

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**В. П. Шпачук, О. М. Кузнецов**

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.**

**СТАТИКА**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
всіх форм навчання за спеціальністю  
194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології)*

**Харків**  
**ХНУМГ ім. О. М. Бекетова**  
**2021**

УДК 351.1

**Шпачук В. П.** Теоретична механіка. Статика : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання за спеціальністю 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології / В. П. Шпачук, О. М. Кузнецов ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 126 с.

Автори: В. П. Шпачук,  
О. М. Кузнецов

Рецензент

**В. О. Склярів**, доцент кафедри теоретичної і будівельної механіки (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

Цей конспект лекцій складено з метою допомоги студентам всіх форм навчання будівельних вузів за спеціальністю 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології при підготовці до занять, заліків та іспитів з розділу «Статика» курсу теоретичної механіки.

Він містить такі основні питання статички твердого тіла як аксіоми статички, поняття і визначення в'язів, властивості сил та систем сил, теореми їх зведення до найпростішого виду, властивості моментів сил відносно точки, осі, а також пар сил, умови рівноваги збіжної, плоскої та просторової систем сил, сили тертя ковзання і кочення, методи розрахунку статично визначених ферм, а також способи знаходження центрів ваги тіл. У кожному розділі наведено приклади задач та методику їх розв'язання.

*Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки, протокол № 1 від 31.08.2021.*

© В. П. Шпачук, О. М. Кузнецов, 2021  
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА.....	10
1.1 Основні визначення, поняття і аксіоми статички.....	
Предмет статички.....	10
1.2 Класифікація систем сил.....	12
1.3 Аксіоми статички.....	12
1.4 Проекція сили на вісь, площину.....	15
1.5 Розклад сили на координатні складові.....	16
2 В'ЯЗИ ТА ЇХ РЕАКЦІЇ.....	17
3 СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ.....	21
3.1 Приведення до рівнодійної. Правило многокутника сил.....	21
3.2 Умови рівноваги збіжних сил.....	24
3.3 Теорема про три непаралельні сили.....	25
4 МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ ТА ОСІ. СКЛАДАННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ. ПАРА СИЛ, ТЕОРЕМИ ПРО ПАРИ.....	28
4.1 Момент сили відносно точки.....	28
4.2 Момент сили відносно осі.....	30
4.3 Алгебраїчний момент сили відносно точки.....	31
4.4 Складання паралельних сил.....	32
4.4.1 Складання двох сил, напрямлених в один бік.....	33
4.4.2 Складання двох сил, напрямлених в різні боки.....	34
4.5 Пара сил. Момент пари. Теорема про пари.....	36
4.5.1 Визначення пари сил. Теорема про пари сил.....	36
4.5.2 Умови рівноваги системи пар сил.....	41
5 ДОВІЛЬНА СИСТЕМА СИЛ У ПРОСТОРІ ТА ПЛОЩИНІ. ПРИВЕДЕННЯ ДО ЗАДАНОГО ЦЕНТРА (ТЕОРЕМА ПУАНСО).....	42
5.1 Лема про паралельний перенос сили.....	42
5.2 Приведення довільної системи сил у просторі до заданого центра. Теорема Пуансо (Основна теорема статички).....	44
5.3 Властивості головного вектора, головного моменту і результуючої приєднаної пари системи сил. Статичні інваріанти.....	48
5.4 Окремі випадки приведення просторової системи сил.....	53
5.4.1 Приведення системи тільки до пари сил.....	53
5.4.2 Приведення до рівнодійної у центрі $O$ .....	53
5.4.3 Зрівноважена (нульова) система сил.....	53
5.4.4 Приведення системи сил до головного вектора і головного моменту.....	54

5.4.4.1	Приведення до динами.....	54
5.4.4.2	Приведення до схрещеної системи двох сил.....	57
5.4.4.3	Приведення до однієї сили (рівнодійної).....	58
5.5	Довільна система сил у площині.....	59
5.6	Теорема Варіньона про момент рівнодійної.....	62
5.7	Приклади розв'язання задач приведення.....	65
6	<b>УМОВИ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ СИЛ. ОКРЕМІ ВИПАДКИ РІВНОВАГИ.....</b>	<b>70</b>
6.1	Рівновага довільної системи сил у просторі.....	70
6.2	Окремі випадки рівноваги системи сил.....	71
6.2.1	Рівновага довільної системи паралельних сил у просторі.....	71
6.2.2	Умови рівноваги довільної плоскої системи сил.....	72
6.3	Приклади розв'язання задач рівноваги.....	75
6.4	Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл.....	79
7	<b>ТЕРТЯ, КОВЗАННЯ, КОЧЕННЯ.....</b>	<b>85</b>
7.1	Сили тертя ковзання. Закон Амонтона–Кулона.....	85
7.2	Кут тертя. Конус тертя.....	88
7.3	Тертя кочення. Коефіцієнт тертя кочення.....	89
7.4	Приклади розв'язання задач рівноваги з урахуванням сил тертя.....	93
8	<b>РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ ФЕРМИ.....</b>	<b>97</b>
8.1	Основні визначення і припущення.....	97
8.2	Порядок і приклад розрахунку плоскої ферми.....	100
9	<b>ЦЕНТР ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ І ЦЕНТР ВАГИ.....</b>	<b>106</b>
9.1	Центр паралельних сил.....	106
9.2	Центр ваги твердого тіла.....	108
9.2.1	Центр ваги однорідного тіла.....	109
9.2.2	Центр ваги однорідної пластини.....	110
9.2.3	Центр ваги однорідного стержня.....	111
9.3	Способи визначення координат центра ваги.....	112
9.4	Центри ваги простіших фігур.....	116
9.5	Стійкість твердого тіла при його перекиданні.....	118
	<b>ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.....</b>	<b>121</b>
	<b>СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....</b>	<b>125</b>

## ВСТУП

*Механікою* називається наука про механічний рух або рівновагу матеріальних тіл і виникаючу при цьому взаємодію між ними. Відноситься механіка до природничих наук.

З розвитком механіки як науки в ній з'явився цілий ряд самостійних галузей, пов'язаних з вивченням механіки твердих деформованих тіл, рідин і газів: теорія пружності, теорія пластичності, гідромеханіка, аеромеханіка, газова динаміка, опір матеріалів, будівельна механіка, теорія механізмів і машин, гідравліка, динаміка споруд та інші спеціальні інженерні дисципліни. Однак в усіх цих галузях поряд зі специфічними для кожної з них закономірностями і методами дослідження, використовуються поняття, закони і методи механіки, які є загальними для них.

*Теоретична механіка* – це частина механіки, в якій вивчаються найзагальніші закони механічного руху або рівноваги матеріальних тіл і механічної взаємодії між ними. *Механічний рух* – найпростіша форма руху матерії, яка зводиться до простого переміщення за часом фізичних тіл з одного положення в просторі в інше.

В основі теоретичної механіки лежать закони Ньютона, тому вона називається *ньютонівською* або *класичною*. Класична механіка, яка є граничним випадком релятивістської механіки А.Ейнштейна, з великою точністю задовольняє багатьом галузям сучасної техніки при швидкостях руху тіл, досить малих у порівнянні зі швидкістю світла.

Роль і значення теоретичної механіки в інженерній освіті визначається, по перше, тим, що вона є *фундаментальною загальнонауковою дисципліною*, оскільки методи теоретичної механіки дозволяють з єдиних позицій описувати динаміку і процеси не тільки в механічних системах, а і в інших частинах фізичних (наприклад, утворення комірок Бенара при тепловій конвекції; явище резонансу в електричних та оптичних ланцюгах), хімічних (хімічна термодинаміка, коливання атомів і молекул, міжмолекулярна взаємодія, динамічні явища при протіканні хімічної реакції Белоусова – Жаботинського), біологічних (динамічна поведінка системи хижак – жертва, життєвий цикл амеби), кліматичних (нерівноважність клімату Земної кулі), космічних (теорія розвитку Всесвіту) та інших системах. По друге, теоретична механіка є *основою інженерних розрахунків*, оскільки на її законах засновані статичні й динамічні розрахунки інженерних споруд (будівель, фундаментів, башт, мостів, гребель, трубопроводів, сховищ, технологічних споруд), транспортних засобів (вагонів, автомобілів, літаків, кораблів), виробничого устаткування (двигунів, насосів,

компресорів), технологічних процесів (будівництва, транспортування, центрифугування, седиментації), параметрів польоту й керування літальними апаратами та ін.

Відвертаючись при вивченні руху матеріальних тіл від усього часткового, теоретична механіка розглядає тільки ті властивості, які в даній задачі є визначальними. Це приводить до розгляду різних моделей матеріальних тіл, які являють собою ту чи іншу ступень абстракції. До основних абстракцій теоретичної механіки відносять поняття матеріальної точки і абсолютно твердого тіла. *Матеріальною точкою* називається тіло, розмірами якого можна знехтувати при розв'язанні певних задач. Наприклад, при наближеному дослідженні рухів планет їх можна розглядати як матеріальні точки. *Абсолютно твердим* називається тіло, відстань між будь-якими точками якого не змінюється під час рівноваги або руху.

Теоретична механіка широко користується не тільки методом абстракцій, а й узагальненням, математичними методами і методами формальної логіки. Застосування цих методів і узагальнень результатів безпосередніх спостережень, виробничої практики і досліду дозволили встановити певні загальні закони, що відіграють роль аксіом. Усі подальші висновки теоретичної механіки можуть бути отримані з цих аксіом за допомогою логічних міркувань і математичних викладок. При цьому достовірність положень теоретичної механіки перевіряється дослідом і практикою.

За характером задач, що вивчаються, теоретична механіка складається з трьох розділів:

– *статики*, в якій вивчаються методи еквівалентних перетворень систем сил, а також умови рівноваги матеріальних тіл;

– *кінематики*, в якій вивчається механічний рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, тобто незалежно від мас та діючих на них сил;

– *динаміки*, в якій вивчається рух матеріальних тіл у зв'язку з діючими на них силами.

Окрім цих трьох розділів, у теоретичній механіці вивчаються також елементи *аналітичної механіки*, яка являє собою сукупність найбільш узагальнених аналітичних методів розв'язання задач механіки, котрі дозволяють не тільки однаково розв'язувати задачі динаміки, а й розповсюджувати їх на такі галузі, як класична теорія поля і квантова механіка.

Закони теоретичної механіки сформульовані завдяки плідній праці багатьох поколінь вчених. Перші викладення загальних понять механіки містяться у творах старогрецького філософа Арістотеля

(384–322 рр. до н.е.), який розглядав розв’язання практичних задач за допомогою важеля. Вперше наукове обґрунтування механіки з’являється в роботі сіракузького геометра і механіка Архімеда (287–212 рр. до н.е.). Він здійснив спробу аксіоматизації механіки (статики), дав низку наукових узагальнень, що відносяться до вчення про рівновагу, центр ваги і гідростатики (закон Архімеда).

Швидкий розвиток механіки починається з епохи Відродження. Видатні вчені цієї епохи розвинули методи статики і заклали основи динаміки. Найбільш значний внесок в механіку внесли: Леонардо да Вінчі (1452–1519) – вивчав траєкторію тіла, що було кинуте під кутом до горизонту, рух тіла по площині і явище тертя, а також запровадив поняття моменту сили відносно точки; Сімон Стевін (1548–1620) – дав аксіоматичну побудову статики на основі постулатів Архімеда, запровадив поняття силового трикутника і довів теорему про три сили; Микола Копернік (1473–1543) – відкрив геліоцентричну систему світу; Галілео Галілей (1564–1642) – встановив основні закони вільного падіння тіл, увів поняття про нерівномірний рух і прискорення точки, вперше сформулював закон інерції, принцип відносності класичної механіки і дослідив дію сил на тіла, що рухаються; Йоганн Кеплер (1571–1630) – відкрив закони руху планет; Рене Декарт (1596–1650) – ближче до своїх сучасників підійшов до правильного формулювання закону інерції, вперше увів поняття кількості руху матеріальної точки і дослідив питання про складання довільного числа рухів точки; Хрiстiан Гюйгенс (1629–1695) – розробив теорію коливань фізичного маятника і визначив центр його коливання, довів теорему про відцентрову силу, експериментально визначив прискорення сили тяжіння, дослідив проблему удару двох тіл; Роберт Гук (1635–1703) – відкрив закон пропорційності між силою, прикладеною до пружного тіла, і його деформацією (закон Гука), що є основним співвідношенням при сучасних розрахунках динаміки та міцності конструкцій і споруд, а також передбачив закон всесвітнього тяжіння Ньютона; П. Варіньон (1654–1722) – встановив в остаточному вигляді поняття моменту сили, умови рівноваги системи збіжних і паралельних сил, довів теорему про момент рівнодійної.

Одне з перших місць у розвитку механіки займає Готфрід Лейбніц (1646–1716), який розробив і застосував до задач механіки диференціальне і інтегральне числення, увів поняття кінетичної енергії і впритул наблизився до утворення варіаційного числення. Завершив встановлення основних законів динаміки великий англійський математик і механік Ісаак Ньютон (1643–1727). У своєму знаменитому творі «Математичні основи натуральної філософії» (1687) він

сформулював основні поняття класичної механіки, її аксіоматику, а також низку фундаментальних теорем небесної механіки і закон всесвітнього тяжіння.

Період розвитку механіки після Ньютона значною мірою пов'язаний з ім'ям Л. Ейлера (1707–1783), який більшу частину життя працював у Петербурзькій академії наук. Л.Ейлер повністю завершив процес математизації механіки точки, був засновником механіки твердого тіла і сформулював закони динаміки для безперервного середовища.

Подальший розвиток механіки проходив у зв'язку з вивченням руху системи матеріальних точок. Розвиток цього напрямку був покладений працями Ж. Л. Даламбера (1717–1783), який сформулював принцип, за допомогою якого формально задачі динаміки зводились до задач статички (принцип Даламбера) і Ж. Л. Лагранжа (1736–1813). У своєму видатному творі «Аналітична механіка» він сформулював найбільш загальний принцип статички – принцип можливих переміщень, знайшов загальну закономірність механіки – загальне рівняння динаміки, і вивів в узагальненому вигляді диференціальні рівняння руху механічної системи (рівняння Лагранжа першого і другого роду).

У подальшому працями видатних математиків і механіків П. Л. Мопертюї (1698–1759), П. С. Лапласа (1749–1827), К. Ф. Гаусса (1777–1855), С. Пуассона (1781–1840), У. Гамільтона (1805–1865), К. Якобі (1804–1851), М. В. Остроградського (1801–1861) завершилась математизація механіки системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла, були вироблені специфічні для аналітичної механіки поняття (узагальнені координати, узагальнені швидкості, узагальнені сили) і розроблені математичні методи розв'язання багатьох задач.

Одночасно з розвитком аналітичних методів механіки в цей період удосконалюються геометричні методи, зокрема в задачах статички. Так, у книзі французького механіка Л. Пуансо (1777–1859) «Елементи статички» вперше була введена нова абстракція – пара сил і викладена теорія приведення довільної системи сил до заданого центру.

Наступний розвиток механіки характеризується поглибленням вивченням ряду її розділів і появою нових. Слід відзначити роботи С. М. Ковалевської (1850–1891) з теорії обертання важкого твердого тіла навколо нерухомої точки, які стали початковою точкою для прикладної теорії гіроскопів. Значний внесок у розвиток механіки неголономних систем, що має чисельні застосування в кібернетиці, теорії автоматичного керування, динаміці машин, зробили Д. Гіббс



(1839–1903), С. А. Чаплигін (1863–1945) та інші вчені. Теорія стійкості рівноваги та руху, яка була тісно пов'язана з проблемою точного приладобудування, створена і розвинута працями Е. Рауса (1831–1907), М. Є. Жуковського (1847–1921), О. М. Ляпунова (1857–1918), А. Пуанкаре (1854–1912). Найбільш суттєві результати в теорії гіроскопів, які є основою навігаційних приладів, були отримані Л. Фуко (1819–1868), О. М. Криловим (1863–1945), В. В. Булгаковим (1901–1952) та іншими механіками.

Проблема боротьби з небезпечними вібраціями машин і споруд призвела до розробки теорії малих коливань, де значні результати отримали Релей (1842–1919), А. Пуанкаре, О. М. Крилов. На початку ХХ сторіччя інтенсивного розвитку набула теорія нелінійних коливань, що описує процеси не тільки в механічних, а і в радіотехнічних, хімічних, біологічних та інших системах, основоположниками якої були Ван-дер-Поль, О. О. Андронов (1901–1952), М. М. Крилов (1879–1955), М. М. Боголюбов та ін.

Основи механіки тіла змінної маси, що є фундаментом вивчення реактивного польоту, були закладені в роботах І. В. Мещерського (1859–1935), К. Е. Цюлковського (1857–1935) і розвинуті С. П. Корольовим (1907–1966). Подальший розвиток цього розділу механіки працями А. Лоренца (1853–1928), А. Пуанкаре і А. Ейнштейна (1879–1955) привів до встановлення положень теорії відносності, яка створила нову, після І. Ньютона, систему просторово-часових відношень.

Наприкінці ХІХ ст. під впливом розвитку кораблебудування і авіації почалась розробка проблем гідро- та аеродинаміки, де найбільш значні результати пов'язані з іменами М. Є. Жуковського, С. А. Чаплигіна, Л. Прандтля (1875–1953), Т. Кармана (1881–1963). Теоретична механіка стала основою теорії автоматичного регулювання, значний внесок у розвиток якої зробив І. А. Вишнеградський (1831–1895).

Працями Л. Ейлера, Нав'є (1785–1836), Коші (1789–1857), Сен-Венана (1797–1886) у ХІХ ст. була створена теорія пружності – наука про закони статичного і динамічного деформування пружних тіл. На початку ХХ сторіччя у зв'язку з розвитком будівництва і машинобудування виникла потреба розробки теорії пластин та оболонок, розвиток якої пов'язаний іменами Лява, Рейсснера, Доннелла, С. П. Тимошенко, В. З. Власова, В. В. Новожилова, Х. М. Муштари, А. С. Вольміра, А. Л. Гольденвейзера та ін.

# 1 СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

## 1.1 Основні визначення, поняття і аксіоми статyki.

### Предмет статyki

*Статикою* називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються загальні положення про сили, їх приведення до найпростішого вигляду та умови рівноваги матеріальних тіл, на які діють ці сили.

Під *рівновагою* розуміють стан спокою тіла по відношенню до інших тіл. Умови рівноваги істотно залежать від того, чи є тіло твердим, *пружним*, рідким, газоподібним. У загальному курсі теоретичної механіки розглядаються тільки задачі про рівновагу абсолютно твердих тіл.

У статикі розв'язуються такі основні задачі: 1) приведення системи сил, що діють на абсолютно тверде тіло, до найпростішого вигляду; 2) визначення умов рівноваги сил, які діють на абсолютно тверде тіло. Ці задачі статyki можна розв'язувати шляхом відповідних геометричних побудов або за допомогою числових розрахунків.

*Матеріальна точка* – це матеріальне тіло, розмірами якого при вирішенні конкретної задачі можна знехтувати, або геометрична точка, яка наділена певною масою.

*Абсолютно тверде тіло* – це тіло, відстань між частками якого залишається постійною. Тобто абсолютно тверде тіло зберігає свою геометричну форму незалежно від дії інших сил.

*Сила* – фізична величина, яка є кількісною мірою механічної взаємодії між матеріальними тілами. Сила – величина векторна, її дія на абсолютно тверде тіло визначається: значенням або модулем сили; напрямом дії сили; точкою, в якій вона прикладена. Пряма *aa* (рис. 1.1), уздовж якої спрямована сила, називається *лінією дії сили*. Основною одиницею сили є 1 ньютон (Н). Це сила, яка масі в 1 кг надає прискорення в  $1 \text{ м/с}^2$  ( $1\text{Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2 = 1 \text{ кг}\cdot\text{м/с}^2$ ).

Графічно сила зображується спрямованим відрізком-вектором (рис. 1.1), довжина якого виражає у вибраному масштабі величину сили, а напрям відрізка відповідає напрямку сили. Силу позначимо буквою  $\vec{F}$ , а її величину (модуль) як  $F$  чи  $|\vec{F}|$ . Сукупність сил, що діють на абсолютно тверде тіло, називатимемо *системою сил*  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ . Наведемо ще такі визначення:

1. Тіло, яке не взаємодіє з іншими тілами і якому з даного положення можна надати будь-яке переміщення у просторі, називається *вільним*.

2. Якщо одну систему сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ , що діють на вільне тверде тіло, можна замінити іншою системою  $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_m)$ , не порушуючи при цьому стану спокою чи руху, в якому знаходиться тіло, то такі дві системи сил називаються *еквівалентними*:  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_m)$ .

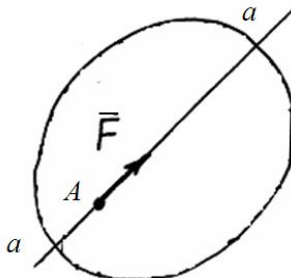


Рисунок 1.1

3. Система сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ , під дією якої вільне тверде тіло знаходиться у стані спокою, називається *зрівноваженою*, або еквівалентною нулю:  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$ .

4. Якщо задана система сил  $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n)$  еквівалентна одній силі, то ця сила називається *рівнодіючою*  $\vec{R}$  заданої системи сил:  $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n) \sim \vec{R}$ .

5. Сила, яка прикладена до тіла в точці, називається *зосередженою*. Точкою прикладання сили називається та матеріальна частка тіла, до якої ця сила безпосередньо прикладена.

6. Сили, що діють на всі точки довжини, поверхні чи об'єму, називаються *розподіленими*.

Величину сили, яка припадає на одиницю довжини, площі або об'єму, називають *інтенсивністю*. Звичайно розподілену силу позначають буквою  $q$ , яка має розмірність Н/м, Н/м<sup>2</sup>, Н/м<sup>3</sup> відповідно. Прикладами розподілених сил є: тиск циліндричного котка на поверхню дороги; тиск колеса трамвая на рейку; тиск снігового шару на покрівлю; тиск рідини на стінки трубопроводу, посудини, греблі; сили ваги тіла та ін. Позначають характер дії розподілених сил графіком (епюрою). На рисунку 1.2, а, б, в наведено відповідно епюри рівномірної, трикуткової і довільної інтенсивностей діючих сил.

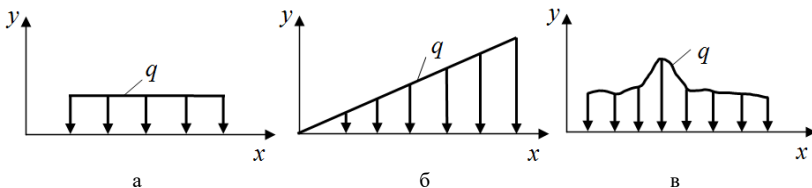


Рисунок 1.2

7. *Зовнішні сили* – це сили, що діють на тіло або механічну систему з боку матеріальних точок або інших тіл, які не входять в цю систему.

8. *Внутрішні сили* – це сили взаємодії між точками однієї механічної системи.

## 1.2 Класифікація систем сил

При вивченні статyki будемо послідовно переходити від розгляду простих систем сил до більш складних, системи сил можна класифікувати так:

- система збіжних сил, плоска й просторова;
- плоска система паралельних сил;
- довільна плоска система сил;
- просторова система паралельних сил;
- довільна просторова система сил.

## 1.3 Аксиоми статyki

В основі статyki лежить ряд аксіом, що являють собою результат узагальнень численних дослідів і спостережень за рівновагою і рухом тіл, неодноразово підтверджених практикою. Аксиоми статyki є вихідними положеннями дослідного характеру, що приймаються без доведення. Вони формулюються так.

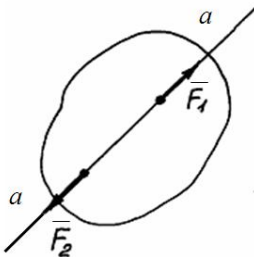


Рисунок 1.3

**Аксиома 1 (про двійку сил).** Вільне абсолютно тверде тіло може знаходитися під дією двох сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  у рівновазі тоді й тільки тоді, коли ці сили рівні за модулем  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$  і діють уздовж однієї прямої  $aa$  у протилежних напрямках (рис. 1.3):

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

У механіці така система сил має назву «двійка сил».

Ця аксіома визначає найпростішу зрівноважену систему двох сил, оскільки досліді свідчать, що вільне тіло, на яке діє тільки одна сила, знаходиться в рівновазі не може.

**Аксиома 2 (про додавання двійки сил).** Дія заданої системи сил на абсолютно тверде тіло не порушується, якщо до неї додати або відняти зрівноважену систему сил (наприклад, двійку сил).

**Наслідок з аксіоми 2.** Не порушуючи стану абсолютно твердого тіла, точку прикладання сили можна переносити вздовж її лінії дії.

**Доведення.** Нехай на абсолютно тверде тіло діє сила  $\vec{F}$ , прикладена в точці А (рис. 1.4). Візьмемо на лінії дії  $aa$  цієї сили довільну точку В і прикладемо в ній дві сили  $\vec{F}_1, \vec{F}_1'$  (двійку сил), що дорівнюють за величиною сили  $\vec{F}$ , тобто ( $F = F_1 = F_1'$ ).

Таку двійку сил можемо прикласти на підставі аксіоми 2. Сила  $\vec{F}$ , яка прикладена в точці А, і сила  $\vec{F}_1$ , прикладена в точці В, складають, за побудовою, зрівноважену систему сил. Тому її можна

відкинути, не порушуючи стану рівноваги тіла. Отже, залишається сила  $\vec{F}_1'$ , яка прикладена в точці В і дорівнює за величиною початковій силі  $\vec{F}$ . За інженерними розрахунками цим наслідком можна користуватися лише тоді, коли визначаються умови рівноваги конструкції і не розглядаються внутрішні зусилля, що виникають в її окремих частинах. Цей наслідок визначає силу як вектор, що ковзає по власній лінії дії, не залишаючи тіло (сила є ковзним вектором).

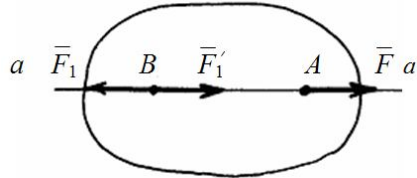


Рисунок 1.4

**Аксіома 3 (про паралелограм сил).** Система двох сил, прикладених в одній точці до абсолютно твердого тіла, має рівнодійну, яка зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах, і прикладена в тій самій точці (рис. 1.5).

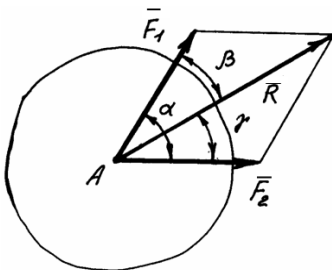


Рисунок 1.5

дві сили, які прикладені до абсолютно твердого тіла в одній точці, мають рівнодійну, що дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил і прикладена в тій самій точці.

Модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}, \quad (1.2)$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ .

При однаковому напрямі сил ( $\cos\alpha = 1$ )  $R = F_1 + F_2$ , а при протилежному ( $\cos\alpha = -1$ )  $R = F_1 - F_2$ .

Будь-яку силу  $\bar{R}$  також можна єдиним способом розкласти на дві складові сили  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_2$  за двома заданими напрямками, які утворюють кути  $\beta$  і  $\gamma$  з напрямком цієї сили:

$$F_1 = R \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}; \quad F_2 = R \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}. \quad (1.3)$$

**Аксиома 4 (про сили взаємодії двох тіл).** Сили взаємодії двох матеріальних тіл  $\bar{F}_{12}$  (сила дії тіла 1 на тіло 2) і  $\bar{F}_{21}$  завжди рівні за величиною ( $F_{12} = F_{21}$ ) і діють по одній прямій  $aa$  у протилежних напрямках (рис. 1.6).

Ця аксіома є третім законом Ньютона. Сили взаємодії двох тіл не створюють систему зрівноважених сил (двійку сил), бо вони прикладені до різних тіл.

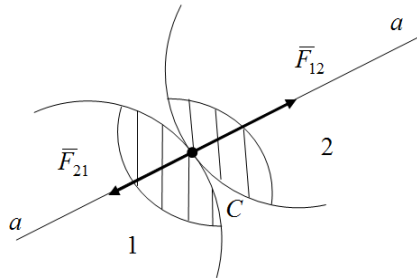


Рисунок 1.6

**Аксиома 5 (принцип затвердіння).** Рівновага zdeформованого тіла не порушиться, якщо воно затвердіє.

**Аксиома 6 (принцип звільнення від в'язей).** Невільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями. Цю аксіому використовують при складанні рівнянь рівноваги будь-якої конструкції.

У статичі також зустрічаються задачі про рівновагу тіла, що складається з декількох твердих тіл, зв'язаних між собою. Таке тіло знаходиться в рівновазі, якщо в рівновазі перебувають всі складові тіла. У деяких випадках таке тіло розглядають як одне абсолютно тверде тіло.

Принцип затвердіння широко використовується в інженерних розрахунках.

## 1.4 Проекція сили на вісь, площину

*Проекція сили на вісь* – алгебраїчна величина, яка дорівнює довжині відрізка між проекціями початку і кінця сили на цю вісь. Проекція має знак «+», якщо вектор сили нахилений у бік додатного напрямку осі, і знак «-» – якщо в бік від’ємного напрямку. Тому (рис. 1.7, а) буде  $F_x = F \cdot \cos \alpha$ ,  $F_y = F \cdot \sin \alpha$ . Окремий випадок: якщо сила перпендикулярна до осі, то її проекція на цю вісь дорівнює нулю, наприклад для сили  $\vec{T}$  її проекції  $T_x = 0$ ,  $T_y = T$ .

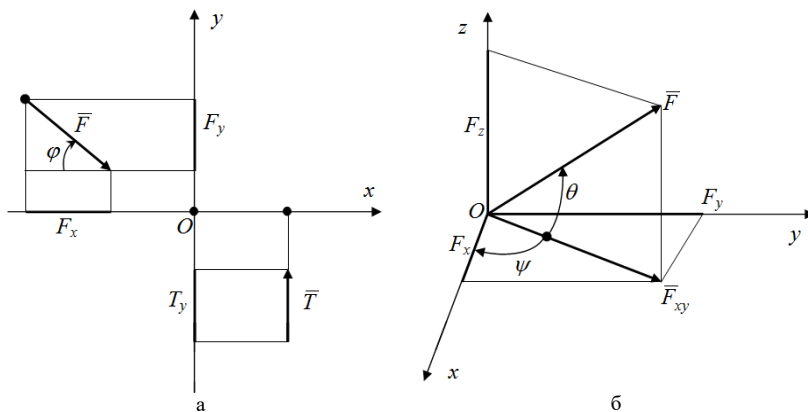


Рисунок 1.7

*Проекцією сили на площину* називається вектор, який міститься між проекціями початку і кінця даної сили на площину (рис. 1.7, б). Таким чином, проекція сили на площину, на різницю від проекції сили на вісь, є величиною *векторною*. На рисунку 1.7, б вектором  $\vec{F}_{xy}$  позначена проекція сили  $\vec{F}$  на площину  $xOy$ , а її проекції на осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  визначаються так:

$$F_x = F_{xy} \cos \psi = F \cos \theta \cdot \cos \psi ;$$

$$F_y = F_{xy} \sin \psi = F \cos \theta \cdot \sin \psi ; F_z = F \sin \theta .$$

Тут величини  $F_x$  і  $F_y$  визначено методом подвійного проектування: спочатку знаходиться проекція сили на площину  $xOy$ , а потім отриманий вектор  $\vec{F}_{xy}$  проектують на осі  $Ox$  і  $Oy$ .

## 1.5 Розклад сили на координатні складові

Відповідно до аксіоми 3 про паралелограм сил кожену силу можна розкласти на складові. Якщо їх лінії дії паралельні осям системи координат, то вони називаються *координатними складовими* сили у площині (сили  $\bar{P}_{1x}, \bar{P}_{1y}, \bar{P}_{2x}, \bar{P}_{2y}$  на рис. 1.8, а) або у просторі (сили  $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$  на рис. 1.8, б). При побудові координатних складових в першому випадку використовують метод прямокутника, а у другому – метод паралелепіпеда, відповідно до якого вектор  $\bar{F}$  сили уявляють діагоналлю паралелепіпеда (рис. 1.8, б), ребра якого приймають за її складові  $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$ .

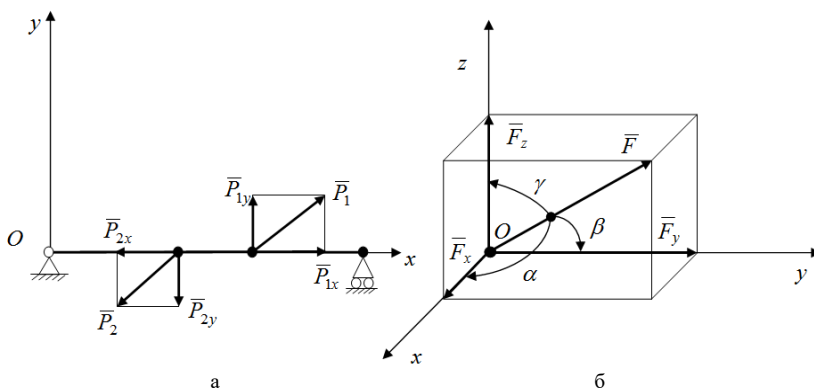


Рисунок 1.8

У техніці процедуру розкладу сили на координатні складові використовують при розв'язанні задач рівноваги твердого тіла, наприклад, при складанні рівнянь моментів сил. Тут для координатних складових просто визначаються плечі сил, а деякі моменти складових виявляються рівними нулю за побудовою. Величини координатних складових розраховують за допомогою розглянутих в розділі 1.4 формул. Але якщо у просторі задано кути  $\alpha, \beta, \gamma$  між вектором сили  $\bar{F}$  (рис. 1.8, б) і осями системи координат, то краще користуватися наступними виразами:  $F_x = F \cos \alpha$ ;  $F_y = F \cos \beta$ ;  $F_z = F \cos \gamma$ .



## 2 В'ЯЗИ ТА ЇХ РЕАКЦІЇ

*В'язями* називають тіла або сукупність тіл, які обмежують рух даного тіла чи даної матеріальної системи. За аксіомою 6 невідільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями. Звільнення від в'язей дає можливість звести рівновагу невідільного твердого тіла до відповідного питання про рівновагу вільного твердого тіла, яке знаходиться під дією одночасно зовнішніх сил і реакцій в'язей.

Сила, з якою в'язь діє на тіло, щоб перешкодити будь-яким його переміщенням, називається *реакцією в'язі*. Визначення реакцій в'язей має велике практичне значення: знаючи їх, будемо знати і сили тиску тіла на в'язі, які необхідні для розрахунку міцності відповідних частин конструкції.

