_n(z)$ ділиться без остачі на різницю $z - a$, тобто розкладається на множники
$$P_n(z) = Q_{n-1}(z) \cdot (z-a),$$
де частка $Q_{n-1}(z)$ – многочлен на одиницю меншого степеня.

Основна теорема алгебри. *Будь-який многочлен* $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n \ge 1$ *має хоча б один корінь (дійсний чи комплексний).*

Наслідок 1. Будь-який многочлен $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n \ge 1$ *має рівно* n *коренів, серед яких можуть бути однакові.*

Наслідок 2. Будь-який многочлен $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n \ge 1$ *розкладається на множники у вигляді:*

$$P_n(z) = a_0 (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m},$$

де a_0 – старший коефіцієнт; $z_1, z_2, \dots, z_m$ – різні (дійсні чи комплексні) корені; $k_1, k_2, \dots, k_m$ – відповідні кратності цих коренів, причому $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Корені квадратного рівняння $az^2 + bz + c = 0$ $(a \ne 0)$ з комплексними коефіцієнтами a, b, c знаходяться за відомими формулами:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad D = b^2 - 4ac,$$

де $\sqrt{D}$ – одне зі значень квадратного кореня з дискримінанта D.

На множині комплексних чисел для коренів квадратного рівняння залишається справедливою теорема Вієта:

$$z_1 + z_2 = -b/a, \quad z_1 z_2 = c/a.$$

Приклад 1. Розв’язати квадратне рівняння:

а) $4z^2 - 8z + 5 = 0$; б) $z^2 + (5 + 4i)z + 10i = 0$.

□ а) $D = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = -16$; $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$ – головне значення кореня; $z_{1,2} = \dfrac{8 \pm 4i}{2 \cdot 4} = 1 \pm \dfrac{1}{2} i$.

б) $D = (5 + 4i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10i = 25 + 40i + 16i^2 - 40i = 9$;

$\sqrt{D} = 3$ – арифметичне значення кореня;

$$z_1 = \frac{-(5+4i)-3}{2\cdot 1} = -4-2i\,; \quad z_2 = \frac{-(5+4i)+3}{2\cdot 1} = -1-2i\,. \ \blacksquare$$

2.1.3 Векторні та комплексні функції дійсної змінної. Лінії на комплексній площині. Поняття функції комплексної змінної

Нехай у декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$ деяка просторова лінія L (рис. 2.4) задана в параметричній формі:

$$L: \ x = x(t); \ \ y = y(t); \ \ z = z(t), \quad t \in (a;\, b)\,.$$

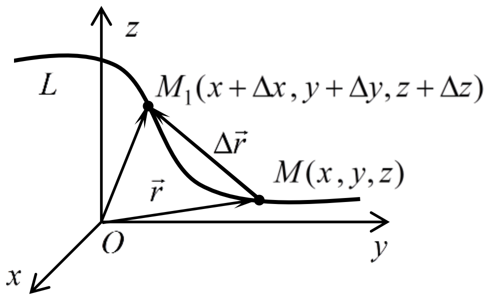


Рисунок 2.4

Тоді радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ довільної точки $M(x, y, z)$ кривої L визначається за допомогою рівності:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} =$$

$$= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\,.$$

Отже, радіус-вектор довільної точки просторової кривої може розглядатися як деяка функція аргументу t. У разі зміни параметра t може змінюватися як модуль вектора $\vec{r}(t)$, так і його напрям, або тільки модуль чи напрям.

Якщо кожному значенню змінної t із деякого проміжку $(a;\, b)$ поставлено у відповідність один і тільки один радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то кажуть, що на проміжку $(a;\, b)$ визначено ***вектор-функцію*** $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ***скалярного аргументу*** t:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\,.$$

Просторову криву L, утворену за допомогою руху кінця радіус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ під час зміни t на проміжку $(a;\, b)$, називають графіком вектор-функції або ***годографом***.

Комплексна функція z ***дійсної змінної*** t кожному значенню t з деякої непорожньої множини D дійсних чисел за певним законом ставить у відповідність одне єдине значення комплексної змінної z з деякої області E комплексної площини. Комплексна функція $z = z(t)$ дійсної змінної t визначається рівністю: $z = x(t) + i\,y(t)$, $t \in D$, де $x(t)$ та $y(t)$ – задані дійсні функції (відповідно дійсна і уявна частини змінної $z = z(t)$).

Функція $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$ в ***комплексно-параметричній формі*** задає деяку плоску лінію L. Параметричні рівняння цієї лінії: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$.

Комплексній змінній $z = z(t)$ відповідає вектор-функція.

Приклад 1. Визначити вид і зобразити на комплексній площині лінію, задану рівнянням $z = 3\cos t + 3i\sin t$.

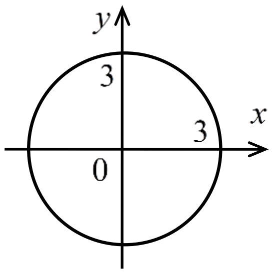


Рисунок 2.5

□ Щоб визначити вид лінії, підставимо в її рівняння $z = x + i\,y$ і зведемо його до відповідного стандартного вигляду. Потім побудуємо цю лінію:

$x + iy = 3\cos t + 3i\sin t$; $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ –

коло радіуса $r = 3$ з центром у початку координат, задане в параметричній формі (рис. 2.5). Його можна задати рівнянням $|z| = 3$. Канонічне рівняння кола $x^2 + y^2 = 9$. ■

Для геометричного тлумачення поняття функції комплексної змінної розглядаються два екземпляри площини комплексних чисел: z***-площина*** $z = x + i\,y$ і w***-площина*** $w = u + i\,v$.

Нехай на z-площині задана довільна непорожня множина точок D. Якщо кожній точці $z = x + i\,y$ множини D за певним законом f поставлено у відповідність одну точку $w = u + i\,v$ (або декілька точок) w-площини, то говорять, що на множині D задано однозначну (або багатозначну) ***комплексну функцію комплексної змінної*** $w = f(z)$. D називається ***множиною визначення*** функції $w = f(z)$, а множина E усіх значень w, що приймає функція, називається ***множиною значень*** цієї функції.

Розглянемо основні функції комплексної змінної.

Степенева функція з натуральним показником n має вигляд $w = z^n$, де $n \in N$. Степенева функція $w = z^n$ визначена на всій комплексній площині та однозначна.

Коренева функція має вигляд $w = z^p$, де $p = m/n$ – нескоротний правильний дріб: $0 < m/n < 1,\ m,\ n \in N$.

Коренева функція (радикал) $w = z^p$ визначена на всій комплексній площині та багатозначна.

Показникова (***експоненціальна***) ***функція*** комплексної змінної визначається рівністю $w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$. На дійсній осі $y = 0$ ця функція збігається з дійсною експонентою e^x. Зберігається основне правило: при множенні експонент їх показники додаються $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. Справедливі також співвідношення:

$$e^{z_1}\big/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}; \quad \left(e^z\right)^n = e^{nz}.$$

Модуль комплексної експоненти $\left|e^z\right| = e^x$, а аргумент $Arg\, e^z = y + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Отже, ця функція є періодичною з уявним періодом $2\pi i$: $e^{z+2\pi n i} = e^z$.

Тригонометричні функції комплексного аргументу визначаються за допомогою ***основної формули Ейлера*** $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ та узагальнюють відповідні дійсні функції:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}; \quad ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Оскільки комплексна експонента e^z є періодичною з уявним періодом $2\pi i$, то тригонометричні функції $\sin z$ і $\cos z$ також періодичні на всій комплексній площині з дійсним періодом 2π, а $tg\, z$ і $ctg\, z$ – з дійсним періодом π:

$$\sin z = \sin(z+2\pi); \quad \cos z = \cos(z+2\pi);$$

$$tg\, z = tg\,(z+\pi); \quad ctg\, z = ctg\,(z+\pi).$$

Причому, на відміну від дійсних функцій, на всій комплексній площині $\sin z$ і $\cos z$ є необмеженими:

$$|\cos z| \to +\infty, \quad |\sin z| \to +\infty \quad \text{при} \quad y \to \pm\infty.$$

Зауваження. Для тригонометричних функцій комплексного аргументу залишаються справедливими основні тотожності (синус і косинус суми, різниці та ін.).

Приклад 2. Знайти $\cos(3+4i)$. Результат подати в алгебраїчній формі, округлюючи дійсну та уявну частини до чотирьох значущих знаків.

$$\Box \quad \cos(3+4i) = \frac{e^{i(3+4i)} + e^{-i(3+4i)}}{2} = \frac{e^{-4}e^{3i} + e^{4}e^{-3i}}{2} =$$

$$= \left(e^{-4}(\cos 3 + i\sin 3) + e^{4}(\cos 3 - i\sin 3)\right)/2 =$$

$$= \left(\cos 3 \cdot (e^{-4} + e^{4}) - i\sin 3 \cdot (e^{4} - e^{-4})\right)/2 =$$

$$= \frac{e^{4} + e^{-4}}{2}\cos 3 - i\,\frac{e^{4} - e^{-4}}{2}\sin 3 \approx -27{,}03 - 3{,}851i. \quad \blacksquare$$

Логарифмічна функція $w = Ln\, z$ комплексної змінної визначається як обернена до показникової:

комплексне число $w = Ln\, z$ називається ***натуральним логарифмом*** ненульового комплексного числа z, якщо виконується рівність $e^{w} = z$. Звідси $Ln\, z = \ln|z| + i\, Arg\, z$.

Функція $w = Ln\, z$ є нескінченнозначною і визначена на всій комплексній площині, за винятком початку координат $z = 0$. Якщо для аргументу $z \neq 0$ обмежитися його головним значенням $-\pi < \arg z \leq \pi$, то одержимо ***головне значення логарифму*** $\ln z = \ln|z| + i\arg z$.

Зауваження. Якщо число z – дійсне додатне, тоді головне значення аргументу $\arg z = 0$ і головне значення логарифму співпадає зі звичайним натуральним логарифмом $\ln z = \ln|z|$.

На логарифм комплексної змінної поширюються основні властивості звичайного логарифму дійсного аргументу:

$$Ln(z_1 z_2) = Ln\, z_1 + Ln\, z_2\,; \quad Ln\left(z_1/z_2\right) = Ln\, z_1 - Ln\, z_2\,;$$

$$Ln(z^n) = n\, Ln\, z\,.$$

За допомогою логарифмічної функції визначаються:

а) ***загальна степенева функція*** $w = z^a = e^{a\, Ln\, z}$, де показник $a = \alpha + i\beta$ – довільне комплексне число. Ця функція багатозначна, її ***головне значення*** $w = e^{a \ln z}$;

б) ***загальна показникова функція*** $w = a^z = e^{z\, Ln\, a}$, де основа $a = \alpha + i\beta \neq 0$ – довільне ненульове комплексне число. Ця функція багатозначна, її ***головне значення*** $w = e^{z \ln a}$;

в) ***показниково-степенева функція*** $w = z_1^{\,z_2} = e^{z_2\, Ln\, z_1}$, де основа відмінна від нуля $z_1 \neq 0$. Ця функція нескінченнозначна, її ***головне значення*** $w = e^{z_2 \ln z_1}$.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте означення комплексного числа. Як записується комплексне число в алгебраїчній формі?
2. Наведіть умову рівності двох комплексних чисел в алгебраїчній формі.
3. Чим відрізняється між собою пара комплексно спряжених чисел z і $\bar{z}$, що задані в алгебраїчній формі?
4. Що служить геометричним зображенням комплексного числа та всієї множини комплексних чисел?
5. Як розміщені на комплексній площині точки, що відповідають парі комплексно спряжених чисел z і $\bar{z}$?
6. Порівняйте модулі та аргументи пари комплексно спряжених чисел z і $\bar{z}$.
7. Як розміщені на комплексній площині точки, що відповідають парі протилежних комплексних чисел z і $-z$?
8. Як зв’язані між собою модулі та аргументи двох рівних комплексних чисел $z_1 = z_2$?

9. Як обчислити модуль та головне значення аргументу комплексного числа?
10. Як виконуються операції додавання (віднімання), множення та ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі?
11. Якими властивостями характеризуються арифметичні операції з комплексними числами? Чи відрізняються ці властивості від аналогічних для випадку дійсних чисел?
12. Наведіть тригонометричну та показникову форми комплексного числа.
13. Як виконуються операції множення та ділення комплексних чисел в тригонометричній та показниковій формах?
14. Які арифметичні операції зручно виконувати в алгебраїчній, а які – в тригонометричній чи показниковій формах?
15. Якщо розглядати комплексні числа як плоскі вектори, то чим відрізняється добуток комплексних чисел від скалярного і векторного добутку векторів?
16. Як обчислити натуральний степінь комплексного числа? Проілюструйте прикладами.
17. Як обчислити корінь n-го степеня з комплексного числа? Проілюструйте прикладами.
18. Скільки різних значень має корінь n-го степеня з комплексного числа? Як розміщені ці значення на комплексній площині?
19. Який вигляд має розклад многочлена на множники на множині комплексних чисел?
20. Що називається векторною функцією дійсної змінної? Що таке годограф вектор-функції?
21. Що називається комплексною функцією дійсної змінної? Що служить графіком такої неперервної функції?
22. Що називається комплексною (комплекснозначною) функцією комплексної змінної?
23. Наведіть основну формулу Ейлера.
24. Якими формулами виражається зв'язок тригонометричних функцій з комплексною експонентою e^z?
25. Як визначається комплексна логарифмічна функція $Ln\,z$ та її головне значення $\ln z$?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Обчислити суму, різницю, добуток і частку заданих комплексних чисел: $z_1 = -4 + 5i;\ z_2 = 3 - 4i.$

Відповідь: $z_1 + z_2 = -1 + i;\quad z_1 - z_2 = -7 + 9i;$

$$z_1 \cdot z_2 = 8 + 31i;\quad z_1 / z_2 = -32/25 - (1/25)i.$$

Приклад 2. Комплексне число $z = -1 + i\sqrt{3}$ подати у тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині як точку та радіус-вектор.

Відповідь: $z = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right);\ \ z = 2e^{i(2\pi/3)}.$

Приклад 3. Для заданого комплексного числа z знайти степінь z^6 і результат подати в тригонометричній, показниковій та алгебраїчній формах: $z = 1 - i.$

Відповідь:

$$z = 8\left(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\right);\ \ z = 8e^{i(\pi/2)};\ \ z = 8i.$$

Приклад 4. Знайти корені рівняння і подати їх в алгебраїчній формі: $z^6 + 64 = 0.$

Відповідь: $z_1 = \sqrt{3} + i;\ z_2 = 2i;\ z_3 = -\sqrt{3} + i;$

$$z_4 = -\sqrt{3} - i;\ \ z_5 = -2i;\ \ z_6 = \sqrt{3} - i.$$

Приклад 5. Задано квадратний тричлен $P(z) = az^2 + bz + c$ з дійсними коефіцієнтами a, b, c і комплексною змінною z. Знайти корені z_1 і z_2 заданого квадратного тричлена на множині комплексних чисел (в алгебраїчній формі $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$), розкласти тричлен на множники $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$ і перевірити теорему Вієта $z_1 + z_2 = -b/a$; $z_1 z_2 = c/a$.

$$P(z) = 5z^2 + 8z + 5.$$

Відповідь: $z_1 = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$; $z_2 = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$;

$$P(z) = 5\left(z + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)\left(z + \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right); \quad z_1 + z_2 = -\frac{8}{5}; \; z_1 z_2 = 1.$$

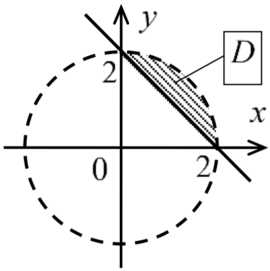


Рисунок 2.6

Приклад 6. На комплексній площині зобразити область D, що задана нерівностями: $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z - 2 \geq 0$, $|z| < 2$.

Відповідь: шукана область D зображена на рисунку 2.6.

Приклад 7. Обчислити значення заданої функції $w = f(z)$ у зазначеній точці z_0 і результат подати у вигляді комплексного числа в алгебраїчній формі, округлюючи дійсну та уявну частини до чотирьох значущих знаків: $w = z^2 \sin(i\pi\bar{z})$, $z_0 = -1 + 2i$.

Відповідь:

$$w_0 = -2(e^{\pi} - e^{-\pi}) + i(3/2)(e^{\pi} - e^{-\pi}) \approx -46{,}19 + 34{,}65i.$$

Лекція 2.2 Вступ до математичного аналізу. Теорія границь

План

2.2.1 Змінні та сталі величини. Нескінченно малі і нескінченно великі змінні величини та їх властивості

2.2.2 Границя змінної величини. Властивості границь

2.2.3 Перша та друга стандартні границі. Невизначеності та їх розкриття

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *сталі та змінні величини, нескінченно малі та нескінченно великі величини, границя, властивості границь, розкриття невизначеностей, стандартні границі.*

2.2.1 Змінні та сталі величини. Нескінченно малі і нескінченно великі змінні величини та їх властивості

Сталою величиною або ***константою*** називається величина, яка не змінює свого значення в умовах задачі, що розглядається. Звичайно сталі величини позначаються малими (інколи великими) буквами із початку латинського алфавіту $a, b, c, d, \ldots$.

Змінною величиною називається величина, яка може набувати різних значень в умовах задачі, що розглядається. Звичайно змінні величини позначаються малими (інколи великими) буквами з кінця латинського алфавіту $\ldots, w, x, y, z$.

Сукупність всіх числових значень змінної величини утворює її ***область значень***.

Змінна x є ***упорядкована величина***, якщо про кожне з двох будь-яких її значень можна сказати, яке з них попереднє і яке наступне.

Окремим випадком упорядкованої змінної величини є ***числова послідовність*** $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$. Тут при $i < k$ значення x_i попереднє, а x_k – наступне незалежно від того, яке з цих значень більше.

Змінна величина x називається ***обмеженою***, якщо всі її значення за модулем не перевищують деякого додатного числа M протягом всього процесу змінювання: $\exists M > 0, \forall x: |x| \leq M$. В іншому випадку змінна величина називається ***необмеженою***.

Змінна величина x називається ***зростаючою***, якщо в процесі змінювання її значення не зменшуються, тобто кожне наступне значення неменше попереднього. Позначається $x \nearrow$.

Змінна величина x називається ***спадною***, якщо в процесі змінювання її значення не збільшуються, тобто кожне наступне значення не більше попереднього. Позначається $x \searrow$.

Зростаючі та спадні змінні величини називаються ***монотонними***. Монотонна величина називається ***строго монотонною***, якщо її значення задовольняють відповідну строгу нерівність.

Наприклад:

а) змінна величина $x_n = 2^n$, $n \in N$ є строго зростаючою $x_n = 2^n \nearrow$, оскільки $x_{n+1} = 2^{n+1} > x_n = 2^n$, $n \in N$;

б) змінна величина $y_n = (1/2)^n$, $n \in N$ є строго спадною $y_n = (1/2)^n \searrow$, оскільки $y_{n+1} = (1/2)^{n+1} < y_n = (1/2)^n$, $n \in N$;

в) змінна величина $z_n = (-2)^n$, $n \in N$ є немонотонною, оскільки, зокрема, $z_3 = (-2)^3 \le z_2 = (-2)^2$; $z_4 = (-2)^4 \ge z_3$;

г) площа S правильного вписаного в коло многокутника при подвоєнні його сторін є монотонно зростаючою величиною.

Підкреслимо, що величини з пунктів б), г) є обмеженими, а величини з пунктів а) і в) – необмежені.

Змінна величина x називається ***нескінченно малою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються меншими будь-якого фіксованого додатного числа ε.

Іншими словами, змінна величина x називається нескінченно малою, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий момент t_ε процесу змінювання, що у всі наступні моменти $t > t_\varepsilon$ значення змінної величини x за модулем менші цього числа ε:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon, \forall t > t_\varepsilon : |x| < \varepsilon.$$

Нескінченно малі величини позначаються звичайно малими буквами грецького алфавіту $\alpha, \beta, \ldots$. Те, що змінна величина α є нескінченно малою, позначається так: $\alpha \to 0$ або $\lim \alpha = 0$.

Наприклад:

а) $\alpha = 10\ 000/n^2 \to 0$. Зокрема, якщо $\varepsilon = 0{,}01$, то нерівність $|\alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow |10\ 000/n^2| < 0{,}01$ виконується для всіх $n > n_\varepsilon = 1000$;

б) Змінні величини $x_n = 1 + (-1)^n$ і $y_n = n^{\cos \pi n}$ не є нескінченно малими.

Доведення основних властивостей нескінченно малих величин ґрунтується на їх означенні та властивостях модуля.

Теорема 1. Нескінченно мала величина є обмеженою:

$$\alpha \to 0 \ \Rightarrow \ \exists M > 0 : \ |\alpha| \le M .$$

Теорема 2. Сума (різниця) двох нескінченно малих величин *також є нескінченно малою величиною*:

$$\alpha \to 0 \ i \ \ \beta \to 0 \Rightarrow \ \alpha \pm \beta \to 0 . \quad \text{Символічний запис} \quad 0 \pm 0 = 0 .$$

Теорема 3. Добуток нескінченно малої величини на обмежену є нескінченно малою величиною: $\left.\begin{array}{r} |x| \le M \\ \alpha \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \alpha x \to 0 .$

Наслідок. Добуток сталої величини на нескінченно малу є нескінченно малою величиною:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \to 0 \\ C = const \end{array}\right\} \Rightarrow \ C\alpha \to 0 . \quad \text{Символічний запис} \quad C \cdot 0 = 0 .$$

Теорема 4. Добуток двох нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною:

$$\alpha \to 0 \ i \ \ \beta \to 0 \Rightarrow \ \alpha\beta \to 0 . \quad \text{Символічний запис} \quad 0 \cdot 0 = 0 .$$

Змінна величина x називається ***нескінченно великою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються більшими будь-якого фіксованого додатного числа M.

Іншими словами, змінна величина x називається нескінченно великою, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно великого) додатного числа $M > 0$ знайдеться такий момент t_M процесу змінювання, що у всі наступні моменти $t > t_M$ значення змінної величини x за модулем більші цього числа M:

$$\forall M > 0, \exists t_M , \forall t > t_M : |x| > M .$$

Те, що змінна величина x є нескінченно великою, позначається так: $x \to \infty$ або $\lim x = \infty$.

Теорема 5. Величина, обернена до нескінченно великої величини, є нескінченно малою: $x \to \infty \ \Rightarrow \ \alpha = 1/x \to 0$.

Символічний запис $1/\infty = 0$.

Теорема 6. Величина, обернена до нескінченно малої відмінної від нуля величини, є нескінченно великою:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \to 0 \\ \alpha \ne 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x = \frac{1}{\alpha} \to \infty . \quad \text{Символічний запис} \quad 1/0 = \infty .$$

2.2.2 Границя змінної величини. Властивості границь

Поняття границі слугує для характеристики напрямку процесу змінювання.

Стала величина a називається ***границею*** змінної величини x, якщо їх різниця $x-a$ є нескінченно малою величиною:

$$x-a=\alpha\to 0.$$

Записується так: $x\to a$ або $\lim x=a$.

Наприклад $\lim \frac{n+1}{n}=1$, оскільки $\alpha=\frac{n+1}{n}-1=\frac{1}{n}\to 0$.

Геометричний зміст: стала величина a слугує границею змінної величини x, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon>0$ значення змінної величини x у процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в ε-околі точки a:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists t_\varepsilon,\ \forall t>t_\varepsilon:\ x\in U(a;\varepsilon),\ \ U(a;\varepsilon)=(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon).$$

Зауваження. Якщо з контексту задачі не зрозуміло, в яких умовах відбувається процес змінювання, то додаткову інформацію подають під знаком границі або після нього. Наприклад: $x_n\to a$ *при* $n\to\infty$ або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

Доведення основних властивостей границь ґрунтується на означенні границі та властивостях нескінченно малих.

Теорема 1. Змінна величина в фіксованому процесі змінювання має не більше однієї границі.

