Розділ 4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Розвиток кількісних методів у фізиці привів до поняття поля – області простору, в межах якої задана певна характеристика суцільного середовища, що подільне до нескінченності і неперервне. Це дозволяє описати сукупність значень відповідної фізичної величини (скалярної чи векторної) у всіх точках об’єкта дослідження. Поява поняття поля у фізиці відіграло таку ж прогресивну роль, як у математиці введення змінної величини. Математична теорія поля вивчає властивості векторних та скалярних полів, до розгляду яких зводяться численні задачі фізики, електротехніки, математики та інших наук.

У цьому розділі розглянуті основні диференціальні та інтегральні характеристики поля: градієнт, дивергенція, ротор, циркуляція, потік. Дано застосування теорем Остроградського – Гауса і Стокса. Указано умови потенціальності та соленої дальності. Наведено детальні приклади розв’язання типових задач на розрахунок скалярних і векторних полів, доповнені контрольними запитаннями та індивідуальними розрахунково-графічними завданнями.

4.1. Скалярне поле

4.1.1. Поняття поля. Поверхні та лінії рівня

Якщо кожній точці P *деякої області* D *простору поставлена в однозначну відповідність деяка величина* $F(P)$, *то говорять, що задано* ***просторове поле*** $F = F(P)$.

Якщо всі точки P *лежать в одній площині (область* D *плоска), то поле* $F = F(P)$ *називається* ***плоским***.

Зауваження. Поле – це функція $F = F(P)$, що розглядається невідривно від її області визначення D.

Якщо $F(P)$ є величиною фізичною, то і поле називається ***фізичним***, причому в залежності від природи $F(P)$ поля поділяють на ***скалярні*** та ***векторні***.

Прикладами скалярних фізичних полів можуть бути поля температури, атмосферного тиску, електричного потенціалу. До векторних фізичних полів відносяться, наприклад, поля сили тяжіння, швидкості частинок текучої рідини, густини електричного струму.

Якщо функція $F(P)$ *не змінюється з плином часу, то поле називається* ***стаціонарним*** *або* ***сталим***, *у противному разі –* ***нестаціонарним*** *або* ***змінним***.

Розглянемо просторове скалярне поле $u(P) = u(x, y, z)$.

Поверхнею рівня *скалярного поля* $u = u(P)$ *називається така поверхня, на якій функція* $u = u(P)$ *має стале значення.*

Рівняння поверхні рівня: $u(x, y, z) = C$, $C = const$.

Для різних значень C щоразу будемо мати окрему поверхню рівня. Поверхні рівня складають однопараметричну сім'ю поверхонь. При цьому через кожну точку P_0 поля проходить єдина поверхня рівня $u(x, y, z) = u(P_0)$. Якщо для арифметичної прогресії $C_k = C_0 + k \cdot \Delta C$, $k = 1,2,...$ побудувати відповідні поверхні рівня, то за їх розміщенням можна судити про характер поля: де поверхні розміщені густіше, там поле змінюється швидше.

<u>Приклад 1</u>. Для поля $u = x^2 + y^2 + z^2$ поверхні рівня визначаються рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 = C$ і при $C \geq 0$ утворюють сім’ю концентричних сфер з центром у початку координат. Якщо задати, наприклад, точку $P = (1,-1,2)$, то можна виділити ту єдину сферу, яка проходить через цю точку: $C = 1^2 + (-1)^2 + 2^2 = 6$, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Для плоского скалярного поля розглядають ***лінії рівня***.

Поверхні рівня (у просторі) та лінії рівня (на площині) є основними ***геометричними характеристиками*** скалярного поля.

<u>Приклад 2</u>. Для плоского поля $u = x^2 - y^2$ лінії рівня визначаються рівнянням $x^2 - y^2 = C$. При $C > 0$ маємо сім'ю гіпербол з дійсними вершинами на осі Ox, при $C < 0$ – сім'ю гіпербол з дійсними вершинами на осі Oy, а при $C = 0$, маємо асимптоти цих гіпербол.

Лініями рівня служать, наприклад, на топографічних картах горизонталі – лінії, уздовж яких висота місцевості над умовним рівнем моря є стала. Лінії рівня (***лінії рівного потенціалу*** чи ***еквіпотенціальні лінії***) знаходять широкий вжиток при розрахунках електричних полів. У цьому разі вони є лініями, уздовж яких електричний потенціал у всіх їх точках є сталим. Фізично це означає, що робота сил електричного поля по переносу одиничного позитивного заряду з довільної точки даної лінії рівня в точку, потенціал якої прийнятий рівним нулю, буде однаковою. Сукупність ліній рівного потенціалу дає наочне зображення електричного поля, що полегшує його вивчення.

4.1.2. Похідна за напрямком

Нехай задано просторове скалярне поле $u = u(P)$. Візьмемо у полі деяку точку $P(x, y, z)$. Проведемо з цієї точки P деякий вектор $\vec{s}$, який має направляючі косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (рис.1). На векторі $\vec{s}$ на відстані Δs від його початку розглянемо точку $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

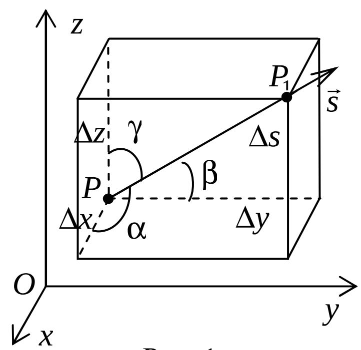

Рис. 1

Таким чином $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$. Будемо вважати, що функція $u = u(x, y, z)$ неперервна і має неперервні похідні.

Повний приріст функції можна записати у вигляді

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ наближаються до нуля, коли $\Delta s \to 0$.

Поділимо рівність на Δs:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Враховуючи, що $\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta$, $\frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$, цю рівність перепишемо так:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma+\varepsilon_1\cos\alpha+\varepsilon_2\cos\beta+\varepsilon_3\cos\gamma$$

Границя відношення $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ *при* $\Delta s\to 0$ *називається* ***похідною поля*** (***функції***) $u=u(x,y,z)$ ***у точці*** $P(x,y,z)$ ***за напрямком вектора*** $\vec{s}$ *і позначається* $\frac{\partial u}{\partial s}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s}$.

Таким чином, $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

У випадку плоского поля $u=u(x,y)$ маємо:

$$cos\,\beta=cos(\pi/2-\alpha)=\sin\alpha;\quad \cos\gamma=0;\quad \frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha.$$

Похідна за напрямком – це швидкість зміни поля в даній точці в указаному напрямку. Якщо в даній точці $\frac{\partial u}{\partial s}>0$ $\left(\frac{\partial u}{\partial s}<0\right)$, то поле в цьому напрямку зростає (спадає).

Зауваження. Частинні похідні можна розглядати як похідні за напрямком відповідних координатних ортів:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial i};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial j};\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial k}.$$

Приклад. Для поля $u=x^2+y^2+z^2$ знайти похідну $\frac{\partial u}{\partial s}$ у точці $P=(1,-2,4)$ за напрямком вектора $\vec{s}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Розв’язання. Обчислюємо направляючі косинуси

$$|\vec{s}|=\sqrt{3};\quad \cos\alpha=1/\sqrt{3};\ \cos\beta=1/\sqrt{3};\quad \cos\gamma=1/\sqrt{3}.$$

Далі $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2y$; $\frac{\partial u}{\partial z}=2z$.

У точці $P=(1,-2,4)$: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=2$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=-4$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=8$.

Отже, $\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_P=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+(-4)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+8\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

4.1.3. Градієнт

Нехай задано просторове скалярне поле $u=u(P)$, причому функція $u=u(P)=u(x,y,z)$ має частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ та $\frac{\partial u}{\partial z}$. ***Градієнтом скалярного поля (функції)*** $u=u(x,y,z)$ *називається вектор*

$$grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Модуль градієнта $|grad\,u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$.

Розглянемо зв'язок між градієнтом та похідною за напрямком.

<u>Теорема</u>. *Нехай задано скалярне поле* $u = u(x, y, z)$ *і в ньому визначено векторне поле градієнтів* $grad\,u$ *. Похідна* $\frac{\partial u}{\partial s}$ *за напрямком деякого вектора* $\vec{s}$ *дорівнює проекції градієнта* $grad\,u$ *на цей вектор* $\vec{s}$: $\frac{\partial u}{\partial s} = np_{\vec{s}}\, grad\,u$.

<u>Доведення</u>. Розглянемо одиничний вектор $\vec{s}_0$, відповідний вектору $\vec{s}$: $\vec{s}_0 = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$.

Обчислимо скалярний добуток

$$grad\,u \cdot \vec{s}_0 = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma .$$

Вираз у правій частині є не що інше, як похідна від функції $u = u(x, y, z)$ за напрямком $\vec{s}$: $grad\,u \cdot \vec{s}_0 = \frac{\partial u}{\partial s}$.

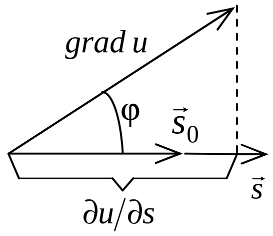

Рис. 2

Якщо позначити кут між векторами $grad\,u$ та $\vec{s}$ через φ (рис. 2), то можна записати

$$|grad\,u| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{або} \quad np_{\vec{s}}\, grad\,u = \frac{\partial u}{\partial s} .$$

З доведеної теореми легко з'ясовується зв'язок між градієнтом та похідною в даній точці за напрямком. У точці $M(x, y, z)$ будуємо вектор $grad\,u$ (рис. 3). Далі будуємо сферу, для якої $grad\,u$ є діаметром. З точки M проводимо вектор $\vec{s}$. Позначимо точку перетину його з поверхнею сфери через N . Тоді

$$MN = |grad u| \cdot \cos\varphi,\ (\varphi < \pi/2). \text{ Тобто } MN = \frac{\partial u}{\partial s} .$$

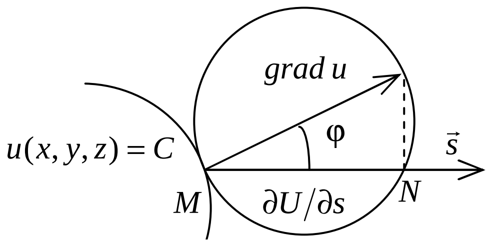

Рис. 3

З'ясуємо деякі <u>властивості градієнта</u>:

1. Похідна в заданій точці за напрямком вектора $\vec{s}$ має найбільше значення, якщо напрямок вектора $\vec{s}$ співпадає з напрямком градієнта; це найбільше значення похідної дорівнює $|grad u|$. Іншими словами, *градієнт у будь-якій точці скалярного поля напрямлений у бік найбільшого зростання поля і за абсолютним значенням дорівнює швидкості зростання поля у цій точці* $\max\frac{\partial u}{\partial s} = |grad\,u|$ (***фізичний зміст градієнта***).

2. Вектор $grad\,u$ напрямлений перпендикулярно до поверхні рівня $u(x, y, z) = C$, яка проходить через відповідну точку. Іншими словами, *напрямок градієнта скалярного поля збігається з напрямком нормалі до поверхні рівня, що проходить через відповідну точку* (***геометричний зміст градієнта***). Одиничний вектор нормалі визначається за формулою

$$\vec{n}_0\big|_M = \pm \left.\frac{grad\, u}{|grad\, u|}\right|_M .$$

2а. Якщо функція $u = u(x, y)$ є функцією двох змінних, то вектор $grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$ лежить у площині Oxy і направлений перпендикулярно до лінії рівня $u(x, y) = C$, яка проходить через відповідну точку.

Дійсно, кутовий коефіцієнт k_1 дотичної до лінії рівня $u(x, y) = C$ дорівнює $k_1 = -u'_x / u'_y$. Кутовий коефіцієнт k_2 градієнта дорівнює $k_2 = u'_y / u'_x$. Тоді $k_1 k_2 = -1$. Це і доводить справедливість твердження.

3. Похідна за напрямком вектора, перпендикулярного до вектора $grad\, u$, дорівнює нулю. Іншими словами, *похідна за будь-якою дотичною до поверхні рівня, що проходить через відповідну точку, дорівнює нулю*.

Приклад 1. Дано просторове поле $u = x^2 + y^2 + z^2$ і точка $M(1, -2, 3)$. Знайти рівняння поверхні рівня, що проходить через дану дочку M, визначити градієнт і модуль градієнта у цій точці та записати відповідний одиничний вектор нормалі до поверхні рівня.

Розв'язання. $u(x, y, z) = u(M)$; $u(M) = 1^2 + (-2)^2 + 3^2 = 14$; $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ – поверхня рівня.

Знаходимо градієнт і його модуль

$$grad\, u = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k};\ grad\, u\big|_M = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k};\ |grad\, u|\big|_M = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 6^2} = 2\sqrt{14}.$$

Тоді одиничний вектор нормалі

$$\vec{n}_0\big|_M = \pm \left.\frac{grad\, u}{|grad\, u|}\right|_M = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}\right).$$

Приклад 2. Дано просторове скалярне поле $u = \ln\left(2xyz - 2y^2 - z^8\right)$ і точка $M_0(2, -1, -1)$. В якому напрямку повинна рухатися біжуча точка $M(x, y, z)$, щоб при переході через точку M_0 дане поле зростало з найбільшою швидкістю? Знайти цю максимальну швидкість.