Надалі сили, які не є реакціями в'язей (наприклад, сила тяжіння), будемо називати *активними силами*. Особливість активної сили полягає в тому, що її модуль і напрям безпосередньо не залежать від інших сил, які діють на тіло. Реакції в'язей відрізняються від діючих на тіло активних сил тим, що їх напрямок і величина завжди залежать від цих сил і наперед невідомі. Якщо ніякі активні сили на тіло не діють, то реакції в'язей дорівнюють нулю. Для визначення реакцій в'язі потрібно розв'язати відповідну задачу статички. Правильне визначення напрямів реакцій в'язей відіграє при розв'язуванні задач статички дуже важливу роль.

Розглянемо докладніше, як спрямовані реакції деяких основних типів в'язей.

**Ідеально гладенька поверхня.** Реакція такої поверхні спрямована перпендикулярно до дотичної площини, проведеної до поверхні цієї опори у точці стикання з даним тілом (рис. 2.1, а).

У випадках, коли спільна нормаль до поверхонь в'язі й тіла виявляється неозначеною, наприклад, вироджується в точку, то реакція в'язі спрямована по нормалі до тієї поверхні, до якої можна провести нормаль. Прикладом може бути опора ребром або вершиною кута (рис. 2.1, б, в).

**Гнучка в'язь.** Реалізується за допомогою нитки, каната, троса, ланцюга. Такі в'язі (рис. 2.2) працюють тільки на розтяг, їх реакції напрямлені по нитці. В'язь, реалізована в даному вигляді, не дає змоги тілу віддалятися від точки підвісу за напрямом  $AM$ . Тому реакція  $\bar{T}$  нитки  $AM$  спрямована завжди вздовж нитки до точки підвісу  $A$ . У задачах теоретичної механіки припускають, що нитка є невагомою, гнучкою і нерозтяжною.

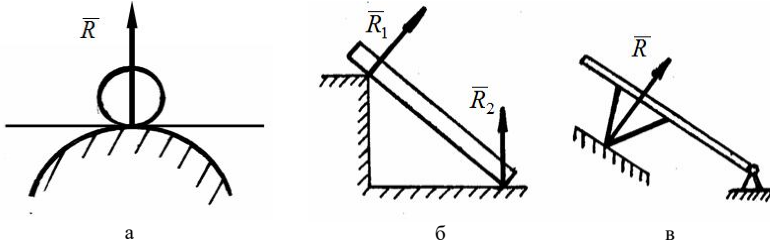


Рисунок 2.1

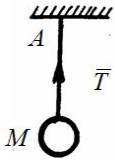


Рисунок 2.2

**Шарнір.** З'єднання двох тіл, яке дає змогу одному тілу повертатися відносно іншого, не відділяючись, називається *шарніром*. Розрізняють:

– **нерухомий циліндричний шарнір.** Він звичайно складається з обойми 1, яка закріплена на нерухомій опорі 2, і циліндричного вала 3 (рис. 2.3, а). Тут з'єднане з валом 3 тіло може обертатися тільки навколо осі  $O$  шарніра. Реакція  $\bar{R}$  циліндричного шарніра перпендикулярна до його осі і має напрям, який залежить від сил, прикладених до тіла. Тому її виражають у вигляді взаємно перпендикулярних координатних складових  $\bar{X}_0, \bar{Y}_0$ , тобто  $\bar{R} = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0$

$$i R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2};$$

– **рухомий циліндричний шарнір (коток).** Цей вид в'язі не дає змогу тілу переміщатися в напрямі, перпендикулярному до опорної поверхні котка. Його реакція  $\bar{R}$  (рис. 2.3, б) напрямлена завжди по нормалі до опорної площини. Опора на котках застосовується звичайно в мостових конструкціях;

– **сферичний шарнір.** У випадку сферичного шарніра тіло, яке з'єднане з обоймою  $C$ , має змогу обертатися навколо центру шарніра в будь-якому напрямі (рис. 2.3, в). Реакцію сферичного шарніра виражають трьома координатними складовими  $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$  у трьох взаємно перпендикулярних напрямках:

$$\bar{R} = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0 + \bar{Z}_0; \quad R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}. \quad (2.2)$$

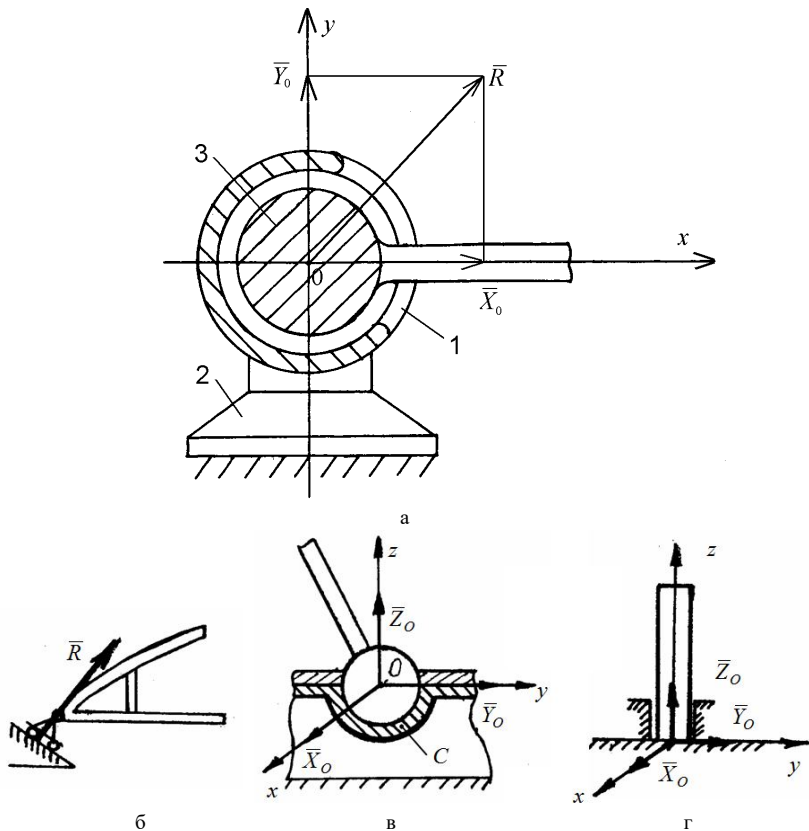


Рисунок 2.3

**Підп'ятник.** Якщо циліндричний шарнір перешкоджає переміщенню вала вздовж осі  $z$  вниз, то такий циліндричний шарнір називають підп'ятником. Опорна реакція підп'ятника має три координатні складові  $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$  (рис. 2.3, г):

$$\bar{R} = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0 + \bar{Z}_0; \quad R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}. \quad (2.3)$$

**Ідеальний стержень.** Так називається невагомий стержень  $AB$ , закріплений двома ідеальними шарнірами на його кінцях (рис. 2.4). Такий стержень працює тільки на розтяг або стиск.

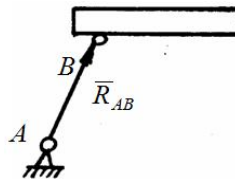


Рисунок 2.4

Реакція  $\bar{R}_{AB}$  ідеального стержня напрямлена по осі стержня. Якщо стержень розтягнутий, то реакція спрямована від тіла до стержня; якщо стержень стиснутий – то по стержню (рис. 2.4) від нього до тіла.

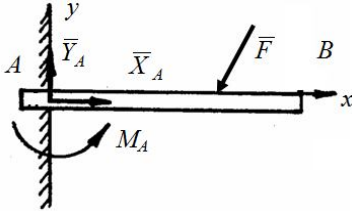


Рисунок 2.5

**Опора з тертям.** У цьому випадку реакцію опори  $\bar{R}$  розкладають на дві складові (рис. 2.6): силу  $\bar{R}_n$ , нормальну до поверхні опори, і силу  $\bar{R}_t$ , дотичну до поверхні опори (силу тертя):

$$\bar{R} = \bar{R}_n + \bar{R}_t ;$$

$$R = \sqrt{R_n^2 + R_t^2} . \quad (2.4)$$

**Жорстке защемлення.**

Балка  $AB$  кінцем  $A$  жорстко закріплена в стіні, а другий її кінець вільний (рис. 2.5). Якщо на балку діє задана сила  $\bar{F}$ , то в защемленні виникають реакції  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$  і пара сил з моментом  $M_A$ .

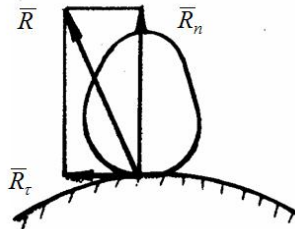


Рисунок 2.6

### 3 СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

#### 3.1 Приведення до рівнодійної. Правило многокутника сил

Найпростішою є система *збіжних сил*, тобто система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці (точці  $O$  збігу сил). Вона може бути просторовою чи плоскою. В останньому випадку всі лінії дії сил системи належать одній площині.

**Теорема про рівнодійну.** Система збіжних сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$  еквівалентна одній силі (рівнодійній  $\vec{R}$ ), яка дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил  $(\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i)$  і прикладена в точці  $O$  їх збігу.

**Доведення.** Розглянемо (рис. 3.1, а) вихідну систему збіжних сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$  з лініями дії  $a_1 a_1, \dots, a_n a_n$  і точками прикладання  $A_{1, \dots, n}$ .

Для кожної сили системи використовуємо аксіому 2 про перенесення сили уздовж лінії дії в точку  $O$  збігу (рис. 3.1, б). У результаті отримуємо систему сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ , прикладених в одній точці  $O$ .

На основі аксіоми 3 про паралелограм сил будь-яку кількість сил із загальною точкою прикладання можна складати геометрично. При цьому можна використовувати або правило паралелограма, або правило трикутника (многокутника).

У першому випадку (рис. 3.1, б), застосовуючи послідовно правило паралелограма, дістанемо спочатку рівнодійну  $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , далі отримаємо рівнодійну  $\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3$  і нарешті рівнодійну  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  заданої системи сил рис. 3.1, б).

За правилом многокутника рівнодійну сил (рис. 3.1, в) визначаємо як суму векторів цих сил: для цього з кінця вектора  $\vec{F}_1$  відкладаємо вектор сили  $\vec{F}_2$ , і т.д. З'єднавши початок першого вектора  $\vec{F}_1$  з кінцем останнього  $\vec{F}_n$ , визначимо рівнодійну силу

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Одержаний таким чином многокутник має назву *многокутника сил*, або силового многокутника, замикальна сторона якого виявляється рівнодійною силою системи.

Таким чином, теорему доведено.

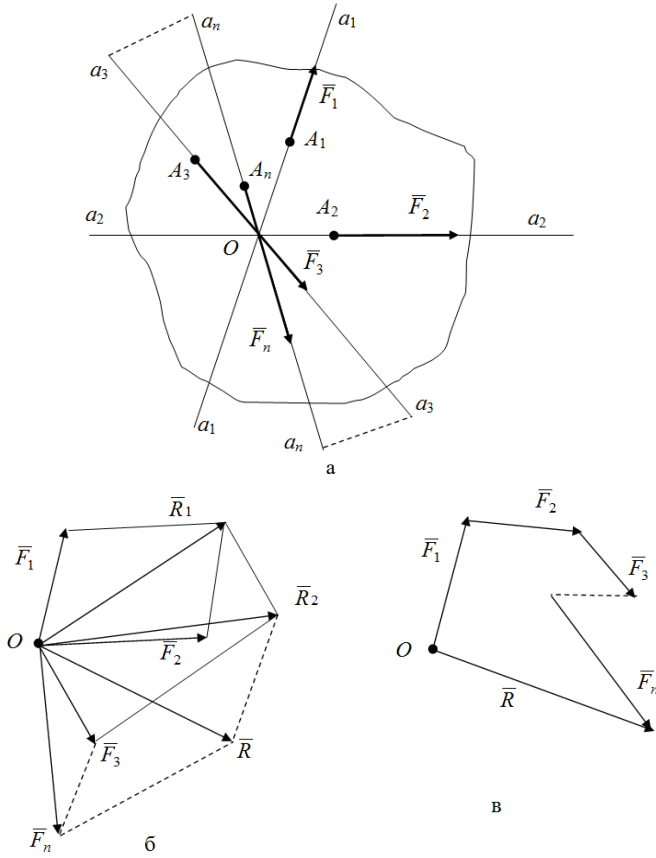


Рисунок 3.1

Доведена теорема дозволяє розв'язувати задачу приведення систем збіжних сил до рівнодійної сили графічно (нею зручно користуватись у разі плоскої довільної системи сил).

Рівнодійну  $\bar{R}$  можна визначити також аналітично за її проєкціями  $R_x, R_y, R_z$  на осі прямокутної системи координат методами векторної алгебри. У даному випадку рівнодійну  $\bar{R}$  представляють так:

$$\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k} = \bar{R}_x + \bar{R}_y + \bar{R}_z, \quad (3.1)$$

де  $R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}$ ;  $R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}$ ;  $R_z = \sum_{i=1}^n \overline{F}_{iz}$ ;  $F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}$  – проєкції сил системи на відповідні осі координат;

$\overline{R}_x, \overline{R}_y, \overline{R}_z$  – координатні складові рівнодійної.

Величина (модуль) і напрямні косинуси рівнодійної сили  $\overline{R}$  визначають, враховуючи (3.1), за наступними формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (3.2)$$

$$\cos(\widehat{Ox, \overline{R}}) = R_x / R; \quad \cos(\widehat{Oy, \overline{R}}) = R_y / R; \quad \cos(\widehat{Oz, \overline{R}}) = R_z / R.$$

Визначивши проєкції або величину і напрямні косинуси рівнодійної, можна побудувати і сам вектор  $\overline{R}$  у заданій системі координат для подальшого розв'язання задачі рівноваги тіла.

Розглянемо, наприклад, задану в площині  $xOy$  (рис. 3.2, а) систему двох збіжних сил  $F_1 = 1$  Н,  $F_2 = 1$  Н. Визначимо рівнодійну  $\overline{R}$  системи методом додавання векторів початкових сил за правилом паралелограма, а також методом додавання координатних складових рівнодійної за правилом прямокутника (плоска система сил) або паралелепіпеда (просторова система) чи за правилом «модуль-кут».

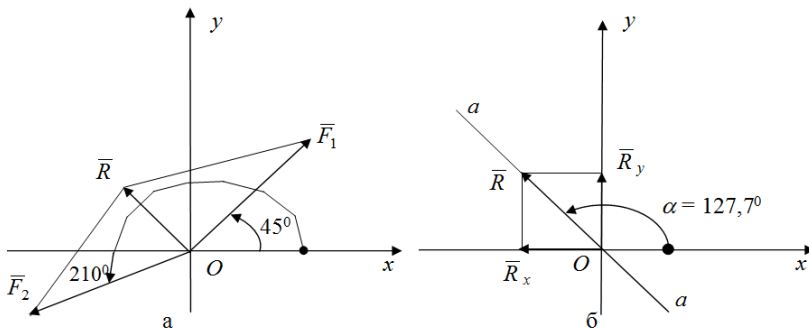


Рисунок 3.2

У першому випадку будуюмо на силах  $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ , як на сторонах, паралелограм (рис. 3.2, а), діагональ якого буде шуканою рівнодійною  $\overline{R}$ . Величину (модуль) рівнодійної визначаємо за теоремою косинусів:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos 165^\circ} = \sqrt{1 + 1 - 2 \cdot 0,966} = 0,26 \text{ (Н)}.$$

У другому випадку отримаємо: проєкції рівнодійної

$$R_x = F_{1x} - F_{2x} = F_1 \cdot \cos 45^\circ - F_2 \cdot \cos 30^\circ = 1 \cdot 0,707 - 1 \cdot 0,866 = 0,159 \text{ (Н)},$$

$$R_y = F_{1y} - F_{2y} = F_1 \cdot \sin 45^\circ - F_2 \cdot \sin 30^\circ = 1 \cdot 0,707 - 1 \cdot 0,5 = 0,207 \text{ (Н)},$$

координатні складові рівнодійної:

$$\bar{R}_x = R_x \cdot \bar{i} = -0,159 \cdot \bar{i}, \quad \bar{R}_y = R_y \cdot \bar{j} = 0,207 \cdot \bar{j}.$$

Вектори  $\bar{R}_x$  і  $\bar{R}_y$  будемо на рисунку 3.2, б. Склавши їх за правилом прямокутника, отримаємо шукану рівнодійну  $\bar{R}$ .

За правилом «модуль-кут» визначимо величину рівнодійної  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-0,159)^2 + (0,207)^2} = 0,26 \text{ (Н)}$ , її напрямний косинус

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-0,159}{0,26} = -0,61 \text{ і кут } \alpha = 127,7^\circ.$$

Будемо в площині  $xOy$  лінію дії  $a-a$  рівнодійної (рис. 3.2, б), враховуючи визначений кут між нею і віссю  $Ox$ . Далі на лінії дії  $a-a$  будемо вектор рівнодійної, який починається в полюсі  $O$  системи координат і має величину (довжину)  $R = 0,26 \text{ (Н)}$ .

### 3.2 Умови рівноваги системи збіжних сил

Відповідно до теореми про рівнодійну будь-яка система збіжних сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$  зводиться до прикладеної у точці  $O$  збігу сили  $\bar{R}$ , рівної геометричній сумі сил системи. За правилом багатокутника сила  $\bar{R}$  складає його замикальну сторону.

Під дією лише однієї сили, згідно з аксіомою 1 статки про двійку сил, тіло перебуватиме в рівновазі. Умови його рівноваги формулюються так: для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо<sup>1</sup>, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулю:

$$\bar{R} = 0. \quad (3.3)$$

*Це геометрична (векторна) умова рівноваги.*

Необхідність умови (3.3) очевидна, бо якщо вона не виконується, то тіло знаходиться під дією рівнодійної сили й не перебуватиме у рівновазі.

Достатність цієї умови доведемо так. Якщо рівнодійна системи діючих на тіло сил дорівнює нулю, то за визначенням вона є зрівноваженою (еквівалентною нулю), а тіло під дією такої системи знаходиться у стані спокою безумовно.

---

<sup>1</sup> Необхідність означає, що з фізичних умов рівноваги випливають математичні, а достатність, навпаки – з математичних умов випливають фізичні.



Слід зазначити, що з умови  $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0$  випливає замкненість

многокутника сил: кінець останньої сили  $\bar{F}_n$  повинен збігатися з початком першої (точкою  $O$  на рис. 3.1, в).

Векторна рівність (3.3) перетворюється, з урахуванням формули (3.1), у аналітичну (алгебраїчну) форму рівноваги просторової системи збіжних сил:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0; \\ R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0; \\ R_z &= \sum_{i=1}^n F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

*Аналітична форма рівноваги* (3.4) формулюється наступним чином: для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій цих сил на кожен з трьох координатних осей дорівнювали нулю.

Якщо система збіжних сил є плоскою, то з трьох умов рівноваги (3.4) залишаються лише дві, наприклад,

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (3.5)$$

Отримані умови рівноваги у випадку, коли деякі сили в рівностях (3.4), (3.5) є реакціями в'язей, перетворюються в рівняння відносно цих реакцій. При цьому кількість невідомих реакцій в'язів, якщо задача статично визначена, не повинно перевищувати числа рівнянь.

### 3.3 Теорема про три непаралельні сили

Теорему про рівновагу трьох непаралельних сил застосовують в тих випадках, коли треба знайти дві невідомі сили (реакції в'язів), які зрівноважують третю відому силу (наприклад, силу ваги тіла), якщо відомо точку прикладання однієї з невідомих сил і лінію дії іншої.

**Теорема про три сили.** Якщо тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, з яких принаймні дві лежать в одній площині, то лінії дії всіх трьох сил перетинаються в одній точці, а вектори сил утворюють замкнений трикутник.

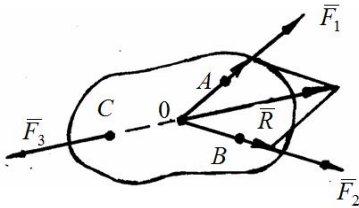


Рисунок 3.3

**Доведення.** Нехай тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ , з яких  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  лежать в одній площині (рис. 3.3). Продовжимо лінії дії сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  і знайдемо їх точку перетину  $O$ . Перенесемо сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  вздовж

їх ліній дії в точку  $O$  і знайдемо їх рівнодійну  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Замінивши сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  їх рівнодійною  $\vec{R}$ , одержимо, що дане тіло перебуває в рівновазі під дією тільки двох сил  $\vec{F}_3$  і  $\vec{R}$ .

Це можливо, враховуючи аксіому 1 про дві сили, тільки якщо сили  $\vec{F}_3$  і  $\vec{R}$  мають спільну лінію дії, тобто коли лінія дії сили  $\vec{F}_3$  проходить через точку  $O$ . Теорему доведено.

Зауважимо, що доведена теорема визначає необхідну, але не достатню умову рівноваги тіла під дією трьох сил. Дійсно, тіло під дією трьох сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, може і не перебувати в рівновазі, а здійснювати поступальний рівномірний рух, відповідно до першого закону Ньютона.

Застосувавши до заданої системи трьох сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  геометричну умову рівноваги, дістаємо також, що трикутник сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  буде замкнений: кінець третьої сили  $\vec{F}_3$  буде збігатися з початком першої сили  $\vec{F}_1$ .

**Приклад.** Розглянемо, наприклад, зображену на рисунок 3.4, а механічну схему, що складається з бруса вагою  $P$ , який спирається кінцем на прямокутний виступ  $D$  і закріплений в точці  $A$  з підлогою через нерухому шарнірну опору. Визначимо реакції опор, якщо  $AN = ND = a$ .

**Розв'язання.** Лінії дії сили ваги  $\vec{P}$  і реакції в'язі  $\vec{R}_D$  у точці  $D$  відомі. Через точку  $O$  їх перетину, відповідно до теореми про три сили, повинна проходити невідома лінія дії реакції  $\vec{R}_A$ . Будуємо її на схемі. З урахуванням визначених ліній дій реакції  $\vec{R}_A, \vec{R}_D$  і відомої сили  $\vec{P}$  будуємо замкнений силовий трикутник (рис. 3.4, б)  $O'N'M'$ , який подібний трикутнику  $ONM$  на рисунку 3.4, а.

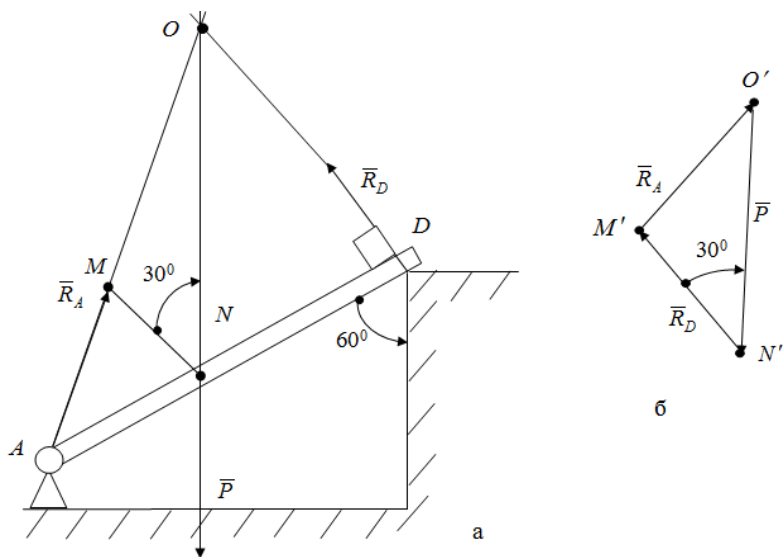


Рисунок 3.4

Силовий трикутник дозволяє визначити не тільки напрями реакцій  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_D$ , але і їх величини. Для цього треба використати умови пропорційності сторін подібних трикутників  $\left(\frac{ON}{MN} = \frac{P}{R_D}\right)$ , а також теорему косинусів  $\left(R_A = \sqrt{P^2 + R_D^2 - 2P \cdot R_D \cdot \cos 30^\circ}\right)$ .

## 4 МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ ТА ОСІ. СКЛАДАННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ. ПАРА СИЛ, ТЕОРЕМИ ПРО ПАРИ

### 4.1 Момент сили відносно точки

Силовий фактор, під дією якого тіло може здійснювати обертальний рух, називається *моментом сили відносно точки* (полюса). Це фізичне поняття.

З математичної точки зору *момент сили  $\vec{F}$  відносно точки  $O$*  (рис. 4.1) визначається вектором  $\vec{M}_0(\vec{F})$ , який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора  $\vec{r}_A$  точки  $A$  прикладання сили на її вектор  $\vec{F}$  :

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F}. \quad (4.1)$$

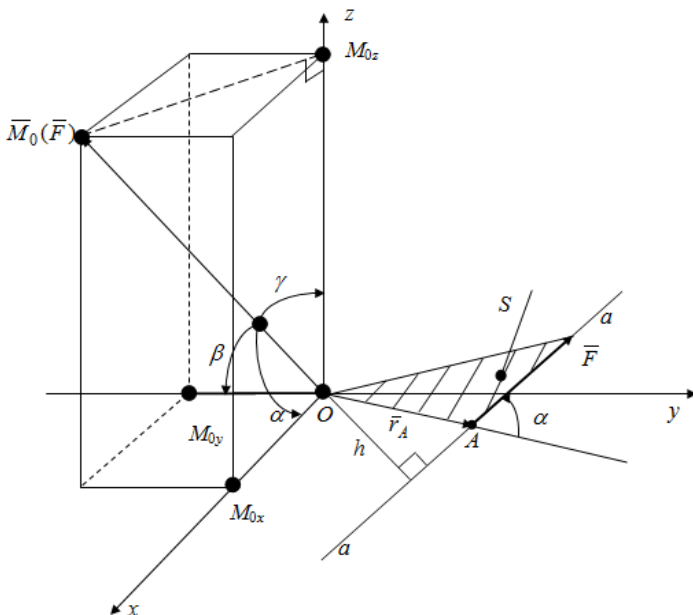


Рисунок 4.1

Отже, враховуючи поняття і визначення векторної алгебри, отримаємо наступні властивості моменту сили відносно точки:

– момент сили відносно точки  $O$  є зв'язаним у точці вектором, який напрямлений перпендикулярно до площини  $S$ , що проходить через точку  $O$  і лінію дії  $a$ - $a$  сили  $\vec{F}$ , у той бік, звідки обертання тіла під дією сили навколо точки видно проти ходу стрілки годинника;

– в координатній формі момент сили обчислюється так:

$$\begin{aligned} \bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{r}_A \times \bar{F} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y) \cdot \bar{i} + (zF_x - xF_z) \cdot \bar{j} + \\ &+ (xF_y - yF_x) \cdot \bar{k} = M_{0x} \cdot \bar{i} + M_{0y} \cdot \bar{j} + M_{0z} \cdot \bar{k}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де  $\bar{r}_A = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$ ;  $\bar{F} = F_x \cdot \bar{i} + F_y \cdot \bar{j} + F_z \cdot \bar{k}$ ;  $M_{0x}$ ;  $M_{0y}$ ;  $M_{0z}$  – проекції моменту сили відносно точки  $O$  на осі системи координат (рис. 4.1);

– основною одиницею вимірювання моменту сили відносно точки є  $1 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;

– за величиною момент сили дорівнює модулю вектора  $\bar{M}_0(\bar{F})$ :

$$M_0(\bar{F}) = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2},$$

або

$$M_0(\bar{F}) = |\bar{M}_0(\bar{F})| = |\bar{r}_A \times \bar{F}| = r_A \times F \times \sin \alpha = hF, \quad (4.3)$$

де  $h = r_A \cdot \sin \alpha$  – плече сили  $\bar{F}$  відносно точки  $O$ , тобто довжина перпендикуляра, який опущено (рис. 4.1) з точки  $O$  на лінію дії  $a$ -а сили  $\bar{F}$ ;

– відповідно до формули (4.3) момент сили відносно полюса дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через даний полюс (при цьому плече сили  $h = 0$ );

– момент сили відносно точки умовимося вважати додатним (вектор  $\bar{M}_0(\bar{F})$  моменту сили на рисунку 4.2, а спрямуємо перпендикулярно до горизонтальної площини  $S$  вертикально догори) у випадку, якщо сила намагається викликати обертання тіла (або плеча  $h$  навколо точки) проти ходу стрілки годинника, і від’ємним – навпаки (рис. 4.2, б).

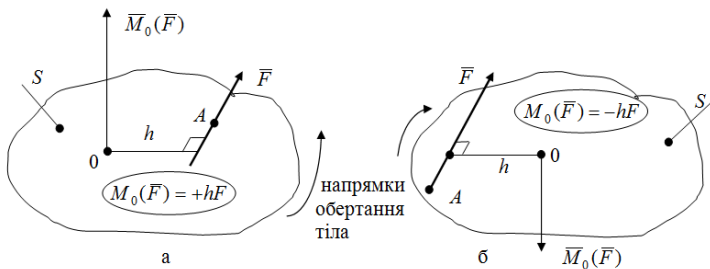


Рисунок 4.2

## 4.2 Момент сили відносно осі

*Моментом сили відносно осі* називається проекція на цю вісь вектора  $\overline{M}_0(\overline{F})$  моменту сили відносно точки  $O$ , що лежить на цій осі (рис. 4.1). Він характеризує обертальну дію сили навколо даної осі.

Відповідно до схеми на рисунку 4.1 і виразу (4.2) моменти сили  $\overline{F}$  відносно координатних осей  $Ox, Oy$  і  $Oz$  будуть визначитися так:

$$M_{0x}(\overline{F}) = M_0(\overline{F}) \cdot \cos \alpha; \quad M_{0y}(\overline{F}) = M_0(\overline{F}) \cdot \cos \beta;$$

$$M_{0z}(\overline{F}) = M_0(\overline{F}) \cdot \cos \gamma$$

$$\text{або } M_{0x} = yF_z - zF_y; \quad M_{0y} = zF_x - xF_z; \quad M_{0z} = xF_y - yF_x.$$

На практиці момент сили відносно осі звичайно визначають за наступними правилом:

- проводять площину  $S$ , перпендикулярну до осі  $Oz$ , і знаходять точку  $O$  перетину осі з площиною (рис. 4.3);

- проєктують задану силу  $\overline{F}$  на зазначену площину, отримуючи силу  $\overline{F}_s$ ;

- обчислюють момент сили  $\overline{F}_s$  відносно точки  $O$  перетину площини  $S$  з віссю  $Oz$ , враховуючи наведені в підрозділі 4.2 його властивості:  $M_0(\overline{F}_s) = \pm hF_s$ ;

- момент заданої сили  $\overline{F}$  відносно осі  $Oz$  визначають за формулою

$$\overline{M}_{0z}(\overline{F}) = \overline{M}_0(\overline{F}_s).$$

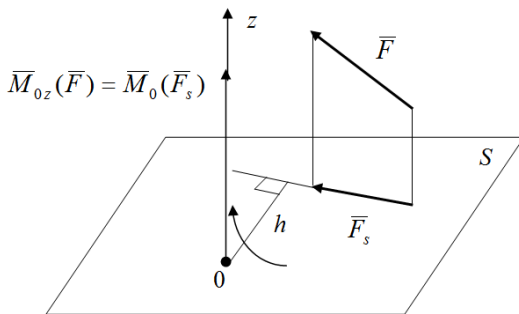


Рисунок 4.3

На рисунку 4.3 момент  $\overline{M}_{0z}(\overline{F})$  – координатна складова  $\overline{M}_{0z}$  вектора моменту сили відносно точки  $O$ , який згідно з (4.2) дорівнює:  $\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{M}_{0x} + \overline{M}_{0y} + \overline{M}_{0z}$ .

Окремі випадки: момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:

– сила паралельна осі (в цьому випадку проекція сили  $\overline{F}$  на площину  $S$  дорівнює нулю:  $\overline{F}_s = 0$ );

– лінія дії сили перетинає вісь (при цьому плече  $h = 0$ ).

### 4.3 Алгебраїчний момент сили відносно точки

При розв’язанні задач статки у площині при складанні рівнянь моментів використовують поняття алгебраїчного моменту сили відносно точки.

*Алгебраїчним моментом сили відносно точки* називається взятий з відповідним знаком добуток плеча на модуль сили. Береться знак «+», якщо сила намагається повернути плече проти ходу стрілки годинника.

Таким чином, для визначення алгебраїчного моменту сили відносно точки треба виконати такі дії (рис. 4.4, а, б):

- 1) провести лінію дії сили;
- 2) з вибраної точки опустити перпендикуляр до лінії дії сили (довжина перпендикуляра  $h$  – плече сили);
- 3) скласти добуток плеча на модуль сили;
- 4) взяти знак «+», якщо сила намагається повернути плече відносно вибраної точки проти ходу стрілки годинника (рис. 4.4, а) і знак «-» – за ходом стрілки годинника (рис. 4.4, б).

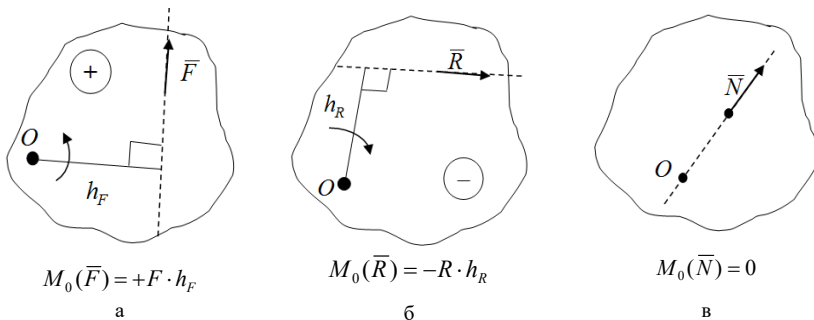


Рисунок 4.4

Окремий випадок (рис. 4.4, в): алгебраїчний момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку (тут плече  $h = 0$ ).

Зрівнюючи правила визначення алгебраїчного моменту сили відносно точки і моменту сили відносно осі, робимо висновок, що алгебраїчний момент сили відносно точки є не чим іншим, як моментом сили відносно осі, яка проходить через точку перпендикулярно до площини рисунка і напрямлена до спостерігача.

#### 4.4 Складання паралельних сил

Прикладами паралельних сил є сили ваги вузлів машини, трамваю (рис. 4.5, а), реакції поверхні шляху на коток (рис. 4.5, б) та ін.

