Розділ 5. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Дослідження різних явищ в електродинаміці, теорії пружності, гідродинаміці та інших галузях науки і техніки приводить до математичних моделей реальних процесів, які мають форму диференціальних рівнянь з частинними похідними чи деяких споріднених рівнянь (наприклад, інтегральних, інтегро-диференціальних, скінченно-різницевих), що розглядаються разом з деякими додатковими співвідношеннями (наприклад, початковими і граничними умовами). Сучасна ***математична фізика*** вивчає не лише методи розв'язання таких рівнянь, а й питання коректності постановки відповідних задач. Найбільш загальні результати одержані для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними, які традиційно називають ***рівняннями математичної фізики***.

У даному розділі представлені основні типи задач математичної фізики та найбільш уживані методи їх розв’язання. Значну увагу приділено фізичному змісту розглянутих задач, фізичній інтерпретації їх розв’язків. Розглянуто класичні методи – характеристик, відокремлення змінних, перетворення Лапласа, які дозволяють будувати точні розв’язки важливого кола задач. Наведено короткі відомості про чисельний метод скінченних різниць та сучасні нелінійні моделі – солітони, ударні хвилі, дисипативні структури.

5.1. Поняття про диференціальні рівняння з частинними похідними

5.1.1. Диференціальне рівняння з частинними похідними та його розв’язок. Початкові та граничні умови. Крайові задачі. Коректність постановки задач математичної фізики

У математичній фізиці вивчаються математичні моделі фізичних процесів, які мають форму диференціальних рівнянь з частинними похідними чи споріднених рівнянь або їх комбінацій. Функції багатьох змінних описують різноманітні явища в галузі динаміки рідини та газу, статики та динаміки деформованих пружних тіл, електростатики та електродинаміки, теплопередачі та дифузії, квантової механіки та загальної теорії відносності. Їх частинні похідні відображають найважливіші фізичні величини (швидкість, прискорення, потік, струм і т. п.). Використання фізичних принципів і законів, що зв’язують вказані величини, приводить до рівнянь з частинними похідними.

Диференціальним рівнянням з частинними похідними (ДРЧП) називається рівняння, яке зв’язує незалежні змінні, шукану функцію та її частинні похідні. Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називається його ***порядком***.

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0 \tag{1.1}$$

– ***загальний вигляд*** диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними для функції двох незалежних змінних. Тут x, y – незалежні змінні;

$u = u(x, y)$ – шукана функція.

Розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними називається будь-яка функція, що при підстановці у диференціальне рівняння замість шуканої функції перетворює його на тотожність.

Загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння (ЗДР) містить довільні сталі, число яких дорівнює порядку рівняння. Аналогічно, ***загальний розв'язок*** ДРЧП містить довільні функції, число яких дорівнює порядку цього рівняння.

Розв'язок ДРЧП, який входить до складу загального розв'язку при певних фіксованих довільних функціях, називається ***частинним розв'язком***.

Для виділення цілком певного розв'язку ДРЧП треба вказати додаткові умови.

Всі фізичні явища вивчають, починаючи з деякого моменту часу і у відповідних областях, що мають певні межі. Тому для однозначного зображення реального процесу, крім диференціального рівняння, необхідно задати ще ***початкові умови***, що відображають початковий стан процесу, а також ***граничні умови***, що вказують значення шуканої функції та її похідних на межі області визначення процесу.

У випадку необмеженої області D граничні умови відпадають. Задача відшукання розв'язку ДРЧП у необмеженій області при заданих початкових умовах називається ***задачею Коші (початковою задачею)***.

Задача відшукання розв'язку ДРЧП в обмеженій області при заданих початкових і граничних умовах називається ***крайовою задачею (граничною задачею)***.

Задача Коші та крайова задача формулюються для ДРЧП, які виникають при вивчені нестаціонарних процесів, що змінюються з перебігом часу. Рівняння, що описують стаціонарні процеси, не містять часу t. Тому для таких рівнянь початкові умови відсутні. Вказані ДРЧП розв'язуються тільки при граничних умовах.

У залежності від типу граничних умов розрізняють <u>три типи крайових задач</u>.

Задача знаходження розв'язку ДРЧП при відомих значеннях шуканої функції U на межі S області D (***граничні умови першого типу***)

$$u\big|_S = f(S) \qquad (1.2)$$

називається ***крайовою задачею Діріхле (першою крайовою задачею)***.

Задача знаходження розв'язку ДРЧП при відомих значеннях нормальної похідної (похідної за напрямком зовнішньої нормалі $\vec{n}$) $\frac{\partial u}{\partial n}$ на межі S області D (***граничні умови другого типу***)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(S) \qquad (1.3)$$

називається ***крайовою задачею Неймана (другою крайовою задачею)***.

Якщо на межі S області D задано (***граничні умови третього*** (***змішаного***) ***типу***)

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_S = f(S) \qquad (1.4)$$

то маємо ***третю*** (***змішану***) ***крайову задачу***. Тут α і β - задані числа.

Задача математичної фізики містить початкові та граничні умови, які на практиці є результатом деяких вимірювань, що виконуються з певною похибкою. Можливі небажані ситуації, коли малі похибки в початкових та граничних умовах призводять до значних похибок у розв’язку.

Задача математичної фізики називається ***коректно (правильно) поставленою***, якщо: 1) задача має розв’язок; 2) розв’язок задачі єдиний; 3) розв’язок задачі неперервно залежить від початкових і граничних умов (***розв'язок стійкий*** до малих змін початкових і граничних умов).

Задача, що не задовольняє хоча б одній із вказаних умов, називається ***некоректно (неправильно) поставленою***.

Приклад 1. Перевірити, чи є задана функція $u=\ln(x^2+y^2)$ розв’язком вказаного рівняння

$$(x^2+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0\,.$$

Розв’язання. Знайдемо похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x\left(-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right)=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Підставимо в рівняння

$$(x^2+y^2)\left(-4xy/(x^2+y^2)^2\right)+x\frac{2y}{x^2+y^2}+y\frac{2x}{x^2+y^2}=0\;;$$

$0=0$ - вірно. Отже, задана функція є розв’язком заданого диференціального рівняння.

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x-3y^2$, де $u=u(x,y)$.

Розв’язання. Зробимо заміну $\frac{\partial u}{\partial x}=V$. Тоді рівняння прийме вигляд: $\frac{\partial V}{\partial y}=2x-3y^2$. Інтегруючи за y, маємо

$$V=\int(2x-3y^2)dy=2xy-y^3+\overline{C}_1(x),$$

де $\overline{C}_1(x)$ – довільна функція від x. Звідси

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy-y^3+\overline{C}_1(x).$$

Інтегруючи за x, маємо

$$u=\int\left(2xy-y^3+\overline{C}_1(x)\right)dx+C_2(y)=x^2y-y^3x+\int\overline{C}_1(x)dx+$$

$$+C_2(y)=x^2y-xy^3+C_1(x)+C_2(y)\;,$$

де $C_2(y)$ – довільна функція від y; $C_1(x)=\int \overline{C_1}(x)dx$.

Отже, шуканий розв'язок $u = x^2 y - xy^2 + C_1(x) + C_2(y)$, де $C_1(x)$, $C_2(y)$ – довільні (двічі диференційовні) функції.

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = 4t^3 - 2xt + x$ $(-\infty < x < +\infty;\quad t > 0)$, який задовольняє початковій умові

$$u(x,t)\big|_{t=0} = x^2 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

(задача Коші).

Розв'язання. $\frac{\partial u}{\partial t} = 4t^3 - 2xt + x$. Інтегруючи по t, маємо загальний розв'язок $u = \int (4t^3 - 2xt + x)dt + C(x) = t^4 - xt^2 + xt + C(x)$, де $C(x)$ – довільна функція.

Підберемо функцію $C(x)$ так, щоб задовольнялась початкова умова

$$u(x,t)\big|_{t=0} = C(x); \quad C(x) = x^2 .$$

Отже, шуканий розв'язок $u = t^4 - xt^2 + xt + x^2$.

5.1.2. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними. Основні рівняння математичної фізики

Диференціальне рівняння з частинними похідними називається ***лінійним***, якщо воно лінійне відносно шуканої функції та всіх її частинних похідних.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Gu = F \tag{1.5}$$

– ***загальний вигляд*** лінійного ДРЧП другого порядку.

Тут $A = A(x,y), B = B(x,y)$, $C = C(x,y), D = D(x,y)$, $E = E(x,y)$, $G = G(x,y)$, $F = F(x,y)$ – задані функції, причому A, B, C, D, E, G називаються ***коефіцієнтами***; F – ***правою частиною***.

Якщо $F = 0$, то рівняння називається ***однорідним***, в противному разі – ***неоднорідним***.

Якщо коефіцієнти A, B, C, D, E, F, G – сталі числа, то рівняння називається ***лінійним зі сталими коефіцієнтами***.

Принцип суперпозиції: *Довільна лінійна комбінація зі сталими коефіцієнтами розв'язків лінійного однорідного ДРЧП також є розв'язком цього рівняння.*

Диференціальне рівняння з частинними похідними називається ***квазілінійним***, якщо воно лінійне відносно всіх похідних найвищого порядку.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.6}$$

– ***загальний вигляд*** квазілінійного ДРЧП другого порядку.

Ясно, що будь-яке лінійне ДРЧП є одночасно квазілінійним.

В залежності від знака ***дискримінанта***

$$\Delta = B^2 - AC \tag{1.7}$$

квазілінійне ДРЧП другого порядку (1.6) відноситься до одного з наступних трьох типів:

1) якщо $\Delta = B^2 - AC > 0$, то рівняння ***гіперболічного типу,*** його ***канонічний (найпростіший) вигляд***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.8}$$

2) якщо $\Delta = B^2 - AC = 0$, то рівняння ***параболічного типу,*** його ***канонічний вигляд***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.9}$$

3) якщо $\Delta = B^2 - AC < 0$, то рівняння ***еліптичного типу***, його ***канонічний вигляд***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.10}$$

Зауваження 1. Розбиття ДРЧП на гіперболічні, параболічні та еліптичні рівняння відповідає розбиттю фізичних процесів на три основні класи: хвильові, дифузійні та стаціонарні. Для рівнянь різних типів по-різному ставляться основні задачі і часто застосовуються різні методи розв’язання.

Найважливіші рівняння математичної фізики вказаних типів:
одновимірне хвильове рівняння (гіперболічний тип)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.11}$$

одновимірне рівняння теплопровідності (рівняння Фур’є) (параболічний тип)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.12}$$

двовимірне рівняння Лапласа (еліптичний тип)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.13}$$

Тут a – сталий коефіцієнт.

Зауваження 2. Тип розглянутих ДРЧП (1.5), (1.6) визначається тільки коефіцієнтами при других похідних і не залежить від інших складових. Якщо коефіцієнти A, B, C сталі, то тип цього рівняння один і той же у всій області визначення. Якщо коефіцієнти A, B, C змінні, то для рівняння виділяються області його гіперболічності, параболічності та еліптичності.

Приклад 1. Знайти області гіперболічності, параболічності та еліптичності рівняння Трикомі $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Розв'язання. $\Delta=B^2-AC$; $A=y$; $B=0$;

$C=1$; $\Delta=0^2-y\cdot 1=-y$. При $y>0$, $\Delta=-y<0$ – рівняння еліптичного типу; при $y<0$, $\Delta=-y>0$ – рівняння гіперболічного типу, при $y=0$, $\Delta=-y=0$ – рівняння параболічного типу.

5.1.3. Характеристики. Зведення лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними до канонічного вигляду

Квазілінійному рівнянню другого порядку (1.6) можна поставити у відповідність його ***характеристичне рівняння***

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2B\frac{dy}{dx}+C=0, \tag{1.14}$$

яке розпадається на два рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{\Delta}}{A} \quad ; \quad \frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{\Delta}}{A} \tag{1.15}$$

де $\Delta=B^2-AC$ – дискримінант ДРЧП (1.6).

Інтегральні криві характеристичного рівняння (1.14) (або, що те саме, рівнянь (1.15)) називаються ***характеристиками*** ДРЧП (1.6).

Зауваження 1. У випадку гіперболічного ДРЧП $(\Delta>0)$ маємо дві різні сім'ї дійсних характеристик $\varphi(x,y)=C_1$ і $\psi(x,y)=C_2$, де C_1,C_2 – довільні сталі. Якщо ДРЧП параболічне $(\Delta=0)$, то обидва рівняння (1.15) співпадають, при цьому маємо одну сім'ю дійсних характеристик $\varphi(x,y)=C_1$. Якщо ж ДРЧП еліптичного типу $(\Delta<0)$, то маємо дві різні сім'ї уявних (комплексно спряжених) характеристик $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C_1$ і $\varphi(x,y)-i\psi(x,y)=C_2$, де i – уявна одиниця $(i^2=-1)$.

Приклад 1. Знайти характеристики рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\sin^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-tgx\,\frac{\partial u}{\partial y}+3u=0 .$$

Розв'язання.

$A=1;\ B=-\cos x;\ C=-\sin^2 x;\quad \Delta=B^2-AC=(-\cos x)^2-1(-\sin^2 x)=\cos^2 x+\sin^2 x=1>0$.

Рівняння гіперболічного типу. Диференціальні рівняння характеристик (1.15) набувають вигляду

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\cos x+1}{1};\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-\cos x-1}{1};\quad \frac{dy}{dx}=-\cos x+1;\quad \frac{dy}{dx}=-\cos x-1.$$

Інтегруючи за змінною x, одержуємо

$y=\int(-\cos x+1)dx+C_1=-\sin x+x+C_1$; $y=\int(-\cos x-1)dx+C_2=-\sin x-x+C_2$.

Звідси $y+\sin x-x=C_1;\ y+\sin x+x=C_2$ – неявні рівняння характеристик.

Тут $\varphi(x,y)=y+\sin x-x;\ \psi(x,y)=y+\sin x+x$.

Зауваження 2. Для зведення ДРЧП другого порядку до канонічного вигляду використовується нелінійна заміна незалежних змінних $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ на основі неявних рівнянь характеристик. Тоді:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}.$$

Розглянемо три можливі випадки:

1) Рівняння гіперболічного типу має дві різні сім'ї дійсних характеристик $\varphi(x, y) = C_1$, $\psi(x, y) = C_2$. Заміною змінних $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ таке рівняння зводиться до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

2) Рівняння параболічного типу має одну сім'ю дійсних характеристик $\varphi(x, y) = C_1$. Використовується заміна змінних $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, де $\psi(x, y)$ – довільна двічі неперервно диференційовна функція, яка задовольняє умову функціональної незалежності функцій $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$

$$\begin{vmatrix} \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y \\ \partial\psi/\partial x & \partial\psi/\partial y \end{vmatrix} \neq 0.$$

У результаті рівняння зводиться до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \text{ або } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

3) Рівняння еліптичного типу має дві різні сім'ї уявних (комплексно спряжених) характеристик $\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1$, $\varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2$. Заміною змінних $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ таке рівняння зводиться до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Приклад 2. Встановити тип, знайти неявні рівняння характеристик та звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 u = 0$; б) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 12y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

в) $\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x^3}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Розв’язання. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 u = 0$.

$$A = 1 \ ; \ \ B = 0 \ ; \ \ C = -\sin^2 x \ ; \ \ \Delta = B^2 - AC = \sin^2 x > 0$$

– рівняння гіперболічного типу.

Диференціальні рівняння характеристик

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{A} \ ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\pm \sin x}{1} = \pm \sin x \ .$$

Розв’язуючи одержанні рівняння, маємо

$y = \pm \int \sin x dx$; $\quad y = -\cos x + C_1$; $\quad y = \cos x + C_2$.

Звідси $\quad y + \cos x = C_1$; $\quad y - \cos x = C_2$ – неявні рівняння характеристик.

Вводимо заміну $\xi = y + \cos x$; $\eta = y - \cos x$. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(-\sin x) + \frac{\partial u}{\partial \eta}\sin x ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) - \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}\sin x + \sin x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) +$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial x}\sin x = \sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \cos x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \cos x\frac{\partial u}{\partial \eta} \ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \ .$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння і одержимо

$$\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \cos x\frac{\partial u}{\partial \xi} + \cos x\frac{\partial u}{\partial \eta} - \sin^2 x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) -$$

$$-\cos x\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + y^2 u = 0 ; \quad -4\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2\cos x\frac{\partial u}{\partial \xi} + y^2 u = 0 ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{y^2}{4\sin^2 x}u \ .$$

З формул заміни виразимо коефіцієнти рівняння через нові змінні

$$\cos x = (\xi - \eta)/2; \quad y = (\xi + \eta)/2 \ , \quad y^2 = (\xi + \eta)^2/4 \ ;$$

$$\sin^2 x = 1 - ((\xi - \eta)/2)^2 = \left(4 - (\xi - \eta)^2\right)/4 \ .$$

Тоді остаточно маємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{\xi - \eta}{4 - (\xi - \eta)^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{(\xi + \eta)^2}{4\left(4 - (\xi - \eta)^2\right)}u$$

– канонічний вигляд диференціального рівняння.

б) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 12y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. $\ A = x^2;\ B = -2xy;\ \ C = 4y^2$;

$\Delta = B^2 - AC = (-2xy)^2 - x^2\,4y^2 = 0$ – рівняння параболічного типу.

Диференціальне рівняння характеристик

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{A};\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-2xy}{x^2}=-\frac{2y}{x}.$$

Розв'язуючи одержане рівняння, маємо

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int\frac{dx}{x};\quad \ln|y|=-2\ln|x|+\ln C;\quad y=\frac{C}{x^2}.$$

Звідси $yx^2=C$ – неявне рівняння характеристик.

Вводимо заміну $\xi=yx^2,\ \eta=y$ (довільна функція). Тоді:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}2xy+\frac{\partial u}{\partial\eta}0=2xy\frac{\partial u}{\partial\xi};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}x^2+\frac{\partial u}{\partial\eta}1;$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=2y\left(x\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=4y^2x^2\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2y\frac{\partial u}{\partial\xi};$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=2x\left(y\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=2x^3y\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+2x\frac{\partial u}{\partial\xi};$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=x^2\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}=x^4\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2x^2\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}.$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння і одержимо

$$x^2\left(4y^2x^2\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2y\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)-4xy\left(2x^3y\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+2x\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+$$

$$+4y^2\left(x^4\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2x^2\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}\right)+12y\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}x^2+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0;$$

$$4y^2\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}+6x^2y\frac{\partial u}{\partial\xi}+12y\frac{\partial u}{\partial\eta}=0;\quad \frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=-\frac{3x^2}{2y}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{3}{y}\frac{\partial u}{\partial\eta}.$$

З формул заміни виразимо коефіцієнти отриманого рівняння через нові змінні $y=\eta;\quad x^2=\xi/\eta$.

Тоді остаточно маємо $\dfrac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=-\dfrac{3\xi}{2\eta^2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}-\dfrac{3}{\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$

– канонічний вигляд диференціального рівняння.

в) $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{4}{y^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{x^3}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$. $A=\dfrac{1}{x^2};\ B=0;\ C=\dfrac{4}{y^2};\ \Delta=B-AC=-\dfrac{4}{x^2y^2}<0$

– рівняння еліптичного типу.

Диференціальні рівняння характеристик

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{\Delta}}{A};\qquad \frac{dy}{dx}=\pm\frac{2x}{y}i.$$

Розв'язуючи одержанні рівняння, маємо

$$ydy = \pm 2xidx\,;\quad \int ydx = \pm 2i\int xdx\,;\quad y^2/2 = \pm x^2 + C\,;\quad y^2 = \pm 2x^2 + 2C\,.$$

Звідси $y^2 - 2x^2 i = C_1;\quad y^2 + 2x^2 i = C_2$ – неявні рівняння характеристик.

Вводимо заміну $\xi = y^2;\ \eta = 2x^2$. Тоді:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\,0 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,4x = 4x\frac{\partial u}{\partial \eta}\,;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\,2y + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,0 = 2y\frac{\partial u}{\partial \xi}\,;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + 4\frac{\partial u}{\partial \eta} = 16x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 4\frac{\partial u}{\partial \eta}\,;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2y\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial u}{\partial \xi} = 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial u}{\partial \xi}\,.$$

Підставимо знайдені похідні в диференціальне рівняння і одержимо

$$\frac{1}{x^2}\left(16x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 4\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{4}{y^2}\left(4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \frac{1}{x^3}\,4x\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0\,;$$

$$16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 16\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{8}{y^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{1}{2y^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\,.$$

З формул заміни виразимо $y^2 = \xi$. Тоді остаточно маємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

– канонічний вигляд диференціального рівняння.

Зауваження 3. Якщо вихідне ДРЧП лінійне зі сталими коефіцієнтами, то його канонічний вигляд також лінійний зі сталими коефіцієнтами. В цьому випадку можливе подальше ***спрощення канонічного рівняння*** за допомогою заміни невідомої функції

$$u = ve^{\lambda\xi + \mu\eta} \tag{1.16}$$

де λ і μ - сталі числа, які підлягають визначенню. Параметри λ і μ вибирають так, щоб після підстановки (1.16) у канонічне рівняння два його коефіцієнти, наприклад, при перших похідних, перетворилися на нуль.