Розв'язання. Напрямок найбільшого зростання поля – це напрямок градієнта, тобто $s_{\max} = grad\, u$; швидкість у цьому напрямку $\max\frac{\partial u}{\partial s} = |grad\, u|$. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2yz}{2xyz - 2y^2 - z^8};\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 2;\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xz - 4y}{2xyz - 2y^2 - z^8};\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 0;\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2xy - 8z^7}{2xyz - 2y^2 - z^8};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 4;\quad s_{\max} = grad\, u\big|_{M_0} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k} = 2\vec{i} + 4\vec{k};$$

$$\max\frac{\partial u}{\partial s} = |grad\, u|\big|_{M_0} = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

Приклад 3. Дано просторове скалярне поле $u = u(x, y, z)$ і дві точки M_0 та M_1. Для даного поля в указаній точці M_0 знайти:

1) градієнт $grad\, u\big|_{M_0}$ і модуль градієнта $|grad\, u|\big|_{M_0}$;

2) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_0}$ – похідну за напрямом вектора $\vec{s} = \overrightarrow{M_0 M_1}$;

3) косинус кута φ між градієнтом $\left. grad\, u\right|_{M_0}$ і вектором $\vec{s} = \overrightarrow{M_0 M_1}$:

$u = xe^{y-x} + xz^2 - \ln(3y+z)$; $M_0(1;1;-2)$; $M_1(3;-1;-1)$.

Розв’язання.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xe^{y-x} - xe^{y-x} + z^2;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 1-1+4=4;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{y-x} - \frac{3}{3y+z};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 1-3=-2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2xz - \frac{1}{3y+z};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -4-1=-5;\quad \left. grad\, u\right|_{M_0} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k};$$

$$\left|grad\, u\right|_{M_0} = \sqrt{4^2+(-2)^2+(-5)^2} = 3\sqrt{5};\quad \vec{s} = M_0M_1 = (3-1;-1-1;-1+2) = (2;-2;1);$$

$$\left|\vec{s}\right| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = 3;\quad \cos\alpha = 2/3;\ \cos\beta = -2/3;\quad \cos\gamma = 1/3;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_0} = 4\cdot\frac{2}{3} + (-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + (-5)\cdot\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3};$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}\cdot \left. grad\, u\right|_{M_0}}{\left|\vec{s}\right|\cdot\left|grad\, u\right|_{M_0}} = \frac{2\cdot 4 + (-2)\cdot(-2) + 1\cdot(-5)}{3\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{45}.$$

4.1.4. Криволінійний інтеграл по довжині (криволінійний інтеграл першого роду)

Задача про обчислення маси плоскої кривої. Нехай на площині Oxy задана лінія L, по якій неперервно розподілена маса з густиною $f(x,y)$. Потрібно обчислити масу дуги L_{AB} цієї кривої L (рис. 4).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i, $i=\overline{1,n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Розглянемо одну з елементарних дуг Δl_i. Нехай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що її густину можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \Delta l_i$.

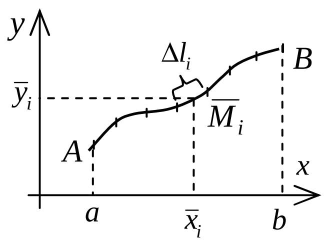

Рис. 4

Маса елементарної дуги $\Delta m_i \approx f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i$. Тоді маса всієї дуги L_{AB}:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i.$$

Одержана сума називається ***інтегральною*** для функції $f(x,y)$ по довжині дуги L_{AB}.

Очевидно, що $m = \lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i$.

Границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття дуги на *елементарні частини називається* ***криволінійним інтегралом по довжині*** (***криволінійним інтегралом першого роду***) *і позначається*:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i, \bar{y}_i\right)\Delta l_i \,,$$

де dl – ***диференціал*** (***елемент***) ***довжини дуги***.

Таким чином, $m = \int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$

(***фізичний зміст*** криволінійного інтеграла по довжині).

Якщо покласти $f(\tilde{o},\acute{o}) \equiv 1$, то криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює довжині l дуги L_{AB}:

$$l = \int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$$

(***геометричний зміст*** криволінійного інтеграла по довжині).

Зауваження 1. При $f(\tilde{o},\acute{o}) \geq 0$ криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює площі S_c частини вертикальної циліндричної поверхні (рис. 5) з напрямною L_{AB} і паралельними осі $\hat{I}z$ твірними, що розміщена між координатною площиною $z = 0$ і поверхнею $z = f(\tilde{o},\acute{o})$:

$$S_c = \int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl \,.$$

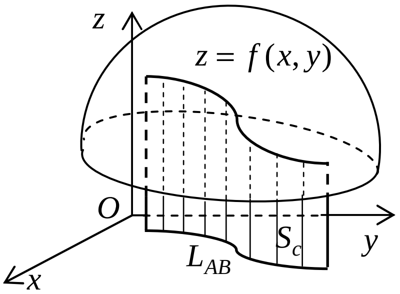

Рис. 5

Зауваження 2. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в деякій області D, що містить в собі кусково-гладку криву L, то криволінійний інтеграл існує.

Зауваження 3. Криволінійний інтеграл по довжині не залежить від напрямку руху по дузі

$$\int\limits_{L_{BA}} f(x,y)\,dl = \int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl \,.$$

Інші властивості цього інтеграла аналогічні властивостям звичайного одновимірного інтеграла.

4.1.5. Обчислення криволінійного інтеграла по довжині

Обчислення криволінійного інтеграла по довжині здійснюється зведенням його до одновимірного інтегралу методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Випадок 1. Нехай дуга L_{AB} задана в параметричній формі: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \leq t \leq \beta$, тобто коли параметр t змінюється на відрізку $[\alpha;\beta]$, біжуча точка $(x(t); y(t))$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Диференціал дуги такої кривої записується у вигляді $dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$.

У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної і отримуємо:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\,\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt\,.$$

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_L ye^{-x}\,dl$, якщо

$$L:\ x = \ln\left(1+t^2\right);\quad y = 2\,arctg\,t - t\,;\quad 0 \le t \le 1\,.$$

Розв'язання. Обчислимо: $x' = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $y' = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 =$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}\,;\qquad dl = \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\,dt = dt\,.$$

Підставимо в інтеграл:

$$\int\limits_L ye^{-x}\,dl = \int\limits_0^1 \left(2\,arctg\,t - t\right)e^{-\ln\left(1+t^2\right)}\,dt = \int\limits_0^1 \frac{2\,arctg\,t - t}{1+t^2}\,dt = 2\int\limits_0^1 \frac{arctg\,t}{1+t^2}\,dt -$$

$$+ - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt = arctg^2\,t\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|\Big|_0^1 = \ arctg^2\,1 - arctg^2\,0 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 1 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Випадок 2. Нехай дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x),\ a \le x \le b$. Тоді $dl = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$. Відповідно

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\,\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx\,.$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_{AB} x^2 y\,dl$, якщо AB є чвертю кола $x^2 + y^2 = 4$ $(x \ge 0,\quad y \ge 0)$.

Розв'язання.

$AB: y = \sqrt{4-x^2},\quad 0 \le x \le 2$; $dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$; $y' = -x\big/\sqrt{4-x^2}$; $dl = \left(2\big/\sqrt{4-x^2}\right)dx$;

$$\int\limits_{AB} x^2 y\,dl = \int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\cdot\frac{2\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\int\limits_0^2 x^2\,dx = 2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = 5\frac{1}{3}$$

Випадок 3. Нехай дуга L_{AB} задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi),\quad \alpha \le \varphi \le \beta$. Тоді $dl = \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$. Відповідно

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\ \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi\,.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,dl$ по дузі кардіоїди $L:\ \rho = 1 + \cos\varphi$; $0 \le \varphi \le \pi/3$.

Розв'язання.

$$\rho' = -\sin\varphi\,;\qquad dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi = \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + (-\sin\varphi)^2}\,d\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\,;$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\left(\rho(\varphi)\cos\varphi\right)^2 - \left(\rho(\varphi)\sin\varphi\right)^2}{\left(\rho(\varphi)\cos\varphi\right)^2 + \left(\rho(\varphi)\sin\varphi\right)^2} = \cos 2\varphi\,;$$

$$\int_L \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dl = \int_0^{\pi/3} \cos 2\varphi \cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \int_0^{\pi/3}\left(\cos\frac{5\varphi}{2}+\cos\frac{3\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{2}{5}\sin\frac{5\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/3} + \frac{2}{3}\sin\frac{3\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/3} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{13}{15}$$

Випадок 4. Якщо дуга L_{AB} задана у просторі параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$, то відповідний криволінійний інтеграл по довжині обчислюється за формулою

$$\int_{L_{AB}} f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z'(t)\big)^2}\,dt.$$

Приклад 4. Обчислити масу дуги конічної гвинтової лінії $L:\ x = e^t\cos t$; $y = e^t \sin t$; $z = e^t$, $0 \le t \le 2\pi$, якщо густина $f(x,y,z) = 2z$.

Розв'язання.

$x' = e^t\cos t - e^t\sin t$; $y' = e^t\sin t + e^t\cos t$; $z' = e^t$; $dl = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z'(t)\big)^2}\,dt = \sqrt{3}\,e^t dt$;

$$m = \int_L f(x,y,z)\,dl = \int_L 2z\,dl = 2\sqrt{3}\int_0^{2\pi} e^{2t}\,dt = \sqrt{3}\ \text{(од. маси)}.$$

4.1.6. Застосування криволінійного інтеграла по довжині

За допомогою криволінійного інтеграла по довжині можна обчислити довжину дуги і площу циліндричної поверхні.

Криволінійний інтеграл від функції $f(x,y)$ по довжині дуги L є ***маса*** відповідної матеріальної дуги з густиною $\mu = f(x,y)$: $m = \int_L f(x,y)dl$.

Якщо густина стала $f(x,y) = \mu_0 = const$, то $m = \mu_0\int_L dl$.

Криволінійний інтеграл по довжині можна застосувати для обчислення ***статичних моментів*** дуги L плоскої матеріальної кривої відносно осей Ox і Oy відповідно

$$S_x = \int_L y\,f(x,y)\,dl, \quad S_y = \int_L x\,f(x,y)\,dl,$$

або ***моментів інерції*** відносно осей Ox і Oy відповідно

$$I_x = \int_L y^2 f(x,y)\,dl, \quad I_y = \int_L x^2 f(x,y)\,dl$$

чи відносно початку координат $I_0 = \int_L \left(x^2+y^2\right)f(x,y)\,dl$.

Координати ***центра мас*** для дуги L плоскої кривої

$$x_c = S_y/m; \quad y_c = S_x/m.$$

Для дуги L просторової кривої:

статичні моменти відносно координатних площин Oxy, Oxz і Oyz відповідно $S_{xy} = \int_L z\ f(x;y;z)\,dl$;

$$S_{xz}=\int\limits_L y\, f(x;y;z)\,dl\,;\quad S_{yz}=\int\limits_L x\, f(x;y;z)\,dl\,,$$

моменти інерції

відносно площини Oxy $\quad I_{xy}=\int\limits_L z^2 f(x,y,z)\,dl\,,$

відносно осі Oz $\quad I_z=\int\limits_L \left(x^2+y^2\right) f(x,y,z)\,dl\,,$

відносно початку координат $I_0=\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right) f(x,y,z)\,dl\,.$

Координати центра мас для дуги L просторової кривої:

$$x_c=S_{yz}/m\,;\quad y_c=S_{xz}/m\,;\quad x_c=S_{xy}/m\,.$$

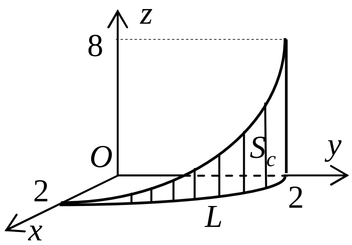

Рис. 6

Приклад 1. Обчислити площу частини кругового циліндра S_c: $\quad y=\sqrt{4-x^2}\,,\quad 0\le x\le 2$, що розміщена між координатною площиною $z=0$ і циліндром $z=y^3$ (рис. 6).

Розв'язання. $L:\ y=\sqrt{4-x^2}\,,\quad 0\le x\le 2\,;$

$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx\,;\ y'=-x/\sqrt{4-x^2}\,.\quad dl=\left(2/\sqrt{4-x^2}\right)dx\,;$

$$S_c=\int\limits_L y^3\,dl=\int\limits_0^2\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3\cdot\frac{2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}=2\int\limits_0^2\left(4-x^2\right)dx=8\cdot x\Big|_0^2-2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=10\frac{2}{3}\,.$$

Приклад 2. Обчислити статичний момент відносно осі Oy дуги циклоїди $L:\ x=t-\sin t\,;\ y=1-\cos t\,;\ 0\le t\le \pi/3$, якщо густина $f(x,y)=3$.