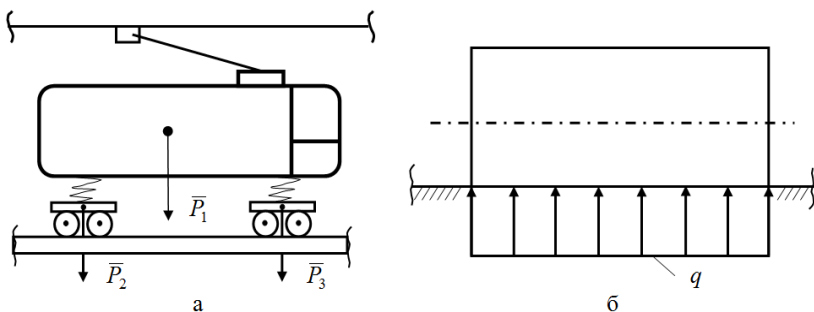


Рисунок 4.5



#### 4.4.1 Складання двох сил, напрямлених в один бік

Розглянемо тверде тіло, на яке в точках  $A$  і  $B$  діють дві паралельні сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  (рис. 4.6). Приведемо вихідну систему паралельних сил до еквівалентної системи збіжних сил  $\vec{Q}_1$  і  $\vec{Q}_2$ . Для цього прикладемо в точках  $A$  і  $B$  дві зрівноважені, довільні за величиною сили  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2 = -\vec{P}_1$  і складемо їх за правилом паралелограма. Одержані сили  $\vec{Q}_1$  і  $\vec{Q}_2$  перенесемо до точки  $O$  перетину їх ліній дії. Після цього кожен з сил  $\vec{Q}_1$  і  $\vec{Q}_2$  розкладемо на дві складові, кожна з яких дорівнює аналогічним складовим сил  $\vec{Q}_1$  і  $\vec{Q}_2$  у точках  $A$  і  $B$ . За побудовою і визначенням отримані складові сили  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$  складуть двійку сил, тому їх можна відкинути (закреслено на рис. 4.6). Залишені сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , за побудовою, будуть мати загальну лінію дії. Тому перенесемо їх у точку  $C$  перетину зазначеної лінії дії з відрізком  $AB$ . У точці  $C$  їх складемо і замінимо рівнодійною:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Для визначення положення точки  $C$  на відрізку  $AB$  розглянемо трикутники  $OAC$ ,  $OaC$ ,  $OBC$ ,  $Obm$ . Вони подібні за побудовою, тому будуть виконуватись наступні пропорційні співвідношення їх сторін:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{ak}{Ok}, \quad \frac{BC}{OC} = \frac{bm}{Om}. \quad (4.4)$$

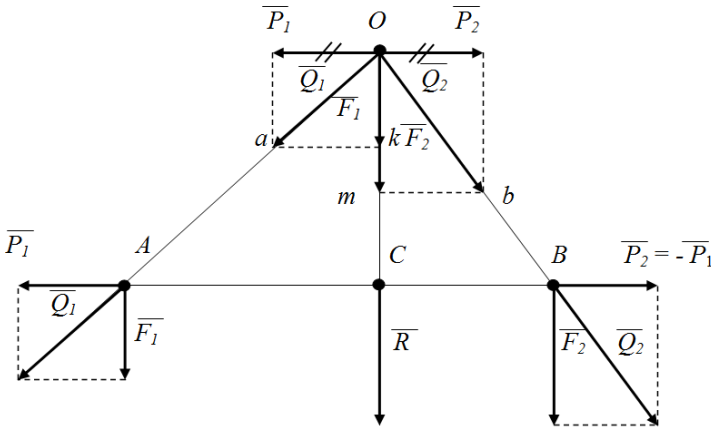


Рисунок 4.6

Розв'язавши пропорції (4.4) та враховуючи, що  $BC + AC = AB$ , а  $Ok = F_1$ ,  $Om = F_2$ , одержимо

$$BC = AB \cdot \frac{F_1}{F_1 + F_2}; \quad AC = AB \cdot \frac{F_2}{F_1 + F_2}; \quad \frac{BC}{AC} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (4.5)$$

У результаті виконаних перетворень початкову систему паралельних сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  зведено до однієї сили рівнодійної  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Отримано також, що рівнодійна двох паралельних сил, які спрямовані в один бік, дорівнює за модулем сумі модулів складових сил, їм паралельна і напрямлена у той же бік; лінія дії рівнодійної проходить між точками прикладання складових сил на відстані від цих точок, обернено пропорційній (4.5) силам.

#### 4.4.2 Складання двох сил, напрямлених в різні боки

Зобразимо прикладені до тіла у точках  $A$ ,  $B$  сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , причому нехай за величиною  $F_1 > F_2$  (рис. 4.7). Візьмемо на продовженні відрізка  $BA$  точку  $C$  і прикладемо в ній двійку сил  $\vec{R}$  і  $\vec{R}'$ , які паралельні силам  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ . При цьому модулі сил і положення точки  $C$  оберемо так, щоб виконувались рівності:

$$R = F_1 - F_2, \quad \frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}. \quad (4.6)$$

Отже, складаючи сили  $\vec{F}_2$  і  $\vec{R}'$ , знайдемо, що їх рівнодійна  $\vec{Q} = \vec{F}_2 + \vec{R}'$ , тобто дорівнює за величиною силі  $\vec{F}_1$ , протилежно їй направлена і прикладена в точці  $A$ . Сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{Q}$ , як зрівноважені, можна відкинути (закреслено на рис. 4.7). У результаті задані сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  будуть замінені однією силою  $\vec{R}$ , яка і є їх рівнодійною. Модуль цієї рівнодійної та точка її прикладання  $C$  визначається формулами (4.6).

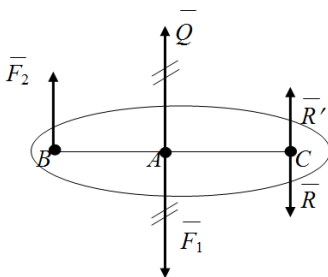


Рисунок 4.7

Таким чином, рівнодійна двох напрямлених в різні боки паралельних сил дорівнює за величиною різниці модулів заданих сил, їм паралельна і направлена в бік більшої з сил; лінія дії рівнодійної проходить поза відрізком, який з'єднує точки прикладання складових сил, на відстані, обернено пропорційній силам.

Коли на тіло діють декілька паралельних сил, то їх рівнодійну можна знайти послідовно, використовуючи правила складання двох паралельних сил.

У випадку розподілених сил діють наступним способом. Силу ваги тіла показують у вигляді рівнодійної, яка має початок у центрі  $C$  ваги і спрямована завжди вертикально донизу (рис. 4.8, а). Якщо сили розподілені за довжиною, то діють так: у випадку прямокутної епюри (рис. 4.8, б) сили замінюють рівнодійною  $Q = q \cdot l$  ( $l$  – довжина відрізка  $AB$  прикладання сил), яка прикладена у середині відрізка  $AB$ ; при лінійному законі розподілу сили (рис. 4.8, в) рівнодійна  $Q = q_1 \cdot l/2$  прикладена у точці з координатою  $2l/3$ ; при довільному законі (рис. 4.8, г) – величину рівнодійної сили визначають формулою

$$Q = \int_0^l q(x) dx, \quad \text{а} \quad \text{координату її прикладання} \quad -$$

$$x_c = \left( \int_0^l q(x) \cdot x \cdot dx \right) / \left( \int_0^l q(x) dx \right).$$

проходить через центр ваги площі епюри розподілених сил (наприклад, у випадку лінійного закону розподілу сил (рис. 4.8, в) вона проходить через точку перетину медіан трикутника).

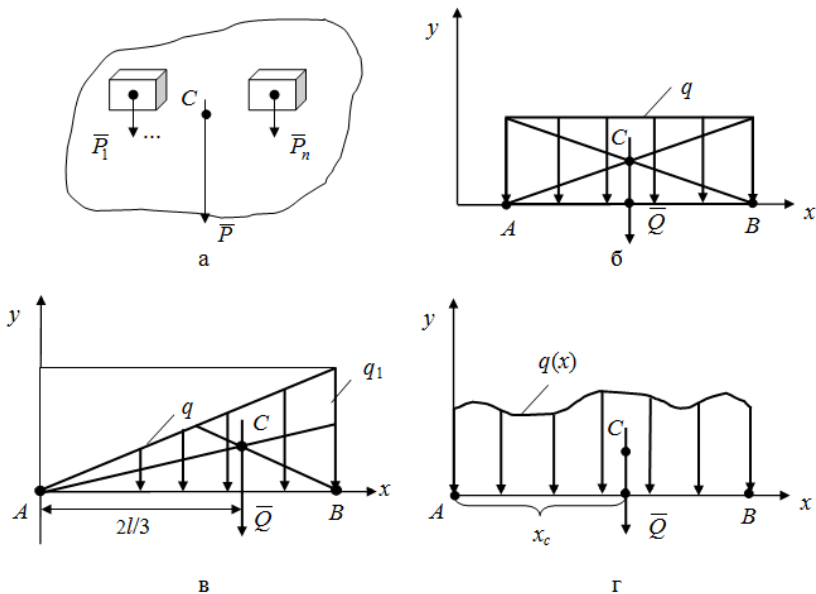


Рисунок 4.8

## 4.5 Пара сил. Момент пари. Теорема про пари сил

### 4.5.1 Визначення пари сил

*Парою сил* називається система двох розташованих в одній площині паралельних сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$ , які рівні за величиною і протилежно направлені.

Площина  $S$ , яка проходить через лінії дії сил пари (рис. 4.8), називається *площиною дії пари*.

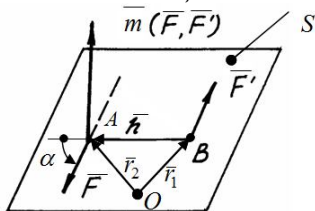


Рисунок 4.9

Дія пари сил на тіло призводить до його обертання навколо осі, яка перпендикулярна до площини дії пари сил.

Момент пари сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$  математично визначається вектором  $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')$  (рис. 4.9), рівним векторному добутку  $\vec{h} \times \vec{F}$ . Отже, враховуючи його

властивості, отримаємо, що вектор  $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')$  моменту пари сил напрямлений перпендикулярно до площини  $S$  дії пари сил у той бік, звідки обертання пари відбувається проти ходу стрілки годинника.

Відповідно до механічної схеми на рис. 4.8 отримаємо наступні властивості моменту пари сил:

– за величиною момент пари сил дорівнюватиме модулю вектора  $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')$ :

$$m(\vec{F}, \vec{F}') = |\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')| = |\vec{h} \times \vec{F}| = h \times F \times \sin \alpha.$$

Звичайно при побудові схеми на рисунку 4.9 приймають кут  $\alpha = 90^\circ$ , тоді матимемо  $m(\vec{F}, \vec{F}') = h \cdot F$ . У цьому випадку  $h$  визначають *плечем пари сил* (найкоротший відрізок між лініями дії сил, що складають пару);

– пара сил не має рівнодійної, тому що при  $\vec{F} = -\vec{F}'$  виконується рівність  $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}' = 0$ ; при цьому властивості сумісної механічної (обертальної) дії сил пари на тіло зберігаються і проявляються у вигляді моменту  $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}') = \vec{h} \times \vec{F}$  пари, рівному сумі моментів  $\vec{M}_0(\vec{F}) + \vec{M}_0(\vec{F}')$  заданих сил відносно будь-якої точки  $O$  тіла. Нехай, наприклад, точка  $O$  на рисунку 4.9 – довільна точка простору, а  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  радіуси-вектори точок прикладання сил  $\vec{F}'$  і  $\vec{F}$  пари.

З визначення моменту сили відносно точки маємо

$$\begin{aligned} \vec{M}_0(\vec{F}') + \vec{M}_0(\vec{F}) &= \vec{r}_1 \times \vec{F}' + \vec{r}_2 \times \vec{F} = \vec{r}_1 \times (-\vec{F}) + \vec{r}_2 \times \vec{F} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F} = \vec{h} \times \vec{F} \\ \text{або } \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}') &= \vec{M}_0(\vec{F}) + \vec{M}_0(\vec{F}'). \end{aligned} \quad (4.7)$$

З виразу (4.7) виходить, що момент прикладеної до тіла пари сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$  дорівнює сумі моментів цих сил відносно точки  $O$  і не залежить від її положення у просторі.

Інші властивості пари сил визначаються наступними теоремами.

**Теорема про еквівалентність пар.** Не змінюючи дії на тіло, пару сил можна замінити іншою парою, яка лежить в цій самій площині і має такий самий момент за величиною і напрямом.

**Доведення.** Нехай на тіло діє пара сил  $(\vec{F}, \vec{F}')$  з плечем  $d_1$  (рис. 4.10). Проведемо у площині дії пари сил через довільні точки  $D$  і  $C$  дві паралельні прямі до перетину їх з лініями дії сил пари в точках  $A$  і  $B$ . Відстані між прямими  $AC$  і  $BD$  позначимо як  $d_2$ . Розкладемо сили  $\vec{F}$  і  $\vec{F}'$  за напрямками  $AB, BD$  і  $AC$ . За побудовою очевидно, що

$\bar{P} = -\bar{P}', \bar{Q} = -\bar{Q}'$ , тоді сили  $\bar{Q}$  і  $\bar{Q}'$ , як зрівноважені, можна відкинути. Сили  $\bar{P}$  і  $\bar{P}'$  перенесемо уздовж їх ліній дій у точки  $D$  і  $C$ . У результаті проведених перетворень задану пару сил  $(\bar{F}, \bar{F}')$  було замінено новою парою  $(\bar{P}, \bar{P}')$  з іншим плечем  $d_2$  та іншими силами. Через довільність вибору точок  $D, C$  і напрямів прямих  $BD$  і  $AC$  нова пара сил може бути розташована у площині її дії де завгодно.

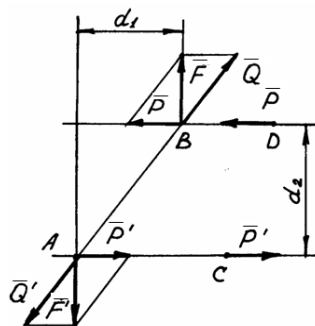


Рисунок 4.10

Покажемо, що моменти нової і заданої пар сил  $(\bar{P}, \bar{P}')$  і  $(\bar{F}, \bar{F}')$  рівні. За побудовою сила  $\bar{F} = \bar{P} + \bar{Q}$ , а сила  $\bar{Q}$  проходить через точку  $A$ , тому буде виконуватись:

$$\begin{aligned} \bar{m}(\bar{F}, \bar{F}') &= \bar{M}_A(\bar{F}) = \bar{M}_A(\bar{P}) + \bar{M}_A(\bar{Q}) = \bar{M}_A(\bar{P}) = \bar{m}(\bar{P}, \bar{P}'), \\ \text{тобто } \bar{m}(\bar{F}, \bar{F}') &= \bar{m}(\bar{P}, \bar{P}'); \quad Fd_1 = Pd_2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

З рівностей (4.8) випливають такі додаткові властивості пар сил:

- задану пару сил, не змінюючи її дії на тіло, можна переносити як завгодно у площині її дії;
- у заданої пари сил можна змінювати сили і довжину плеча, щоб залишався незмінним її момент;
- дві пари, що лежать в одній площині і мають однакові моменти, є еквівалентними;
- момент пари сил є вільним вектором: його можна переносити паралельно самому собі в будь-яку точку тіла.

**Теорема про перенесення пари в паралельну площину.** Дія пари сил на тіло не порушиться, якщо її перенести із заданої площини у довільну іншу площину, яка паралельна заданій.

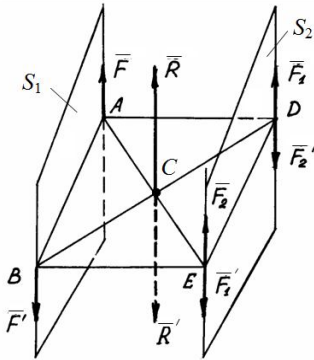


Рисунок 4.11

відрізка  $AE$ . Аналогічно сили  $\bar{F}'$  і  $\bar{F}'_2$  зводяться до рівнодійної  $\bar{R}'$ , прикладеної в середині відрізка  $BD$ , тобто в точці  $C$ . За побудовою і визначенням рівнодійні сили  $\bar{R}$  і  $\bar{R}'$  будуть рівними і протилежно направлені, тому їх можна відкинути. У результаті задана пара сил  $(\bar{F}, \bar{F}')$  перетворюється в пару сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}'_1)$ , яка розміщена у площині  $S_2$ .

З доведеної теореми випливає, що дві пари, які лежать в одній площині або в паралельних площинах і мають однакові моменти, еквівалентні.

**Теорема про додавання пар сил.** Довільну систему двох пар сил можна замінити рівнодійною парою. Момент рівнодійної пари дорівнює векторній сумі моментів початкових пар.

**Доведення.** Розглянемо пари сил з моментами  $\bar{m}_1$  і  $\bar{m}_2$ , які лежать у довільних площинах  $S_1$  і  $S_2$ , що перетинаються (рис. 4.12). Визначимо на лінії перетину цих площин відрізок  $AB = d$  і позначимо його вектором  $\bar{AB}$ .

Визначимо пару сил з моментом  $\bar{m}_1$  силами  $(\bar{F}_1, \bar{F}'_1)$ , а пару сил з моментом  $\bar{m}_2$  – силами  $(\bar{F}_2, \bar{F}'_2)$ , прикладеними в точках  $A$  і  $B$ . При цьому виконуватиметься  $m_1 = F_1 d$ ,  $m_2 = F_2 d$ . Додаючи прикладені в точках  $A$  і  $B$  сили, замінимо

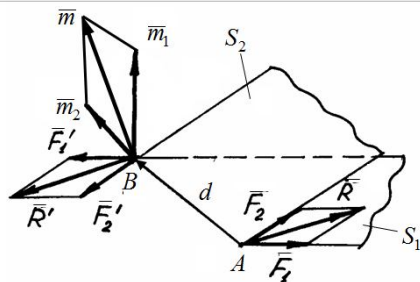


Рисунок 4.12

**Доведення.** Розглянемо пару сил  $(\bar{F}, \bar{F}')$  з площиною дії  $S_1$  (рис. 4.11). Побудуємо площину  $S_2$ , паралельну площині  $S_1$ , і визначимо на ній відрізок  $ED$ , рівний і паралельний відрізку  $AB$  у площині  $S_1$ . У точках  $D$  і  $E$  прикладемо двійку сил, в яких  $F_1 = F'_1 = F'_2 = F_2 = F$ .

За побудовою фігура  $ABED$  є паралелограмом. Далі додамо паралельні сили  $\bar{F}$  і  $\bar{F}_2$ . Їх рівнодійна  $\bar{R}$  буде прикладена в точці  $C$  – середині відрізка  $AE$ . Аналогічно сили  $\bar{F}'$  і  $\bar{F}'_2$  зводяться до рівнодійної  $\bar{R}'$ , прикладеної в середині відрізка  $BD$ , тобто в точці  $C$ . За побудовою і визначенням рівнодійні сили  $\bar{R}$  і  $\bar{R}'$  будуть рівними і протилежно направлені, тому їх можна відкинути. У результаті задана пара сил  $(\bar{F}, \bar{F}')$  перетворюється в пару сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}'_1)$ , яка розміщена у площині  $S_2$ .

системи сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}'_1)$  і  $(\bar{F}_2, \bar{F}'_2)$  силами  $\bar{R}, \bar{R}'$ , які за визначенням складуть пару сил  $(\bar{R}, \bar{R}')$ . Момент рівнодійної пари  $(\bar{R}, \bar{R}')$ , оскільки  $\bar{R}' = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2$ , визначатиметься як

$$\bar{m}(\bar{R}, \bar{R}') = \overline{AB} \times \bar{R}' = \overline{AB} \times (\bar{F}'_1 + \bar{F}'_2) = (\overline{AB} \times \bar{F}'_1) + (\overline{AB} \times \bar{F}'_2) = \bar{m}_1 + \bar{m}_2. \quad (4.9)$$

Якщо на тіло діє  $n$  пар сил з моментами  $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n$ , то, застосовуючи послідовно формулу (4.9), одержимо (рис. 4.13), що задана система пар сил зводиться до результуючої пари з моментом

$$\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k. \quad (4.10)$$

Тут результуючу пару  $\bar{m}$  визначають (див. силовий многокутник у розділі 3) замикаючою стороною многокутника векторів  $\bar{m}_n$ .

Якщо пари сил лежать в одній площині, то вектори їх моментів будуть паралельні. Тому момент результуючої пари  $\bar{m}$  дорівнює алгебраїчній сумі складових моментів:

$$m = \sum_{k=1}^n m_k.$$

Момент результуючої пари сил  $\bar{m}$  можна визначити аналітично, спроектувавши векторне рівняння (4.10) на осі системи координат:

$$m_x = \sum_{k=1}^n m_{kx} = m_{1x} + \dots + m_{nx};$$

$$m_y = \sum_{k=1}^n m_{ky} = m_{1y} + \dots + m_{ny};$$

$$m_z = \sum_{k=1}^n m_{kz} = m_{1z} + \dots + m_{nz}.$$

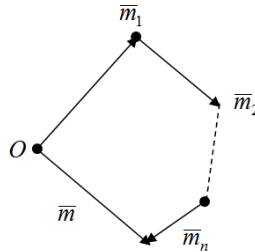


Рисунок 4.13

Величину (модуль вектора  $\bar{m}$ ) результуючої пари визначають як

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}.$$



При побудові вектора  $\vec{m}$  у просторі, тобто при визначенні площини дії результуючої пари сил звичайно використовують його напрямні косинуси:

$$\cos(\widehat{Ox, \vec{m}}) = m_x / m, \quad \cos(\widehat{Oy, \vec{m}}) = m_y / m, \quad \cos(\widehat{Oz, \vec{m}}) = m_z / m.$$

#### 4.5.2 Умови рівноваги системи пар сил

Враховуючи властивості рівнодійної збіжних сил, результуючої пари сил, властивості вектора моменту пари сил як вільного вектора, а також умови рівноваги збіжної системи сил, отримаємо наступні необхідні й достатні умови рівноваги тіла під дією системи пар сил  $(\vec{m}_1, \dots, \vec{m}_n)$ :

– векторна (геометрична) форма рівноваги:

$$\vec{m} = \sum_{k=1}^n \vec{m}_k = \vec{m}_1 + \dots + \vec{m}_n = 0, \quad (4.11)$$

тобто багатокутник моментів пар сил початкової системи (рис. 4.13) повинен бути замкненим: кінець останнього вектора  $\vec{m}_n$  повинен збігатися з початком (точкою  $O$ ) першого;

– аналітична (алгебраїчна) форма рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \sum_{k=1}^n m_{kx} = m_{1x} + m_{2x} + \dots + m_{nx} = 0; \\ m_y &= \sum_{k=1}^n m_{ky} = m_{1y} + m_{2y} + \dots + m_{ny} = 0; \\ m_z &= \sum_{k=1}^n m_{kz} = m_{1z} + m_{2z} + \dots + m_{nz} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

тобто суми проєкцій  $m_{kx}, m_{ky}, m_{kz}$  моментів пар сил системи на кожную з трьох координатних осей  $(Ox, Oy, Oz)$  дорівнюватимуть нулю.

## 5 ДОВІЛЬНА СИСТЕМА СИЛ У ПРОСТОРІ Й ПЛОЩИНІ. ПРИВЕДЕННЯ ДО ЗАДАНОГО ЦЕНТРА (ТЕОРЕМА ПУАНСО)

У реальних умовах експлуатації на тіло, нехай-то електродвигун, кузов трамваю, лопатка турбіни, гребля, каркас будинку чи ін., діє система зовнішніх сил.

Існує декілька типових систем сил, що використовуються в розрахунках на практиці. Це довільна система сил у просторі, довільна система сил у площині, система паралельних сил і будь-яка їх комбінація.

Цей розділ присвячено питанням приведення вихідної системи сил у просторі й площині до найпростішого вигляду в загальному і окремих випадках.

### 5.1 Лема про паралельне перенесення сили

Відповідно до аксіоми 2 статки (див. розд. 1) прикладену до тіла силу можна переносити вздовж її лінії дії в будь-яку іншу його точку. При цьому дія сили на тіло, а також стан тіла не змінюються.

У ряді практичних задач рівноваги, пов'язаних зі спрощенням заданої системи сил, часто виникає необхідність перенесення сили до заданого центра паралельно самій до себе.

На відміну від попереднього випадку паралельне перенесення сили призводить в умовах збереження початкового механічного стану тіла до зміни системи діючих на нього силових факторів: до тіла необхідно додатково додати пару сил, параметри якої визначає наступна лема.

**Лема.** Прикладену до тіла в точці  $O$  (рис. 5.1, а) силу  $\vec{F}$  можна перенести паралельно самій собі в будь-яку його іншу точку  $O_1$  (центр приведення), додаючи при цьому, для збереження механічного стану тіла, пару сил  $(\vec{F}, \vec{F}^*)$  з моментом  $\vec{m}_{O_1} = \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}^*)$ , рівним моменту  $\vec{M}_{O_1}(\vec{F})$  вихідної сили  $\vec{F}$  відносно центра приведення  $O_1$ .

**Доведення.** Нехай у точці  $O$  (рис. 5.1, а) до тіла прикладена розташована в площині  $E$  сила  $\vec{F}$ . Позначимо систему сил, діючу на тіло, як  $(\vec{F})$ . Виберемо в тілі, в пл.  $E$ , довільну точку  $O_1$ , положення якої визначимо вектором  $\vec{O_1O}$ . Позначимо її як центр приведення « $O_1$ ». Прикладемо далі в пл.  $E$  у цьому центрі (рис. 5.1, б) еквівалентну нулю систему  $(\vec{F}_1, \vec{F}^*) \sim 0$  двох сил (двійку сил) з параметрами:

$\vec{F}_1 = -\vec{F}^*$ ,  $\vec{F}^* = -\vec{F}$ . При цьому, відповідно до аксіоми 2 статки, стан тіла не зміниться, а вихідна система сил ( $\vec{F}$ ) перетвориться в еквівалентну систему трьох сил:  $(\vec{F}) \sim (\vec{F}, (\vec{F}_1, \vec{F}^*)) \sim (\vec{F}_1, (\vec{F}, \vec{F}^*))$ .

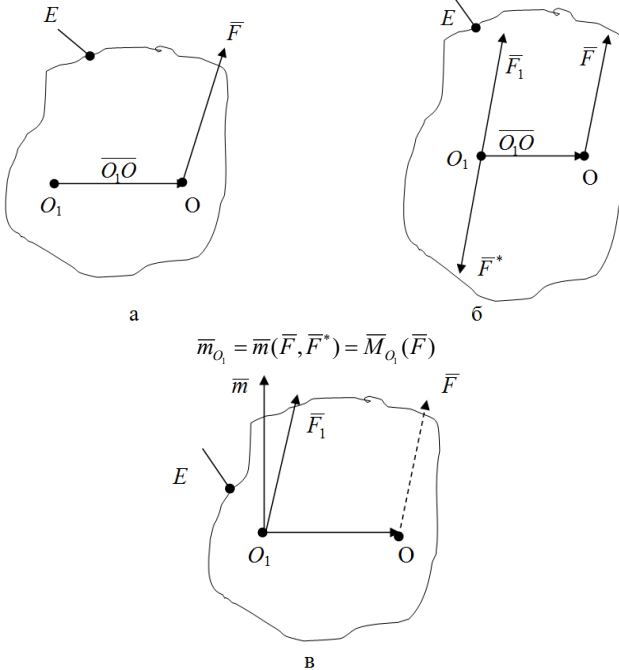


Рисунок 5.1

За побудовою на рисунку 5.1, б, сила  $\vec{F}_1$  прикладена в точці приведення  $O_1$  і дорівнює  $\vec{F}$ , а система двох сил  $(\vec{F}, \vec{F}^*)$  створює пару сил, що називається приєднаною парою сил. Далі в центрі приведення  $O_1$  на рисунку 5.1, в побудуємо вектор  $\vec{m}_{O_1} = \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}^*) = \overline{O_1O} \times \vec{F}$ , рівний моменту отриманої пари сил, і вектор  $\vec{M}_{O_1}(\vec{F}) = \overline{O_1O} \times \vec{F}$ , рівний моменту вихідної сили  $\vec{F}$  відносно полюса  $O_1$ . За визначенням вони є перпендикулярними до пл.  $E$ , прикладеними в точці  $O_1$  і рівними. Тобто момент приєднаної пари сил дорівнює моменту вихідної сили відносно нового центра приведення  $O_1$ :

$$\vec{m}_{O_1} = \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}^*) = \vec{M}_{O_1}(\vec{F}). \quad (5.1)$$

Отже лему доведено.

Рівняння (5.1) використовують на практиці при визначенні параметрів приєднаної пари сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}^*)$  і сили  $\vec{F}_1$ , які в більшості випадків являють собою прикладений до ланки механізму крутний момент і силу тиску ланки на вісь.

Розглянемо, наприклад, барабан радіуса  $R$  (рис. 5.2, а), до якого в точці  $A$  з боку намотаної нитки прикладено силу  $\vec{F}$ . Використуємо для сили  $\vec{F}$  доведену лему, прийнявши за центр приведення точку  $O$ . У результаті отримаємо, що вихідна система сил  $(\vec{F})$  зводиться: до сили  $\vec{F}_1$  (рівній  $\vec{F}$ ) і до пари сил  $(\vec{F}, \vec{F}^*)$  з моментом  $m_0 = m(\vec{F}, \vec{F}^*)$  (рис. 5.2, а). При цьому на барабан діють: момент  $m_0 = R \cdot F$ , який обертає барабан, і сила  $\vec{F}_1$ , що здійснює тиск на вісь барабану (рис. 5.2, б). Їх величини використовуються в подальшому при розв'язанні задач динаміки і міцності системи «опора – вісь – барабан – нитка».

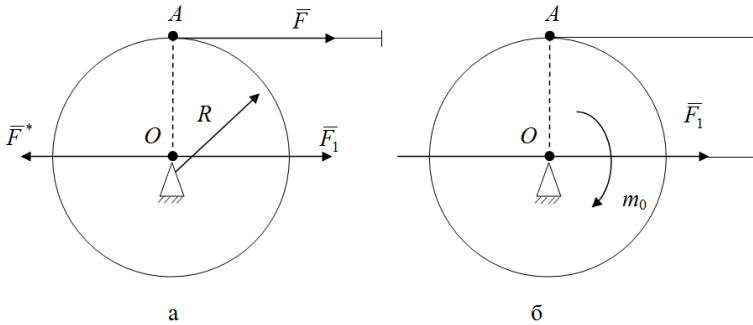


Рисунок 5.2

## 5.2 Приведення довільної системи сил у просторі до заданого центра. Теорема Пуансо (Основна теорема статyki)

Розглядаючи системи збіжних і паралельних сил у просторі, ми переконалися, що вони приводяться лише до одного силового фактора: рівнодійної сили або до пари сил.

Розглянемо тепер задачу приведення довільної систем сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$  у просторі до заданого центра  $O$  (теорема належить Пуансо, 1777–1859 рр.).

**Теорема:** Довільна система сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$  у просторі зводиться до заданого центра  $O$  сукупністю двох силових факторів: сили  $\vec{R}$ ,

рівній головному вектору  $\vec{F}_0$  вихідної системи сил і прикладеній у центрі приведення  $O$ , і пари сил, момент  $\vec{m}_0$  якої дорівнює головному моменту  $\vec{M}_0$  системи сил відносно того ж центра.

**Доведення.** Розглянемо вихідну довільну систему сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$  у просторі (рис. 5.3, а). Нехай сили є прикладеними до тіла в точках  $A_1, \dots, A_n$ , координати яких визначено радіусами-векторами  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$  у системі координат  $Oxyz$ , полюс якої співпадає з центром приведення  $O$ .

Введемо такі позначення і поняття.

Головний вектор системи сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  – вектор  $\vec{F}_0$ , який дорівнює геометричній сумі прикладених до тіла сил системи:

$$\vec{F}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad (5.2)$$

де індекс  $O$  визначає точку прикладання вектора  $\vec{F}_0$  до тіла.

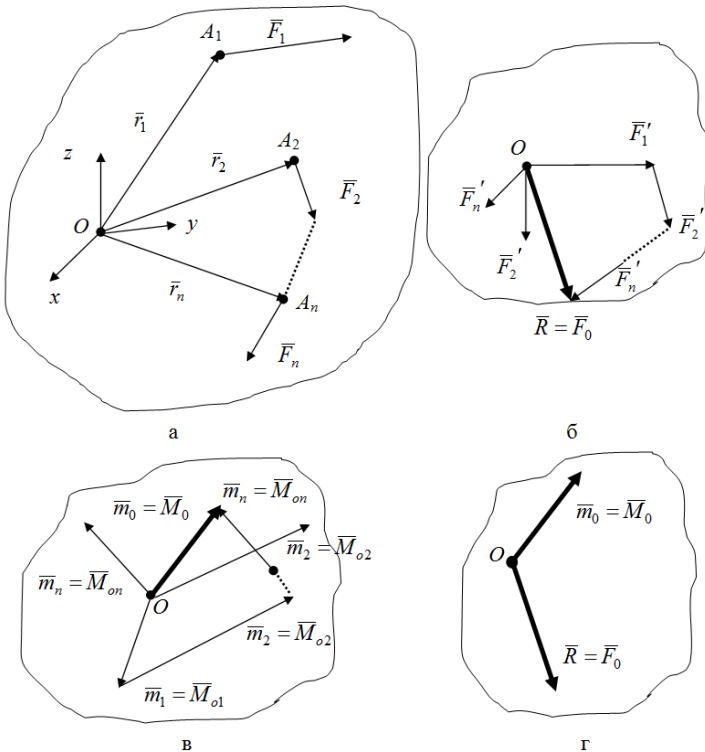


Рисунок 5.3

Головний момент системи сил відносно точки  $O$  – вектор  $\bar{M}_0$ , що дорівнює геометричній сумі моментів сил вихідної системи відносно тієї ж точки:

$$\bar{M}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k. \quad (5.3)$$

Таким чином, за визначенням вектори  $\bar{F}_0$  і  $\bar{M}_0$  відносяться, з точки зору векторної алгебри, до зв'язаних у точці  $O$  векторів.

Для кожної з сил системи використаємо лему про паралельне перенесення сили у полюс  $O$ . У результаті перетворень отримаємо систему збіжних у точці  $O$  (рис. 5.3, б) сил  $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n)$ , що, як нам відомо, еквівалентна одній силі  $\bar{R}$  (рівнодійній), що дорівнює їх геометричній сумі:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}'_k. \quad (5.4)$$

Між векторами  $\bar{F}'_k$  збіжної і  $\bar{F}_k$  вихідної систем сил існують співвідношення:  $\bar{F}'_k = \bar{F}_k$  ( $k = \overline{1; n}$ ). Якщо розглянути геометричну суму векторів  $\bar{F}'_n$  сил вихідної системи у точці  $O$  як вектор математичний і позначити його, відповідно до (5.2), як головний вектор  $\bar{F}_0$  вихідної системи сил, то отримаємо наступну рівність

$$\bar{R} = \bar{F}_0. \quad (5.5)$$

З рівнянь (5.2), (5.4) і (5.5) виходить, таким чином, що сила  $\bar{R}$  за математичним змістом дорівнює головному вектору  $\bar{F}_0$  вихідної системи. У свою чергу, на відміну від сили  $\bar{R}$ , головний вектор  $\bar{F}_0$  не має, стосовно розглядуваного тіла фізичного змісту, тому що точки  $A_k$  прикладання складаючих сил  $\bar{F}_k$  (рис. 5.3, а) не співпадають з центром приведення  $O$ , в якому прикладений головний вектор.