Приклад 3. Звести до спрощеного канонічного вигляду з відсутніми першими похідними лінійне ДРЧП зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} + 8\frac{\partial u}{\partial y} - 16u = 0$$

Розв’язання. Визначимо тип: $A = 1;\ B = -1;\ C = 5\,;\ \Delta = B^2 - AC = -4 < 0\,.$

Отже, дане рівняння еліптичного типу.

Диференціальні рівняння характеристик

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{A};\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-1 \pm 2i}{1} = -1 \pm 2i\,.$$

Розв’язуючи одержані рівняння, маємо

$$y = \int(-1 \pm 2i)dx;\ y = -(1 \pm 2i)x + C\,;\ y = -x \pm 2xi + C\,.$$

Звідси $y+x-2xi=C_1$; $y+x+2xi=C_2$ – неявні рівняння характеристик.

Вводимо заміну незалежних змінних $\xi = y+x$, $\eta = 2x$.

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Підставимо знайдені похідні у диференціальне рівняння і одержимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta} - 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) + 5\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + 8\frac{\partial u}{\partial \xi} - 16u = 0;$$

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 12\frac{\partial u}{\partial \xi} + 8\frac{\partial u}{\partial \eta} - 16u = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -3\frac{\partial u}{\partial \xi} - 2\frac{\partial u}{\partial \eta} + 4u$$

– канонічний вигляд диференціального рівняння.

Вводимо заміну шуканої функції $u = ve^{\lambda\xi+\mu\eta}$, де λ і μ – сталі, які підлягають визначенню.

Знайдемо похідні, що входять в канонічне рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \xi}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda v e^{\lambda\xi+\mu\eta}; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu v e^{\lambda\xi+\mu\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda\frac{\partial v}{\partial \xi}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda\frac{\partial v}{\partial \xi}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda^2 v e^{\lambda\xi+\mu\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu\frac{\partial v}{\partial \eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu\frac{\partial v}{\partial \eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu^2 v e^{\lambda\xi+\mu\eta}.$$

Підставимо знайдені похідні в кожне рівняння і одержимо:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + 2\lambda\frac{\partial v}{\partial \xi}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda^2 v e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial \eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu^2 v e^{\lambda\xi+\mu\eta} =$$

$$= -3\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \lambda v e^{\lambda\xi+\mu\eta}\right) - 2\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}e^{\lambda\xi+\mu\eta} + \mu v e^{\lambda\xi+\mu\eta}\right) + 4ve^{\lambda\xi+\mu\eta}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = -(3+2\lambda)\frac{\partial v}{\partial \xi} -$$

$$-(2+2\mu)\frac{\partial v}{\partial \eta} + \left(4-\lambda^2-\mu^2-3\lambda-2\mu\right)v.$$

Виберемо значення λ і μ так, щоб коефіцієнти при перших похідних в одержаному рівнянні дорівнювали нулю

$$-(3+2\lambda)=0; \quad -(2+2\mu)=0.$$

Звідси $\lambda=-3/2$; $\mu=-1$.

Отже, після заміни $u = ve^{-3\xi/2-\eta}$ канонічне рівняння набуває спрощеного вигляду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}=\left(4-(-3/2)-(-1)^2-3(-3/2)-2(-1)\right)v;\quad \frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}=\frac{49}{4}v\ ,$$

в якому відсутні перші похідні.

Зауваження 4. Нехай в координатній площині Oxy задана деяка лінія L. Кажуть, що розв'язок $u(x,y)$ ДРЧП (1.5) на цій кривій L має ***слабкий розрив***, якщо при переході через неї в площині Oxy сам розв'язок $u(x,y)$ та його перші похідні залишаються неперервними, а деякі похідні порядку вище першого мають на цій кривій L розрив першого роду. *Лініями слабких розривів розв'язків ДРЧП (1.5) служать характеристики цього рівняння.*

5.2. Виведення основних рівнянь математичної фізики

5.2.1. Основні етапи побудови математичної моделі фізичного процесу

Щоб скористатися методами математичної фізики для дослідження реального явища (процесу), треба скласти його ***математичну модель***. Вона повинна відображати характерні особливості даного об`єкта і в той же час бути досить простою, щоб її можна вивчати існуючими математичними методами.

Основні етапи побудови математичної моделі (постановки задачі математичної фізики):

1) Вибір величин, які є визначальними для даного процесу. Як правило, ці величини є функціями багатьох змінних – наприклад, просторових координат і часу.

2) Складання диференціального рівняння (системи рівнянь) з частинними похідними відносно шуканої функції (функцій) на основі фізичних принципів і законів з можливими обґрунтованими спрощеннями, які враховують особливості протікання процесу.

3) Виведення додаткових співвідношень (наприклад, початкових і граничних умов) для шуканих величин, які дозволяють з нескінченної множини розв`язків диференціального рівняння вибрати той, який описує даний конкретний процес.

Зауваження. Одна і та ж математична модель може описувати зовсім різні фізичні явища.

5.2.2. Рівняння коливань струни

Розглянемо натягнену струну довжини l, закріплену на кінцях. Якщо її вивести з положення рівноваги (наприклад, легко смикнути), то вона буде коливатися. Моделлю струни є пружна невагома (дією сили тяжіння можна знехтувати порівняно з силою натягу струни) і абсолютно гнучка (не чинить опору згину) нитка. Будемо розглядати малі плоскі поперечні коливання, коли рух усіх точок струни відбувається в одній площині перпендикулярно до її прямолінійного положення рівноваги – осі Ox (рис. 1). Лівий кінець струни співпадає з точкою $x=0$, а правий – з точкою $x=l$. Процес коливань характеризується однією функцією $u(x,t)$ – відхиленням точки струни з абсцисою x у момент часу t. При фіксованому значенні t графік функції $u(x,t)$ дає форму (профіль) струни у цей момент часу.

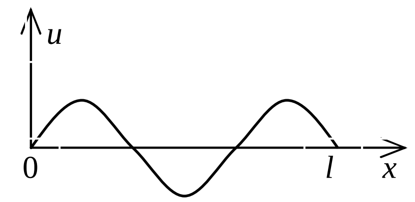

Рис. 1

Виділимо довільний елемент струни $[x, x+\Delta x]$, який при коливанні деформується в дугу $\cup MM_1$ (рис. 2). Довжина цієї дуги

$$\Delta l = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+(\partial u/\partial x)^2}\,dx \approx \Delta x,$$

оскільки при малих коливаннях $\frac{\partial u}{\partial x} = o(\Delta x)$. Тобто видовження струни не відбувається. Тоді на підставі закону Гука сила натягу $\vec{T}$ в кожній точці струни направлена вздовж дотичної до її профілю і не змінюється за величиною, тобто $\left|\vec{T}\right| = T_0 = const$.

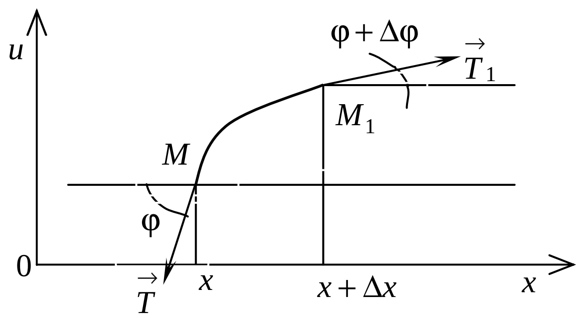

Рис. 2

Проекція на вісь Ou F_u рівнодійної сил пружності $\vec{F}$, які прикладені до елемента MM_1, дорівнює

$$F_u = T_0 \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T_0 \sin\varphi \ .$$

Оскільки кут φ малий, то $\sin\varphi \approx \varphi \approx tg\varphi$. Але за геометричним змістом похідної $tg\,\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$. Тоді

$$F_u \approx T_0 \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - T_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = T_0\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right).$$

За формулою Лагранжа скінченних приростів

$$\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x \approx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x \ ,$$

де $0 < \theta < 1$. Тоді $F_u \approx T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x$.

Якщо вважати струну однорідною з лінійною густиною $\rho = \rho_0 = const$, то маса елемента $\cup MM_1$ $m = \rho\Delta l \approx \rho_0 \Delta x$. Вертикальне (в напрямку осі Ou) прискорення W довільної точки цього елемента приблизно дорівнює вертикальному прискоренню точки M з координатою x, тобто $W \approx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ згідно з геометричним змістом другої похідної по t.

Шукане рівняння коливань струни безпосередньо випливає з другого закону Ньютона $mw = F_u$ для елемента $\cup MM_1$ в напрямку осі Ou:

$$\rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x \ .$$

Звідси

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l;\ \ t > 0) \tag{2.1}$$

– ***одновимірне однорідне хвильове рівняння***, де $a^2 = T_0/\rho_0$.

Це рівняння гіперболічного типу і для нього задаються дві ***початкові умови*** (ПУ)

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (0 < x < l)$$

(початкове положення струни) і

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \qquad (0 < x < l)$$

(початкова швидкість струни).

Якщо кінці струни $x = 0$ і $x = l$ жорстко закріплені, то ***граничні умови*** (ГУ)

$$u(0,t) = 0\,, \quad u(l,t) = 0 \qquad (t > 0)\ .$$

Таким чином, ***математична модель*** (задача математичної фізики) ***вільних*** малих плоских поперечних ***коливань*** однорідної ***струни*** з жорстко закріпленими кінцями, на яку не діють зовнішні сили, має вигляд:

$$\text{(ДРЧП)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l;\ \ t > 0) \tag{2.2}$$

$$\text{(ПУ)} \quad u(x,0) = \varphi(x)\ , \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (0 < x < l) \tag{2.3}$$

$$\text{(ГУ)} \qquad u(0,t) = 0\,; \qquad u(l,t) = 0 \qquad (t > 0) \tag{2.4}$$

Математична модель (2.2) – (2.4) містить інформацію, яка необхідна для вивчення вільних коливань струни (розв\`язок задачі єдиний) і не містить надлишкової, суперечливої інформації (розв\`язок задачі існує). Можна показати, що розв\`язок задачі (2.2) – (2.4) стійкий до малих змін початкових і граничних умов. Таким чином, крайова <u>задача (2.2) – (2.4) поставлена коректно.</u>

<u>Зауваження 1</u>. Якщо кінці струни $x = 0$ і $x = l$ вільні, то граничні умови:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \qquad (t > 0)\ .$$

<u>Зауваження 2</u>. Ускладнення розглянутої задачі внаслідок врахування додаткових фізичних факторів приводить до більш складних ДРЧП. Звернемо увагу на два випадки.

1) Якщо на струну діють зовнішні поперечні сили з лінійною густиною $p(x,t)$, то маємо ***одновимірне неоднорідне хвильове рівняння***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \qquad (0 < x < l;\ \ t > 0) \tag{2.5}$$

де $f = p/\rho_0$. Це ДРЧП описує вимушені коливання струни.

2) Якщо лінійна густина струни залежить від координати x (струна неоднорідна) $\rho = \rho(x)$, а зовнішні поперечні сили не діють, то маємо ***одновимірне однорідне хвильове рівняння зі змінними коефіцієнтами***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a^2(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) \qquad (0<x<l;\ \ t>0)\ ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a(x)\frac{da(x)}{dx}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\ \ (0<x<l;\ t>0). \tag{2.6}$$

<u>Зауваження 3</u>. Поперечні коливання струни не єдиний вид плоских поперечних хвильових рухів. Зокрема, звукові чи електромагнітні хвилі на значній відстані від джерел збудження можна вважати плоскими і описувати їх одновимірними хвильовими рівняннями. Двовимірні та тривимірні хвилі називають відповідно ***циліндричними і сферичними хвилями*** і описуються двовимірними і тривимірними хвильовими рівняннями.

Перелічимо <u>основні типи хвильових процесів</u>:

1) Звукові хвилі (поздовжні).
2) Електромагнітні хвилі (поперечні).
3) Механічні коливання твердих тіл (поздовжні, поперечні, крутильні).
4) Хвильовий пакет в квантовій механіці.
5) Гравітаційні хвилі (поперечні).
6) Механічні коливання рідини та газу (поперечні та поздовжні).

5.2.3. Телеграфні рівняння

Розглянемо (рис.3) довгу однорідну електричну лінію (ланцюг), яка характеризується активним опором R, індуктивністю L, ємністю C і втратою G, де величини R, L, C, G розподілені вздовж лінії неперервно і рівномірно і розраховані на одиницю довжини. Будемо вважати лінію двопровідною. Нехай $i(x,t)$ – сила струму; $u(x,t)$ – напруга.

Для довільного елемента $[x, x+\Delta x]$ маємо: $-\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x$ – сумарне падіння напруги; $iR\Delta x$ – падіння напруги на опорі; $L\frac{\partial i}{\partial t}\Delta x$ – електрорушійна сила самоіндукції; $\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x$ – сумарна зміна сили струму; $C\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x$ – сила струму зарядки елемента (як конденсатора); $Gu\Delta x$ – сила струму втрати.

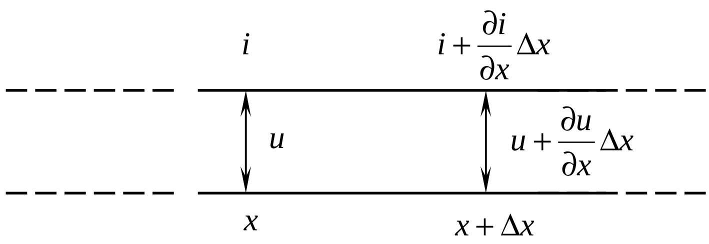

Рис. 3

Тоді за законом Ома

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x=iR\Delta x+L\frac{\partial i}{\partial t}\Delta x\ .$$

Рівняння балансу для сумарної зміни сили струму

$$\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x+C\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x+Gu\Delta x=0\ .$$

Звідси

$$\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial t}+Gu=0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+Ri+L\frac{\partial i}{\partial t}=0 \tag{2.8}$$

– ***система телеграфних рівнянь***.

Продиференціювавши відповідним чином вирази (2.7), (2.8) і вилучивши одну із шуканих функцій $u(x,t)$ або $i(x,t)$, можна одержати рівняння, що містить тільки одну з них.

Продиференціюємо перше рівняння системи (2.7), (2.8) за змінною x, а друге – за t:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+R\frac{\partial i}{\partial x}+L\frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}=0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t}+C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+G\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{2.10}$$

Знайдемо $\frac{\partial i}{\partial x}$ з другого рівняння системи (2.7) і (2.8), а змішану похідну $\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}$ – з другого рівняння системи (2.9) і (2.10). Підставимо їх в перше рівняння системи (2.9), (2.10) і одержимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{RG}{LC}u=0 \tag{2.11}$$

Аналогічно, вилучивши з системи (2.7), (2.8) функцію $u(x,t)$, отримаємо

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}-\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+\frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{RG}{LC}i=0 \tag{2.12}$$

Рівняння (2.11), (2.12) також називають ***телеграфними***.

5.2.4. Рівняння поширення тепла у стержні

Розглянемо (рис. 4) тонкий циліндричний однорідний стержень довжини l і сталого поперечного перерізу S. Будемо припускати, що бічна поверхня стержня теплоізольована (теплообмін може здійснюватися тільки через торці циліндра), а температура у всіх точках поперечного перерізу однакова (оскільки стержень тонкий – його діаметр достатньо малий порівняно з довжиною). Вісь стержня приймемо за координатну вісь Ox, причому лівий кінець стержня співпадає з точкою $x=0$, а правий – з точкою $x=l$. Будемо вважати, що всередині стержня теплові джерела відсутні.

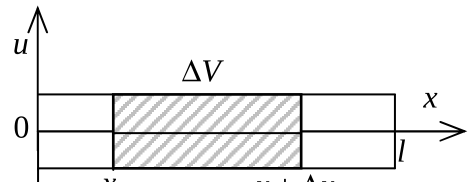

Рис. 4

Нехай $\rho=const$ – густина речовини стержня; $C=const$ – питома теплоємність; $k=const$ – коефіцієнт теплопровідності. Величиною, яка характеризує процес поширення тепла в стержні, служить функція $u(x,t)$ – температура стержня в перерізі з абсцисою x в момент часу t.

Розглянемо довільний елемент стержня об`ємом $\Delta V=S\Delta x$, який розміщений між перерізами з абсцисами $x$ і $x+\Delta x$. Згідно з основним експериментальним законом теплопровідності (законом Фур`є) кількість тепла, що проходить через поперечний переріз за одиницю часу пропорційна похідній $\frac{\partial u}{\partial x}$ (градієнту температури). Тоді

$$\Delta Q_1 = -k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}S\Delta t \;; \qquad \Delta Q_2 = -k\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}S\Delta t$$

– кількості тепла, які протікають через перерізи $x_1 = x$ і $x_2 = x + \Delta x$. В результаті зовнішній приплив тепла в елемент ΔV за час Δt:

$$\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 = k\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)S\Delta t \approx$$

$$\approx k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t \;.$$

Цей приплив тепла ΔQ витрачається на зміну температури елемента ΔV на величину $\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$. Тоді

$$\Delta Q = c\Delta m\Delta u = c\rho\Delta V\Delta u \approx c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \;.$$

Складемо рівняння теплового балансу (з точністю до нескінченно малих більш високого порядку порівняно з Δx, Δt):

$$c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t \;.$$

Звідси $c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0<x<l;\; t>0) \qquad (2.13)$$

– ***одновимірне однорідне рівняння теплопровідності***, де $a^2 = k/(c\rho)$.

Це рівняння параболічного типу. Параболічні рівняння виникають при моделюванні явищ переносу (теплопередачі, дифузії, фільтрації, випромінювання нейтронів і т.п.).

На відміну від гіперболічних рівнянь, для рівняння теплопровідності задається тільки одна ***початкова умова***

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (0<x<l)$$

(початковий розподіл температури).

Якщо торці стержня підтримуються при певних температурах, то ***граничні умови***

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t) \quad (t>0)\;.$$

Якщо торці стержня теплоізольовані, то ***граничні умови***

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial(l,t)}{\partial x} = 0\;.$$

Таким чином, ***математична модель*** (задача математичної фізики) ***поширення тепла в*** тонкому однорідному циліндричному ***стержні*** довжини l з теплоізольованою бічною поверхнею і заданою температурою на торцях $x=0$, $x=l$ при відсутності внутрішніх джерел тепла має вигляд:

$$\text{(ДРЧП)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0<x<l;\ \ t>0) \tag{2.14}$$

$$\text{(ПУ)} \qquad u(x,0)=\varphi(x) \qquad (0<x<l) \tag{2.15}$$

$$\text{(ГУ)} \qquad u(0,t)=g_1(t)\ , \quad u(l,t)=g_2(t) \quad (t>0) \tag{2.16}$$

Зауваження. Ускладнення розглянутої задачі внаслідок залучення додаткових фізичних факторів приводить до більш складних ДРЧП. Наприклад, якщо всередині стержня знаходиться провід з електричним струмом, то опір матеріалу проводу призводить до виникнення всередині стержня рівномірно розподілених вздовж нього теплових джерел з інтенсивністю $\phi(x,t)$, яка віднесена до одиниці об`єму і одиниці часу. Тоді маємо ***одновимірне неоднорідне рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad (0<x<l;\ \ t>0) \tag{2.17}$$

де $f(x,t)=\phi(x,t)/(c\rho)$.

Нехай, окрім того, бічна поверхня стержня нетеплоізольована і між нею і навколишнім середовищем здійснюється теплообмін, який підлягає закону Ньютона: кількість тепла, яка передається за одиницю часу через одиницю поверхні пропорційна різниці температури стержня $u(x,t)$ і температури навколишнього середовища u_0. Тоді маємо ***одновимірне неоднорідне рівняння теплопровідності більш загального вигляду***

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta(u-u_0)+f(x,t) \quad (0<x<l;\ \ t>0) \tag{2.18}$$

де $\beta=\alpha\delta/(c\rho S)$; α – коефіцієнт теплообміну; δ – периметр поперечного перерізу стержня.

5.2.5. Математичні моделі стаціонарних процесів

Вивчення усталених (стаціонарних) процесів приводить до ДРЧП еліптичного типу. Наприклад, якщо в двовимірному однорідному рівнянні теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

вважати, що шукана температура u не залежить від часу, тобто $u=u(x,y)$, то похідна $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ тотожно дорівнює нулю і для знаходження $u(x,y)$ одержуємо ***двовимірне рівняння Лапласа***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{2.19}$$

яке відноситься до еліптичного типу.

До вказаного типу також належить ***двовимірне рівняння Пуассона***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) \tag{2.20}$$

Ці рівняння (2.19), (2.20) описують такі явища, як потенціал електростатичного поля, стаціонарний розподіл температури і т.п.

Наприклад, припустимо що обмежена замкнена просторова область V заповнена зарядженим провідником, у якому заряди можуть вільно переміщуватися, а решта простору заповнена діелектриком. Розглянемо просторове стаціонарне електростатичне поле, створене цим зарядженим провідником. У стаціонарному стані потенціал u у всіх точках області V, включаючи її межу σ, однаковий, оскільки інакше виник би рух зарядів і поле змінювалося би. Усередині провідника V заряди протилежних знаків повинні бути взаємно нейтралізовані, тому потенціал u задовольняє тривимірному рівнянню Лапласа $\Delta u=0$ $(\Delta u=div\,grad\,u=0)$, де $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа. Надлишковий заряд розміщується на межі σ провідника. Тому потенціал u в точці $M(x,y,z)$ поза провідником V виражається інтегралом $u=\iint_\sigma (\mu/|\vec{r}|)d\sigma$, де μ – поверхнева густина заряду; $|\vec{r}|$ – відстань від змінної точки поверхні σ до точки $M(x,y,z)$. Можна показати, що цей потенціал u також задовольняє рівнянню Лапласа. Отже, виникає задача знаходження функції $u=u(x,y,z)$, яка задовольняє рівнянню Лапласа у всіх точках простору, що оточує провідник V, при умові $u(x,y,z)|_\sigma=u_0$, де $u_0=const$ – відоме значення потенціалу на поверхні σ.