Розв'язання.

$$x'=1-\cos t;\ \ y'=\sin t\,;\ \ dl=\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\,dt=\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2\sin\frac{t}{2}dt\,;$$

$$S_y=\int\limits_L x\ f(x,y)\,dl=6\int\limits_L x\,dl=3\int\limits_0^{\pi/3}(t-\sin t)\,2\sin\frac{t}{2}\,dt=6\int\limits_0^{\pi/3}t\sin\frac{t}{2}\,dt-6\int\limits_0^{\pi/3}\sin t\,\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\left|u=t\,;dv=\sin\frac{t}{2};\ du=dt;\quad v=-2\cos\frac{t}{2}\right|=6\left(t\sin\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\pi/3}-\int\limits_0^{\pi/3}(-2)\cos\frac{t}{2}\,dt\right)-$$

$$-3\int\limits_0^{\pi/3}\left(\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{3t}{2}\right)dt=6\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}+4\sin\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\pi/3}\right)-6\sin\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\pi/3}+2\sin\frac{3t}{2}\Bigg|_0^{\pi/3}=\pi+12-3+2=\pi+11\,.$$

4.2. Векторне поле

4.2.1. Поняття векторного поля. Векторні лінії

Якщо кожній точці $M(x,y,z)$ *деякої області* D *простору поставлений у відповідність вектор* $\vec F(M)=P\vec i+Q\vec j+R\vec k$, *де* $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ *- скалярні функції, то говорять, що задано* ***просторове векторне поле***.

У випадку плоскої області D говорять про ***плоске векторне поле***. Зокрема, якщо область D лежить на координатній площині Oxy, то розглядається плоске векторне поле $\vec F(M)=P\vec i+Q\vec j$, де $P=P(x,y)\ \ Q=Q(x,y)$.

Надалі вважатимемо, що координатні функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Геометричними характеристиками векторного поля є векторні (силові) лінії.

Векторною (силовою) лінією поля *$\vec{F} = \vec{F}(M)$ називається крива $\vec{r} = \vec{r}(t)$, дотична до якої в кожній її точці співпадає з вектором $\vec{F} = \vec{F}(M)$, що визначає поле в цій точці.*

Прикладами векторних ліній в електротехніці є лінії вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$ чи лінії вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$.

*Поверхні, складені з векторних ліній, називаються **векторними поверхнями**. Якщо L – деякий замкнений контур, що не збігається з векторною лінією, то векторні лінії, що проходять через точки цього контуру, утворюють векторну поверхню, що називається **векторною трубкою**.*

Якщо $\vec{F}$ – поле швидкостей текучої рідини, то рідина рухається по векторній трубці, не перетинаючи її стінок.

Виведемо диференціальні рівняння векторних ліній.

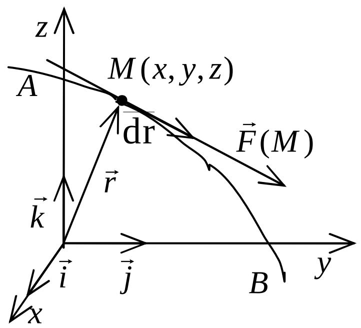

Рис. 7

Нехай (рис. 7) AB - векторна лінія, $\vec{r}$ - радіус-вектор точки $M(x, y, z)$. Тоді $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Обчислимо $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

З диференціального числення відомо, що вектор $d\vec{r}$ направлений по дотичній до AB в точці M. Отже, $d\vec{r} \parallel \vec{F}(M)$, але тоді з умови паралельності векторів

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Це і є система двох диференціальних рівнянь векторних ліній.

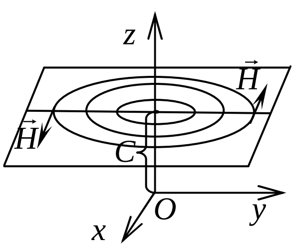

Рис. 8

Приклад 1. Постійний електричний струм I тече по нескінченно довгому провіднику, співпадаючому з віссю Oz в напрямку цієї осі (рис. 8). Вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}$, створюваного цим струмом, в довільній точці $M(x, y, z)$ дорівнює

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho^2}\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right),$$

де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ - відстань від точки M до осі Oz. Знайти векторні лінії магнітного поля $\vec{H}$.

Розв’язання. Запишемо векторне поле у вигляді

$$\vec{H} = -\frac{Iy}{2\pi\rho^2}\vec{i} + \frac{Ix}{2\pi\rho^2}\vec{j} + 0\cdot\vec{k},$$

тобто $P = -\dfrac{Iy}{2\pi\rho^2}$, $Q = \dfrac{Ix}{2\pi\rho^2}$, $R = 0$.

Диференціальні рівняння векторних ліній після очевидних скорочень набудуть вигляду:

$$\begin{cases} dx/(-y) = dy/x \\ z = C_1\ (C_1 = const) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x\,dx = -y\,dy \\ z = C_1 \end{cases}.$$

Після інтегрування $\begin{cases} x^2 + y^2 = C_2^2 & (C_2 = const) \\ z = C_1 \end{cases}$ – двопараметрична сім'я кіл з центрами на осі Oz.

Приклад 2. Знайти векторну лінію векторного поля $\vec{F}(M) = -y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$, що проходить через точку $M_0(2,0,0)$.

Розв'язання. Векторні лінії поля визначаються з системи диференціальних рівнянь $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{1}$. Розв'язуємо перше рівняння

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x};\ xdx + ydy = 0;\ x^2 + y^2 = C_1^2.$$

Запишемо отриману залежність у параметричному вигляді

$$x = C_1 \cos t,\ y = C_1 \sin t.$$

Тоді з другого рівняння

$$\frac{dy}{x} = \frac{dz}{1};\quad \frac{C_1 \cos t\, dt}{C_1 \cos t} = dz;\quad dz = dt;\quad z = t + C_2.$$

Отже, векторні лінії задаються параметричними рівняннями

$$x = C_1 \cos t,\quad y = C_1 \sin t,\quad z = t + C_2$$

– це двопараметрична сім'я гвинтових ліній з віссю Oz.

Оскільки шукана векторна лінія проходить через точку $M_0(2,0,0)$, то $2 = C_1 \cos t$, $0 = C_1 \sin t$, $0 = t + C_2$.

Звідси $t_0 = 0$, $C_1 = 2$, $C_2 = 0$.

Отже, векторна лінія заданого поля $\vec{F}(M)$, що проходить через указану точку $M_0(2,0,0)$, задається параметричними рівняннями $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t$.

4.2.2. Дивергенція і ротор векторного поля

Розглянемо просторове векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Дивергенцією (***розбіжністю***) *векторного поля* $\vec{F}$ *у точці* $M(x,y,z)$ *називається число*

$$div\vec{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}.$$

Дивергенція є *скалярною характеристикою* векторного поля.

Якщо $div\vec{F}(M) > 0$, *то точка* M *називається* ***джерелом*** (***витоком***), *а якщо* $div\vec{F}(M) < 0$, *то точка* M *називається* ***стоком***.

Векторні лінії починаються в джерелах і закінчуються в стоках.

Дивергенція характеризує потужність джерел і стоків. Кожному векторному полю $\vec{F}$ відповідає скалярне поле $div\vec{F}$ розподілу джерел та стоків поля $\vec{F}$.

Векторне поле $\vec{F}$ *називається* ***соленоїдальним*** (***трубчатим***), *якщо в кожній точці його дивергенція дорівнює нулю:* $div\vec{F} = 0$.

Соленоїдальне поле не має ані джерел, ані стоків.

У соленоїдальному полі векторні лінії не можуть ні починатися, ні закінчуватися всередині поля. Вони або замкнуті, або мають кінці на межі поля, або мають нескінченні гілки (у випадку необмеженого поля).

Приклад 1. Знайти дивергенцію даного векторного поля в указаних точках:

$$\vec{F}=\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}; \quad M_1(1,0,0); \quad M_2(0,0,-1).$$

Розв'язання.

$$\vec{F}=(x+y+z)^{-2/3}\vec{i}+(x+y+z)^{-2/3}\vec{j}+(x+y+z)^{-2/3}\vec{k}; \quad \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z}=(-2/3)(x+y+z)^{-5/3};$$

$$div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=-2\Big/\sqrt[3]{(x+y+z)^5}; \quad div\vec{F}(M_1)=-2\Big/\sqrt[3]{(1+0+0)^5}=-2<0,$$

$$div\vec{F}(M_2)=-2\Big/\sqrt[3]{(0+0-1)^5}=2>0.$$

Отже, M_1 - точка стоку; M_2 - точка витоку.

Приклад 2. Перевірити, що дане векторне поле є соленоїдальним: $\vec{F}=e^{xy}\left(-x\vec{i}+y\vec{j}+xy\vec{k}\right)$.

Розв'язання.

$$P=-xe^{xy}; \quad Q=ye^{xy}; \quad R=xye^{xy}; \quad \frac{\partial P}{\partial x}=-\left(e^{xy}+xye^{xy}\right); \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}; \quad \frac{\partial R}{\partial z}=0;$$

$$div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=-\left(e^{xy}+xye^{xy}\right)+\left(e^{xy}+xye^{xy}\right)=0.$$

Отже, векторне поле соленоїдальне.

Ротором (***вихорем***) *векторного поля* $\vec{F}$ *у точці* $M(x,y,z)$ *називається вектор*

$$rot\,\vec{F}(\mathrm{M})=\left.\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\right|_M=\left(\frac{\partial R(M)}{\partial y}-\frac{\partial Q(M)}{\partial z}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial R(M)}{\partial x}-\frac{\partial P(M)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q(M)}{\partial x}-\frac{\partial P(M)}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ротор є *векторною характеристикою* поля $\vec{F}$.

Кожному векторному полю $\vec{F}$ відповідає векторне поле його роторів $rot\,\vec{F}$, що характеризує обертання поля $\vec{F}$ в кожній точці.

Векторне поле $\vec{F}$ *називається* ***безвихровим***, *якщо в кожній точці його ротор дорівнює нулю:* $rot\,\vec{F}=\vec{0}$.

Зауваження 1. Для плоского векторного поля $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ ротор $rot\,\vec{F}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$ перпендикулярний до площини Oxy.

Зауваження 2. Кожне векторне поле $\vec{F}$ може бути подане як сума безвихрового та соленоїдального полів.

Приклад 3. Знайти ротор даного векторного поля в указаній точці:

$\vec{F} = y^2\,\vec{i} - 2xz\,\vec{j} - x^2\,\vec{k}$; $M(1,-1,-2)$.

Розв'язання.

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & -2xz & -x^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(-x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-2xz)}{\partial z}\right)\vec{i} -$$

$$-\left(\frac{\partial(-x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(-2xz)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial y}\right)\vec{k} = 2x\,\vec{i} + 2x\,\vec{j} - 2(z+y)\,\vec{k}\ ;$$

$$rot\,\vec{F}(M) = 2\cdot 1\cdot\vec{i} + 2\cdot 1\cdot\vec{j} - 2(-2-1)\,\vec{k} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 6\,\vec{k}\ .$$

Приклад 4. Перевірити, що дане векторне поле є безвихровим: $\vec{F} = (2xy - yz)\vec{i} + \left(x^2 + 2yz - xz\right)\vec{j} + \left(y^2 - xy\right)\vec{k}$.

Розв'язання. $rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy - yz & x^2 + 2yz - xz & y^2 - xy \end{vmatrix} =$

$$= \big((2y - x) - (2y - x)\big)\vec{i} - \big((-y) - (-y)\big)\,\vec{j} + \big((2x - z) - (2x - z)\big)\vec{k} = \vec{0}\ .$$

Отже, векторне поле безвихрове.

Густиною циркуляції *векторного поля* $\vec{F}$ *у точці* $M(x,y,z)$ *у напрямку вектора* $\vec{n}$ *називається число*

$$C_{\vec{n}}\,(M) = np_{\vec{n}}\ rot\,\vec{F}(M)\,.$$

Густина циркуляції $C_{\vec{n}}\,(M)$ *в даній точці* M *досягає максимуму в напрямку ротора* $rot\,\vec{F}(M)$ *і дорівнює його модулю*:

$$C_{\max}(M) = \left|rot\,\vec{F}(M)\right|,\ \ \vec{n}_{\max} = rot\,\vec{F}(M)\,.$$

Приклад 5. Знайти максимальну густину циркуляції даного векторного поля в указаній точці: $\vec{F} = (xz/y)\vec{i} - 2xy^2z\,\vec{j} + x^2y\,\vec{k}$; $M(2,1,-1)$.

Розв'язання.

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz/y & -2xy^2z & x^2y \end{vmatrix} = \left(x^2 + 2xy^2\right)\vec{i} - -\left(2xy - x/y\right)\vec{j} + \left(-2y^2z + xz/y^2\right)\vec{k}\ ;$$

$$rot\,\vec{F}(M) = 8\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\ ;\ \ C_{\max}(M) = \left|rot\,\vec{F}(M)\right| = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + 0^2} = 2\sqrt{17}\ ;$$

$$\vec{n}_{\max} = rot\,\vec{F}(M) = 8\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\ .$$

Векторне поле $\vec{F}$ *називається* ***гармонічним***, *якщо воно одночасно соленоїдальне і безвихрове.*

Векторне поле $\vec{F}$ *гармонічне, якщо в кожній його точці дивергенція і ротор дорівнюють нулю*:

$$div\vec{F} = 0\,,\ rot\,\vec{F} = \vec{0}\,.$$

Приклад 6. Перевірити, що дане векторне поле є гармонічним: $\vec{F} = \left(2xy + z^2 - x^2\right)\vec{i} + \left(x^2 + z - y^2\right)\vec{j} + (y + 2xz)\vec{k}$.