Зауваження. Змінна величина може не мати границі в даному процесі змінювання. Змінна величина може вести себе по-різному в різних процесах змінювання. Наприклад:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2};\ \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\infty;\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}=0.$$

Теорема 2. Змінна величина, що має скінченну границю, є обмеженою у відповідному процесі змінювання.

$$\lim x=a\Rightarrow\exists M>0,\ \forall x:\ |x|\le M.$$

Теорема 3. Границя сталої величини дорівнює самій цій *величині*: $C = const \Rightarrow \lim C = C$.

Теорема 4. Границя скінченної алгебраїчної суми змінних величин дорівнює такій же сумі їх границь, якщо останні існують:

$$\lim(x + y - z) = \lim x + \lim y - \lim z.$$

Теорема 5. Границя добутку двох змінних величин дорівнює добутку їх границь, якщо останні існують: $\lim(xy) = \lim x \cdot \lim y$.

Наслідок 1. Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити за знак границі: $\lim(Cx) = C \cdot \lim x$, $C = const$.

Наслідок 2. Границя степеня з натуральним показником змінної величини дорівнює відповідному степеню її границі, якщо остання існує: $\lim x^n = \left(\lim x\right)^n$, $n \in N$.

Теорема 6. Границя відношення двох змінних величин дорівнює такому ж відношенню їх границь, якщо останні існують, причому границя знаменника відмінна від нуля: $\lim \dfrac{x}{y} = \dfrac{\lim x}{\lim y}$.

Теорема 7. Границя невід'ємної змінної величини також невід'ємна. Аналогічно, *границя недодатної змінної величини також недодатна*: $x \ge 0 \Rightarrow \lim x \ge 0$; $x \le 0 \Rightarrow \lim x \le 0$.

*Теорема 8 (**про стабілізацію знаку нерівності**). Якщо границя змінної величини додатна, то починаючи з деякого моменту процесу то, починаючи з деякого моменту процесу змінювання, всі її наступні значення також додатні:* $\lim x > 0 \Rightarrow \exists t_0, \forall t > t_0 : x > 0$.

Аналогічно, *якщо границя змінної величини від'ємна, то, починаючи з деякого моменту процесу змінювання, всі її наступні значення також від'ємні*: $\lim x < 0 \Rightarrow \exists t_0, \forall t > t_0 : x < 0$.

Приклад 1. Знайти границю: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 5x + 7}{3x^2 - 2}$.

□ $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x + 7}{3x^2 - 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(x^3 - 5x + 7)}{\lim\limits_{x \to 2}(3x^2 - 2)} =$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2} x^3-\lim\limits_{x\to 2} 5x+\lim\limits_{x\to 2} 7}{\lim\limits_{x\to 2} 3x^2-\lim\limits_{x\to 2} 2}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^3-5\lim\limits_{x\to 2} x+7}{3\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^2-2}=$$

$$=\frac{(2)^3-5\cdot 2+7}{3\cdot 2^2-2}=\frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Спираючись на розв'язаний приклад, сформулюємо наступне *правило.*

Границю раціонального дробу $P(x)/Q(x)$, *де* $P(x)$ *і* $Q(x)$ *– многочлени, можна обчислити шляхом прямої підстановки замість* x *його граничного значення, якщо при цьому не порушуються умови, вказані у властивостях границь.*

Зауваження. Якщо вказані умови порушуються, то треба скористатися, зокрема, властивостями нескінченно малих і нескінченно великих величин.

Приклад 2. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x-4}{x^3+1}$.

$$\square \quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x-4}{x^3+1}=\left|\frac{(-1)^2+3\cdot(-1)-4}{(-1)^3+1}=\frac{-6}{0}\right|=\infty. \quad \blacksquare$$

Питання про границю має дві сторони:

1. Чи існує границя? 2. Як обчислити границю?

Теорема 9. Обмежена монотонна величина має границю:

$$x\ge 0\Rightarrow \lim x\ge 0; \quad x\le 0\Rightarrow \lim x\le 0.$$

Теорема 10 (***про стиснену змінну***). *Нехай задано три змінні величини* x, y *і* z, *для яких виконується подвійна нерівність* $x\le y\le z$. *Якщо при цьому крайні змінні* x *і* z *мають однакову границю* $\lim x=\lim z=a$, *то середня змінна* y *також має ту саму границю* $\lim y=\lim x=\lim z=a$:

$$\left.\begin{array}{r} x\le y\le z \\ \lim x=\lim z=a \end{array}\right\}\Rightarrow \lim y=\lim x=\lim z=a.$$

2.2.3 Перша та друга стандартні границі. Невизначеності та їх розкриття

При розкритті невизначеності виду $0/0$ для нескінченно малих величин-многочленів можна скористатися наступним *правилом.*

Для розкриття невизначеності виду $0/0$ *для многочленів* $P(x)/Q(x)$ *треба чисельник* $P(x)$ *і знаменник* $Q(x)$ *розкласти на множники та скоротити дріб, а потім перейти до границі.*

Приклад 1. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+27}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+6x^2-7}{x^2-3x+2}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\left|\begin{array}{l|l} -\,3x^4-5x^3-5x+2 & x-2 \\ \quad 3x^4-6x^3 & \overline{3x^3+x^2+2x-1} \\ \hline \qquad -\,x^3-5x+2 & \\ \qquad\quad x^3-2x^2 & \\ \hline \qquad\quad -\,2x^2-5x+2 & \\ \qquad\qquad 2x^2-4x & \\ \hline \qquad\qquad\quad -\,-x+2 & \\ \qquad\qquad\qquad -x+2 & \\ \hline \qquad\qquad\qquad\quad 0 & \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x^3+x^2+2x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^3+x^2+2x-1}{x+2}=$$

$$=\frac{3\cdot 2^3+2^2+2\cdot 2-1}{2+2}=7\frac{3}{4};$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}=\left|\dfrac{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}{1^3-1}=\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\left|\begin{matrix}3x^2-5x+2=0\\ x_1=1;\ x_2=2/3\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-2/3)}{(x-1)(x^2+x+1)}=3\lim_{x\to 1}\frac{x-2/3}{x^2+x+1}=$$

$$=3\cdot\frac{1-2/3}{1^2+1+1}=\frac{1}{3};$$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}=\left|\frac{4}{0}\right|=\infty;$$

г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+27}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)^2}{(x+3)(x^2-3x+9)}=$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-3x+9}=\frac{-3+3}{(-3)^2-3\cdot(-3)+9}=\frac{0}{27}=0;$$

д) розв’язати самостійно. ■

При розкритті невизначеності виду ∞/∞ для нескінченно великих величин зручно спочатку перейти до розгляду нескінченно малих величин, використовуючи наступне *правило*.

Для розкриття невизначеності виду ∞/∞ *для многочленів* $P(x)/Q(x)$ *треба чисельник* $P(x)$ *і знаменник* $Q(x)$ *поділити на найвищий степінь* x*, а потім перейти до границі*.

Зауваження. Указане правило справедливе для всіх випадків нескінченно великих величин ∞, $+\infty$ чи $-\infty$.

Приклад 2. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^3+4x-1}{5x^2-2x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{9x^3+4x}{2x^5+x^3+6}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^6+4x^4-x}{x^3-6x^2+3}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^4+4x}{2x^4-9}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^3+4x-1}{5x^2-2x+6}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-5/x+4/x^3-1/x^4}{5/x^2-2/x^3+6/x^4}=\left|\frac{3-0+0-0}{0-0+0}\right|=\infty;$$

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-4/x-7/x^2}{8-3/x+6/x^2}=$

$$=\frac{5-0-0}{8-0+0}=\frac{5}{8};\quad \text{в) } \lim_{x\to+\infty}\frac{9x^3+4x}{2x^5+x^3+6}=$$

$$=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{9/x^2+4/x^4}{2+1/x^2+6/x^5}=\frac{0+0}{2+0+0}=0;$$

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6+4x^4-x}{x^3-6x^2+3}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+4/x^2-1/x^5}{1/x^3-6/x^4+3/x^6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+0-0}{0-0+0}=-\infty;$$

д) розв’язати самостійно. ■

При розкритті невизначеності виду $0/0$ ірраціональними виразами зручно спочатку перейти до розгляду нескінченно малих величин-многочленів. Можна скористатися наступним *правилом.*

Для розкриття невизначеності виду $0/0$ *для ірраціональних виразів треба спочатку відповідним чином позбавитись ірраціональності, що дає нуль, потім скоротити дріб, і нарешті перейти до границі.*

Приклад 3. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{3x-8}-1}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(\sqrt{5x-1}-3\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{\left(4x^2-5x-6\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}=$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{5x-1}+3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{5x-1-9}{4x^2-5x-6} = \frac{1}{\sqrt{5\cdot 2-1}+3}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5x-10}{4x^2-5x-6} = \left|\begin{matrix} 4x^2-5x-6=0 \\ x_1=2;\ x_2=-3/4\end{matrix}\right| = \frac{1}{6}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5(x-2)}{4(x-2)(x+3/4)} = \frac{5}{4}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+3/4} = \frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{2+3/4} = \frac{5}{11};$$

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| =$

$$= \lim_{x\to -3}\frac{\left(\sqrt[3]{4x+4}+2\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)}{\left(\sqrt{-3x}+x\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{-3x}-x}{\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4}\cdot\lim_{x\to -3}\frac{4x+4+8}{-3x-x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{-3\cdot(-3)}-(-3)}{\sqrt[3]{(4\cdot(-3)+4)^2}-2\sqrt[3]{4\cdot(-3)+4}+4}\cdot\lim_{x\to -3}\frac{4(x+3)}{-x(3+x)} =$$

$$= \frac{6}{12}\cdot(-4)\lim_{x\to -3}\frac{1}{x} = -2\cdot\frac{1}{-3} = \frac{2}{3};$$

в) розв’язати самостійно. ■

При обчисленні границь конкретних змінних величин часто використовуються уже відомі результати – ***стандартні границі***.

*Теорема 1 (**перша стандартна границя**). Границя відношення синуса нескінченно малої величини до самої цієї величини існує і дорівнює одиниці*: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = 1$.

Наслідок 1. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{tg\,\alpha}{\alpha} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = 1$. *Наслідок 2*. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\arcsin\alpha}{\alpha} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = 1$.

Наслідок 3. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{arctg\,\alpha}{\alpha}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=1.$

Правило. Для розкриття невизначеності виду $0/0$ *з тригонометричними виразами треба розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити дріб або застосувати першу стандартну границю чи її наслідки.*

Приклад 4. Знайти границю:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to \pi/4}\frac{ctg(\pi/4-x)}{4x-\pi}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 0}\frac{arctg\,6x}{\arcsin 2x}.$$

□ а) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times$$

$$\times\lim_{x\to 0}\cos x=1\cdot 1=1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(3x/2)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(3x/2)\cdot(3x/2)^2}{(3x/2)^2\cdot x\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot x}=$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x/2)}{3x/2}\right)^2:\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{9}{2}\cdot 1^2:1=\frac{9}{2};$$

в) $$\lim_{x\to \pi/4}\frac{ctg(\pi/4+x)}{4x-\pi}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix} u=x-\pi/4;\ x=\pi/4+u; \\ x\to\pi/4\ \Rightarrow\ u\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{ctg(\pi/4+u+\pi/4)}{4(\pi/4+u)-\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{ctg(\pi/2+u)}{4u}=-\frac{1}{4}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{tg\,u}{u}=$$

$$=-(1/4)\cdot 1=-1/4;$$

г) розв'язати самостійно. ■

Теорема 2 (***друга стандартна границя***). *Змінна величина* $(1+1/n)^n$ *має границю при* $n \to \infty$. *Ця границя позначається буквою* e *і називається числом Ейлера*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left|1^\infty\right| = e, \quad e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots \approx 2{,}72.$$

Зауваження. Використовують також наступні форми запису другої стандартної границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \left|1^\infty\right| = e$, де змінна x – дійсна неперервна.

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = \left|1^\infty\right| = e$.

Границя виразу – одиниця плюс нескінченно мала в степені, оберненому до цієї нескінченно малої – дорівнює числу Ейлера e.

Наслідок 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = 1$.

Наслідок 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \ln a$.

Наслідок 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \alpha$.

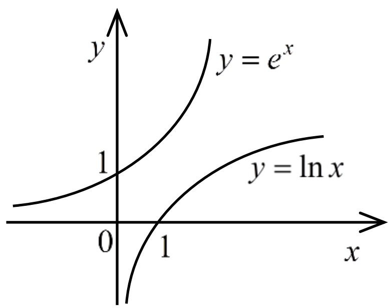


Рисунок 2.7

Зауваження. Нагадаємо, що показникова функція з основою e, $y = e^x$ або $y = \exp x$, називається ***експонентою*** (рис. 2.7). Логарифмічна функція з основою e, $y = \log_e x$ або $y = \ln x$, називається ***натуральним логарифмом*** (рис. 2.7).

Приклад 5. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)\big(\ln(6x-7)-\ln(6x+1)\big)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(6x+1)}{x}$.

□ а) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x+2}\right)^{2x+1}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x-5}{x+2}-1\right)\right)^{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-7}\cdot\frac{-7}{x+2}(2x+1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7(2x+1)}{x+2}}=e^{-7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+1/x}{1+2/x}}=e^{-7\cdot\frac{2+0}{1+0}}=e^{-14};$$

б) $$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{(1/\sin x)\cdot(\sin x/x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x)}=e^{1}=e\ ;$$

в) $$\lim_{x\to+\infty}(2x-3)\big(\ln(6x-7)-\ln(6x+1)\big)=\left|\infty\cdot(\infty-\infty)\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(2x-3)\ln\frac{6x-7}{6x+1}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{6x-7}{6x+1}\right)^{2x-3}=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+1}\right)^{2x-3}=\left|1^{\infty}\right|=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6x-7}{6x+1}-1\right)^{2x-3}=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-8}{6x+1}\right)^{2x-3}=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-8}{6x+1}\right)^{\frac{6x+1}{-8}\cdot\frac{-8}{6x+1}(2x-3)}=$$

$$=\ln e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8(2x-3)}{6x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8(2x-3)}{6x+1}\cdot\ln e=-8\lim_{x\to+\infty}\frac{2-3/x}{6+1/x}=$$

$$=-8\cdot(2-0)/(6+0)=-8/3;$$

г) розв’язати самостійно. ■

У теоретичному аналізі складних фінансових проблем (зокрема, при обґрунтуванні інвестиційних рішень) часто зустрічається поняття *неперервного нарахування відсотків*. Наступний приклад розберіть самостійно поза часу лекції.

Приклад 6. Початкова вартість нового комп'ютера складає S_0 = 30 тис. грош. од., амортизаційні відрахування здійснюються за ставкою p = 2 % річних з неперервним нарахуванням відсотків. Визначити залишкову вартість $\Delta S(t) = S_t^* - S_0$ комп'ютера через t = 10 років.

□ У випадку неперервного нарахування відсотків поточна вартість комп'ютера S_t^* на момент часу t визначається за формулою: $S_t^* = S_0 e^{pt/100}$. Тоді

$$\Delta S(t) = S_t^* - S_0 = S_0 e^{pt/100} - S_0 = (e^{pt/100} - 1)S_0;$$

$$\Delta S(10) = (e^{2\cdot 10/100} - 1)\cdot 30 \approx 6{,}64 \text{ тис. грош. од.} \ ■$$

Зауваження. До знаходження границь треба підходити творчо та обов'язково оцінювати ситуацію, що виникає: чи є невизначеність і якого типу? Шаблонне застосування відомих алгоритмів часто призводить до помилки. Наприклад, границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x-5}{3x+2}\right)^{1-2x}$ за структурою запису нагадує розглянуті вище, але перевірка показує, що невизначеності немає і результат одержується безпосередньо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-5}{3x+2}\right)^{1-2x} = \left|2^{-\infty}\right| = 0.$$

Аналогічно $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{12x+5}{4x-1}\right)^{1-6x} = \left|3^{+\infty}\right| = +\infty.$

При розкритті невизначеності виду $0/0$ використовують поняття еквівалентних нескінченно малих величин.

Нехай змінні α і β – нескінченно малі в одному процесі змінювання. Розглянемо їх відношення α/β, припускаючи $\beta \neq 0$.

Тоді:

1) якщо $\lim \frac{\alpha}{\beta}=0$, то α називається нескінченно малою ***вищого порядку*** мализни порівняно з β і позначається $\alpha = o(\beta)$ (α прямує до нуля швидше, ніж β);

2) якщо $\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = A \neq 0$ і $A \neq \infty$, то α називається ***нескінченно малою*** k ***-го порядку*** мализни порівняно з β ;

3) якщо $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ і $A \neq \infty$, то α і β називаються ***нескінченно малими одного порядку*** мализни; зокрема, якщо $\lim \frac{\alpha}{\beta}=1$, то α і β називаються ***еквівалентними нескінченно малими***, позначається $\alpha \sim \beta$;

4) Якщо відношення α/β не має ні скінченної, ні нескінченної границі, то α і β називаються ***непорівнянними нескінченно малими***.

Наприклад:

а) $\alpha = \sin 2x$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді:

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x/x) = 2$. Отже, нескінченно малі α і β одного порядку;

б) $\alpha = x^n$, $\beta = x$, $n > 1$, $x \to 0$. Тоді:

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^n/x\right) = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-1} = 0$. Отже, $\alpha = o(\beta)$;

в) $\alpha = 4x^3$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha/\beta^3\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(4x^3/x^3\right) = 4$. Отже, величина α є нескінченно малою третього порядку мализни відносно β ;

г) $\alpha = (x+1)/x^2$, $\beta = 1/x$, $x \to \infty$. Тоді:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\alpha/\beta\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(((x+1)/x^2)/(1/x)\right) = \lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x) = 1$. Отже,

$\alpha \sim \beta$;

д) $\alpha = x\sin(1/x)$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді:

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to 0}\left((x\sin(1/x))/x\right) = \lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ – не існує. Отже, α і β – непорівнянні.

Теорема 3 (***принцип заміни нескінченно малих***). *При розкритті невизначеності виду* $0/0$ *можна чисельник і знаменник цієї невизначеності заміняти величинами, що їм еквівалентні*:

$$\left.\begin{matrix}\alpha \sim \alpha_* \\ \beta \sim \beta_*\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_*}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_*} = \lim \frac{\alpha_*}{\beta_*}.$$

Зауваження. Якщо в чисельнику чи знаменнику невизначеності $0/0$ стоїть алгебраїчна сума, то в загальному випадку не можна заміняти еквівалентними величинами окремі доданки, а лише весь чисельник чи знаменник у цілому.

Основні еквівалентності при $x \to 0$, що використовуються при обчисленнях границь, подані в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Основні еквівалентності при $x \to 0$

$\sin x \sim x$	$arctg\, x \sim x$	$a^x - 1 \sim x\ln a$
$tg\, x \sim x$	$1-\cos x \sim x^2/2$	$\ln(1+x) \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Приклад 7. Знайти границю, використовуючи еквівалентні нескінченно малі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x^2)}{\arcsin 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x}-1}{tg^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\, 3x}{\sqrt{1-x}-1}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^{1/5}-1}{x} =$

$$= \left|(1+3x)^{1/5} - 1 \sim 3x/5\right| = \lim_{x\to 0}\frac{3x/5}{x} = \frac{3}{5};$$

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1-7x^2\right)}{\arcsin\,2x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\left|\ln\left(1-7x^2\right)\sim-7x^2\right.;$

$$\left.\arcsin\,2x\sim 2x\right|=\lim_{x\to0}\frac{-7x^2}{2x}=0;$$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{6x}-1}{tg^2x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\left|e^{6x}-1\sim 6x;\ \ tgx\sim x\right|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x}{x^2}=\infty;$

г) розв’язати самостійно. ■

Зауваження. Нескінченно великі величини порівнюють між собою так само, як і нескінченно малі.

Наприклад, при $x\to\infty$ величини $y=3x^5-x^2+1$ і $z=7x^5+4x^3-2x$ є нескінченно великими. Границя їх відношення $\lim\limits_{x\to\infty}(y/z)=3/7$. Тому ці величини y і z є нескінченно великими одного порядку.

Запитання для самоконтролю

1. Дайте означення сталих та змінних величин.
2. Яка змінна величина називається обмеженою? Необмеженою?
3. Яка змінна величина називається зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?
4. Яка змінна величина називається нескінченно малою? Нескінченно великою?
5. Наведіть властивості нескінченно малих величин. Як зв’язані нескінченно малі та нескінченно великі величини?
6. Що називається границею змінної величини?
7. Сформулюйте властивості границь.
8. Сформулюйте ознаки існування границі змінної величини.
9. Що називається першою стандартною границею? Наведіть наслідки першої стандартної границі.
10. Що називається другою стандартною границею? Наведіть наслідки другої стандартної границі.
11. Як здійснюється порівняння нескінченно малих величин? Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих.

12. Сформулюйте принцип заміни нескінченно малих. Проілюструйте застосування цього принципу при обчисленні границь.
13. Як розкривається невизначеність виду ∞/∞ для многочленів?
14. Як розкривається невизначеність виду $0/0$ для многочленів, ірраціональних та тригонометричних виразів?
15. Як розкривається невизначеність виду 1^{∞} з використанням другої стандартної границі?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Розкрити невизначеність виду ∞/∞:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-5x+8}{2x^5+7x^2-6}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^5-4x+1}{x^2-3x+5};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to+\infty}\frac{10x^8+6x^4+5x}{2x^8-3x^6+9}.$$

Відповідь: а) 0; б) $-\infty$; в) 5.

Приклад 2. Розкрити невизначеність виду $0/0$:

$$\text{а) } \lim_{x\to-1}\frac{4x^3+7x^2-3}{3x^2-2x-5}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{8-x^2}+x}{x^3+8};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to0}\frac{\cos 8x-\cos 2x}{tg\,4x\cdot\sin 3x}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to0}\frac{\ln(1-5x)}{x^2-4x}.$$

Відповідь: а) $1/4$; б) $1/6$; в) $-5/2$; г) $5/4$.

Приклад 3. Розкрити невизначеність виду 1^{∞}:

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x-2}\right)^{1-4x}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to+0}(1+x)^{ctg\,2x}.$$

Відповідь: а) e^4; б) $\sqrt{e}$.

Приклад 4. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}(2x-\pi)\cdot tg\,x$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\left(\ln(4x+3)-\ln(4x-3)\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1/(x\sin x)-1/(x\,tg\,x)\right)$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}+x\right)$.

Відповідь: а) -2; б) 3; в) $1/2$; г) $-3/2$.

Приклад 5. Знайти границю, використовуючи еквівалентні нескінченно малі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1+4x^2}-1}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{arctg^2\,2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{tg4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x^2}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

Відповідь: а) $2/3$; б) $-1/4$; в) $3/4$; г) -2.

Приклад 5. Дослідження показують, що в рамках деякої ринкової спільноти залежності попиту y на товари першої необхідності та попиту z на предмети розкоші від рівня доходу x покупців наближено моделюються функціями Л. Торнквіста:

$$y=10(x-30)/(x-5),\ x>30;\quad z=5x(x-100)/(x-10),\ x>100.$$

Знайти граничний попит $y_g=\lim\limits_{x\to+\infty}y$ і $z_g=\lim\limits_{x\to+\infty}z$.

Відповідь: $y_g=10$ і $z_g=+\infty$. Отже, при необмеженому зростанні рівня доходів $x\to+\infty$ попит на товари першої необхідності наближається до стану насичення $y_g=10$, а попит на предмети розкоші необмежено зростає $z_g=+\infty$.

Змістовий модуль 3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ, ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Лекція 3.1 Похідна та диференціал функції. Правило Лопіталя

План

3.1.1 Поняття похідної як швидкості зміни функції. Дотична і нормаль до графіка функції. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних

3.1.2 Похідна складеної функції. Похідні неявної та оберненої функцій. Правило логарифмічного диференціювання. Похідна параметрично заданої функції

3.1.3 Диференціал функції. Властивості диференціала. Зв'язок між диференціалом і похідною. Похідні та диференціали вищих порядків

3.1.4 Правило Лопіталя розкриття невизначеностей

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *похідна, дотична і нормаль, диференціал, диференціювання неявної функції, диференціювання параметрично заданої функції, похідні та диференціали вищих порядків, правило Лопіталя.*

3.1.1 Поняття похідної як швидкості зміни функції. Дотична і нормаль до графіка функції. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і $x_0 \in (a;b)$. Надамо аргументу приріст Δx так, щоб нова точка $x_0 + \Delta x \in (a;b)$. Оскільки точка x_0 фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\Delta y / \Delta x$.