При паралельному перенесенні сили  $\bar{F}_k$  до тіла необхідно приєднати одночасно пару сил  $(\bar{F}_k, \bar{F}_k^*)$  з моментом  $\bar{m}_k = \bar{m}(\bar{F}_k, \bar{F}_k^*) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k$ , прикладеним (рис. 5.3, в) у точці  $O$ . Система приєднаних пар  $(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n)$ , відповідно до теореми про додавання пар сил, зводиться до результуючої пари з моментом

$$\bar{m}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k \quad (5.6)$$

у точці  $O$ .

Відповідно до (5.3) і (5.6) отримаємо, що момент  $\bar{m}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k$

приєднаної пари дорівнює головному моменту  $\bar{M}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{0k}$  ( $\bar{M}_{ok} = \bar{M}_o(\bar{F}_k)$ ) вихідної системи сил відносно центра приведення  $O$ , тобто (рис. 5.3, в)

$$\bar{m}_0 = \bar{M}_0. \quad (5.7)$$

Отже (рис. 5.3, г) вихідну систему сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  зведено в довільно обраній точці  $O$  до еквівалентної системи  $(\bar{R}, \bar{m}_0)$  двох силових факторів: сили  $\bar{R}$ , яка дорівнює головному вектору  $\bar{F}_0$  цієї системи сил, і пари сил з моментом  $\bar{m}_0$ , який дорівнює головному моменту  $\bar{M}_0$  системи сил відносно центра приведення.

Таким чином, теорему доведено. Ця теорема має назву *основної теореми статички* (теорема Пуансо).

З доведеної вище теореми випливає, що дві системи сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  і  $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_k)$  будуть статично еквівалентними, якщо їх головні вектори й головні моменти у довільно обраному центрі приведення рівні між собою. Отже, для характеристики системи діючих на тіло сил є абсолютно достатнім визначити у довільному центрі  $O$  головний вектор  $\bar{F}_0$  і головний момент  $\bar{M}_0$  вихідної системи сил і задати їх на розрахунковій схемі (рис. 5.3, г). При цьому будемо враховувати, по-перше, те, що точки приведення сили  $\bar{R}$  і моменту  $\bar{m}_0$ , а також точки прикладання головних векторів  $\bar{F}_0$  і  $\bar{M}_0$  співпадають за визначенням, а по-другому, що вектор  $\bar{R}$  і вектор  $\bar{m}_0$ , на відміну від зв'язаних у точці  $O$  векторів  $\bar{F}_0$  і  $\bar{M}_0$ , є відповідно ковзним і вільним векторами.

### 5.3 Властивості головного вектора, головного момента і результуючої приєднаної пари сил. Статичні інваріанти

Величини і напрямки головних векторів  $\bar{F}_0$  і  $\bar{M}_0$  у системі координат  $Oxyz$  (рис. 5.4) визначаються за правилами векторної алгебри формулами

$$F_0 = \sqrt{F_{0x}^2 + F_{0y}^2 + F_{0z}^2}; \quad M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}, \quad (5.8)$$

де  $F_{0x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad F_{0y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad F_{0z} = \sum_{k=1}^n F_{kz};$

$$M_{0x} = \sum_{k=1}^n M_{0x}(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (y_k F_{kz} - z_k F_{ky});$$

$$M_{0y} = \sum_{k=1}^n M_{0y}(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (z_k F_{kx} - x_k F_{kz});$$

$$M_{0z} = \sum_{k=1}^n M_{0z}(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (x_k F_{ky} - y_k F_{kx});$$

$$\cos(\widehat{Ox, \bar{F}_0}) = \frac{F_{0x}}{F_0}; \quad \cos(\widehat{Oy, \bar{F}_0}) = \frac{F_{0y}}{F_0}; \quad \cos(\widehat{Oz, \bar{F}_0}) = \frac{F_{0z}}{F_0};$$

$$\cos(\widehat{Ox, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0x}}{M_0}; \quad \cos(\widehat{Oy, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0y}}{M_0}; \quad \cos(\widehat{Oz, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0z}}{M_0}.$$

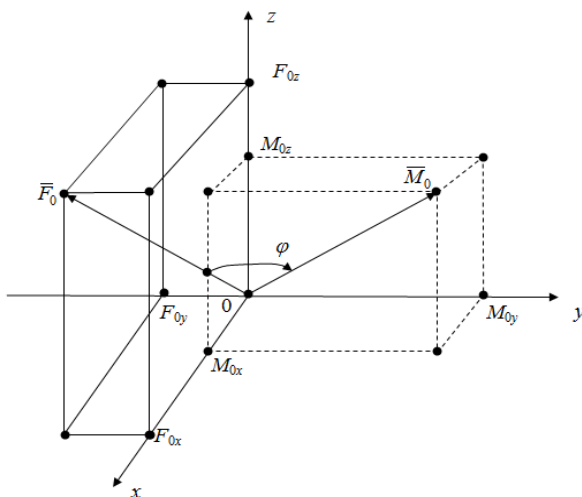


Рисунок 5.4



Кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{F}_0$  і  $\vec{M}_0$  визначається за допомогою формули їх скалярного добутку:

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{F}_0 \cdot \vec{M}_0}{F_0 \cdot M_0} = \arccos \frac{F_{0x} \cdot M_{0x} + F_{0y} \cdot M_{0y} + F_{0z} \cdot M_{0z}}{F_0 \cdot M_0}.$$

Якщо на практиці при вирішенні задач рівноваги твердого тіла виникає питання зміни центра приведення системи сил з точки  $O$  у наперед задану точку  $O_1$ , то головний вектор, головний момент і момент результуючої приєднаної пари системи сил мають наступні властивості.

Враховуючи вирази (5.2), (5.8) є очевидним, що головний вектор системи сил ні за величиною, ні за напрямком не залежить від положення центра приведення, тобто завжди виконуватиметься рівність  $\vec{F}_{O_1} = \vec{F}_O$  (точка  $O_1$  – новий центр приведення). Це обумовлено

тим, що за формулою визначення ( $\vec{F}_O = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$ ) головний вектор є функцією тільки параметрів сил початкової системи і не залежить від положення точки  $O$  на тілі.

У механіці головний вектор  $\vec{F}_O$  називається *першим статичним інваріантом*. Це означає, що для будь-якої вихідної системи сил його величина і напрямок є сталими величинами, тобто незалежними (інваріантними) до вибору центра приведення:

$$\vec{F}_O = \vec{F}_{O_1} = \dots = \vec{F}_{O_n},$$

де  $n$  – номер поточної точки приведення.

Момент результуючої приєднаної пари вихідної системи сил при перенесенні центра приведення буде визначатися (рис. 5.5) за формулою

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_O + \vec{m}_{O_1}, \quad (5.9)$$

де  $\vec{m}_{O_1} = \vec{r} \times \vec{R}$  – момент приєднаної пари сил.

На рисунку 5.5 вектор  $\vec{m}_{O_1}$  є, за правилом векторного добутку, перпендикулярним що площини  $E$ , якій належать вектори  $\vec{r}$  і  $\vec{R}$ , тобто  $\vec{m}_{O_1} \perp \vec{R}; \perp \vec{r}$ .

Вираз (5.9) отримано за допомогою наступних еквівалентних системних перетворень:

$$(\vec{R}, \vec{m}_O) \sim (\vec{R}_1, \vec{m}_O, \vec{m}_{O_1} = \vec{M}_{O_1}(\vec{R})) \sim (\vec{R}_1, \vec{m}_1),$$

де  $\vec{R}_1 = \vec{R}$ .

При цьому використано лему про паралельне перенесення сили  $\vec{R}$  в точку  $O_1$  з одночасним додаванням у центрі  $O_1$  пари сил з моментом  $\vec{m}_{O_1}$ , рівним моменту  $M_{O_1}(\vec{R})$  вихідної сили  $\vec{R}$  відносно точки  $O_1$ , а також враховано властивості моменту  $\vec{m}_O$  (моменту приєднаної пари сил у точці  $O$ ) як вільного вектора, який можна переносити паралельно самому собі в будь-яку точку тіла (в даному випадку з точки  $O$  у точці  $O_1$ ). Крім того, використано властивості геометричного додавання векторів моментів пар сил у точці  $O_1$ , тобто:

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_O + \vec{m}_{O_1}. \quad (5.10)$$

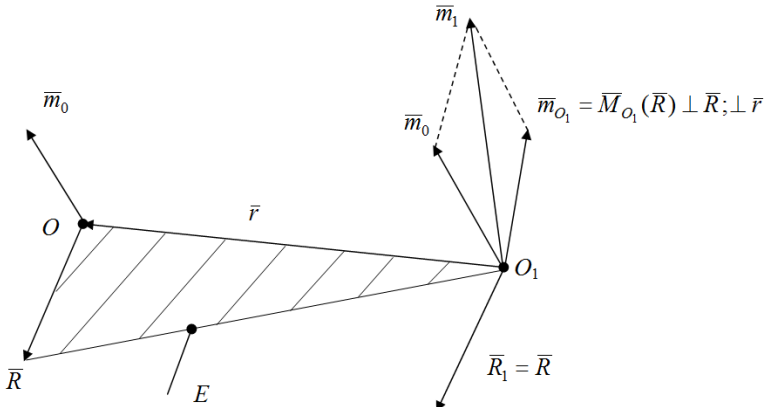


Рисунок 5.5

З рівняння (5.10) виходить, що момент  $\vec{m}_O$  приєднаної пари сил при перенесенні центра приведення змінюється на величину моменту  $\vec{m}_{O_1}$  пари сил, рівному моменту сили  $\vec{R}$  відносно нового центра приведення  $O_1$ .

Головний момент системи сил при перенесенні центра приведення вихідної системи сил матиме, в свою чергу, наступну властивість.

Враховуючи вираз (5.3) і рисунку 5.6, отримаємо:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O_1} &= \sum_{k=1}^n \vec{r}_{k_1} \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n (\vec{O_1O} + \vec{r}_k) \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \vec{O_1O} \times \left( \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \right) = \\ &= \vec{M}_O + \vec{O_1O} \times \vec{F}_O = \vec{M}_O + \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_O). \end{aligned} \quad (5.11)$$

З рівняння (5.11) випливає, що головний момент вихідної системи сил при перенесенні центра приведення до точки  $O_1$

змінюється на величину моменту  $\overline{M}_{O_1}(\overline{F}_O)$  головного вектора  $\overline{F}_O$  відносно нового центра приведення  $O_1$ .

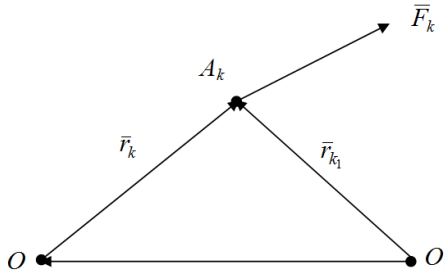


Рисунок 5.6

Враховуючи рівняння (5.5) і (5.7) отримаємо вирази:

$$\overline{m}_O + \overline{m}_{O_1} = \overline{M}_O + \overline{M}_{O_1}(\overline{F}_O), \quad \overline{m}_{O_1} = \overline{M}_{O_1}. \quad (5.12)$$

З виразу (5.12) випливає рівність моментів результуючої пари і головного моменту системи сил відносно нового центра зведення  $O_1$ , а також справедливність приведених на рисунку 5.7 системних перетворень.

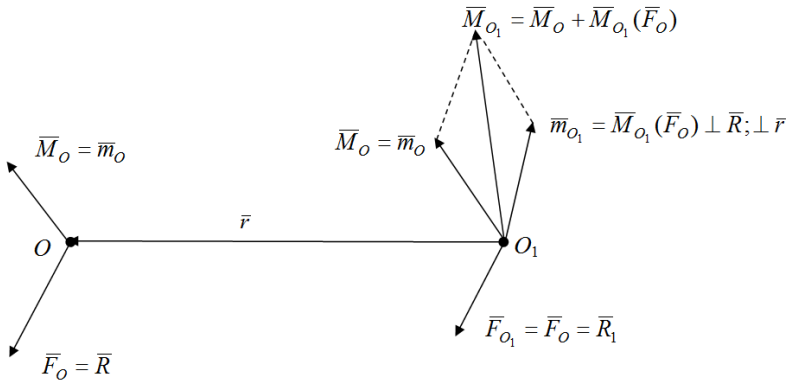


Рисунок 5.7

Однак, на практиці виявилось, що більш зручним у використанні є рівняння (5.11), яке стосується головного моменту системи сил.

Розглянемо далі інші властивості головного вектора  $\overline{F}_O$  і головного моменту  $\overline{M}_O$  системи сил, які мають суттєве теоретичне і практичне значення.

Важливою властивістю головних вектора  $\vec{F}_O$  і моменту  $\vec{M}_O$  системи сил є незалежність їх скалярного добутку від положення точки приведення на тілі.

Дійсно, для будь-якої точки приведення  $O_1$  отримаємо:

$$\vec{F}_{O_1} \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{F}_{O_1} \cdot (\vec{M}_O + \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_O)) = \vec{F}_{O_1} \cdot \vec{M}_O + \vec{F}_{O_1} \cdot \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_O). \quad (5.13)$$

За визначенням вектор  $\vec{M}_{O_1}(\vec{F}_O)$  і вектор  $\vec{r}$  (рис. 5.7) є перпендикулярними. Тому формула (5.13) приводиться, враховуючи що  $\cos 90^\circ = 0$ , до виду

$$\vec{F}_{O_1} \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{F}_{O_1} \cdot \vec{M}_O + F_{O_1} \cdot M_{O_1}(\vec{F}_O) \cdot \cos 90^\circ = \vec{F}_{O_1} \cdot \vec{M}_O. \quad (5.14)$$

Вираз (5.14), в результаті незалежності головного вектора системи сил від зміни полюса приведення, перетворюється у рівність

$$\vec{F}_{O_1} \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O, \quad (5.15)$$

яка і доводить зазначену властивість.

У механіці цю властивість скалярного добутку головного вектора і головного моменту системи сил визначають як *другий статичний інваріант (перша форма)*.

Розглянемо другу форму другого статичного інваріанта системи діючих на тіло сил, які зведено в центрі  $O$  до головного вектора  $\vec{F}_O$  і головного моменту  $\vec{M}_O$ .

З векторної алгебри відомо, що за величиною скалярний добуток двох векторів може бути визначеним через проєкцію одного з векторів добутку на напрямок іншого:

$$\vec{F}_O \cdot \vec{M}_O = F_O \cdot M_O \cdot \cos(\widehat{\vec{F}_O, \vec{M}_O}) = \vec{F}_O \cdot \text{Pr}_{\vec{F}_O}(\vec{M}_O), \quad (5.16)$$

де  $\text{Pr}_{\vec{F}_O}(\vec{M}_O) = M_O \cdot \cos(\widehat{\vec{F}_O, \vec{M}_O})$  – проєкція вектора  $\vec{M}_O$  на напрямок головного вектора  $\vec{F}_O$ .

Тоді з формул (5.15), (5.16) випливає вираз

$$\vec{F}_{O_1} \cdot \text{Pr}_{\vec{F}_{O_1}}(\vec{M}_{O_1}) = \vec{F}_O \cdot \text{Pr}_{\vec{F}_O}(\vec{M}_O),$$

який, з урахуванням рівності  $\vec{F}_{O_1} = \vec{F}_O$  першого статичного інваріанта, перетворюється до вигляду

$$\text{Pr}_{\vec{F}_{O_1}}(\vec{M}_{O_1}) = \text{Pr}_{\vec{F}_O}(\vec{M}_O). \quad (5.17)$$

Співвідношення (5.17) виявляє, що проєкція головного моменту систем сил на напрямок її головного вектора не залежить від положення точки приведення. У механіці цю властивість визначають як *другий статичний інваріант (друга форма)*.

## 5.4 Окремі випадки приведення просторової системи сил

Відповідно до теореми Пуансо довільна система сил у просторі в загальному випадку зводиться у центрі  $O$  до двох силових факторів: сили, яка дорівнює головному вектору  $\vec{F}_O$ , і пари сил з моментом, який дорівнює головному моменту  $\vec{M}_O$  вихідної системи сил. Однак, на практиці між параметрами (величинами і взаємним напрямком) векторів  $\vec{F}_O$  і  $\vec{M}_O$  виникають різні співвідношення, що призводять до окремих випадків приведення довільної системи сил.

5.4.1 Приведення системи тільки до пари сил  $(\vec{F}, \vec{F}^*)$  з моментом  $\vec{m}_O = \vec{OA} \times \vec{F}$  (рис. 5.8). У цьому випадку в центрі приведення  $O$  головний вектор системи  $\vec{F}_O = 0$ , а головний момент  $\vec{M}_O = \vec{m}_O$  є перпендикулярним до пл.  $E$  дії пари сил  $(\vec{F}, \vec{F}^*)$ .

5.4.2 Приведення до рівнодійної  $\vec{R}$  у центрі  $O$ . Тут (рис. 5.9) виконується наступне: головний момент системи сил  $\vec{M}_O = 0$ ; головний вектор  $\vec{F}_O = \vec{R} \neq 0$  і належить пл.  $E$ ; система діючих на тіло сил відноситься до збіжної у точці  $O$ .

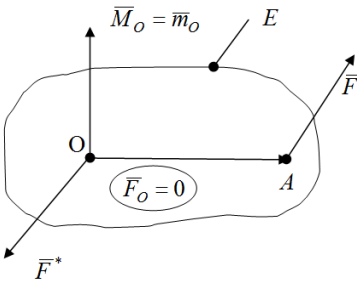


Рисунок 5.8

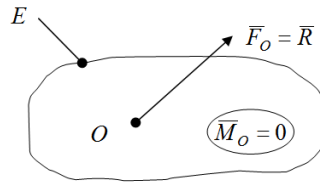


Рисунок 5.9

5.4.3 Зрівноважена (нульова) система сил. У цьому випадку в центрі приведення  $O$  (рис. 5.10, 5.11) отримаємо: головний вектор  $\vec{F}_O = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0$  і головний момент  $\vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{M}_{O_k} = 0$ ; вихідна система сил у будь-якій точці  $O$  тіла зводиться до еквівалентної нулю  $((\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0)$  зрівноваженої системи; многокутники сил вихідної системи і многокутники векторів моментів сил відносно довільної точки  $O$  тіла є замкненими.

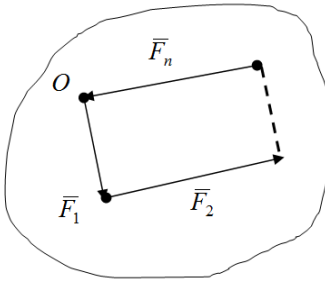


Рисунок 5.10

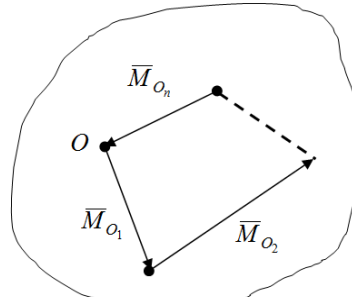


Рисунок 5.11

5.4.4 Приведення системи сил до головного вектора  $\bar{F}_O \neq 0$  і головного момента  $\bar{M}_O \neq 0$ , коли  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{F}_O, \bar{M}_O)$ . Тут мають місце, залежно від взаємної орієнтації векторів  $\bar{F}_O$  і  $\bar{M}_O$ , три окремі випадки.

5.4.4.1 Приведення до динами, коли вектори  $\bar{F}_O$  і  $\bar{M}_O$  не є перпендикулярними, тобто (рис. 5.4) кут  $\varphi(\widehat{\bar{F}_O, \bar{M}_O}) \neq \pm \frac{\pi}{2}$  і скалярний добуток векторів  $\bar{F}_O \cdot \bar{M}_O \neq 0$ .

Розкладемо головний момент  $\bar{M}_O$  на дві ортогональні складові  $(\bar{M}_O \sim (\bar{M}_1, \bar{M}_2))$ , одна з яких спрямована вздовж головного вектора  $\bar{F}_O$ .

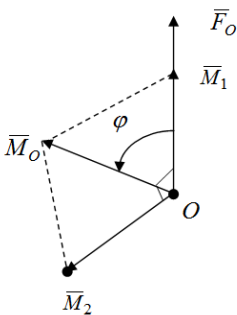


Рисунок 5.12

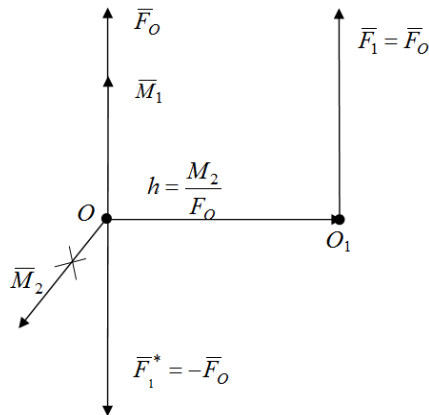


Рисунок 5.13

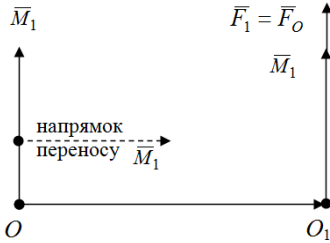


Рисунок 5.14

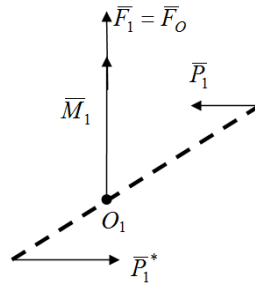


Рисунок 5.15

Представимо момент  $\overline{M}_2$  (закреслено на рис. 5.13) у вигляді пари сил  $(\overline{F}_1, \overline{F}_1^*)$ , в якій плече  $h = \frac{M_2}{F_0}$ , а сила  $\overline{F}_1 = \overline{F}_0$  прикладена в точці  $O_1$ .

У цьому випадку буде виконуватись умова еквівалентності:  $(\overline{F}_0, \overline{M}_0) \sim (\overline{F}_0, \overline{M}_1, \overline{M}_2) \sim ((\overline{F}_0, \overline{F}_1^*), \overline{M}_1, \overline{F}_1) \sim (\overline{M}_1, \overline{F}_1)$ , тому що сили  $\overline{F}_0$  і  $\overline{F}_1^*$  за визначенням складають двійку сил, тобто  $(\overline{F}_0, \overline{F}_1^*) \sim 0$ .

Представимо далі вектор  $\overline{M}_1$  у вигляді моменту пари сил і перенесемо його, як вільний вектор, з точки  $O$  в точку  $O_1$  прикладання сили  $\overline{F}_1$  (показано на рис. 5.14 штриховою стрілкою).

У результаті початкова система сил перетворилась в центрі  $O_1$  в систему силових факторів  $(\overline{F}_1, \overline{M}_1)$ . Тут сила  $\overline{F}_1$  дорівнює головному вектору  $\overline{F}_0$  за визначенням, а момент  $\overline{M}_1$  пари сил за величиною – проекції головного моменту  $\overline{M}_0$  на напрямок головного вектора  $\overline{F}_0$  (рис. 5.12) системи сил:  $M_1 = \text{Pr}_{\overline{F}_0}(\overline{M}_0) = M_0 \cdot \cos \varphi$ . На рис. 5.15 момент  $\overline{M}_1$  для наочності показано одночасно у вигляді пари сил  $(\overline{P}_1, \overline{P}_1^*)$ .

Сукупність діючих на тіло силових факторів у вигляді сили  $\overline{F}_1$  і пари сил  $(\overline{P}_1, \overline{P}_1^*)$ , вектори яких колінеарні (лежать на одній прямій), називають *динамою* чи *динамічним гвинтом*. Лінія, яка проходить через центр приведення  $O_1$  вздовж даної прямої, називається *віссю динами*.

У просторі рівняння осі динами отримаємо з урахуванням умови паралельності векторів  $\bar{F}_1$  і  $\bar{M}_1$  (рис. 5.14):

$$\begin{aligned}\bar{M}_1 &= \bar{M}_O - \overline{OO}_1 \times \bar{F}_O = M_{1x} \cdot \bar{i} + M_{1y} \cdot \bar{j} + M_{1z} \cdot \bar{k} = \\ &= \rho \cdot \bar{F}_1 = \rho \cdot \bar{F}_O = \rho \cdot F_{Ox} \cdot \bar{i} + \rho \cdot F_{Oy} \cdot \bar{j} + \rho \cdot F_{Oz} \cdot \bar{k},\end{aligned}\quad (5.18)$$

де векторний добуток  $\overline{OO}_1 \times \bar{F}_O = \bar{M}_2$ ,  $\rho$  – параметр гвинта (скаляр);

$$\rho = M_1 \cdot \frac{1}{F_O} = M_O \cdot \cos \varphi \cdot \frac{1}{F_O} = M_O \cdot \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{F}_O}{M_O \cdot F_O} \cdot \frac{1}{F_O} = \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{F}_O}{F_O^2}; \quad \cos \varphi = \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{F}_O}{M_O \cdot F_O}.$$

Враховуючи (5.18), отримаємо такі співвідношення між координатними складовими векторів  $\bar{F}_O$ ,  $\bar{M}_O$  і  $\bar{M}_1$ :

$$\left. \begin{aligned}M_{1x} &= \rho \cdot F_{Ox} = M_{Ox} - (y \cdot F_{Oz} - z \cdot F_{Oy}) \\ M_{1y} &= \rho \cdot F_{Oy} = M_{Oy} - (z \cdot F_{Ox} - x \cdot F_{Oz}) \\ M_{1z} &= \rho \cdot F_{Oz} = M_{Oz} - (x \cdot F_{Oy} - y \cdot F_{Ox})\end{aligned} \right\}, \quad (5.19)$$

де  $x, y, z$  – координати точки  $O_1$  на осі динами.

Співвідношення (5.19) дозволяють отримати рівняння прямої лінії, осі динами, у формі

$$\begin{aligned}\frac{M_{Ox} - (y \cdot F_{Oz} - z \cdot F_{Oy})}{F_{Ox}} &= \frac{M_{Oy} - (z \cdot F_{Ox} - x \cdot F_{Oz})}{F_{Oy}} = \\ &= \frac{M_{Oz} - (x \cdot F_{Oy} - y \cdot F_{Ox})}{F_{Oz}}.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Отже, існує пряма з канонічним рівнянням (5.20) у проєкціях, в будь-якій точці якої система діючих на тіло сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  зводиться до динами.

Таким чином встановлено, що прикладена до тіла вихідна довільна система сил, якщо другий статичний інваріант першої форми не дорівнює нулю, тобто при  $\bar{F}_O \cdot \bar{M}_O = F_O \cdot M_O \cdot \cos \varphi \neq 0$  ( $\varphi \neq \pi/2$ ), зводиться у точці  $O_1$  до динами, яка є сукупністю двох силових факторів: сили  $\bar{F}_1$  і моменту пари сил  $\bar{M}_1$ , вектори яких колінеарні.

При цьому здається, що за величиною момент  $\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_1$  пари динами у точці  $O_1$  буде найменшим (рис. 5.16), порівняно з моментами  $\bar{M}_{O_k}$  у будь-яких інших точках приведення  $O_k$  на осі  $Oy$ , тобто буде виконуватися співвідношення  $M_{O_1} < M_{O_k} < M_O$ .





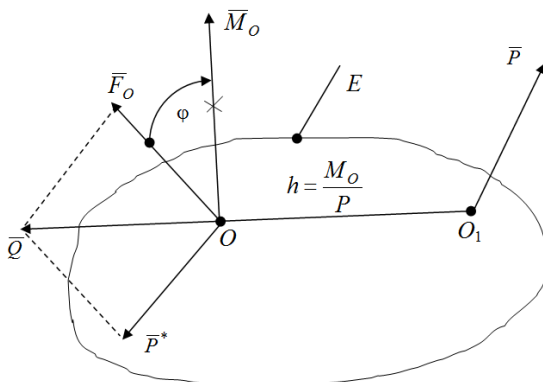


Рисунок 5.17

Така сукупність діючих на тіло двох сил складає систему сил, що схрещуються (не лежать в одній площині) і не мають рівнодійної.

На відміну від динами отримана система силових факторів включає лише дві сили  $\bar{Q}$ ,  $\bar{P}$ , тобто тут відсутня пара сил.

5.4.4.3 Приведення до однієї сили (рівнодійної), коли вектори  $\bar{F}_O$  і  $\bar{M}_O$  є перпендикулярними, тобто  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  (рис. 5.18). У цьому випадку головний вектор  $\bar{F}_O$ , лежить у площині  $E$ , яка перпендикулярна головному моменту  $\bar{M}_O$  системи, тобто в площині дії результуючої приєднаної пари сил.

Представимо момент  $\bar{M}_O$  (закреслено на рис. 5.18) у вигляді пари сил  $(\bar{P}, \bar{P}^*)$  з плечем  $h = \frac{M_O}{F_O}$  і силою  $\bar{P}^* = -\bar{F}_O$ .

У результаті отримаємо, що сили  $\bar{F}_O$  і  $\bar{P}^*$  складають двійку сил, тобто систему сил  $(\bar{F}_O, \bar{P}^*) \sim 0$ , а вихідна система виявляється еквівалентною одній силі  $\bar{P}$ , яка належить площині  $E$ , прикладена у точці  $O_1$ , що знаходиться на відстані  $h = \frac{M_O}{F_O}$  від початкового центра приведення  $O$ . Проведені еквівалентні перетворення мають наступний вигляд:

$$(\bar{F}_O, \bar{M}_O) \sim (\bar{F}_O, (\bar{P}^* = -\bar{F}_O, \bar{P})) \sim ((\bar{F}_O, \bar{P}^*) \sim 0, \bar{P}) \sim (\bar{P}).$$

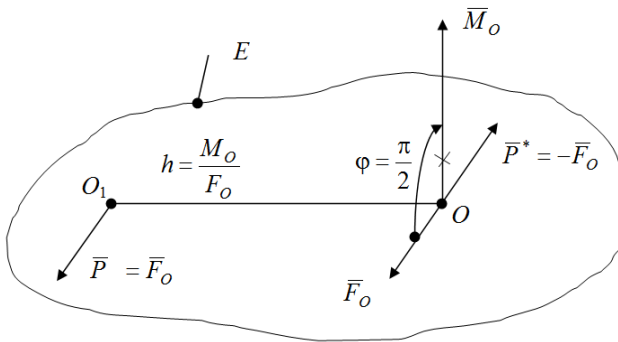


Рисунок 5.18

Вони зводять вихідну систему сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$  до однієї сили  $\bar{P}$  (рівнодійної), яка дорівнює головному вектору  $\bar{F}_O$  системи і прикладена у новому центрі приведення  $O_1$ .

### 5.5 Довільна система сил у площині

Особливістю розглядуваної системи сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$  є приналежність ліній дій всіх сил системи площині  $E$  (рис. 5.19, а). У цьому випадку вихідну систему сил, використовуючи теорему Пуансо, в центрі приведення  $O$  (рис. 5.19, б) можна звести взагалі до двох силових факторів: сили  $\bar{R}$ , яка дорівнює головному вектору  $\bar{F}_O$ , і результуючої приєднаної пари сил  $(\bar{P}, \bar{P}^*)$  з моментом  $\bar{m}_O$  (показано також дуговою стрілкою на рис. 5.19, б), рівним головному моменту  $\bar{M}_O$  вихідної системи сил.

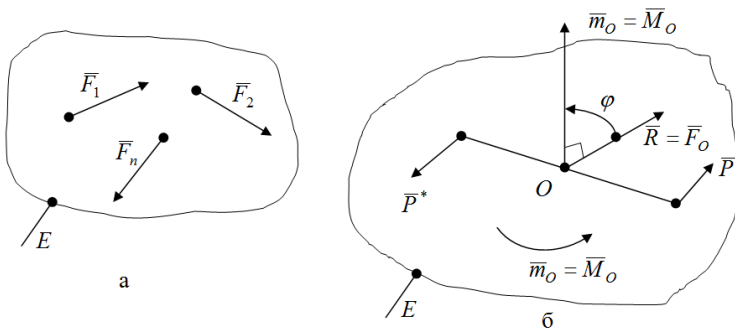


Рисунок 5.19

На відміну від довільної системи сил у просторі тут: головний вектор  $\vec{F}_O$  довільної плоскої системи сил завжди належить площині  $E$ , яка є площиною дії пари  $(\vec{P}, \vec{P}^*)$ ; головний момент  $\vec{M}_O \perp \vec{F}_O$ , тобто кут  $\varphi$  між векторами дорівнюватиме  $\varphi(\vec{F}_O, \vec{M}_O) = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Відповідно до зображених на рисунку 5.19, б силових факторів матимуть місце, залежно від величин головних векторів  $\vec{F}_O$ ,  $\vec{M}_O$  зведеної у центрі  $O$  системи сил, такі випадки приведення довільної системи сил у площині.

5.5.1 Приведення до пари сил  $(\vec{P}, \vec{P}^*)$ , коли головний вектор системи  $\vec{F}_O = 0$ , а головний момент  $\vec{M}_O = \vec{m}(\vec{P}, \vec{P}^*) \neq 0$ . Цей випадок за сукупністю діючих на тіло силових факторів повністю співпадає з випадком приведення довільної системи сил у просторі, розглянутому у п. 5.4.1 і на рисунку 5.8. Наприклад, для зображених на рисунку 5.20, а системи двох сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2 = -\vec{F}_1)$  отримаємо для центру приведення  $O$  (рис. 5.20, б):  $\vec{F}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 - \vec{F}_1 = 0$ ;  $M_O = h_1 \cdot F_1 + h_2 \cdot F_2 = F_1(h_1 + h_2) \neq 0$ ;  $\vec{M}_O \perp \text{пл. } E$ ; система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{M}_O$ .

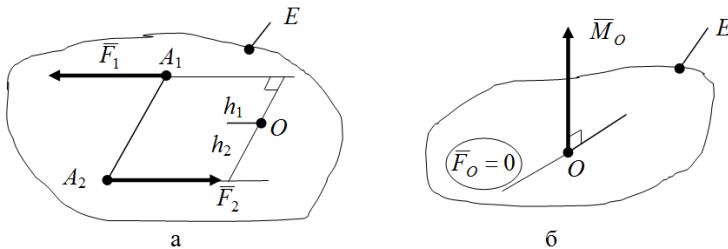


Рисунок 5.20

5.5.2 Приведення до рівнодійної  $\vec{R}$  у центрі  $O$ . Тут головний момент системи  $\vec{M}_O = 0$ , головний вектор  $\vec{F}_O \neq 0$ , а вихідна система сил зводиться тільки до однієї сили  $\vec{F}_O$ , що є рівнодійною  $\vec{R}$ , прикладеною у точці  $O$ . Випадок ідентичний розглянутому у п. 5.4.2 і на рисунку 5.9.