Розв'язання.

$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + z^2 - x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + z - y^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(y + 2xz\right) =$$

$$= 2y - 2x - 2y + 2x = 0\,;$$

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy + z^2 - x^2 & x^2 + z - y^2 & y + 2xz \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial(y+2xz)}{\partial y} - -\frac{\partial(x^2+z-y^2)}{\partial z} \right)\vec{i} - \left(\frac{\partial(y+2xz)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy+z^2-x^2)}{\partial z} \right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial(x^2+z-y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy+z^2-x^2)}{\partial y} \right)\vec{k} = (1-1)\vec{i} - (2z-2z)\vec{j} + (2x-2x)\vec{k} = \vec{0}\,.$$

Отже, векторне поле гармонічне.

4.2.3. Криволінійний інтеграл по координатах (криволінійний інтеграл другого роду)

Задача про обчислення роботи векторного поля. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$.

Нехай під дією змінної сили $\vec{F} = \vec{F}(x,y)$ матеріальна точка M рухається деякою плоскою кусково-гладкою напрямленою лінією L. Необхідно обчислити роботу A_r, яка виконується при переміщенні цієї точки M по дузі L_{AB} від початкової точки A до кінцевої точки B (рис. 9).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i, $i = \overline{1,n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Розглянемо одну з елементарних дуг Δl_i, якій відповідає вектор переміщення $\Delta\vec{l_i} = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$. Нехай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що на ній вектор сили $\vec{F} = \vec{F}(x,y)$ можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $\vec{F} = \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \Delta l_i$.

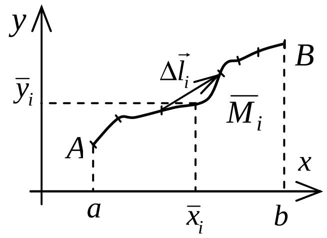

Рис. 9

Елементарна робота $\Delta A_{r\,i}$ на ділянці Δl_i визначається скалярним добутком

$$\Delta A_{r\,i} \approx \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot \Delta\vec{l_i} = P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot \Delta y_i\,.$$

Якщо обчислити елементарну роботу на всіх ділянках Δl_i, $i = \overline{1,n}$ і скласти суму, то $A_r = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta A_{r\,i} \approx$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot \Delta\vec{l}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot \Delta y_i \right).$$

Одержана сума називається ***інтегральною*** для вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(x,y)$ по напрямленій дузі L_{AB}.

Очевидно, що $A_r = \lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta A_{r\,i}$.

Границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається ***криволінійним інтегралом по координа-***

тах (***криволінійним інтегралом другого роду***) *і позначається*:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim_{\max \Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(P(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\cdot\Delta x_i+Q(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\cdot\Delta y_i\right).$$

Криволінійний інтеграл по координатах у векторному полі також називається ***циркуляцією вектора*** $\vec{F}$ ***по дузі*** L_{AB} *і позначається*

$$\int\limits_{L_{AB}}\vec{F}(x,y)\,d\vec{l}=\lim_{\max \Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\cdot\Delta\vec{l}_i\,.$$

де $d\vec{l}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}$ – ***вектор диференціала*** (***елемента***) ***довжини плоскої дуги***.

Таким чином, $A_r=\int\limits_{L_{AB}}\vec{F}(x,y)\,d\vec{l}$

(***фізичний зміст*** криволінійного інтеграла по координатах).

Якщо лінія L замкнена, то інтеграл по ній записується так $\oint\limits_{L}\vec{F}(x,y)\,d\vec{l}=\oint\limits_{L}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, причому початкова точка вибирається довільно й обов'язково вказується напрямок обходу. Якщо напрямок обходу замкненого контуру L явно не вказано, то приймається додатний напрямок (при цьому область, обмежена контуром, залишається зліва – рух проти годинникової стрілки (правило "правого гвинта")).

Зауваження. Для просторового векторного поля інтеграл має вигляд

$$\int\limits_{L_{AB}}\vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l}=\int\limits_{L_{AB}}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz\,,$$

де $d\vec{l}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$ – ***вектор диференціала*** (***елемента***) ***довжини просторової дуги***.

4.2.4. Властивості криволінійного інтеграла по координатах

Криволінійний інтеграл по координатах визначається підінтегральним виразом, довжиною і формою кривої інтегрування та її напрямком.

Властивість 1. *При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл по координатах тільки змінює знак*

$$\int\limits_{L_{BA}}\vec{F}\,d\vec{l}=-\int\limits_{L_{AB}}\vec{F}\,d\vec{l}\,.$$

Це випливає з означення, оскільки при цьому вектор $d\vec{l}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$, а відповідно і його проекції dx, dy і dz, змінюють знак.

Властивість 2. Векторне поле $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ можна розглядати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно, *повний криволінійний інтеграл по координатах можна розглядати як суму трьох інтегралів*

$$\int\limits_{L}\vec{F}\,d\vec{l}=\int\limits_{L}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int\limits_{L}P\,dx+\int\limits_{L}Q\,dy+\int\limits_{L}R\,dz\,,$$

де кожен з трьох інтегралів справа також називається відповідно ***криволінійним інтегралом по координаті*** x***,*** y ***чи*** z.

Властивість 3. Розглянемо циркуляцію $\oint\limits_{L}\vec{F}\,d\vec{l}$ по замкненому контуру L. З'єднаємо дві довільні точки A і B цього контуру дугою L_{AB} (рис. 10). Таким чином, одержимо два замкнені контури $L_1 = AmB$ і $L_2 = BnA$. Тоді

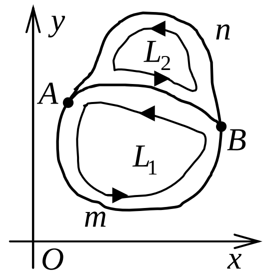

Рис. 10

$$\oint_L \vec{F}\,d\vec{l} = \oint_{L_1} \vec{F}\,d\vec{l} + \oint_{L_2} \vec{F}\,d\vec{l}\,, \text{ оскільки } \int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} + \int_{L_{BA}} \vec{F}\,d\vec{l} = 0$$

Тобто, *при розбитті замкненого контуру на замкнені підконтури значення сумарного криволінійного інтеграла не змінюється.* Ця властивість виражає закон збереження обертального руху.

Властивість 4. Оскільки $\left|d\vec{l}\right| = dl$, то $dx = dl\cos\alpha$, $dy = dl\cos\beta$, $dz = dl\cos\gamma$, де α, β, γ – напрямні кути вектора $d\vec{l}$. Тоді *криволінійний інтеграл по координатах зводиться до криволінійного інтеграла по довжині*

$$\int_L \vec{F}\,d\vec{l} = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = = \int_L P\,dl\cos\alpha + Q\,dl\cos\beta + R\,dl\cos\gamma =$$

$$= \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl$$

(***Зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого роду***).

Зауваження. Інші властивості криволінійного інтеграла по координатах аналогічні властивостям звичайного визначеного інтеграла.

4.2.5. Обчислення криволінійного інтеграла по координатах

Обчислення криволінійного інтеграла по координатах здійснюється зведенням його до одновимірного інтегралу методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Випадок 1. Розглянемо просторове векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Нехай просторова дуга L_{AB} задана в параметричній формі $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$. Тоді $dx = x'(t)\,dt$; $dy = y'(t)\,dt$; $dz = z'(t)\,dt$.

У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної і отримуємо:

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt\,.$$

Приклад 1. Обчислити циркуляцію просторового векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x+y-1)\vec{k}$ по відрізку L_{AB} прямої, який з'єднує точки $A(1,1,1)$ та $B(2,3,4)$.

Розв'язання. Знайдемо канонічні рівняння прямої AB:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-1}{4-1}; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Перейдемо до параметричного запису прямої і обчислимо диференціали:

$$x = t+1;\ y = 2t+1;\ z = 3t+1;\ dx = dt;\ dy = 2dt;\ dz = 3dt.$$

Врахуємо, що при заміні змінної змінюються межі інтегрування, а саме, якщо на відрізку L_{AB} $1 \le x \le 2$, то $0 \le t \le 1$.

Отже, $\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \int\limits_{L_{AB}} x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz =$

$$= \int_0^1 [t+1+(2t+1)\cdot 2 + (t+1+2t+1-1)\cdot 3]dt = \int_0^1 (14t+6)dt = 14\cdot\left(t^2/2\right)\Big|_0^1 + 6z\Big|_0^1 = 13.$$

Випадок 2. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x)$, $a \le x \le b$. Можна використати також попередній спосіб, записавши рівняння дуги у параметричній формі

$\begin{cases} y = y(x) \\ x = x \end{cases}$ $a \le x \le b$. Тоді $\begin{cases} dy = y'(x)\,dx \\ dx = dx \end{cases}$ і маємо

$$\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\,y'(x)]dx \quad .$$

Приклад 2. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ по відрізку L_{AB} прямої, який з'єднує точки $A(0,0)$ та $B(1,1)$.

Розв'язання. Знайдемо канонічне рівняння прямої AB:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{1-0}; \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{1}.$$

Тоді $L_{AB}: y = x,\ 0 \le x \le 1;\ y' = 1;\ \ dy = dx$.

Отже, $\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int\limits_{L_{AB}} 2xydx + x^2\,dy = \int_0^1 \left(2x\cdot x + x^2\right)dx = 3\int_0^1 x^2 dx = 3\cdot\left(x^2/3\right)\Big|_0^1 = 1$

Приклад 3. Обчислити роботу A_r силового поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки уздовж дуги L_{AB} перерізу однопорожнинного гіперболоїда $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$ площиною $y = x$ від точки $A(1,1,0)$ до точки $B\left(\sqrt{2};\sqrt{2};1\right)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння лінії $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$ у параметричному вигляді $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt{t} \\ z = \sqrt{t-1} \end{cases}$. Тоді $\begin{matrix} dx = dt/\left(2\sqrt{t}\right) \\ dy = dt/\left(2\sqrt{t}\right) \\ dz = dt/\left(2\sqrt{t-1}\right) \end{matrix}$. При цьому на дузі L_{AB} $1 \le t \le 2$, оскільки $1 \le x \le \sqrt{2}$.

Отже, $A_r = \int\limits_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int\limits_{L_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{L_{AB}} 2xy\,dx + y^2dy - x^2dz = \int_1^2 \Bigg(2\sqrt{t}\sqrt{t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}} + t\,\frac{1}{2\sqrt{t}} -$

$$- t\,\frac{1}{2\sqrt{t-1}}\Bigg)dt = \int_1^2 \left(\frac{3}{2}\sqrt{t} - \frac{t-1+1}{2\sqrt{t-1}}\right)dt = \frac{3}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t-1}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}} = t^{3/2}\Big|_1^2 - \frac{1}{3}(t-1)^{3/2}\Big|_1^2 -$$

$$-(t-1)^{1/2}\Big|_1^2 = 2\sqrt{2} - 1 - \frac{1}{3} - 1 = 2\sqrt{2} - \frac{7}{3} = \frac{6\sqrt{2}-7}{3}.$$

Випадок 3. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Можна скористатися результатами розгляду першого випадку, якщо подати дугу L_{AB} у параметричній формі $\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$ $\alpha \le \varphi \le \beta$, де полярний кут φ служить параметром. Тоді $dx = (\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi)d\varphi$; $dy = (\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi)d\varphi$. Маємо інтеграл

$$\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big[P(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\cdot(\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi) +$$
$$+ Q(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\cdot(\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi)\big]d\varphi.$$

Приклад 4. Обчислити криволінійний інтеграл по координатах $I = \int\limits_{L_{AB}} \frac{1}{x}\left(2dx - 6\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)$, де L_{AB} – дуга двопелюсткової троянди $\rho = 2\cos 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/6$.

Розв'язання. Запишемо рівняння дуги у параметричному вигляді $\begin{cases} x = 2\cos 2\varphi\cos\varphi \\ y = 2\cos 2\varphi\sin\varphi \end{cases}$. Тоді $\sqrt{x^2+y^2} = 2\cos 2\varphi$; $\begin{cases} dx = -2(2\sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi)d\varphi \\ dy = 2(-2\sin 2\varphi\sin\varphi + \cos 2\varphi\cos\varphi)d\varphi \end{cases}$, $0 \le \varphi \le \pi/6$.