Похідною *функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0 *називається швидкість змінювання функції* y *в цій точці відносно змінювання аргументу* x. Похідна дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. *Еквівалентні позначення похідної:* y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

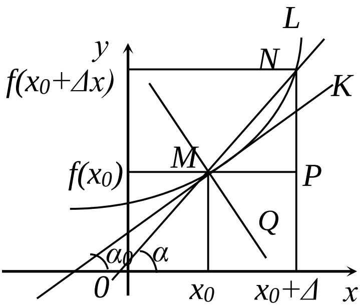


Рисунок 3.1

Коли функція $y = f(x)$ диференційована у кожній точці проміжку $(a;b)$, то кажуть, що вона ***диференційована на проміжку***.

Геометричний сенс похідної. Нехай дано деяку лінію *L* і на ній точку *M (*рис. 3.1).

Дотичною до лінії *L* у точці *M* називається граничне положення *MK* січної *MN*, якщо точка *N* прямує до точки *M*.

Нехай лінія *L* слугує графіком деякої функції $y = f(x)$, що диференційована у точці x_0.

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить через точку *M* з координатами $(x_0;\, y_0)$, можна записати у вигляді:

$$y - y_0 = y_0' \cdot (x - x_0)\,.$$

Пряма *MQ*, яка проходить через точку дотику *M* і перпендикулярна до дотичної *MK*, називається ***нормальною прямою*** (***нормаллю***). Її рівняння $y - y_0 = \left(-1/y_0'\right)\cdot(x - x_0)$.

Приклад 1. Знайти кут нахилу дотичної до графіка функції $y = 2\sqrt{x}$ у точці $M(1;\ 2)$. Скласти рівняння дотичної.

□ Візьмемо похідну від функції $y = 2\sqrt{x}$: $y' = 2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Тоді: $tg\,\alpha = y'(x_0) = 2\cdot(1/\sqrt{1}) = 1$; $\alpha = arctg\,1 = 45^\circ$ – кут нахилу дотичної; $y - 2 = 1\cdot(x-1)$; $y = x + 1$ – дотична. ■

Правила диференціювання. Нехай маємо деякі функції $u = u(x)$, $v = v(x)$, які диференційовані у проміжку $(a;b)$. Тоді:

1) якщо $y = cu$, то $y' = (cu)' = cu'$, де $c = const$, тобто *сталий*

множник можна виносити з-під знаку похідної;

2) якщо $y = u \pm v$, то $y' = (u \pm v)' = u' \pm v'$, тобто *похідна суми чи різниці функцій дорівнює відповідно сумі чи різниці їх похідних*;

3) якщо $y = uv$, то $y' = (uv)' = u'v + v'u$, тобто *похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію*;

4) якщо $y = \frac{u}{v}$, де $v \neq 0$, то $y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$,

тобто *похідна частки двох функцій дорівнює дробу, у якому знаменник є квадрат знаменника, а чисельник є різниця між добутками похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник*.

Похідні елементарних функцій – у таблиці 2.1, де $u = u(x)$.

Таблиця 3.1 – Формули похідних

№ з/п	Функція	Похідна
1	2	3
1	Стала функція	$C' = 0$
2	Степенева функція	$\left(u^a\right)' = a u^{a-1} \cdot u'$
2а	x	$x' = 1$
2б	$\sqrt{u}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
2в	$\frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
3	Показникова функція	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
3а	Експонента	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
4	Логарифмічна функція	$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
4а	Натуральний логарифм	$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

Продовження таблиці 3.1

1	2	3
5	Синус	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
6	Косинус	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
7	Тангенс	$(tg\ u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
8	Котангенс	$(ctg\ u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
9	Арксинус	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
10	Арккосинус	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11	Арктангенс	$(arctg\ u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
12	Арккотангенс	$(arcctg\ u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

3.1.2 Похідна складеної функції. Похідні неявної та оберненої функцій. Правило логарифмічного диференціювання. Похідна параметрично заданої функції

*Теорема 1 (**похідна складеної функції**). Якщо функція* $u = u(x)$ *має похідну у деякій точці* $x \in (a;b)$, *а функція* $y = f(u)$ *має похідну у відповідній точці* $u = u(x)$, *то й складена функція* $y = f(u(x))$ *має похідну у точці* x, *до того ж*

$$y'_x = (f(u(x))' = y'_u(u) \cdot u'_x(x),$$

де індекси y і x біля похідних вказують, за яким аргументом обчислюють похідні. Тобто *похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішньої функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну внутрішньої функції*.

Теорема 2 (***похідна оберненої функції***). *Нехай функція* $y = f(x)$ *задовольняє умові існування оберненої функції і у точці* $x \in (a;b)$ *має скінчену і відмінну від нуля похідну. Тоді обернена функція* $x = f^{-1}(y)$ *у відповідній точці* $y = f(x)$ *також має похідну. Похідні цих взаємно обернених функцій зв'язані рівністю*

$$(f^{-1}(y))'_y = 1/f'_x(x).$$

Приклад 1. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y = x^2 \sin 5x$; б) $y = x^4 / \cos 3x$; в) $y = e^{arctg\,x} - \sqrt{\ln(1+x^2)}$.

□ а) $y' = (x^2 \sin 5x)' = (x^2)' \sin 5x + x^2 (\sin 5x)' =$

$$= 2x \sin 5x + 5x^2 \cos 5x;$$

б) $y' = (x^4 / \cos 3x)' = \left((x^4)' \cos 3x - (\cos 3x)' x^4\right):$

$$: \cos^2 3x = \left(4x^3 \cos 3x + 3 \sin 3x \cdot x^4\right) / \cos^2 3x =$$

$$= x^3 \left(4 \cos 3x + 3x \sin 3x\right) / \cos^2 3x;$$

в) $y' = \left(e^{arctg\,x} - \sqrt{\ln(1+x^2)}\right)' = \left(e^{arctg\,x}\right)' - \left(\sqrt{\ln(1+x^2)}\right)' =$

$$= e^{arctg\,x} \cdot (arctg\,x)' - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x^2)}} \left(\ln(1+x^2)\right)' =$$

$$= e^{arctg\,x} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x^2)}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \left(1+x^2\right)' =$$

$$= \left(1/(1+x^2)\right)\left(e^{arctg\,x} - x/\sqrt{\ln(1+x^2)}\right). \quad \blacksquare$$

Правило диференціювання функції $y = y(x)$, *що задана неявно* рівнянням $F_1(x, y) = F_2(x, y)$:

1) продиференціювати ліву і праву частини рівняння, що задає функцію, розглядаючи y *як функцію від* x, *тобто застосовуючи правило диференціювання складеної функції*;

2) з одержаної рівності знайти y'.

Приклад 2. Знайти похідну y' неявної функції $y = y(x)$, що задана рівнянням $tg(2x+y) - 3x^2 = 1 + xy^2$ у точці $M(-1;2)$. Скласти рівняння нормалі.

□ $\left(tg(2x+y) - 3x^2\right)' = \left(1+xy^2\right)'$; $\dfrac{1}{\cos^2(2x+y)}(2x+y)' -$

$$-3\cdot 2x = 0 + x'y^2 + x(y^2)';$$

$$\left(1/\cos^2(2x+y)\right)(2+y') - 6x = y^2 + x\cdot 2yy';$$

$$2 + y' - 6x\cos^2(2x+y) = y^2\cos^2(2x+y) + 2xyy'\cos^2(2x+y);$$

$$y' = \left(y^2\cos^2(2x+y) - 2 + 6x\cos^2(2x+y)\right)/\left(1 -\right.$$

$$\left.- 2xy\cos^2(2x+y)\right); \quad y'\big|_{M(-1;2)} = \left(2^2\cos^2(2\cdot(-1)+2) - 2 +\right.$$

$$\left.+ 6\cdot(-1)\cos^2(2\cdot(-1)+2)\right) : \left(1 - 2\cdot(-1)\cdot 2\cos^2(2\cdot(-1)+2)\right) = -4/5.$$

Рівняння нормалі $y - y_0 = \left(-1/y'_0\right)\cdot(x - x_0)$;

$$y - 2 = \left(-1/(-4/5)\right)\cdot\left(x - (-1)\right); \quad y = (5/4)x + 13/4. \ ■$$

Правило логарифмічного диференціювання явно заданої функції $y = f(x)$:

1) прологарифмувати ліву і праву частини відповідного рівняння $y = f(x)$*;*

2) до результату логарифмування застосувати правило диференціювання неявної функції;

3) у співвідношення для похідної y' *замість* y *підставити вираз* $f(x)$.

Зауваження. Логарифмічне диференціювання зручно застосовувати, коли функція $y = f(x)$ є добутком (часткою) степеневих, показникових і показниково-степеневих функцій.

Приклад 3. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y = x^x$; б) $y = (2x-1)^5\sqrt[3]{(4-x)^2}\Big/\left(2^{6\sin x}(x+3)\right)$.

□ а) $\ln y = x\ln x$; $y'/y = \ln x + x(1/x)$; $y' = y(\ln x + 1)$;

$$y' = x^x(\ln x + 1);$$

б) $\ln y = \ln(2x-1)^5 + \ln\sqrt[3]{(4-x)^2} - \ln 2^{6\sin x} - \ln(x+3);$

$$\ln y = 5\ln(2x-1) + (2/3)\ln(4-x) - 6\sin x \cdot \ln 2 - \ln(x+3).$$

Візьмемо похідну від обох частин одержаної рівності

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{2x-1}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4-x}\cdot(-1) - 6\ln 2\cdot\cos x - \frac{1}{x+3}.$$

Звідси $y' = \bigl(10/(2x-1) - 2/\bigl(3(4-x)\bigr) - 6\ln 2\cdot\cos x - 1/(x+3)\bigr)\times$

$$\times(2x-1)^5\sqrt[3]{(4-x)^2}\Big/\left(2^{6\sin x}(x+3)\right). \quad ■$$

*Теорема 3 (**похідна параметрично заданої функції**). Нехай функцію* $y = f(x)$ *задано у параметричному вигляді:* $y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$, *де* t *– параметр. Якщо функції* $\psi(t)$ *і* $\varphi(t)$ *диференційовані на інтервалі* $(\alpha;\beta)$ *і функція* $\varphi(t)$ *має обернену, причому* $\varphi_t'(t) \neq 0$, *то похідна функції* $y = f(x)$ *знаходиться як відношення:* $y_x' = \psi'(t)/\varphi'(t) = y_t'/x_t'$.

Приклад 4. Знайти кут нахилу α дотичної до графіка функції $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, де $0 \le t \le \pi$, у точці, яка відповідає значенню параметра $t_0 = \pi/4$. Скласти рівняння дотичної.

□ $y_x' = (a\sin t)_t'/(a\cos t)_t' = (a\cos t)/(a\sin t) = -ctg\,t;$

$tg\,\alpha = y_{x0}' = -ctg(\pi/4) = -1$. Звідси $\alpha = 135^0 = 3\pi/4$.

Знайдемо координати точки дотику $M_0(x_0;\, y_0)$:

$$x_0 = a\cos t_0 = a\cos(\pi/4) = \sqrt{2}\,a/2;$$

$$y_0 = a\sin t_0 = a\sin(\pi/4) = \sqrt{2}\,a/2;$$

Тоді рівняння дотичної $y - y_0 = y_{x0}'\cdot(x - x_0);$

$$y - \sqrt{2}\,a/2 = -1\cdot\left(x - \sqrt{2}\,a/2\right); \quad y = -x + \sqrt{2}\,a. \quad ■$$

3.1.3 Диференціал функції. Властивості диференціала. Зв'язок між диференціалом і похідною. Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, визначена на проміжку $(a;b)$ і неперервна у деякій фіксованій точці x цього проміжку, і нехай приросту аргументу Δx відповідає приріст функції $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$, який є функцією аргументу Δx.

Якщо існує таке число A, що приріст функції можна записати як $\Delta y = A\cdot\Delta x + \varepsilon\cdot\Delta x$, де множник $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x)$ – нескінченно мала величина при $\Delta x \to 0$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ ***диференційована у точці*** x. Головна частина $dy = A\Delta x$ приросту функції Δy, яка прямо пропорційна приросту аргументу Δx, називається ***диференціалом функції***. Другий доданок $\varepsilon\cdot\Delta x$ є нескінченно малою більш високого порядку порівняно з Δx.

Теорема 1 (***зв'язок між похідною та диференціалом***). *Щоб функція $y = f(x)$ у точці x була диференційована, необхідно і достатньо, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну $f'(x)$. Якщо виконується ця умова, то $dy = f'(x)\Delta x$.*

Диференціалом незалежної змінної x називають її приріст Δx, тобто $dx = \Delta x$. З урахуванням цієї рівності, маємо $dy = f'(x)dx$. Тобто, *диференціал функції дорівнює добутку похідної на диференціал аргументу*.

Звідси випливає $f'(x) = dy/dx$. Тобто, *похідна дорівнює відношенню диференціалів функції та аргументу*.

Правила обчислення диференціалів і основні диференціали наведені в таблицях 3.2 і 3.3, де $u = u(x)$.

Теорема 1 (***інваріантність форми диференціала***). *Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – деякі диференційовані функції зазначених аргументів такі, що з них можна утворити складену функцію $y = f(\varphi(x))$. Диференціал складеної функції визначається рівністю $dy = y'_x du$.* Тобто, *форма диференціала функції не залежить від того, є аргумент незалежною змінною чи функцією іншого аргументу.*

Зауваження. Інваріантна (незмінна) саме форма диференціала, а не його зміст. У формулі $dy = f'_u \cdot du$ множник du – не тільки диференціал, але і приріст Δu аргументу u, якщо u – незалежна змінна. Однак du – диференціал u, але не приріст Δu, якщо аргумент u – у свою чергу функція деякої змінної x.

Таблиця 3.2 – Правила обчислення диференціалів

Правила обчислення диференціалів	
$d(u+v) = du + dv$	$d(uv) = vdu + udv$
$d(u-v) = du - dv$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Таблиця 3.3 – Основні диференціали

$d(Cu) = Cdu$	$dy = y'_u\, du,\quad y = f(u(x))$
$dC = 0$	$d(\sin u) = \cos u\ du$
$d(u^{\alpha}) = \alpha u^{\alpha-1}\, du$	$d(\cos u) = -\sin u\ du$
$d(au+b) = a\ du$	$d(tg\, u) = \frac{du}{\cos^2 u}$
$d(au^2+bu+c) =$ $= (2au+b)\ du$	$d(ctg\, u) = -\frac{du}{\sin^2 u}$
$d(\sqrt{u}) = \frac{du}{2\sqrt{u}}$	$d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
$d(\ln u) = \frac{du}{u}$	$d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
$d(a^u) = a^u \ln a\ du$	$d(arctg\, u) = \frac{du}{1+u^2}$
$d(e^u) = e^u\ du$	$d(arcctg\, u) = -\frac{du}{1+u^2}$

Приклад 1. Знайти диференціал функції:

а) $y = e^{\sqrt{x}} \ln \sin x$; б) $y = \sqrt[3]{x^2} / \cos x$; в) $\sin(x^2 - y) = xy$;

г) $x = t + \sin t;\ y = t \cos t$; д) $\ln(x - y) = x^2 + y^3$.

□ а) $dy = d\left(e^{\sqrt{x}} \ln \sin x\right) = \ln x \cdot d\left(e^{\sqrt{x}}\right) + e^{\sqrt{x}} d(\ln \sin x) = \ln \sin x \times$
$\times e^{\sqrt{x}} \left(1/\left(2\sqrt{x}\right)\right) dx + e^{\sqrt{x}} \cdot (\cos x / \sin x) dx = e^{\sqrt{x}} \left(1/\left(2\sqrt{x}\right) \ln \sin x + ctgx\right) dx$;

б) $d(\sqrt[3]{x^2} / \cos x) = (\cos x \cdot d(\sqrt[3]{x^2}) - \sqrt[3]{x^2}\, d(\cos x)) / \cos^2 x =$

$$= (2/3 x^{-1/3} \cos x + \sqrt[3]{x^2} \sin x) dx / \cos^2 x;$$

б) $\left(\sin(x^2 - y)\right)' = (xy)'$; $\cos(x^2 - y)(x^2 - y)' = x' y + xy'$;

$\cos(x^2 - y)(2x - y') = y + xy'$; $2x \cos(x^2 - y) -$
$- y' \cos(x^2 - y) = y + xy'$; $xy' + y' \cos(x^2 - y) =$
$= 2x \cos(x^2 - y) - y$; $y' = \dfrac{2x \cos(x^2 - y) - y}{x + \cos(x^2 - y)}$;

$$dy = y' dx = \frac{2x \cos(x^2 - y) - y}{x + \cos(x^2 - y)} dx;$$

г) $dy = y'_t dt = (t \cos t)'_t\, dt = (\cos t - t \sin t) dt$;

д) розв'язати самостійно. ■

Диференціал у наближених обчисленнях. При достатньо малому Δx можна наближено замінити приріст функції її диференціалом, тобто $f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) \approx f'\left(x_0\right) \Delta x$. Тоді наближене шукане значення функції $y = f(x)$ можна знайти за формулою:

$$f(x) = f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right) \Delta x.$$

Приклад 2. Обчислити наближено $\sin 46^\circ$.

□ Покладемо $x_0 = \pi/4$, що відповідає 45°; $\Delta x = \pi/180$, що відповідає 1°; $x_0 + \Delta x = \pi/4 + \pi/180$, що відповідає 46°. Оскільки

$(\sin x)'=\cos x$, то:

$$\sin 46^0 = \sin(\pi/4+\pi/180)\approx \sin(\pi/4)+\cos(\pi/4)\cdot(\pi/180)=$$

$$=\sqrt{2}/2+\left(\sqrt{2}/2\right)\cdot\left(\pi/180\right)\approx 0{,}7071+0{,}7071\cdot 0{,}0175\approx 0{,}7191. \ ■$$

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$. Тоді похідна $f'(x)$ також є функцією аргументу x і може мати похідну. Похідна від отриманої функції $f'(x)$ називається ***похідною другого порядку*** або ***другою похідною*** від функції $f(x)$. Другу похідну в точці x_0 позначають так:

$$y''(x_0), \text{ або } f''(x_0), \text{ або } d^2 f(x_0)/dx^2, \text{ або } f''(x)\big|_{x=x_0}.$$

Похідну $f'(x)$ називають ***похідною першого порядку*** (***першою похідною***), а саму функцію $f(x)$ вважають ***похідною нульового порядку*** (***нульовою похідною***).

Отже, *друга похідна – це похідна від першої похідної:* $y''=(y')'$. Аналогічно визначають ***похідні третього і наступних порядків***: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$, $n=1,2,\ldots$. Отже, ***похідна*** n***-го порядку*** – *це похідна від похідної попереднього* $(n-1)$*-го порядку.*

Механічний зміст другої похідної. Якщо заданий закон прямолінійного руху тіла $s=s(t)$, то перша похідна $ds/dt=v(t)$ – швидкість, а *друга похідна* $d^2s/dt^2=dv/dt=a(t)$ *– прискорення.*

Приклад 3. Задано закон руху матеріальної точки:

$$s=(1/2)t^4-(1/3)t^3+t^2+10t+4.$$

Знайти швидкість $v(t)$ та прискорення $a(t)$ точки через $t=2$ після початку руху.

□ $v(t)=s'=2t^3-t^2+2t+10$; $v(2)=16-4+4+10=26$;

$a(t)=s''=v'=6t^2-2t+2$; $a(2)=24-4+2=22$. ■

Приклад 4. Знайти третю похідну y''', якщо $y=\cos^6 x$.

□ Послідовно знайдемо y', y'', y''':

$$y' = -6\cos^5 x\sin x;\quad y'' = \left(-6\cos^5 x\sin x\right)' = -6\cdot\left(-5\cos^4 x\sin x\times\right.$$

$$\left.\times\sin x + \cos^5 x\cdot\cos x\right) = 30\cos^4 x\sin^2 x - 6\cos^6 x;$$

$$y''' = \left(30\cos^4 x\sin^2 x - 6\cos^6 \tilde{o}\right)' = 30\cdot\left(-4\cos^3 x\cdot\sin x\cdot\sin^2 x+\right.$$

$$\left.+\cos^4 x\cdot 2\sin x\cdot\cos x\right) - 6\cdot 6\cos^5 x\left(-\sin x\right) =$$

$$= -120\cos^3 x\sin^3 x + 24\cos^5 x\sin x.\quad \blacksquare$$

Знайдемо вираз для другої похідної y''_{xx} параметрично заданої функції $y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$. За означенням:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (\psi'_t \cdot t'_x)'_x = (\psi'_t)'_x \cdot t'_x + \psi'_t (t'_x)'_x.$$

Обчислюючи похідну по x функції ψ'_t як похідну складеної функції $(\psi'_t)'_x = \psi''_{tt} \cdot t'_x$, дістанемо: $y''_{xx} = \psi''_{tt}(t'_x)^2 + \psi'_t \cdot t''_{xx}$.

Оскільки $t'_x = 1/x'_t$, а

$$t''_{xx} = (t'_x)'_x = (1/x'_t)'_x = -(1/(x'_t)^2)\cdot x''_{tt}\cdot t'_x = -x''_{tt}/(x'_t)^3,$$

то остаточно маємо: $y''_{xx} = (y''_{tt}\cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt})/(x'_t)^3$.

Приклад 5. Знайти другу похідну d^2y/dx^2 для функції, заданої у параметричній формі $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$.

□ Спочатку обчислимо перші та другі похідні від заданих функцій по параметру t:

$$x'_t = -2\sin t,\ x''_{tt} = -2\cos t;\ y'_t = 3\cos t,\ y''_{tt} = -3\sin t.$$

Тоді $d^2y/dx^2 = ((-2\sin t)(-3\sin t) -$

$$-(3\cos t)(-2\cos t)) : (-2\sin t)^3 = -3/(4\sin^3 t).\quad \blacksquare$$

Приклад 6. Перевірити, чи задовольняє задана функція вказаній умові: $y = x\, ctg\, x$; $y''\sin^2 x = 2y - 2$.

□ Обчислимо похідні, що входять у зазначене рівняння:

$$y' = ctgx - x\cdot 1\big/\sin^2 x;\quad y'' = -1\big/\sin^2 x -$$

$$-(\sin^2 x - x\cdot 2\sin x\cos x)\big/\sin^4 x = (-2\sin x + 2x\cos x)/\sin^3 x.$$

Підставимо функцію та одержані похідні у рівняння:

$$\left((-2\sin x + 2x\cos x)/\sin^3 x\right)\cdot \sin^2 x = 2x\cdot ctgx - 2\,;$$

$$2x\cdot ctgx - 2 = 2x\cdot ctgx - 2 \text{ – істинно.}$$

Отже, задана функція задовольняє вказаній умові. ■

Нехай маємо функцію $y = f(x)$. Її диференціал $dy = f'(x)\cdot dx$ є деякою функцією x, але від x може залежати тільки перший множник $f'(x)$, другий множник dx є приростом незалежної змінної x і від значення цієї змінної не залежить. Оскільки dy є функція від x, то можна говорити про диференціал цієї функції.

Диференціал від диференціала функції називають ***другим диференціалом*** (***диференціалом другого порядку***) цієї функції і позначають через d^2y:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали третього і наступних порядків. ***Диференціалом*** n***-го порядку*** називається перший диференціал від диференціала попереднього $(n-1)$-го порядку:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = \left(f^{(n-1)}(x)\cdot dx^{n-1}\right)'\cdot dx =$$
$$= \left(f^{(n-1)}(x)\right)'\cdot dx^{n-1}\cdot dx = f^{(n)}(x)\cdot dx^n.$$

3.1.4 Правило Лопіталя розкриття невизначеностей

Познайомимося ще з одним простим і потужним методом обчислення границь – правилом Лопіталя.