Приклад приведення:  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$  (рис. 5.21,а),  $h_1 = h_2$ . У точці  $O$  буде:  $M_O = -h_1 \cdot F_1 + h_2 \cdot F_2 = 0$ ;  $\vec{F}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq 0$  (рис. 5.21, б);

рівнодійна сила  $\bar{R} = \bar{F}_O$  прикладена у центрі приведення  $O$ ; системи сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim \bar{R}$ .

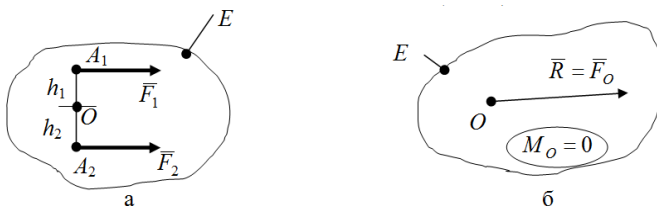


Рисунок 5.21

5.5.3 Зрівноважена система сил: у центрі приведення  $O$  маємо  $\bar{F}_O = 0$  і  $\bar{M}_O = 0$ . При цьому (див. п. 5.4.3 і рис. 5.10, 5.11) многокутники діючих на тіло сил  $\bar{F}_n$  і моментів приєднаних пар сил  $\bar{m}_k$  є замкненими і вихідна система сил еквівалентна нулю  $((\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \sim 0)$ , тобто є зрівноваженою. Тут, наприклад, для системи двох сил:  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_2 = -\bar{F}_1$  (рис. 5.22, а), буде:  $\bar{F}_O = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{F}_1 - \bar{F}_1 = 0$ ;  $M_O = h_1 \cdot F_1 - h_2 \cdot F_2 = 0$  (рис. 5.22, б); система сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim 0$ .

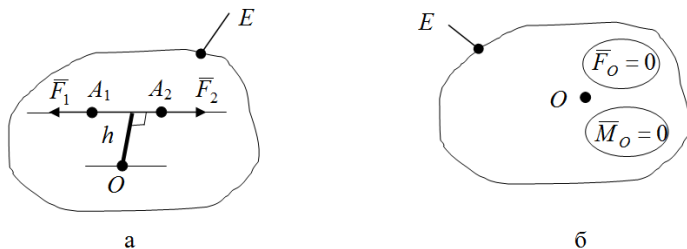


Рисунок 5.22

5.5.4 Приведення до однієї сили (рівнодійної), зведена в центрі  $O$  до головного вектора  $\bar{F}_O \neq 0$  і головного моменту  $\bar{M}_O \neq 0$  вихідну систему сил можна подальшими спрощеннями звести до однієї сили, рівнодійної  $\bar{R} = \bar{F}_O$ , яка прикладена, на відміну від п. 5.5.2 у новому центрі  $O_1$  на відстані  $h = \frac{M_O}{F_O}$  від точки  $O$ . Цей випадок повністю співпадає за доведенням з випадком приведення, який розглянуто стосовно довільної системи сил у просторі у п. 5.4.4.3 і на рисунку 5.18.

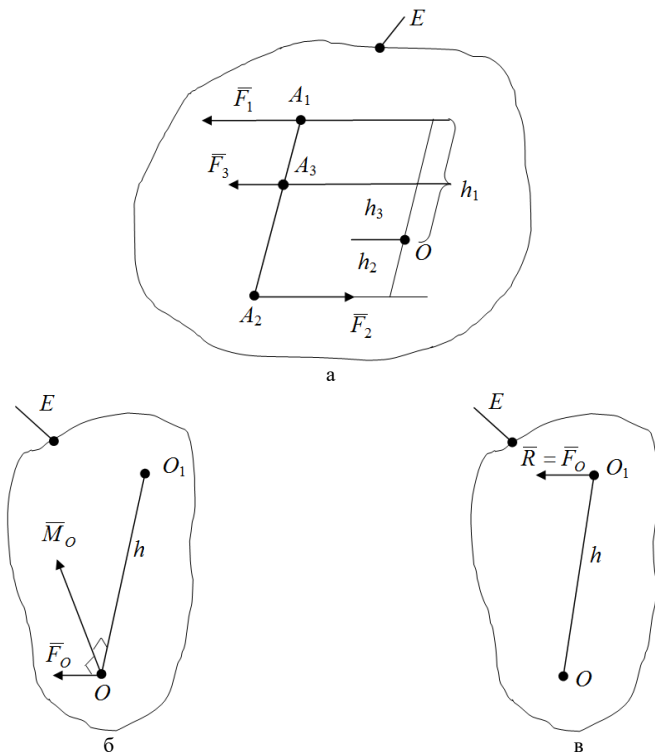


Рисунок 5.23

Наприклад, для зображеної на рисунку 5.23, а системи трьох сил:  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2 = -\bar{F}_1, \bar{F}_3 = k\bar{F}_1)$  отримаємо у центрах приведення  $O, O_1$ :  $\bar{F}_O = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \bar{F}_3$  (рис. 5.23, б);  $M_O = h_1 \cdot F_1 + h_3 \cdot F_3 + h_2 \cdot F_2$ ;  $h = \frac{M_O}{F_O}$ ;  $\bar{R} = \bar{F}_O = \bar{F}_3$  (рис. 5.23, в), система сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3) \sim \bar{R}$ .

### 5.6 Теорема Варіньона про момент рівнодійної

На практиці важливе використання, наприклад, при визначенні координат ваги тіла, має наступна властивість головного вектора системи сил (*теорема Варіньона про момент рівнодійної*).

**Теорема.** Якщо є точка  $O$ , в якій система діючих сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$  приводиться тільки до головного вектора  $\bar{F}_O$ , тобто рівнодійної

$\bar{R} = \bar{F}_O$ , то момент цієї рівнодійної відносно будь якої іншої точки  $O_1$  дорівнюватиме геометричній сумі моментів сил вихідної системи відносно тієї самої точки  $O_1$ .

При доведенні теореми врахуємо вираз (5.5), а також те, що за умовою в точках  $O$  і  $O_1$  на рисунку 5.24 вектор  $\bar{M}_{O_1} = 0$ .

У результаті отримаємо:

в точці  $O$

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{F}_O) \sim (\bar{R});$$

в точці  $O_1$

$$\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O) = \bar{M}_{O_1}(\bar{R}) = \bar{r} \times \bar{F}_O = \sum_{k=1}^n \bar{r} \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_k);$$

або

$$\bar{M}_{O_1}(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_k). \quad (5.21)$$

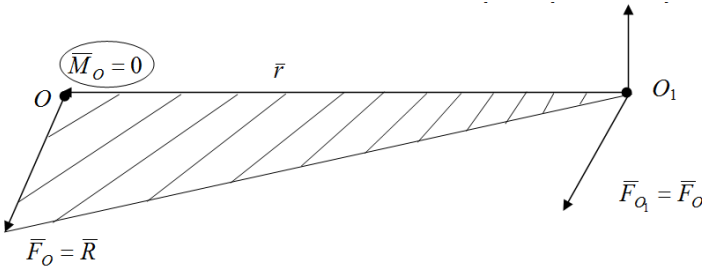


Рисунок 5.24

Рівняння (5.20) справедливе для будь-якої точки  $O_1$  тіла в просторі чи площині.

Отже теорему доведено.

Особливості використання теореми Вариньона розглянемо на наступних прикладах.

**Приклад 1.** Для заданої у площині  $xO_1y$  (рис. 5.25, а) рівнодійної  $\bar{R}$  з точкою прикладання  $O$  визначити рівняння лінії її дії.

**Розв'язання.** Представимо базове рівняння (5.21) теореми Вариньона у вигляді

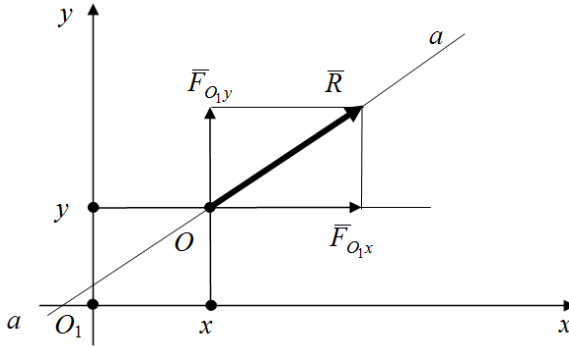
$$M_{O_1}(\bar{R}) = xF_{O_1y} - yF_{O_1x}, \quad (5.22)$$

де  $F_{O_1x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}$ ,  $F_{O_1y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}$  – проєкції головного вектора  $\bar{F}_O$  сил

$\bar{F}_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) системи;

$M_{O_1}$  – головний момент системи сил відносно точки  $O_1$

$$\left( M_{O_1} = \sum_{k=1}^n M_{O_1}(\bar{F}_k) \right).$$



а  
Рисунок 5.25

З (5.22) отримаємо рівняння прямої  $aa$  у відрізках

$$\frac{x}{\left( \frac{M_{O_1}}{F_{O,y}} \right)} + \frac{y}{\left( -\frac{M_{O_1}}{F_{O,x}} \right)} = 1 \quad (5.23)$$

чи з кутовим коефіцієнтом

$$y = \frac{F_{O,y}}{F_{O,x}} x - \frac{M_{O_1}}{F_{O,x}} \quad (5.24)$$

у площині  $xO_1y$ .

Рівняння (5.23) і (5.24) використовують на практиці в будівельній механіці при визначенні, наприклад, параметрів (величин і напрямків дії) реакцій в'язів.

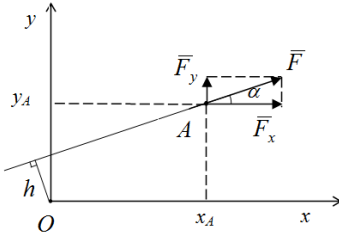
**Приклад 2.** Визначити момент сили  $F = 10$  Н відносно точки  $O$  початку системи координат  $xOy$  (рис. 5.25, б). Точка прикладання сили має координати  $A (x_A = 8 \text{ м}, y_A = 10 \text{ м})$ , а лінія її дії складає з віссю  $Ox$  кут  $\alpha = 30^\circ$ .

**Розв'язання.** Розкладемо силу  $\bar{F}$  на координатні складові  $\bar{F}_x$  і  $\bar{F}_y$ . Визначимо їх величини:  $F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66$  Н,  $F_y = F \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5$  Н. За побудовою сила  $\bar{F}$  є рівнодійною сил



$\bar{F}_x$  і  $\bar{F}_y$ . Тому для знаходження її моменту відносно точки  $O$  використаємо теорему Варіньона:

$$M_O(\bar{F}) = M_O(\bar{F}_x) + M_O(\bar{F}_y) = x_A \cdot F_y - y_A \cdot F_x = 8 \cdot 5 - 10 \cdot 8,66 = \\ = 40 - 86,6 = -40,6 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$



б  
Рисунок 5.25

Тут знак « $\rightarrow$ » означає, що сила  $\bar{F}$  прагне повернути своє плече  $h$  за ходом стрілки годинника.

**Примітка.** Визначити момент сили  $\bar{F}$  відносно полюса за загальною формулою  $M_O(\bar{F}) = \pm h \cdot F$  дуже складно, тому що невідомим є її плече  $h$  відносно точки  $O$ . Для його визначення спочатку необхідно скласти рівняння (5.23) або (5.24) лінії дії сили. Потім рівняння перпендикуляра з точки  $O$  на цю пряму, і далі визначити його довжину, яка і являтиме собою плече  $h$  сили  $\bar{F}$  відносно полюса  $O$ .

## 5.7 Приклади розв'язання задач приведення

**Приклад 1.** Для зображеної на рисунку 5.26 довільної системи сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$  у площині визначити в центрі  $O$  головний вектор  $\bar{F}_O$ , головний момент  $\bar{M}_O$ , параметри рівнодійної  $\bar{R}$  вихідної системи сил та її рівняння. Початкові дані:  $F_1 = F_2$ ,  $\alpha = 45^\circ$ , координати точок прикладання сил:  $A_1(x_1, y_1)$ ;  $A_2(x_2, y_2)$ .

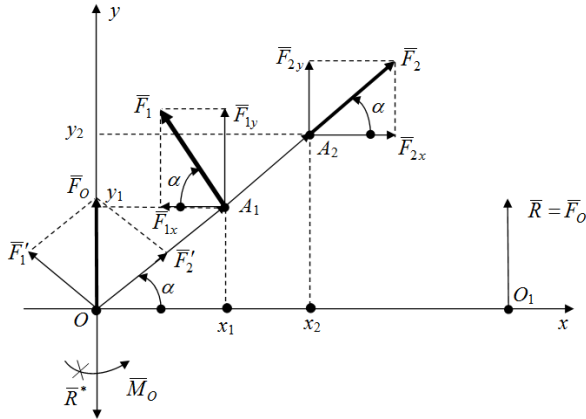


Рисунок 5.26

**Розв'язання.** Визначимо, враховуючи рівняння (5.2) і (5.3), параметри головного вектора і головного моменту заданої системи сил стосовно центра  $O$ :  $\bar{F}_O = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ ,  $\bar{M}_O = \overline{OA_1} \times \bar{F}_1 + \overline{OA_2} \times \bar{F}_2 = \overline{OA_1} \times \bar{F}_1$  (добуток  $\overline{OA_2} \times \bar{F}_2 = 0$ , тому що вектори  $\overline{OA_2}$  і  $\bar{F}_2$  паралельні). Побудуємо вектори  $\bar{F}_O$  і  $\bar{M}_O$ . При побудові головного вектора  $\bar{F}_O$  використовуємо методику теореми Пуансо: сили  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_2$  перенесемо в точку  $O$  паралельно самим до себе; отримані  $\bar{F}'_1$  і  $\bar{F}'_2$  додамо геометрично і результуючу силу визначимо як головний вектор  $\bar{F}_O$  вихідної системи сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$  у центрі  $O$ .

Для заданої системи сил у точці  $O$  головний момент  $M_O > 0$ , тому його дугову стрілку спрямуємо у бік проти ходу стрілки годинника.

Проаналізуємо отримані результати.

За величинами  $\bar{F}_O \neq 0$  і  $\bar{M}_O \neq 0$ , тому вихідна плоска система сил зводиться, відповідно до п. 5.5.4, до однієї рівнодійної сили  $\bar{R}$ .

Представимо далі момент  $\bar{M}_O$  (закреслено на рис. 5.26) у вигляді пари сил  $(\bar{R}, \bar{R}^*)$ , в якій сила  $\bar{R}^* = -\bar{F}_O$ , а плече  $h = OO_1 = \frac{M_O}{F_O}$ .

За визначенням сили  $\bar{F}_O$  і  $\bar{R}^*$  складають двійку сил, тому система сил  $(\bar{F}_O, \bar{R}^*) \sim 0$ .

Отже вихідну систему сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$  еквівалентними системними перетвореннями

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim (\bar{F}_O, \bar{M}_O) \sim (\bar{F}_O, (\bar{R}, \bar{R}^*)) \sim ((\bar{F}_O, \bar{R}^*), \bar{R}) \sim (\bar{R})$$

зведено до однієї сили, рівнодійної  $\bar{R}$  з точкою прикладання  $O_1$  на відстані  $OO_1$  від полюса  $O$  в бік додатного відліку координати  $x$ . Лінією дії рівнодійної буде пряма з рівнянням  $x = OO_1$ , де  $OO_1$  – число.

**Приклад 2.** Для зображеної на рисунку 5.27, а довільної системи сил  $(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$  у просторі визначити головний вектор  $\bar{F}_O$ , головний момент  $\bar{M}_O$ , параметри  $\bar{F}_1$  і  $\bar{M}_1$  динамічного гвинта і рівняння його осі. Початкові дані: сили  $P_1 = 4$  Н;  $P_2 = 3$  Н; відстань  $OA = 1$  м.

**Розв'язання.** Визначимо відповідно до теореми Пуансо головний вектор  $\bar{F}_O = \bar{P}'_1 + \bar{P}_2$  (тут  $\bar{P}'_1 = \bar{P}_1$ ) і головний момент  $\bar{M}_O = \overline{OA} \times \bar{P}_1$  (рис. 5.27, б), а також їх величини і проєкції:

$$F_O = \sqrt{P_1'^2 + P_2^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ (Н)}; \quad M_O = OA \cdot P_1 \cdot \sin 90^\circ = 1 \cdot 4 \cdot 1 = 4 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$F_{Ox} = P_1' = 4 \text{ Н}, \quad F_{Oy} = P_2 = 3 \text{ Н}; \quad F_{Oz} = 0, \quad M_{Ox} = 0, \quad M_{Oy} = M_O = 4 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{Oz} = 0. \quad \text{Кут } \varphi \text{ між векторами } \bar{F}_O \text{ і } \bar{M}_O \text{ дорівнює}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{P_2}{F_O}\right) = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = 53,13^\circ \text{ і задовольняє умові } \varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}. \text{ Тому}$$

вихідна система сил зводиться, відповідно до п. 5.4.4.1, до динамічного гвинта. Представимо далі головний момент системи сил у полюсі  $O$  (рис. 5.27, б) як  $\bar{M}_O = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$ , де  $\bar{M}_2 \perp \bar{F}_O$  за побудовою. За умовою задачі та за побудовою вектори  $\bar{F}_O$  і  $\bar{M}_O$ ,  $\bar{M}_1$  і  $\bar{M}_2$  належатимуть площині  $xOy$ , а  $M_2 = M_O \cdot \sin \varphi = 4 \cdot 0,78 = 3,2$  Н·м. Представимо (рис. 5.27, в) момент  $\bar{M}_2$  парою сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_1^*)$  з плечем  $h = OO_1 = \frac{M_2}{F_O} = \frac{3,2}{5} = 0,64$  (м) і силою  $\bar{F}_1^* = -\bar{F}_O$ .

Врахуємо далі, що сили  $\bar{F}_O$  і  $\bar{F}_1^*$  складають двійку сил, тобто система сил  $(\bar{F}_O, \bar{F}_1^*) \sim 0$ , і перенесемо момент  $\bar{M}_1$ , як вільний вектор, в точку  $O_1$  прикладання сили  $\bar{F}_1$ . У результаті вихідна система сил перетвориться у систему (рис. 5.27, г) двох силових факторів  $\bar{F}_1$  і  $\bar{M}_1$ , що складають силу і момент динами.

Проведені на рисунку 5.16, а, б, в еквівалентні векторні перетворення систем сил мають вигляд

$$\begin{aligned}
 (\bar{P}_1, \bar{P}_2) &\sim (\bar{F}_O, \bar{M}_O) \sim (\bar{F}_O, \bar{M}_1, \bar{M}_2) \sim (\bar{F}_O, \bar{M}_1, (\bar{F}_1, \bar{F}_1^*)) \sim \\
 &\sim ((\bar{F}_O, \bar{F}_1^*), \bar{F}_1, \bar{M}_1) \sim (\bar{F}_1, \bar{M}_1).
 \end{aligned}$$

Рівняння осі  $C_1C_2$  динамічного гвинта у просторі  $Oxyz$  має вигляд

$$\frac{3z}{4} = \frac{4-4z}{3} = \frac{-3x+4y}{0}. \quad (5.25)$$

Відповідно до (5.25) на рис. 5.27, г вісь динамічного гвинта є перетинанням площин  $z = 0,64$  і  $y = \frac{3}{4}x$ .

Під дією динамічного гвинта вільне тверде тіло може здійснювати тільки складний (гвинтовий рух).

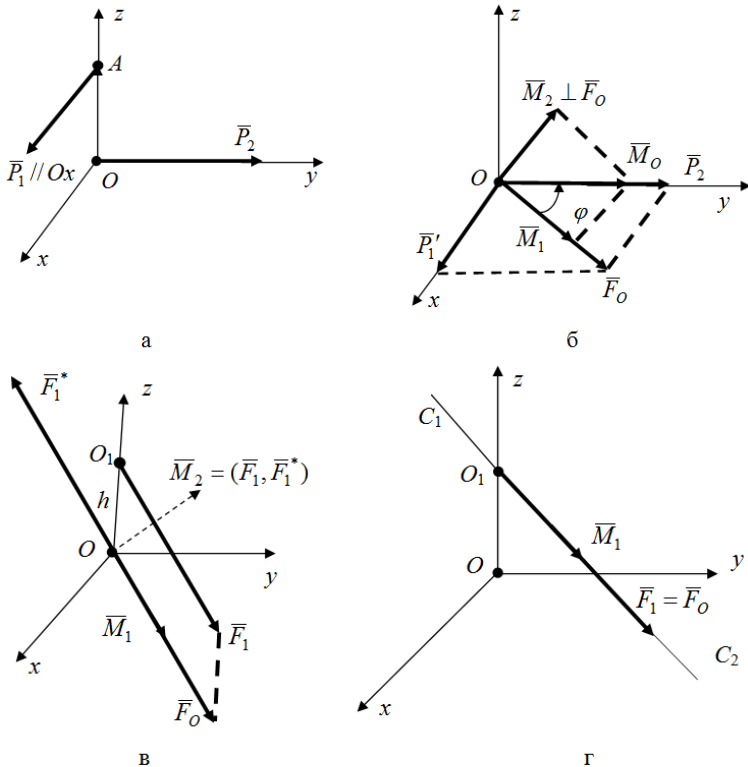


Рисунок 5.27

Приведення системи сил до динамічного гвинта має важливе значення стосовно задач зрівноваження. Якщо, наприклад, до тіла додати ззовні силу  $\vec{G} = -\vec{F}_1$  (рівну за величиною і протилежно направлену силі  $\vec{F}_1$ ), а у перпендикулярній осі динамі площині прикласти пару сил з моментом  $\vec{m} = -\vec{M}_1$ , то зрівноваження тіла буде досягнуто за умов найменшої потужності використаних зовнішніх силових факторів. Силу  $\vec{G}$  і момент  $\vec{m}$  на рисунку 5.27, г не показано. Ця властивість має важливе значення особливо в космічній техніці.

## 6 УМОВИ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ СИЛ. ОКРЕМІ ВИПАДКИ РІВНОВАГИ

На практиці розв'язання задач про рівновагу невідомого твердого тіла дозволяє визначити невідомі зовнішні сили та реакції в'язей.

Згідно з аксіомою статички про звільнення твердого тіла від в'язей тіло перебуває у стані спокою, тобто рівновазі, коли система прикладених до нього сил (в тому числі реакцій в'язів) еквівалентна нулю ( $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$ ), тобто зрівноважена.

### 6.1 Рівновага довільної системи сил у просторі

Відповідно до теореми Пуансо (п. 5.4.3) умови перебування твердого тіла в рівновазі формуються наступним чином: для рівноваги довільної системи сил у просторі необхідно і достатньо, щоб одночасно головний вектор і головний момент цієї системи дорівнювали нулю:

$$\vec{F}_0 = 0; \quad \vec{M}_0 = 0, \quad (6.1)$$

де  $O$  – будь-яка точка приведення у просторі, тому що при  $\vec{F}_0 = 0$  величина головного моменту від вибору центра  $O$  не залежить. Це *геометричні (векторні)* умови рівноваги.

Умови (6.1) є необхідними, бо якщо одна з них не буде виконуватись, то система діючих на тіло сил зведеться або до пари сил з моментом  $\vec{m}_0 = \vec{M}_0$  (п. 5.4.1), або до рівнодійної  $\vec{R} = \vec{F}_0$  (п. 5.4.2), тобто не буде зрівноваженою.

Одночасно умови (6.1) є і достатніми, тому що, наприклад, при  $\vec{F}_0 = 0$ , система відповідно до п. 5.4.1. зводиться до пари сил з моментом  $\vec{m}_0$ , рівним головному моменту  $\vec{M}_0$ . Але завдяки умовам (6.1) одночасно виконується і рівність  $\vec{M}_0 = 0$ , тому рівновага тіла забезпечується безумовно.

Однак, на практиці широко використовується інша форма умов рівноваги (*аналітична чи алгебраїчна форма*), суть якої полягає в наступному: якщо при рівновазі системи діючих на тіло сил головний вектор і головний момент системи дорівнюють нулю, то і їх проєкції  $(F_{0x}, F_{0y}, F_{0z}, M_{0x}, M_{0y}, M_{0z})$  на координатні осі також дорівнюватимуть нулю:

$$\left. \begin{aligned}
 F_{0x} &= \sum_{k=1}^n F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0; \\
 F_{0y} &= \sum_{k=1}^n F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0; \\
 F_{0z} &= \sum_{k=1}^n F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0; \\
 M_{0x} &= \sum_{k=1}^n M_{0x}(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}) = 0; \\
 M_{0y} &= \sum_{k=1}^n M_{0y}(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}) = 0; \\
 M_{0z} &= \sum_{k=1}^n M_{0z}(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}) = 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

де  $x_k, y_k, z_k (k = \overline{1, n})$  – проєкції радіуса-вектора точки прикладання  $k$ -ої сили на осі системи координат.

При цьому перші три рівняння складають умови відсутності поступального руху тіла в напрямку осей  $Ox, Oy, Oz$ , а останні рівняння – відсутності його обертального руху навколо перелічених осей.

У загальному випадку при розв'язанні задачі на рівновагу конкретного твердого тіла з шести рівнянь (6.2) можна визначити шість невідомих величин реакцій в'язів, наприклад, у задачах прикладної механіки при визначенні геометричних і механічних характеристик опорних стержнів, підшипників, під'ятників та ін.

## 6.2 Окремі випадки рівноваги системи сил

### 6.2.1 Рівновага довільної системи паралельних сил у просторі

У випадку, коли всі сили паралельні між собою (*система паралельних сил*), осі системи координат доцільно вибрати так, щоб одна з осей (наприклад вісь  $Oz$ ) була паралельна силам (рис. 6.1).

Тоді перші дві і остання умови (6.2) будуть виконуватись як тотожності, що дає наступні (три) умови рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_{0x}(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_{0y}(\bar{F}_k) = 0. \quad (6.3)$$

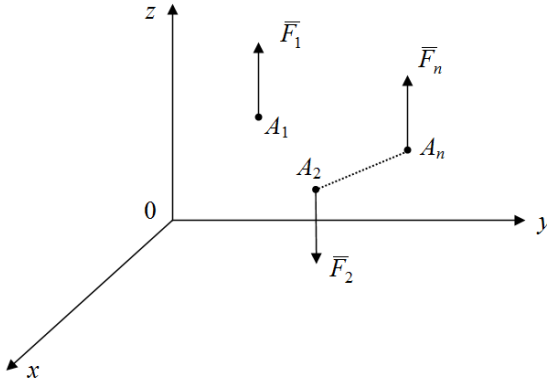


Рисунок 6.1

Отже, відповідно до (6.3), для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб сума проєкцій сил на вісь, паралельну силам, і суми моментів цих сил відносно двох інших координатних осей дорівнювали нулю.

### 6.2.2 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Як відомо (п. 5.5), довільна система сил у площині в загальному випадку зводиться у центрі  $O$  до сили  $\bar{R}$ , яка дорівнює головному вектору  $\bar{F}_0$  системи, і пари сил з моментом  $\bar{m}_0$ , який дорівнює головному моменту  $\bar{M}_0$  системи. При цьому головний вектор належить площині дії пари  $\bar{m}_0$ , що співпадає з площиною дії сил системи.

Для даної системи сил існують три окремі випадки рівноваги.

*Перша (основна) форма умов рівноваги.* Припустимо, що площина дії системи сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  співпадає з координатною площиною  $xOy$  (рис. 6.2) системи координат  $Oxyz$ .

Проекції сил системи, а також радіусів-векторів точок їх прикладання на вісь  $Oz$  в даному випадку дорівнюють нулю. Тому система умов рівноваги (6.2) перетворюється в наступну:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0. \quad (6.4)$$

Система (6.4) аналітичних (алгебраїчних) умов рівноваги твердого тіла формулюється таким чином: для рівноваги довільної системи сил у площині необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій усіх



сил на кожну з координатних осей  $Ox$  і  $Oy$  і алгебраїчна сума їх моментів відносно осі  $Oz$  (або довільного центра  $O$  в площині дії сил системи  $\sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0$ ), дорівнювали нулю.

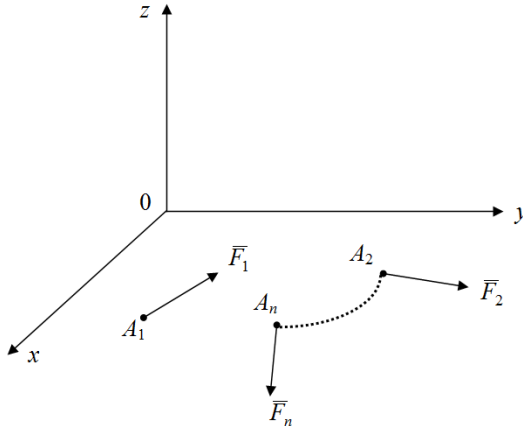


Рисунок 6.2

*Друга форма умов рівноваги.* У даному випадку умови рівноваги формулюються так: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів сил відносно будь-яких двох точок у площині дії сил і сума проєкцій цих сил на вісь, яка не перпендикулярна до прямої, що проходить через обрані точки, дорівнювали нулю. Для площини  $E$  дії сил системи, точок  $B$ ,  $C$  на ній і осі  $Ox$  (рис. 6.3) буде:

$$M_B = \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad M_C = \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad F_{Bx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad (6.5)$$

де  $F_{Bx}$  – проєкція головного вектора системи сил у точці  $B$  на вісь  $Ox$ .

Необхідність цих умов очевидна, бо якщо будь-яка з умов не буде виконуватися, то або в точці  $B$  головний вектор системи  $\bar{F}_B \neq 0$ , або головний момент  $\bar{M}_B \neq 0$  (чи  $\bar{M}_C \neq 0$ ) і тоді рівноваги тіла не відбувається.

Достатність умов (6.5) доведемо наступним чином. Якщо виконуються тільки перші з двох умов (6.5), тобто  $M_B = 0$  і  $M_C = 0$ , то така система сил може мати лише рівнодійну  $\bar{R} = \bar{F}_B$  (рис. 6.3), лінія дії якої проходить через точки  $B$  і  $C$ . Оскільки вісь  $Ox$  проходить під кутом  $\alpha \neq \pi/2$  до відрізка  $BC$ , то остання умова (6.5) може бути

виконана тільки коли  $F_{BX} = F_B \cdot \cos \alpha = R \cdot \cos \alpha = 0$ , тобто коли  $\bar{R} = \bar{F}_B = 0$ . Це призводить до одночасного виконання всіх умов (6.5), що забезпечують рівновагу тіла безумовно.

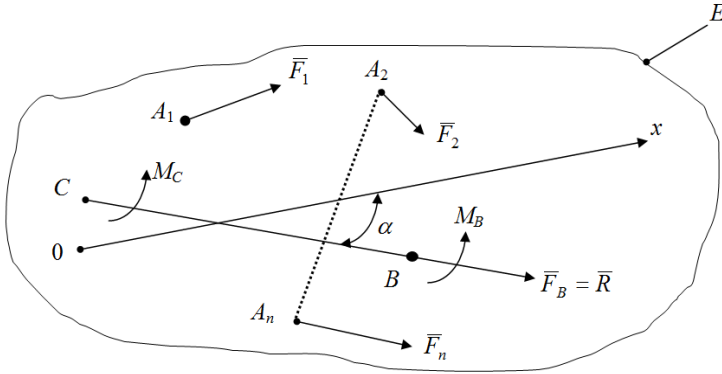


Рисунок 6.3

*Третя форма умов рівноваги.* Ця форма умов рівноваги формулюється таким чином: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно будь-яких трьох точок, наприклад  $B, C, D$ , що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю (рис. 6.4):

$$M_B = \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad M_C = \sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0; \quad M_D = \sum_{i=1}^n M_D(\vec{F}_i) = 0, \quad (6.6)$$

де  $B, C, D$  – точки приведення системи сил.

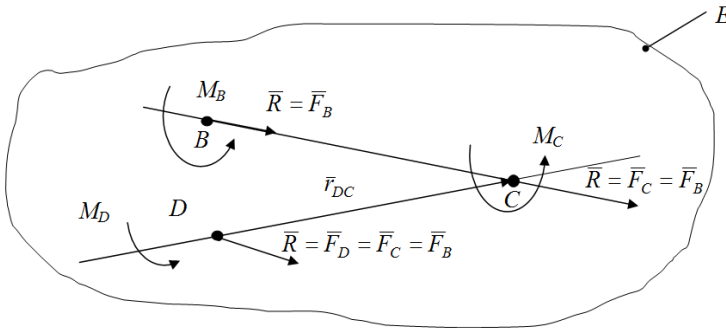


Рисунок 6.4

Необхідність цих умов, враховуючи (5.11), очевидна, бо при одночасному виконанні, наприклад двох перших умов, головний

момент системи при  $\bar{r}_{DC} \neq 0$  може дорівнювати нулю у третій точці  $D$  ( $\bar{M}_D = \bar{M}_C + \bar{r}_{DC} \times \bar{F}_B$ ) тільки коли головний вектор  $\bar{F}_B$  системи сил дорівнює нулю. Тому при одночасному виконанні умов (6.6) виконуються умови (6.1) рівноваги тіла і воно буде у рівновазі.

Достатність умов (6.6) впливає з того, що при їх виконанні система сил не знаходилася б у рівновазі тільки у випадку, коли її відмінна від нуля рівнодійна  $\bar{R}$  проходила одночасно через всі три точки  $BCD$  площини  $E$ , що неможливо за визначенням.

### 6.3 Приклади розв'язання задач рівноваги

**Приклад 1.** Рівновага довільної системи сил у площині.

Початкова схема конструкції наведена на рисунку 6.5, а. Тут на балку із защемленим кінцем  $A$  на відрізку  $CD$  діє рівномірно розподілене навантаження  $q = 0,8$  кН/м, в точці  $B$  – сила  $F = 2$  кН під кутом  $45^\circ$ . Крім того, до балки прикладена пара сил з моментом  $m = 1,2$  кН·м. Необхідно визначити реакції защемлення при дії на балку заданої системи зовнішніх силових факторів. Розміри балки в метрах вказані на рисунку.

**Розв'язання.** Розрахункова схема наведена на рисунку 6.5, б. При її побудові використано принцип звільнення від в'язів, розподілене навантаження замінено зосередженою силою  $Q = 3 \cdot 0,8 = 2,4$  кН, а сила  $\bar{F}$  – координатними складовими  $\bar{F}_x$ ,  $\bar{F}_y$  з величинами

$$F_x = F \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot \sqrt{2} / 2 = 1,41 \text{ кН},$$

$$F_y = F \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot \sqrt{2} / 2 = 1,41 \text{ кН}.$$

Відповідно до рисунку 6.5, б, балка як вільне тверде тіло, перебуває в рівновазі під дією заданих сил  $\bar{Q}, \bar{F}_x, \bar{F}_y$ , пари сил з моментом  $m$  і реакції защемлення у вигляді силових складових  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$  та пари сил з моментом  $M_A$ .