Отже, $I = \int\limits_{L_{AB}} \frac{1}{x}\left(2dx - 6\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right) = \int\limits_0^{\pi/6} \frac{1}{2\cos 2\varphi\cos\varphi}\times$

$$\times\left(2\cdot(-2)(2\sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi) - 6\cdot 2\cos 2\varphi\cdot 2(-2\sin 2\varphi\sin\varphi + \cos 2\varphi\cos\varphi)\right)d\varphi =$$
$$= -4\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi}d\varphi - 2\int\limits_0^{\pi/6}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}d\varphi + 48\int\limits_0^{\pi/6}\sin^2\varphi\,d\varphi - 12\int\limits_0^{\pi/6}\cos 2\varphi\,d\varphi =$$
$$= 2\ln|\cos 2\varphi|\Big|_0^{\pi/6} + 2\ln|\cos\varphi|\Big|_0^{\pi/6} + 24\int\limits_0^{\pi/6}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi - 12\int\limits_0^{\pi/6}\cos 2\varphi\,d\varphi = 2\ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right| -$$
$$-2\ln|\cos 0| + 2\ln\left|\cos\frac{\pi}{6}\right| - 2\ln|\cos 0| + 24\int\limits_0^{\pi/6} d\varphi - 36\int\limits_0^{\pi/6}\cos 2\varphi\,d\varphi = 2\ln\frac{1}{2} - 2\ln 1 +$$
$$+2\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\ln 1 + 24\cdot\varphi\Big|_0^{\pi/6} - 18\cdot\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/6} = -2\ln 2 + \ln 3 -$$
$$-2\ln 2 + 24\cdot\frac{\pi}{6} - 18\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \ln 3 - 4\ln 2 + 4\pi - 9\sqrt{3}.$$

4.2.6. Формула Гріна

Встановимо зв'язок між подвійним інтегралом по деякій плоскій області D та криволінійним інтегралом по межі L цієї області.

Теорема. (Зв'язок між криволінійним і подвійним інтегралом) *Нехай задано плоске векторне поле* $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ *де* $P = P(x,y)$ та $Q = Q(x,y)$ - *функції двох змінних, неперервні разом з частинними похідними першого порядку. Якщо* L - *замкнена лінія, що обмежує область* D, *то*

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy$$

(***формула Гріна***).

Доведення. Обмежимось розглядом області D, правильної в напрямку осі Oy (рис. 11). Обчислимо

$$\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy = \int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= \int\limits_a^b \big(P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))\big)dx = -\int\limits_b^a P(x,y_2(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x,y_1(x))\,dx = -\oint\limits_L P(x,y)\,dx.$$

Аналогічно $\iint\limits_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy = \oint\limits_L Q(x,y)\,dx$.

Склавши відповідні вирази, маємо

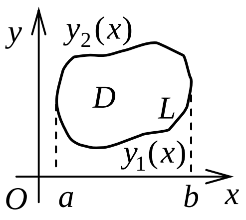

Рис. 11

$$\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy.$$

Приклад 1. Використовуючи формулу Гріна, обчислити циркуляцію $\oint\limits_L \frac{1}{x}arctg\frac{y}{x}dx + \frac{2}{y}arctg\frac{x}{y}dy$, якщо L - замкнений контур $ABCE$, утворений колами $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ та прямими $y=x$, $y=x\sqrt{3}$, де $x>0$, $y>0$ (рис. 12).

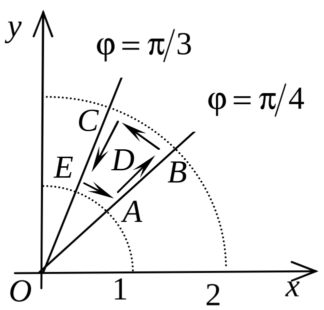

Рис. 12

Розв'язання. У прийнятих позначеннях

$$P(x,y) = \frac{1}{x}arctg\frac{y}{x}, \quad Q(x,y) = \frac{2}{y}arctg\frac{x}{y}.$$

Знайдемо $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{2}{x^2+y^2}$.

Тоді за формулою Гріна

$$\oint\limits_L \frac{1}{x}arctg\frac{y}{x}dx + \frac{2}{y}arctg\frac{x}{y}dy = \iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2},$$

де область D обмежена контуром L.

Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, де $1\le\rho\le 2$, $\pi/4\le\varphi\le\pi/3$. Отже,

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_1^2 \frac{1}{\rho^2}\rho\, d\rho = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \ln\rho\Big|_1^2 d\varphi = \frac{\pi}{12}\ln 2.$$

Зауваження. Нехай замкнений контур L обмежує область D. За формулою Гріна

$$\oint\limits_L -y\,dx + x\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right)dxdy = \iint\limits_D (1+1)\,dxdy = 2\iint\limits_D dxdy = 2S_D.$$

Звідси $S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_L -y\,dx + x\,dy$, де S_D – площа плоскої області D, що обмежена контуром L.

Приклад 2. За допомогою криволінійного інтеграла по координатах обчислити площу плоскої області D, що обмежена осями координат $x=0$, $y=0$ і дугою астроїди $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$, розміщеною в першому квадранті ($x\ge 0$, $y\ge 0$) (рис. 13).

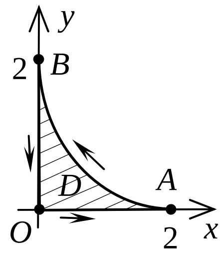

Рис.13

Розв’язання. Контур $L = OABO$, що обмежує область D, складається з трьох ділянок OA, AB і BO. Відповідно розіб’ємо криволінійний інтеграл

$$S_D = (1/2)\oint_L -y\,dx + x\,dy = (1/2)\left(\int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}\right).$$

Тоді

OA: $y = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2;\ dy = 0$;

$\int_{OA} -y\,dx + x\,dy = \int_0^2 (-0 + x\cdot 0)\,dx = 0$; AB: $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t,\ t_1 = 0,\ t_2 = \pi/2$;

$$dx = -6\cos^2 t \sin t\,dt;\quad dy = 6\sin^2 t\cos t\,dt;\quad \int_{AB} -y\,dx + x\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(-2\sin^3 t\cdot(-6)\cos^2 t\sin t + 2\cos^3 t\cdot 6\sin^2 t\cos t\right)dt = 12\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)dt =$$

$$= 3\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{3}{2}t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{3}{8}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{4};$$

BO: $x = 0,\ y_1 = 2,\ y_2 = 0;\ dx = 0$; $\int_{BO} -y\,dx + x\,dy = \int_2^0 (-y\cdot 0 + 0)\,dy = 0$.

Отже, $S_D = (1/2)(0 + 3\pi/4 + 0) = 3\pi/8$.

4.2.7. Умови незалежності криволінійного інтеграла по координатах від шляху інтегрування

Розглянемо приклад. Раніше ми обчислили інтеграл $\int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} 2xydx + x^2\,dy$ по відрізку прямої, що з'єднує точки $A(0,0)$ та $B(1,1)$, тобто L_{AmB}: $y = x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ (рис. 14) і одержали значення інтеграла $\int_{L_{AmB}} \vec{F}\,d\vec{l} = 1$ (див. приклад 2 із п.4.2.4). Обчислимо той же інтеграл, але шлях інтегрування, що з'єднує указані точки A та B, оберемо параболою L_{AnB}: $y = x^2$.

Тоді $dy = 2xdx$; $\int_{L_{AnB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{L_{AnB}} 2xydx + x^2\,dy = \int_0^1\left(2x\cdot x^2 + x^2\cdot 2x\right)dx = 4\int_0^1 x^3dx = x^4\Big|_0^1 = 1$.

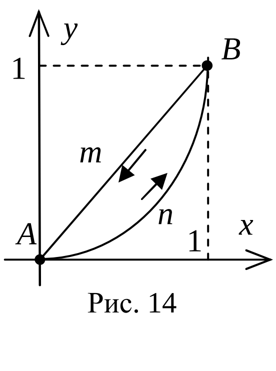

Рис. 14

Як бачимо, значення інтеграла не змінилося, хоча шлях інтегрування був іншим:

$$\int_{L_{AnB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{L_{AmB}} \vec{F}\,d\vec{l}.$$

З іншого боку, якщо обчислити інтеграл по замкненій лінії $L = AnBmA$ то, очевидно,

$$\oint_L \vec{F}\,d\vec{l} = 0.$$

Виникає питання: за яких умов щодо функцій $P = P(x, y)$ і $Q = Q(x, y)$ виконується рівність $\oint_L \vec{F}\,d\vec{l} = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$?

Теорема. *Нехай у всіх точках деякої області* D *функції* $P(x, y)$ *та* $Q(x, y)$

неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ *та* $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. *Тоді для того, щоб криволінійний інтеграл по довільному замкненому контуру* L, *який цілком лежить в області* D, *дорівнював нулю, тобто* $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, *необхідно і достатньо виконання умови* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ *у всіх точках області* D.

Доведення. Нехай контур L обмежує область $D_1 \subseteq D$. Запишемо формулу Гріна

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy .$$

Якщо умова теореми виконана, то подвійний інтеграл у правій частині дорівнює нулю і цим доведено достатність.

Доведемо необхідність методом від супротивного. Припустимо, що $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, а умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ не виконується хоча б в одній точці $M_0(x_0, y_0)$ області D, скажімо, в цій точці $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y > 0$.

Оскільки в лівій частині нерівності функція неперервна, то вона буде додатна і у всіх точках деякої досить малої області $D_1 \subseteq D$, яка містить в собі точку $M_0(x_0, y_0)$. Візьмемо подвійний інтеграл по цій області, який матиме додатне значення $\iint_{D_1} (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y) dxdy > 0$.

Але за формулою Гріна ліва частина одержаної нерівності дорівнює криволінійному інтегралу по контуру L, який обмежує область D_1, і дорівнює нулю. Виходить, наше припущення невірне. Це приводить до висновку, що $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ в усіх точках області D.

Коли згадати, що рівність $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ є необхідною і достатньою умовою того, щоб вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ був повним диференціалом, то доведену теорему можна сформулювати так: *для того, щоб криволінійний інтеграл* $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ *не залежав від лінії інтегрування, необхідно і достатньо, щоб його підінтегральний вираз був повним диференціалом.*

Підсумовуючи висновки нашого дослідження, можна стверджувати, що *коли область* D *однозв'язна і функції* $P(x, y)$ *та* $Q(x, y)$ *неперервні разом зі своїми частинними похідними* $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ *та* $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ *в цій області, то всі чотири наступні твердження рівносильні, тобто якщо виконується одне з них, то виконуються і всі інші:*

1) криволінійний інтеграл $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, *взятий по довільному замкненому контуру* L, *цілком розміщеному в області* D, *дорівнює нулю;*

2) криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ *не залежить від форми лінії інтегрування* L_{AB}, *що цілком лежить в області* D *і з'єднує початкову* A *і кінце-*

ву В точки;

3) вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *є повний диференціал деякої функції* $u(x,y)$, *тобто в області* D *існує така функція* $u(x,y)$, *що* $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, *де* $P(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ *і* $Q(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$;

4) у всіх точках області D *має місце рівність* $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Зауваження. На практиці зручно користуватись останньою умовою $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Приклад 1. Використовуючи умову $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$, перевірити, що криволінійний інтеграл по замкненому контуру $\oint\limits_L (5x-2y\cos 2x)dx+(3y-\sin 2x)dy$ дорівнює нулю.

Розв’язання. Знайдемо $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2\cos 2x;\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2\cos 2x$. Оскільки $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$, то інтеграл по довільному замкненому контуру L дорівнює нулю.

4.2.8. Обчислення функції за її повним диференціалом. Розв’язання диференціальних рівнянь у повних диференціалах

Розглянемо функцію $u(x,y)$, задану в деякій області D, де вона неперервна разом зі своїми частинними похідними. Обчислимо її повний диференціал $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$.

Позначимо $P(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x},\quad Q(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$. Тоді для повного диференціалу $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Але за цієї умови криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{M_0M_1}} Pdx+Qdy$ не залежить від форми шляху інтегрування, а визначається положенням початкової $M_0(x_0,y_0)$ та кінцевої $M_1(x_1,y_1)$ точок. Такий інтеграл позначають так

$$\int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

а шлях інтегрування обирають довільно.

Зауваження 1. Найзручніше інтегрувати по ламаній лінії M_0NM_1, ланки M_0N і NM_1 якої паралельні осям координат. При цьому можливі два способи побудови ламаної, що відображені на рис. 15 і рис. 16.