Теорема (***правило Лопіталя для невизначеності виду*** $0/0$). *Нехай функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *диференційовані в деякому околі точки* a *(*a *– число або символ* ∞, $-\infty$, $+\infty$*), крім, можливо, самої точки* a. *Нехай також* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$ *і* $\varphi'(x) \neq 0$ *в кожній точці* x *з вище вказаного околу* a, $x \neq a$. *Тоді, якщо існує границя (скінченна чи нескінченна) відношення похідних* $f'(x)/\varphi'(x)$ *при* $x \to a$, *то існує і границя відношення самих функцій* $f(x)/\varphi(x)$ *при*

$x \to a$ *, до того ж* $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/\varphi(x)) = |0/0| = \lim\limits_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))$.

Зауваження. Якщо границя (скінченна чи нескінченна) відношення похідних не існує, то правило Лопіталя застосовувати не можна. Але це не свідчить про те, що границя відношення самих функцій не існує. Наприклад:

$$f(x) = x^2 \sin(1/x); \quad f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x); \quad \varphi(x) = x;$$

$$\varphi'(x) = 1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(1/x) - \cos(1/x)}{1}$$ – не існує,

але $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(1/x)}{x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$.

Правило Лопіталя можна застосовувати повторно, але потрібно кожного разу перевіряти, чи не розкрилася невизначеність. Перед використанням правила Лопіталя рекомендується спочатку виконати усі можливі спрощення, наприклад, скоротити чисельник та знаменник на спільні множники, розбити шукану границю на окремі складові та застосувати стандартні границі чи еквівалентні нескінченно малі. Суміщення правила Лопіталя з іншими методами знаходження границь дозволяє суттєво спростити обчислення.

Зауваження. ***Правило Лопіталя розкриття невизначеності виду*** ∞/∞ аналогічне правилу Лопіталя для невизначеності $0/0$:

$$\lim_{x\to a}(f(x)/\varphi(x)) = |\infty/\infty| = \lim_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x)).$$

Приклад 1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi - 4arctg\,x}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\cos(\pi x)\ln(x-5)}{\ln(e^x - e^5)}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - \cos 3x}$; е) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(1+x^2)}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi - 4arctg\,x}{\ln x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\pi - 4arctg\,x)'}{(\ln x)'} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-4\cdot 1/(1+x^2)}{1/x} = -2\,; \quad \text{б)} \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}\,;$$

$$\text{в)} \lim_{x\to\pi/2} \frac{tg\,3x}{tg\,5x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| == \lim_{x\to\pi/2} \frac{(tg\,3x)'}{(tg\,5x)'} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{(1/\cos^2 3x)\cdot 3}{(1/\cos^2 5x)\cdot 5} =$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2} \frac{(\cos 5x)'}{(\cos 3x)'}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2} \frac{-\sin 5x\cdot 5}{-\sin 3x\cdot 3}\right)^2 = \frac{5}{3}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2 = \frac{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{-1}\right)^2 = \frac{5}{3}\,;$$

$$\text{г)} \lim_{x\to 5} \frac{\cos(\pi x)\ln(x-5)}{\ln(e^x-e^5)} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 5}\cos(\pi x)\times$$

$$\times \lim_{x\to 5} \frac{\left(\ln(x-5)\right)'}{\left(\ln(e^x-e^5)\right)'} = (-1)\cdot\lim_{x\to 5} \frac{1/(x-5)}{\left(1/(e^x-e^5)\right)\cdot e^x} =$$

$$= -\lim_{x\to 5} \frac{e^x-e^5}{(x-5)e^x} = \left|\frac{0}{0}\right| = -\lim_{x\to 5} \frac{\left(e^x-e^5\right)'}{(x-5)'} : \lim_{x\to 5} e^x =$$

$$= -\lim_{x\to 5}\left(e^x/1\right) : e^5 = -e^5 : e^5 = -1\,.$$

Пункти д) і е) розв’язати самостійно. ■

Зауваження. Для розкриття невизначеностей виду $0\cdot\infty$ і $\infty-\infty$ спочатку їх за допомогою тотожних перетворень зводять до одного з двох основних видів $0/0$ або ∞/∞, а потім застосовують правило Лопіталя. Формальний запис:

$$f\cdot\varphi = |0\cdot\infty| = f/(1/\varphi) = |0/0|$$

$$\text{або}\quad f\cdot\varphi=|0\cdot\infty|=\varphi/(1/f)=|\infty/\infty|;$$

$$f-\varphi=|\infty-\infty|=\frac{1/\varphi-1/f}{(1/f)\cdot(1/\varphi)}=|0/0|.$$

Приклад 2. Знайти границі:

$$\text{а) } \lim_{x\to\pi/2}(2x-\pi)tg\,5x;\quad \text{б) } \lim_{x\to+0}\ln(1+2x)\ln x;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\left(1/x^2-ctg\,x\right);\quad \text{г) } \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(3x+e^x)-2x\right);$$

$$\text{д) } \lim_{x\to 1-0}\left(1/\left(\sin\pi x\cdot\ln(1-x)\right)\right).$$

□ а) $$\lim_{x\to\pi/2}(2x-\pi)tg\,5x=|0\cdot\infty|=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2x-\pi}{ctg\,5x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(2x-\pi)'}{(ctg\,5x)'}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2}{\left(-1/\sin^2 5x\right)\cdot 5}=-\frac{2}{5};$$

б) $$\lim_{x\to+0}\ln(1+2x)\ln x=|0\cdot\infty|=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+2x)}{\ln^{-1}x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln(1+2x)\right)'}{\left(\ln^{-1}x\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{2/(1+2x)}{-\ln^{-2}x\cdot(1/x)}=-2\lim_{x\to+0}x\ln^2 x:$$

$$:\lim_{x\to+0}(1+2x)=|0\cdot\infty|=-2\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{x^{-1}}:1=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=-2\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{(x^{-1})'}=$$

$$=-2\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot 1/x}{-x^{-2}}=4\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=4\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'}=$$

$$=4\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-x^{-2}}=-4\lim_{x\to+0}x=0;$$

в) $$\lim_{x\to 0}\left(1/x^2-ctg\,x\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x^2\cos x}{x^2\sin x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x^2\cos x)'}{(x^2\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 2x\cos x + x^2\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x} =$$

$$= |1/0| = \infty;$$

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x+e^x) - 2x\right) = |\infty - \infty| = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x+e^x) - \ln e^{2x}\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{3x+e^x}{e^{2x}} = \ln \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+e^x}{e^{2x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \ln \lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+e^x)'}{(e^{2x})'} =$$

$$= \ln \lim_{x\to+\infty}\frac{3+e^x}{e^{2x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \ln \lim_{x\to+\infty}\frac{(3+e^x)'}{(e^{2x})'} = \ln \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2e^{2x}} = \ln 2;$$

д) розв'язати самостійно. $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(1/\left(\sin \pi x \cdot \ln(1-x)\right)\right) = -\infty$. ■

Зауваження. Для розкриття невизначеностей виду 0^0, 1^∞ і ∞^0 спочатку показниково-степеневий вираз f^φ (за основною логарифмічною тотожністю, припускаючи $f > 0$) записують у вигляді $f^\varphi = e^{\varphi \ln f}$. У показнику маємо невизначеність виду $0\cdot\infty$, яка зводиться (як показано вище) до невизначеності $0/0$ або ∞/∞.

Приклад 3. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(x)^{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tg\, x)^{2x-\pi}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 7x)^{4/(7x^2)}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+5^x\right)^{1/x}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin 2x} = \left|0^0\right| = A$; $\ln A = \lim\limits_{x\to+0} \ln x^{\sin 2x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \ln x \cdot \sin 2x = |\infty\cdot 0| = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1/\sin 2x)'} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{\left(-1/\sin^2 2x\right)\cdot\cos 2x\cdot 2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\cdot\cos 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0; \quad A = e^0 = 1;$$

б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tg\,x)^{2x-\pi}=\left|\infty^0\right|=A;$

$$\ln A=\lim_{x\to\pi/2}\ln(tg\,x)^{2x-\pi}=\lim_{x\to\pi/2}\left((2x-\pi)\cdot\ln tg\,x\right)=$$

$$=\left|0\cdot\infty\right|=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln tg\,x}{(2x-\pi)^{-1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\ln tg\,x)'}{\left((2x-\pi)^{-1}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1/tg\,x)\cdot(1/\cos^2 x)}{-(2x-\pi)^{-2}\cdot 2}=-\lim_{x\to\pi/2}\frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x\cdot\cos x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=-\lim_{x\to\pi/2}\frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=-\lim_{x\to\pi/2}\frac{\left((2x-\pi)^2\right)'}{(\sin 2x)'}=$$

$$=-\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\cdot(2x-\pi)\cdot 2}{\cos 2x\cdot 2}=0;\quad A=e^0=1;$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 7x)^{4/(7x^2)}=\left|1^\infty\right|=A;\ \ \ln A=\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos 7x)^{4/(7x^2)}=$

$$=\frac{4}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 7x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{4}{7}\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos 7x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\frac{4}{7}\lim_{x\to 0}\frac{(1/\cos 7x)\cdot(-\sin 7x)\cdot 7}{2x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{tg\,7x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{(tg\,7x)'}{x'}=-2\lim_{x\to 0}\frac{(1/\cos^2 7x)\cdot 7}{1}=-14;\ \ A=e^{-14};$$

г) розв’язати самостійно. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+5^x\right)^{1/x}=5$. ■

Запитання для самоконтролю

1. Що називається похідною функції?
2. У чому полягає геометричний зміст похідної? Наведіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.
3. За якими правилами обчислюється похідна суми, різниці, добутку та частки двох функцій?

4. Як знаходиться похідна складеної функції? Оберненої функції? Параметрично заданої функції?
5. Наведіть формули похідних основних елементарних функцій.
6. Як здійснюється диференціювання неявно заданої функції?
7. У чому полягає правило логарифмічного диференціювання? У яких випадках необхідно його використовувати?
8. Дайте означення похідної n-го порядку. У чому полягає фізичний зміст другої похідної?
9. Що називається диференціалом функції?
10. Як зв'язані похідна і диференціал?
11. У чому полягає інваріантність форми першого диференціала?
12. Як застосовується диференціал у наближених обчисленнях?
13. У чому полягає правило Лопіталя? Для розкриття невизначеностей яких видів воно застосовується безпосередньо?
14. Як зводяться невизначеності $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞ і ∞^0 до одного з основних видів $0/0$ чи ∞/∞, що необхідно при застосуванні правила Лопіталя?

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Знайти рівняння дотичної до графіка заданої функції у відповідній точці M_0. Зобразити дотичну в прямокутній системі координат Oxy:

а) $y = \dfrac{x^x \cdot (3-x)^3}{\sqrt[3]{(6x+2)^2}}$, $x_0 = 1$; б) $\begin{cases} x = (t-\pi)\cos t + 1, \\ y = 3\sin t + t - \pi, \end{cases}$ $t_0 = \pi$;

в) $x^2 - y^3 + xy - 3 = 0$, $M_0(2;-1)$.

Відповідь: а) $y = -2x + 4$; б) $y = 2x - 2$; в) $y = 3x - 7$.

Приклад 2. Перевірити, чи задовольняє задана функція указаній умові: $y = e^x \ln x$, $x^2 y'' - 2x^2 y' + x^2 y + e^x = 0$.

Відповідь: задана функція задовольняє вказаній умові.

Приклад 3. Застосовуючи правило Лопіталя та інші прийоми, знайти вказані границі:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2arctg\,x-\pi}{\ln(1+1/x)}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\pi-arcctg\,x)$; в) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x+2x)^{3/x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}(\sin x+x)^{2/\ln x}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi+0}(ctg\,x)^{x-\pi}$.

Відповідь: а) -2; б) -1; в) $-1/2$; г) e^6; д) e^2; е) 1.

Приклад 4. Динамічна самоіндукція L антени задається функцією $L(\lambda)=\left(L_0/(2\pi l)\right)\lambda\, tg(\pi l/\lambda)$, де аргумент λ – довжина хвилі; L_0 – статична самоіндукція; l – діюча довжина антени. Знайти $L_\infty=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}L(\lambda)$.

Відповідь: $L_\infty=(1/2)L_0$.

Лекція 3.2 Дослідження функції за допомогою похідних

План

3.2.1 Умови зростання та спадання функції. Екстремуми функції. Найменше та найбільше значення функції на відрізку

3.2.2 Умови опуклості та угнутості графіка функції та наявності перегину

3.2.3 Асимптоти графіка функції

3.2.4 Загальна схема дослідження функції та побудови графіка

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *умови зростання та спадання функції, максимум і мінімум, необхідні та достатні умо¬ви екстремуму, стаціонарні точки, найменше та найбільше значення, опуклість і вгнутість, точки перегину, асимптоти.*

Вивчення кількісної сторони різних явищ приводить до встановлення та дослідження функціональних залежностей між змінними величинами, що їх характеризують. Далі наведені загальні правила дослідження поведінки функції, що дозволяють, зокрема, зробити ескіз її графіка.

3.2.1 Умови зростання та спадання функції. Екстремуми функції. Найменше та найбільше значення функції на відрізку

Теорема 1 ***(достатні умови монотонності та сталості)****. Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і диференційована в усіх його внутрішніх точках. Якщо для всіх* $x \in (a;b)$ *похідна* $f'(x)$:

1) *додатна, то функція на цьому відрізку зростає*;
2) *від'ємна, то функція на цьому відрізку спадає*;
3) *дорівнює нулю, то функція на цьому відрізку – стала*.

Зауваження. Розглядаємо монотонність у строгому смислі.

Приклад 1. Визначити інтервали зростання і спадання функції:

а) $y = (1/4)x^4$;   б) $y = arctg\, x$.

□ а) Похідна цієї функції $y' = x^3$. Коли $x > 0$, то $y' > 0$ – функція зростає; коли $x < 0$, то $y' < 0$ – функція спадає;

б) похідна цієї функції $y' = 1/(x^2+1)$ додатна при всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Отже, функція $y = arctg\, x$ всюди зростає. ■

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = x_0$, тобто, x_0 – внутрішня точка області визначення $D(f)$. Точка x_0 називається ***точкою мінімуму*** (відповідно ***максимуму***), якщо для всіх $x \neq x_0$ з деякого околу цієї точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (відповідно $f(x_0) > f(x)$). Точки обох типів – мінімуму $x_{\min}$ та максимуму $x_{\max}$ – називають ***точками екстремуму***, а значення функції $y = f(x)$ в точках екстремуму – ***екстремальними значеннями*** (***екстремумами***) ***функції*** відповідного типу: $y_{\min} = f(x_{\min})$; $y_{\max} = f(x_{\max})$.

Зауваження. Розрізняють точки ***гладкого екстремуму*** (рис. 3.2), в околі яких функція неперервно диференційована (графік гладкий) і похідна $f'(x) = 0$ (дотична паралельна осі Ox), і точки ***гострого екстремуму*** (рис. 3.3), в яких функція недиференційована (графік зазнає зламу) – похідна $f'(x)$ має розрив (нескінченна чи взагалі не існує).

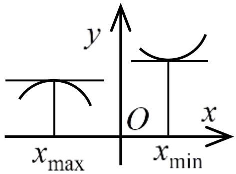


Рисунок 3.2

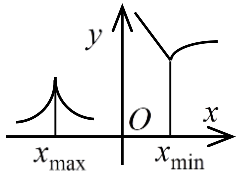


Рисунок 3.3

Розглянемо приклади функцій, що мають розриви похідної:

а) функція $y = |x|$ – неперервна, але у точці $x = 0$ не має похідної. З графіка (рис. 3.4) видно, що у точці $x = 0$ функція має мінімум $y_{\min} = y(0) = 0$;

б) функція $y = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$ не має похідної у точці $x = 0$: $y' \to \infty$, коли $x \to 0$ (перевірте самостійно). З графіка (рис. 3.5) видно, що у точці $x = 0$ функція має максимум $y_{\max} = y(0) = 1$;

в) функція $y = x^{1/3}$ не має похідної у точці $x = 0$: $y' \to \infty$, коли $x \to 0$. У цій точці функція екстремуму не має (рис. 3.6).

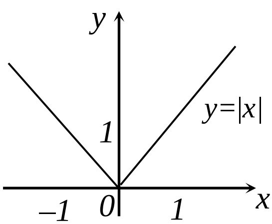


Рисунок 3.4

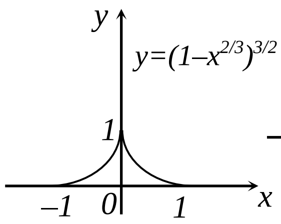


Рисунок 3.5

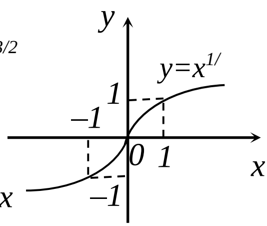


Рисунок 3.6

Теорема ***(необхідна умова екстремуму)****. Якщо неперервна функція* $f(x)$ *має в точці* x_0 *екстремум, то її похідна у цій точці або існує і дорівнює нулю* $f'(x_0) = 0$*, або не існує.*

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці перша похідна або існує і дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою першої похідної***.

Критична точка, в якій перша похідна дорівнює нулю, називається ***стаціонарною точкою*** функції. Стаціонарна точка – це точка, що «підозріла» на гладкий екстремум.

Дослідження функції у критичних точках спирається на достатні умови екстремуму.

Теорема 2 ***(достатня умова екстремуму за першою похідною)****. Нехай* x_0 *– критична точка похідної функції* $f(x)$*, яка диференційована в деякому околі цієї точки* x_0*, крім, можливо, самої точки* x_0*. Якщо при переході зліва направо через цю точку*:

1) *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з плюса на мінус, то при* $x = x_0$ *функція має максимум*;

2) *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з мінуса на плюс, то при* $x = x_0$ *функція має мінімум*;

3) *похідна* $f'(x)$ *не змінює знака, то при* $x = x_0$ *функція не має екстремуму*.

Правило дослідження функції $f(x)$ *на монотонність і екстремум*:

1) *знайти область визначення функції* $D(f)$;

2) *продиференціювати функцію* $y = f(x)$;

3) *знайти критичні точки першої похідної*:

– стаціонарні точки. Для цього розв'язати рівняння $f'(x) = 0$ *і з одержаних розв'язків вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції;*

– точки розриву похідної $f'(x)$*. Для цього знайти точки, в яких похідна не існує, і з них вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції;*

4) *на координатній прямій* Ox *відмітити (штриховкою) область визначення* $D(f)$ *функції, вказавши її межові точки, і нанести критичні точки першої похідної. У результаті область визначення буде розбита на інтервали між сусідніми точками;*

5) *на кожному інтервалі довільно вибрати одну пробну внутрішню точку* x *і визначити знак похідної* $f'(x)$ *у цій точці, а значить, і на даному інтервалі;*

6) *виходячи зі знака похідної* $f'(x)$, *зробити висновок про поведінку функції на кожному інтервалі*:

якщо «$+$*», то* $f(x)$ *зростає; якщо «*$-$*», то* $f(x)$ *спадає.*

7) *проаналізувати зміну знака похідної* $f'(x)$ *при переході через кожну критичну точку зліва направо і зробити висновок про наявність і характер екстремуму*:

якщо «$+,-$*», то* $f(x)$ *має максимум; якщо «*$-,+$*», то* $f(x)$ *має мінімум; якщо «*$+,+$*» або «*$-,-$*», то* $f(x)$ *екстремуму не має;*

8) *обчислити екстремуми функції* $f(x)$ *у знайдених точках екстремуму, якщо такі існують*:

$$y_{\min} = f(x_{\min}); \quad y_{\max} = f(x_{\max}).$$

Приклад 2. Дослідити функцію $y = \sqrt[3]{x^2}/(x-4)$ на монотонність і екстремум.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ x-4 \neq 0;\ x \neq 4;\ x \in (-\infty;4) \cup (4;+\infty).$$

Похідна цієї функції:

$$y' = \frac{(2/3)\cdot x^{-1/3}(x-4) - \sqrt[3]{x^2}}{(x-4)^2} = -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2}.$$

Критичні точки:

а) стаціонарні точки:

$$y' = 0;\quad -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2} = 0;\quad x+8=0;\ x=-8 \in D(y);$$

б) точки розриву y': $3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0$;

$$\sqrt[3]{x} = 0 \text{ або } \sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0;\quad x = 0 \in D(y);\quad x = 4 \notin D(y).$$

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 3.7). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значенню аргументу $x_1 = -9$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$, і визначаємо в них знак похідної:

$$y'(-9) = -\frac{-1}{3\sqrt[3]{-9}\cdot(-13)^2} < 0;\ y'(-1) = -\frac{7}{3\sqrt[3]{-1}\cdot(-5)^2} > 0;$$

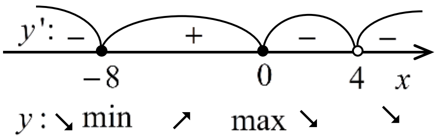


Рисунок 3.7

$$y'(1) = -\frac{9}{3\sqrt[3]{1}\cdot(-3)^2} < 0;$$

$$y'(5) = -\frac{13}{3\sqrt[3]{5}\cdot 1^2} < 0.$$

Функція зростає при $x \in (-8; 0)$; функція спадає при $x \in (-\infty; -8) \cup (0;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

Точка мінімуму $x_{\min} = -8$; точка максимуму $x_{\max} = 0$. Відповідні екстремальні значення функції:

$$y_{\min} = y(-8) = \sqrt[3]{(-8)^2}\Big/(-8-4) = -1/3; \quad y_{\max} = y(0) = 0. \ ■$$

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді за відповідною властивістю на цьому відрізку вона досягає найбільшого і найменшого значень, які відповідно називають ***глобальним (абсолютним) максимумом і мінімумом*** даної функції $f(x)$ на вказаному відрізку $[a;b]$. Ці значення можуть досягатися на кінцях відрізка або у внутрішніх точках, що є точками екстремуму функції. Можливу ситуацію проілюстровано на рис. 3.8, де глобальні екстремуми реалізуються на кінцях відрізка.

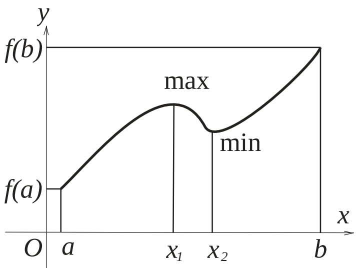


Рисунок 3.8

З наведених міркувань випливає *правило знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$*:*

1) знайти всі критичні точки першої похідної $f'(x)$*, що лежать усередині відрізка* $[a;b]$*;*

2) обчислити значення функції $f(x)$ *в знайдених критичних точках і на кінцях відрізка;*

3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше і найменше.

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення заданої функції на вказаному відрізку:

а) $y = x^3/3 - 4x^2$, $[-3;3]$; б) $y = x^2/2 - 9/x$, $[1;4]$.

□ Похідна цієї функції $y' = x^2 - 8x$.

Критичні точки:

а) стаціонарні точки: $y' = 0$; $x^2 - 8x = 0$; $x(x-8) = 0$;

$x = 0 \in [-3;3]$ або $x - 8 = 0$; $x = 8 \notin [-3;3]$;

б) точки розриву y': немає.

Обчислимо значення функції: $y(0) = 0$;

$$y(-3) = (-3)^3/3 - 4\cdot(-3)^2 = -45;\quad y(3) = 3^3/3 - 4\cdot 3^2 = -27.$$

Таким чином, найбільше значення $\max\limits_{x\in[-3;3]} y = y(0) = 0$ і найменше значення $\min\limits_{x\in[-3;3]} y = y(-3) = -45$;

б) розв'язати самостійно. ■

За допомогою теорії екстремумів вирішується багато оптимізаційних проблем прикладного характеру.

Припустимо, що розглядаються дві змінні величини x і y, які описують деякий процес і пов'язані функціональною залежністю $y = f(x)$, та потрібно відшукати значення аргументу x з певного проміжку X, що може бути необмеженим, при якому функція $y = f(x)$ приймає найменше чи найбільше значення.

Для розв'язання такої задачі насамперед варто скласти вираз для функції $y = f(x)$ і визначитися з проміжком X, на якому розглядаються значення аргументу, а потім знайти найбільше чи найменше значення отриманої функції в зазначеному інтервалі за описаною вище схемою.

Приклад 4. Визначити, при яких розмірах відкритого басейну фіксованого об'єму V з круглим днищем на облицювання внутрішньої поверхні буде затрачено найменшу кількість матеріалу.