Складемо рівняння рівноваги балки, використавши першу форму умов рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + F_x = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - Q - F_y = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad M_A + m - 2,5Q - 5F_y = 0.$$

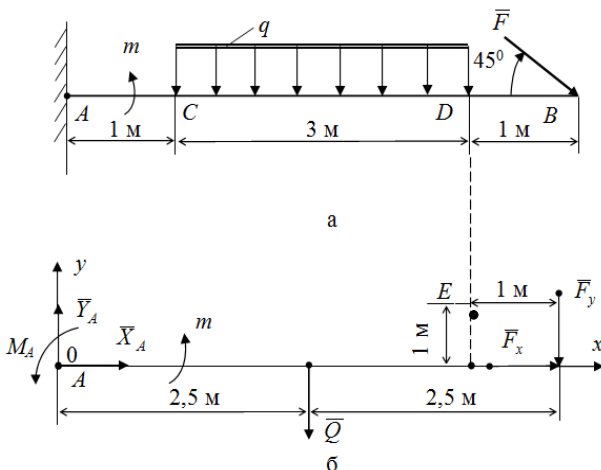


Рисунок 6.5

З отриманих трьох рівнянь можна визначити три невідомі реакції:

з першого рівняння

$$X_A = -F_x = -1,41 \text{ (кН)};$$

з другого рівняння

$$Y_A = Q + F_y = 2,4 + 1,41 = 3,81 \text{ (кН)};$$

з третього рівняння

$$M_A = 5F_y + 2,5Q - m = 5 \cdot 1,41 + 2,5 \cdot 2,4 - 1,2 = 11,87 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Знак (-) отриманої реакції  $\bar{X}_A$  показує, що в дійсності вона направлена на розрахунковій схемі у протилежний бік.

Для перевірки одержаних величин реакцій в'язів складемо рівняння моментів сил відносно точки, через яку не проходять лінії дії знайдених реакцій, наприклад такою точкою буде E, що знаходиться на відстані 1 м від точки B і від балки (рис. 6.5, б).

**Перевірка.**

$$\begin{aligned} \sum M_E &= M_A - Y_A \cdot 4 + m + Q \cdot 1,5 - F_y \cdot 1 + X_A \cdot 1 + F_x \cdot 1 = \\ &= 11,87 - 3,81 \cdot 4 + 1,2 + 2,4 \cdot 1,5 - 1,41 \cdot 1 - 1,44 \cdot 1 + 1,41 \cdot 1 = 18,08 - 18,08 = 0. \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Рівновага довільної системи сил у просторі.

Початкова схема конструкції (рис. 6.6) складається з вертикального вала  $ABC$  вагою  $G=3$  кН, який розташований у підп'ятнику  $A$  і підшипнику  $B$ . На валу жорстко закріплено два шківів радіусами  $r=10$  см і  $R=15$  см, до яких прикладені колові зусилля  $\vec{S}, \vec{T}, \vec{F}$ . Необхідно визначити реакції підп'ятника  $A$ , підшипника  $B$  і величину колового зусилля  $\vec{S}$ , які забезпечують рівновагу вала при наступних геометричних і кутових параметрах вала і навантаженнях:  $a=c=15$  см;  $b=20$  см;  $\alpha=30^\circ$ , вектори  $\vec{S}, \vec{T}, \vec{F} \perp$  осі  $Oz$ ;  $T=4$  кН;  $F=2$  кН.

**Розв'язання.**

Розрахункову схему будемо на схемі конструкції, зображеної на рис. 6.6, додавши до неї реакції в'язів: підп'ятника  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$  і підшипника  $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$ , а також розклавши силу  $\vec{F}$  на координатні складові  $\vec{F}_x, \vec{F}_y$ .

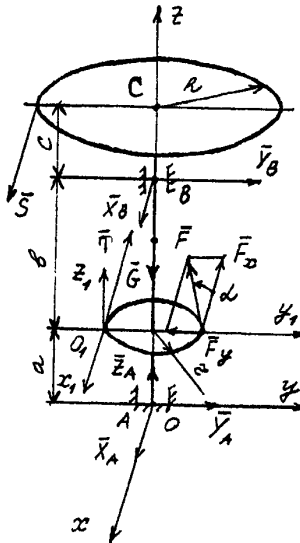


Рисунок 6.6

Складемо рівняння рівноваги конструкції, використавши аналітичну форму рівноваги довільної просторової системи сил:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S + X_B - T - F_x + X_A = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_B - F_y + Y_A = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad Z_A - G = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{0x}(\bar{F}_i) = 0; \quad F_y \cdot a - Y_B \cdot (a+b) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{0y}(\bar{F}_i) = 0; \quad S \cdot (a+b+c) + X_B \cdot (a+b) - T \cdot a - F_x \cdot a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{0z}(\bar{F}_i) = 0; \quad S \cdot R - T \cdot r + F_x \cdot r = 0.$$

З отриманих шести рівнянь рівноваги визначимо, враховуючи, що  $F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,732$  кН,  $F_y = F \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1$  кН, шість невідомих реакцій:

з шостого рівняння

$$S = \frac{T \cdot r - F_x \cdot r}{R} = \frac{4 \cdot 10 - 1,732 \cdot 10}{15} = 1,512 \text{ (кН)};$$

з п'ятого

$$X_B = \frac{T \cdot a + F_x \cdot a - S \cdot (a+b+c)}{a+b} = \frac{4 \cdot 15 + 1,732 \cdot 15 - 1,512 \cdot 50}{35} = 0,297 \text{ (кН)};$$

з третього  $Z_A = G = 3$  (кН);

з другого  $Y_A = F_y - Y_B = 1 - 0,429 = 0,571$  (кН);

з першого

$$X_A = T + F_x - S - X_B = 4 + 1,732 - 1,512 - 0,297 = 3,903 \text{ (кН)}.$$

Для перевірки одержаних величин реакцій в'язів складемо рівняння моментів сил відносно осей системи координат  $O_1x_1y_1z_1$ , осі якої є паралельними осям початкової системи координат  $Oxyz$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{0,x_1}(\bar{F}_i) &= Y_A \cdot a + Z_A \cdot r - Y_B \cdot b - G \cdot r = \\ &= 0,571 \cdot 5 + 3 \cdot 10 - 0,429 \cdot 20 - 3 \cdot 10 = 8,565 - 8,58 = -0,015 \approx 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{0,y_1}(\bar{F}_i) &= S \cdot (c+b) + X_B \cdot b - X_A \cdot a = \\ &= 1,512 \cdot 35 + 0,297 \cdot 20 - 3,923 \cdot 15 = 58,86 - 58,845 = 0,015 \approx 0. \end{aligned}$$

На практиці отримані реакції защемлення (приклад 1), підп'ятника і підшипника (приклад 2) використовують при визначенні

геометричних і механічних параметрів розглядуваних в'язів на етапі їх конструювання.

#### 6.4 Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл

Якщо конструкція складається з кількох твердих тіл, з'єднаних між собою за допомогою в'язів (складена конструкція), то можна розв'язати задачу одним з двох способів:

- 1) розглянути рівновагу всієї конструкції і додатково рівновагу одного або кількох окремих твердих тіл, що складають конструкцію;
- 2) початкову конструкцію відразу розчленити на окремі тверді тіла і розглянути рівновагу кожного з них окремо.

**Приклад 1.** Два невагомих стержні  $ADC$  і  $BC$  з'єднані між собою шарніром  $C$  і закріплені нерухомими шарнірами  $A$  і  $B$ . На конструкцію діють сили  $P_1 = 10$  кН,  $P_2 = 20$  кН, розподілене навантаження інтенсивністю  $q = 4$  кН/м і пара сил з моментом  $M = 50$  кНм. Розміри задані на вихідній схемі (рис. 6.7). Треба визначити реакції опор  $A$  і  $B$ , а також тиск у проміжному шарнірі  $C$  складеної конструкції.

**Розв'язання.** При розв'язанні задачі першим способом будемо розглядати рівновагу всієї складеної конструкції, а також стержня  $CB$  окремо. Побудуємо розрахункову схему: відкинемо опори і замінимо їх реакціями  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ , замінимо розподілене навантаження зосередженою силою  $Q = 3q$ , прикладеною в середину ділянки  $AD$ , побудуємо осі координат.

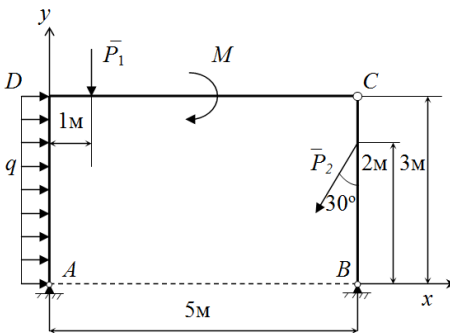


Рисунок 6.7

При цьому шарнір  $C$  вважатимемо затверділим (закреслено на рис. 6.8), використавши аксіому 5 затвердіння.

Визначимо величини сил  $\bar{Q}, \bar{P}_{2x}$  і  $\bar{P}_{2y}$ :

$$Q = 3q = 3 \cdot 4 = 12 \text{ кН},$$

$$P_{2x} = P \cdot \sin 30^\circ,$$

$$P_{2y} = P \cdot \cos 30^\circ.$$

Складемо рівняння рівноваги нерозчленованої конструкції:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + X_B + Q - P_{2x} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A + Y_B - P_1 - P_{2y} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(F_i) = -Y_A \cdot 5 - Q \cdot 1,5 + P_1 \cdot 4 - M + P_{2x} \cdot 2 = 0.$$

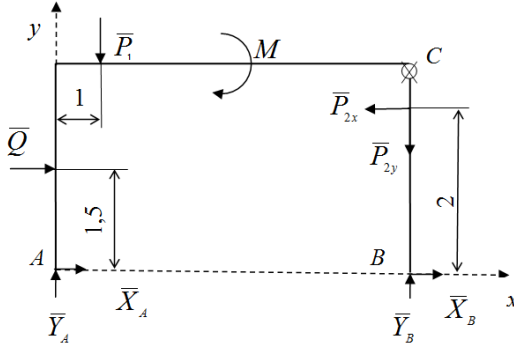


Рисунок 6.8

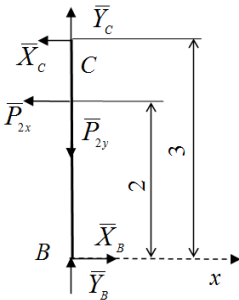


Рисунок 6.9

Далі розчленимо конструкцію на складові елементи і розглянемо окремо стержень  $BC$ . Дію відкинutoї конструкції  $ADC$  замінимо реакціями  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  у шарнірі  $C$ .

*Примітка.* Напрямки осей координат на обох розрахункових схемах (рис. 6.8, рис. 6.9) повинні співпадати.

Складемо рівняння рівноваги стержня  $BC$ :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_B - X_C - P_{2x} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_B + Y_C - P_{2y} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_C(F_i) = X_B \cdot 3 - P_{2x} \cdot 1 = 0.$$

Відповідно до розглянутих на рисунку 6.8 і рисунку 6.9 розрахункових схем ми маємо шість невідомих реакцій опор



$\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$  та реакції  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  у шарнірі  $C$ . Визначимо їх із складених шести рівнянь рівноваги.

Із третього рівняння знаходимо

$$Y_A = \frac{P_1 \cdot 4 + P_2 \sin 30^\circ \cdot 2 - M - Q \cdot 1,5}{5} = \frac{10 \cdot 4 + 20 \sin 30^\circ \cdot 2 - 50 - 12 \cdot 1,5}{5} =$$

$$= -1,6 \text{ кН},$$

з другого рівняння отримаємо

$$Y_B = -Y_A + P_1 + P_{2y} = -(-1,6) + 10 + 20 \cos 30^\circ = 28,92 \text{ кН}.$$

Із шостого рівняння знаходимо

$$X_B = \frac{P_2 \sin 30^\circ}{3} = \frac{20 \cdot \sin 30^\circ}{3} = 3,33 \text{ кН},$$

з п'ятого отримаємо

$$Y_C = P_2 \cos 30^\circ - Y_B = 20 \cdot \cos 30^\circ - 28,92 = -11,6 \text{ кН},$$

з четвертого –

$$X_C = X_B - P_2 \sin 30^\circ = 3,33 - 20 \cdot \sin 30^\circ = -6,67 \text{ кН}, \text{ і, нарешті,}$$

з першого –

$$X_A = -X_B - Q + P_2 \sin 30^\circ = -3,33 - 12 + 20 \cdot \sin 30^\circ = -5,33 \text{ кН}.$$

Значення  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$  менші нуля, відповідно ці реакції в дійсності спрямовані протилежно зображеним на рисунку.

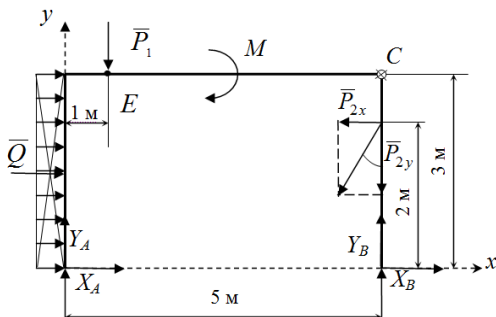


Рисунок 6.10

Для перевірки одержаних величин реакцій опор  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$  розглянемо складену конструкцію в цілому і складемо рівняння моментів відносно точки, через яку не проходять лінії дій цих реакцій, наприклад, відносно точки  $E$  (рис. 6.10). Шарнір  $C$  знову будемо вважати затверділим.

**Перевірка.**

$$\sum_{i=1}^n M_E(\bar{F}_i) = X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 1 + Q \cdot 1,5 - M - P_{2x} \cdot 1 - P_{2y} \cdot 4 + Y_B \cdot 4 + X_B \cdot 3 =$$

$$= -5,33 \cdot 3 - (-1,6) \cdot 1 + 12 \cdot 1,5 - 50 - 20 \sin 30^\circ \cdot 1 - 20 \cos 30^\circ \cdot 4 + 28,92 \cdot 4 +$$

$$+ 3,33 \cdot 3 = -15,99 + 8 + 18 + 40 - 50 - 10 + 9,9 = -145,27 + 145,27 = 0.$$

При цьому рівність нулю суми моментів сил відносно точки  $E$  означає правильність визначених реакцій.

**Приклад 2.** Знайти реакції опор  $A$  і  $B$ , а також тиск у проміжному шарнірі  $C$  складеної конструкції, на яку діють сили  $P_1 = 6$  кН,  $P_2 = 10$  кН, розподілене навантаження інтенсивністю  $q = 1,4$  кН/м і пара сил з моментом  $M = 15$  кНм. Розміри задані на початковій схемі (рис. 6.11), кут  $\alpha = 60^\circ$ .

**Розв'язання.** При розв'язанні задачі другим способом будемо розглядати рівновагу стержнів  $ADC$  і  $BC$  конструкції окремо (рис. 6.12 і 6.13). Побудуємо розрахункові схеми за звичайним правилом. Тут слід враховувати, що відповідно до аксіоми 4 реакції  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  і  $\bar{X}'_C, \bar{Y}'_C$  в шарнірі  $C$  задовольняють наступним рівностям:  $X_C = X'_C, Y_C = Y'_C$ . Розподілене навантаження замінимо зосередженою силою  $Q = 4q$ , яку прикладемо в середині ділянки  $CB$ .

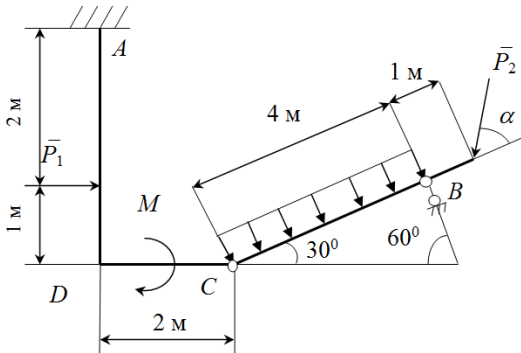


Рисунок 6.11

Визначимо величини сил  $\bar{P}_{2x}, \bar{P}_{2y}, \bar{Q}$ , що діють на стержень  $CB$ :

$$P_{2x} = P_2 \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ кН}, \quad P_{2y} = P_2 \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8,7 \text{ кН},$$

$$Q = 4q = 5,6 \text{ кН.}$$

Складемо рівняння рівноваги стержня BC:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_C - P_{2x} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_C - Q + R_B - P_{2y} = 0,$$

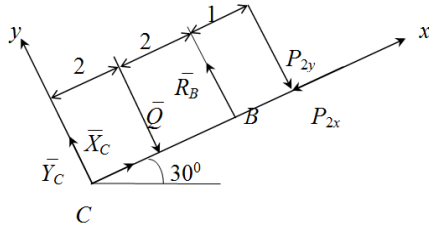


Рисунок 6.12

$$\sum_{i=1}^n M_C = -Q \cdot 2 + R_B \cdot 4 - P_{2y} \cdot 5 = 0.$$

Далі складемо рівняння рівноваги стержня ADC:

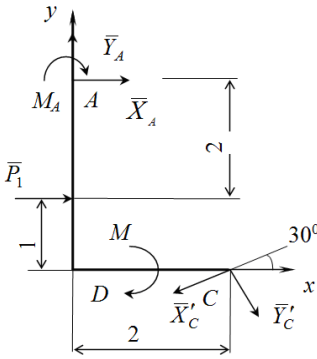


Рисунок 6.13

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + P_1 - X_C \cos 30^\circ + Y_C \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A - Y_C \sin 60^\circ - X_C \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_A = -M_A + P_1 \cdot 2 - X_C \cos 30^\circ \cdot 3 + Y_C \cos 60^\circ \cdot 3 - M - X_C \sin 30^\circ \cdot 2 - Y_C \sin 60^\circ \cdot 2 = 0. \quad (6)$$

З отриманих шести рівнянь визначимо невідомі реакції:  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, M_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C, \bar{R}_B$ .

Із третього рівняння знаходимо

$$R_B = \frac{Q \cdot 2 + P_{2y} \cdot 5}{4} = \frac{5,6 \cdot 2 + 8,7 \cdot 5}{4} = 13,67 \text{ кН,}$$

з першого рівняння  $X_C = P_{2x} = 5 \text{ кН,}$

з другого рівняння

$$Y_C = Q - R_B + P_{2y} = 5,6 - 13,67 + 8,7 = 0,63 \text{ кН,}$$

з п'ятого рівняння

$$Y_A = Y_C \sin 60^\circ + X_C \sin 30^\circ = 0,63 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3,05 \text{ кН,}$$

з четвертого

$$X_A = -Y_C \cos 60^\circ + X_C \cos 30^\circ - P_1 = -0,63 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 = -1,98 \text{ кН,}$$

з шостого

$$\begin{aligned}
 M_A &= -M + P_1 \cdot 2 - X_C \cos 30^\circ \cdot 3 + Y_C \cos 60^\circ \cdot 3 - X_C \sin 30^\circ \cdot 2 - \\
 &- Y_C \sin 60^\circ \cdot 2 = -15 + 6 \cdot 2 - 5 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + 0,63 \frac{1}{2} \cdot 3 - 5 \frac{1}{2} \cdot 2 - 0,63 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \\
 &= -21,14 \text{ кНм}.
 \end{aligned}$$

Для перевірки розглянемо конструкцію в цілому і складемо для неї рівняння моментів відносно точки  $C$ , через яку не проходять лінії дій визначених реакцій. Шарнір  $C$  вважаємо затверділим (рис. 6.14).

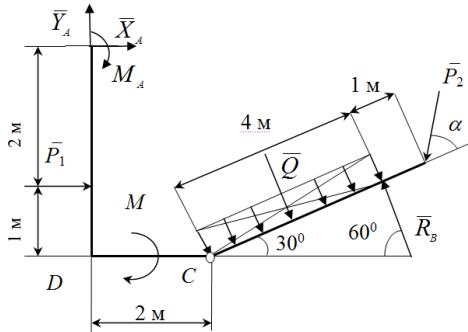


Рисунок 6.14

### Перевірка.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) &= -M_A - X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 2 - P_1 \cdot 1 - M - Q \cdot 2 + R_B \cdot 4 - P_2 \cdot 4,33 = \\
 &= -(-21,14) - (-1,98) \cdot 3 - 3,05 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 15 - 5,6 \cdot 2 + 13,67 \cdot 4 - 10 \cdot 4,33 \approx 0.
 \end{aligned}$$

Рівність нулю суми моментів сил відносно точки  $C$  означає, що задачу розв'язано правильно.

## 7 ТЕРТЯ КОВЗАННЯ, КОЧЕННЯ

Сили тертя виникають між поверхнями твердих тіл при їх взаємних рухах, між частинками рідини і газів при їх внутрішніх взаємодіях та при їх взаємодіях з поверхнями твердих тіл.

У теоретичній механіці розглядаються два види тертя твердих тіл: тертя ковзання і тертя кочення.

Реакція взаємодії контактуючих твердих тіл залежить від типу поверхонь їх стикання. У випадку ідеально гладеньких поверхонь ця реакція направлена вздовж спільної нормалі до поверхонь стиску. За величиною нормальна реакція  $\vec{N}$  дорівнює силі ваги  $\vec{G}$  тіла, коли опорна поверхня тіла горизонтальна (рис. 7.1, а), або  $N = G_1 = G \cdot \cos \alpha$  (рис. 7.1, б) при  $\alpha \neq 0$ .

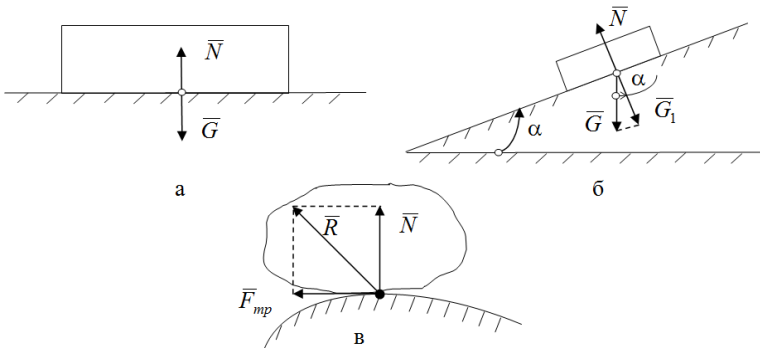


Рисунок 7.1

Якщо поверхні стикання твердих тіл шорсткі (рис. 7.1, в), то з'являється ще одна складова реакції взаємодії, яка має ортогональну по відношенню до складової  $\vec{N}$  лінію дії (направлена по дотичній до означених поверхонь) і називається силою тертя  $\vec{F}_{mp}$ . Отже, в загальному випадку реакція шорстких поверхонь дорівнює геометричній сумі нормальної реакції взаємодії твердих тіл і сили тертя:  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{mp}$ .

### 7.1 Сили тертя ковзання. Закон Амонтона-Кулона

Напрямок дії сили тертя було встановлено ще у 16 ст. Леонардо да Вінчі: сила тертя завжди спрямована у бік, протилежний руху тіла. Комплексні експериментальні й теоретичні дослідження сил тертя виконали Амонтон (1663–1705 рр.) і Кулон (1736–1806 рр.). Для цього

використовувався особливий прилад – трибометр (рис. 7.2). Тут 1 – горизонтальна опорна плита; 2 – тіло вагою  $G$  у вигляді прямокутного бруска; 3 – блок; 4 – вантаж вагою  $Q$ ;  $\bar{T}$  – горизонтальна реакція мотузки, що з'єднує тіло 2 з вантажем 4 (зсуваюча сила для тіла 2). За величиною  $T = Q$ . При поступовому збільшенні ваги вантажу, починаючи від нуля, буде одночасно пропорційно змінюватися і зсуваюча сила  $\bar{T}$ . У випадку досягнення нею певного граничного значення  $T^{zp}$  брусок почне рухатись. Сила тертя, яка виникає між жорсткими поверхнями стискання тіла і плити при відсутності їх взаємних рухів й зрівноважує зсуваючу силу  $\bar{T}$ , називається *силою тертя спокою*  $F_{mp}^{cn}$ . Очевидно, що вона теж змінюється від нуля до деякого граничного значення  $F_{mp}^{zp}$ , тобто  $F_{mp}^{cn} = [0 - F_{mp}^{zp}]$ . При  $T = T^{zp}$  і  $F_{mp}^{cn} = F_{mp}^{zp}$  брусок перебуватиме у стані граничної рівноваги, який визначається рівністю  $F_{mp}^{zp} = T^{zp}$ . Подальше збільшення зсуваючої сили приведе до його руху під дією сил:  $\bar{T} > \bar{T}^{zp}$  і  $\bar{F}_{mp}$ . Тертя при русі тіл, на відміну від тертя спокою називається тертям ковзання, а сила тертя – *силою тертя ковзання*  $F_{mp}^{ков}$ .

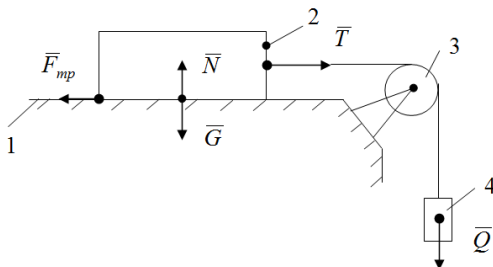


Рисунок 7.2

Дослідженнями встановлено наступні узагальнені якісні й кількісні властивості тертя спокою і ковзання шорстких незмащених поверхонь, так званого сухого тертя, або тертя першого роду.

1. Закон *Амонтона-Кулона*. Максимальна величина сили тертя спокою, яка дорівнює  $F_{mp}^{zp}$ , пропорційна силі нормального стиску поверхонь стикання тіл:

$$(F_{mp}^{cn})_{\max} = F_{mp}^{zp} = f_0 \cdot N, \quad (7.1)$$

де  $f_0$  – коефіцієнт тертя спокою (статичний коефіцієнт тертя), безрозмірна величина.

Рівняння (7.1) використовують на практиці для визначення величини діючого на тіло зсуваючого зусилля  $T^{zp}$  в стані його граничної рівноваги.

Наведемо значення коефіцієнта  $f_0$  для деяких матеріалів: сталь – чавун –  $f_0 = 0,22-0,28$ ; деревина – деревина –  $f_0 = 0,4-0,7$ ; сталь – лід –  $f_0 = 0,027$ ; гума – сухий бетон –  $f_0 = 0,8-0,95$ .

Коефіцієнт тертя  $f_0$  не залежить від площі стикання поверхонь тертя, ваги тіла (бруска на рис. 7.2). Він залежить від матеріалу й фізичного стану (чистота обробки, температура, вологість та ін.) поверхонь тіл і зростає при збільшенні часу їх попереднього контакту.

2. За величиною сила тертя спокою змінюється від нуля до максимального значення, рівного  $F_{mp}^{zp}$ , тобто

$$0 \leq F_{mp}^{cn} \leq F_{mp}^{zp},$$

або 
$$F_{mp}^{cn} \leq F_{mp}^{zp} = f_0 \cdot N. \quad (7.2)$$

3. Сила тертя ковзання  $F_{mp}^{ков}$  належить загальній дотичній площині до поверхонь взаємодії стичних тіл і спрямована у бік, протилежний руху тіла.

Після початку руху сила тертя ковзання по відношенню до сили  $F_{mp}^{zp}$  трохи зменшується, тобто  $F_{mp}^{ков} < F_{mp}^{zp}$ . Величина сили тертя ковзання визначається формулою

$$F_{mp}^{ков} = f_1 \cdot N,$$

де  $f_1$  – коефіцієнт тертя ковзання (динамічний коефіцієнт тертя).

Коефіцієнт тертя ковзання не залежить від відносної швидкості поверхонь стичних тіл.

На практиці величини коефіцієнтів тертя  $f_0$  і  $f_1$  визначаються звичайно експериментально. Їх величини для більшості відомих матеріалів наведено в технічних довідниках.

## 7.2 Кут тертя. Конус тертя

Розглянемо тіло, яке, спираючись на шорстку поверхню, перебуває під дією рівнодійної зовнішніх активних сил  $\bar{P} = \bar{P}_\tau + \bar{P}_n$  в стані рівноваги. У цьому випадку, враховуючи (7.2), буде виконуватись умова

$$P_\tau = P \cdot \sin \alpha \leq F_{mp}^{cp} = f_0 \cdot N = f_0 \cdot P \cdot \cos \alpha$$

або

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f_0, \quad (7.3)$$

де  $P_\tau$  – дотична складова рівнодійної. У (7.3) враховано, що нормальна складова  $\bar{P}_n$  рівнодійної  $\bar{P}$  притискує тіло до поверхні і викликає відповідно реакцію  $N = P_n = P \cos \alpha$ . При цьому граничну рівновагу тіла матимемо при  $P_\tau^* = F_{mp}^{cp}$  (випадок навантаження тіла зображено на рис. 7.3), тобто, враховуючи (7.3), коли  $\operatorname{tg} \alpha^* = f_0$ . Але якщо буде  $\operatorname{tg} \alpha_1 > f_0$ , то тіло почне рухатись. Виразимо далі умови рівноваги тіла через кут  $\varphi_0$  між реакцією  $\bar{R}$  поверхні і її нормальною складовою  $\bar{N}$ , який назовемо, при  $F_{mp}^{cn} = F_{mp}^{cp}$ , кутом тертя  $\varphi_0$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{F_{mp}^{cp}}{N} = \frac{f_0 \cdot N}{N} = f_0. \quad (7.4)$$

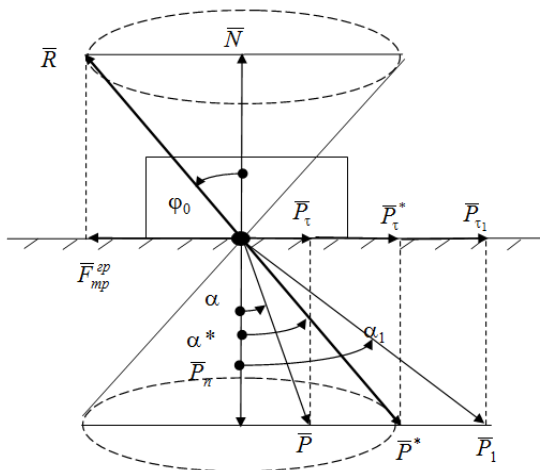


Рисунок 7.3



З (7.4), враховуючи властивості коефіцієнта тертя спокою, впливає незалежність кута тертя  $\varphi_0$  від ваги тіла, тобто величини нормальної реакції  $\bar{N}$  контактуючих тіл. Крім того з виразів (7.3) і (7.4) отримаємо, що тіло перебуває у стані рівноваги, коли для кутів між рівнодієюю  $\bar{P}$  і нормаллю  $\bar{N}$ , а також реакцією  $\bar{R}$  і тією ж нормаллю виконується нерівність

$$\alpha \leq \varphi_0, \quad (7.5)$$

$$\text{а коли} \quad \alpha \geq \varphi \quad (7.6)$$

тіло буде рухатись.

Тіло, спираючись на шорстку плоску поверхню, має можливість рухатись по ній під дією рівнодіяної зовнішніх активних сил в будь-якому напрямку. Залежно від напрямків дії активних сил напрямок дотичної граничної реакції  $\bar{F}_{mp}^{cp}$  буде змінюватись. При цьому вектор  $\bar{R}$  реакції поверхні, приймаючи його як рівнодіяну, створить конічну поверхню, а його кінець при  $N = const$  – підлогу прямого колового конуса. Прямий коловий конус, твірні якого з нормаллю до поверхні в даній точці складають кут тертя  $\varphi_0$ , називається конусом тертя (якщо коефіцієнт тертя  $f_0$  має у різних напрямках руху тіла різні значення, то конус тертя не буде прямим коловим).

Незалежність нерівностей (7.5), (7.6) від параметрів рівнодіяної  $\bar{P}$  приводить до наступних умов спокою чи руху тіла стосовно конуса тертя. Якщо лінія дії рівнодіяної активних сил проходить в середині конуса тертя або вздовж його твірної, то тіло перебуває в рівновазі (граничної рівноваги) при будь-яких величинах рівнодіяної, а якщо лінія дії рівнодіяної проходить поза конусом тертя, то тіло прийде до руху. Цю властивість використовують в техніці, наприклад, при визначенні геометричних характеристик кутів нахилу нарізки гвинтових з'єднань, що реалізують ефект самогальмування.

### 7.3 Тертя кочення. Коефіцієнт тертя кочення

*Тертям кочення* (тертям другого роду) називається опір, який виникає при коченні одного тіла по поверхні іншого. Так, при коченні циліндричного котка 1 радіуса  $R$  і вагою  $G$  по горизонтальній поверхні 2, як показує досвід, до його осі необхідно прикласти певну горизонтальну активну силу  $\bar{F}$  (рис. 7.4).

При малих значеннях сили  $\bar{F}$  циліндр буде в рівновазі. При збільшенні  $F$  до величини  $F^{cp}$  у певний момент матимемо граничний стан рівноваги, а далі коток почне рухатись.

Поява сил тертя кочення пояснюється зміною форми поверхні опори, по якій циліндр котиться, в результаті її пружної деформації. Вважається, що стик поверхонь контакту циліндра і опори відбувається не в точці  $O$ , а вздовж деякої площини  $AB$ . При дії сили  $\bar{F}$  інтенсивність тиску в краю  $B$  площадки зменшується, а в краю  $A$  – зростає. У результаті нормальна реакція  $\bar{N}$  поверхні виявляється зміщеною в напрямку дії сили  $\bar{F}$  на деяку відстань  $\delta$ . За величиною  $N = G$ . Друга складова повної реакції опори  $\bar{R}_A$ , яка прикладена до циліндра у точці  $A$  і заважає ковзанню циліндра по поверхні, є силою тертя  $\bar{F}_{mp}$ . При рівновазі циліндра ця сила за величиною рівна активній силі  $\bar{F}$  і складає з нею пару сил  $(\bar{F}_{mp}, \bar{F})$  з моментом  $RF$ , яка врівноважується парою сил  $(\bar{N}, \bar{G})$ , момент якої називається *моментом тертя кочення*  $M_{mp}^{коч} = \delta N$  (показано на рисунку 7.4 дуговою стрілкою). Плече  $\delta$  цієї пари при граничній рівновазі циліндра, тобто коли  $F = F^{cp}$ , називають *коефіцієнтом тертя кочення*. Він має розмірність довжини. З рівноваги моментів пар сил  $M(\bar{F}_{mp}, \bar{F})$  і  $M(\bar{N}, \bar{G})$  отримаємо

$$F^{cp} = \frac{\delta}{R} N = \lambda N ,$$

де  $\lambda$  – зведений коефіцієнт тертя кочення (величина безрозмірна). Отож, тіло кочення буде знаходитися в рівновазі, коли виконується нерівність

$$M_{mp}^{коч} \leq \delta N ,$$

або 
$$F \leq F^{cp} = \frac{\delta}{R} N = \lambda N . \quad (7.7)$$

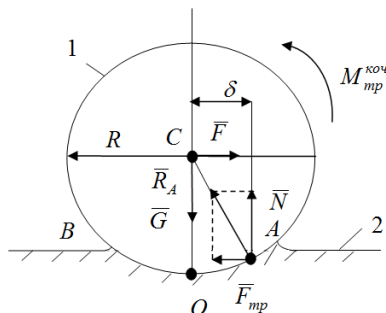


Рисунок 7.4

У випадку, коли горизонтальна активна сила

$$F > F^{sp} = \frac{\delta}{R} N = \lambda N, \quad (7.8)$$

тіло почне котитись.