Для першого способу (рис. 15):

на відрізку $M_0N: y=y_0=const,\ dy=0$, а на відрізку $NM_1: x=x_1=const,\ dx=0$. Отже, інтеграл набуде вигляду

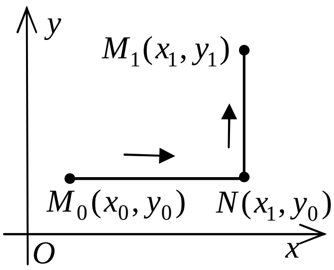

Рис. 15

$$\int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{N(x_1,y_0)} + \int\limits_{N(x_1,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)dy \,.$$

Для другого способу (рис. 16):

на відрізку $M_0N: x = x_0 = const,\ dx = 0$, а на відрізку $NM_1: y = y_1 = const,\ dy = 0$. Отже, інтеграл набуде вигляду

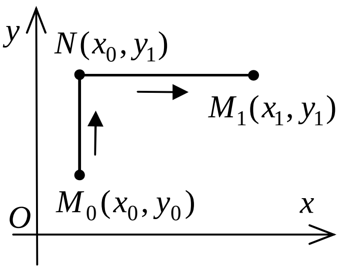

Рис. 16

$$\int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{N(x_0,y_1)} + \int\limits_{N(x_0,y_1)}^{M_1(x_1,y_1)} =$$

$$= \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_0,y)dy + \int\limits_{x_0}^{x_1} P(x,y_1)dx \,.$$

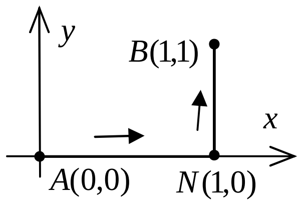

Рис. 17

Приклад 1. Знайти інтеграл

$$\int\limits_{A(0,0)}^{B(1,1)} 2xydx + x^2dy \,.$$

Розв'язання. За шлях інтегрування оберемо ламану ANB (рис. 17). На відрізку $AN: y = 0 = const,\ dy = 0$, а на відрізку $NB: x = 1 = const,\ dx = 0$. Тоді

$$\int\limits_{A(0,0)}^{B(1,1)} 2xydx + x^2dy = \int\limits_{A(0,0)}^{N(1,0)} + \int\limits_{N(1,0)}^{B(1,1)} = \int\limits_{0}^{1} 2x \cdot 0 \cdot dx + \int\limits_{y_0}^{y_1} 1^2 \cdot dy = 1 \,.$$

Зауваження 2. Якщо в криволінійному інтегралі, що не залежить від форми шляху інтегрування, початкову точку $M_0(x_0, y_0)$ зафіксувати, а кінцеву точку $M(x, y)$ розглядати як змінну, то цей інтеграл буде деякою функцією координат x і y точки $M(x, y)$:

$$u(x,y) = \int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \,.$$

Функцію $u(x, y)$ називають ***первісною***. Задача відшукання функції (первісної) $u(x, y)$ за її повним диференціалом розв'язується з точністю до довільної сталої:

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C \,,\ C = const \,,$$

де $M_0(x_0, y_0)$ – довільно вибрана фіксована точка, в якій функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ та їх частинні похідні неперервні.

Використовуючи поняття первісної, одержуємо ***формулу Ньютона–Лейбніца*** *для криволінійних інтегралів*

$$\int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} Pdx + Qdy = u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} = u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0) \,.$$

Приклад 1. Перевірити, що вираз $\left(e^{xy} + 5\right)\left(xdy + ydx\right)$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ та знайти цю функцію.

Розв’язання. Запишемо даний вираз у вигляді $\left(e^{xy}+5\right)y\,dx+\left(e^{xy}+5\right)x\,dy$. Тобто $P(x,y)=\left(e^{xy}+5\right)y$; $Q(x,y)=\left(e^{xy}+5\right)x$. Обчислимо $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=e^{xy}xy+e^{xy}+5$; $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=e^{xy}xy+e^{xy}+5$.

Як бачимо, $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$. Значить, даний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$.

Знайдемо цю функцію. Нехай $M_0(0,0)$ – початкова точка. За шлях інтегрування оберемо ламану M_0NM, де на відрізку $M_0N: y=0=const,\ dy=0$, а на відрізку $NM: x=x=const,\ dx=0$. Тоді

$$u(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(e^{xy}+5\right)ydx+\left(e^{xy}+5\right)xdy+\tilde{N}=\int\limits_{M_0(0,0)}^{N(x,0)}+\int\limits_{N(x,0)}^{M(x,y)}+\tilde{N}=$$

$$=\int\limits_0^x\left(e^{x\cdot 0}+5\right)\cdot 0dx+\int\limits_0^y\left(e^{xy}+5\right)xdy+C=0+x\cdot\left(\frac{1}{x}e^{xy}+5y\right)\Bigg|_0^y+C=e^{xy}+5xy-1+C.$$

Включивши мінус одиницю в довільну сталу, маємо

$$u(x,y)=e^{xy}+5xy+\tilde{C},\ \text{де } \tilde{C} \text{ – довільна стала.}$$

Перевіримо правильність результату, тобто обчислимо повний диференціал функції $u(x,y)=e^{xy}+5xy+\tilde{C}$:

$$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\left(e^{xy}y+5y\right)dx+\left(e^{xy}x+5x\right)dy.$$

Приклад 2. Перевірити, що вираз

$$\left(1/x^2+2/y\right)dx+\left(1/y-2x/y^2\right)dy$$

є повним диференціалом деякої функції та знайти цю функцію.

Розв’язання. Маємо $P(x,y)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{y}$, $Q(x,y)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{2x}{y^2}$. Ці функції неперервні разом з частинними похідними $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{2}{y^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{2}{y^2}$ на всій координатній площині Oxy, крім початку координат $O(0,0)$. Оскільки $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$, то

$$\left(1/x^2+2/y\right)dx+\left(1/y-2x/y^2\right)dy=du(x,y).$$

Знайдемо функцію $u(x,y)$. Нехай $M_0(1,1)$ – початкова точка (точку $(0,0)$ вибрати не можна, оскільки в ній функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ розривні). За шлях інтегрування оберемо ламану M_0NM, де на відрізку $M_0N: y=1=const,\ dy=0$, а на відрізку $NM: x=x=const,\ dx=0$. Тоді

$$u(x,y)=\int\limits_{(1,1)}^{(x,y)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{y}-\frac{2x}{y^2}\right)dy+C=\int\limits_{M_0(1,1)}^{N(x,1)}+\int\limits_{N(x,1)}^{M(x,y)}+C=\int\limits_1^x\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{1}\right)dx+\int\limits_1^y\left(\frac{1}{y}-\frac{2x}{y^2}\right)dy+$$

$$+C=\left(-\frac{1}{x}+2x\right)\Bigg|_1^x+\left(\ln|y|+2x/y\right)\Big|_1^y+C=-1/x+2x+1-2+\ln|y|+$$

$$+2x/y-\ln 1-2x+C=-1/x+\ln|y|+2x/y-1+C.$$

Отже, $u(x,y)=-1/x+\ln|y|+2x/y+\tilde{C}$, де $\tilde{C}$ – довільна стала.

Зауваження 3. Якщо для диференціального рівняння першого порядку $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ виконується умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, то воно називається ***рівнянням у повних диференціалах***. Оскільки ліва частина цього рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, то відновлюючи функцію за її повним диференціалом, загальний розв'язок (загальний інтеграл) $u(x,y) = C$ вказаного рівняння можна подати в одній із форм

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C\,;\ \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx = C\,.$$

Приклад 3. Пересвідчитися, що диференціальне рівняння

$$\left(6xy^2 - 1/x^2\right)dx + \left(6x^2y + 5y^4\right)dy$$

є рівнянням у повних диференціалах. Знайти його загальний розв'язок.

Розв'язання. Маємо $P = 6xy^2 - 1/x^2$, $\quad Q = 6x^2y + 5y^4$.

Ці функції неперервні разом з частинними похідними $\partial P/\partial y = 12xy$ і $\partial Q/\partial x = 12xy$ на всій координатній площині Oxy за винятком точок осі $Oy: x = 0$. Оскільки виконується умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, то маємо рівняння у повних диференціалах.

Знайдемо його загальний розв'язок за формулою

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C\,,$$

використовуючи початкову точку $M_0(x_0,y_0) = M_0(1,0)$. Тоді

$$\int_{1}^{x}\left(6x\cdot 0^2 - 1/x^2\right)dx + \int_{0}^{y}\left(6x^2y + 5y^4\right)dy = C\,;\ \left(1/x\right)\Big|_1^x + 6x^2\cdot\left(y^2/2\right)\Big|_0^y + 5\cdot\left(y^5/5\right)\Big|_0^y = C\,;$$

$$1/x - 1 + 3x^2y^2 + y^5 = C\,.$$

4.2.9. Потенціальне векторне поле

Розглянемо плоске векторне поле

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}\,.$$

Нехай у деякій однозв'язній області D поля виконується умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Тоді вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$du = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy\,,\quad \text{де}\quad \frac{\partial u}{\partial x} = P \ \text{ і } \ \frac{\partial u}{\partial y} = Q\,.$$

Але тоді задане векторне поле можна записати так

$$\vec{F}(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\vec{j} = grad\,u(x,y)\,.$$

*Векторне поле $\vec{F}$ називається **потенціальним**, якщо воно є градієнтом деякого скалярного поля u: $\vec{F} = grad\,u$. Скалярна функція u називається **потенціалом** векторного поля $\vec{F}$.*

Зауваження 1. У прикладних дисциплінах іноді перед градієнтом ставиться знак "-", що не має принципового значення, а лише відповідає конкретному фізичному змісту. Наприклад, для електростатичного поля $\vec{E} = -\,grad\,u$ означає, що в напрямку вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ електричний потенціал u спадає.

Умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ потенціальності плоского векторного поля рівнозначна існуванню повного диференціала. Відповідно, задача обчислення потенціалу векторного поля рівнозначна задачі відшукання повного диференціала. Оскільки $grad\,(u + C) = grad\,u$, то *потенціал векторного поля обчислюється з точністю до довільної сталої* C. *Потенціал векторного поля визначається циркуляцією цього поля по довільній лінії* M_0M, *що з'єднує фіксовану початкову* $M_0(x_0, y_0)$ *і змінну кінцеву* $M(x, y)$ *точки*:

$$u(x, y) = \int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)} \vec{F}\,d\vec{l} + C = \int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C .$$

Зауваження 2. Для вибору конкретного значення довільної сталої C використовуються додаткові умови. Наприклад, для електростатичного поля точкового заряду приймається, що потенціал на нескінченності дорівнює нулю.

Циркуляція градієнта скалярного поля дорівнює різниці потенціалів цього поля градієнтів:

$$\int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} grad\,u\,d\vec{l} = u(x, y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) .$$

Приклад 1. Пересвідчитись, що плоске векторне поле

$$\vec{F}(x, y) = \left(2x - 3y^2 + 1\right)\vec{i} + (2 - 6xy)\vec{j}$$

потенціальне і знайти його потенціал.

Розв'язання. Маємо $P = 2x + 3y^2 + 1$; $Q = 2 - 6xy$;

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -6y; \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -6y; \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} ,$$

що свідчить про потенціальність плоского поля.

За початкову точку візьмемо $M_0(0,0)$, а інтегруватимемо по ламаній M_0NM, де на відрізку M_0N : $y = 0 = const$, $dy = 0$, а на відрізку NM : $x = x = const$, $dx = 0$. Тоді

$$u(x, y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} \left(2x - 3y^2 + 1\right)dx + (2 - 6xy)\,dy + C = \int\limits_{M_0(0,0)}^{N(x,0)} + \int\limits_{N(x,0)}^{M(x,y)} + C =$$

$$= \int\limits_0^x \left(2x - 3 \cdot 0^2 + 1\right)dx + \int\limits_0^y (2 - 6xy)\,dy + C =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^x + x\Big|_0^x + 2 \cdot y\Big|_0^y - 6x \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^y + C = x^2 + x + 2y - 3xy^2 + C .$$

Приклад 2. Знайти циркуляцію градієнта скалярного поля $u = xy$ по відрізку L_{AB} прямої, який з'єднує точки $A(1,1)$ та $B(2,2)$.

Розв'язання. $\vec{F} = grad\,u$, тоді

$$\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int\limits_{(1,1)}^{(2,2)} grad\,u\,d\vec{l} = u\Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = xy\Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 .$$

Розглянемо просторове векторне поле

$$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}.$$

Якщо це поле потенціальне, а $u=u(x,y,z)$ - його потенціал, то $P=\partial u/\partial x$; $Q=\partial u/\partial y$; $R=\partial u/\partial z$.

У потенціальному векторному полі $\vec{F}=grad\,u$ циркуляція не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкової $M_0(x_0,y_0,z_0)$ та кінцевої $M(x,y,z)$ точок:

$$\int_{M_0}^{M}\vec{F}\,d\vec{l}=\int_{M_0}^{M}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=\int_{M_0}^{M}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=\int_{M_0}^{M}du=$$

$$=u\Big|_{M_0}^{M}=u(M_0)-u(M).$$

Обчислимо ротор потенціального поля:

$$rot\,\vec{F}=\left.\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\right|_M=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)\vec{k}=\vec{0}.$$

Отже, $rot\,\vec{F}=\vec{0}$, якщо поле - потенціальне. Тобто, *потенціальне поле є безвихровим*.

Зворотне твердження також вірне. Тобто, *безвихрове. поле є потенціальним*.

Зокрема, рівність $rot\,grad\,u=\vec{0}$ свідчить про те, що *поле градієнтів завжди потенціальне*.

Висновок: *щоб визначити, чи задане векторне поле потенціальне, достатньо пересвідчитись, що його ротор дорівнює нулю*.

Рівність $rot\,\vec{F}=\vec{0}$ рівносильна виконанню умов

$$\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x;\quad \partial Q/\partial z=\partial R/\partial y;\quad \partial R/\partial x=\partial P/\partial z.$$

Для потенціального поля справедлива теорема, яка відповідає розглянутим раніше властивостям криволінійного інтеграла по координатах.