□ Басейн має форму кругового циліндра. Позначимо радіус днища та висоту басейну відповідно як r і h. Тоді площа основи

$S_{осн} = \pi r^2$, площа бічної поверхні $S_{біч} = 2\pi rh$ і загальна площа для облицювання: $S = S_{осн} + S_{біч} = \pi r^2 + 2\pi rh$. Оскільки об'єм басейну $V = S_{осн}h = \pi r^2 h$ фіксований, то звідси можна виразити висоту: $h = V/(\pi r^2)$. Тоді загальна площа, яку необхідно облицювати, задається функцією від r: $S = \pi r^2 + 2\pi r \cdot V/(\pi r^2) = \pi r^2 + 2V/r$.

Далі потрібно знайти найменше значення цієї функції:

$$S' = 2\pi r - 2V/r^2;\; S' = 0;\; 2\pi r - 2V/r^2 = 0;\; r = \sqrt[3]{V/\pi}.$$

За змістом задачі функція на області визначення – інтервалі $(0;+\infty)$ – має глобальний мінімум. Оскільки $S \to +\infty$ при $r \to 0$ і $S \to +\infty$ при $r \to +\infty$, а усередині інтервалу $(0;+\infty)$ критична точка похідної єдина, то можна стверджувати, що в знайденій точці $r_{\min} = \sqrt[3]{V/\pi}$ функція досягає найменшого значення. При цьому:

$$h_{\min} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{V/\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{V/\pi};$$

$$S_{\min} = \pi\left(\sqrt[3]{V/\pi}\right)^2 + 2V/\sqrt[3]{V/\pi} = 3\sqrt[3]{\pi V^2}. \quad ■$$

Приклад 5. Знайти оптимальне за прибутком для виробника значення x_0 обсягу x випуску продукції за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 5$ за одиницю товару та відома функція витрат $C(x) = 8 + 3\ln(1+x) + x^2$.

□ Виторг $D(x)$ і прибуток $P(x)$ виробника визначаються як

$$D(x) = px = 5x;\quad P(x) = D(x) - C(x) = 5x - 8 - 3\ln(1+x) - x^2.$$

Оптимальне значення обсягу випуску відповідає найбільшому прибутку. Знайдемо похідну: $P'(x) = 5 - 3/(1+x) - 2x.$

Знайдемо критичні точки похідної.

Стаціонарні точки: $P'(x) = 0;\quad 5 - 3/(1+x) - 2x = 0;$

$$5 - 3/(1+x) - 2x = 0;\; 5 + 5x - 3 - 2x - 2x^2 = 0;\; 2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)=25;\ x_1=-1/2;\ \ x_2=2.$$

Точки розриву похідної: $1+x=0;\ x=-1.$

З економічного змісту задачі зрозуміло, що допустимі лише невід'ємні значення x. Отже $x_0=2$ – єдина критична точка. У цій точці функція набуває максимуму (переконайтеся самі, досліджуючи знаки похідної), що відповідає оптимальному обсягу випуску продукції. ■

3.2.2 Умови опуклості та угнутості графіка функції та наявності перегину

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $(a;b)$ і в точці $x_0\in(a;b)$ має скінченну похідну. Тоді до графіка даної функції у точці $M_0(x_0;f(x_0))$ можна провести дотичну.

Крива (графік функції) називається ***опуклою*** в точці x_0, якщо в деякому околі цієї точки вона розташована нижче дотичної, проведеної в точці x_0 (рис. 3.9). Якщо крива розташована вище дотичної, то вона називається ***угнутою*** (рис. 3.10).

Точка $M_0(x_0;f(x_0))$ називається ***точкою перегину***, якщо у досить малому її околі точки кривої з абсцисами $x<x_0$ лежать з одного боку від дотичної, а точки з абсцисами $x>x_0$ – з іншого (рис. 3.11). Тобто, у точці M_0 крива переходить а одного боку дотичної до іншого.

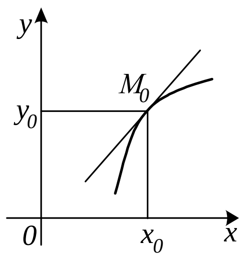


Рисунок 3.9

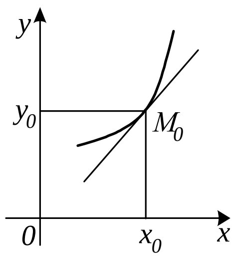


Рисунок 3.10

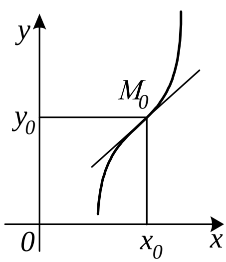


Рисунок 3.11

Крива (графік функції) називається ***опуклою на інтервалі*** $(a;b)$, якщо вона опукла в кожній його точці. Аналогічно, на ***інтервалі вгнутості*** крива лежить вище кожної своєї дотичної.

Точка перегину – це точка кривої, в якій сполучається ділянка опуклості з ділянкою вгнутості.

Теорема 1 (***достатні умови опуклості та вгнутості***). *Нехай на інтервалі* $(a;b)$ *задана двічі диференційована функція* $f(x)$. *Якщо для всіх* $x \in (a;b)$ *друга похідна* $f''(x)$:

1) від'ємна, то графік функції опуклий;

2) додатна, то графік функції вгнутий;

3) дорівнює нулю, то графік функції – пряма лінія.

Теорема 2 (***необхідні умови точки перегину***). *Якщо* $M_0(x_0;y_0)$ *– точка перегину графіка функції* $f(x)$, *то друга похідна* $f''(x)$ *у точці* x_0 *або існує та дорівнює нулю* $f''(x_0)=0$, *або не існує*.

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці друга похідна $f''(x)$ або існує та дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою другої похідної***.

Зауваження. Критичні точки другої похідної – це точки, що «підозрілі» на перегин.

Теорема 3 (***достатня умова точки перегину***). *Нехай* x_0 *– критична точка другої похідної функції* $f(x)$, *яка двічі диференційована в деякому околі цієї точки* x_0, *крім, можливо, самої точки* x_0. *Якщо при переході через цю точку*:

1) *друга похідна* $f''(x)$ *змінює знак, то при* $x = x_0$ *функція має перегин*;

2) *знак другої похідної* $f''(x)$ *не змінюється, то при* $x = x_0$ *функція перегину не має*.

Зауваження. Правило дослідження функції на опуклість, угнутість і перегин аналогічне правилу дослідження функції на монотонність і екстремум. Треба тільки замість знака першої похідної аналізувати знак другої похідної.

Приклад 1. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції $y = \ln(x^2+9)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ \ x^2+9>0\,;\ \ x\in(-\infty;+\infty)\,.$$

Знаходимо другу похідну:

$$y' = \frac{2x}{x^2+9};\quad y'' = 2\cdot\frac{x^2+9-2x\cdot x}{(x^2+9)^2} = \frac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}\,.$$

Критичні точки другої похідної:

а) $y''=0;\quad \dfrac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}=0;\ 9-x^2=0; x=\pm3\in D(y);$

б) точки розриву y'': $\ (x^2+9)^2=0;\ \ x\in\varnothing\,.$

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 3.12). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значенню аргументу $x_1=-4$, $x_2=0$, $x_3=4$ і визначаємо в них знак другої похідної:

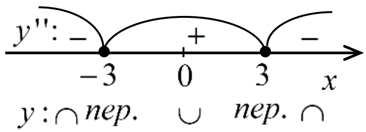


Рисунок 3.12

$$y''(-4)=\frac{2(9-(-4)^2)}{((-4)^2+9)^2}=\frac{2\cdot(-7)}{25}<0;$$

$$y''(0)=\frac{2(9-0^2)}{(0^2+9)^2}=\frac{2}{9}>0;\quad y''(4)=\frac{2(9-4^2)}{(4^2+9)^2}=\frac{2\cdot(-7)}{25}<0\,.$$

Функція опукла при $x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; функція вгнута при $x\in(-3;3)$.

Перегин при $x_1=-3$ і $x_2=3$. Тоді

$$y_1=\ln((-3)^2+9)=\ln18;\quad y_2=\ln(3^2+9)=\ln18\,.$$

Отже, $M_1(-3;\ln18)$ і $M_2(3;\ln18)$ – точки перегину. ■

3.2.3 Асимптоти графіка функції

Нехай $y = f(x)$ – функція, графік якої має нескінченну гілку, тобто він має точки, що лежать як завгодно далеко від початку координат.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається гілка графіка, що йде в нескінченність. Тобто, відстань від змінної точки $M\left(x;\, f(x)\right)$ до асимптоти прямує до нуля, якщо вказана точка рухається вздовж вітки графіка до нескінченності.

Зауваження. Крива може перетинати свою асимптоту, причому неодноразово.

Асимптоти графіка функції бувають двох видів: ***вертикальні*** й ***похилі*** (зокрема, ***горизонтальні***) (рис. 3.13). Розглянемо їх окремо.

1. *Вертикальна асимптота* має рівняння $x = a$, де a – точка, в якій хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ нескінченна.

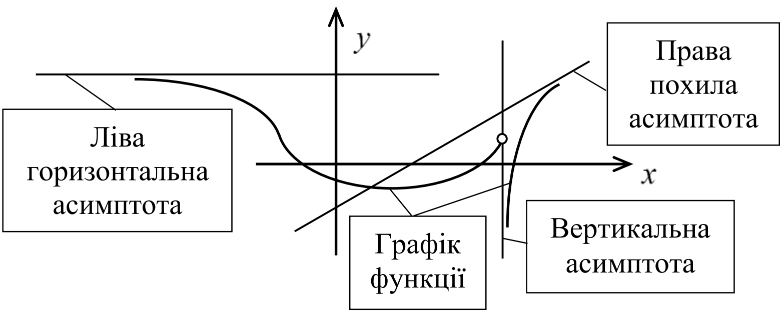


Рисунок 3.13

Зауваження. Точки, що «підозрілі» на вертикальні асимптоти, – це скінченні межові точки області визначення $D(f)$ та точки розриву функції $y = f(x)$. Графік функції може мати довільну кількість вертикальних асимптот.

Взаємне розташування нескінченної гілки графіка функції та відповідної вертикальної асимптоти $x = a$ можна з’ясувати за знаком нескінченності, до якої прямує $f(x)$, коли x необмежено наближається до a ліворуч або праворуч.

Приклад 1. Знайти вертикальні асимптоти графіка функції $y=\ln(x+3)/(x^2-16)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ \begin{cases} x+3>0 \\ x^2-16\neq 0 \end{cases};\quad \begin{cases} x>-3 \\ x\neq \pm 4 \end{cases};\quad x\in(-3;4)\cup(4;+\infty).$$

$x_1=-3$ і $x_2=4$ – точки, що «підозрілі» на вертикальні асимптоти.

$\lim\limits_{x\to -3+0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right)=\left|-\infty/(-7)\right|=+\infty \quad\Rightarrow$ пряма $x=-3$ – вертикальна асимптота, поблизу якої справа графік підіймається круто вгору.

$$\lim_{x\to 4-0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right)=\left|\ln 7/(-0)\right|=-\infty \text{ і}$$

$\lim\limits_{x\to 4+0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right)=\left|\ln 7/(+0)\right|=+\infty \;\Rightarrow$ пряма $x=4$ – вертикальна асимптота, поблизу якої зліва графік опускається круто вниз, а справа підіймається круто вгору. ■

2. *Похила* (зокрема *горизонтальна*) *асимптота*. Нехай функція $y=f(x)$ має при $x\to+\infty$ праву похилу асимптоту, рівняння якої $y=kx+b$ (рис. 3.14).

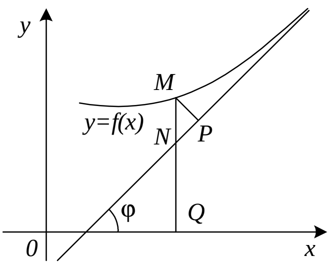


Рисунок 3.14

Числа k і b знаходяться як границі

$$k=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)/x\right);$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right),$$

де спочатку обчислюється k, а потім b. Якщо $k=0$, то похила асимптота перетворюється в горизонтальну.

Навпаки, якщо існують указані границі для визначення k і b, то має місце рівність $\lim\limits_{x\to+\infty} MP=0$ і пряма $y=kx+b$ є похила асимптота.

Якщо хоча б одна з двох границь для k і b не існує, то відповідної похилої асимптоти крива не має.

Зауваження. Аналогічно розглядається випадок лівої похилої (зокрема горизонтальної) асимптоти, коли $x \to -\infty$. Графік функції $y = f(x)$ може мати не більше двох похилих (зокрема горизонтальних) асимптот. При цьому крива повинна мати відповідну нескінченну гілку при $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$. Асимптоти можуть бути різними при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

Приклад 2. Знайти похилі асимптоти графіка функції:

а) $y = \ln(e^{2x} + e^{-3})$; б) $y = \ln(e^{x} - e^{2})$.

□ а) Область визначення функції:

$$D(y):\ e^{2x} + e^{-3} > 0;\ x \in (-\infty; +\infty).$$

Оскільки крива має ліву при $x \to -\infty$ і праву при $x \to +\infty$ нескінченні гілки, то можуть існувати обидві – ліва і права – похилі асимптоти.

Шукаємо ліву похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^{-3})}{x} = \left| \frac{-3}{-\infty} \right| = 0;$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(e^{2x} + e^{-3}\right) = -3.$$

Отже, пряма $y = -3$ – ліва горизонтальна асимптота.

Шукаємо праву похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^{-3})}{x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\ln(e^{2x} + e^{-3})\right)'}{x'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} \cdot 2}{e^{2x} + e^{-3}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^{2x})'}{(e^{2x} + e^{-3})'} = 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} \cdot 2}{e^{2x} \cdot 2} = 2;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln\left(e^{2x} + e^{-3}\right) - 2x\right) = |\infty - \infty| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)-\ln e^{2x}\right)=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+e^{-3}}{e^{2x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{2x}+e^{-3})'}{(e^{2x})'}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}\cdot 2}=\ln 1=0.$$

Отже, пряма $y=2x$ – права похила асимптота;

б) розв'язати самостійно. ■

Зауваження. У випадку дробово-раціональної функції $y=f(x)$ ліва і права похилі (зокрема горизонтальні) асимптоти одночасно існують чи ні, а їхні рівняння співпадають. При цьому коефіцієнти k і b можна шукати при умові $x\to\pm\infty$.

Приклад 3. Знайти асимптоти функції $y=(x^2+3x-1)/x$.

□ Маємо дробово-раціональну функцію. Її область визначення:

$$D(y):\ x\neq 0;\ \ x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

$x=0$ – точка, що «підозріла» на вертикальну асимптоту.

$\lim\limits_{x\to-0}\left((x^2+3x-1)/x\right)=\left|-1/(-\infty)\right|=+\infty$ і

$\lim\limits_{x\to+0}\left((x^2+3x-1)/x\right)=\left|-1/(+\infty)\right|=-\infty$ $\Rightarrow$ пряма $x=0$ – вертикальна асимптота.

Шукаємо похилу (зокрема горизонтальну) асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x-1}{x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left((x^2+3x-1)/x-x\right)=$$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(3-1/x)=3$ $\Rightarrow$ пряма $y=x+3$ – похила (ліва і права одночасно) асимптота. ■

Приклад 4. Знайти горизонтальну асимптоту при $x\to+\infty$ графіка функції середніх витрат $y=\dfrac{\ln(2xe^{3x}+1)}{x}$, $x>0$ на виробництво деякої продукції, де x – обсяг випуску.

□ Шукаємо праву горизонтальну асимптоту:

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2xe^{3x}+1)}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln(2xe^{3x}+1)\right)'}{x'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(e^{3x}+3xe^{3x})}{2xe^{3x}+1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{3x}+3xe^{3x})'}{(2xe^{3x}+1)'}=$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{3(2e^{3x}+3xe^{3x})}{2(e^{3x}+3xe^{3x})}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{2+3x}{1+3x}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{2/x+3}{1/x+3}=3.$$

Пряма $y=3$ – горизонтальна асимптота при $x\to+\infty$. ■

3.2.4 Загальна схема дослідження функції та побудови графіка

Нехай функція задана явно рівнянням $y=f(x)$. Повне дослідження цієї функції та побудову ескізу графіка можна здійснювати за наступною *загальною схемою*:

1. Попереднє дослідження.

1.1. Знаходження області визначення $D(f)$ функції.

1.2. Знаходження точок перетину графіка з осями координат.

1.3. Знаходження інтервалів знакосталості, де функція зберігає знак (додатна чи від’ємна).

1.4. Дослідження функції на парність і непарність.

1.5. Дослідження функції на періодичність.

2. Дослідження точок розриву функції та її поведінки на кінцях інтервалів області визначення. Знаходження області значень $E(f)$ функції. Знаходження асимптот.

2.1. Знаходження односторонніх границь функції в точках розриву та на скінченних кінцях інтервалів області визначення. Класифікація точок розриву. Знаходження вертикальних асимптот.

2.2. Дослідження поведінки функції «на нескінченності» (при $x\to-\infty$ і $x\to+\infty$). Знаходження області значень $E(f)$ функції. Знаходження похилих асимптот.

3. Дослідження функції за допомогою першої похідної.

3.1. Знаходження інтервалів зростання та спадання функції.

3.2. Знаходження точок екстремуму та відповідних екстремальних значень функції.

4. Дослідження функції за допомогою другої похідної.

4.1. Знаходження інтервалів опуклості та вгнутості функції.

4.2. Знаходження точок перегину.

5. Побудова графіка.

5.1. Побудова асимптот.

5.2. Побудова характерних точок, знайдених на попередніх етапах.

5.3. Виділення штриховкою вертикальних смуг (вище чи нижче осі Ox відповідно до знака функції), де лежать частини графіка.

5.4. При необхідності проведення додаткових обчислень значень функції в пробних точках з тих інтервалів, де потрібно уточнити розміщення графіка.

5.5. Побудова ескізу графіка.

Приклад 1. Дослідити функцію $y = 2\sqrt[3]{3x^2 - x^3}$ і побудувати ескіз її графіка.

□ Область визначення функції $D(f): x \in R$.

Точки перетину графіка функції:

з віссю Oy: $y(0) = 2(3 \cdot 0 - 0)^{1/3} = 0$;

з віссю Ox: $y = 0$; $2\left(3x^2 - x^3\right)^{1/3} = 0$; $3x^2 - x^3 = 0$; $x^2(3 - x) = 0$; $x = 0$; $x = 3$; маємо дві точки $(0;0)$ і $(3;0)$.

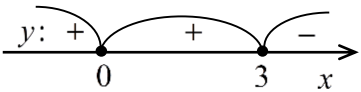


Рисунок 3.15

Інтервали знакосталості, де функція додатна чи від'ємна (рис. 3.15): функція від'ємна при $x \in (3; +\infty)$; функція додатна при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$.

$y(-x) \neq y(x)$; $y(-x) \neq -y(x)$ – функція не є парною і не є непарною.

Функція неперіодична.

Точок розриву і скінченних кінців інтервалів області визначення функція не має, тому вертикальні асимптоти відсутні.

Досліджуємо поведінку функції при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} 2(3x^2 - x^3)^{1/3} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} 2(3x^2 - x^3)^{1/3} = -\infty .$$

Область значень функції $E(f): y \in R$.

Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\left(3x^2 - x^3\right)^{1/3}}{x} = 2 \lim_{x\to\pm\infty} (3/x - 1)^{1/3} = -2;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2\left(3x^2 - x^3\right)^{1/3} + 2x \right) = \left|\infty - \infty\right| =$$

$$= 2 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - x^3 + x^3}{\left(3x^2 - x^3\right)^{2/3} - x\left(3x^2 - x^3\right)^{1/3} + x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= 6 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(3/x - 1)^{2/3} - (3/x - 1)^{1/3} + 1} == 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 .$$

Отже, пряма $y = -2x + 2$ є похила (ліва і права) асимптота.

Обчислимо похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y' = 2\left(\sqrt[3]{3x^2 - x^3}\right)' = 2(2 - x)\Big/\sqrt[3]{x(3 - x)^2} ;$$

стаціонарні точки: $y' = 0$; $2(2 - x)\Big/\sqrt[3]{x(3 - x)^2} = 0$; $x = 2$;

похідна не існує у точках: $\sqrt[3]{x(3 - x)^2} = 0$; $x = 0$ і $x = 3$.

Інтервали монотонності та екстремуми (рис. 3.16): функція спадає при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; функція зростає при $x \in (0; 2)$;

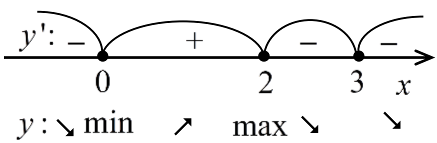


Рисунок 3.16

точка мінімуму $x_{\min} = 0$; точка максимуму $x_{\max} = 2$; відповідні екстремальні значення функції:

$$y_{\min} = y(0) = 0;$$

$$y_{\max} = y(2) = 2\sqrt[3]{3 \cdot 2^2 - 2^3} = 2\sqrt[3]{4} .$$

Обчислимо другу похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y'' = -4\Big/\left(x^{4/3}(3 - x)^{5/3}\right);$$

точки, де $y'' = 0$, відсутні; друга похідна не існує у точках:

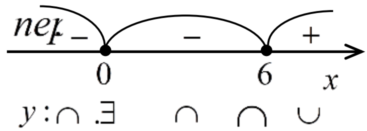


Рисунок 3.17

$x^{4/3}(3-x)^{5/3}=0$; $x=0$ і $x=3$.

Інтервали опуклості й угнутості та точки перегину (рис. 3.17): функція опукла при $x\in(-\infty;0)\cup(0;3)$; функція вгнута при $x\in(3;+\infty)$; $x_{пер}=3$;

$y_{пер}=y(3)=2\sqrt[3]{3\cdot 3^2-3^3}=0$. Отже, $(3;0)$ – точка перегину.

Ескіз графіка функції побудовано на рис. 3.18. ■

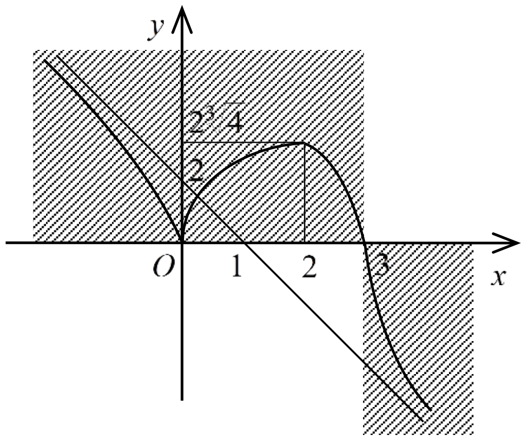


Рисунок 3.18

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягають достатні умови монотонності та сталості функції?
2. Що називається точкою мінімуму функції? Точкою максимуму?
3. У чому полягає необхідна умова екстремуму?
4. Що таке критичні точки першої похідної? Стаціонарні точки функції?
5. У чому полягає достатня умова екстремуму за першою похідною?

6. Сформулюйте правило дослідження функції на монотонність і екстремум за першою похідною.
7. Як знаходяться найменше та найбільше значення функції на відрізку?
8. Яка функція називається опуклою (вгнутою) на інтервалі?
9. Що таке точка перегину?
10. У чому полягають достатні умови опуклості та вгнутості?
11. У чому полягає необхідна умова точки перегину?
12. Що таке критичні точки другої похідної?
13. Сформулюйте правило дослідження функції на опуклість, угнутість та перегин за другою похідною.
14. Що називається асимптотою графіка функції? На які види діляться асимптоти?
15. Який вигляд має рівняння вертикальної асимптоти? Похилої асимптоти? Горизонтальної асимптоти?
16. Опишіть загальну схему повного дослідження функції та побудови ескізу графіка. Наведіть приклад.