Для рівнянь еліптичного типу вказуються лише граничні умови, а початкові умови відсутні.

Обмежимося двовимірним випадком. Для однозначного обчислення $u=u(x,y)$ не треба задавати початковий розподіл шуканої величини u, а досить знати значення u на межі S області D, в якій вивчається дане явище, тобто маємо ***граничну умову першого типу***

$$u(x,y)|_S=g(x,y)\ ,\quad (x,y)\in S \tag{2.21}$$

де $g(x,y)$ - відома функція.

Гранична умова (2.21) виникає, коли межа S доступна для спостереження і в кожній її точці величину u можна виміряти.

Якщо ж у довільній точці межі S відома інтенсивність потоку $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ шуканої величини, то маємо ***граничну умову другого типу***

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_S=g(x,y)\ ,\quad (x,y)\in S \tag{2.22}$$

де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до межі S.

Гранична умова третього (***змішаного***) ***типу*** має комбінований вигляд

$$\left.\left(\alpha u(x,y)+\beta\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right)\right|_S=g(x,y)\ ,\quad (x,y)\in S \tag{2.23}$$

де α, β – задані числа.

5.3. Методи розв'язання задач математичної фізики

5.3.1. Розв'язання задачі Коші для хвильового рівняння методом характеристик. Біжучі хвилі

Однією з найважливіших задач теорії поширення хвиль служить задача про вільні коливання нескінченної однорідної струни з заданими початковим умовами (граничні умови відсутні). Математично вона формулюється як ***задача Коші (початкова задача) для одновимірного однорідного хвильового рівняння***

Знайти розв'язок $u(x,t)$ ДРЧП

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty;\ t > 0) \tag{3.1}$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x,0) = \varphi(x)\ , \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{3.2}$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – відомі функції.

Постановка такої задачі виправдана тим, що для досить довгої (практично нескінченної) струни, кінці якої розміщені на значній відстані від тієї ділянки, де вивчаються коливання, граничні умови на кінцях струни практично не впливають на режим цієї ділянки.

Для розв'язання задачі Коші (3.1), (3.2) використовується ***метод характеристик (метод біжучих хвиль*** або ***метод Д'Аламбера)***, оснований на інтегруванні канонічного вигляду ДРЧП.

Загальна схема методу:

1) Привести вихідне рівняння до канонічного вигляду, за допомогою заміни змінних.
2) Проінтегрувати одержане рівняння за новими незалежними змінними.
3) Повернутись до вихідних змінних.
4) Врахувати початкові умови.

Таким чином, розв'язання задачі Коші (3.1), (3.2) розбивається на чотири етапи:

1) Знаходимо неявні рівняння характеристик:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;\ A = 1;\ B = 0;\ C = -a^2;\quad \Delta = B^2 - AC = a^2 > 0;\ \frac{dx}{dt} = \frac{B \pm \sqrt{a}}{A};\ \frac{dx}{dt} = \pm a;$$

$$\int dx = \pm a \int dt;\quad x = \pm at + C;\quad x + at = C_1;\quad x - at = C_2$$

– неявні рівняння характеристик.

Вводимо заміну: $\xi = x + at;\ \eta = x - at$. Тоді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot at \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot (-a)\ ;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)-a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot a+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot(-a)\right)-a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot a+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(-a)\right)=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,;\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 1\,;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 1=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,.$$

Підставимо вирази для похідних в рівняння (3.1) і після спрощення одержимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$$

– канонічний вигляд ДРЧП.

2) Подамо канонічне рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$ у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0\,,$$

проінтегруємо за змінною η і отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=f(\xi)\,,$$

де $f(\xi)$ – довільна диференційовна функція від ξ. Інтегруючи останнє рівняння за ξ, одержуємо загальний розв’язок

$$u=f_1(\xi)+f_2(\xi)\,,$$

де $f_1(\xi)=\int f(\xi)d\xi$; $f_1(\xi)$ і $f_2(\eta)$ – довільні функції, які будемо вважати двічі диференційовними.

3) Підставимо в отриманий загальний розв’язок формули заміни $\xi=x+at;\ \eta=x-at$ і одержимо

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at) \tag{3.3}$$

4) Серед розв’язків (3.3) знайдемо частинний розв’язок, який задовольняє початкові умови (3.2).

Поклавши в (3.3) $t=0$, в силу умови $u(x,0)=\varphi(x)$ маємо

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x) \tag{3.4}$$

Продиференціювавши (3.3) за змінною t і поклавши потім $t=0$, в силу умови $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)$ маємо

$$a\left(f_1'(x)-f_2'(x)\right)=\psi(x)\,.$$

Інтегруючи одержане співвідношення в межах від 0 до x, знаходимо

$$a\left(f_1(x)-f_2(x)\right)=\int_0^x \psi(z)dz+C \tag{3.5}$$

де C – довільна стала.

Із (3.4), (3.5) визначаємо функції

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz+\frac{C}{2a} \tag{3.6}$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz-\frac{C}{2a} \tag{3.7}$$

Підставимо (3.6), (3.7) в (3.3) і одержимо

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz \tag{3.9}$$

– розв’язок задачі Коші.

Співвідношення (3.9) називається ***формулою Д'Аламбера***.

Зауваження. Нехай $u_*(x,t)=f_{1*}(x+at)+f_{2*}(x-at)$ – один з частинних розв’язків ДРЧП (3.1). Процес, який описується функцією $f_{2*}(x-at)$, називається ***поширенням прямої хвилі***, що має сталу форму і як жорстка система рухається зліва направо вздовж осі Ox зі швидкістю a. Процес, який описується функцією $f_{1*}(x+at)$, називається ***поширенням зворотної хвилі***, що має сталу форму і як жорстка система рухається справа наліво вздовж осі Ox зі швидкістю a. Пряма і зворотна хвилі називаються ***біжучими хвилями***. Таким чином, *будь-який частинний розв’язок (3.9) хвильового рівняння (3.1) можна розглядати як суперпозицію (накладання) прямої та зворотної хвиль*.

Дамо просторово-часову інтерпретацію формули Д'Аламбера (3.9). Візьмемо на xOt - площині (рис. 5) довільну точку $M_0(x_0;t_0)$ і проведемо через неї дві прямі $x-at=x_0-at_0$, $x+at=x_0+at_0$ – характеристики хвильового рівняння (3.1). Тоді розв’язок задачі Коші $u(x_0;t_0)$ в точці $M_0(x_0;t_0)$ можна розглядати як середнє значення функції $\varphi(x)$ (початкового відхилення) в точках $x_1=x_0-at_0$ і $x_2=x_0+at_0$ плюс інтеграл з множником $\frac{1}{2a}$ від початкової швидкості $\psi(x)$ в межах від x_1 до x_2.

Якщо $\psi(x)\equiv 0$, то розв’язок задачі Коші (3.1), (3.2) визначається формулою

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right) \tag{3.10}$$

Процес, який описується рівністю (3.10), називається ***поширенням початкового відхилення***.

Якщо $\varphi(x)\equiv 0$, то розв’язок задачі Коші (3.1), (3.2) задається формулою

$$u(x,t)=\phi(x+at)-\phi(x-at) \tag{3.11}$$

де $\phi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz$.

Процес, який описується рівністю (3.11), називається ***поширенням хвиль імпульсу***.

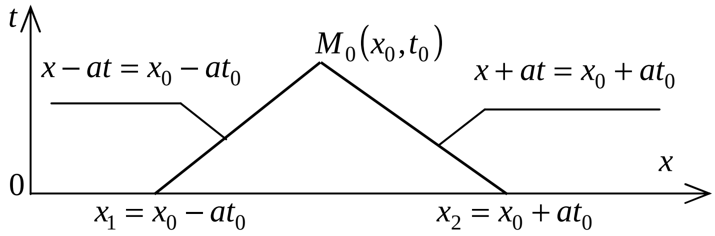

Рис. 5

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$(-\infty<x<+\infty;\ t>0)\ ;$$

$$u(x,0)=e^{-x^2}\ ;\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$$

$$(-\infty<x<+\infty)\ .$$

(Процес поширення початкового відхилення).

Розв'язання. За формулою (3.10) одержимо розв'язок цієї задачі

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(e^{-(x+at)^2}+e^{-(x-at)^2}\right).$$

Його можна інтерпретувати так: початкове збурення (зміщення) струни $u(x,0)=e^{-x^2}$ ділиться на дві однакові частини $(1/2)e^{-x^2}$ і $(1/2)\,e^{-x^2}$, кожна з яких поширюється зі швидкістю a у вигляді біжучих хвиль $(1/2)e^{-(x+at)^2}$ і $(1/2)e^{-(x-at)^2}$, які рухаються вздовж осі Ox в протилежних напрямках; накладання цих хвиль дає результуючу хвилю. На рис. 6 показано пряму хвилю $(1/2)e^{-(x-at)^2}$.

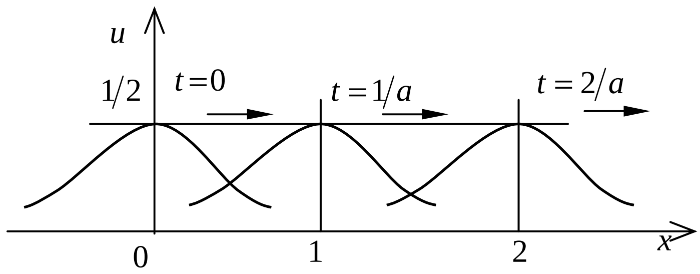

Рис. 6

Приклад 2. Знайти форму нескінченної струни в момент часу $t=\pi/8$, яка описується хвильовим рівнянням $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо початкова форма струни $u\big|_{t=0}=\cos 2x$, а початкова швидкість $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin 2x$.

Розв'язання. $\varphi(x)=\cos 2x$; $\psi(x)=\sin 2x$; $a^2=16$; $a=4$. За формулою Д'Аламбера

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\cos 2(x+4t)+\cos 2(x-4t))+\frac{1}{2\cdot 4}\int\limits_{x-4t}^{x+4t}\sin 2z dz=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2(x+4t)+\cos 2(x-4t))+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}(-\cos 2z)\Big|_{x-4t}^{x+4t}=\cos 2x\cdot\cos 4t+\frac{1}{16}(-\cos 2(x+4t)+$$

$$+\cos 2(x-4t))=\cos 2x\cdot\cos 4t+\frac{1}{8}\sin 2x\,\sin 4t\ ;$$

$$u\left(x,\frac{\pi}{8}\right)=\cos 2x\cdot\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{8}\right)+\frac{1}{8}\sin 2x\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{8}\sin 2x.$$

Отже, шуканий розв'язок $u\left(x,\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{8}\sin 2x$.

Приклад 3. Необмежений пружний стержень одержаний сполученням у точці $x=0$ двох напівнескінченних однорідних стержнів. При $x<0$ густина маси, модуль пружності і швидкість поширення малих повздовжніх збурень дорівнюють ρ_1, E_1, a_1, а при $x>0$ вони дорівнюють ρ_2, E_2, a_2. Нехай із області $x<0$ по стержню біжить хвиля $u_1(x,t)=f(t-x/a_1)$ (***падаюча хвиля***). Знайти ***відбиту та заломлену хвилі***. Дослідити розв'язок при $E_2\to 0$ і при $E_2\to+\infty$.

Розв'язання. Для відхилення точок стержня можна написати рівняння

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=a_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \qquad (-\infty<x<0,\quad t>0) \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \qquad (0<x<+\infty,\quad t>0) \tag{3.13}$$

і початкові умови

$$u_1(x,0)=f(-x/a_1)\ ,\qquad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t}=f'(-x/a_1)\quad (-\infty<x<0) \tag{3.14}$$

$$u_2(x,0)=0\ ,\qquad \frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t}=0 \qquad (0<x<+\infty) \tag{3.15}$$

До цих рівнянь і початкових умов треба добавити ще дві ***умови спряження*** в точці $x=0$

$$u_1(0,t)=u_2(0,t)\qquad (t>0) \tag{3.16}$$

(неперервність зміщень) і

$$E_1\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}=E_2\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}\qquad (t>0) \tag{3.17}$$

(неперервність напруг).

Невідомі функції шукаємо у вигляді

$$u_1(x,t)=f_1(t-x/a_1)+g_1(t+x/a_1)\qquad (-\infty<x<0,\quad t>0) \tag{3.18}$$

$$u_2(x,t)=f_2(t-x/a_2)+g_2(t+x/a_2)\qquad (0<x<+\infty,\quad t>0) \tag{3.19}$$

Чотири функції $f_1(s)$, $g_1(s)$, $f_2(s)$, $g_2(s)$ визначимо з початкових умов і умов спряження. Використовуючи початкові умови (3.14), (3.15) маємо:

$$f_1(-x/a_1)+g_1(-x/a_1)=f(-x/a_1) \tag{3.20}$$

$$f_1'(-x/a_1)+g_1'(-x/a_1)=f_1'(-x/a_1) \tag{3.21}$$

$$f_2(-x/a_2)+g_2(-x/a_2)=0 \tag{3.22}$$

$$f_2'(-x/a_2)+g_2'(-x/a_2)=0 \tag{3.23}$$

Позначимо $x/a_1=s$; $x/a_2=r$ і проінтегруємо рівняння (3.21), (3.23) відповідно за s і r. В результаті маємо дві системи

$$f_1(-s)+g_1(s)=f(-s)\qquad (-\infty<s<0) \tag{3. 24}$$

$$-f_1(-s)+g_1(s)=-f(-s)\qquad (-\infty<s<0) \tag{3. 25}$$

і

$$f_2(-r)+g_2(r)=0\qquad (0<r<+\infty) \tag{3. 26}$$

$$-f_2(-r)+g_2(r)=0\qquad (0<r<+\infty) \tag{3. 27}$$

Розв’язавши одержані системи (3.24), (3.25) і (3.26), (3.27), знайдемо

$$f_1(-s) = f(-s), \quad g_1(s) = 0 \qquad (-\infty < s < 0) \tag{3.28}$$

$$f_2(-r) = 0\ , \quad g_2(r) = 0 \qquad (0 < r < +\infty) \tag{3.29}$$

Враховуючи (3.28) і (3.29), шукані функції (3.18), (3.19) набувають вигляду

$$u_1(x,t) = \begin{cases} f(t - x/a_1) + g_1(t + x/a_1)\,, & t + x/a_1 > 0; \\ f(t - x/a_1)\,, & t + x/a_1 < 0; \end{cases} \tag{3.30}$$

$$u_2(x,t) = \begin{cases} f_2(t - x/a_2)\,, & t - x/a_2 > 0\,; \\ 0, & t - x/a_2 < 0\,. \end{cases} \tag{3.31}$$

Підставимо одержані вирази (3.30) і (3.31) в умови спряження (3.16), (3.17). В результаті маємо

$$f(t) + g_1(t) = f_2(t) \quad (t > 0) \tag{3.32}$$

$$E_1\left(-\frac{1}{a_1} f'(t) + \frac{1}{a_1} g_1'(t)\right) = E_2\left(-\frac{1}{a_2} f_2'(t)\right) \quad (t > 0) \tag{3.33}$$

Враховуючи, що $a_1 = \sqrt{E_1/\rho_1}$ і $a_2 = \sqrt{E_2/\rho_2}$, та інтегруючи (3.33), отримаємо

$$\sqrt{E_1\rho_1}\,(-f(t) + g_1(t)) = \sqrt{E_2\rho_2}\,(-f_2(t)) \tag{3.34}$$

Таким чином, об’єднуючи (3.32) і (3.34), для знаходження $f_2(t)$ і $g_1(t)$ маємо систему

$$f(t) + g_1(t) = f_2(t); \quad \sqrt{E_1\rho_1}\,(-f(t) + g_1(t)) = \sqrt{E_2\rho_2}\,(-f_2(t)).$$

Звідси

$$g_1(t) = \frac{\sqrt{E_1\rho_1} - \sqrt{E_2\rho_2}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}}\, f(t); \quad f_2(t) = \frac{2\sqrt{E_1\rho_1}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}}\, f(t).$$

Тоді шуканий розв’язок поставленої крайової задачі визначається формулами

$$u_1(x,t) = \begin{cases} f(t - x/a_1) + \left(\sqrt{E_1\rho_1} - \sqrt{E_2\rho_2}\right)/\left(\sqrt{E_1\rho_1} + \right. \\ \left. + \sqrt{E_2\rho_2}\right) f(t + x/a_1), \qquad t + x/a_1 > 0; \\ f(t - x/a_1), \quad t + x/a_1 < 0; \end{cases} \tag{3.35}$$

де $-\infty < x < 0$;

$$u_2(x,t) = \begin{cases} \left(2\sqrt{E_1\rho_1}\right)/\left(\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}\right) \times \\ \times f(t - x/a_2), \qquad t - x/a_2 > 0; \\ 0, \quad t - x/a_2 < 0, \end{cases} \tag{3.36}$$

де $0 < x < +\infty$.

У формулі (3.35) доданок

$$g_1\left(t + \frac{x}{a_1}\right) = \frac{\sqrt{E_1\rho_1} - \sqrt{E_2\rho_2}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}}\, f\left(t + \frac{x}{a_1}\right) \tag{3.37}$$

де $t + x/a_1 > 0$, є ***відбитою хвилею***.

З виразу (3.37) випливає: якщо $E_1\rho_1 = E_2\rho_2$, то відбита хвиля відсутня $g_1(t + x/a_1) = 0$; якщо $E_2 = 0$, то відбита хвиля $g_1(t + x/a_1) = f(t + x/a_1)$; якщо

$E_2 = +\infty$, то відбита хвиля $g_1(t + x/a_1) = -f(t + x/a_1)$.

Заломлена хвиля – це $u_2(x,t)$ при $t - x/a_2 > 0$.

З виразу (3.36) випливає: якщо $E_2 = 0$, то заломлена хвиля має вдвічі більшу амплітуду, ніж падаюча хвиля $u_2(x,t) = 2f(t - x/a_2)$; якщо $E_2 = +\infty$, то заломлена хвиля відсутня $u_2(x,t) = 0$.

5.3.2. Розв`язання першої крайової задачі для одновимірного хвильового рівняння методом відокремлення змінних. Стоячі хвилі

Розв`язок хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

на всій прямій $-\infty < x < +\infty$ за формулою Д'Аламбера зображається у вигляді суперпозиції двох біжучих хвиль, які поширюються в протилежних напрямках. Якщо розглядати це рівняння на обмеженому проміжку $0 < x < l$, то біжучих хвиль вже не буде, оскільки вони будуть взаємодіяти з межами області. Замість них виникають інші, що називаються ***стоячими хвилями***.

Метод відокремлення змінних (метод стоячих хвиль або ***метод Фур`є)*** – один з найбільш ефективних аналітичних способів розв`язання крайових задач для широкого кола лінійних ДРЧП. Звичайно його застосовують тоді, коли рівняння і граничні умови є лінійними та однорідними. У багатьох випадках він дозволяє будувати розв`язки крайових задач і для неоднорідних ДРЧП з неоднорідними граничними умовами.

Суть методу відокремлення змінних полягає у відшуканні розв`язку крайової задачі у вигляді ряду Фур`є за деякою ортогональною системою функцій, пов`язаних з цією задачею.

Загальна схема методу для випадку одновимірного однорідного лінійного ДРЧП гіперболічного (чи параболічного) типу:

1) Знаходження всієї нескінченної множини нетривіальних (ненульових) розв`язків спеціального вигляду добутку функцій $u(x,t) = X(x)T(t)$, кожна з яких залежить тільки від одного аргументу, з врахуванням однорідних граничних умов. В результаті ДРЧП розщеплюється на звичайні диференціальні рівняння, кожне з яких включає лише одну функцію-співмножник. Потім знаходять розв`язки цих звичайних диференційних рівнянь, які задовольняють виділені нульові граничні умови на межі досліджуваної області. Однорідні елементарні розв`язки узгоджуються між собою і з них формується нескінченна послідовність розв`язків.

2) Побудова на основі принципу суперпозиції розв`язку однорідного лінійного ДРЧП, який задовольняє як граничні, так і початкові умови, у вигляді нескінченного ряду, що формується з одержаної на першому етапі послідовності елементарних розв`язків. Слід зазначити, що в класичному припущенні цей ряд повинен бути рівномірно збіжним разом з рядами, які одержуються з нього диференціюванням необхідне число разів за незалежними змінними. Відповідний

розв`язок називається ***класичним***. Якщо вказана умова не виконується, то відповідний розв`язок називається ***узагальненим***.