Коефіцієнти тертя кочення  $(\delta, \lambda)$  визначають дослідно. Їх величини наведені в довідниках. Значення коефіцієнта  $\delta$  для деяких матеріалів такі: дерево по дереву –  $\delta = (0,05-0,08)$  см; сталь по сталі (колесо по рейці) –  $\delta = 0,005$  см.

Дослідженнями встановлено незалежність коефіцієнта тертя кочення  $\delta$  від кутової швидкості котка. Він залежить від матеріалу котка і опори, їх фізичного стану і площі контакту. Крім того, збільшення твердості контактуючих тіл призводить до зменшення довжини площадки контакту  $AB$  (на рис. 7.4), зменшення відстані  $\delta$  нормальної реакції  $\bar{N}$ , зменшення величини коефіцієнта тертя кочення  $i$ , відповідно до умови (7.8), зменшення величини горизонтальної активної сили  $\bar{F}$ , яку слід прикласти до циліндра для початку руху. Наприклад, якщо стичні тіла абсолютно тверді, то пружна деформація опори відсутня, а коефіцієнт тертя  $\delta \rightarrow 0$ . У результаті отримаємо, що для кочення абсолютно твердого циліндра по абсолютно твердій горизонтальній опорі практично ніякої активної сили не потрібно.

Тертя кочення значно менше тертя ковзання через те, що в співвідношеннях граничної рівноваги (7.1) і (7.7) для більшості матеріалів контактуючих тіл виконується умова  $\delta/R \ll f_0$ . Тому в техніці широко використовується заміна вузлів тертя-ковзання на вузли тертя-кочення (колеса, котки, роликові й кулькові підшипники та ін.).

На практиці наведена на рисунку 7.4 механічна схема взаємодії реалізується при коченні ведених і ведучих (при вимкненому двигуні) коліс транспортних засобів (трамваїв, тролейбусів, автомобілів та ін.). При цьому опір коченню колеса під дією зовнішньої сили  $\bar{F}$ , яку прикладено до центра  $C$  колеса (рис. 7.5, а), або за інерцією (коли  $\bar{F} = 0$ ), виникає завдяки пружній деформації поверхонь стискання. На рисунку 7.5, а це показано наявністю відстані між точками  $O$  і  $A$ . У результаті силові фактори опору руху складаються з прикладеної в точці  $A$  сили тертя  $\bar{F}_{mp}$ , яка протидіє ковзанню точки дотику  $A$  колеса (тому що при відсутності боксування за величиною  $\bar{F}_{mp} \leq \bar{F}_{mp}^{sp}$ ) вздовж опорної поверхні в напрямку діючої сили  $\bar{F}$ , і моменту тертя кочення

$M_{mp}^{kоч}$ , який протидіє обертаючим властивостям моменту  $M_A(\bar{F})$  сили  $\bar{F}$  відносно точки  $A$ . При цьому, оскільки реально на практиці виконується умова  $M_{mp}^{kоч} > 0$ , тобто завжди коефіцієнт тертя кочення  $\delta > 0$ , точка  $A$  на рисунку 7.5, а становиться миттєвим центром швидкостей колеса. Особливістю даного руху є те, що сила тертя в умовах відсутності проковзування при коченні колеса роботи не виконує, тобто гальмуючої дії на обертання колеса відносно миттєво нерухомої точки  $A$  не чинить, в даному випадку опір коченню колеса здійснює тільки момент  $M_{mp}^{kоч} = F^{сп} \cdot R$ .

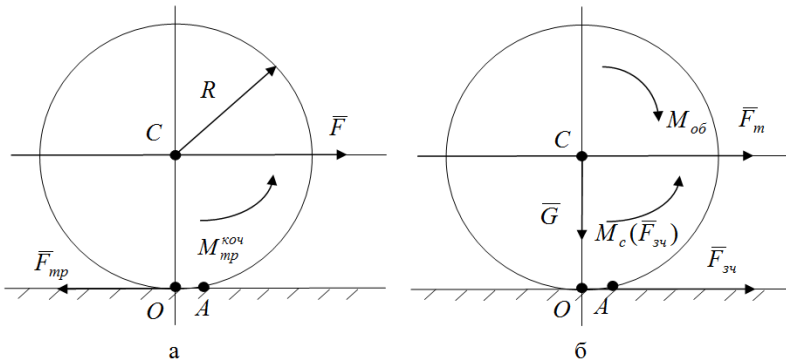


Рисунок 7.5

У ведучих коліс (рис. 7.5, б) зовнішній силовий фактор, що прикладається до колеса з боку пристрою двигуна, є обертаючим моментом  $M_{об}$ . Умова відсутності проковзування поверхонь стику тут забезпечується силою тертя, яка прикладена до колеса з боку опорної поверхні (наприклад, рейки) і спрямована у бік, протилежний напрямку можливого ковзання точки  $A$ . Цю силу називають *силою зчеплення*  $\bar{F}_{зч}$  колеса з опорною поверхнею (наприклад, рейкою). Вона обмежена граничним значенням  $F_{зч}^{сп}$ . Якщо це значення буде перевищено, то відбудеться зрив зчеплення і почнеться боксування колеса, тобто його проковзування відносно опорної поверхні (наприклад, рейки).

Виразимо силу  $\bar{F}_{зч}$  через величину обертаючого моменту  $M_{об}$  і радіус  $R$  колеса. Для цього перенесемо силу  $\bar{F}_{зч}$  паралельно самій собі в точку  $C$ , додавши одночасно до колеса момент  $M_c(\bar{F}_{зч})$ . При відсутності боксування точка  $A$  контакту колеса з опорною поверхнею,

будучи миттєвим центром швидкості, є нерухомою. Тому в кожний момент руху колеса повинна виконуватись рівність

$$M_{об} - M_c(\bar{F}_{зч}) = M_{об} - R \cdot F_{зч} = 0,$$

звідки отримаємо, що за величиною  $F_{зч} = M_{об} / R$ .

Прикладену до центра мас колеса силу  $\bar{F}_m = \bar{F}_{зч}$  називають *колісною силою тяги* транспортного засобу, вона надає центру  $C$  колеса поступального руху.

У випадку прикладання до колеса гальмуючого моменту  $M_c$  (має напрямок, обернений до моменту  $M_{об}$ ), наведені на рисунку 7.5, б сили  $\bar{F}_{зч}$  і  $\bar{F}_m$  змінюють свої напрямки на протилежні, що призводить до зменшення швидкості руху його (колеса) центра мас.

У першому наближенні на практиці приймають, що

$$F_{зч} \leq F_{зч}^{zp} = \psi \cdot G,$$

де  $F_{зч}^{zp}$  – гранична сила зчеплення;

$G$  – сила нормального тиску колеса на опорну поверхню;

$\psi$  – коефіцієнт зчеплення колеса з поверхнею.

Експериментально встановлено, що сила зчеплення залежить від розмірів і площі контакту поверхонь стикання, величини сили нормального тиску, кутової швидкості колеса, фізико-механічних властивостей матеріалу контактуючих тіл. Наприклад, для трамваїв і чистих рейок  $\psi = 0,16-0,2$ , для забруднених рейок  $\psi = 0,12-0,14$ , при листопаді коефіцієнт зчеплення зменшується до  $0,06-0,08$ .

#### 7.4 Приклади розв'язання задач рівноваги з урахуванням сил тертя

**Приклад 1.** Тертя ковзання.

Механічна схема конструкції (рис. 7.6, а) включає два вантажі вагою  $P_1 = 4$  кН і  $P_2 = 6$  кН, які з'єднані тросом і розташовані на похилій шорсткій поверхні. Визначити стан системи двох тіл при  $f_{01} = 0,4$ ,  $f_{02} = 0,8$ ,  $\alpha = 30^\circ$ , де  $f_{0i}$  – статичний коефіцієнт тертя  $i$ -го тіла.

**Розв'язання.**

Розглянемо рівновагу вантажу  $P_1$  в напрямку осі  $Ox$  (рис. 7.6, б), прийнявши  $F_{мп1} = F_{мп1}^{zp}$ :

$$P_{12} - T_1 - F_{мп1} = 0, \quad (7.9)$$

де  $P_{12} = P_1 \sin 30^\circ$ ;

$T_1$  – сила натягу троса;

$$F_{mp1} = F_{mp1}^{cp} = f_{01} \cdot P_{11} = f_{01} \cdot P_1 \cos 30^0 - \text{сила тертя.}$$

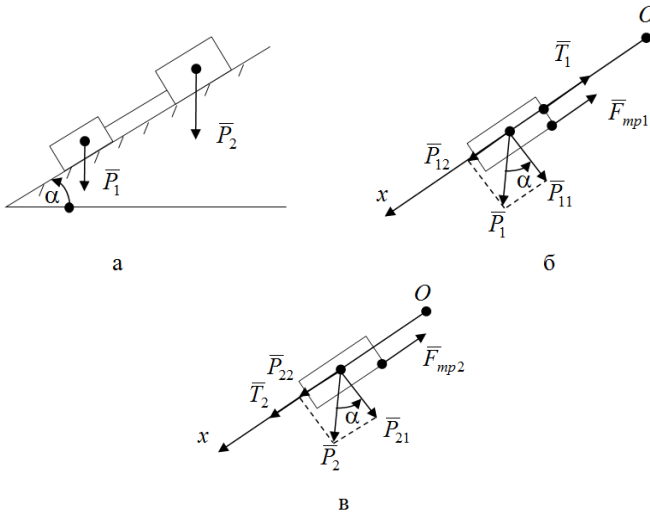


Рисунок 7.6

З рівняння (7.9) отримаємо

$$T_1 = P_{12} - F_{mp1} = P_1 \sin 30^0 - f_{01} P_1 \cos 30^0 = 4 \cdot 0,5 - 0,4 \cdot 4 \cdot 0,866 = 0,614 \text{ кН.}$$

За величиною  $T_1 > 0$ , отже при відсутності троса вантаж  $P_1$  не буде знаходитися у стані рівноваги, тому що при куті  $\alpha = 30^0$  умова рівноваги тіла ( $P_{12} = F_{mp1}$ ) не виконується.

Вантаж  $P_1$  з'єднано тросом з вантажем  $P_2$ , тому його стан спокою можна забезпечити за допомогою вантажу  $P_2$ , якщо для сили тертя  $\bar{F}_{mp2}$  останнього буде виконуватись нерівність

$$0 < F_{mp2} \leq F_{mp2}^{cp} = f_{02} P_2 \cos 30^0 = 0,8 \cdot 6 \cdot 0,866 = 4,157 \text{ кН.}$$

Величину сили тертя  $\bar{F}_{mp2}$  визначимо, якщо розв'яжемо рівняння рівноваги тіла  $P_2$  у проекціях на вісь  $Ox$  (рис. 7.6, в):

$$F_{mp2} = T_2 + P_{22}, \quad (7.10)$$

де  $T_2 = T_1$ ;  $P_{22} = P_2 \sin 30^0$ .

$$\text{З (7.10) буде: } F_{mp2} = T_1 + P_2 \sin 30^0 = 0,614 + 6 \cdot 0,5 = 3,614 \text{ (кН).}$$

Отже для заданих механічних і геометричних параметрів систем двох тіл отримано, що сила тертя  $\bar{F}_{mp2}$  вантажу  $P_2$  задовольняє умові його

рівноваги за наявності нерівної нулю сили натягу троса від вантажу  $P_1$ . Її величина є достатньою для забезпечення особистої рівноваги, а також утримання у спокої і тіла  $P_1$ , тобто рівноваги системи двох тіл в цілому.

З рівнянь (7.9), (7.10) можна визначити кут  $\alpha$ , при якому матиме стан граничної рівноваги системи вантажів:

$$T_2 + P_{22} = F_{mp2}$$

або 
$$P_1 \sin \alpha - f_{01} \cdot P_1 \cos \alpha + P_2 \sin \alpha = f_{02} \cdot P_2 \cos \alpha ,$$

або 
$$\alpha = \arctg \frac{f_{01} \cdot P_1 + f_{02} \cdot P_2}{P_1 + P_2} . \quad (7.11)$$

Формулу (7.11) використовують на практиці при побудові розглянутої на рисунку 7.6, а механічної конструкції: визначенні геометричних і механічних параметрів опорної поверхні, вантажів та ін.

**Приклад 2.** Тертя кочення.

Визначити значення кута  $\alpha$  (рис. 7.7), при якому циліндр вагою  $P$  і радіусом  $R = 5$  см знаходиться на похилій шорсткій площині у граничній рівновазі при коченні, якщо  $f_0 = 0,1$ ; а  $\delta = 0,05$  см.

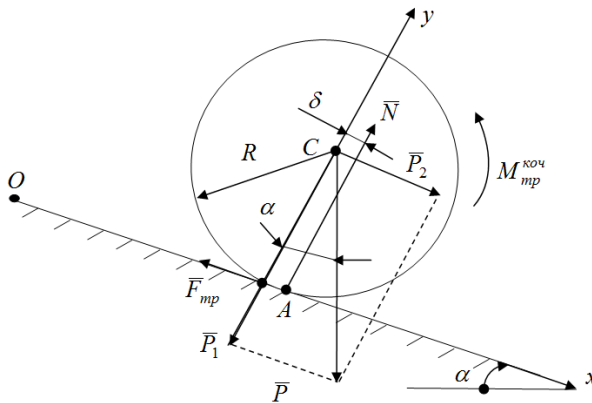


Рисунок 7.7

**Розв'язання.**

Складемо рівняння рівноваги циліндра:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = P_2 - F_{mp} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = N - P_1 = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = -R \cdot P_2 + M_{mp}^{коч} = 0, \end{cases} \quad (7.12)$$

де  $P_1 = P \cos \alpha$ ;  $P_2 = P \sin \alpha$ ;  $\bar{N}$  – нормальна складова реакції площини;

$M_{mp}^{коч}$  – момент тертя кочення циліндра. При рівновазі циліндра буде виконуватись  $M_{mp}^{коч} \leq M_{mp}^{зр} = \delta \cdot N$ .

З другого рівняння системи (7.12) отримаємо  $N = P_1 = P \cos \alpha$ . Тоді третє рівняння в умовах граничної рівноваги набуде вигляду

$$-R \cdot P \sin \alpha + \delta \cdot P \cos \alpha = 0,$$

звідкіля 
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta}{R} = \frac{0,05}{5} = 0,01,$$

отже,  $\alpha = \operatorname{arctg} 0,01 = 0^{\circ} 35'$ .

З першого рівняння маємо  $F_{mp} = P_2 = P \sin \alpha$ . Для зображеної на рисунку 7.7 механічної схеми максимальна величина сили тертя спокою

$$(F_{mp}^{cn})_{\max} = f_0 \cdot N = f_0 \cdot P \cos \alpha = (f_0 / \operatorname{tg} \alpha) \cdot P \sin \alpha = 10 P \sin \alpha.$$

Отже, враховуючи, що сила тертя в умові граничної рівноваги циліндра при коченні (коли  $\alpha = 0^{\circ} 35'$ ) задовольняє нерівності  $F_{mp} < (F_{mp}^{cn})_{\max}$ , по площині циліндр ковзати не буде.



## 8 РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ ФЕРМИ

### 8.1 Основні визначення і припущення

*Фермою* називається геометрично незмінна конструкція, що складається з прямолінійних стержнів, які з'єднуються між собою за допомогою шарнірів.

Ферми являють собою досить розповсюджені складові частини промислових і цивільних споруд. Їх використовують як опори трубопроводів і ліній електропередач (рис. 8.1), радіовежі (рис. 8.2), конструкції кранів, елементи великих прольотів будівельних та спортивних споруд, елементи мостів (рис. 8.3, 8.4, 8.5) та ін.

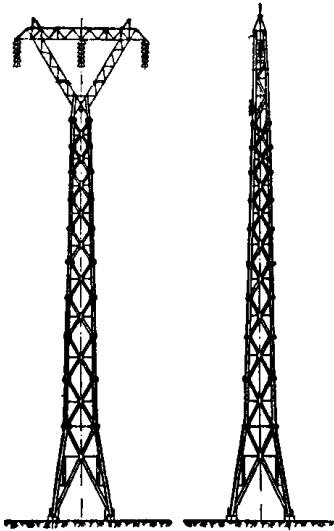


Рисунок 8.1 – Опори ЛЕП

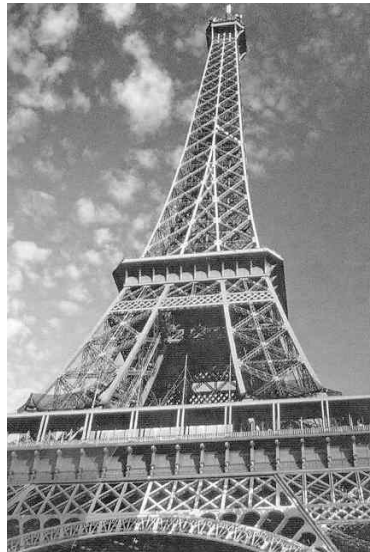


Рисунок 8.2 – Ейфелева вежа  
(Париж, Франція)

Якщо всі стержні ферми розташовані в одній площині, ферму називають *плоскою*. З'єднання стержнів ферми між собою називається *вузлами*.

Основним завданням розрахунку ферми є визначення зусиль, що виникають у стержнях при дії зовнішнього навантаження. При цьому розрахунки виконують при наступних припущеннях:

- усі зовнішні навантаження прикладені тільки у вузлах;
- вагою стержнів і тертям у вузлах, які є ідеальними шарнірами, нехтують.

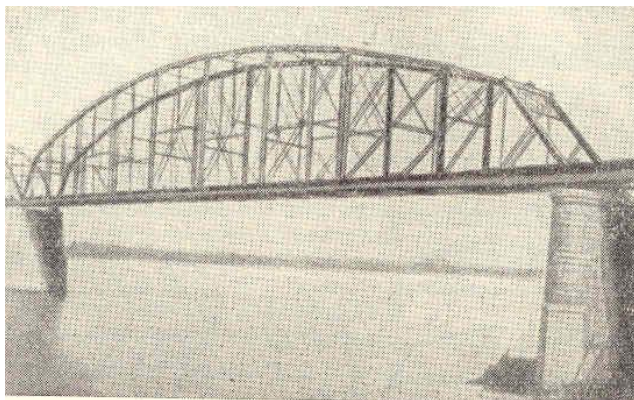


Рисунок 8.3 – Мостова ферма

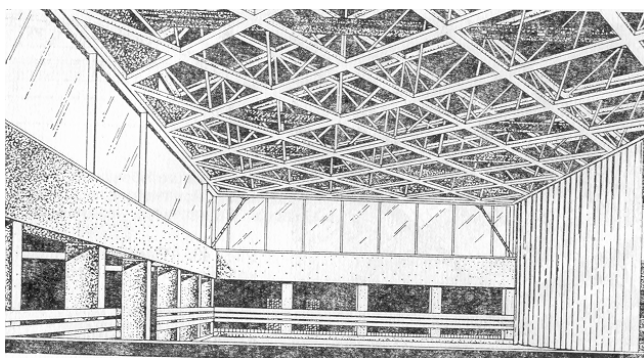


Рисунок 8.4 – Елемент даху спортивного залу в Парижі (Франція)



Рисунок 8.5 – Залізничний міст в Единбурзі (Шотландія)

Тоді на підставі першої аксіоми статки можна вважати, що стержні ферми працюють тільки на розтяг або стиск. Наведені припущення вносять певну похибку в розрахунки у порівнянні з дійсним напруженим станом стержнів, але ця похибка невелика і отримані результати можна використовувати для технічних розрахунків елементів ферми на міцність.

Найпростішим прикладом ферми є система трьох стержнів, з'єднаних між собою шарнірами (рис. 8.6).

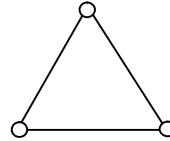


Рисунок 8.6

Простою плоскою фермою називається ферма, яка може бути побудована з трикутної шляхом послідовного приєднання кожного нового вузла за допомогою двох нових стержнів (рис. 8.7).

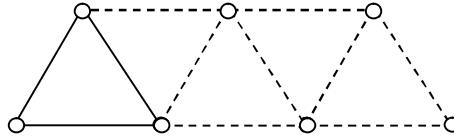


Рисунок 8.7

Розглянемо зв'язок між кількістю вузлів  $n$  і кількістю стержнів  $k$  у простих фермах. Основний трикутник (рис. 8.6) має три вузли і три стержні. Для незмінного з'єднання з основним трикутником кожного з решти  $n-3$  вузлів потрібно приєднати два стержні. Отже, загальна кількість стержнів у простій ферми з урахуванням трьох стержнів основного трикутника визначається так:

$$k = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3. \quad (8.1)$$

Покажемо, що проста ферма статично означена, якщо число опорних реакцій дорівнює трьом. Дійсно, для кожного вузла можна скласти два рівняння рівноваги, оскільки на нього діє збіжна система сил. Таким чином, усього можна скласти  $2n$  рівнянь рівноваги. У ці рівняння будуть входити  $k$  невідомих зусиль у стержнях і три реакції опор. З урахуванням формули (8.1) загальне число невідомих буде:

$$k + 3 = 2n - 3 + 3 = 2n,$$

тобто дорівнюватиме числу рівнянь рівноваги. Таким чином, задачу розрахунку простих ферм можна розв'язати методами теоретичної механіки.

Зазначимо, що якщо число стержнів  $k$  менше, ніж підраховане за формулою (8.1), то така конструкція буде механізмом, тобто матиме

можливість рухатися. Якщо число стержнів більше, ніж підраховане за формулою (8.1), або число опорних реакцій більше трьох, ферма буде статично неозначена і для її розрахунку треба застосувати методи будівельної механіки.

## 8.2 Порядок і приклад розрахунку простої ферми

1) Спочатку складають три рівняння рівноваги для визначення реакцій опор ферми, розглядаючи останню в цілому як тверде тіло. Після визначення реакцій бажано скласти перевіряюче рівняння.

Формально умови рівноваги вузлів ферми включають у себе умови рівноваги ферми в цілому, тобто дають змогу знайти і реакції опор. Але попереднє визначення опорних реакцій суттєво спрощує розв'язання задачі.

2) Далі визначають зусилля у стержнях ферми.

Звичайно використовують два способи: вирізання вузлів і Ріттера.

*а) Спосіб вирізання вузлів.* Цим способом зручно користуватись, коли треба знайти зусилля в усіх стержнях ферми. Він зводиться до послідовного розгляду умов рівноваги збіжних систем сил, прикладених до кожного з вузлів. При цьому кількість невідомих зусиль у вузлі не повинна перевищувати двох.

Для визначеності припускають, що всі зусилля направлені від вузла, тобто стержні розтягнуті. Якщо в результаті розрахунків значення зусилля буде від'ємним, то це означатиме, що стержень стиснутий. Три останні рівняння (у передостанньому і останньому вузлах) розглядають для перевірки.

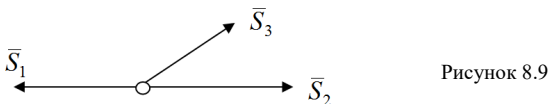
Зусилля в окремих стержнях можуть виявитись нульовими, тобто стержні будуть ненавантаженими. Такі стержні можна визначити за допомогою кількох лем.

*Лема 1.* Якщо в ненавантаженому вузлі ферми збігаються два стержні (рис. 8.8), то зусилля в цих стержнях дорівнюватимуть нулю:



Рисунок 8.8

*Лема 2.* Якщо в ненавантаженому вузлі ферми збігаються три стержні (рис. 8.9), з яких два розташовані на одній прямій, то зусилля у третьому стержні дорівнює нулю:  $S_3 = 0$ .



*Лема 3.* Якщо до вузла, в якому збігаються два стержні, прикладена зовнішня сила  $\bar{P}$  у напрямку одного з стержнів (рис. 8.10), то зусилля у другому стержні дорівнює нулю:  $S_2 = 0$ .

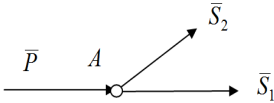


Рисунок 8.10

*б) Спосіб Ріттера.* Цим способом зручно користуватись, коли треба знайти зусилля в окремих стержнях ферми, зокрема, для перевірочних розрахунків. Згідно з цим способом ферму розподіляють на дві частини перерізом, який проходить не більше, ніж через три стержні, і розглядають рівновагу однієї з частин. Зусилля в перерізаних стержнях направляють від перерізу, тобто припускають (як і в спосіб вирізання вузлів), що всі стержні розтягнуті. Далі складають рівняння рівноваги так, щоб у кожне рівняння увійшло тільки одне зусилля стержня, через який пройшов переріз. Для цього складають рівняння моментів відносно точки площини (цю точку називають *точкою Ріттера*), через яку проходять лінії дій зусиль двох інших стержнів, які потрапили в переріз. Якщо два інших стержні перерізу виявляються паралельними, то складають рівняння проекцій сил на вісь, яка перпендикулярна до цих паралельних стержнів. Таким чином, спосіб Ріттера дає змогу визначити зусилля в будь-якому стержні ферми незалежно від зусиль в інших стержнях. В курсі будівельної механіки ці способи складання рівнянь рівноваги називають відповідно *способом моментної точки* і *способом проекцій*.

Аналізуючи вищезазначені способи визначення зусиль у стержнях, зазначимо, що зусилля способом вирізання вузлів визначають послідовно, переходячи від одного вузла до сусіднього. Це може призвести до накопичення похибок, тому бажано значення знайдених зусиль при розгляді наступних вузлів брати якомога точнішими. Крім того, помилка у визначенні одного зусилля призведе до неправильних розрахунків усіх інших стержнів, що залишилися.

Спосіб Ріттера на відміну від попереднього не призводить до накопичення похибок, бо всі зусилля визначаються незалежно одне від одного. Але одночасно це не дає можливості помітити грубі помилки, що можуть трапитись при обчисленні. У деяких фермах також не всі зусилля можуть бути визначені способом Ріттера незалежно одне від одного.

Таким чином, найкраща методика визначення зусиль у стержнях ферми полягає в поєднанні способів вирізання вузлів і Ріттера. При

цьому звичайно всі зусилля визначаються за способом вирізання вузлів і деякі з них перевіряють способом Ріттера.

**Приклад 1.** Визначити зусилля у стержнях ферми (рис. 8.11), на яку діє задана сила  $P = 10$  кН. Зусилля у стержнях 2, 3, 4 перевірити способом Ріттера.

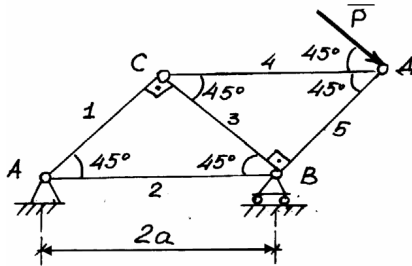


Рисунок 8.11

**Розв'язання:**

1) Розглянемо рівновагу ферми (рис. 8.12) і визначимо реакції опор  $A$  і  $B$ :

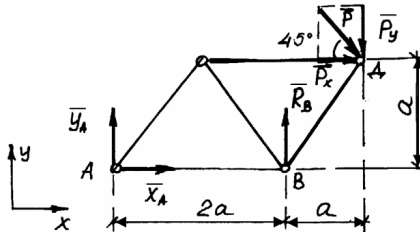


Рисунок 8.12

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + P \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$X_A = -P \cdot \cos 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad R_B \cdot 2a - P_y \cdot 3a - P_x \cdot a = 0,$$

де  $P_x, P_y$  – модулі складових сили  $\bar{P}$ :

$$P_x = P \cdot \cos 45^\circ, \quad P_y = P \cdot \sin 45^\circ,$$

$$R_B = \frac{P_y \cdot 3 + P_x \cdot 1}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 3 + 5\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + R_B - P \sin 45^\circ = 0;$$

$$Y_A = P \sin 45^\circ - R_B = 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}.$$

**Перевірка:**  $\sum_{i=1}^n M_D(F_i) = -Y_A \cdot 3a + X_A \cdot a - R_B \cdot a =$

$$= -(-5\sqrt{2}) \cdot 3a + (-5\sqrt{2}) \cdot a - 10\sqrt{2} \cdot a = a(15\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2}) = a \cdot 0 = 0.$$

2а) Визначимо зусилля у стержнях ферми способом вирізання вузлів:

а) розглянемо рівновагу вузла  $A$  (рис. 8.13):

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad S_1 \sin 45^\circ + Y_A = 0;$$

$$S_1 = -\frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = -\frac{(-5\sqrt{2})}{\sqrt{2}/2} = 10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S_1 \cdot \cos 45^\circ + X_A + S_2 = 0;$$

$$S_2 = -X_A - S_1 \cdot \cos 45^\circ = -(-5\sqrt{2}) - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0;$$

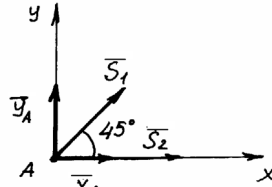


Рисунок 8.13

б) розглянемо рівновагу вузла  $C$  (рис. 8.14):

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0;$$

$$-S'_1 \sin 45^\circ - S_3 \sin 45^\circ = 0; \quad S_3 = -S'_1 = -10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S_1 \cdot \cos 45^\circ + S'_3 \cos 45^\circ + S_4 = 0;$$

$$S_4 = S_1 \cdot \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)};$$

(за модулем  $S'_1 = S_1 = 10$  кН);

в) розглянемо рівновагу вузла  $B$  (рис. 8.15):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0;$$

$$-S'_2 - S'_3 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0;$$

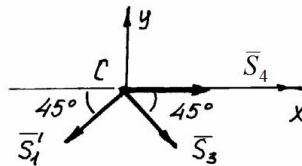


Рисунок 8.14

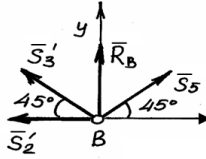


Рисунок 8.15

$$S_5 = \frac{S'_2 + S'_3 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{0 - 10 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -10 \text{ (кН)};$$

друге рівняння можна використати для перевірки:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{iy} &= S'_3 \cdot \sin 45^\circ + R_B + S_5 \sin 45^\circ = \\ &= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0; \end{aligned}$$

( $S'_2 = S_2$ ;  $S'_3 = S_3$ );

г) також для перевірки розглянемо останній вузол Д (рис. 8.16):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0; \quad -S'_4 - S'_5 \cos 45^\circ + P \cos 45^\circ = \\ &= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0; \end{aligned}$$

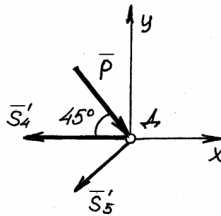


Рисунок 8.16

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{iy} &= -P \cdot \sin 45^\circ - S'_5 \sin 45^\circ = \\ &= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0; \end{aligned}$$

( $S'_4 = S_4$ ;  $S'_5 = S_5$ );



26) Визначимо зусилля у стержнях 2, 3, 4 ферми способом Ріттера. Для цього проведемо переріз через ці стержні і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини ферми (рис. 8.17):

$$\sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot a + X_A \cdot a + S_2 \cdot a = 0;$$

$$S_2 = Y_A - X_A = -5\sqrt{2} - (-5\sqrt{2}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - S_3 \sin 45^\circ = 0; \quad S_3 = \frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = \frac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = -10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot 2a - S_4 \cdot a = 0;$$

$$S_4 - 2Y_A = -2(-5\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)}.$$

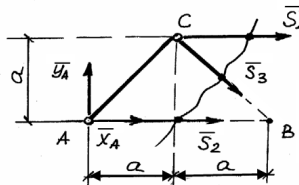


Рисунок 8.17

**Відповідь:**

1)  $X_A \approx -7$  кН;  $Y_A \approx -7$  кН;  $R_B = 14$  кН; знаки «-» означають, що справжнє направлення складових  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$  протилежне показаним на рисунках;

2)  $S_1 = 10$  кН;  $S_2 = 0$ ;  $S_3 = -10$  кН;  $S_4 \approx 14$  кН;  $S_5 = -10$  кН; стержні 1, 4 – розтягнуті; 3, 5 – стиснуті; 2 – ненавантажений.

## 9 ЦЕНТР ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ І ЦЕНТР ВАГИ

### 9.1 Центр паралельних сил

Розглянемо дві паралельні сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , направлені в один бік (рис. 9.1). Згідно з п. 4.4.1 така система сил зводиться до рівнодійної  $\vec{R}$ . При цьому виконуються співвідношення:

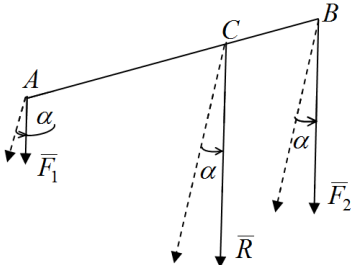


Рисунок 9.1

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{CB}{CA}. \quad (9.1)$$

Якщо сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  повернути на однаковий кут  $\alpha$  навколо точок їх прикладання  $A$  і  $B$ , то рівнодійна  $\vec{R}$  повернеться на той самий кут навколо точки  $C$ , оскільки співвідношення (9.1) не зміниться. Такі ж міркування можна привести і для двох паралельних сил, направлених у різні боки.

Точка  $C$ , через яку проходить лінія дії рівнодійної системи паралельних сил при будь-яких поворотах цих сил навколо точок їх прикладання на однаковий кут, називається *центром паралельних сил*.

У яких випадках існує така точка  $C$  і як знайти їх координати? На це запитання дає відповідь теорема про *центр паралельних сил*.

**Теорема.** Якщо головний вектор системи паралельних сил не дорівнює нулю, то центр паралельних сил (точка  $C$ ) існує і його положення визначається за формулою

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k^* \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad (9.2)$$

де  $\vec{r}_k$  – радіуси-вектори точок прикладання сил;

$\vec{r}_c$  – радіус-вектор центра паралельних сил;

$F_k^*$  – модулі паралельних сил, які відрізняються знаком для сил, направлених у різні боки.

**Доведення.** Розглянемо систему  $n$  паралельних сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ . Якщо її головний вектор не дорівнює нулю, то, як показано у п. 5.4.4.3, така система паралельних сил зводиться до рівнодійної  $\vec{R}$ . Нехай

точка  $O_1$  – це якась точка лінії дії цієї рівнодійної (рис. 9.2),  $\bar{r}, \bar{r}_k$  – відповідно радіуси-вектори точки  $O_1$  і точок прикладання сил  $\bar{R}$  і  $\bar{F}_k$  відносно вибраного центра  $O$ .