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Для заданої функції визначити інтервали монотонності, знайти точки екстремуму та відповідні екстремальні значення функції:

$$\text{а) } y=\sqrt[3]{x^2}\big/(x+2)\,; \quad \text{б) } y=x^2-8\ln x\,; \quad \text{в) } y=x^3/(x-3)^2\,.$$

Відповідь: а) $y\downarrow,\ \ x\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(4;+\infty);$

$y\uparrow,\ \ x\in(0;4);\quad y_{\min}(0)=0;\ y_{\max}(4)=\sqrt[3]{2}\big/3;$

б) $y\downarrow,\ \ x\in(0;2);\quad y\uparrow,\ \ x\in(2;+\infty);\quad y_{\min}(2)=4=8\ln 2;$

в) $y\downarrow, x\in(3;9);\quad y\uparrow, x\in(-\infty;3)\cup(9;+\infty);\quad y_{\min}(9)=20\dfrac{1}{4}.$

Приклад 2. Знайти найменше m та найбільше M значення заданої функції на вказаному відрізку:

$$\text{а) } y=(1+\ln x)/x\,,\ \ [e^{-2};\ e]\,;\quad \text{б) } y=(x-2)e^x,\ [-2;\ 2].$$

Відповідь: а) $m=-e^2;\ \ M=1;$ б) $m=-e;\ M=0.$

Приклад 3. Знайти асимптоти заданої функції:

а) $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$; б) $y = xe^{-x^2}$; в) $y = 5\ln\dfrac{x+4}{x-2} + 3$.

Відповідь: а) $x = -1$; $x = 3$; $y = 2x + 7$; б) $y = 0$;

в) $x = -4$; $x = 2$; $y = 3$.

Приклад 4. Дослідити функцію $y = x^3 / (x^2 - 4)$ засобами диференціального числення, знайти асимптоти та побудувати графік.

Відповідь: графік на рисунку 3.19.

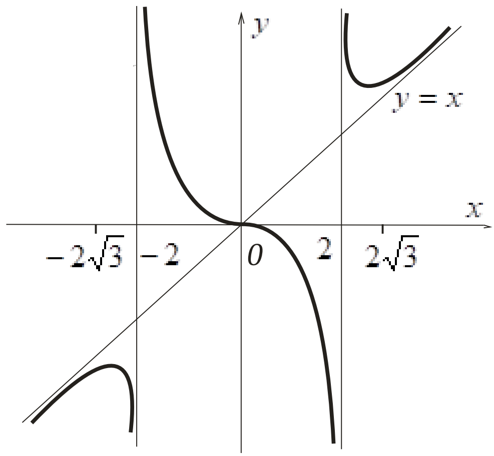


Рисунок 3.19

Приклад 5. Прямо над центром круглого дитячого майданчика заданого радіуса R планується повісити ліхтар. На якій висоті h потрібно це зробити, щоб він щонайкраще освітлював доріжку, якою обмежений майданчик.

Примітка. Ступінь освітлення поверхні прямо пропорційна косинусу кута падіння променів і обернено пропорційна квадрату відстані поверхні від джерела світла.

Відповідь: $h = R\sqrt{2}/2$.

Приклад 6. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати $A(x) = C(x)/x,$, де $C(x)$ – загальні витрати на випуск x одиниць продукції. Знайти оптимальне значення x_0 обсягу випуску на цьому етапі, якщо відома функція витрат $C(x) = 54 + 7x + 6x^2$.

Відповідь: $x_0 = 3.$

Лекція 3.3 Невизначений інтеграл. Методи інтегрування

План

3.3.1 Первісна функція та невизначений інтеграл. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів. Безпосереднє інтегрування

3.3.2 Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами

3.3.3 Інтегрування раціональних функцій

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *первісна функція, невизначений інтеграл, властивості невизначеного інтеграла, безпосереднє інтегрування, метод інтегрування заміною змінної, інтегрування частинами, інтегрування раціональних дробів.*

3.3.1 Первісна функція та невизначений інтеграл. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів. Безпосереднє інтегрування

Основна задача диференціального числення – знаходження похідної $f'(x)$ відомої функції $f(x)$. Механічне тлумачення: за відомим законом руху матеріальної точки $s(x)$ диференціюванням знайти її швидкість $v(x) = s'(x)$.

Основною для інтегрального числення є обернена задача – знаходження функції $F(x)$ за відомою її похідною $F'(x) = f(x)$. У механічній інтерпретації: якщо відома швидкість $v(x) = s'(x)$ матеріальної точки, то інтегруванням знайти закон її руху $s(x)$.

Нехай X – деякий проміжок на множині дійсних чисел R. Функція $F(x)$ називається ***первісною*** (***антипохідною***) для функції $f(x)$ на X, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність $F'(x) = f(x)$ або, що те саме, $dF(x) = f(x)dx$.

Іншими словами, *функція* $f(x)$ *є похідною своєї первісної* $F(x)$.

Приклад 1. Знайти первісну для даної функції:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = \cos 3x$; в) $f(x) = 1/x$.

□ а) Оскільки $(x^4)' = 4x^3$, то з означення первісної випливає, що функція $F(x) = x^4/4$ є первісна для $f(x) = x^3$: $(x^4/4)' = x^3$. Первісною є також $F(x) = x^4/4 + C$, де C – довільна стала, оскільки додавання константи не змінює значення похідної. При цьому $X = (-\infty; +\infty)$;

б) оскільки $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$, то для $f(x) = \cos 3x$ первісною є функція $F(x) = (1/3)\sin 3x + C$, $X = (-\infty; +\infty)$;

в) оскільки $(\ln x)' = 1/x$, то первісною для функції $f(x) = 1/x$ служить функція $F(x) = \ln x + C$, $X = (0; +\infty)$, а також $F(x) = \ln|x| + C$. $X = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. ■

Множину всіх первісних функції $f(x)$ на проміжку X називають ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ і позначають символом $\int f(x)dx$. При цьому $f(x)$ називають ***підінтегральною функцією***, $f(x)dx$ – ***підінтегральним виразом***, $\int$ – ***знаком інтеграла***, x – ***змінною інтегрування***.

Якщо функція $F(x)$ є деякою первісною для $f(x)$, тоді

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{де } C \text{ – довільна стала.}$$

Операція знаходження невизначеного інтеграла (множини всіх первісних функцій для $f(x)$) називається ***інтегруванням***.

Зауваження. Будь-яка неперервна функція має незчисленну множину первісних, кожна пара яких відрізняються одна від одної на сталу величину. При інтегруванні різними способами однієї й тієї ж функції результати можуть відрізнятися за своїм зовнішнім виглядом.

Геометричний зміст. Первісна функції $f(x)$ є лінією $y = F(x)$, у кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює відповідному значенню функції $f(x)$. Невизначений інтеграл $\int f(x)\,dx$ – це сім'я таких «паралельних» ліній, що задається рівнянням $y = F(x) + C$ (рис. 3.20).

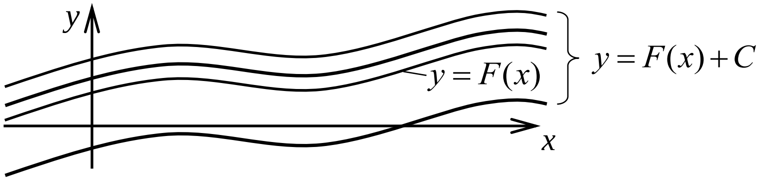


Рисунок 3.20

Невизначений інтеграл має такі *властивості*:

1) похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції: $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$;

2) диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$;

3) невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала: $\int dF(x) = F(x) + C$;

4) невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної функції окремо: $\int\left(f(x) + g(x) - h(x)\right)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx$;

5) сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити з-під знака інтеграла: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \quad a = const \neq 0$;

6) якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ *і* $u = \varphi(x)$ *– будь-яка неперервно диференційована функція, то* $\int f(u)\,du = F(u) + C$.
Тобто змінною інтегрування може бути як незалежна змінна, так і довільна неперервно диференційована функція іншої змінної.

Згідно з властивостями 1 і 2 *правильність виконання операції інтегрування перевіряється диференціюванням*.

Властивість 6 виражає інваріантність формул інтегрування: *будь-яка формула залишається справедливою, якщо змінну інтегрування розглядати як довільну неперервно диференційовну функцію*.

У таблиці 3.3 наведено формули інтегрування основних елементарних функцій з деякими доповненнями.

Таблиця 3.3 – Основні невизначені інтеграли

№ з/п	Формула	№ з/п	Формула
1	$\int 0\,du = C$	5	$\int \sin u\; du = -\cos u + C$
2	$\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$	6	$\int \cos u\; du = \sin u + C$
2а	$\int du = u + C$	7	$\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\; u + C$
2б	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\,ctg\; u + C$
2в	$\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$	9	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
1	2	3	4
3	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u \rvert + C$	10	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + b} \right\rvert + C$ $(b \neq 0)$
4	$\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ $(a > 0;\;\; a \neq 1)$	11	$\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\, arctg \dfrac{u}{a} + C$ $(a \neq 0)$
4а	$\int e^u\,du = e^u + C$	12	$\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert \dfrac{u-a}{u+a} \right\rvert + C$ $(a > 0)$

Безпосереднім інтегруванням називають обчислення невизначеного інтеграла зведенням його до табличного на основі властивостей лінійності й інваріантності з використанням *тотожних перетворень* підінтегральної функції та *підведення під знак диференціала*.

Приклад 2. Знайти інтеграли:

а) $\int (2x^3 - 3e^x + 1)\,dx$; б) $\int tg^2 x\,dx$; в) $\int 2^{\sin x}\cos x\,dx$.

□ а) Використовуючи властивості 4 та 5, запишемо даний інтеграл у вигляді лінійної комбінації табличних інтегралів:

$$\int (2x^3 - 3e^x + 1)\,dx = 2\int x^3 dx - 3\int e^x dx + \int dx$$

і з огляду на наведену вище таблицю отримаємо:

$$2x^{3+1}/(3+1) - 3e^x + x^{0+1}/(0+1) + C = x^4/2 - 3e^x + x + C;$$

б) застосовуючи властивості тригонометричних функцій та інтегралів, а потім здійснюючи відповідні елементарні перетворення, одержимо:

$$\int \left(\sin^2 x / \cos^2 x\right) dx = \int \left((1 - \cos^2 x)/\cos^2 x\right) dx =$$

$$= \int \left(1/\cos^2 x - 1\right) dx = \int dx/\cos^2 x - \int dx = tgx - x + C;$$

в) використовуючи підведення під знак диференціала, дістанемо:

$$\int 2^{\sin x}\cos x\,dx = \int 2^{\sin x}\,d(\sin x) = 2^{\sin x}/\ln 2 + C. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{3\sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 1}{x}\,dx$. Виділити первісну $y = F(x)$, графік якої проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, де $x_0 = 1$ і $y_0 = -10$. Обчислити значення $F(x_1)$ отриманої первісної в точці $x_1 = 64$.

$$\int \frac{3\sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 1}{x}\,dx = \int \left(3x^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 4x^{-1/3} + \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= 3\int x^{1/2}dx - \int\frac{dx}{\sqrt{x}} - 4\int x^{-1/3}dx + \int\frac{dx}{x} = 3\cdot x^{3/2}\big/(3/2) - 2\sqrt{x} -$$

$$-4\cdot x^{2/3}\big/(2/3) + \ln|x| + C = 2x^{3/2} - 2\sqrt{x} - 6x^{2/3} + \ln|x| + C.$$

З умови $F(x_0) = y_0$ знайдемо відповідне значення довільної сталої та шукану первісну:

$$F(1) = -10:\;\; 2\cdot 1^{3/2} - 2\sqrt{1} - 6\cdot 1^{2/3} + \ln|1| + C = -10;$$

$$C = -4;\;\; F(x) = 2x^{3/2} - 2\sqrt{x} - 6x^{2/3} + \ln|x| - 4$$

Обчислимо значення первісної в указаній точці $x_1 = 64$:

$$F(64) = 2\cdot 64^{3/2} - 2\sqrt{64} - 6\cdot 64^{2/3} + \ln|64| - 4 = 908 + \ln 64\,. \;■$$

3.3.2 Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами

Розглянемо основний метод інтегрування – ***метод заміни змінної*** (***підстановки***), що ґрунтується на властивості інваріантності формул інтегрування. Зокрема, підведення під знак диференціала можна розглядати як неявне застосування цього методу. Мета – навчитися визначати відповідну підстановку, за допомогою якої інтеграл можна звести до простішого чи навіть табличного.

Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)\,dx$, але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона існує. Заміну змінної можна здійснити двома способами.

Перший спосіб. Зробимо заміну змінної у підінтегральному виразі, покладаючи $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$. Тоді

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int g(t)\,dt =$$

$$= G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Після інтегрування у правій частині рівності замість t підставлено його вираз через стару змінну x.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

□ Зробимо підстановку $x = 3\sin t$ з метою позбутись ірраціональності. Тоді $dx = 3\cos t\,dt$ і маємо:

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx = \int (3\sin t)^2\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt =$$

$$= \int 9\sin^2 t\cdot 3|\cos t|\cdot 3\cos t\,dt = 81\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= (81/4)\int \sin^2 2t\,dt = (81/8)\int (1-\cos 4t)\,dt =$$

$$= (81/8)\cdot\left(\int dt - \int \cos 4t\,dt\right) = (81/8)\cdot t - (81/8)\cdot\int \cos 4t\,dt$$

при умові $\cos t \geq 0$. Нехай $t = u/4$. Тоді $dt = (1/4)\,du$ і

$$\int \cos 4t\,dt = (1/4)\int \cos u\,du = (1/4)\sin u + C.$$

Отже:

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx = (81/8)\cdot t - (81/8)\cdot(1/4)\sin u + C.$$

Повернемось до початкової змінної x:

$$t = \arcsin(x/3);\quad u = 4t = 4\arcsin(x/3).$$

Тоді:

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx = \frac{81}{8}\arcsin(x/3) - \frac{81}{32}\sin(4\arcsin(x/3)) + C. \;\blacksquare$$

Другий спосіб. Запишемо інтеграл $\int f(x)\,dx$ у вигляді $\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$, тобто виділимо диференціал деякої функції $\varphi(x)$, і застосовуючи підстановку $u = \varphi(x)$, перейдемо в інтегралі $\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ до нової змінної:

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int g(u)\,du.$$

Після цього знайдемо одержаний інтеграл і повернемося до старої змінної x, покладаючи $u = \varphi(x)$:

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int g(u)\,du = G(u) + C = G(\varphi(x)) + C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int \sin(x^3+2)x^2dx; \qquad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{arctg\, x}}{1+x^2}dx\,.$$

□ а) Зробимо підстановку $u = x^3 + 2$. Тоді $du = 3x^2dx$, $x^2dx = (1/3)\,du$ і, отже:

$$\int \sin(x^3+2)\,x^2dx = (1/3)\int \sin u\, du = (-1/3)\cos u + C =$$

$$= (-1/3)\cos(x^3+2) + C\,.$$

б) Зробимо підстановку $u = arctg\, x$. Тоді $dt = du/(1+x^2)$ і, отже,

$$\int \frac{\sqrt[3]{arctg\, x}}{1+x^2}dx = \int \sqrt[3]{u}\, du = \int u^{1/3}du = (3/4)u^{4/3} + C =$$

$$= (3/4)arctg^{4/3}x + C\,. \quad ■$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int f(ax+b)\,dx$, $a \neq 0$, якщо відомо, що $\int f(x)dx = F(x)$.

□ Використаємо лінійну підстановку $u = ax + b$. Для цієї підстановки $du = a\,dx$. Тоді

$$\int f(ax+b)dx = (1/a)\int f(ax+b)adx = (1/a)\int f(u)du =$$

$$= (1/a)F(u) + C\,.$$

Повертаючись до початкової змінної, маємо

$$\int f(ax+b)\,dx = (1/a)F(ax+b) + C\,. \quad ■$$

Метод інтегрування частинами ґрунтується на правилі диференціювання добутку двох функцій і має специфічні сфери застосування.

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – дві неперервні функції, які мають неперервні похідні. Візьмемо диференціал добутку цих функцій:

$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$

а тепер проінтегруємо:

$$\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv\,,\ \text{але}\ \int d(uv) = uv + C\,.$$

Маємо ***формулу інтегрування частинами***:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Зауваження. Сутність методу інтегрування частинами полягає в поданні підінтегрального виразу $f(x)dx$ у вигляді добутку множників u і dv. Не потрібно плутати його із заміною змінної: ніяких нових змінних під час інтегрування частинами не виникає.

Як правило, за u вибирають функцію, що спрощується при диференціюванні. Функцію v знаходять у *явному вигляді* як одну з первісних $\int dv$ (звичайно, покладаючи $C = 0$).

Типовими застосуваннями методу інтегрування частинами є випадки, коли підінтегральна функція містить добуток раціональних і трансцендентних функцій, а при цьому інші способи не прийнятні. Наведемо відповідні рекомендації щодо вибору u.

Якщо підінтегральна функція має вигляд:

а) $P_n(x)\cos bx,\quad P_n(x)\sin bx,\quad P_n(x)\,e^{ax}$, то за u потрібно взяти многочлен $P_n(x)$;

б) $P_n(x)\ln x,\quad P_n(x)\arcsin bx,\quad P_n(x)\arccos bx,\quad P_n(x)\,arctg\,bx,\quad P_n(x)\,arcctg\,bx,$ то за u потрібно взяти відповідно логарифмічну $\ln x$ чи обернену тригонометричну $\arcsin bx$, $\arccos bx$, $arctg\,bx$, $arcctg\,bx$ функцію;

в) $e^{ax}\cos bx,\quad e^{ax}\sin bx,\quad \cos\ln x,\quad \sin\ln x,$ то за u в перших двох випадках можна взяти будь-яку з двох функцій: показникову чи тригонометричну, а в останніх – відповідну тригонометричну функцію. Після двократного інтегрування частинами одержуємо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Знаходимо інтеграл як розв'язок цього рівняння.

У випадках а) і б) інтегрування частинами застосовується n разів, де n – степінь многочлена $P_n(x)$.

Приклад 4. Знайти інтеграли:

а) $\int x5^x dx$; б) $\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx$; в) $\int \ln(x+3)\,dx$; г) $\int e^x \sin 7x\,dx$.

□ а) Нехай $x=u$, $5^x dx = dv$. Тоді $v=\int 5^x dx = 5^x/\ln 5$. Інтегруємо частинами:

$$\int x5^x dx = x5^x/\ln 5-(1/\ln 5)\int 5^x dx = x5^x/\ln 5+5^x/\ln^2 5+C;$$

б) припустимо, що $u=x^2+4$; $dv=\cos x\,dx$. Тоді $du=2x\,dx$, $v=\sin x$. Інтегруємо частинами:

$$\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx=\left(x^2+4\right)\sin x-2\int x\sin x\,dx.$$

Застосовуючи до інтеграла, який стоїть праворуч, ще раз інтегрування частинами $u=x$, $dv=\sin x\,dx$, $du=dx$, $v=-\cos x$, остаточно дістанемо:

$$\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx=\left(x^2+4\right)\sin x+2x\cos x-2\sin x+C;$$

в) приймемо, що $u=\ln(x+3)$, $dv=dx$. Тоді $du=dx/(x+3)$, $v=x$. Маємо:

$$\int \ln(x+3)\,dx = x\ln(x+3)-\int x\,dx/(x+3) = x\ln(x+3)-$$

$$-\int\frac{x+3-3}{x+3}dx = x\ln(x+3)-\int dx+3\int\frac{dx}{x+3} = x\ln(x+3)-$$

$$-x+3\ln(x+3)+C;$$

г) покладемо $u=\sin 7x$, $dv=e^x dx$. Спираючись на це, знаходимо $du=7\cos 7x\,dx$ та $v=e^x$. Використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$I=\int e^x\sin 7x\,dx = e^x\sin 7x-\int e^x 7\cos 7x\,dx=$$

$$=e^x\sin 7x-7\int e^x\cos 7x\,dx.$$

До інтегралу, що залишився, знову застосовуємо інтегрування частинами, причому $u=\cos 7x$, $dv=e^x dx$; $du=-7\sin 7x\,dx$, $v=e^x$. Маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7\left(e^x \cos 7x - \int e^x (-7\sin 7x)\, dx\right) =$$

$$= e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49\int e^x \sin 7x\, dx.$$

Далі прирівнюємо початковий вираз до останнього отриманого. Одержану рівність можна розглядати як рівняння, в якому невідомим є шуканий інтеграл I . Розв’язуючи це рівняння, дістаємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49I\ ;\ 50I = e^x \sin x - 7e^x \cos 7x\ ;$$

$$I = \int e^x \sin 7x\, dx = (1/50)\left(e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x\right) + C\ . \quad ■$$

3.3.3 Інтегрування раціональних функцій

Розглянемо многочлен $P_n(x)$ ***стандартного вигляду*** з дійсними коефіцієнтами

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n;\ \ a_i \in R;\ i = \overline{0, n}\ .$$

Будь-який многочлен $P_n(x)$ *з дійсними коефіцієнтами можна подати, і причому єдиним способом (з точністю до порядку), у вигляді добутку різних простих (лінійних і квадратичних) дійсних множників у відповідних степенях*:

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_s)^{k_s} \times$$

$$\times (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \ldots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}\ ,$$

де лінійні двочлени $x - a$ відповідають його різним дійсним кореням $x_1, x_2, \ldots, x_s$; квадратні тричлени $x^2 + px + q$ з від’ємним дискримінантом – різним парам спряжених комплексних коренів; $k_1, k_2, \ldots, k_s$ і $l_1, l_2, \ldots, l_t$ – кратності цих коренів, причому $k_1 + \ldots + k_s + 2(l_1 + \ldots + l_t) = n$.

Розглянемо два многочлена $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ степеня m і n відповідно:

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m;$$

$$Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n\ .$$

Раціональним дробом (***дробово-раціональною функцією***) називається відношення двох многочленів $P_m(x)/Q_n(x)$.

Якщо степінь m чисельника нижче степеня n знаменника, то дріб називається ***правильним***, якщо, навпаки, $m > n$ або $m = n$, то дріб – ***неправильний***.

Будь-який неправильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна зобразити у вигляді суми многочлена і правильного дробу

$$P_m(x)/Q_n(x) = G_{m-n}(x) + R_k(x)/Q_n(x),$$

До того ж це розвинення єдине.

Тут $G_{m-n}(x)$ – многочлен, який називають ***цілою частиною*** раціонального дробу, а $R_k(x)/Q_n(x)$ – правильний дріб, тобто $k < n$. Многочлени $G_{m-n}(x)$ і $R_k(x)$ – відповідно частка й остача від ділення «кутом» $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.

Приклад 1. Вилучити цілу частину неправильного дробу $P(x)/Q(x) = (x^4 - 3x^2 + 5x + 4)/((x+4)(x-2))$ і подати його у вигляді суми многочлена та правильного дробу.

□ Для вилучення цілої частини використаємо ділення «кутом» многочлена на многочлен, спочатку виконавши множення в знаменнику і записавши результат у стандартному вигляді в порядку спадання степенів: $Q(x) = (x+4)(x-2) = x^2 + 2x - 8$;

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4 - 3x^2 + 5x + 4 & \underline{x^2 + 2x - 8} \\
\underline{x^4 + 2x^3 - 8x^2} \qquad\qquad & x^2 - 2x + 9 \\
-\,-2x^3 + 5x^2 + 5x + 4 & \\
\underline{-2x^3 - 4x^2 + 16x} \quad & \\
-\,9x^2 - 11x + 4 & \\
\underline{9x^2 + 18x - 72} & \\
-29x + 76 &
\end{array}$$

Отже:

$$P(x)/Q(x) = x^2 - 2x + 9 + (-29x + 76)/((x+4)(x-2)) . \quad \blacksquare$$

Правильні раціональні дроби наступних чотирьох типів:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \geq 2$; 3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $D = p^2 - 4q < 0$;

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $k \geq 2,\ D = p^2 - 4q < 0$

називаються ***елементарними*** (***найпростішими***).

Тут A, B, a, p, q – дійсні числа, $k \in N$. Підкреслимо, що квадратний тричлен $x^2 + px + q$ має тільки комплексні корені.

Кожний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна розкласти на суму скінченного числа найпростіших дробів вказаних чотирьох типів, причому цей розклад єдиний.

Розглянемо довільний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$, в якому знаменник $Q_n(x)$ – зведений многочлен (старший коефіцієнт $b_0 = 0$), розкладений на прості дійсні множники:

$$Q_n(x) = (x-x_1)^{k_1} \dots (x-x_s)^{k_s} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_tx+q_t)^{l_t},$$

де $k_1 + \dots + k_s + 2(l_1 + \dots + l_t) = n$.