Теорема. *Наступні чотири властивості векторного поля $\vec{F}$, заданого в однозв'язній області D, еквівалентні:*

1) циркуляція поля $\vec{F}$ по будь-якому замкнутому контуру, розміщеному в області D, дорівнює нулю;

2) циркуляція поля $\vec{F}$ вздовж довільної кривої L_{AB}, яка лежить в області D, з початком в точці A та кінцем в точці B залежить тільки від положення точок A та B і не залежить від форми кривої;

3) існує функція $u=u(x,y,z)$ така, що $\vec{F}=grad\,u$;

4) поле $\vec{F}$ є безвихровим, тобто $rot\,\vec{F}=\vec{0}$.

Якщо просторове векторне поле $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ потенціальне, то його потенціал $u=u(x,y,z)$ знаходиться за формулою

$$u(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz+C,$$

де $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – довільно вибрана фіксована точка, в якій функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ $R(x,y,z)$ та їх частинні похідні неперервні; $C=const$.

Зауваження 3. Найзручніше інтегрувати по ламаній лінії, ланки якої паралельні осям координат. При цьому можливі різні способи побудови такої ламаної.

Приклад 3. Дано просторове електростатичне поле напруженості $\vec{E}=q\vec{r}/|\vec{r}|^3$ точкового електричного заряду q ($q=const$), де $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Пересвідчитись, що це векторне поле $\vec{E}$ потенціальне, і обчислити його потенціал $u=u(x,y,z)$.

Розв'язання. $|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

$\vec{E}=q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}x\vec{i}+q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}y\,\vec{j}+q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}z\,\vec{k}$.

Позначимо $P=q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}x$, $Q=q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}y$, $R=q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}z$.

Тоді, наприклад, $\dfrac{\partial R}{\partial y}=-\dfrac{3}{2}qz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}2y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z}=-\dfrac{3}{2}qy\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-5/2}2z$, тому $\partial R/\partial x=\partial P/\partial z$.

Аналогічно можна показати, що $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$; $\partial Q/\partial z=\partial R/\partial y$.

Отже, $rot\,\vec{E}=\vec{0}$, значить, поле $\vec{E}$ - потенціальне.

Обчислимо його потенціал. Нехай $M_0(0,0,1)$ – початкова точка. За шлях інтегрування оберемо ламану $M_0N_1N_2M$ (рис. 18), де

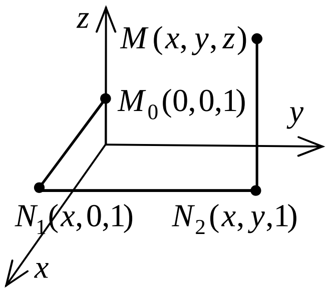

Рис. 18

$M_0N_1: y=0=const,\ dy=0$; $z=1=const,\ dz=0$

$N_1N_2: x=x=const,\ dx=0$; $z=1=const,\ dz=0$;

$N_2M: x=x=const,\ dx=0$; $y=y=const,\ dy=0$.

Тоді $u(x,y,z)=\int\limits_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz+C=$

$$=\int\limits_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{N_1(x,y_0,z_0)}+\int\limits_{N_1(x,y_0,z_0)}^{N_2(x,y,z_0)}+\int\limits_{N_2(x,y,z_0)}^{M(x,y,z)}+C=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int\limits_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz+C.$$

Таким чином,

$$u(x,y,z)=\int\limits_0^x q\left(x^2+0^2+1^2\right)^{-3/2}x\,dx+\int\limits_0^y q\left(x^2+y^2+1^2\right)^{-3/2}y\,dy++\int\limits_1^z q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}z\,dz+$$

$$+C=\frac{q}{2}\cdot\frac{\left(x^2+1\right)^{-1/2}}{-1/2}\Bigg|_0^x+\frac{q}{2}\cdot\frac{\left(x^2+y^2+1\right)^{-1/2}}{-1/2}\Bigg|_0^y+\frac{q}{2}\cdot\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}}{-1/2}\Bigg|_1^z+C=$$

$$=-q/\sqrt{x^2+y^2+z^2}+q+C=-q/|\vec{r}|+\tilde{C},\ \tilde{C}=C+q.$$

Зауваження 4. Якщо потенціальне поле $\vec{F}$ - силове, то потенціал цього поля у точці $M(x,y,z)$ чисельно дорівнює роботі сили уздовж довільної кривої, яка з'єднує точку M з точкою нульового потенціалу M_0.

4.3. Оператор Гамільтона та його застосування

Операції обчислення характеристик скалярних і векторних полів можуть бути спрощені, якщо скористатися диференціально-векторним оператором

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

який був введений Гамільтоном і називається ***оператором Гамільтона*** (***“набла”-оператором***).

Його застосування до скалярних і векторних полів визначає ***диференціальні операції першого порядку***.

4.3.1. Оператор Гамільтона у скалярному полі

Нехай задано скалярне поле $u = u(x, y, z)$.

Застосуємо до функції $u = u(x, y, z)$ оператор "набла" за правилами множення вектора на число:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = grad\, u.$$

Отже, $grad\, u = \nabla u$.

Приклад 1. Знайти $grad\,|\vec{r}|$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Розв’язання. $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $grad\,|\vec{r}| = \nabla|\vec{r}| =$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{i} +$$

$$+ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Приклад 2. Знайти $grad\left(1/|\vec{r}|\right)$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Розв’язання. $grad\,\frac{1}{|\vec{r}|} = \nabla\frac{1}{|\vec{r}|} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} =$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} 2x\vec{i} - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} 2y\vec{j} -$$

$$- \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} 2z\vec{k} = -\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

Застосування оператора Гамільтона до суми скалярних полів здійснюється за правилами чисельного добутку

$$\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v.$$

Наприклад,

$$grad\left(|\vec{r}| + 1/|\vec{r}|\right) = \nabla\left(|\vec{r}| + 1/|\vec{r}|\right) = \nabla|\vec{r}| + \nabla\left(1/|\vec{r}|\right) = \vec{r}/|\vec{r}| - \vec{r}/|\vec{r}|^3.$$

4.3.2. Оператор Гамільтона у векторному полі

Нехай задано векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}\ .$$

Застосуємо оператор "набла" до цього векторного поля за правилами множення векторів. Оскільки добуток двох векторів може бути або скалярним, або векторним, то розглянемо спочатку скалярний добуток

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot \left(P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k} \right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = div\,\vec{F}\ .$$

Отже, $div\,\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$.

Наприклад, для вектора $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ маємо

$$div\,\vec{r} = \nabla \cdot \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3\,.$$

Розглянемо тепер векторний добуток

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \times \left(P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = rot\,\vec{F}\ .$$

Отже, $rot\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$.

Наприклад, для вектора $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ маємо $rot\,\vec{r} = \vec{0}\,.$

Застосування оператора Гамільтона до суми векторних полів здійснюється за правилами скалярного добутку

$$\nabla \cdot \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \right) = \nabla \cdot \vec{F}_1 + \nabla \cdot \vec{F}_2$$

або за правилами векторного добутку

$$\nabla \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \right) = \nabla \times \vec{F}_1 + \nabla \times \vec{F}_2\,.$$

4.3.3. Застосування оператора Гамільтона до добутку скалярних та векторних полів

При вживанні оператора "набла" до добутку двох полів, якими можуть бути $u \cdot v,\ u \cdot \vec{F},\ \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2,\ \vec{F}_1 \times \vec{F}_2$ треба користуватися правилами векторної алгебри та правилами диференціювання. При цьому у першу чергу слід враховувати його диференціальний характер, а потім вже векторні властивості.

Як диференціальний оператор він діє лише на множник, що стоїть безпосередньо за ним

$$\nabla u \cdot v = (\nabla u) \cdot v = v \cdot grad\ u\ ; \quad \nabla (u \cdot v) = grad (u \cdot v).$$

В останньому випадку за правилами диференціювання

$$grad\ (u \cdot v) = \nabla (u \cdot v) = \nabla u \cdot v + u \cdot \nabla v = v\,grad\ u + u\,grad\ v\ .$$

Як бачимо, у процесі диференціювання на певному етапі ми деякі функції вважаємо фіксованими (сталими). Щоб виділити ці функції, їх позначають індексом, наприклад

$$div \left(u \cdot \vec{F} \right) = \nabla \left(u \cdot \vec{F} \right) = \nabla \left(u_c \cdot \vec{F} \right) + \nabla \left(u \cdot \vec{F}_c \right) =$$
$$= \nabla \left(\vec{F} \cdot u_c \right) + \nabla u \cdot \vec{F}_c = div\vec{F} \cdot u + grad\,u \cdot \vec{F}\ .$$

До речі, цей же результат можна одержати без вживання оператора "набла":

$$div\left(u\cdot\vec{F}\right)=\nabla\cdot\left(u\cdot\vec{F}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(uP\vec{i}+uQ\vec{j}+uR\vec{k}\right)=\frac{\partial(uP)}{\partial x}+\frac{\partial(uQ)}{\partial y}+\frac{\partial(uR)}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}P+\frac{\partial P}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}Q+\frac{\partial Q}{\partial y}u+\frac{\partial u}{\partial z}R+\frac{\partial R}{\partial z}u=u\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\right)=u\,div\vec{F}+grad\,u\cdot\vec{F}\,.$$

Ще приклад

$$div\left(\vec{F}_1\times\vec{F}_2\right)=\nabla\cdot\left(\vec{F}_1\times\vec{F}_2\right)=\nabla\left(\vec{F}_{1c}\times\vec{F}_2\right)+\nabla\left(\vec{F}_1\times\vec{F}_{2c}\right)=$$

далі, користуючись циклічністю мішаного добутку трьох векторів $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=$, запишемо останній вираз так, аби оператор "набла" стояв безпосередньо перед тією функцією, на яку він діє

$$=\vec{F}_{1c}\cdot\left(\vec{F}_2\times\nabla\right)+\vec{F}_{2c}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}_1\right)=-\vec{F}_{1c}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}_2\right)+\vec{F}_{2c}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}_1\right)=\vec{F}_2\cdot rot\,\vec{F}_1-\vec{F}_1\cdot rot\,\vec{F}_2\,.$$

Введений індекс є допоміжним і в кінці обчислення його не пишуть. Наприклад,

$$rot\left(u\cdot\vec{F}\right)=\nabla\times\left(u\cdot\vec{F}\right)=\nabla x\left(u_c\cdot\vec{F}\right)+\nabla x\left(u\cdot\vec{F}_c\right)=u_c\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)-$$

$$-\vec{F}_c\times\nabla u=u\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)-\vec{F}\times\nabla u=u\cdot rot\,\vec{F}-\vec{F}\,grad\,u\,.$$

Ми розглянули ***диференціальні операції першого порядку***: $grad\,u=\nabla u$, $div\,\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}$, $rot\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}$. Після їх застосування до поля виникає нове поле, до якого знову можна вжити ці операції У результаті маємо ***диференціальні операції другого порядку***. Таких операцій існує лише п'ять, їх можна записати через оператор "набла".

Для скалярного поля $u=u(x,y,z)$ маємо:

$$div\,grad\,u=\nabla\cdot\nabla u\,;\quad rot\,grad\,u=\nabla\times\nabla u=0\,.$$

Для векторного поля $\vec{F}$ маємо:

$$grad\,div\,\vec{F}=\nabla\cdot\left(\nabla\cdot\vec{F}\right);\quad div\,rot\,\vec{F}=\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)=0\,;\quad rot\,rot\,\vec{F}=\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right).$$

Розглянемо ці операції докладніше.

Обчислимо $div\,grad\,u=\nabla\cdot\nabla u=$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u==\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{i}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{j}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{k}\right)u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,.$$

Оператор $\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$ позначається через Δ ("дельта") і називається ***оператором Лапласа*** (***лапласіаном***).

Отже, $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ або $div\,grad\,u=\Delta u$.

Як відомо, векторний добуток $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$, тому

$$rot\,grad\,u=\nabla\times\nabla u=0\,.$$

Це означає, що *поле градієнта є безвихровим*. Зокрема, в електротехніці для поля потенціалу $rot\,grad\,u=0$.

Якщо в мішаному добутку векторів є два однакових вектори, то він дорівнює нулю. Тому $div\,rot\,\vec{F}=\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)=0$.

Це означає, що *поле вихору – соленоїдальне*.

Обчислимо $rot\, rot\, \vec{F} = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{F}\right) =$

$$= \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \vec{F}\right) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{F} = grad\, div\, \vec{F} - \Delta\vec{F},$$

де $\Delta\vec{F}$ - результат застосування оператора Лапласа до вектора $\vec{F}$, а до подвійного векторного добутку застосовано перетворення

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) & \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) \end{vmatrix} = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}.$$

Приклад. Для скалярного поля $u = 3x^2 - 6yz^2 + 2xz$ знайти його градієнт $\vec{a} = grad\, u$ і лапласіан Δu. Перевірити, що векторне поле градієнтів $\vec{a} = grad\, u$ є потенціальним ($rot\, \vec{a} = \vec{0}$).