Згідно з теоремою Варіньона про момент рівнодійної (п. 5.6), отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{M}_O(\bar{R}) &= \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) \\ \text{або } \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) - \bar{M}_O(\bar{R}) &= 0 \\ \text{або } \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k - \bar{r}) \times \bar{F}_k &= 0. \quad (9.3) \end{aligned}$$

Рівність (9.3) запишемо у наступній формі

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k - \sum_{k=1}^n \bar{r} \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k - \bar{r} \times \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0. \quad (9.4)$$

Введемо у розгляд одиничний вектор  $\bar{e}$ , паралельний лінійям дії сил  $\bar{F}_k$ . Тоді кожна із заданої системи сил може бути виражена через вектор  $\bar{e}$ :

$$\bar{F}_k = F_k^* \bar{e}, \quad (9.5)$$

де  $F_k^* = F_k$ , якщо напрями векторів  $\bar{F}_k$  і  $\bar{e}$  збігаються, і  $F_k^* = -F_k$ , якщо ці напрями протилежні. При цьому очевидно, що

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k = \bar{e} \sum_{k=1}^n F_k^*. \quad (9.6)$$

Підставляючи (9.5) і (9.6) у рівняння (9.4), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times F_k^* \bar{e} - \bar{r} \times \bar{e} \sum_{k=1}^n F_k^* = 0,$$

$$\text{або } \left[ \sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k^* - \bar{r} \sum_{k=1}^n F_k^* \right] \times \bar{e} = 0.$$

Остання рівність виконується при будь-якому напрямі сил (напрями вектора  $\bar{e}$ ) тільки за умовою, що перший множник дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k^* - \bar{r} \sum_{k=1}^n F_k^* = 0. \quad (9.7)$$

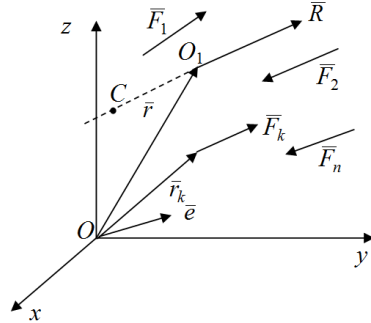


Рисунок 9.2

Ця рівність має єдиний розв'язок відносно радіуса-вектора  $\bar{r}$ , який визначає точку прикладання рівнодійної. Такою точкою і є центр паралельних сил, чим доводиться його існування. Позначимо радіус-вектор центра паралельних сил як  $\bar{r}_c$ . Тоді з рівняння (9.7) отримаємо вираз:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}.$$

Теорему доведено.

Формулу (9.2) можна подати у скалярній формі:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad (9.9)$$

де  $x_c, y_c, z_c, x_k, y_k, z_k$  – відповідно декартові координати центра  $S$  паралельних сил і точок прикладання сил  $\bar{F}_k$ .

Вирази  $\sum_{k=1}^n x_k F_k^*$ ,  $\sum_{k=1}^n y_k F_k^*$ ,  $\sum_{k=1}^n z_k F_k^*$  у формулах (9.9) називаються відповідно *статичними моментами* заданої системи сил відносно координатних площин  $yOz$ ,  $xOz$ ,  $xOy$ . Зазначимо, що коли початок координат сумістити з центром паралельних сил, то

$$x_c = y_c = z_c = 0$$

і статичні моменти заданої системи сил дорівнюватимуть нулю.

## 9.2 Центр ваги твердого тіла

Розглянемо тверде тіло, яке знаходиться в полі сил тяжіння. Якщо розмірами тіла можна знехтувати порівняно з розмірами Землі, то можна вважати, що на частки цього тіла діють сили ваги  $\bar{P}_k$ , які складають систему паралельних сил (рис. 9.3).

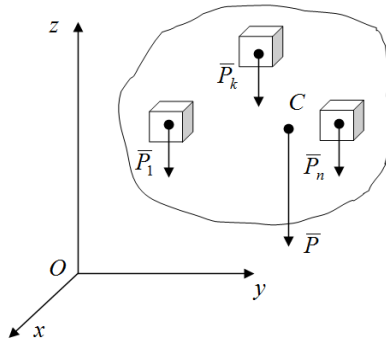


Рисунок 9.3

**Центром ваги** твердого тіла називається центр паралельних сил ваги.

Для центра ваги тіла формули (9.9) набудуть вигляду:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k P_k}{P}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k P_k}{P}, \quad (9.10)$$

де  $P = \sum_{k=1}^n P_k$  – сила ваги (тіла);

$x_k, y_k, z_k$  – координати точки прикладання сили ваги  $\bar{P}_k$  окремої частини тіла.

### 9.2.1 Центр ваги однорідного твердого тіла

Якщо тіло однорідне, то вага кожної частки тіла пропорційна його об'єму:

$$P_k = \gamma_1 V_k, \quad (9.11)$$

де  $V_k$  – об'єм елементарної частки тіла;

$\gamma_1$  – вага одиниці об'єму тіла.

Підставивши (9.11) у (9.10), отримаємо:  
аналогічно

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_1 V_k}{\gamma_1 V} = \frac{\gamma_1 \sum_{k=1}^n x_k V_k}{\gamma_1 V} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k V_k}{V}, \\ y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k V_k}{V}, \\ z_c &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k V_k}{V}, \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

де  $V = \sum_{k=1}^n V_k$  – об’єм тіла.

Із формул (9.12) видно, що положення центра ваги однорідного тіла залежить тільки від геометричної форми і розмірів тіла. Тому точку  $C$ , яка визначається за формулами (9.12), називають *центром ваги об’єму тіла*.

### 9.2.2 Центр ваги однорідної пластини

*Пластиною* називають плоске тіло, один розмір якого (товщина) набагато менше двох інших (довжини і ширини):

$$P_k = \gamma_2 S_k, \quad (9.13)$$

де  $S_k$  – площа елементарної частки пластини;

$\gamma_2$  – вага одиниці площі.

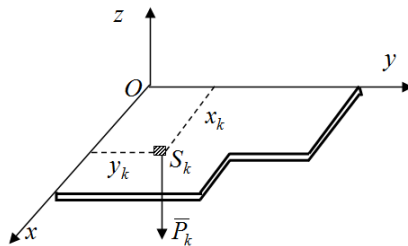


Рисунок 9.4

Підставивши (9.13) у (9.10) і вважаючи, що координатна площина  $xOy$  збігається з площиною пластини, отримаємо:  
аналогічно

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_2 S_k}{\gamma_2 S} = \frac{\gamma_2 \sum_{k=1}^n x_k S_k}{\gamma_2 S} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S}, \\ y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S}, \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

де  $S = \sum_{k=1}^n S_k$  – площа пластини.

Точку  $C$ , координати якої визначаються за формулами (9.14), називають *центром ваги площі*.

Вирази у чисельниках формулах (9.14) називають відповідно *статичними моментами площі*  $S_y$  і  $S_x$  відносно осей  $x$  і  $y$ :

$$S_y = \sum_{k=1}^n x_k S_k = x_c \cdot S, \quad S_x = \sum_{k=1}^n y_k S_k = y_c \cdot S. \quad (9.15)$$

Ці поняття використовують в курсі опору матеріалів.

### 9.2.3 Центр ваги однорідного стержня

Стержнем називають тіло, один розмір якого (довжина) набагато більше двох інших. У цьому випадку вага елементарної частки тіла пропорційна її довжині (рис. 9.5):

$$P_k = \gamma_3 l_k, \quad (9.16)$$

де  $l_k$  – довжина елементарної частки стержня;

$\gamma_3$  – вага одиниці довжини.

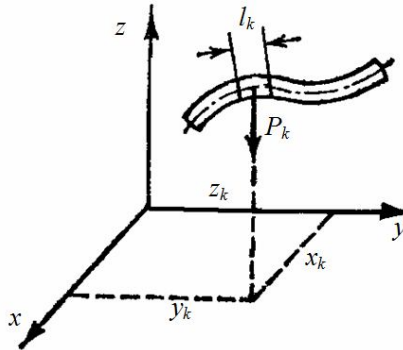


Рисунок 9.5

Підставивши (9.16) у (9.10), отримаємо:

аналогічно

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_3 l_k}{\gamma_3 L} = \frac{\gamma_3 \sum_{k=1}^n x_k l_k}{\gamma_3 L} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k l_k}{L}, \\ y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k l_k}{L}, \\ z_c &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k l_k}{L}, \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

де  $L = \sum_{k=1}^n l_k$  – довжина стержня.

Точку  $C$ , координати якої визначаються за формулами (9.17), називають *центром ваги лінії*.

### 9.3 Способи визначення координат центра ваги

1. *Спосіб симетрії*. Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги знаходиться відповідно в площині, на осі або в центрі симетрії.

Доведемо це твердження для тіла, що має площину симетрії (рис. 9.6). Розташуємо координатну площину  $xOy$  у площині симетрії (на рис. 9.6 ця площина заштрихована). Візьмемо в тілі дві точки  $M_k$  і  $M'_k$ , які розташовані симетрично відносно площини  $xOy$ . У цих точок збігаються координати  $x_k, y_k$ , а координати  $z_k$  розрізняються тільки знаком. Виділимо навколо точок  $M_k, M'_k$  рівні елементарні об'єми  $V_k$ . Підсумуємо додатки:

$$z_k V_k + z'_k V_k = z_k V_k - z'_k V_k = 0.$$

Розглянувши всі елементарні об'єми, отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n z_k V_k = 0$$

і обчислимо координату  $z_c$  центра ваги тіла за формулою (9.12):

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k V_k}{V} = 0.$$



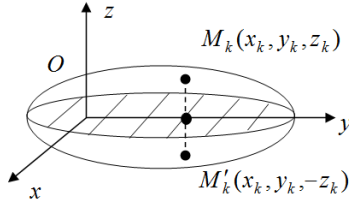


Рисунок 9.6

Це означає, що центр ваги розглядуваного тіла знаходиться у площині симетрії.

Аналогічно можна довести твердження для тіла, що має вісь або центр симетрії.

**Приклади.** Розглянемо декілька прикладів.

**а) прямолінійний стержень**

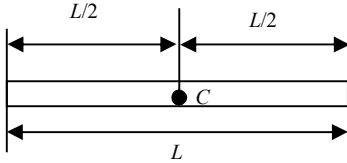


Рисунок 9.7

Центр симетрії такого стержня є точка у середині стержня. Отже, центр ваги прямолінійного стержня – точка  $C$  – знаходиться у середині стержня (рис. 9.7).

**б) прямокутник**

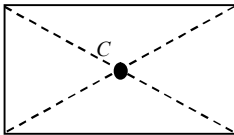


Рисунок 9.8

Центром симетрії прямокутника є точка перетину його діагоналей. Тоді центр ваги прямокутника – точка  $C$  – також знаходиться у точці перетину діагоналей (рис. 9.8). Як відомо, діагоналі в точці перетину діляться навпіл.

**в) коло**

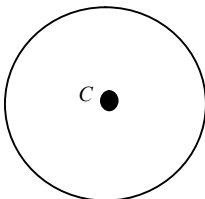


Рисунок 9.9

Центром симетрії, а значить і центром ваги кола є його центр (рис. 9.9).

## 2. Спосіб розбиття.

Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких часток, для яких положення центрів ваги відомі, то координати центра ваги тіла можна обчислити за формулами (9.10), (9.12), (9.14) або (9.17).

**Приклад 1.** Визначити координати центра ваги площі (рис. 9.10).

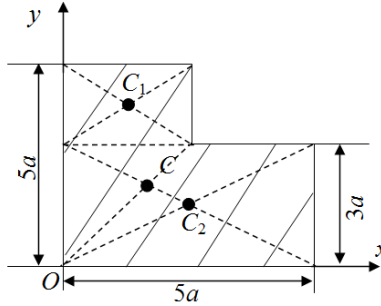


Рисунок 9.10

**Розв'язання.** Розіб'ємо площу на два прямокутники, центри ваги яких  $C_1$  і  $C_2$  знаходяться в точках перетину діагоналей. Виберемо систему координат  $Oxy$ . Дані про координати центрів ваги прямокутників і їх площі запишемо в табл. 9.1.

Таблиця 9.1

$k$	$x_k$	$y_k$	$S_k$
1	$1,5a$	$4a$	$6a^2$
2	$2,5a$	$1,5a$	$15a^2$

Координати центра ваги площі знайдемо за формулами (9.14):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{1,5a \cdot 6a^2 + 2,5a \cdot 15a^2}{6a^2 + 15a^2} = \frac{9a^3 + 37,5a^3}{21a^2} =$$

$$= \frac{46,5}{21} a \approx 2,2a,$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{4a \cdot 6a^2 + 1,5a \cdot 15a^2}{6a^2 + 15a^2} = \frac{24a^3 + 22,5a^3}{21a^2} =$$

$$= \frac{46,5}{21} a \approx 2,2a.$$

Значення координат точки  $C(2,2a; 2,2a)$  свідчать, що вона лежить на бісектрисі кута, проведеної з центра координат, яка є лінією симетрії площі.

3. **Спосіб доповнення (або від'ємних площин).** Якщо тіло має порожнину (виріз), то цю порожнину (виріз) можна розглядати як тіло з від'ємною вагою (площею) і для розрахунків використовувати спосіб розбиття.

**Приклад 2.** Розглянемо задачу прикладу 1.

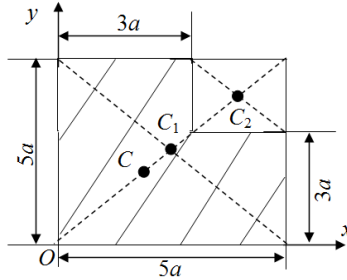


Рисунок 9.11

**Розв'язання.** Уявимо площу як квадрат (1) зі сторонами  $5a \times 5a$ , з якого вирізали квадрат (2) зі сторонами  $2a \times 2a$  (рис. 9.11). Площу останнього квадрата будемо вважати від'ємною. Дані про координати центрів ваги квадратів і їх площі запишемо в табл. 9.2.

Таблиця 9.2

$k$	$x_k$	$y_k$	$S_k$
1	$2,5a$	$2,5a$	$25a^2$
2	$4a$	$4a$	$-4a^2$

Координати центра ваги площі знайдемо за формулами (9.14):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2,5a \cdot 25a^2 + 4a \cdot (-4a^2)}{25a^2 + (-4a^2)} = \frac{62a^3 - 16a^3}{25a^2 - 4a^2} =$$

$$= \frac{46,5}{21} a \approx 2,2a;$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2,5a \cdot 25a^2 + 4a \cdot (-4a^2)}{25a^2 + (-4a^2)} = \frac{62,5a^3 - 16a^3}{25a^2 - 4a^2} =$$

$$= \frac{46,5}{21} a \approx 2,2a.$$

4. **Спосіб інтегрування.** Якщо тіло неможливо розбити на скінченне число часток, у формулах (9.10), (9.12), (9.14), (9.17) переходять до інтегралів.

Наприклад, формули (9.14) матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\int x dS}{S} \\ y_c &= \frac{\int y dS}{S} \end{aligned} \right\}, \quad (9.18)$$

де інтеграли поширюються на площу  $S$ .

### 9.4 Центри ваги простіших фігур

Розглянемо декілька простих фігур, з яких можуть складатись більш складні фігури.

#### а) трикутник

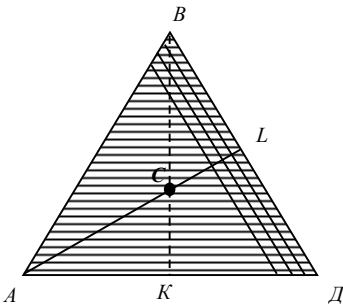


Рисунок 9.12

Скористаємось способом розбиття і розділимо трикутник  $ABD$  на елементарні смужки, провівши лінії, паралельні стороні  $AD$  (рис. 9.12). Кожну таку смужку можна прийняти за прямокутник, центр симетрії якого лежить у середині, тобто на медіані  $BK$  трикутника. Розглядаючи смужки, паралельні стороні  $BD$ , приходимо до висновку, що центр ваги трикутника має лежати на медіані  $AL$ . Отже, центр ваги трикутника знаходиться

у точці перетину його медіан. Ця точка, як відомо, ділить кожную із медіан у відношенні 1:2, тобто  $CK : CB = 1 : 2$ ,  $CL : CA = 1 : 2$ .

#### б) дуга кола

Розглянемо дугу  $AB$  кола радіусом  $R$  з центральним кутом  $2\alpha$  (рис. 9.13). Направимо вісь  $Ox$  по осі симетрії дуги, яка є бісектрисою кута  $2\alpha$ . Центр ваги дуги кола лежить на осі симетрії, тобто  $y_c = 0$ , і залишається знайти  $x_c$ . Для цього скористаємось формулою

$$x_c = \frac{\int x dl}{L}, \quad (9.19)$$

яка вийде, якщо у формулі (9.17) перейти до інтеграла. Для елементарної частки довжини  $dl$ , як виходить з рисунку 9.13,  $x = R \cos \varphi$ ,  $dl = R d\varphi$ ,  $L = R \cdot 2\alpha$ . Тоді

$$x_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi R d\varphi}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 \sin \alpha \Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 2 \sin \alpha}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (9.20)$$

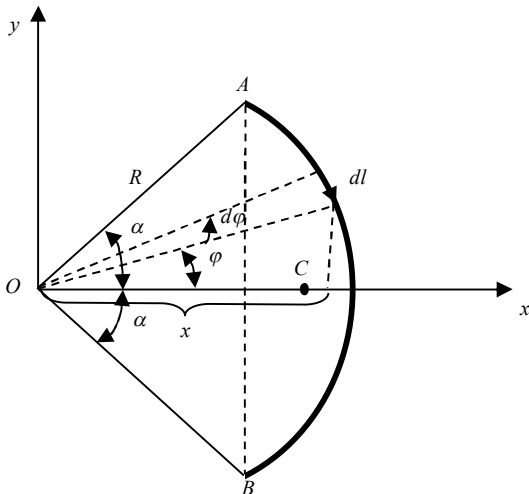


Рисунок 9.13

**в) коловий сектор**

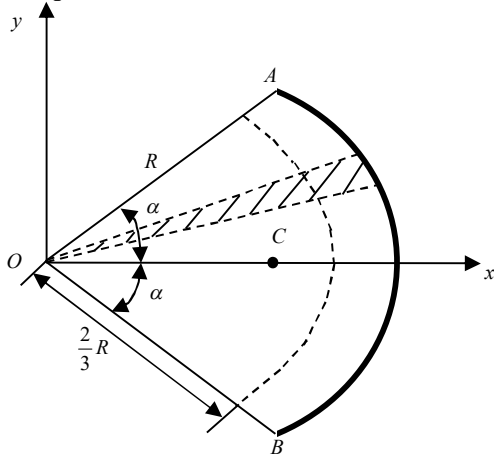


Рисунок 9.14

Розглянемо коловий сектор з центральним кутом  $2\alpha$  і радіусом  $R$  (рис. 9.14). Направимо вісь  $Ox$  по осі симетрії сектора, яка є бісектрисою кута  $2\alpha$ . Центр ваги сектора лежить на осі симетрії, тобто  $y_c = 0$ . Розіб'ємо коловий сектор на елементарні сектори (заштрихований на рис. 9.14), кожен з котрих можна прийняти за рівнобедрений трикутник. Отже, центр ваги кожного елементарного трикутника лежить на відстані  $\frac{2}{3}R$  від початку координат. Геометричним місцем центрів ваги всіх елементарних трикутників буде дуга кола радіусом  $\frac{2}{3}R$ . У цьому випадку можна скористатись формулою для центра ваги дуги кола (9.20):

$$x_c = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (9.21)$$

*Зуваження.* У формулах (9.20), (9.21) кут  $\alpha$  треба брати в радіанах.

### 9.5 Стійкість твердого тіла при його перекиданні

Визначення положення центра ваги тіла є необхідним при розв'язанні задач на стійкість тіла при його перекиданні. Розглянемо, наприклад, тверде тіло, яке має нерухому точку  $O$  і знаходиться під дією довільної плоскої системи активних сил  $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$  (рис. 9.15) у стані спокою. Візьмемо точку  $O$  за початок системи координат  $Ox$ . При зведенні системи активних сил до центра  $O$  отримаємо, що при цьому головний вектор активних сил зрівноважиться реакцією нерухомої точки, а головний момент активних сил має дорівнювати нулю:

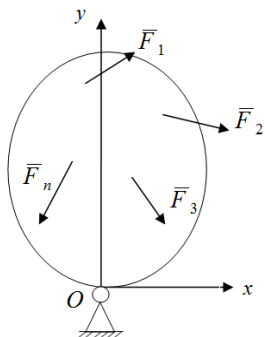


Рисунок 9.15

$$M_O = \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0. \quad (9.22)$$

Це рівняння не містить реакцій в'язів (нерухомого шарніра) і є умовою рівноваги твердого тіла з нерухомою точкою  $O$ .

Рівняння (9.22) є також умовою стійкості твердого тіла при його перекиданні.

Розглянемо приклади задач на стійкість твердого тіла при його перекиданні.

**Приклад 1.** Визначити мінімальну ширину  $a$  бетонної греблі довжиною  $b = 1$  м прямокутного перерізу за умови стійкості при перекиданні, якщо висота греблі і глибина води  $h = 3$  м, питома вага води  $\gamma_в = 10$  кН/м<sup>3</sup>, питома вага матеріалу греблі  $\gamma_г = 22$  кН/м<sup>3</sup> (рис.9.16).

**Розв'язання.** Розглянемо бетонний паралелепіпед зі сторонами  $h$ ,  $a$  і  $b$ . На нього діє зовнішня активна сила тиску води, рівнодійна якої за модулем дорівнює  $Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot h = \frac{1}{2} \gamma_в \cdot h \cdot 1 \cdot h = \frac{1}{2} \gamma_в \cdot h^2$  і прикладена на відстані  $1/3h$  від підвалини греблі, а також сила ваги  $P = \gamma_г \cdot h \cdot a \cdot b$ , яка прикладена у центрі ваги  $C$  греблі.

Можливим перекиданням греблі буде її обертання навколо ребра  $O$ , тому умовою рівноваги буде

$$\sum M_O(\vec{F}_k) = -Q \frac{h}{3} + P \frac{a}{2} = 0.$$

З цього рівняння

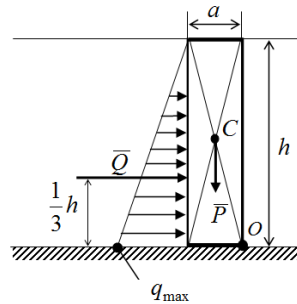


Рисунок 9.16

$$a^2 = \frac{2Qh}{3P} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \gamma_в h^2 \cdot h}{3 \gamma_г h} = \frac{\gamma_в h^2}{3 \gamma_г} = \frac{10 \cdot 9}{3 \cdot 22} = \frac{15}{11} = 1,36 \text{ (м}^2\text{)},$$

або  $a = 1,17$  (м).

**Зауваження.** При розгляді задач на перекидання тіла вводять поняття коефіцієнта стійкості. *Коефіцієнтом стійкості* при перекиданні тіла називається відношення суми моментів сил, що намагаються утримати тіло від перекидання, до суми моментів сил, що намагаються перекинути тіло. Постановка задачі в прикладі 1 передбачала її розв'язання у припущенні, що коефіцієнт стійкості дорівнює 1.

**Приклад 2.** Визначити розміри відомої іграшки «Іван-покиван» ( $h$ ,  $R$  рис. 9.17), яка складається з півкулі і конуса, щоб вона була стійкою при перекиданні. Конус і півкуля виконані з одного і того самого матеріалу.

**Розв'язання.** Зазначимо, що точка опори  $O$  такої конструкції лежить на вертикальному радіусі  $AO$ .

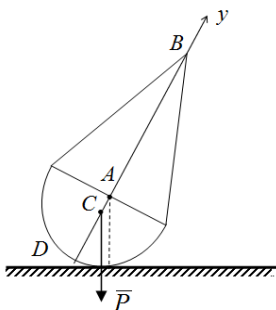
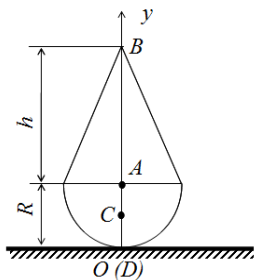


Рисунок 9.17

Тоді

$$y_C = \frac{(R + \frac{1}{4}h) \frac{1}{3} \pi R^2 h + \frac{5}{8} R \frac{2}{3} \pi R^3}{\frac{1}{3} \pi R^2 h + \frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{(R + \frac{1}{4}h)h + \frac{5}{4} R^2}{h + 2R} =$$

$$= \frac{Rh + \frac{1}{4}h^2 + \frac{5}{4}R^2}{h + 2R} = \frac{4Rh + h^2 + 5R^2}{4h + 8R}.$$

Для того, щоб точка  $C$  лежала нижче точки  $A$ , повинна виконуватись умова:  $y_C < R$ ,

тоді з урахуванням виразу для  $y_C$ :  $\frac{4Rh + h^2 + 5R^2}{4h + 8R} < R$ ,

або  $4Rh + h^2 + 5R^2 < 4Rh + 8R^2$ .

Звідси отримаємо умову  $h^2 < 3R^2$ ,

або

$$h < 1,73R. \quad (9.23)$$

При виконанні геометричної умови (9.23) розглядуване тіло буде стійким при перекиданні.

Внаслідок симетрії конструкції центр її ваги (точка  $C$ ) лежить на відріжку  $BD$ . Очевидно, якщо точка  $C$  лежатиме нижче точки  $A$ , то конструкція під дією сили ваги  $\bar{P}$  буде завжди повертатись із нахиленого положення до вертикального, тобто буде стійкою при перекиданні.

Відлік координати  $y$  будемо вести від точки  $D$ . Для визначення координати центра ваги об'єму використаємо спосіб розбиття. Конусу надамо індекс 1, півкулі – 2. Тоді згідно з формулою (9.12)

$$y_C = \frac{y_1 V_1 + y_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

Для конуса

$$y_1 = R + \frac{1}{4}h, \quad V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Для півкулі

$$y_2 = R - \frac{3}{8}R = \frac{5}{8}R, \quad V_2 = \frac{2}{3} \pi R^3.$$



## ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що є предметом статички?
2. Дайте фізичне і геометричне визначення поняття сили, вкажіть її розмірність.
3. Яке тіло називається абсолютно твердим?
4. Які системи сил називаються статично еквівалентними? Визначте формулою системи сил, еквівалентні нулю, а також одній силі. Як називається стан тіла, що знаходиться під дією системи сил першого типу? Як називається сила, до якої приводиться система другого типу?
5. Сформулюйте і проаналізуйте аксіоми статички.
6. Чи зміниться стан тіла, якщо точку прикладання сили перенести уздовж лінії її дії?
7. Що таке двійка сил? Чому вона еквівалентна?
8. Дайте визначення в'язі.
9. Яке тіло називається вільним?
10. Наведіть приклади технічної реалізації в'язів. Що таке реакція в'язі? Покажіть реакції типових в'язів: абсолютно гладка поверхня, нитка, ідеальний стержень, циліндричний шарнір, сферичний шарнір, нерухома опора з циліндричним шарніром, рухома опора з циліндричним шарніром, жорстке защемлення.
11. У чому полягає «Принцип визволення від в'язів»? Наведіть приклад.
12. Дайте визначення системи сил, що сходиться у просторі і на площині. Що таке точка сходу системи сил?
13. Чому еквівалентна система сил, що сходяться? Покажіть це на прикладі трьох сил.
14. Проаналізуйте на прикладі теореми про три сили (приклад задається викладачем).
15. Дайте визначення проєкції сили на вісь і площину. Визначте проєкції сил, що паралельні, перпендикулярні й розташовані під кутом до горизонтальної осі  $Ox$ .
16. Як формулюються умови рівноваги системи сил, що сходяться, у геометричній і алгебраїчній формах?
17. Визначте момент сили відносно точки і проаналізуйте його властивості. Що таке плече сили?
18. Як направлений вектор моменту сили відносно даної точки?
19. Запишіть векторну формулу, яка визначає модуль і напрям вектора моменту сили відносно даної точки.

20. Визначите момент сили відносно осі, проаналізуйте його властивості.
21. Коли момент сили відносно точки дорівнює нулю?
22. Яка залежність між моментом сили відносно точки і моментом тієї ж сили відносно осі, яка проходить через цю точку?
23. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
24. При якому напрямі сили її момент відносно даної осі є найбільшим?
25. Дайте визначення алгебраїчного моменту сили.
26. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил, спрямованих в одну сторону, і точку її прикладання.
27. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил, спрямованих у різні сторони, і точку її прикладання.
28. Знайдіть рівнодіючу системи рівномірно розподілених сил за довжиною для прямокутної епюри їхнього розподілу.
29. Знайдіть рівнодіючу системи розподілених за довжиною сил для трикутної епюри їхнього розподілу при  $q(0) = 0$ .
30. Дайте визначення центра паралельних сил. Запишіть формули для визначення координат центра паралельних сил у геометричній формі в просторі й в алгебраїчній формі – у площині  $xOy$ .
31. Дайте визначення центра ваги твердого тіла. Як знайти координати центра ваги тіла.
32. Як визначаються координати ваги однорідної пластини.
33. Сформулюйте способи визначення координат центра ваги твердого тіла (площі, лінії), дайте їхню математичну інтерпретацію.
34. Що називається статичним моментом площини відносно осі?
35. Якою формулою визначається положення центра ваги площини сектора кола?
36. Як визначається положення центра ваги складеного тіла.
37. Дайте визначення пари сил. Чому пара сил не має рівнодіючої?
38. Які властивості мають пари сил? Сформулюйте теорему про перенесення пари сил у паралельну площину.
39. Чи залежить момент пари сил від її розташування у площини?
40. Складіть дві пари сил, що лежать у пересічних площинах.
41. Які пари сил називаються еквівалентними? Коли дві пари будуть еквівалентними?
42. Як формулюються умови рівноваги системи пар сил у геометричній і алгебраїчній формах?

43. Сформулюйте лему про паралельне перенесення сили.
44. Дайте визначення головного вектора системи сил.
45. Що називається головним моментом системи сил?
46. Чому дорівнюють головний момент і головним момент відносно даної точки довільної системи сил.
47. Що мають спільного і чим відрізняються головний вектор системи сил і рівнодійна?
48. До яких двох силових факторів можна звести довільну систему сил у просторі?
49. Які можливі випадки зведення просторової системи сил?
50. Що називається динамою (силовим гвинтом)?
51. У чому суть необхідних і достатніх умов рівноваги твердого тіла?
  52. Як змінюється головний вектор системи сил при перенесенні центра зведення?
  53. Якою властивістю володіє головний момент системи сил при перенесенні центра зведення?
  54. Коли плоска довільна система сил приводиться тільки до пари сил?
  55. Сформулюйте умови зведення плоскої довільної системи сил тільки до однієї сили (рівнодійної).
  56. Як орієнтовані в просторі головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил? Наведіть їх механічну схему.
  57. Чому рівні головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил, що за визначенням еквівалентна нулю?
  58. Сформулюйте геометричні й алгебраїчні умови рівноваги твердого тіла.
  59. Скільки рівнянь рівноваги в алгебраїчній формі для довільної просторової системи сил? Запишіть їх.
  60. Наведіть плоску довільну систему сил до найпростішого вигляду з використанням теореми Пуансо.
  61. Сформулюйте теорему Варіньона для плоскої довільної системи сил.
  62. Сформулюйте першу форму умов рівноваги для плоскої довільної системи сил.
  63. Сформулюйте другу форму умов рівноваги плоскої довільної системи сил.
  64. Сформулюйте третю форму умов рівноваги довільної системи сил у площині.
  65. Дайте механічне поняття сил тертя спокою, ковзання і кочення.

66. Що таке трибометр?
67. Сформулюйте і дайте формульне визначення закону Амонта – Кулона. Якими властивостями володіють сили тертя ковзання?
68. Що таке коефіцієнт тертя спокою і тертя ковзання? Укажіть розмірності зазначених коефіцієнтів.
69. Що таке кут тертя і конус тертя?
70. Якими властивостями володіє коефіцієнт тертя кочення? Укажіть його розмірність.
71. Укажіть цифрові значення для коефіцієнтів тертя спокою і кочення для типових матеріалів.
72. Для чого і чому в техніці при конструюванні вузлів машин прагнуть перейти від коефіцієнта тертя ковзання до коефіцієнта тертя кочення?
73. Дайте поняття ферми як технічної конструкції. Наведіть приклади статично визначених плоских ферм,
74. Сформулюйте принцип розрахунку плоскої ферми способом вирізання вузлів.
75. Як розраховують плоскі ферми способом Ріттера? Чим він відрізняється від способу вирізання вузлів?
76. Дайте поняття стійкості твердого тіла при його перекиданні. Наведіть приклади.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретична механіка : підручник / І. В. Кузьо, В. П. Шпачук, Н. М. Ванькович та ін. – Харків : Фоліо, 2017. – 780 с.
2. Шпачук В. П. Теоретична механіка. Статика : конспект лекцій для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за спеціальностями 192, 141, 185, 263, 275 / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : В. П. Шпачук, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 125 с.
3. Методичні вказівки для практичних занять, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань, самостійної роботи з розділу «Теоретична механіка». Розділ «Статика» (для студентів-бакалаврів денної і заочної форм навчання за спеціальностями 192, 141, 185, 263, 275) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : В. П. Шпачук, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 55 с.
4. Методичні вказівки для практичних занять, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань, самостійної роботи з розділу «Теоретична механіка». Розділ «Динаміка» (для студентів-бакалаврів денної і заочної форм навчання за спеціальностями 192, 194, 141, 185, 263, 275) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : В. П. Шпачук, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 65 с.
5. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Часть 1: Статика. Кинематика / А. А. Яблонский, М. В. Никифорова. – 3-е изд., перераб. – М., 1971. – 439 с.
6. Путията Т. В. Методика розв'язання задач з теоретичної механіки / Т. В. Путията, Б. Н. Фрадлін. – 2-е вид. – Київ : Радянська школа, 1955. – 391 с.
7. Бутенин Н. В. Курс теоретичної механіки : в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – 4-е изд., испр. – М. : Наука, 1979. – Т. 1. – 240 с.
8. Тарг С. М. Курс теоретической механики / С. М. Тарг. – 10-е изд., перераб. и доп. – М., 1986. – 416 с.
9. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 5-е изд., перераб. – М. : Наука, 1967. – 512 с.
10. Цифровою репозиторій ХНУМГ [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://eprints.kname.edu.ua>

*Навчальне видання*

**ШПАЧУК** Володимир Петрович  
**КУЗНЕЦОВ** Олександр Миколайович

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

**СТАТИКА**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання за спеціальністю 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології)*

Відповідальний за випуск *О. М. Кузнецов*  
За авторською редакцією  
Комп'ютерне верстання *О. Г. Ткаченко*

План 2021, поз. 210 Л

---

Підп. до друку 24.11.2021. Формат 60×84/16  
Ум. друк. арк. 7,3.

Видавець і виготовлювач:  
Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.  
Електронна адреса: [office@kname.edu.ua](mailto:office@kname.edu.ua)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 5328 від 11.04.2017.