Тоді правильний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна подати у вигляді:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{s1}}{(x-x_s)^{k_s}} +$$

$$+ \frac{A_{s2}}{(x-x_s)^{k_s-1}} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{x-x_s} + \dots + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} +$$

$$+ \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots +$$

$$+\frac{B_{t1}x+C_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}}+\frac{B_{t2}x+C_{t2}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t-1}}+\ldots+\frac{B_{tl_t}x+C_{tl_t}}{x^2+p_tx+q_t}.$$

Коефіцієнти A_{ij} $(i=\overline{1,s}\,;\ j=\overline{1,k_i})$ і $B_{ij}\,, C_{ij}$ $(i=\overline{1,t}\,;\ j=\overline{1,l_t})$ визначаються після зведення правої частини до спільного знаменника і виділення тотожності многочленів у чисельниках праворуч і ліворуч (відкиданням однакових знаменників). Далі застосовуються наступні методи (окремо чи в комбінації):

– ***метод невизначених коефіцієнтів***: *прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях* x *, приходимо до системи лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів*;

– ***метод окремих значень***: *надаючи змінній* x *в отриманій тотожності конкретні значення, одержуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів*.

Зауваження. Для отримання простої системи для визначення невідомих коефіцієнтів рекомендується підставляти ті значення x, що є коренями знаменника $Q_n(x)$.

Приклад 2. Правильний раціональний дріб $P(x)/Q(x)$ розкласти на суму найпростіших дробів, де

а) $P(x)=-2x^4-x^3-6x^2+18x+13$

і $Q(x)=x^5-x^4-3x^3-5x^2-10x-6$;

б) $P(x)=7x-x^2-4$ і $Q(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$.

□ а) Многочлен $Q(x)$ можна подати (проробіть це самостійно) у вигляді добутку простих різних дійсних множників (лінійних чи квадратичних з від’ємним дискримінантом) у відповідних степенях:

$$Q(x)=(x+1)^2(x-3)(x^2+2).$$

Тоді шукане розвинення дробу матиме вигляд:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+2},$$

де числа A, B, C, D і E ще треба знайти. Зводячи праву частину до спільного знаменника (ним служить многочлен $Q(x)$), з умови рівності дробів дістаємо (відкидаючи однакові знаменники) тотожність многочленів:

$$A(x+1)^2(x^2+2)+B(x-3)(x^2+2)+C(x-3)(x+1)(x^2+2)+$$

$$+(Dx+E)(x-3)(x+1)^2=P(x).$$

Знайдемо невідомі A, B, C, D, E методом невизначених коефіцієнтів. Розкриваючи дужки і зводячи подібні, прирівняємо коефіцієнти при подібних членах (однакових степенях змінної x) у лівій і правій частинах отриманої тотожності. Дістанемо і розв'яжемо (зробіть це самостійно, наприклад, методом Гауса) систему п'яти лінійних рівнянь з п'ятьма невідомими:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^4 & A+C+D=-2, \\ x^3 & 2A+B-2C-D+E=-1\ , \\ x^2 & 3A-3B-C-5D-E=-6\ , \\ x^1 & 4A+2B-4C-3D-5E=18\ , \\ x^0 & 2A-6B-6C-3E=13\ ; \end{array}\right\} \begin{array}{l|} A=-1; \\ B=1; \\ C=-2; \\ D=1; \\ E=-3. \end{array}$$

Шукане розвинення має вигляд: ·

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{x-3}{x^2+2};$$

б) заданий дріб розкладається на елементарні наступним чином: $P(x)/Q(x)=A/(x+1)+B/(x-2)+C/(x-3)$.

Зводячи праву частину до спільного знаменника, з умови рівності дробів дістаємо тотожність многочленів:

$$A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2)=P(x).$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти A, B і C, скористаємося методом окремих значень. Для отримання простої системи візьмемо ті значення x, що є коренями знаменника $Q(x)$, тобто $x=-1$, $x=2$ та $x=3$. Тоді

$$\left.\begin{array}{r|c} x=-1 & 12A=-12, \\ x=\ \ 2 & -3B=6, \\ x=\ \ 3 & 4C=8; \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c} A=-1; \\ B=-2; \\ C=2. \end{array}$$

Шукане розвинення має вигляд:

$$P(x)/Q(x)=-1/(x+1)-2/(x-2)+2/(x-3)\,. \quad \blacksquare$$

Розглянемо інтегрування найпростіших раціональних дробів.

Елементарні дроби першого і другого типів легко інтегруються заміною змінної $t=x-a$ (проробіть це самостійно):

1) $\int \frac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C$;

2) $\int \frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int (x-a)^{-k}dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$, $k\ge 2$.

Розглянемо інтегрування найпростішого дробу третього типу:

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$.

Виділимо в квадратному тричлені повний квадрат:

$$x^2+px+q=x^2+2x\cdot(p/2)+(p/2)^2+q-(p/2)^2=$$

$$=(x+p/2)^2+a^2;\ \ a=\sqrt{q-p^2/4}>0\,.$$

Зробимо заміну $t=x+p/2$. Тоді $x=t-p/2$, $dx=dt$. Одержимо:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int \frac{A(t-p/2)+B}{t^2+a^2}dt=A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2}+$$

$$+(B-Ap/2)\int \frac{dt}{t^2+a^2}=A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2}+(B-Ap/2)\cdot\frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a}\,.$$

Далі використовуємо заміну $u=t^2+a^2$. Тоді $du=2tdt$, $tdt=(1/2)\,du$. Отримаємо:

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = (1/2)\int \frac{du}{u} = (1/2)\ln|u| + C.$$

Повертаючись до старої змінної

$$t = x + p/2; \quad a = \sqrt{q - p^2/4};$$

$$u = t^2 + a^2 = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 = x^2 + px + q,$$

після спрощення остаточно маємо:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = (A/2)\ln|x^2+px+q| +$$

$$+\left((2B - Ap)/(4q-p^2)\right) arctg\left((2x+p)/\sqrt{4q-p^2}\right) + C.$$

Зауваження. Інтегрування найпростішого дробу четвертого типу розглядати не будемо – це виходить за межі програми курсу, що вивчається.

Нехай треба обчислити інтеграл від раціонального дробу $\int P(x)dx/Q(x)$. Якщо дріб неправильний, то його подаємо у вигляді суми цілої частини і правильного раціонального дробу. Останній дріб розкладаємо на суму найпростіших дробів. Структура розвинення на елементарні дроби визначається коренями знаменника $Q(x)$. Тут можливі такі випадки:

а) *Корені знаменника дійсні й прості*, тобто

$$Q(x) = (x-a)(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-d).$$

У цьому разі правильний дріб розкладається на найпростіші дроби тільки першого типу.

Приклад 3. Знайти інтеграл $I = \int \frac{4x^2 - 13x + 7}{(x^2 - 5x + 6)(x+1)}\,dx$.

$$\square\ I = \int \frac{4x^2-13x+7}{(x-2)(x-3)(x+1)}\,dx = \int \frac{A\,dx}{x-2} + \int \frac{B\,dx}{x-3} + \int \frac{C\,dx}{x+1}.$$

Тут $4x^2 - 13x + 7 = A(x-3)(x+1) + B(x-2)(x+1) +$

$$+ C(x-2)(x-3).$$

Використавши метод підстановки (проробіть це самостійно), маємо: $A=1;\ B=1; C=2$. Тоді:

$$I=\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x-3}+\int\frac{2dx}{x+1}=$$

$$=\ln|x-2|+\ln|x-3|+2\ln|x+1|+C. \quad \blacksquare$$

б) *Корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні*:

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}...(x-d)^{\gamma}.$$

У цьому разі дріб розкладається на найпростіші дроби першого і другого типів. Кореню a_i кратності α_i відповідає α_i доданків, де кожен наступний елементарний дріб має степінь на одиницю менший від попереднього і так до першого.

Приклад 4. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x^3+4x^2+5x+8}{(x+2)^3(x-1)}dx$.

□ $I=\int\frac{A\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{B\,dx}{(x+2)^2}+\int\frac{C\,dx}{x+2}+\int\frac{D\,dx}{x-1}$.

Маємо тотожність $x^3+4x^2+5x+8=A(x-1)+$

$$+B(x+2)(x-1)+C(x+2)^2(x-1)+D(x-1)^3.$$

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів (проробіть це самостійно), отримаємо: $A=-2, B=-1,\ C=1/3, D=2/3$.

Тоді $I=\int\frac{-2\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{-1dx}{(x+2)^2}+\int\frac{(1/3)\,dx}{x+2}+\int\frac{(2/3)\,dx}{x-1}=$

$$=\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C. \quad \blacksquare$$

в) *Корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно спряжені*:

$$Q(x)=(x^2+px+q)...(x^2+rx+s)(x-a)^{\alpha}...(x-c)^{\gamma}.$$

У цьому разі дріб $P(x)/Q(x)$ розкладається на найпростіші дроби першого, другого і третього типів.

Приклад 5. Знайти інтеграл $I=\int\frac{-x^2+x-8}{(x^2+2x+2)(x-2)}dx$.

□ $I=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+2x+2}+\int\frac{C\,dx}{x-2}$.

Тут $-x^2+x-8=(Ax+B)(x-2)+C(x^2+2x+2)$.

Використаємо комбінацію методу окремих значень і методу невизначених коефіцієнтів. Нехай $x=2$ (дійсний корінь), маємо $10C=-10$, $C=-1$; нехай $x=0$ (довільно взяте значення), тоді $-2B+2C=-8$; $B=4+C=3$. Прирівнявши коефіцієнти при x^2, маємо $A+C=-1$; $A=-1-C=0$. Отже:

$$I=\int\frac{3dx}{x^2+2x+2}-\int\frac{dx}{x-2}=3\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}-\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=3arctg(x+1)-\ln|x-2|+C. \blacksquare$$

Справедливе твердження: *інтеграл від будь-якої раціональної функції може бути визначений через елементарні функції у скінченному вигляді*.

При інтегруванні не існує відповідних формул для добутку, частки і суперпозиції функцій. Тому *не кожну первісну, навіть коли вона існує, можна подати через елементарні функції у скінченному вигляді*. Говорять, що інтеграл $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ «***не береться***», якщо первісна $F(x)$ – неелементарна функція.

Такого типу первісні, що часто застосовуються в математиці та інших дисциплінах, називаються ***спеціальними функціями***. Для них складені відповідні таблиці, побудовані графіки і створені комп’ютерні програми.

Прикладом є ***функція Лапласа*** (***інтеграл ймовірностей***) $\Phi(x)$, що визначається умовами:

$$\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int e^{-x^2/2}dx=\Phi(x)+C, \quad \Phi(0)=0.$$

Запитання для самоконтролю

1. Яка функція служить первісною для даної функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний зміст?
3. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
4. Як перевірити правильність виконання операції інтегрування?
5. У чому полягає спосіб безпосереднього інтегрування?
6. У яких двох формах реалізується метод заміни змінної в невизначеному інтегралі?
7. Наведіть формулу методу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. Коли доречно застосовувати цей метод?
8. Наведіть типові випадки застосування інтегрування частинами і відповідні рекомендації щодо вибору складових.
9. Наведіть стандартний вигляд многочлена $P_n(x)$ n -го степеня.
10. Як розкладається многочлен з дійсними коефіцієнтами на прості дійсні множники?
11. Що називається раціональним дробом? За якої умови раціональний дріб є правильним? Неправильним?
12. Як подати неправильний раціональний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу?
13. Які правильні раціональні дроби називаються елементарними (найпростішими)?
14. Який вигляд має розклад правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів?
15. Які методи застосовуються для знаходження коефіцієнтів цього розкладу? У чому суть методу невизначених коефіцієнтів і методу окремих значень? Дайте рекомендації щодо їх застосування.
16. Як інтегруються елементарні дроби різних типів?
17. Як інтегруються правильні раціональні дроби у наступних випадках: а) корені знаменника дійсні й прості; б) корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні; в) корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно спряжені?
18. Наведіть приклади інтегралів, що «не беруться».

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Знайти задані інтеграли та результат перевірити диференціюванням:

а) $I = \int \frac{5x^8+2\sqrt[4]{x^5}-3x^2}{x^3} dx$; б) $I = \int \left(\frac{6}{\sqrt{x}} - 3\sin x + 7^x\right) dx$.

Відповідь:

а) $I = \frac{5}{6}x^6 - \frac{8}{3\sqrt[4]{x^3}} - 3\ln|x| + C$;

б) $I = 3\sqrt{x} + 3\cos x + \frac{7^x}{\ln 7} + C$.

Приклад 2. Знайти задані інтеграли, використовуючи заміну змінної:

а) $I = \int \frac{x\,dx}{3x^2-5}$; б) $I = \int \frac{dx}{(3x-8)\ln^6(3x-8)}$.

Відповідь: а) $I = \frac{1}{6}\ln|3x^2 - 5| + C$; б) $I = -\frac{1}{15\ln^5(3x-8)} + C$.

Приклад 3. Знайти задані інтеграли, застосовуючи інтегрування частинами:

а) $I = \int x\sin(4x-1)\,dx$; б) $I = \int x^2 e^{3x} dx$;

в) $I = \int \ln(4x+3)\,dx$; г) $I = \int e^{5x}\sin 2x\,dx$.

Відповідь:

а) $I = -\frac{1}{4}x\cos(4x-1) + \frac{1}{16}\sin(4x-1) + C$;

б) $I = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C$;

в) $I = x\ln(4x+3) - x + \frac{3}{4}\ln(4x+3) + C$;

г) $I = \frac{5}{29}e^{5x}\cos 2x - \frac{2}{29}e^{5x}\sin 2x + C$.

Приклад 4. Знайти задані інтеграли від раціонального дробу:

а) $I = \int \frac{2x^4+6x^3-3x+2}{x+2} dx$; б) $I = \int \frac{3x^2-x+6}{(x+4)(x^2-6x+5)} dx$;

в) $I=\int\frac{2x^2-3x+6}{x^2(x+2)}dx$;   г) $I=\int\frac{x^2-4x+17}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx$.

Відповідь:

а) $I=\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x-8\ln|x+2|+C$;

б) $I=\frac{58}{45}\ln|x+4|-\frac{2}{5}\ln|x-1|+\frac{19}{9}\ln|x-5|+C$;

в) $I=-\frac{3}{x}-3\ln|x|+5\ln|x+2|+C$;

г) $I=\ln|x-2|-3\,\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2}+C$.

Приклад 5. Знайти інтеграл $I=\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$. Виділити первісну $y=F(x)$, графік якої проходить через точку $M_0(1;\,2)$. Обчислити значення $F(x_1)$ отриманої первісної в точці $x_1=3$.

Відповідь: $I=2\sqrt{x}-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}+C$;

$y=2\sqrt{x}-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}+\pi/2$; $y(3)=2\sqrt{3}-\pi/6$.

Лекція 3.4 Визначений інтеграл та його застосування

План

3.4.1 Визначений інтеграл та його основні властивості. Формула Ньютона – Лейбниця. Інтегрування частинами і заміна змінної у визначеному інтегралі

3.4.2 Невласний інтеграл по нескінченному проміжку (першого роду)

3.4.3 Застосування визначеного інтеграла

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *інтегральна сума, визначений інтеграл, формула Ньютона – Лейбниця, властивості визначеного інтеграла, заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі, невласні інтеграли по нескінченному проміжку, застосування визначеного інтеграла.*

3.4.1 Визначений інтеграл та його основні властивості. Формула Ньютона – Лейбниця. Інтегрування частинами і заміна змінної у визначеному інтегралі

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$ (рис. 3.21). Розглянемо розбиття відрізка $[a;b]$ на n довільних елементарних частин довжиною $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ кожна точками x_i: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$ На кожному частинному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ візьмемо по одній довільній точці c_i.

Вираз

$$S_n(f) = f(c_1)\Delta x_1 + ... + f(c_i)\Delta x_i + ... + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

називають ***інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Позначимо через $\max \Delta x_i$ найбільшу з довжин елементарних відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1,n}.$ Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум при умові $\max \Delta x_i \to 0$.

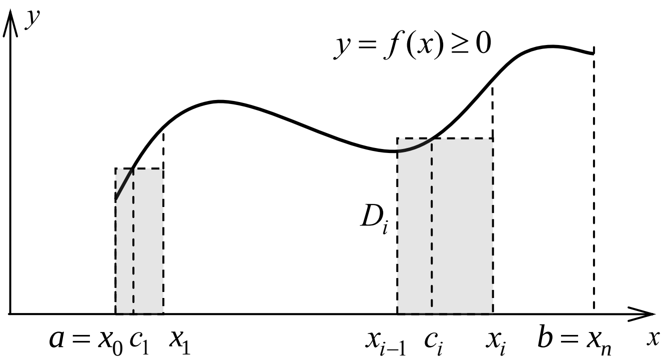


Рисунок 3.21

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому здрібненні розбиття відрізка $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ ,$$

де a і b – відповідно ***нижня*** і ***верхня межі інтегрування***; $[a;b]$ – ***відрізок інтегрування***.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді *визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *чисельно дорівнює площі* S *відповідної криволінійної трапеції*: $S = \int_a^b f(x)\,dx$.

Теорема ***(достатня умова інтегровності)***. *Функція, що неперервна на відрізку, інтегровна на ньому.*

Теорема Ньютона – Лейбниця. *Нехай функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і* $F(x)$ *– яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції* $y = f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *дорівнює приросту первісної* $F(x)$ *на цьому відрізку*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$ – ***формула Ньютона – Лейбниця***.

Тут символом $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ позначено приріст первісної.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

□ Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона – Лейбниця, одержимо:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1. \quad \blacksquare$$

Основні властивості визначеного інтеграла:

1) *визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування*: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$;

2) *визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування*

дорівнює нулю: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

3) *якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак*: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;

4) *для будь-яких трьох чисел* a, b *і* c *справедлива рівність*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

якщо тільки всі ці інтеграли існують;

5) *сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла*: $\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$, де $A = const$;

6) *визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій окремо*. Так, у разі трьох функцій:

$$\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx;$$

7) *якщо підінтегральна функція неперервна і невід'ємна на відрізку* $[a;b]$, $f(x) \ge 0,\ x \in [a;b]$, *а верхня межа інтегрування більша або дорівнює нижній* $b \ge a$, *то визначений інтеграл на цьому відрізку також невід'ємний*: $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$;

8) *якщо на відрізку* $[a;b]$, *де* $a < b$, *функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *задовольняють нерівності* $f(x) \le \varphi(x)$, *то* $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx$.

Іншими словами, *нерівність між неперервними функціями можна інтегрувати почленно при умові, що верхня межа інтегрування більша нижньої;*

9) *абсолютна величина визначеного інтеграла не перевищує визначеного інтеграла від абсолютної величини підінтегральної функції при умові, що верхня межа інтегрування не менша за нижню* $b \ge a$: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Для функції $f(x)$, інтегрованої на відрізку $[a;b]$, ***середнім інтегральним значенням*** на цьому відрізку називається число μ, яке визначається рівністю $\mu = \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\,dx$.

Теорема (***про середнє значення***). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$*, то на інтервалі* $(a;b)$ *існує хоча б одна точка* c *така, що середнє інтегральне* μ *функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *дорівнює значенню функції* $f(c)$ *в цій точці:*

$$f(c) = \mu = \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\,dx.$$

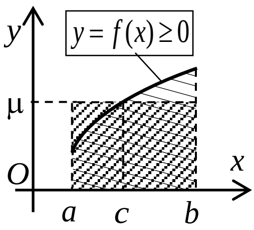


Рисунок 3.22

Геометричний зміст (рис. 3.22). Для неперервної невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ всередині цього відрізка знайдеться хоча б одна точка c така, що площа відповідної криволінійної трапеції дорівнює площі прямокутника з тією ж основою $b-a$ і висотою $\mu = f(c)$.

Приклад 2. На деякій фірмі продуктивність праці робітника протягом восьмигодинної зміни описується функцією $f(t) = 1 + t^{2/3} - 0{,}55t,\quad t \in [0;8]$. Знайти $\overline{f}$ – середню продуктивність праці робітника за зміну.

$$\square \quad \overline{f} = \frac{1}{8}\int_0^8 (1 + t^{2/3} - 0{,}55t)\,dt = \frac{1}{8}\left(t + \frac{t^{5/3}}{5/3} - 0{,}55\cdot\frac{t^2}{2} \right)\Bigg|_0^8 =$$

$$= (1/8)\cdot(8 + 19{,}2 - 17{,}6) = 1{,}2. \quad \blacksquare$$

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$*, а функція* $x = \varphi(t)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $x' = \varphi'(t)$ *і монотонна на відрізку* $[\alpha;\beta]$*, причому* $\varphi(\alpha) = a$ *і* $\varphi(\beta) = b$*. Тоді справедлива* ***формула заміни змінної у визначеному інтегралі****:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|\; x = \varphi(t);\ dx = \varphi'(t)\,dt;\ t = \varphi^{-1}(x);$$

$$\alpha=\varphi^{-1}(a);\ \beta=\varphi^{-1}(b)\Big|=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

де $t=\varphi^{-1}(x)$ *– обернена функція.*

Зауваження. Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної. Первісна обчислюється при нових межах інтегрування.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{3}^{8}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx$.

$$\square\ I=\left|\begin{array}{c} x+1=t^2;\ x=t^2-1;\ dx=2t\,dt; \\ t=\sqrt{x+1};\ t_1=\sqrt{3+1}=2;\ t_2=\sqrt{8+1}=3 \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_{2}^{3}\frac{t^2-1-3}{t}2tdt=2\int\limits_{2}^{3}(t^2-4)\,dt=2\int\limits_{2}^{3}t^2dt-8\int\limits_{2}^{3}dt=$$

$$=(2/3)t^3\Big|_2^3-8t\Big|_2^3=(2/3)\cdot(3^3-2^3)-8\cdot(3-2)=14/3.\quad\blacksquare$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-2}^{-1}\frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}dx$.

$$\square\ I=\Big|t=x^4+5x^2+6;\ dt=(4x^3+5\cdot 2x)\,dx=2(2x^3+5x)\,dx;$$

$$(2x^3+5x)\,dx=(1/2)\,dt;\ t_1=(-2)^4+5\cdot(-2)^2+6=42;$$

$$t_2=(-1)^4+5\cdot(-1)^2+6=12\Big|=\int\limits_{42}^{12}\frac{dt}{2t}=(1/2)\ln|t|\Big\|_{42}^{12}=$$

$$=(1/2)\cdot(\ln|12|-\ln|42|)=(1/2)\ln(2/7).\quad\blacksquare$$

Приклад 5. Обчислити: а) $\int\limits_{2}^{7}\frac{\sqrt[4]{3x-5}\,dx}{\sqrt{3x-5}+1}$; б) $\int\limits_{2}^{4}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи відповідно підстановки:

а) $3x-5=t^4$; б) $x=2/\cos t$).

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – диференційовні функції від x на відрізку $[a;b]$. Тоді $(uv)' = u'v + v'u$. Інтегруємо обидві частини рівності у межах від a до b, маємо

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx.$$

Оскільки $\int (uv)'\,dx = uv + C$, тому $\int_a^b (uv)'\,dx = uv\Big|_a^b$.

Отже $uv\Big|_a^b = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv$. Звідси остаточно маємо ***формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі***

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

що відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $I = \int_1^2 xe^x dx$.

□ Нехай $u = x, dv = e^x dx$. Тоді $du = dx$, $v = e^x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла, маємо:

$$I = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2. \ ■$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-2}^0 (4x^2 - 12x - 8)\cos 2x\,dx.$$

$$□ \quad I = \left| \begin{matrix} u = 4x^2 - 12x - 8; \ dv = \cos 2x\,dx; \\ du = (8x - 12)\,dx; \ v = (1/2)\sin 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= (4x^2 - 12x - 8)(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^0 - \int_{-2}^0 (1/2)\sin 2x \cdot (8x - 12)\,dx =$$

$$= 32\sin 4 - 2\int_{-2}^0 (2x - 3)\sin 2x\,dx = \Big| u = 2x - 3; \ du = 2dx;$$

$$dv = \sin 2x\,dx; \ v = -(1/2)\cos 2x \Big| = 32\sin 4 -$$

$$-2\left((2x - 3)\cdot(-1/2)\cos 2x\Big|_{-2}^0 - \int_{-2}^0 (-1/2)\cos 2x \cdot 2dx\right) =$$

$$=32\sin 4-3+7\cos 4-2\int_{-2}^{0}\cos 2x\,dx=32\sin 4-3+$$

$$+7\cos 4-2\cdot(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^{0}=31\sin 4+7\cos 4-3.\ \blacksquare$$

3.4.2 Невласний інтеграл по нескінченному проміжку (першого роду)

Розгляд визначеного інтеграла передбачає виконання двох умов:

а) скінченність проміжку інтегрування;

б) неперервність (або хоча б обмеженість) підінтегральної функції.

Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним.

Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла, приходимо до невласного інтеграла – інтеграла на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

Інтеграл по нескінченному проміжку від обмеженої функції також називають ***невласним інтегралом першого роду***.

Нехай функція $f(x)$ визначена на вправо нескінченному проміжку $[a;+\infty)$ та інтегровна на будь-якому відрізку $[a;b]$, де $-\infty<a<b<+\infty$. Тоді границю $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ називають ***невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею*** і позначають $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Отже, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$.

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають ***збіжним***. Сама границя приймається за ***значення*** цього ***інтеграла***. Якщо ж вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то невласний інтеграл називається ***розбіжним***.

Невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею визначається аналогічно: $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$.

Невласний інтеграл з обома нескінченними межами визначається рівністю: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$, де c – довільне фіксоване дійсне число. Інтеграл ліворуч у цій формулі існує (є збіжним) лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли праворуч.

Зауваження. Якщо симетричний невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ розбігається, то все ж може збігатись так зване ***головне значення*** цього інтеграла: $p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ неперервна і невід’ємна на проміжку $[a;+\infty)$, а відповідний *невласний інтеграл* $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається. Тоді він *визначає площу необмеженої області – трапеції з нескінченною основою*, що на рисунку 3.23 позначена похилими та перехресними штрихами.

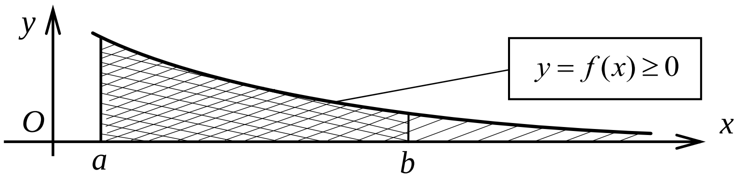


Рисунок 3.23

Зауваження. Збіжні невласні інтеграли мають усі основні властивості звичайних визначених інтегралів.

Приклад 1. Обчислити задані невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\text{а) } \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}; \quad \text{б) } \int_{3}^{+\infty} \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{2} \frac{x^2dx}{x^6+64}.$$

□ а) $I = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{2}^{b} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{2}^{b} = \frac{1}{2}\times$

$$\times \lim_{b\to+\infty}\Big(\ln\left|(b-1)/(b+1)\right| - \ln(1/3)\Big) = (1/2)(\ln 1 + \ln 3) = (1/2)\ln 3 .$$

Невласний інтеграл збігається. Його значення $I = (1/2)\ln 3$;

б) $I=\int\limits_3^{+\infty}\frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_3^{b}\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l} t=x^2+3x-10; \quad dt=2x+3; \\ t_1=3^2+3\cdot 3-10=8; \; t_2=b^2+3b-10 \end{array}\right|=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_8^{b^2+3b-10}\frac{dt}{t}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln|t|\Big|_8^{b^2+3b-10}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|b^2+3b-10|-\ln|8|\right)=+\infty .$$

Невласний інтеграл розбігається;

в) $I=\int\limits_{-\infty}^{2}\frac{x^2dx}{x^6+64}=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^2\frac{x^2dx}{x^6+64}=\left|\begin{array}{l} t=x^3; \;\; dt=3x^2dx; \\ t_1=a^3; \; t_2=2^3=8 \end{array}\right|=$

$$=\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a^3}^{8}\frac{dt}{t^2+8^2}=\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{8}arctg\frac{t}{8}\Bigg|_{a^3}^{8}=\frac{1}{24}\lim_{a\to-\infty}\Big(arctg1-$$

$$-arctg\,(a^3/8)\Big)=(1/24)\;(\pi/4+\pi/2)=\pi/32 .$$

Невласний інтеграл збігається. Його значення $I=\pi/32$. ■

Зауваження. При обчисленні невласних інтегралів іноді застосовують скорочену форму запису, що аналогічна формулі Ньютона – Лейбниця. Наприклад:

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a), \text{ де } F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x).$$

Аналогічно узагальнюється формула інтегрування частинами:

$$\int_a^{+\infty}u\,dv=u\,v\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}v\,du .$$

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл $I=\int_{-\infty}^{0}x\,e^{x/4}dx$ або встановити його розбіжність.

□ $I=\int_{-\infty}^{0}x\,e^{x/4}dx=\left|u=x;\; dv=e^{x/4}dx;du=dx;\;\; v=4e^{x/4}\right|=$

$$=\left(x\cdot 4e^{x/4}\right)\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}4\,e^{x/4}dx=-4e^{-\infty}-4\cdot 4e^{x/4}\Big|_{-\infty}^{0}=\left|e^{-\infty}=0\right|=$$

$=0-16\;(e^0-e^{-\infty})=-16$. Інтеграл збігається і дорівнює -16. ■

3.4.3 Застосування визначеного інтеграла

Інтегральне числення використовується в багатьох прикладних задачах, а саме: обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги, об'єму, роботи змінної сили, моментів інерції тощо. Його різноманітні застосування реалізуються за однією з двох схем:

1. Для шуканої величини, у припущенні адитивності (можливість підсумовування по елементам розбиття) і лінійності в малому (лінійна залежність між головними частинами нескінченно малих приростів, що фігурують в задачі), складається інтегральна сума, що наближено її визначає, а потім здійснюється граничний перехід при необмеженому здрібненні розбиття й одержується точне значення у вигляді визначеного інтеграла.
2. Складають співвідношення для диференціала (або похідної) шуканої функції, а потім саму функцію знаходять інтегруванням.

З геометричних застосувань обмежимося розглядом задачі обчислення площі плоскої фігури, заданої в прямокутних координатах. Для спрощення розрахунків будемо враховувати симетрію та інші особливості конкретних фігур.

Непорожня множина D точок координатної площини Oxy називається ***областю*** (***відкритою областю***), якщо виконуються такі умови:

1) вона відкрита, тобто разом з кожною своєю точкою містить деякий окіл цієї точки;

2) вона зв'язна, тобто будь-які дві її точки можна сполучити деякою ламаною L, всі точки якої належать цій множині D.

Точка M_0 називається ***межовою точкою*** області D, якщо в кожному її околі містяться точки, що належать і що не належать цій області. Множина всіх межових точок Γ області D називається ***межею*** цієї області.

Якщо при русі вздовж межі Γ область D весь час залишається ліворуч, то такий напрям орієнтації межі Γ називається ***додатним обходом***.

Об'єднання області D з її межею Γ, називається ***замкненою областю***.

Зауваження. Домовимось ділянку межі Γ зображати суцільною лінією, якщо вона входить в область D, і пунктирною лінією, якщо вона не входить в область D.

Область D називається ***обмеженою***, якщо існує таке додатне число C, що відстань будь-якої точки області D до початку координат не перевищує числа C. В іншому разі область D називається ***необмеженою***.

Нехай D – деяка замкнена плоска область (рис. 3.24), відрізок $[a;b]$, де $a<b$ – її проекція паралельно осі Oy на вісь Ox.

Область D називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямку осі*** Oy, якщо виконуються наступні умови:

1) вона обмежена знизу «горизонтальною» ***лінією входу*** $y=y_1(x)$, зверху – «горизонтальною» ***лінією виходу*** $y=y_2(x)$, а зліва і справа – вертикальними прямими відповідно $x=a$ і $x=b$;

2) довільна пробна пряма $x=c$, що паралельна осі Oy, так само напрямлена і проходить через деяку внутрішню точку c відрізка $[a;b]$, перетинає межу цієї області лише в двох точках: в одній точці на ближній лінії входу та в одній точці на дальній лінії виходу;

3) лінію входу (аналогічно лінію виходу) можна задати в явному вигляді одним рівнянням $y=y_1(x)$ (аналогічно $y=y_2(x)$), розв'язаним відносно y.

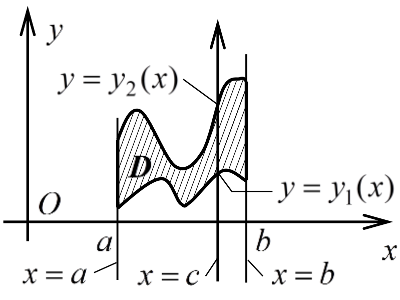


Рисунок 3.24

Правильна в напрямку осі Oy плоска область D може бути задана системою нерівностей

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases},$$

де $D \xrightarrow{Oy} [a;b] \subset Ox$.

Площу такої області можна подати як алгебраїчну суму площ відповідних криволінійних трапецій, одна з основ кожної з яких лежить на осі Ox. Тоді площу правильної в напрямку осі Oy області D можна обчислити так: $S=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))dx$.

Аналогічно визначається ***правильна*** (***стандартна***) ***в напрямку осі*** Ox плоска область D (рис. 3.25). При цьому змінні x і y міняються ролями. (Сформулюйте означення самостійно).

Правильна в напрямку осі Ox плоска область D може бути задана системою нерівностей

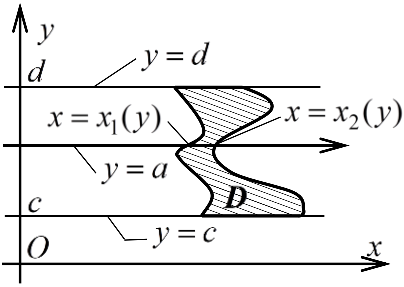


Рисунок 3.25

$$\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases},$$

де $D \xrightarrow{Ox} [c;d] \subset Oy$.

Площу правильної в напрямку осі Ox області D можна обчислити за формулою:

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))dy.$$

Якщо область D – правильна в напрямку обох координатних осей Ox і Oy, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

Наприклад, область, обмежена еліпсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, є правильною. Область D: $x^2 \le y \le 2 - x^2$; $x \in [-1;1]$, обмежена двома вертикальними параболами, що перетинаються, – правильна в напрямку осі Oy, але неправильна в напрямку осі Ox. Кругове кільце $r^2 \le x^2 + y^2 \le R^2$ – неправильне в обох напрямках Ox і Oy.

Зауваження. Якщо область D – неправильна, то звичайно прямими, що паралельні осям координат, її розбивають на правильні частини, що не мають спільних внутрішніх точок.

Приклад 1. Знайти площу плоскої замкненої області D, обмеженої лініями $x = 4 - \sqrt{y}$, $x - y + 2 = 0$ та $y = 1$. Задачу розв’язати двома способами:

а) використовуючи інтегрування за змінною $x = x_1(y)$;

б) використовуючи інтегрування за змінною y.

Для кожного способу зробити відповідний рисунок.

□ Знайдемо характерні точки області D – її кутові точки, в яких перетинаються лінії, що утворюють межу області. Для цього складемо і розв'яжемо відповідні системи з рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} x = 4 - \sqrt{y}; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = 3; \; A(3;1); \quad \begin{cases} x - y + 2 = 0; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = -1; \; B(-1;1);$$

$$\begin{cases} x = 4 - \sqrt{y}; \\ x - y + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = (4-x)^2, \; x \le 4; \\ x - (4-x)^2 + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 2; \\ x_2 = 7 > 4; \end{matrix}$$

$$y_1 = (4-2)^2 = 4; \quad C(2;4).$$

За цими точками побудуємо ескізи заданих ліній – двох прямих $x - y + 2 = 0$, $y = 1$ і лівої половини $x = 4 - \sqrt{y}$ вертикальної параболи. Одержимо попереднє зображення області D (рис. 3.26) і проаналізуємо її форму.

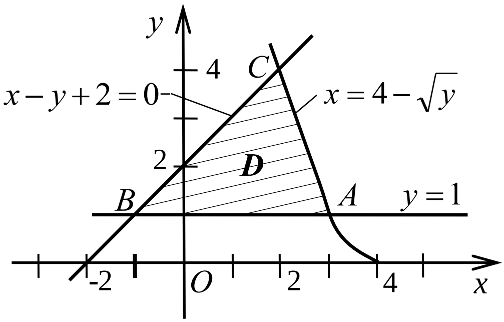


Рисунок 3.26

а) Щоб скористатися формулою $S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx,$ треба подати область D як правильну в напрямку осі Oy. Якщо у цьому напрямку вона неправильна, то її треба розбити на правильні частини. З рисунка 3.26 видно, що область D – неправильна, тому розбиваємо її на дві правильні частини D_1 і D_2 (рис. 3.27). Нехай площа першої фігури S_1, площа другої фігури S_2. Тоді шукана площа заданої області $S = S_1 + S_2$.

Проведемо обчислення:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{2}((x+2)-1)\,dx + \int_{2}^{3}\left((x-4)^2 - 1\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}(x+1)\,dx + \int_{2}^{3}(x^2 - 8x + 15)dx = \left((1/2)x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{2} +$$

$$+ \left((1/3)x^3 - 4x^2 + 15x\right)\Big|_{2}^{3} = 2 + 2 - 1/2 + 1 + 9 - 36 + 45 -$$

$$-8/3 + 16 - 30 = 35/6 \text{ (кв. од.)};$$

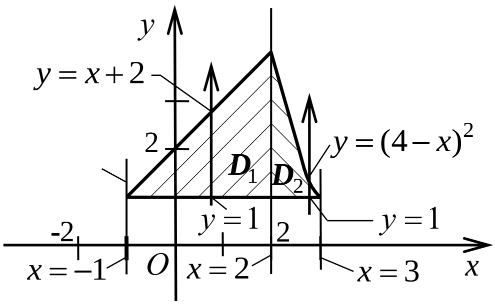


Рисунок 3.27

б) щоб скористатися формулою $S = \int_{c}^{d}(x_2(y) - x_1(y))dy,$ необхідно розглянути область D як правильну в напрямку осі Ox . Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то треба розбити її на правильні частини. З рисунка 3.26 видно, що область D у напрямку осі Ox є правильною. Відповідне зображення подано на рисунку 3.28.

Проведемо обчислення:

$$S = \int_{1}^{4}\left(\left(4 - \sqrt{y}\right) - (y-2)\right)dy = \int_{1}^{4}\left(6 - \sqrt{y} - y\right)dy =$$

$$= \left(6y - (2/3)\,y^{3/2} - (1/2)\,y^2\right)\Big|_{1}^{4} = 24 - 16/3 - 8 - 6 + 2/3 +$$

$$+1/2 = 35/6 \text{ (кв. од.)}. \quad \blacksquare$$

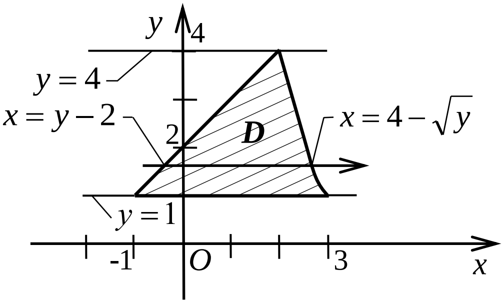


Рисунок 3.28

Далі наведено приклади застосування інтегрального числення при вирішенні економічних проблем. Опрацюйте їх самостійно в час поза лекції.

Приклад 2. Продуктивність праці описана функцією

$$f(t) = -3t^2 + 20t + 10.$$

Знайти об'єм продукції, виробленої за час $0 \le t \le 3$.

□ Об'єм продукції $Q(t)$, виробленої за період часу $[0;t]$, дорівнює визначеному інтегралу від продуктивності праці $f(t)$ на проміжку $[0;t]$: $Q(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Тоді:

$$Q(3) = \int_0^3 (-3t^2 + 20t + 10)\,dt = (-t^3 + 10t^2 + 10t)\Big|_0^3 = 93 . \ \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти (з точністю до цілих грош. од.) середнє значення μ витрат $C(x) = 90x - 10x^2 + 300$ грош. од., якщо обсяг продукції x змінюється від 3 до 9 одиниць. Указати (з точністю до цілих одиниць продукції) обсяг продукції $\bar{x}$, при якому витрати приймають середнє значення.

□ Середнє значення μ функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ обчислюється за формулою $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ і досягається хоча б в одній внутрішній точці $\bar{x}$ цього відрізка. Тоді:

$$\mu = \frac{1}{9-3}\int_3^9 (90x - 10x^2 + 300)\,dx = \frac{5}{3}\left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + 30x\right)\Bigg|_3^9 = 450\,;$$

$$f(\bar{x}) = \mu; \quad C(\bar{x}) = 90\bar{x} - 10\bar{x}^2 + 300 = 450\,; \quad \bar{x}^2 - 9\bar{x} + 15 = 0\,;$$

$$D = 81 - 60 = 21; \quad \bar{x}_1 = \frac{9-\sqrt{21}}{2} \approx 2 \notin (3;9)\,; \quad \bar{x}_2 = \frac{9+\sqrt{21}}{2} \approx 7\,. \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Продуктивність виробництва $f(t)$ з бігом часу t на підприємстві описується ***функцією Кобба – Дугласа*** вигляду:

$$f(t) = a_0 \cdot A^{\alpha}(t) \cdot L^{\beta}(t) \cdot K^{\gamma}(t),$$

де $A(t), L(t), K(t)$ – величини витрат відповідно природних ресурсів, робочої сили та капіталу; $a_0, \alpha, \beta, \gamma$ – коефіцієнти.

Знайти об’єм продукції, виробленої на деякому підприємстві за час $0 \le t \le 4,$ якщо в функції Кобба – Дугласа:

$$A = e^{0,5t};\ L = (t+1)^2;\ K = (t+2)^3;$$

$$a_0 = 3;\ \ \alpha = 2;\ \ \beta = 1/2;\ \ \gamma = 1/3.$$

□ Обсяг продукції $Q(t)$, виготовленої за період часу $[0;t]$, дорівнює визначеному інтегралу від продуктивності виробництва $f(t)$ на проміжку $[0;t]$: $Q(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$. Тоді:

$$Q(4) = \int_0^4 3\left(e^{0,5t}\right)^2\left((t+1)^2\right)^{1/2}\left((t+2)^3\right)^{1/3} dt = 3\int_0^4 e^t (t+1)(t+2)dt =$$

$$= 3\int_0^4 e^t (t^2 + 3t + 2)dt = \left| \begin{matrix} u = t^2 + 3t + 2;\ du = (2t+3)dt; \\ dv = e^t dt; \quad v = e^t \end{matrix} \right| =$$

$$= 3e^t (t^2 + 3t + 2)\Big|_0^4 - 3\int_0^4 e^t (2t+3)dt = \left| \begin{matrix} u = 2t+3;\ du = 2dt; \\ dv = e^t dt; \quad v = e^t \end{matrix} \right| =$$

$$=90e^4-6-3e^t(2t+3)\Big|_0^4+6\int_0^4 e^t dt=90e^4-6-33e^4+9+6e^t\Big|_0^4=$$

$$=57e^4+3+6e^4-6=63e^4-3\approx 3\,437. \quad \blacksquare$$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке інтегральна сума? Який її геометричний і фізичний зміст?
2. Що називається визначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний зміст?
3. Наведіть достатню умову інтегровності функції.
4. Наведіть формулу Ньютона – Лейбниця, що встановлює зв’язок між визначеним і невизначеним інтегралами.
5. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
6. Що називається середнім інтегральним значенням функції на відрізку? Сформулюйте теорему про середнє інтегральне. У чому полягає її геометричний зміст?
7. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі?
8. Наведіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
9. Що таке невласний інтеграл на необмеженому проміжку? У чому полягає його геометричний зміст?
10. Що таке головне значення симетричного невласного інтеграла з обома нескінченними межами?
11. Як записується формула Ньютона – Лейбниця для невласного інтеграла на необмеженому проміжку?
12. Які геометричні та фізичні задачі можна розв’язувати за допомогою визначених інтегралів? Наведіть приклади.
13. Яка область називається правильною (стандартною) в напрямку осі Oy? Осі Ox? Просто правильною? Наведіть приклади.
14. Як знаходиться площа правильної в напрямку осі Oy області? Правильної в напрямку осі Ox області? Наведіть приклади.
15. Наведіть приклади задач економічного змісту, які розв’язуються за допомогою визначеного інтеграла.

Завдання для самостійного опрацювання

Приклад 1. Обчислити задані визначені інтеграли:

а) $I=\int_1^4 \frac{3x-5\sqrt[3]{x}-10}{\sqrt{x}}dx$; б) $I=\int_{-6}^{-2} \frac{(4x-3)dx}{x^2+8x+20}$;

в) $I=\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{e^{2x}+3}$; г) $I=\int_1^e \ln^3 x\, dx$.

Відповідь: а) $I=-12\sqrt[3]{4}$;

б) $I=\frac{13\pi}{4}$; в) $I=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$; г) $I=6-2e$.

Приклад 2. Обчислити задані невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $I=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; б) $I=\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln 6x}$;

в) $I=\int_{-1}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$; г) $I=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Відповідь: а) Невласний інтеграл збігається. $I=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) Невласний інтеграл розбігається. $I=+\infty$.

в) Невласний інтеграл збігається. $I=3e$.

г) Невласний інтеграл збігається. $I=\pi/3$.

Приклад 3. Знайти площу S області D, обмеженої лініями:

а) $x+y-1=0$; $y=\ln x$; $x-2=0$;

б) $xy=4$; $2x-y^2=0$; $y-4=0$.

Відповідь: а) $S=2\ln 2-1/2$; б) $S=28/3-4\ln 2$.

Приклад 4. Знайти об’єм $Q(t)$ виробленої підприємством продукції за перші $t=6$ років, якщо в функції Кобба – Дугласа:

$$A(t)=e^{0,5t},\quad L(t)=(2t+1)^3,\quad K(t)=(t+1)^4,$$
$$a_0=2,\quad \alpha=2,\ \beta=1/3,\ \gamma=1/4.$$

Відповідь: $Q(6)=136e^6-4\approx 54\,862$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов / А. М. Ахтямов. – М. : Физматлит, 2004. – 464 с.

2. Валєєв К. Г. Вища математика : у 2 ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – Київ : КНЕУ, 2001.

Ч.1. – Київ : КНЕУ, 2001. – 546 с.

Ч.2. – Київ : КНЕУ, 2002. – 451 с.

3. Вища математика для електротехніків. У 3 модулях / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова та ін. ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2009.

Модуль 1 : Аналітична геометрія на площині. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра. Площина та пряма у просторі. Комплексні числа та функції / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова. – 2009. – 308 с.

Модуль 2 : Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Елементи варіаційного числення / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, А. О. Володченко. – 2010. – 350 с.

4. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі : підручник : у 2 кн. / Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, Є. Ю. Таран та ін. ; За ред. Кулініч Г. Л.

Кн. 1 : Основні розділи / Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотник, Г. Й. Призва. – Київ : Либідь, 1994. – 312 с.

5. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : Ігнатекс – Україна, 2013. – 648 с.

6. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.

7. Травкін Ю. І. Математика для економістів / Ю. І. Травкін, Л. М. Малярець. – Харків : ВД «ІНЖЕК», 2005. – 816 с.

8. Якунін А. В. Індивідуальні завдання з вищої математики з комп'ютерною підтримкою. Модуль 1 / А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 136 с.

9. Bird J. O. Higher engineering mathematics / J. O. Bird. – Oxford, Burlington MA : Newnes, 2006. – 726 p.

10. Lay D. C. Linear Algebra and its Applications / D. C. Lay. – Boston, 2005. – 560 p.

Навчальне видання

КОЛОСОВ Анатолій Іванович,

ЯКУНІН Анатолій Вікторович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 1

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 126 – Інформаційні системи та технології*)

Відповідальний за випуск *Л. П. Вороновська*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2020, поз. 67Л

Підп. до друку 06.07.2021. Формат 60 × 84/16.
Електронний документ. Ум. друк. арк. 8,5.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.