Розглянемо задачу про вільні коливання однорідної струни довжини l з жорстко закріпленими кінцями $x = 0$, $x = l$. Припустимо, що середовище опору не чинить і зовнішні сили на струну не діють. Математично вона формулюється як ***перша крайова задача (задача Діріхле) для одновимірного однорідного хвильового рівняння***:

знайти розв`язок $u(x,t)$ ДРЧП

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l, \quad t > 0) \tag{3.38}$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x,0) = \varphi(x); \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (0 < x < l) \tag{3.39}$$

і однорідні граничні умови першого типу

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0 \qquad (t > 0) \tag{3.40}$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – відомі функції; a, l – відомі числа, $a > 0$, $l > 0$.

Згідно з методом відокремлення змінних розв`язання задачі (3.38) – (3.40) розбивається на два етапи:

<u>1) Знаходження нескінченної послідовності елементарних розв`язків, що задовольняють однорідні граничні умови</u>.

Шукаємо ненульові розв`язки у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.41}$$

де $X(x)$ – функція тільки від x, а $T(t)$ – тільки від t.

Підставимо (3.41) в рівняння (3.38) і одержимо

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) .$$

Відокремимо змінні в цьому рівнянні, поділивши обидві його частини на $a^2 X(x) T(t)$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{3.42}$$

Ця рівність (3.42) двох відношень, кожне з яких залежить тільки від x чи тільки від t, можлива лише у випадку, коли обидва відношення дорівнюють одній і тій же сталій величині. Позначимо її через λ

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda .$$

Звідси дістанемо два звичайні диференціальні рівняння

$$X'' - \lambda X = 0 ; \qquad T'' - a^2 \lambda T = 0 \tag{3.43}$$

де λ – довільне дійсне число (***параметр розщеплення***).

Розв`яжемо рівняння (3.43) для трьох можливих випадків значень параметра розщеплення λ.

а) Якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, тоді: $X'' + \beta^2 X = 0$; $k^2 + \beta^2 = 0$; $k_{1,2} = \pm\beta i$;

$$X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) \tag{3.44}$$

$$T'' + a^2\beta^2 T = 0 \ ; \quad k^2 + a^2\beta^2 = 0 ; \quad x_{1,2} = \pm a\beta i \ ;$$

$$T = C\cos(a\beta t) + D\sin(a\beta t) \tag{3.45}$$

б) Якщо $\lambda = 0$, тоді:

$$X'' = 0 ; \quad X' = A ; \quad X = Ax + B \tag{3.46}$$

$$T'' = 0 ; \quad T' = C ; \quad T = Ct + D$$

в) Якщо $\lambda = \beta^2 > 0$, тоді: $X'' - \beta^2 x = 0$; $k^2 - \beta^2 = 0$; $k_{1,2} = \pm\beta$;

$$X = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x} \tag{3.47}$$

$$T'' - a^2\beta^2 T = 0 ; \quad k^2 - a^2\beta^2 = 0 ; \quad k_{1,2} = \pm a\beta ; \ T = Ce^{a\beta t} + De^{-a\beta t} \ .$$

В силу довільності сталих A, B, C, D, λ маємо нескінченну множину розв`язків рівняння (3.38).

Виділимо з неї підмножину розв`язків, які задовольняють граничні умови (3.40).

Підставляючи вираз (3.41) у граничні умови (3.40), маємо

$$X(0)T(t) = 0 ; \quad X(l)T(t) = 0 \quad (t > 0) \ .$$

Оскільки для ненульових розв`язків (3.41) $T(t) \neq 0 \quad (t > 0)$, то $X(0) = 0$; $X(l) = 0$.

Таким чином, крайова задача для звичайного диференціального рівняння

(ЗДР) $$X'' - \lambda X = 0 \quad (0 < x < l) \tag{3.48}$$

(ГУ) $$X(0) = 0 ; \quad X(l) = 0 \tag{3.49}$$

дає можливість відібрати ненульові розв`язки (3.41), які задовольняють граничні умови (3.40). Значення $\lambda$, для якого крайова задача (3.48, (3.49) має ненульовий розв`язок, називається ***власним значенням (власним числом)***, а відповідний розв`язок $X(x)$ – ***власною функцією***. Множина всіх власних значень називається ***спектром***, а задача (3.48), (3.49) про відшукання спектра і відповідної йому ***системи власних функцій – спектральною задачею або задачею Штурма–Ліувілля***. Зазначимо, що *власні функції визначаються з точністю до сталого множника*.

Розглянемо три можливих випадки значень параметра розщеплення λ.

а) Якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, то загальний розв`язок рівняння (3.48) визначається формулою (3.44). Підставляючи його у граничні умови (3.49), маємо

$$A = 0 ; \quad A\cos(\beta l) + B\sin(\beta l) = 0 \ .$$

Звідси $B\sin(\beta l) = 0$. Якщо покласти $B = 0$, то отримаємо нульовий розв`язок $X(x) = 0$. Тому треба вважати, що

$$\sin(\beta l) = 0 \ .$$

Розв`язавши одержане тригонометричне рівняння, знаходимо власні значення

$$\beta l = \pi n,\ n \in Z\ ; \qquad \beta_n = \pi n / l\ ;$$

$$\lambda_n = -\pi^2 n^2 / l^2\ ; \quad n = 1,2,... \tag{3.50}$$

і відповідні їм власні функції

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{\pi n x}{l}\ , \quad n = 1,2,... \tag{3.51}$$

де B_n – довільна стала, відмінна від нуля.

Зазначимо, що в (3.50), (3.51) нема необхідності розглядати значення $n = 0, -1, -2,...$. При $n = 0$ маємо нульовий розв`язок $X_0(x) = 0$, а при $n = -1,-2,...$ власні функції відрізняються тільки знаком від знайдених $X_n(x)$ і тому не поповнюють набір власних функцій (3.51) новими ***лінійно незалежними функціями***.

В цьому випадку функція $T(t)$ визначається формулою (3.45), яка з урахуванням (3.50) набуває вигляду

$$T_n(t) = C_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + D_n \sin\frac{\pi n a t}{l} \tag{3.52}$$

де C_n, D_n – довільні сталі; $n = 1,2,...$.

Відповідно маємо ненульові розв`язки вигляду (3.41) вихідного ДРЧП (3.38), які задовольняють однорідні граничні умови (3.40)

$$U_n(x,t) = \sin\frac{\pi n x}{l}\left(a_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin\frac{\pi n a t}{l}\right) \tag{3.53}$$

де a_n, b_n – довільні сталі, причому сталі B_n, C_n, D_n введено до складу a_n, b_n; $n = 1,2,...$.

б) Якщо $\lambda = 0$, то загальний розв`язок рівняння (3.48) має вигляд (3.46). Підставляючи його в граничні умови(3.49), одержуємо

$$B = 0\ ; \quad Al + B = 0\ .$$

Звідси $A = 0; B = 0$, тобто маємо нульовий розв`язок

$$X(x) = 0\ .$$

в) Якщо $\lambda = \beta^2 > 0$, то загальний розв`язок рівняння (3.48) має вигляд (3.47). Підставляючи його в граничні умови (3.49), отримаємо систему для знаходження A і B

$$A + B = 0\ ; \qquad Ae^{\beta l} + Be^{-\beta l} = 0\ .$$

Оскільки $\beta \neq 0$, то звідси одержимо $A = 0; B = 0$. Тобто, при будь-якому значенні $\lambda = \beta^2 > 0$ крайова задача (3.48), (3.49) має тільки нульовий розв`язок $X(x) = 0$.

Таким чином, всі ненульові розв`язки ДРЧП(3.38), які задовольняють однорідні граничні умови (3.40), утворюють послідовність, що визначається формулою (3.53).

2) Знаходження розв`язку, який задовольняє як граничним, так і початковим умовам.

Оскільки задане ДРЧП (3.38) і граничні умови (3.40) лінійні і однорідні, то згідно з принципом суперпозиції сума його розв`язків також є розв`язком. Більш того, функція $u(x,t)$, яка задається рядом

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nat}{l}+b_n\sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l} \qquad (3.54)$$

також є розв`язком, який задовольняє однорідні граничні умови.

Для знаходження коефіцієнтів a_n, b_n скористаємося початковими умовами (3.39). Одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{\pi nx}{l}=\varphi(x) \qquad (0<x<l) \qquad (3.55)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi na}{l}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}=\psi(x) \qquad (0<x<l) \qquad (3.56)$$

Співвідношення (3.55), (3.56) можна розглядати як розвинення відомих функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ в ряди Фур`є за синусами на проміжку $[0;l]$. Вважаючи, що умови розвинення цих функцій в ряд Фур`є виконані (наприклад, функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ задовольняють умовам Діріхле на відрізку $[0;l]$), скористаємося відомими формулами для коефіцієнтів Фур'є

$$f(x)=\sum_{n=`}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi nx}{l}\ ; \qquad A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$$

і отримаємо

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \qquad (3.57)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \qquad (3.58)$$

Отже, розв`язок крайової задачі (3.38) – (3.40) записується у вигляді функціонального ряду (3.54), коефіцієнти якого визначаються за формулами (3.57), (3.58).

Зауваження 1. При розв`язанні крайової задачі методом відокремлення змінних суттєва однорідність граничних умов, причому ці умови можуть бути не тільки першого типу

$$u(0,t)=0\,; \qquad u(l,t)=0 \qquad (t>0)\ ,$$

а й другого

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0\ ; \qquad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0 \qquad (t>0)$$

чи третього (змішаного)

$$\alpha u(0,t)+\beta\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0\ ; \qquad \gamma u(l,t)+\delta\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0$$

типу.

Якщо граничні умови ненульові, то заміною змінних задачу треба попередньо звести до випадку однорідних (нульових) граничних умов.

Наприклад, якщо задано граничні умови

$$u(0,t)=g_1(t);\quad u(l,t)=g_2(t)\qquad (t>0)\ ,$$

то використовується заміна $u=v+w$.

Тут $v=v(x,t)$ – довільно задана функція, що задовольняє вказані граничні умови, зокрема, можна покласти $v=\left(1-\frac{x}{l}\right)g_1(t)+\frac{x}{l}g_2(t).$; $w=w(x,t)$ – нова шукана функція, що задовольняє однорідні граничні умови.

Звичайно, диференціальне рівняння і початкові умови при цьому дещо ускладнюються.

Зауваження 2. Якщо треба розв`язати крайову задачу для неоднорідного ДРЧП з однорідними граничними умовами, то її розв`язок шукають у вигляді функціонального ряду за власними функціями $X_n(x)$ відповідної однорідної задачі (***метод розкладання за власними функціями***). Можливий також інший підхід: якщо для неоднорідного ДРЧП, яким-небудь способом знайти частинний розв`язок v, що задовольняє однорідні граничні і однорідні початкові умови, то введення нової шуканої функції w за формулою $u=v+w$ приводить до відповідної крайової задачі для однорідного ДРЧП.

Зауваження 3. Розв`язок першої крайової задачі (3.38) – (3.40), який визначається формулою (3.54), можна подати у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\left(\frac{\pi nat}{l}+\alpha_n\right)\tag{3.59}$$

де

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\tag{3.60}$$

$$\sin\alpha_n=a_n\Big/\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ ;\ \ \cos\alpha_n=b_n\Big/\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ .\tag{3.61}$$

Кожний член $u_n(x,t)=A_n\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\left(\frac{\pi nat}{l}+\alpha_n\right)$ розкладу (3.59) – це так звана ***стояча хвиля або власне коливання***. Сталі A_n і α_n називаються відповідно ***амплітудою*** і ***початковою фазою*** стоячої хвилі $u_n(x,t)$. Кожна точка струни з фіксованою абсцисою x здійснює гармонічні коливання $u(x,t)$ з амплітудою $A_n\sin\frac{\pi nx}{l}$, різною для різних точок струни, і з однаковими ***частотою*** $\omega_n=\pi na/l$ і ***початковою фазою*** α_n. Вся струна розбивається на n рівних ділянок, причому точки однієї і тієї ж ділянки знаходяться в одній і тій же ***фазі*** $\pi nat/l+\alpha_n$, а точки сусідніх ділянок – в прямо протилежних фазах. На рис. 7 зображені послідовні положення струни для випадку $n=1,\ 2,\ 3$.

Точки, які відділяють одну ділянку від іншої, знаходяться в спокої. Це так звані ***вузли***. Середини ділянок, які називають ***пучностями***, коливаються з найбільшою амплітудою A_n. ***Основний тон***, який характеризує ***висоту*** звуку, визначається першою складовою $u_1(x,t)$. Інші ***тони (обертони)***, $u_n(x,t)$, $n=2,3,\dots$, які видає струна одночасно з основним тоном, характеризують певне забарвлення (***тембр***) звуку. Рух струни в цілому представляє собою накладання різних власних коливань, коли струна одночасно бере участь у всіх цих коливаннях.

Приклад 1. Знайти закон коливань струни довжиною l, яка розміщена на відрізку $[0;l]$, якщо в початковий момент струні надають форми синусоїди $\varphi(x) = A\sin\frac{2\pi}{l}x$, а потім її відпускають без початкової швидкості. Кінці струни закріплені, зовнішні сили відсутні.

Розв`язання. З математичної точки зору маємо першу крайову задачу: знайти розв`язок однорідного хвильового рівняння

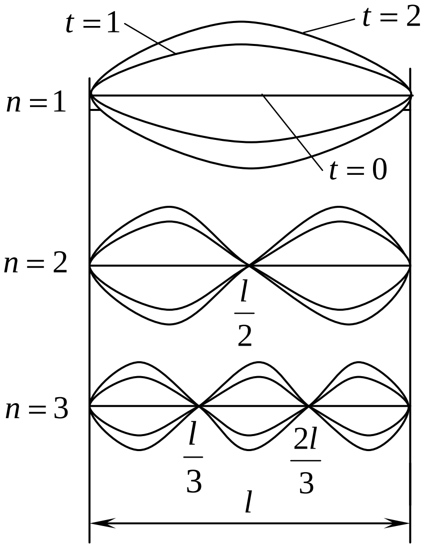

Рис. 7

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l,\ \ t > 0)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x,0) = A\sin((2\pi x)/l); \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (0 < x < l)$$

і однорідні граничні умови першого типу

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0 \quad (t > 0)$$

За формулами (3.57) і (3.58) знаходимо

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l A\sin\frac{2\pi}{l}x\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \begin{cases} 0, & n \neq 2; \\ A, & n = 2; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi na}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0 .$$

Тоді згідно з (3.54) одержуємо шуканий розв`язок

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nat}{l} + b_n\sin\frac{\pi nat}{l}\right)\times.\ \sin\frac{\pi nx}{l} = A\cos\frac{2\pi at}{l}\sin\frac{2\pi x}{l} .$$

Приклад 2. По середині вільної струни, кінці якої закріплені в точках $x = 0$ і $x = l$, в початковий момент часу $t = 0$ вдаряють плоским молоточком шириною h і надають відповідній ділянці струни початкової швидкості v_0. Визначити форму струни в довільний момент часу t, якщо початкове відхилення струни відсутнє.

Розв`язання. Математично маємо першу крайову задачу: знайти розв`язок однорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l,\ \ t > 0),$$ який задовольняє початкові умови

$$u(x,0) = 0; \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v_0 \ \left(\frac{l}{2} - \frac{h}{2} \le x \le \frac{l}{2} + \frac{h}{2}\right); \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \ \left(0 < x < \frac{l}{2} - \frac{h}{2};\ \ \frac{l}{2} + \frac{h}{2} < x < l\right)$$

і однорідні граничні умови $u(0,t) = 0$; $u(l,t) = 0$ $(t > 0)$.

За формулами (3.57) і (3.58) знаходимо

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0; \quad b_n = \frac{2}{\pi na}\int_{(l-h)/2}^{(l+h)/2} v_0\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{4v_0 l}{\pi^2 n^2 a}\sin\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi nh}{2l} .$$

Тоді згідно з (3.54) одержуємо шуканий розв`язок

$$u(x,t)=\frac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi nh}{2l}\sin\frac{\pi nat}{l}\sin\frac{\pi nx}{l} .$$

Приклад 3. Провідник довжиною l, по якому тече змінний струм, вкритий такою якісною ізоляцією, що втрати через його поверхню практично відсутні. Крім того, активний опір настільки малий, що ним можна знехтувати. Початкове значення сили струму в провіднику дорівнює нулю $u(x,0)=0$, а початкова напруга задається формулою $u(x,0)=E_0\sin\frac{3\pi x}{2l}$. Обидва кінці провідника ізольовані. Знайти силу струму $i(x,t)$ в кожній точці провідника в довільний момент часу.

Розв`язання. Сила струму $i(x,t)$ задовольняє телеграфному рівнянню (2.12). Оскільки за умовою задачі втрати через ізоляцію і активний опір відсутні, тобто $G=0$, $R=0$, то це рівняння переходить в однорідне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} ,$$

де $a^2=\frac{1}{LC}$; L – індуктивність, C – ємність провідника.

З першого рівняння (2.7) системи (2.7), (2.8) маємо

$$\frac{\partial i}{\partial t}=-\frac{1}{L}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{R}{L}i .$$

Оскільки з умови задачі

$$i(x,0)=0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial x}=\frac{3\pi E_0}{2l}\cos\frac{3\pi x}{2l} ,$$

то звідси одержимо

$$\frac{\partial i(x,0)}{\partial t}=-\frac{3\pi E_0}{2lL}\cos\frac{3\pi x}{2l} .$$

Оскільки кінці провідника ізольовані, то шукана функція $i(x,t)$ задовольняє однорідні граничні умови $i(0,t)=0$, $i(l,t)=0$.

Таким чином, задача допускає наступне математичне формулювання:

знайти розв`язок однорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} ,$$

який задовольняє початкові умови

$$i(x,0)=0 ; \quad \frac{\partial i(x,0)}{\partial t}=-\frac{3\pi E_0}{2lL}\cos\frac{3\pi x}{2l}$$

і однорідні граничні умови $i(0,t)=0$, $i(l,t)=0$.

За формулами (3.57), (3.58) знаходимо

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}dx=0 ; \quad b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\left(-\frac{3E_0\pi}{2lL}\cos\frac{3\pi x}{2l}\right)\sin\frac{\pi ns}{l}dx=\frac{12E_0}{aL(4n^2-9)} .$$

Тоді згідно з (3.54) одержимо шуканий розв`язок

$$i(x,t)=\frac{12E_0}{aL}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-9}\sin\frac{\pi nat}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\ .$$

Приклад 4. Вимушені коливання однорідної струни, кінці якої $x=0$ і $x=l$ жорстко закріплені, описуються хвильовим рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\ ,$$

де вільний член, що відображає неперервно розподілену збуджуючу силу, задається рівністю $f(x,t)=x\sin\omega t$.

Знайти відхилення точок струни $u(x,t)$ при вимушених коливаннях, якщо початкові відхилення і швидкості дорівнюють нулю. Опором середовища знехтувати. Тут a і l – відомі величини.

Розв`язання. Математична постановка задачі має вигляд:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\sin\omega t \quad (0<x<l,\ \ t>0)$;

(ПУ) $u(x,0)=0;\ \ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \quad (0<x<l)$; (ГУ) $u(0,t)=0;\ \ u(l,t)=0 \quad (t>0)$.

Основна ідея розв`язання цієї задачі полягає в розкладі вільного члена $f(x,t)=x\sin\omega t$ і шуканої функції $u(x,t)$ у відповідні ряди за власними функціями $X_n(x)=\sin\dfrac{\pi nx}{l}$ задачі Штурма–Ліувілля (3.48), (3.49):

$$f(x,t)=x\sin\omega t=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\ ;\ \ u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\,.$$

Одержані співвідношення є розвиненнями відповідних функцій у ряди Фур`є за синусами на проміжку $[0;\,l]$. Оскільки функція $f(x,t)$ відома, то обчислимо коефіцієнти її ряду Фур`є:

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{l}\sin\omega t\int_0^l x\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\left|\tilde u=x;\ d\tilde u=dx;\ d\tilde v=\sin\frac{\pi nx}{l}dx;\right.$$

$$\left.\tilde v=-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{l}\right|=\frac{2}{l}\sin\omega t\left(-\frac{lx}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{l}\bigg|_0^l+\frac{l}{\pi n}\int_0^l\cos\frac{\pi nx}{l}dx\right)=$$

$$=\frac{2\sin\omega t}{l}\left(-\frac{l^2}{\pi n}\cos\pi n+\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi nx}{l}\bigg|_0^l\right)=\frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\omega t\,.$$

Для знаходження коефіцієнтів $T_n(t)$ підставимо в ДРЧП отримані розвинення. В результаті маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)X_n(x)=a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n''(x)+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x)\ .$$

Оскільки згідно з рівнянням (3.48) $X_n''(x)=\lambda_n X_n(x)$, то одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t)-a^2\lambda_n T_n(t)-f_n(t)\right)X_n(x)=0\ ,$$

де $\lambda_n=-\pi^2n^2/l^2$ - власні числа задачі Штурма–Ліувілля.

Система власних функцій $X_n(x)=\sin\frac{\pi n x}{l}$ $(n=1,\,2,\,...)$ лінійно незалежна. Тому рівність останнього ряду нулю можлива тільки в тому випадку, коли всі коефіцієнти при $X_n(x)$ дорівнюють нулю. Звідси маємо диференціальні рівняння:

$$T_n''(t)-a^2\lambda_n T_n(t)-f_n(t)=0 \quad (n=1,\,2,\,...)\;.$$

Підставимо розклад $u(x,t)$ в початкові умови

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{\pi n x}{l}=0; \quad \sum_{n=1}^{\infty}T_n''(0)\sin\frac{\pi n x}{l}=0\;.$$

Звідси $T_n(0)=0$, $T_n'(0)=0$ $(n=1,\,2,\,...)$.

Таким чином, кожна функція $T_n(t)$ визначається як розв`язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння:

(ЗДР) $T_n''(t)-a^2\lambda_n T_n(t)=f_n(t)$, (ПУ) $T_n(0)=0;$ $T_n'(0)=0$,

де $\lambda_n=-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}$; $f_n(t)=\frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\omega t$.

Розв`яжемо поставлену задачу Коші за допомогою характеристичного рівняння:

$$T_n''+\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}T_n=\frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\omega t; \quad k^2+\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}=0\;;$$

$$k=\pm\frac{\pi n a}{l}i\;; \quad \overline{T}_n=C_1\cos\frac{\pi n a}{l}t+C_2\sin\frac{\pi n a}{l}t\;.$$

Якщо частота вимушених коливань не співпадає ні з однією з власних частот, тобто $\omega\neq\pi n a/l$, тоді

$$T_{n*}=A\cos\omega t+B\sin\omega t; \quad T_{n*}'=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t\;;$$

$$T_{n*}''=-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t; \quad -A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t+\frac{\pi^2 n^2 a}{l^2}\times$$

$$\times(A\cos\omega t+B\sin\omega t)=\frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\omega t; \quad \cos\omega t:\; -A\omega^2+\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}A=0\;;$$

$$\sin\omega t:\; -B\omega^2+\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}B=\frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\;.$$

Звідси

$$A=0; \quad B=\frac{2l^3(-1)^{n+1}}{\pi n\left(\pi^2 n\;a^2-\omega^2 l^2\right)}\;.$$

Тоді

$$T_n(t)=\overline{T}+T_{n*}=C_1\cos\frac{\pi n a}{l}t+C_2\sin\frac{\pi n a}{l}t+\frac{2l^3(-1)^{n+1}}{\pi n\left(\pi^2 n^2 a^2-\omega^2 l^2\right)}\sin\omega t\;.$$

Якщо частота вимушених коливань співпадає з однією з власних частот, тобто $\omega=\pi n a/l$ при деякому значенні $n=1,\,2,...$ (***явище резонансу***) , то в цьому випадку ЗДР набуває вигляду

$$T_n''+\omega^2 T_n=\frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\omega t\ .$$

Тоді

$$T_{n*}=(A\cos\omega t+B\sin\omega t)t\ ;$$

$$T_{n*}'=A\cos\omega t+B\sin\omega t+(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t)t\ ;$$

$$T_{n*}''=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t+\left(-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t\right)t\ ;$$

$$-2A\omega\sin\omega t+2B\omega\cos\omega t+\left(-A\omega^2\cos\omega t-\right.$$

$$\left.-B\omega^2\sin\omega t\right)t+\omega^2(A\cos\omega t+B\sin\omega t)t=\frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\omega t\ ;$$

$\cos\omega t$: $\quad 2B\omega=0$; $\quad B=0$;

$\sin\omega t$: $\quad -2A\omega=\frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}$; $\quad A=-\frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n\omega}$.

Таким чином, $T_n(t)=\bar{T}_n+T_{n*}=C_1\cos\frac{\pi na}{l}t+C_2\sin\frac{\pi na}{l}t-\frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n\omega}t\cos\omega t$.

Враховуючи початкові умови

$$T_n(0)=0\,;\qquad T_n'(0)=0$$

знаходимо значення довільних сталих $C_1,\ C_2$.

При відсутності резонансу ($\omega\neq\pi na/l$):

$T_n(0)=0$: $\quad C_1=0$;

$T_n'(0)=0$: $\quad C_2\frac{\pi na}{l}+\frac{2l^3(-1)^{n+1}\omega}{\pi n\left(\pi^2n^2a^2-\omega^2l^2\right)}=0$.

Звідси $C_1=0$; $\quad C_2=-\frac{2l^4\omega(-1)^{n+1}}{\pi^2n^2\left(\pi^2n^2a^2-\omega^2l^2\right)}$.

Тоді $T_n=-\frac{2l^4\omega(-1)^{n+1}}{\pi^2n^2\left(\pi^2n^2a^2-\omega^2l^2\right)}\sin\frac{\pi na}{l}t+\frac{2l^3(-1)^n}{\pi n\left(\pi^2n^2a^2-\omega^2l^2\right)}\sin\omega t$.

При наявності резонансу ($\omega=\frac{\pi na}{l}$ при $n=n_p=\frac{\omega l}{\pi a}$):

$T_n(0)=0$: $\quad C_1=0$;

$T_n'(0)=0$: $\quad C_2\frac{\pi na}{l}-\frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n\omega}=0$.

Звідси $C_1=0$; $\quad C_2=\frac{l(-1)^{n+1}}{(\pi na/l)\pi n\omega}=\frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n\omega^2}$.

Тоді $T_n(t)=\frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n\omega^2}\sin\omega t-\frac{l(-1)^{n+1}}{\pi n\omega}t\cos\omega t$.

Таким чином, при відсутності резонансу ($\omega\neq\pi na/l$) <u>шуканий розв`язок</u> має вигляд

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=\frac{2l^3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\left(\pi^2n^2a^2-\omega^2l^2\right)}\times\left(\sin\omega t-\frac{l\omega}{\pi na}\sin\frac{\pi na}{l}t\right)\sin\frac{\pi nx}{l}\ .$$

Відповідно, при наявності резонансу коливання резонансної частоти необмежено зростають за амплітудою. Тому для достатньо віддалених моментів часу $t >> 0$ справедливо

$$u(x,t) \approx u_{np}(x,t) \approx \frac{l(-1)^{n_p}}{\pi n_p \omega} \; t \cos\omega t \cdot \sin\frac{\pi n_p x}{l} = \frac{(-1)^{(\omega l)/(\pi a)} a}{\omega^2} t \cos\omega t \cdot \sin\frac{\omega x}{a} \; .$$

<u>Приклад 5</u>. Розв`язати першу крайову задачу:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - 2t \qquad (0 < x < 2; \; t > 0)$;

(ПУ) $u(x,o) = 0; \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (0 < x < 2);$ (ГУ) $u(0,t) = 2t; \quad u(2,t) = 0 \quad (t > 0).$

<u>Розв`язання</u>. Невідому функцію $u(x,t)$ будемо шукати у вигляді

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \; ,$$

де $v(x,t) = t(2 - x)$ – функція, що задовольняє заданим граничним умовам.

Тоді функція $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ задовольняє нульовим граничним умовам $w(0,t)\backslash = w(2,t) = 0$, диференціальному рівнянню $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w - tx$ і наступним початковим умовам $w(x,0) = 0$; $\dfrac{\partial w(x,0)}{\partial t} = x - 2$.

Щоб знайти функцію $w(x,t)$, розв`яжемо допоміжну задачу:

знайти ненульовий розв`язок ДРЧП $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w$ спеціального вигляду $w(x,t) = X(x)T(t),$ який задовольняє однорідним граничним умовам $w(0,t) = 0$; $w(2,t) = 0$.

Підставляючи $w = X(x)T(t)$ в ДРЧП, одержимо

$$T''X = X''T + XT \; ; \quad \frac{T''}{T} - 1 = \frac{X''}{X} = -\lambda \; ,$$

де $\lambda > 0$ – параметр розщеплення.

Звідси дістанемо два звичайних диференціальних рівняння

$$X'' + \lambda X = 0 \; ; \quad T'' + (\lambda - 1)T = 0 \; .$$

З граничних умов $w(0,t) = 0$, $w(2,t) = 0$ і рівності $w = X(x)T(t)$ випливає, що $X(0)T(t) = 0$. Звідси $X(0) = 0$; $X(2) = 0$.

Таким чином, приходимо до задачі Штурма–Ліувілля

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0; \\ X(0) = 0; \; X(2) = 0. \end{cases}$$

Власні значення і власні функції цієї задачі відповідно

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \; , \quad X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots) \; .$$

Тоді з рівняння $T'' + (\lambda - 1)T = 0$ маємо $T_n(t) = A_n \cos\mu_n t = B_n \sin\mu_n t$, де $\mu_n = \sqrt{(n\pi/2)^2 - 1}$, $n = 1, 2, \ldots$; A_n , B_n – довільні сталі.

Функції $w_n(x,t) = (A_n \cos\mu_n t + B_n \sin\mu_n t)\sin\frac{\pi n x}{2} \quad (n = 1, 2, ...)$ є розв`язками допоміжної задачі.

Тепер розв'яжемо дві наступні перші крайові задачі.

1) (ДРЧП) $\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \bar{w} \qquad (0 < x < 2;\ t > 0)$;

(ПУ) $\bar{w}(x,0) = 0$; $\frac{\partial \bar{w}(x,0)}{\partial t} = x - 2 \quad (0 < x < 2)$; (ГУ) $\bar{w}(0,t) = 0$; $\bar{w}(2,t) = 0 \quad (t > 0)$.

2) (ДРЧП) $\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + \tilde{w} - t\,x \qquad (0 < x < 2;\ t > 0)$;

(ПУ) $\tilde{w}(x,0) = 0$, $\frac{\partial \tilde{w}(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (0 < x < 2)$; (ГУ) $\tilde{w}(0,t) = 0$; $\tilde{w}(2,t) = 0 \quad (t > 0)$.

Згідно з принципом суперпозиції $w(x,t) = \bar{w}(x,t) + \tilde{w}(x,t)$.

Розв`язок першої задачі задається рядом

$$\bar{w}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\mu_n t + b_n \sin\mu_n t)\sin\frac{\pi n x}{2},$$

де коефіцієнти a_n і b_n визначаються за формулами:

$$a_n = \int_0^2 \bar{w}(x,0)\sin\frac{\pi n x}{2}dx = 0;\quad b_n = \frac{1}{\mu_n}\int_0^2 \frac{\partial \bar{w}(x,0)}{\partial t}\sin\frac{\pi n x}{2}dx = \frac{1}{\mu_n}\int_0^2 (x-2)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{4}{n\pi\mu_n}.$$

Отже, $\bar{w}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{n\pi\mu_n}\right)\sin\mu_n t + \sin\frac{n\pi x}{2} = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\mu_n}\sin\mu_n t + \sin\frac{n\pi x}{2}$.

Розв`язок другої задачі шукаємо у вигляді розкладу за власними функціями задачі Штурма–Ліувілля

$$\tilde{w}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{T}_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{T}_n(t)\sin\frac{\pi n x}{2}.$$

При цьому вільний член $f(x,t) = -tx$ також розкладаємо за власними функціями

$$f(x,t) = -tx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Останнє співвідношення є розкладом відомої функції $f(x,t) = -tx$ в ряд Фур`є за синусами на проміжку $[0;2]$. Обчислимо коефіцієнти цього ряду

$$f_n(t) = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = -t\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= -t\left(-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right) = \frac{4t(-1)^n}{n\pi}.$$

Підставляючи одержані розклади у відповідне ДРЧП і початкові умови, приходимо до задачі Коші:

(ЗДР) $T_n'' + \mu_n^2 T_n = \frac{4t(-1)^n}{n\pi} \quad (t > 0)$; (ПУ) $T_n(0) = 0$, $T_n'(0) = 0$.

Знайдемо розв`язок цієї задачі за допомогою характеристичного рівняння:

$$k^2+\mu_n^2=0;\quad k=\pm\mu_n i;\quad \overline{T}_n=C_1\cos\mu_n t+C_2\sin\mu_n t\ ;$$

$$T_{n*}=At+B\ ;\quad T'_{n*}=A;\quad T''_{n*}=0\ ;\quad \mu_n^2(At+B)=\frac{4(-1)^n}{\pi n}\ ;$$

t: $\quad \mu_n^2 A=\dfrac{4(-1)^n}{\pi n}\ ;\qquad A=\dfrac{4(-1)^n}{\pi n\mu_n^2}\ ;$

t^0: $\quad \mu_n^2 B=0\ ;\qquad B=0\ .$

Тоді $T_n=\overline{T}_n+T_{n*}=C_1\cos\mu_n t+C_2\sin\mu_n t+\dfrac{4(-1)^n t}{\pi n\mu_n^2}$.

З початкових умов знаходимо значення довільних сталих C_1, C_2:

$T_n(0)=0$: $\quad C_1=0\ ;\qquad C_1=0\ ;$

$T'_n(0)=0$: $\quad C_2\mu_n+\dfrac{4(-1)^n}{\pi n\mu_n^2}=0;\quad C_2=-\dfrac{4(-1)^n}{\pi n\mu_n^3}$.

Тоді $T_n(t)=-\dfrac{4(-1)^n}{\pi n\mu_n^3}\sin\mu_n t+\dfrac{4(-1)^n t}{\pi n\mu_n^2}$. Отже,

$$\widetilde{w}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4(-1)^n}{\pi n\mu_n^3}\sin\mu_n t+\frac{4(-1)^n t}{\pi n\mu_n^2}\right)\times\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\mu_n t-\sin\mu_n t)}{n\mu_n^3}\sin\frac{n\pi x}{2}\ ;$$

$$w(x,t)=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\mu_n}\sin\mu_n t\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\mu_n t-\sin\mu_n t)}{n\mu_n^3}\sin\frac{n\pi x}{2}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\mu_n t-\sin\mu_n t-(-1)^n\sin\mu_n t}{n\mu_n^3}\sin\frac{n\pi x}{2}\ .$$

Тоді

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)=t(2-x)+\frac{4}{\pi}\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\mu_n t-\mu_n^2\sin\mu_n t-(-1)^n\sin\mu_n t}{n\mu_n^3}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

– шуканий розв`язок вихідної крайової задачі.

5.3.3. Розв’язання другої крайової задачі для одновимірного рівняння теплопровідності методом відокремлення змінних

Розглянемо задачу про поширення тепла в однорідному стержні довжини l, всередині якого відсутні теплові джерела, а бічна поверхня теплоізольована. Припустимо, що початковий розподіл при $t=0$ температури $u(x,t)$ в стержні

$$u(x,0)=\varphi(x)\qquad (0<x<l),$$

де $\varphi(x)$ – відома функція, а обидва кінці стержня $x=0$ і $x=l$ теплоізольовані, тобто теплові потоки через них відсутні:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0\ ;\quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0\qquad (t>0)\ .$$

Математично ця задача формулюється як ***друга крайова задача*** (***задача Неймана***) ***для одновимірного рівняння теплопровідності***:

Знайти розв'язок $u(x,t)$ ДРЧП

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l;\ \ t > 0) \tag{3.62}$$

який задовольняє початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (0 < x < l) \tag{3.63}$$

і однорідні граничні умови другого типу

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \ , \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \qquad (t > 0) \tag{3.64}$$

де $\varphi(x)$ – відома функція; a, l – відомі числа, $a > 0$, $l > 0$.

На першому етапі розв'язання задачі методом відокремлення змінних шукаємо ненульові розв'язки однорідного рівняння (3.62), які задовольняють однорідні граничні умови (3.64) у вигляді добутку функцій

$$u(x,t) = X(a)T(t) \tag{3.65}$$

Використовуючи відокремлення змінних у рівнянні (3.62) і граничних умовах (3.64) (зробіть це самостійно), дістанемо звичайне диференціальне рівняння для знаходження функції $T(t)$

$$T'(t) - \lambda a^2 T(t) = 0 \tag{3.66}$$

і крайову задачу Штурма–Ліувілля

$$X''(x) - \lambda X'(x) = 0 \qquad (0 < x < l) \tag{3.67}$$

$$X'(0) = X'(l) = 0 \tag{3.68}$$

для знаходження функції $X(x)$ і довільної сталої λ (параметра розщеплення).

Рівняння (3.67) співпадає з рівнянням (3.48), яке уже розв'язувалось в попередньому пункті 5.3.2.

Якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, то загальний розв'язок цього рівняння визначається формулою (3.44) $X(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$, де A і B - довільні сталі.

З граничних умов (3.68) маємо

$X'(0) = 0: \quad B = 0$;

$X'(l) = 0: \quad -A\beta\sin(\beta l) + B\beta\cos(\beta l) = 0; \quad A\sin\beta l = 0$.

Якщо покласти $A = 0$, то одержимо нульовий розв'язок $X(x) \equiv 0$. Тому треба покласти $\sin\beta l = 0$.

Розв'язавши одержане тригонометричне рівняння, знаходимо власні значення

$$\beta l = \pi n \ , \quad \beta_n = \pi n / l \quad (n \in Z) \ ;$$

$$\lambda_n = -\pi^2 n^2 / l^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.69}$$

і відповідні їм власні функції

$$X_n(x) = A_n \cos\frac{\pi n x}{l} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.70}$$

де A_n – довільна стала, відмінна від нуля.

Якщо $\lambda = 0$, то загальний розв'язок рівняння (3.67) визначається формулою (3.46) $X(x) = Ax + B$, де A і B - довільні сталі.

Граничні умови (3.68) дозволяють знайти тільки довільну сталу A

$$X'(0)=0: \quad A=0 \; ; \qquad X'(l)=0: \quad A=0 \; .$$

Звідси $X(x)=B.$. Тоді $.\lambda_0=0$ – власне значення; $X_0(x)=A_0$ – відповідна власна функція. Тут A_0 – довільна стала, відмінна від нуля.

Якщо $\lambda=\beta^2>0$, то загальний розв’язок рівняння (3.67) визначається формулою (3.47) $X(x)=Ae^{\beta x}+Be^{-\beta x}$, де A і B – довільні сталі.

Підставляючи його в граничні умови (3.68), отримаємо систему для знаходження A і B:

$$X'(0)=0: \qquad A\beta-B\beta=0 \; ;$$

$$X'(l)=0: \qquad A\beta e^{\beta l}-B\beta e^{\beta l}=0 \; .$$

Оскільки $\beta\neq 0$, то звідси одержимо $A=0$; $B=0$.

Тобто, при будь-якому значенні $\lambda=\beta^2>0$ крайова задача (3.67), (3.68) має тільки нульовий розв’язок $X(x)\equiv 0$.

Таким чином, об’єднуючи всі можливі випадки λ, маємо послідовність власних значень

$$\lambda_n=-\pi^2 n^2/l^2 \quad (n=0,1,2,...) \tag{3.71}$$

і відповідних власних функцій

$$X_n(x)=A_n\cos\frac{\pi n x}{l} \quad (n=0,1,2,...) \tag{3.72}$$

При $\lambda=\lambda_n$ диференціальне рівняння (3.66) набуває вигляду

$$T_n'(t)+\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}T_n(t)=0 \quad (n=0,1,2,...) \; .$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його:

$$\int\frac{dT_n}{T_n}=-\int\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}dt \; ; \quad \ln T_n=-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t+\ln C_n \; ;$$

$$T_n=C_n e^{-\left(\pi^2 n^2 a^2/l^2\right)t} \quad (n=0,1,2,...) \tag{3.73}$$

Підставляючи функції (3.72) і (3.73) в формулу (3.65), знаходимо послідовність ненульових розв’язків рівняння (3.62), які задовольняють однорідні граничні умови (3.64)

$$u_n(x,t)=a_n e^{-\left(\pi^2 n^2 a^2/l^2\right)t}\cos\frac{\pi n x}{l} \quad (n=0,1,2,...) \tag{3.74}$$

де a_n – довільна стала, причому сталі A_n і C_n введено до складу a_n.

На другому етапі методу відокремлення змінних будується розв’язок ДРЧП (3.62), який задовольняє як граничні (3.64), так і початкові (3.63) умови. За загальною схемою методу такий розв’язок формується у вигляді функціонального ряду:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-\left(\pi^2 n^2 a^2/l^2\right)t}\cos\frac{\pi n x}{l} \tag{3.75}$$

Коефіцієнти ряду (3.75) a_n, $n=0,1,2,...$ знаходять за початковою умовою

(3.63):

$$u(x,0)=\varphi(x): \qquad \varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} \tag{3.76}$$

Розглядаючи співвідношення (3.76) як розвинення заданої функції $\varphi(x)$ в ряд Фур'є за косинусами на відрізку $[0;l]$ і користуючись відомими формулами для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є, отримаємо

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l \cos\frac{\pi n x}{l}dx\,;\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx \ \ (n=1,2,...) \tag{3.77}$$

Отже, розв'язок другої крайової задачі (3.62)–(3.64) записується у вигляді функціонального ряду (3.75), коефіцієнти якого обчислюються за формулами (3.77).

<u>Зауваження</u>. Для випадку першої крайової задачі для одновимірного однорідного рівняння теплопровідності:

(ДРЧП) $$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0<x<l, \quad t>0) \tag{3.78}$$

(ПУ) $$u(x,0)=\varphi(x) \quad (0<x<l) \tag{3.79}$$

(ГУ) $$u(0,t)=0\ , \quad u(l,t)=0 \quad (t>0) \tag{3.80}$$

застосування методу відокремлення змінних дозволяє знайти її розв'язок у вигляді ряду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\left(\pi^2 n^2 a^2/l^2\right)t}\sin\frac{\pi n x}{l} \tag{3.81}$$

де

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx \tag{3.82}$$

(Перевірте це самостійно).

<u>Приклад 1</u>. Розв'язати першу крайову задачу:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0<x<2,\ t>0)$;

(ПУ) $u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1; \\ 2-x, & 1\le x<2; \end{cases}$ (ГУ) $u(0,t)=0\,, \quad u(2,t)=0 \quad (t>0)$.

<u>Розв'язання</u>. В даній задачі $a^2=1, \ \ l=2$. Згідно з (3.81) шуканий розв'язок записується у вигляді ряду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-\left(\pi^2 n^2/4\right)t}\sin\frac{\pi n x}{2}\ ,$$

де коефіцієнти b_n обчислюються за формулою (3.82)

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx=\int_0^1 x\sin\frac{\pi n x}{2}dx+\int_1^2 (2-x)\sin\frac{\pi n x}{2}dx=\frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\ .$$

Оскільки $\sin\dfrac{\pi n}{2}=\begin{cases} (-1)^m, & n=2m-1,\ m=1,2,...; \\ 0, & n=2m,\ m=1,2,..., \end{cases}$

то <u>шуканий розв'язок</u> можна подати у вигляді ряду

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2}e^{-\left(\pi^2(2m-1)^2/4\right)t}\sin\frac{\pi(2m-1)x}{2}\ .$$

5.3.4. Розв'язання першої крайової задачі для рівняння Лапласа у крузі методом відокремлення змінних. Інтегральна формула Пуассона

Нехай у крузі радіуса ρ_0 з центром в початку координат треба знайти розв'язок $u(\rho,\varphi)$ ***рівняння Лапласа (в полярних координатах)***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \quad (0<\varphi<2\pi;\ 0<\rho<\rho_0) \tag{3.83}$$

який задовольняє ***граничну умову***

$$u(\rho_0,\varphi)=g(\varphi) \quad (0<\varphi<2\pi) \tag{3.84}$$

а також ***додаткові умови*** (що випливають з фізичних міркувань)

$u(\rho,\varphi)$ – неперервна функція в крузі $0\le\rho\le\rho_0$ (а, отже, обмежена в даному крузі);

$u(\rho,\varphi)$ – періодична функція відносно φ з періодом 2π, тобто $u(\rho,\varphi+2\pi)=u(\rho,\varphi)$.

Тут φ – полярний кут; ρ – полярний радіус; $g(\varphi)$ – відома періодична функція періоду 2π.

Розв'язок поставленої ***першої крайової задачі (задачі Діріхле) для рівняння Лапласа у крузі*** шукаємо методом відокремлення змінних у вигляді

$$u=R(\rho)\,\Phi(\varphi) \tag{3.85}$$

Підставляючи (3.85) у рівняння Лапласа (3.83), маємо:

$$\Phi(\varphi)R''(\rho)+\frac{1}{\rho}\Phi(\varphi)R'(\rho)+\frac{1}{\rho^2}\Phi''(\varphi)R(\rho)=0;\quad \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=-\lambda\ ,$$

де $\lambda\ge 0$.

Зазначимо, що при $\lambda<0$ розв'язок неперіодичний. (Перевірте це самостійно).

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0;\quad \rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0\ .$$

Якщо $\lambda=0$, то

$$\Phi''(\varphi)=0;\quad \Phi(\varphi)=A\varphi+B;\quad \rho^2R''(\varphi)+\rho R'(\varphi)=0;\quad R'(\rho)=v(\rho);\quad \rho v'+v=0\ ;$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{d\rho}{\rho};\quad \ln v=-\ln\rho+\ln C;\quad v=\frac{C}{\rho};\quad R'(\rho)=\frac{C}{\rho};\quad R(\rho)=C\int\frac{d\rho}{\rho};$$

$$R(\rho)=C\ln\rho+D;\quad u_0(\rho,\varphi)=(A\varphi+B)(C\ln\rho+D)\ ,$$

де A, B, C, D – довільні сталі.

Оскільки функція $u_0(\rho,\varphi)$ – періодична по φ, то $A=0$. Із неперервності функції $u_0(\rho,\varphi)$ в центрі круга при $\rho=0$ маємо $C=0$.

Отже,

$$u_0(\rho,\varphi)=a_0/2 \qquad (3.86)$$

де a_0 – довільна стала, в яку введено B і D.

Якщо $\lambda>0$, то

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0;\quad k^2+\lambda=0;\quad k=\pm\sqrt{\lambda}i\ ;\quad \Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi;$$

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0;\quad R(\rho)=\rho^{\alpha};\quad \rho^2\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}+\rho\alpha\rho^{\alpha-1}-\lambda\rho^{\alpha}=0;$$

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha-\lambda=0;\quad \alpha^2-\lambda=0;\quad \alpha=\pm\sqrt{\lambda};\quad R(\rho)=C\rho^{-\sqrt{\lambda}}+D\rho^{\sqrt{\lambda}};$$

$$u(\rho,\varphi)=\left(A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi\right)\left(C\rho^{-\sqrt{\lambda}}+D\rho^{\sqrt{\lambda}}\right),$$

де A, B, C, D – довільні сталі.

Оскільки розв'язок $u(\rho,\varphi)$ неперервний в центрі круга при $\rho=0$, то $C=0$. Тоді

$$u(\rho,\varphi)=\left(a\cos\sqrt{\lambda}\varphi+b\sin\sqrt{\lambda}\varphi\right)\rho^{\sqrt{\lambda}},$$

де a, b – довільні сталі.

Знайдений розв'язок має період $2\pi/\sqrt{\lambda}$. Цей період дорівнює 2π або ціле число разів міститься в 2π тоді і тільки тоді, коли $\sqrt{\lambda}$ – ціле додатне число, тобто

$$\sqrt{\lambda}=n;\ \lambda_n=n^2 \quad (n=1,2,...).$$

Отже,

$$u_n(\rho,\varphi)=(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\rho^n \qquad (3.87)$$

Згідно з принципом суперпозиції довільна сума знайдених функцій (3.86), (3,87) і навіть ряд

$$u(\rho,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\rho^n \qquad (3.88)$$

також буде розв'язком рівняння (3.83).

Довільні сталі $a_0, a_n, b_n \quad (n=1,2,...)$ знаходимо з граничної умови (3.84):

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+\ln\sin n\varphi)\rho_0^n=g(\varphi);\quad g(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\rho_0{}^n\cos n\varphi+b_n\rho_0^n\sin n\varphi\right).$$

Розглядаючи останній вираз як розклад функції $g(\varphi)$ в ряд Фур'є і використовуючи формули для коефіцієнтів ряду Фур'є, одержимо

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)d\varphi\ ;\qquad a_n=\frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\cos n\varphi d\varphi \text{й} \qquad (3.89)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\sin n\varphi d\varphi \qquad (3.90)$$

Знайдений розв'язок (3.88) можна подати в інтегральній формі. Для цього підставимо вирази для коефіцієнтів (3.89) і (3.90) у ряд (3.88). Тоді, використовуючи формулу Ейлера

$$\cos\alpha=\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)/2$$

і формулу суми нескінченно спадної геометричної прогресії

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = a_0/(1-x) \ ,$$

одержимо

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\rho/\rho_0)^n \times \int_0^{2\pi} g(\varphi)(\cos n\theta\cos n\varphi + \sin n\theta \sin n\varphi)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\rho/\rho_0)^n \cos n(\varphi-\theta)\right)g(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(\rho/\rho_0)^n\left(e^{in(\varphi-\theta)}+e^{-in(\varphi-\theta)}\right)\right)g(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}(\rho/\rho_0)e^{i(\varphi-\theta)}\left((\rho/\rho_0)e^{i(\varphi-\theta)}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\rho/\rho_0)e^{-i(\varphi-\theta)}\left((\rho/\rho_0)e^{-i(\varphi-\theta)}\right)^n\right)g(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{\rho}{\rho_0}e^{i(\varphi-\theta)}\cdot\frac{1}{1-(\rho/\rho_0)e^{i(\varphi-\theta)}} + \frac{\rho}{\rho_0}e^{-i(\varphi-\theta)}\times\frac{1}{1-(\rho/\rho_0)e^{-i(\varphi-\theta)}}\right)g(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{\rho e^{i(\varphi-\theta)}}{\rho_0-\rho e^{i(\varphi-\theta)}}+\frac{\rho e^{-i(\varphi-\theta)}}{\rho_0-\rho e^{-i(\varphi-\theta)}}\right)g(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0^2-\rho^2}{\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}g(\theta)d\theta \ .$$

Розв’язок задачі Діріхле (3.83), (3.84) в отриманій формі

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0^2-\rho^2}{\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}g(\theta)d\theta \qquad (3.91)$$

називається ***інтегральною формулою Пуассона***.

Крайова задача (3.83), (3.84) та її розв’язок у формі (3.88) чи (3.91) мають важливе значення в фізичних застосуваннях. Зокрема, розглянуту задачу можна інтерпретувати як задачу про знаходження електростатичного потенціалу кругового диску за відомим розподілом потенціалу на його межі $\rho=\rho_0$ або як задачу про стаціонарний розподіл температури всередині круга при відомій температурі на його межі і т.п.

Приклад 1. Знайти розподіл електростатичного потенціалу $u(\rho,\varphi)$ на однорідній тонкій круглій пластинці радіуса $\rho_0=1$, якщо потенціал на її межі задається формулою $u(1,\varphi)=\cos^2\varphi$.

Розв’язання. Маємо крайову задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі: знайти розв’язок рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \quad (0<\rho<1,\ \ 0<\varphi<2\pi) \ ,$$

який задовольняє крайову умову $u(1,\varphi)=\cos^2\varphi \quad (0<\varphi<2\pi)$.

Будемо шукати розв’язок у вигляді ряду (3.88). За формулами (3.89), (3.90) знаходимо коефіцієнти ряду

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 1; \quad a_n = \frac{1}{\pi\cdot 1^n}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cos n\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\varphi d\varphi + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(2\varphi+n\varphi)+\cos(n\varphi-2\varphi))d\varphi = \frac{\sin n\varphi\Big|_0^{2\pi}}{2n\pi} +$$

$$+\frac{\sin(n+2)\varphi\big|_0^{2\pi}}{4(n+2)\pi}+\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}\varphi\big|_0^{2\pi}, & n=2;\\ \dfrac{\sin(n-2)\varphi\big|_0^{2\pi}}{4(n-2)\pi}, & .n\neq 2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & n=2;\\ 0, & .n\neq 2;\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi_0 1^n}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\sin n\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin n\varphi d\varphi+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\sin(n+2)\varphi+\sin(n-2)\varphi)d\varphi=0 \ .$$

Тоді $u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2\cos 2\varphi \quad (0<\rho<1,\ \ 0<\varphi<2\pi)$ – шуканий розв’язок.

5.3.5. Застосування операційного числення до розв’язання задач математичної фізики

Обмежимось випадком, коли шукана функція $u=u(x,t)$ залежить лише від двох незалежних змінних x і t, де x – просторова координата; t – час.

Загальна схема розв’язання задач математичної фізики ***операційним методом***:

1) Застосовуючи ***перетворення Лапласа*** по одній з незалежних змінних (як правило, по t), перейти від вихідного ДРЧП до звичайного диференціального ***рівняння-зображення***.

2) Розв’язати одержане допоміжне рівняння-зображення тим чи іншим методом (можна знову застосувати те чи інше перетворення) і знайти зображення шуканого розв’язку.

3) За допомогою ***формул обернення*** чи ***таблиць відповідності оригіналів та їх зображень*** перейти від зображення до оригіналу шуканого розв’язку.

Приклад 1. Розв’язати першу крайову задачу для однорідного хвильового рівняння операційним методом:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0<x<l;\ \ t>0)$;

(ПУ) $u(x,0)=0;\ \ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=A_0\sin\dfrac{\pi x}{l} \quad (0<x<l)$;

(ГУ) $u(0,t)=0;\ \ u(l,t)=0 \qquad (t>0)$,

де a, A_0, l – відомі величини; $a>0$, $l>0$.

Розв’язання. Нехай $u(x,t)\risingdotseq U(x,p)$. Тоді $\dfrac{\partial u}{\partial x}\risingdotseq\dfrac{\partial U}{\partial x}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\risingdotseq\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$;

$\dfrac{\partial u}{\partial t}\risingdotseq pU-u(x,0)=pU$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\risingdotseq p^2U-pu(x,0)-\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=p^2U-A\sin\dfrac{\pi x}{l}$;

$U(0,p)=0$; $U(l,p)=0$.

Підставляючи одержані вирази в ДРЧП, переходимо до рівняння-зображення

$$p^2U - A_0\sin\frac{\pi x}{l} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2};\ \ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2}U = -\frac{A_0}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l}\ .$$

Розв’язуємо одержане лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами за допомогою характеристичного рівняння:

$$k^2 - \frac{p^2}{a^2} = 0;\ \ k = \pm\frac{p}{a};\ \ \overline{U}(x,p) = C_1 e^{-\frac{p}{a}x} + C_2 e^{\frac{p}{a}x};\ \ U_* = A\cos\frac{\pi x}{l} + B\sin\frac{\pi x}{l};$$

$$U_*' = -A\frac{\pi}{l}\sin\frac{\pi x}{l} + B\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi x}{l};\ \ U_*'' = -\frac{\pi^2 A}{l^2}\cos\frac{\pi x}{l} - \frac{\pi^2 B}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l};\ \ -\frac{\pi^2 A}{l^2}\cos\frac{\pi x}{l} - \frac{\pi^2 B}{l^2}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{p^2 A}{a^2}\cos\frac{\pi x}{l} - \frac{p^2 B}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l} = -\frac{A_0}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l}\ ;$$

$$\cos\frac{\pi x}{l}:\quad -\frac{\pi^2 A}{l^2} - \frac{p^2 A}{a^2} = 0;\qquad A = 0;$$

$$\sin\frac{\pi x}{l}:\quad -\frac{\pi^2 B}{l^2} - \frac{p^2 B}{a^2} = -\frac{A_0}{a^2};\quad B = \frac{A_0 l^2}{\pi^2 a^2 + p^2 l^2};$$

$$U = \overline{U} + U_* = C_1 e^{-\frac{p}{a}x} + C_2 e^{\frac{p}{a}x} + \frac{A_0 l^2}{\pi^2 a^2 + p^2 l^2}\sin\frac{\pi x}{l}$$

– загальний розв'язок лінійного ЗДР.

Знаходимо конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2 з граничних умов:

$U(0,p) = 0:\quad C_1 + C_2 = 0$;

$U(l,p) = 0:\quad C_1 e^{-\frac{p}{a}l} + C_2 e^{\frac{p}{a}l} = 0;\ \ C_1 = 0;\ C_2 = 0.$

Тоді $\quad U(x,p) = \dfrac{A_0 l^2}{\pi^2 a^2 + p^2 l^2}\sin\dfrac{\pi x}{l} = \dfrac{A_0}{p^2 + (\pi a/l)^2}\sin\dfrac{\pi x}{l}\quad$ – зображення шуканого розв’язку.

За таблицями відповідності оригіналів та їх зображень знаходимо

$$U(x,p) = \frac{A_0 l}{\pi a}\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\frac{\pi a/l}{p^2 + (\pi a/l)^2} \risingdotseq \frac{A_0 l}{\pi a}\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\sin\frac{\pi a t}{l} = u(x,t)\ .$$

Отже, шуканий розв’язок

$$u(x,t) = \frac{A_0 l}{\pi a}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi a t}{l}\quad (0 < x < l,\ t > 0)\ .$$

Приклад 2. Операційним методом знайти обмежений розв’язок крайової задачі для однорідного рівняння теплопровідності:

(ДРЧП) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0 < x < +\infty;\ t > 0)$;

(ПУ) $\quad u(x,0) = 0\quad (0 < x < +\infty)$;

(ГУ) $\quad u(0,t) = u_0\delta_0(t)\quad (t > 0)$,

де $\delta_0(t)$ – одинична імпульсна дельта-функція Дірака; a, u_0 – задані числа, $a > 0$.

Розв’язання. Нехай $u(x,t) \doteqdot U(x,\rho)$. Тоді $\dfrac{\partial u}{\partial x} \doteqdot \dfrac{\partial U}{\partial x}$;

$$\frac{\partial u}{\partial t} \doteqdot pU - u(x,0) = pU \ ; \quad \delta_0(t) \doteqdot 1; \quad U(0,p) = u_0 \ .$$

Підставляючи одержані вирази в ДРЧП, переходимо до рівняння-зображення

$$pU = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} ; \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{p}{a^2} U = 0 \ .$$

Розв’язуємо одержане лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$k^2 - \frac{p}{a^2} = 0; \quad k = \pm \frac{\sqrt{p}}{a} ; \quad U = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a} x} \ .$$

Оскільки за умовою задачі функція $U(x,p)$ обмежена при $x \to +\infty$, то $C_2 = 0$. Тоді $U = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}$.

Значення C_1 знайдемо з граничної умови $U(0,p) = u_0$: $C_1 = u_0$.

Отже, $U(x,p) = u_0 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}$ – зображення шуканого розв’язку.

Користуючись таблицями відповідності оригіналів та їх зображень, одержимо

$$U(x,p) = u_0 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x} \doteqdot u_0 \cdot \frac{x}{a 2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{a^2 \cdot 4t}} = \frac{u_0 x}{2a\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = u(x,t) \ .$$

.Отже, шуканий розв’язок:

$$u(x,t) = \frac{u_0 x}{2a\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \quad (0 < x < +\infty; \ t > 0) \ .$$

Приклад 3. Початкова напруга в напівобмеженому нескінченному однорідному провіднику $0 \le x < +\infty$ дорівнює 0. Самоіндукція і втрати через ізоляцію практично відсутні. Активний опір і ємність одиниці довжини провідника відповідно дорівнюють R і C. Починаючи з моменту часу $t = 0$ до кінця $x = 0$ провідника прикладена стала електрорушійна сила E_0. Знайти напругу $u(x,t)$ в кожній точці провідника в довільний момент часу.

Розв’язання. Напруга $u(x,t)$ задовольняє телеграфному рівнянню (2.9). Оскільки самоіндукція і втрати через ізоляцію практично відсутні, тобто $L = 0$ і $G = 0$, то це рівняння набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \qquad a^2 = \frac{1}{CR} .$$

Таким чином, маємо першу крайову задачу:

(ДРЧП) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < +\infty; \ t > 0)$;

(ПУ) $u(x,0) = 0 \quad (0 < x < +\infty)$; (ГУ) $u(0,t) = E_0 \quad (t > 0)$.

Для розв`язання поставленої задачі застосуємо операційний метод. Нехай

$u(x,t) \fallingdotseq U(x,p)$. Тоді $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \fallingdotseq \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$; $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} \fallingdotseq pU - u(x,0) = pU$; $\; E_0 \fallingdotseq \dfrac{E_0}{p}$; $\; U(0,p) = \dfrac{E_0}{p}$.

Переходимо до рівняння-зображення $\; pU = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

Його розв`язок $\; U = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$.

З фізичних міркувань випливає, що $U(x,p) \to 0$ при $x \to +\infty$. Тому $C_2 = 0$. Отже, $\; U = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$.

Значення сталої C_1 знайдемо з граничної умови $U(0,p) = \dfrac{E_0}{p}$ :: $\; C_1 = \dfrac{E_0}{p}$.

Користуючись таблицями відповідності оригіналів та їх зображень, одержимо <u>шуканий розв`язок</u>

$$u(x,t) = E_0\left(1 - \phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right) \quad (0 < x < +\infty;\; t > 0),$$

де $\; \phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^z e^{-x^2} dx\;$ – інтеграл похибок.

<u>Зауваження</u>. Аналогічно операційному методу при розв`язанні задач математичної фізики застосовуються інші інтегральні перетворення, зокрема, перетворення Фур`є.

5.3.6. Розв`язання задач математичної фізики чисельним методом сіток

Розглянемо лінійне ДРЧП другого порядку (1.5)

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Gu = F \tag{3.92}$$

в деякій плоскій області $\tilde{D}$ координатної площини Oxy (рис. 8).

Нехай $[a;b]$ і $[c;d]$ – проекції області $\tilde{D}$ на осі Ox і Oy; h_1 і h_2 – достатньо малі додатні числа; $M_{kl}(x_k; y_l)$ $\; k, l = 0,1,2,...$ – множина точок області $\tilde{D}$, які служать вузлами ***прямокутної сітки***, утвореної прямими $\; x_k = a + kh_1$, $\; y_l = c + lh_2$; $k, l = 0,1,2,...$ і накладеної на область $\tilde{D}$.

Чисельне розв`язання рівняння (3.92) в області $\tilde{D}$ методом сіток полягає в знаходженні чисел u_{kl} (значень u_{kl} сіткової функції), які наближено дорівнюють відповідним значенням шуканої функції $u = u(x,y)$ у вузлах сітки $M_{kl} \in \tilde{D}$: $u_{kl} = u(x_k, y_l)$.

Згідно означенню частинних похідних

$$\frac{\partial u(M_{kl})}{\partial x} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{u(x_{k+1}, y_l) - u(x_k, y_l)}{h_1}; \quad \frac{\partial u(M_{k\ell})}{\partial x} = \lim_{h_2 \to 0} \frac{u(x_k, y_{l+1}) - u(x_k, y_l)}{h_2}.$$

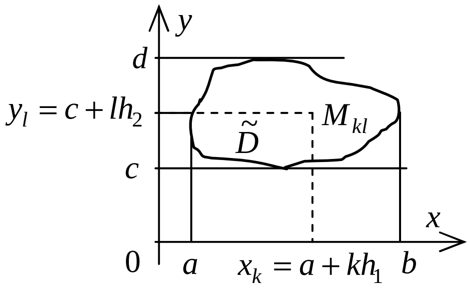

Рис. 8

Для малих значень кроків сітки h_1 і h_2 одержуємо ***скінченно-різницеву апроксимацію частинних похідних***

$$\frac{\partial u(M_{kl})}{\partial x} \approx \frac{u_{k+1,l} - u_{kl}}{h_1}; \quad \frac{\partial u(M_{kl})}{\partial y} \approx \frac{u_{k,l+1} - u_{kl}}{h_2}.$$

Аналогічно можна отримати ***скінченно-різницеву апроксимацію других частинних похідних***:

$$\frac{\partial^2 u(M_{kl})}{\partial x^2} \approx \frac{u_{k+1,l} - 2u_{kl} + u_{k-1,l}}{h_1^2};$$

$$\frac{\partial^2 u(M_{kl})}{\partial y^2} \approx \frac{u_{k,l+1} - 2u_{kl} + u_{k,l-1}}{h_2^2}; \quad \frac{\partial^2 u(M_{kl})}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{k+1,l+1} - u_{k+1,l} - u_{k,l+1} + u_{kl}}{h_1 h_2}.$$

Приймаючи вказані наближення, можна вважати, що числа u_{kl} задовольняють системі алгебраїчних рівнянь, які одержуються при підстановці в диференціальне рівняння (3.92) замість u невідомих u_{kl}, а замість частинних похідних – їх скінченно-різницевих апроксимацій. При цьому функції-коефіцієнти A, B, C, D, E, G, F слід розглядати в точках $M_{kl}(x_k; y_l)$.

В конкретних задачах математичної фізики необхідно знайти розв`язок ДРЧП (3.92) при виконанні деяких додаткових умов, яким задовольняє шукана функція на межі області $\tilde{D}$. Природно вважати, що значення u_{kl} для точок $M_{kl}(x_k; y_l)$, які належать межі області $\tilde{D}$, підкоряються цим граничним умовам.

Таким чином, <u>чисельне розв`язання крайової задачі методом сіток зводиться до розв`язання деякої системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих</u> u_{kl}, <u>причому значення</u> u_{kl} <u>в точках межі області</u> $\tilde{D}$ <u>підкоряються граничним умовам</u>.

<u>Зауваження 1</u>. Розгляд основних понять теорії ***різницевих схем***: апроксимація, стійкість і збіжність виходить за рамки даного посібника. Зазначимо лише, що *зі стійкості й апроксимації випливає збіжність схеми*, і, очевидно, при збіжності *чим більш густа сітка, тим точніший чисельний розв`язок*.

<u>Приклад 1</u>. Поставлено крайову задачу Діріхле для однорідного рівняння Лапласа в прямокутнику:

(ДРЧП) $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \left((x;y) \in \tilde{D};\ \tilde{D}:\ 0 < x < \alpha;\ 0 < y < \beta;\ \alpha = mh;\ \beta = nh\right)$;

(ГУ) $\quad u\big|_S = g(x,y) = x - y$,

де S – межа області $\tilde{D}$; h – задане дійсне додатне число; m, n – задані цілі додатні числа.

Необхідно побудувати скінченно-різницеву апроксимацію цієї ***диференціальної крайової задачі*** і розв`язати одержану ***різницеву*** (***сіткову) крайову задачу*** при $h = 0{,}1$; $m = 3$; $n = 3$.

<u>Розв`язання</u>. Зазначимо, що поставлена диференціальна крайова задача має

і причому єдиний розв`язок.

Нехай $h_1 = h_2 = h$; $M_{kl}(x_k; y_l)$, $x_k = a + kh$, $y_l = c + lh$; $k = 0,1,2,...,m$, $l = 0,1,2,...,n$. Вихідній крайовій задачі відповідає наступна система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих u_{kl}:

$$u_{k-1,l} + u_{k,l-1} + u_{k+1,l} + u_{k,l+1} - 4u_{kl} = 0 \quad (k = 1,2,..., m-1;\ l = 1,2,..., n-1) \tag{3.93}$$

$$u_{0l} = f(0, hl) \quad (l = 1,2,..., n-1) \tag{3.94}$$

$$u_{kn} = f(kh; nh) \quad (k = 1,2,..., m-1) \tag{3.95}$$

$$u_{ml} = f(mh; lh) \quad (l = 1,2,..., n-1) \tag{3.96}$$

$$u_{k0} = f(kh; 0) \quad (k = 1,2,..., m-1) \tag{3.97}$$

Сіткова крайова задача включає $(m+1)(n+1)-4$ рівнянь (3.93)–(3.97): $(m-1)(n-1)$ рівнянь (3.93), що апроксимують ДРЧП, і $2(m+n)-4$ рівнянь (3.94)–(3.97), що апроксимують ГУ. Рівняння (3.94)–(3.97) визначають значення змінних u_{kl} на межі області $\tilde{D}$. Якщо підставити ці значення в (3.93), то одержимо квадратну систему з $(m-1)(n-1)$ неоднорідних лінійних рівнянь з $(m-1)(n-1)$ невідомими u_{kl} ($k = 1,2,..., m-1$; $l = 1,2,..., n-1$).

Цю лінійну алгебраїчну систему можна подати в стандартній матричній формі

$$AU = B \tag{3.98}$$

де U – матриця-стовпець невідомих; B – матриця-стовпець вільних членів; A – квадратна матриця коефіцієнтів системи. Елементами матриці U служать числа u_{kl}, які відповідають внутрішнім точкам M_{kl} області $\tilde{D}$; елементами матриці B – числа u_{kl}, які відповідають точкам межі області $\tilde{D}$.

Випишемо і розв`яжемо сіткову крайову задачу для заданих конкретних значень $h = 0{,}1$; $m = 3$; $n = 3$. У цьому випадку (рис. 9) внутрішніми точками є $M_{11}(x_1; y_1)$, $M_{12}(x_1; y_2)$, $M_{21}(x_2; y_1)$, $M_{22}(x_2; y_2)$ і система алгебраїчних рівнянь (3.93) – (3.97): має вигляд

$$AU = B \tag{3.99}$$

де

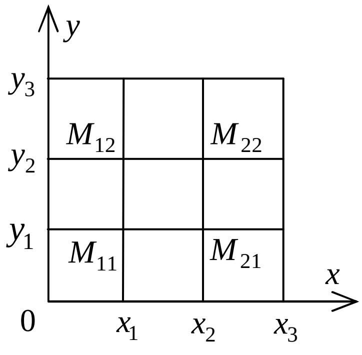

Рис. 9

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}25 & -1 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0 & -1 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -(u_{01}+u_{10})/4 \\ -(u_{02}+u_{13})/4 \\ -(u_{20}+u_{31})/4 \\ -(u_{23}+u_{32})/4 \end{pmatrix};$$

$$U^T = (u_{11} \quad u_{12} \quad u_{21} \quad u_{22}).$$

Значення $u_{10}, u_{20}, u_{31}, u_{32}, u_{23}, u_{13}, u_{02}, u_{01}$ співпадають із заданими значеннями функції $g(x, y) = x - y$ на межі S області $\tilde{D}$:

$$x_k = 0{,}1k; \quad y_e = 0{,}1l; \quad u_{10} = g(x_1, y_0) = 0{,}1 \cdot 1 - 0{,}1 \cdot 0 = 0{,}1;$$

$$u_{20} = g(x_2, y_0) = 0{,}1 \cdot 2 - 0{,}1 \cdot 0 = 0{,}2; \quad u_{31} = g(x_3, y_1) = 0{,}1 \cdot 3 - 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}2;$$

$$u_{32}=g(x_3,y_2)=0{,}1\cdot 3-0{,}1\cdot 2=0{,}1;\quad u_{23}=g(x_2,y_3)=0{,}1\cdot 2-0{,}1\cdot 3=-0{,}1;$$

$$u_{13}=g(x_1,y_3)=0{,}1\cdot 1-0{,}1\cdot 3=-0{,}2;\quad u_{01}=g(x_0;y_1)=0{,}1\cdot 0-0{,}1\cdot 1=-0{,}1\ ;$$

$$u_{02}=g(x_0,y_2)=0{,}1\cdot 0-0{,}1\cdot 2=-0{,}2\ .$$

Тоді $B=\begin{pmatrix}-(-0{,}1+0{,}1)/4\\ -(0{,}2+(-0{,}2))/4\\ -(0{,}2+0{,}2)/4\\ -(-0{,}1+0{,}1)/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0{,}2\\-0{,}1\\0\end{pmatrix}$.

На практиці система (3.98) має велику розмірність і, як правило, розв`язується тим чи іншим ітераційним методом на ЕОМ. В даному модельному випадку систему (3.99) невисокого – четвертого – порядку будемо розв`язувати прямим методом – ***методом виключення Гаусса***.

1) <u>Прямий хід</u>:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0{,}25&0{,}25&0&0\\0{,}25&-1&0&0{,}25&0{,}1\\0{,}25&0&-1&0{,}25&-0{,}1\\0&0{,}25&0{,}25&-1&0\end{array}\right)\sim\left|S_2'=S_2+0{,}25S_1;\quad S_3'=S_3+0{,}25S_1\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0{,}25&0{,}25&0&0\\0&-0{,}9375&0{,}0625&0{,}25&0{,}1\\0&0{,}0625&-0{,}9275&0{,}25&0{,}1\\0&0{,}25&0{,}25&-1&0\end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l}S_2'=S_4;\\S_4'=S_2\end{array}\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0{,}25&0{,}25&0&0\\0&0{,}25&0{,}25&-1&0\\0&0{,}0625&-0{,}9325&0{,}25&-0{,}1\\0&-0{,}9375&0{,}0625&0{,}25&0{,}1\end{array}\right)\sim\left|S_3'=S_3-0{,}25S_2;\quad S_4'=S_4+3{,}75S_2\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0{,}25&0{,}25&0&0\\0&0{,}25&0{,}25&-1&0\\0&0&-1&0{,}5&-0{,}1\\0&0&1&-3{,}5&0{,}1\end{array}\right)\sim\left|S_4'=S_4+S_3\right|\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0{,}25&0{,}25&0&0\\0&0{,}25&0{,}25&-1&0\\0&0&-1&0{,}5&-0{,}1\\0&0&0&-3&0\end{array}\right).$$

2) <u>Зворотний хід</u>:

$$\begin{cases}-u_{11}+0{,}25u_{12}+0{,}25u_{21}=0;\\ 0{,}25u_{12}+0{,}25u_{21}-u_{22}=0;\\ -u_{21}+0{,}5u_{22}=-0{,}1;\\ -3u_{22}=0;\end{cases}\quad u_{22}=0;\quad u_{21}=0{,}5u_{22}+0{,}1=0{,}1;$$

$$u_{12}=(u_{22}-0{,}25u_{21})/0{,}25=-0{,}1;\quad u_{11}=0{,}25u_{12}+0{,}25u_{21}=-0{,}025+0{,}025=0\,.$$

Отже,

$$u_{11}=0\ ;\quad u_{12}=-0{,}1\ ;\quad u_{21}=0{,}1\ ;\quad u_{22}=0$$

– <u>шукані значення</u> u_{kl} <u>функції</u> $u=u(x,t)$ <u>у внутрішніх вузлах сітки</u> M_{kl} ($k=1,2,\ldots,m-1;\quad l=1,2,\ldots,n-1$).

Зауваження 2. Розглянуті в даному розділі методи не вичерпують усіх відомих способів розв`язання задач математичної фізики. Перелічимо деякі найбільш вживані методи:

1) Метод відокремлення змінних.

2) Метод інтегральних перетворень (зокрема, застосування перетворення Лапласа – операційний метод).

3) Метод перетворення координат.

4) Метод заміни незалежних і залежних змінних.

5) Метод функцій Гріна (функцій впливу (джерела)).

6) Метод інтегральних рівнянь.

7) Варіаційні методи (замість крайової задачі для ДРЧП розв`язується деяка задача оптимізації).

8) Чисельні методи (метод сіток, апроксимація сплайнами, метод скінченних елементів і т.п.).

5.4. Нелінійні рівняння математичної фізики. Солітони. Узагальнені розв'язки. Самоорганізація

5.4.1. Загальне поняття про нелінійні моделі фізичних процесів

Фізичні явища, які відбуваються в природі, як правило, носять дуже складний характер. Тому математичні моделі реальних процесів, які досить точно відображають основні їх закономірності, виявляються нелінійними. Лінійні моделі виникають звичайно при додаткових спрощеннях, до яких приводять різні правдоподібні припущення, такі як малість величин, що характеризують процес. Складність оперування з нелінійними моделями довгий час стримувала їх практичне застосування. В результаті поза належною увагою залишались посправжньому життєво важливі явища, які не піддаються лінійному описові і з класичних позицій часто сприймаються як катастрофи. Потреби більш глибокого вивчення реальних процесів і зростання можливостей обчислювальної техніки створюють передумови для підвищення інтересу до нелінійних моделей, відкриття нових чисто нелінійних математичних методів.

Можна виділити наступні три основні властивості нелінійних ДРЧП, які відрізняють їх від лінійних рівнянь:

1) утворення стійких усамітнених хвиль – ***солітонів***; які ведуть себе подібно частинкам;

2) руйнування неперервних, гладких (класичних) розв'язків і утворення ***розривних (узагальнених) розв'язків***, які відповідають ***ударним хвилям***;

3) ***самоорганізація систем*** – утворення розв'язків зі стійкою неоднорідною структурою при однорідних умовах задачі, наприклад, утворення дисипативних (теплових) структур в нелінійних задачах дифузії.

Указані властивості більш докладно розглядаються нижче на прикладах деяких нелінійних рівнянь математичної фізики.

5.4.2. Солітони

Історично вперше (1895 р.) ***солітонні розв'язки*** з'явились при розгляді ***рівняння Кортевега - де Фріза*** (КдФ), що описує хвилі на мілкій воді

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+c_0\left(1+\frac{3}{2\lambda_0}\eta\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{h_0^2}{6}c_0=0 \qquad (4.1)$$

де h_0 – глибина рідини; $C_0=\sqrt{gh_0}$ – довгохвильова межа швидкості хвиль на мілкій воді; g – прискорення вільного падіння; $\eta=\eta(x_1 t)$ – рівняння вільної поверхні рідини, причому $\eta << h_0$.

Заміна змінних

$$\bar{x}=(x-c_0t)/x_0;\quad \bar{t}=t/t_0;\quad u=\eta/A,$$

де

$$x_0=h_0\big/\sqrt[3]{6}\ ;\quad t_0=h_0/c_0\ ;\quad A=4x_0\,,$$

зводить рівняння КдФ (4.1) до канонічного вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{t}}+6u\frac{\partial u}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial^3 u}{\partial\bar{x}^3}=0 \qquad (4.2)$$

Односолітонному розв'язку рівняння КдФ (4.2)

$$u(\bar{x},\bar{t})=\frac{\bar{\alpha}^2}{2}\cdot\left(1\Big/ch^2\left(\frac{\bar{\alpha}}{2}(\bar{x}-\bar{x}_0)-\frac{\bar{\alpha}^3}{2}\bar{t}\right)\right) \qquad (4.3)$$

де $\bar{\alpha}, \bar{x}_0$ – довільні сталі, відповідає усамітнена хвиля (горб) висотою $u_{\max}=\bar{\alpha}^2/2$, яка рухається в додатному напрямку осі $O\bar{x}$ зі швидкістю $v=\bar{\alpha}^2$.

На рис. 10–12 зображена еволюція в часі розв'язку рівняння КдФ, який має при $\bar{t}\to-\infty$ вигляд двох віддалених солітонів (рис. 10); рис. 11 відображає взаємодію (зіткнення) солітонів; на рис. 12 показано цей розв'язок після зіткнення при $\bar{t}\to+\infty$, коли солітони розійшлись без зміни своєї форми, одержавши лише зміну $\Delta\bar{x}$ величини параметра $\bar{x}_0$: для солітона з більшою швидкістю $\Delta\bar{x}_0>0$, а для солітона з меншою швидкістю $\Delta\bar{x}_0<0$.

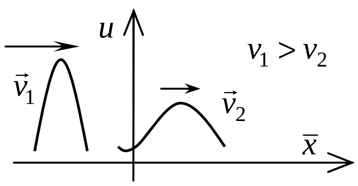

Рис. 10

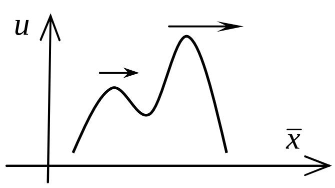

Рис. 11

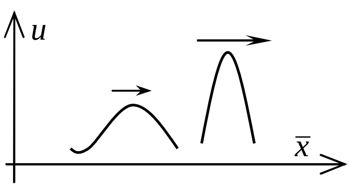

Рис. 12

Такі властивості вперше були виявлені при чисельному розв'язанні рівняння КдФ (4.2), а потім були одержані аналітичним методом, що спирається на обернену задачу розсіювання для одновимірного рівняння Шредінгера.

Узагальненням рівняння КдФ на випадок довільної залежності фазової швидкості синусоїдальних хвиль $c(k)$ від хвильового числа k служить ***рівняння Уізема***

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}C(x-z)\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}dz=0 \ ,$$

де ядро $C(x)$ – Фур'є-образ функції $c(k)$.

Для ядра

$$C_0=(\lambda/2)e^{-\lambda|x|} \ ,$$

де $\lambda>0$ – довільне додатне число, усамітнені хвилі сталої форми можуть бути подані в аналітичній формі. При цьому існує гранична амплітуда таких хвиль $u_{\max}=4/3$. Хвиля граничної амплітуди

$$u(x,t)=\frac{4}{3}\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\left|x-x_0-\frac{4}{3}t\right|\right) \ ,$$

де x_0 – довільна стала, має особливість – загострення на вершині.

Значний інтерес представляє рівняння "$\sin$-Гордона" ("синус-Гордона")

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\sin u \qquad (4.4)$$

що описує велику кількість фізичних явищ, таких як дислокації в кристалах, лазерні імпульси у двофазних середовищах, поширення хвиль у феромагнетиках, зв'язаних з обертанням напрямку намагніченості, джозефсонівські переходи в надпровідниках, які розділені тонким шаром діелектрика та інші.

На рис. 13 показана механічна система, рух якої описується рівнянням вигляду (4.4). Це ланцюг маятників, зв'язаних з пружною ниткою. При відхиленні маятника на кут u на нитку діє пропорційна $\sin u$ сила, що викликає скручування.

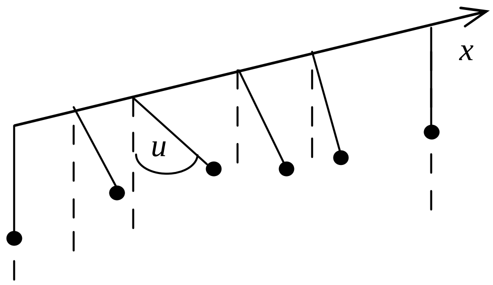

Рис. 13

Розглянемо розв'язки рівняння (4.4), що мають вигляд хвиль сталої форми $u(x,t)=y(x-ct)$, які поширюються зі швидкістю c в напрямку осі Ox. Функція $y(z)$ задовольняє звичайному диференціальному рівнянню

$$\left(1-c^2\right)y''=\sin y \ .$$

Помножимо обидві частини цього рівняння на похідну y' і проінтегруємо. У результаті одержимо

$$\frac{1}{2}\left(1-c^2\right)y'^2=1-\cos y-2A \qquad (4.5)$$

де A – довільна стала.

Якщо $c>1$, $0<A<1$, то рівняння (4.5) можна подати у вигляді

$$y'^2=\frac{4}{c_1^2}\left(A-\sin^2\frac{y}{2}\right) , \text{ де } c_1=\sqrt{c^2-1}.$$

Його розв'язки $y_k(z)=2\arcsin\left(k\cdot sn\left(\frac{z-z_0}{c_1},k\right)\right)$

відповідають коливальному руху маятників на рис. 54.

Тут $k=\sqrt{A}$; z_0 – довільна стала; $sn(z,k)$ – ***еліптична функція Якобі "синус амплітуди z"***. У ***"плазменій" хвилі*** $y_k(x-ct)$, яка біжить по механічній системі на рис. 13, окремі маятники коливаються навколо положення рівноваги $u=0$ з максимальним кутом відхилення $u_{\max}=2\arcsin k$.

У граничному випадку $k \ll 1,\ u_{\max} \ll 1$ маємо синусоїдальні хвилі з малими коливаннями маятників

$$u_k(x,t)=u_{\max}\sin\frac{x-x_0-ct}{c_1}=u_{\max}\sin(kx-\omega t-\varphi_0) \tag{4.6}$$

де x_0 – довільна стала.

Хвилі (4.6) служать розв'язками лінеаризованого рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-u\ ,$$

мають довжину хвилі λ, хвильове число k, частоту ω і початкову фазу φ_0, які зв'язані співвідношеннями

$$\lambda=2\pi c_1;\ \ k=1/c_1;\ \ \omega=c/c_1;\ \ \omega=\sqrt{1+k^2}\ ;\ \ \varphi_0=x_0/c_1\ .$$

Якщо $0<c<1,\ \ A\le 0,$ то рівняння (4.5) приймає вигляд

$$y'^2=\frac{4}{c_1^2}\left(B-\cos^2\frac{y}{2}\right),\ \text{де}\ \ B=1-A\ge 1;\ \ c_1=\sqrt{1-c^2}\ .$$

Його розв'язки $y_{\pm f}(z)=2\arcsin\left(\pm cn\left(\dfrac{z-z_0}{kc_1},k\right)\right)$

відповідають обертальному руху маятників на рис. 13.

Тут $k=1/\sqrt{B}$; z_0 – довільна стала; $cn(z,k)$ – ***еліптична функція Якобі "косинус амплітуди z"***; знаки "+" і "-" відповідають ***"флюксонній" і "антифлюксонній" хвилям***. У "флюксонній" $y_f(x-ct)$ чи "антифлюксонній" $y_{-f}(x-ct)$ хвилі, яка біжить по механічній системі на рис. 13, окремі маятники здійснюють обертальний рух – по системі поширюються ***спіральна хвиля***, закручена проти чи за годинниковою стрілкою. У граничному випадку $k=1$ маємо розв'язок

$$u_c(x,t)=4\,arctg\left(\exp\left(\pm\frac{x-x_0-ct}{c_1}\right)\right)\ ,$$

який при фіксованому виборі знака "+" чи "-" відповідає усамітненій хвилі. При зміні x від $-\infty$ до $+\infty$ маятники на рис. 13 здійснюють повний оберт проти годинникової стрілки для знака "+" і за годинниковою стрілкою для знака "-". Маємо відповідно ***солітон і антисолітон (флюксон і антифлюксон)*** рівняння "$\sin$-Гордона".

Існують також двосолітонні розв'язки рівняння (4.4), які описують зіткнення солітон – солітон, солітон – антисолітон і осцилюючий зв'язаний стан солітона і антисолітона в системі відліку, зв'язаній з їх центром мас, – ***бризер*** (від англ.. breather – дихаючий розв'язок).

Поширення лазерних пучків у нелінійних середовищах, властивості яких залежать від інтенсивності світла, описується ***кубічним рівнянням Шредінгера***

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\nu|u|^2 u=0 \qquad (4.7)$$

де ν – задане число; i – уявна одиниця.

Розглянемо розв'язки рівняння (4.7), що мають вигляд модульованої плоскої хвилі

$$u(x,t)=V(x-ct)e^{i(kx-\omega t)} \qquad (4.8)$$

де $V(x)$ – дійсна функція (амплітуда хвилі).

Підставивши (4.8) в (4.7), одержимо

$$V''-\alpha V+\nu V^3+i(2k-c)V'=0,\ \text{де}\ \ \alpha=k^2-\omega^2.$$

Щоб функція $V(x)$ була дійсною, треба покласти $2k=c$. Тоді, помноживши обидві частини останнього рівняння на похідну V' і проінтегрувавши, дістанемо

$$V'^2=A+\alpha V^2-\frac{\nu}{2}V^4\ .$$

В окремому випадку $A=0,\ \alpha>0,\ \nu>0$ амплітуда (обвідна) $V(x)$ хвилі (4.8) виражається через елементарні функції

$$V(x)=\sqrt{\frac{2\alpha}{\nu}}\cdot\frac{1}{ch\left(x\sqrt{\alpha}\right)}\ .$$

Відповідний розв'язок

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2\alpha}{\nu}}\cdot\frac{1}{ch\left(\sqrt{\alpha}(x-ct)\right)}\exp\left(i(c\frac{x}{2}-\omega t)\right) \qquad (4.9)$$

називається ***солітоном обвідної***.

Графіки дійсної частини $u_1=\mathrm{Re}\,u$ солітонного розв'язку (4.9) і його обвідної $V(x)$ для деякого фіксованого моменту часу показані на рис. 14. Аналогічні хвилі викликаються вітром на глибокій воді. В цьому випадку, звичайно, під обвідною знаходиться не більше 14–20 горбів з довжиною хвилі $\lambda=\frac{4\pi}{c}$, причому середній з них – найвищий. Цим пояснюється відоме морякам правило, що найвищі хвилі в групі – це сьома – десята ("дев'ятий вал").

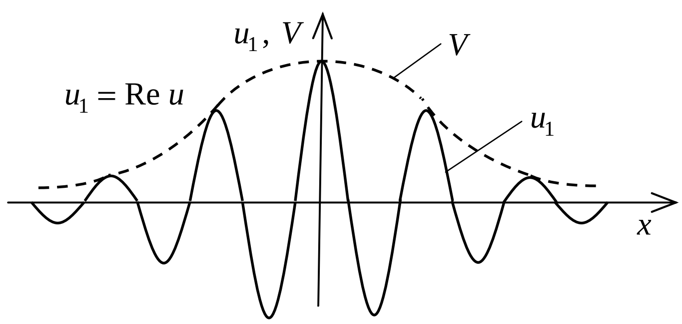

Рис. 14

5.4.3. Узагальнені розв'язки

Розривним розв'язком ДРЧП називається розривна функція $u(x,y)$, яка задовольняє деякому ***інтегральному закону збереження***, що відповідає даному ДРЧП. Звідси випливає, що розривний розв'язок $u(x,y)$ задовольняє ДРЧП поза лінією розриву $x = x(t)$ і так званій ***умові Гюгоніо*** на лінії розриву. Оскільки для ДРЧП може існувати не один інтегральний закон збереження, то для вибраного ДРЧП можна, в загальному випадку, записати деяку множину умов Гюгоніо.

Таким чином, для однозначного визначення розривного розв'язку ДРЧП необхідно вказати певний інтегральний закон збереження. У фізичних задачах (наприклад, в механіці суцільних середовищ) такий закон може бути встановлений однозначно – звичайно, це закон збереження маси, імпульсу чи енергії. Розривні розв'язки служать зручною математичною моделлю ***ударних хвиль***, поблизу фронту яких відбуваються різкі зміни фізичних величин (густини, тиску, температури і т.п.). У таких областях математичні моделі у вигляді ДРЧП перестають вірно описувати фізичні процеси, оскільки втрачають справедливість відповідні припущення і наближені співвідношення, на основі яких виводиться дане ДРЧП. Розгляд розривних розв'язків дозволяє уникнути побудови більш точних, але і більш складних математичних моделей, які треба застосовувати у порівняно вузьких областях поблизу фронту ударних хвиль.

Узагальненим розв'язком називається фізично правильний розривний розв'язок, який визначається як границя неперервних (класичних) розв'язків при певних граничних змінах даних задачі. Наприклад, узагальнений розв'язок задачі Коші для ***рівняння переносу*** вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{4.10}$$

з розривною початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u^-, & .x < 0; \\ u^+, & .x > 0 \quad (u^-,\, u^+ = const) \end{cases} \tag{4.11}$$

можна знайти як границю класичних розв'язків для згладжених початкових умов, які наближаються до заданої розривної функції (4.11) (рис. 15). Така неперервна залежність розв'язків від вхідних даних є однією з умов коректності задач математичної фізики, що забезпечує єдиність розв'язку.

Інший підхід до знаходження узагальненого розв'язку полягає у включенні в ДРЧП (4.10) додаткового дифузійного члена $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, що описує розсіювання (дисипацію) енергії через внутрішнє тертя (в'язкість). В результаті приходимо до більш точного ДРЧП, яке описує ударні хвилі – ***рівняння Бюргерса***

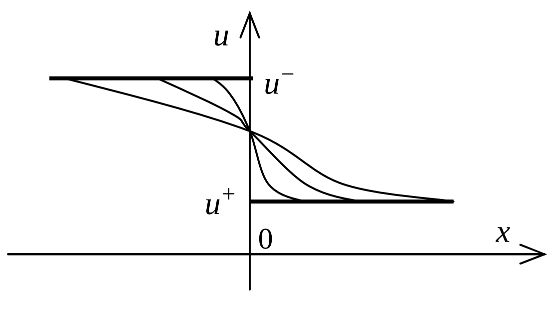

Рис. 15

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; .$$

Тут $\nu > 0$ – в'язкість середовища.

Врахування дифузії енергії приводить до розмиття і згладжування профілю ударної хвилі. У граничному випадку $\nu \to 0$, коли дифузійний член прямує до нуля, одержується розривна ударна хвиля – узагальнений розв'язок.

Ударні хвилі можуть виникати і при неперервних початкових умовах з достатньо крутим переднім фронтом. Утворення багатозначного профілю розв'язку ДРЧП при перетині деяких характеристик називається ***перекиданням ударної хвилі або градієнтною катастрофою*** – в момент перекидання $\min \dfrac{\partial u}{\partial x} \to -\infty$ (рис. 16).

Замість багатозначного розв'язку, що, як правило, суперечить фізичній суті математичної моделі, вводять розривний розв'язок. Для вибору лінії розриву використовують відповідний інтегральний закон збереження. Наприклад, вибирають значення x_p із умови рівності заштрихованих площ S_1 і S_2 (рис. 16, 17).

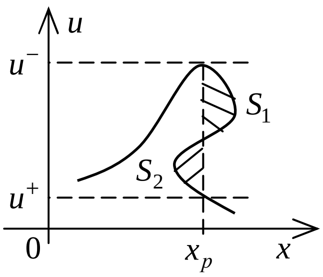

Рис. 16

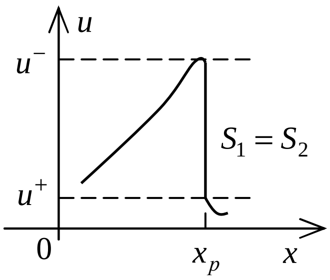

Рис. 17

5.4.4. Самоорганізація нелінійних систем

Самоорганізацією називається процес ***спонтанного*** (самовільного) порушення ступеня симетрії (однорідності) фізичної системи з утворенням упорядкованих у просторі і часі структур з низьким ступенем симетрії (***локалізація неперервних процесів***). Такі процеси описуються нелінійними математичними моделями з дисипацією (дифузією) і взаємодією з навколишнім середовищем. На відміну від лінійних задач, де дифузія приводить до вирівнювання температур, концентрацій і т.п., у нелінійних задачах дифузія викликає формування упорядкованих структур, які називаються ***дисипативними структурами***.

Розглянемо нелінійне рівняння теплопровідності з залежним від температури $T = T(x,t)$ коефіцієнтом температуропровідності $k = k(T)$ і джерелами тепла $Q = Q(T)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + Q \qquad (4.12)$$

де

$$k = k_0 T^b; \quad Q = q_0 T^{\beta}; \quad k_0,\, q_0,\, b = const > 0; \quad \beta = const > 1.$$

Рівняння (4.12) описує процеси горіння. Розв'язання його чисельними методами на ЕОМ і наступні фізичні експерименти привели до відкриття явища локалізації тепла. Розмір нагрітої області з плином часу залишався незмінним, температура в цій області необмежено зростала (***режим із загостренням***). Розв'язок має вигляд

$$T(x,t)=g(t)\ f(x/\varphi(t))\ ;$$

де

$$g(t)=A_1\left(1-t/t_f\right)^{\frac{-1}{\beta-1}};\quad \varphi(t)=A_2\left(1-t/t_f\right)^{\frac{\beta-b-1}{2(\beta-1)}};\quad f(z)=\left(2(b+1)b^{-1}(b+2)b^{-1}\cos^2\left(\pi Z/L_f\right)\right)^{\frac{1}{b+1}};$$

$$L_f=\frac{2\pi}{b}\sqrt{\frac{(b+1)k_0}{q_0}};\quad A_1=A_1(\beta,\,b,\,k_0,\,q_0);\quad A_2=A_2(\beta,\,b,\,k_0,\,q_0);\quad t_f=const\,.$$

З плином часу розподіл температури залишається подібним самому собі, просто він розтягується в певне число разів вздовж осей Ox і Ot. Такі розв’язки називаються ***автомодельними (самоподібними)***. До них відносяться також вже розглянуті солітони і ударні хвилі.

Приклади локалізації у просторі та часі неперервних процесів і утворення дисипативних структур виявлені у фізиці, хімії, біології, екології. Одна з найбільш відомих математичних моделей із самоорганізацією – це ***модель брюселятора***

$$\frac{\partial X}{\partial t}=A-(B+1)X+X^2Y+D_1\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\quad (0<x<l;\ \ t>0) \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t}=BX-X^2Y+D_2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\quad (0<x<l;\ \ t>0) \tag{4.14}$$

де $X=X(x,t)$, $Y=Y(x,t)$ – концентрації деяких основних хімічних речовин X і Y у витягнутому вздовж осі Ox реакторі; l – довжина реактора.

Речовини X і Y залишаються в реакторі, тому граничні умови на кінцях реактора

$$\frac{\partial X(0,t)}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial Y(0,t)}{\partial x}=0\quad (t>0);\qquad \frac{\partial X(l,t)}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial Y(l,t)}{\partial x}=0\quad (t>0).$$

Параметри A і B визначаються концентраціями, які підтримуються сталими, деяких інших допоміжних речовин A і B.

Просторово однорідні стаціонарні розв’язки диференціальної системи (4.13), (4.14) знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь

$$A-(B+1)X+X^2Y=0;\qquad BX-X^2Y=0\,.$$

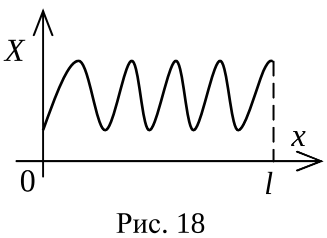

Рис. 18

Ця система має єдиний розв’язок $X=A$, $Y=B/A$, який називається ***термодинамічною гілкою***. При малих концентраціях речовини B довільні початкові умови $X=X(x,0)$, $Y=Y(x,0)$ приводять до термодинамічної гілки. Але починаючи з деякого критичного значення $B\ge B_c$, відбувається вихід на немонотонний стаціонарний розподіл концентрацій (рис. 18) – ***стаціонарну дисипативну структуру***. Збільшення кількості стаціонарних розв’язків (у даному випадку при $B\ge B_c$) називається ***галуженням розв’язку або біфуркацією***.

Термодинамічна гілка при $B\ge B_c$ стає нестійкою: початковий стан $X=X(x,0)$, $Y=Y(x,0)$ при найменших флуктуаціях переходить у дисипативну структуру. Механічні аналоги брюселятора – кулька в жолобі з одним мінімумом $(B < B_c)$ і в жолобі з двома мінімумами, які розділені горбом (рис. 19). Роль точки O відіграє термодинамічна гілка, роль рівноправних точок M і N – дисипативна стаціонарна структура.

Рис. 19

В ряді випадків можливі коливальні режими в моделі брюселятора, коли при довільних початкових умовах відбувається вихід на періодичні в часі розв’язки $X = X(x,t)$, $Y = Y(x,t)$ – ***нестаціонарну дисипативну структуру***.

5.5. Контрольні запитання

1) Дайте означення диференціального рівняння з частинними похідними (ДРЧП). Що таке загальний і частинний розв’язки ДРЧП?
2) Що таке початкова задача (задача Коші) для ДРЧП?
3) Вкажіть основні типи граничних умов і відповідні типи крайових задач.
4) Яка задача математичної фізики називається коректно поставленою?
5) Який загальний вигляд лінійного ДРЧП другого порядку?
6) Дайте класифікацію лінійних ДРЧП другого порядку. Наведіть відповідний канонічний вигляд лінійного ДРЧП другого порядку кожного типу.
7) Що таке характеристики лінійного ДРЧП другого порядку?
8) Як здійснюється зведення лінійного ДРЧП другого порядку до канонічного вигляду?
9) Як формулюється початкова задача для однорідного одновимірного хвильового рівняння? Як розв’язується ця задача методом характеристик? Наведіть формулу Д’Аламбера для розв’язку цієї задачі.
10) Як формулюється перша крайова задача для однорідного одновимірного хвильового рівняння? Як розв’язується ця задача методом відокремлення змінних?
11) Як формулюється друга крайова задача для однорідного одновимірного рівняння теплопровідності? Як розв’язується ця задача методом відокремлення змінних?
12) Як формулюється перша крайова задача для двовимірного рівняння Лапласа у крузі? Як розв’язується ця задача методом відокремлення змінних? Наведіть інтегральну формулу Пуассона для розв’язку цієї задачі.
13) Наведіть схему застосування операційного числення для розв’язування задач математичної фізики.
14) Як будується різницева (сіткова) крайова задача, що відповідає даній диференціальній крайовій задачі?
15) Укажіть основні властивості нелінійних ДРЧП, що відрізняють їх від лінійних рівнянь.
16) Що таке солітон?
17) Що таке узагальнений розв’язок?
18) Що називається самоорганізацією нелінійних систем? Що таке біфуркація?

5.6. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Встановити тип, знайти рівняння характеристик та звести до канонічного вигляду лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Отримане канонічне рівняння звести до спрощеного вигляду з відсутніми першими похідними:

№ в-та	Завдання
1	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0$
2	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
3	$4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0$
4	$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
5	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2u-3x+4y=0$
6	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$
7	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
8	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$
9	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$
10	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial x}=0$
11	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$
12	$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+12\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$
13	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$
14	$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-5u=0$
15	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+9\frac{\partial u}{\partial x}+9\frac{\partial u}{\partial y}-9u=0$
16	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$

17	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
18	$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$
19	$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+17\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}-7u=0$
20	$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-6\frac{\partial u}{\partial x}+7u=0$
21	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$
22	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$
23	$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}+u=0$
24	$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}+u=0$
25	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}+4u=0$
26	$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}-15u=0$
27	$12\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-9\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}-5u=0$
28	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
29	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u=0$
30	$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}-2u=0$

Завдання 2. Використовуючи метод характеристик, за формулою Д'Аламбера знайти розв'язок задачі Коші для одновимірного однорідного хвильового рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(-\infty<x<+\infty;\ \ t>0)$, якщо початкові умови

$$u(x,0)=(-1)^g\cos Nx+ax\,,\ \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=(-1)^p N\sin Nx+l\,.$$

Завдання 3. Розв`язати методом відокремлення змінних крайову задачу для одновимірного однорідного хвильового рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad (0 < x < l;\ t > 0)$ з однорідними граничними умовами

$$\left((-1)^g + 1\right) u(0,t) + \left(1 - (-1)^g\right) \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0,$$

$$\left((-1)^p + 1\right) u(l,t) + \left(1 - (-1)^p\right) \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0,$$

якщо початкові умови

$$u(x,0) = \left((-1)^g + 1\right) \sin \frac{p\pi x}{l} + \left(1 - (-1)^g\right) \frac{x(l-x)}{l^2},$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \left((-1)^p + 1\right) \sin \frac{g\pi x}{l} + \left(1 - (-1)^p\right) \frac{x(l-x)}{l^2}.$$

Завдання 4. Розв`язати методом відокремлення змінних крайову задачу для одновимірного однорідного рівняння теплопровідності $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < l;\ t > 0)$ з однорідними граничними умовами

$$\left((-1)^p + 1\right) u(0,t) + \left(1 - (-1)^p\right) \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0,$$

$$\left((-1)^g + 1\right) u(l,t) + \left(1 - (-1)^g\right) \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0,$$

якщо початкова умова $u(x,0) = \left((-1)^g + 1\right) \sin \dfrac{N\pi x}{l} + \dfrac{x(l-x)}{l^2}$.

Завдання 5. Розв`язати методом відокремлення змінних крайову задачу для двовимірного рівняння Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = 0$ у крузі $0 < \rho < a$ при граничній умові $u(a,\varphi) = (-1)^g \sin p\varphi + (-1)^p \cos g\varphi.$.

Примітка. У завданнях 2 – 5 прийняті наступні співвідношення для вибору параметрів задач:

$a = |\,g - p\,| + 1$, $\quad l = a + [N/(g+p)]$, $\quad N$ – номер варіанта, $\quad g$ – число голосних букв у Вашому прізвищі, $\quad p$ – число приголосних букв у Вашому прізвищі, $[z]$ – ціла частина числа z.

Післямова

В одній книзі важко надати повний виклад усіх спеціальних розділів вищої математики, розглянутих у посібнику. Спираючись на багаторічний досвід викладання та враховуючи сучасні тенденції підвищення практичної спрямованості навчання, автори головну увагу приділили суті розглянутих понять і методів, роз'ясненню конкретних способів їх реалізації, висвітленню проблем і засобів їх розв'язання, формуванню бачення перспективних напрямків розвитку. Докладно опрацьовані типові приклади застосування відповідного математичного апарату. Автори свідомо пішли на певне зниження рівня строгості викладу, не переступаючи меж, прийнятих у навчальній літературі. Для більш поглибленого вивчення матеріалу рекомендується користуватися додатковою літературою.

Автори щиро вдячні своїм безпосереднім колегам з кафедри вищої математики ХНАМГ за товариську підтримку і вимогливість. На думку авторів, даний посібник буде корисним студентам, викладачам і практикуючим спеціалістам, а його удосконалення неможливе без їх критичних зауважень і побажань, які обов'язково будуть враховані.

Бажаємо успіхів і чекаємо відгуків за адресою:

61002, Україна, Харків, вул. Революції, 12, ХНАМГ,
каф. ВМ, доц.. Бізюк В.В.;
e-mail: vm_kolosov@ksame.kharkov.ua