Розв'язання.

$$\vec{a} = grad\, u = \nabla u = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 - 6yz^2 + 2xz\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 - 6yz^2 + 2xz\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2 - 6yz^2 + 2xz\right)\vec{k} =$$

$$= (6x + 2z)\vec{i} - 6z^2\, \vec{j} + (-12yz + 2x)\vec{k}; \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla\, \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(6x + 2z) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(-6z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-12yz + 2x) = 6 + 0 - 12y = 6 - 12y;$$

$$rot\, \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 6x + 2z & -6z^2 & -12yz + 2x \end{vmatrix} = (-12z + 12z)\,\vec{i} - -(2-2)\,\vec{j} + (0-0)\vec{k} = \vec{0}.$$

4.4. Поверхневий інтеграл по площі (поверхневий інтеграл першого роду)

4.4.1. Поняття поверхневого інтеграла по площі

Поверхня σ називається ***гладкою***, якщо в кожній її точці існує дотична площина, яка змінює своє положення неперервно при переході від точки до точки. Поверхня σ називається ***кусково-гладкою***, якщо вона складається із скінченного числа гладких поверхонь зі спільною кусково-неперервною межею.

Поверхня σ називається ***двосторонньою***, якщо обхід по довільному замкненому контуру, що лежить на поверхні σ і не має спільних точок з її межею, не змінює напрямку нормалі до поверхні. Якщо ж дана умова не виконується, тобто існує замкнений контур, при обході вздовж якого напрямок нормалі змінюється на протилежний, то поверхня називається ***односторонньою***.

Двосторонню поверхню називають ***орієнтовною***, а вибір певної сторони поверхні, якій відповідає певний напрямок нормалі, називається ***орієнтацією*** поверхні.

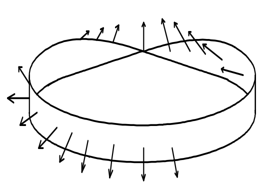
Рис. 19

Наприклад, круговий конус, еліптичний циліндр, будь-яка замкнена поверхня без самоперетину (сфера, еліпсоїд, ...)– двосторонні поверхні, а лист Мебіуса (рис. 19) – одностороння поверхня.

Для двосторонньої поверхні σ сторона σ^+, якій відповідає додатний напрямок нормалі, називається ***додатною*** (***зовніш-***

ньою), а інша сторона σ^- – ***від'ємною*** (***внутрішньою***). Відповідно для замкненої поверхні за додатну (зовнішню) сторону приймається та, для якої вектор нормалі напрямлений назовні.

<u>Зауваження 1</u>. Надалі розглядатимемо лише кусково-гладкі двосторонні поверхні.

Нехай σ – деяка поверхня, D - її проекція паралельно осі Oz на координатну площину Oxy. Поверхня σ називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямку осі*** Oz, якщо виконуються наступні умови: 1) довільна пробна пряма, що паралельна осі Oz і проходить через область D, перетинає поверхню σ лише в одній точці, тобто поверхня σ однозначно проектується на площину Oxy; 2) рівняння поверхні σ задано в явному вигляді, розв'язаному відносно z, причому тільки однією формулою $z = z(x, y)$.

Аналогічно розглядаються поверхні, що ***правильні в напрямку осей*** Ox ***і*** Oy.

Якщо поверхня σ правильна у всіх трьох напрямках Ox, Oy і Oz, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

Наприклад, параболоїд $z = x^2 + y^2$ правильний в напрямку тільки осі Oz; циліндр $z = \sqrt{x}$ правильний в напрямку тільки осей Ox і Oz; площина $2x + 3y - z - 6 = 0$ просто правильна; сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ неправильна в кожному напрямку Ox, Oy і Oz.

<u>Зауваження 2</u>. Якщо поверхня σ неправильна, то її розбивають на правильні частини площинами, що паралельні координатним площинам. Наприклад, сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ площиною $z = 0$ розбивається на дві правильні в напрямку осі Oz півсфери $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ і $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Нехай у просторі задано деяку область V і в цій області – поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Нехай на поверхні σ визначено деяку неперервну скалярну функцію $u = u(x, y, z)$. Інакше кажучи, розглянемо скалярне поле $u = u(x, y, z)$ на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Усередині кожної частини $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \in \Delta\sigma_i$, обчислимо значення заданої функції в цій точці $u(\overline{M}_i) = u(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ і помножимо це значення на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} u(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} u(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta\sigma_i .$$

Одержаний вираз називається ***інтегральною сумою*** для функції $u = u(x, y, z)$ по поверхні σ.

Скінчена границя інтегральної суми, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок $\overline{M}_i$, за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається ***поверхневим інтегралом по площі*** (***поверхневим інтегралом першого роду***) *від функції $u = u(x, y, z)$ по поверхні* σ:

$$\iint_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} u\left(\overline{M}_i\right)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} u\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i\right)\Delta\sigma_i\,,$$

де $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1,\, n}$; d_i – діаметр частинної поверхні $\Delta\sigma_i$.

Якщо $u = u(x,y,z) \geq 0$ і функцію $u = u(x,y,z)$ розглядати як поверхневу густину маси, розподіленої по поверхні σ, то інтеграл виражає масу всієї поверхні:

$$m = \iint_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma$$

(***фізичний зміст*** поверхневого інтеграла по площі).

Якщо $u = u(x,y,z)$ є густиною розподілу елементарних зарядів по поверхні, то інтеграл виражає сумарний заряд поверхні.

Коли $u = u(x,y,z) = 1$, то маємо площу поверхні σ

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma\,.$$

4.4.2. Обчислення поверхневого інтеграла по площі

Розглянемо інтеграл $\iint_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma$. Припустимо, що поверхня σ правильна в напрямку осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x,y)$, де функція $z(x,y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D - проекції σ на площину Oxy (рис. 20). Покажемо, що в такому випадку обчислення інтеграла по поверхні σ зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D.

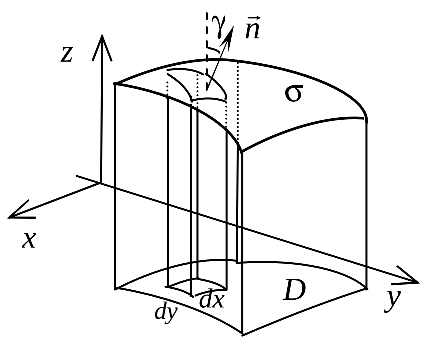

Рис. 20

Розглянемо елементарний майданчик $d\sigma$ на поверхні σ, який проектується на елемент $dS = dx\,dy$ області D.

Проведемо нормаль $\vec{n}$ так, щоб вона утворила гострий кут γ з віссю Oz. Будемо вважати, що майданчик $d\sigma$ настільки малий, що в його межах нормаль не змінюється. Тоді $d\sigma = dxdy/\cos\gamma$.

З іншого боку, нормаль $\vec{n}$ до поверхні $z = z(x,y)$ має проекції z'_x, z'_y, 1.

Тому $\cos\gamma = 1\Big/\sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}$ і тоді

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\,dxdy\,.$$

Значить, інтеграл

$$\iint_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D} u(x;y;z(x;y))\sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\,dxdy\,.$$

Зауваження 1. Поклавши $u = u(x,y,z) = 1$, для площі поверхні σ маємо формулу

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{D} \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\,dxdy\,.$$

Зауваження 2. Може статися, що поверхня σ неправильна в напрямку осі

Oz, але правильна в напрямку осі Oy чи Ox, тобто може бути подана явно у вигляді $y = y(x,z)$ чи $x = x(y,z)$. Тоді хід міркувань залишається тим же з тією лише різницею, що поверхню σ будемо проектувати на площину Oxz чи Oyz. У загальному випадку поверхню σ треба розбити на правильні у вибраному напрямку частини.

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл по площі $\iint\limits_{\sigma}(4x-3y+3z)\,d\sigma$, де σ_p – частина площини p: $2x+3y+6z-12=0$, що відсікається координатними площинами $x=0$, $y=0$ і $z=0$.

Розв'язання. Поверхню σ_p будемо розглядати як правильну в напрямку осі Oz, а її проекцію D_{xy} – як правильну в напрямку осі Oy плоску область (рис. 21). Тоді

$$z=\frac{1}{6}(12-2x-3y),\ z'_x=-\frac{1}{3},\ z'_y=-\frac{1}{2};\ D_{xy}: 0\le x\le 6;\ 0\le y\le 4-2x/3.$$

За формулою

$$\iint\limits_{\sigma}u(x,y,z)\,d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}u(x;y;z(x;y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$$

маємо

$$\iint\limits_{\sigma_p}(4x-3y+3z)\,d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\left(4x-3y+3\cdot\frac{1}{6}(12-2x-3y)\right)\times\sqrt{1+(-1/3)^2+(-1/2)^2}\;dxdy=\left(\sqrt{14}/6\right)\times$$

$$\times\iint\limits_{D}(3x-9y/2+6)\,dxdy=\left(\sqrt{14}/6\right)\int\limits_0^6dx\int\limits_0^{4-2x/3}(3x-9y/2+6)\,dy=\left(\sqrt{14}/6\right)\int\limits_0^6\left(3xy-9y^2/4+6y\right)\Big|_0^{4-2x/3}dx=$$

$$=\left(\sqrt{14}/6\right)\int\limits_0^6\left(3x(4-2x/3)-9(4-2x/3)^2/4+6(4-2x/3)\right)dx=\left(\sqrt{14}/6\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^6\left(12x-2x^2-144+48x-4x^2+24-4x\right)dx=\left(\sqrt{14}/6\right)\int\limits_0^6\left(-6x^2+56x-120\right)dx=$$

$$=\left(\sqrt{14}/6\right)\cdot\left(-2x^3+28x^2-120x\right)\Big|_0^6=\left(\sqrt{14}/6\right)\cdot(-432+1008-720)=-24\sqrt{14}.$$

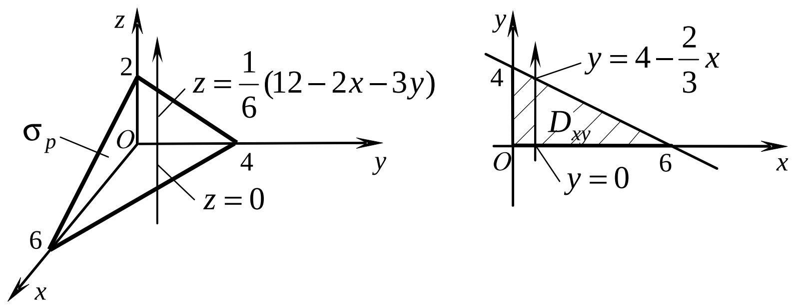

Рис. 21

Приклад 2. Обчислити площу частини σ поверхні параболоїда обертання $2z=x^2+y^2$, яка міститься всередині циліндра $x^2+y^2=R^2$.

Розв'язання. $z=x^2/2+y^2/2$, звідки $z'_x=x$, $z'_y=y$. Тоді шукана площа поверхні $S=\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$, де область D - проекція шуканої частини σ поверхні параболоїда на площину Oxy. Область D - круг радіуса R з центром у початку координат.

Якщо перейти до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$; $x^2+y^2=\rho^2$; $dxdy=\rho d\rho d\varphi$, то

$$S=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1+\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^R\right]d\varphi=\frac{2\pi}{3}\cdot\left[\left(1+R^2\right)^{3/2}-1\right].$$

<u>Приклад 3.</u> Знайти масу m частини σ поверхні кругового циліндра $x^2+y^2=16$, яка відтинається площинами $z=0$, $z=2$, якщо поверхнева густина $\mu(x,y,z)=z\left(2\sqrt{16-x^2}+y\right)$.

<u>Розв'язання</u>. Поверхня σ координатною площиною $y=0$ розбивається на дві правильні в напрямку осі Oy частини: ліву σ_1: $y=-\sqrt{16-x^2}$ і праву σ_2: $y=\sqrt{16-x^2}$ зі спільною проекцією D_{xz} на площину Oxz (рис. 22), де D_{xz} – прямокутник: $-4\le x\le 4$, $0\le z\le 2$.

Для лівої частини поверхні σ_1:

$$\sigma_1:\ y=-\sqrt{16-x^2}\ ;\quad y'_x=\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\ ;\quad y'_z=0\ ;\quad d\sigma=\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\ dxdz=$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{16-x^2}}\ dxdz=\frac{4}{\sqrt{16-z^2}}\,dxdz\ ;\quad \mu(x,y(x,z),z)=z\left(2\sqrt{16-x^2}-\sqrt{16-x^2}\right)=z\sqrt{16-x^2}\ ;$$

$$m_1=\iint_\sigma \mu(x,y,z)\,d\sigma=\iint_{D_{xz}} z\sqrt{16-z^2}\cdot\frac{4}{\sqrt{16-z^2}}\,dxdz=$$

$$=4\int_{-4}^{4}dx\int_0^2 z\,dz=4\int_{-4}^{4}\left(z^2/2\right)\Big|_0^2 dx=8\int_{-4}^{4}dx=8x\Big|_{-4}^{4}=64\,.$$

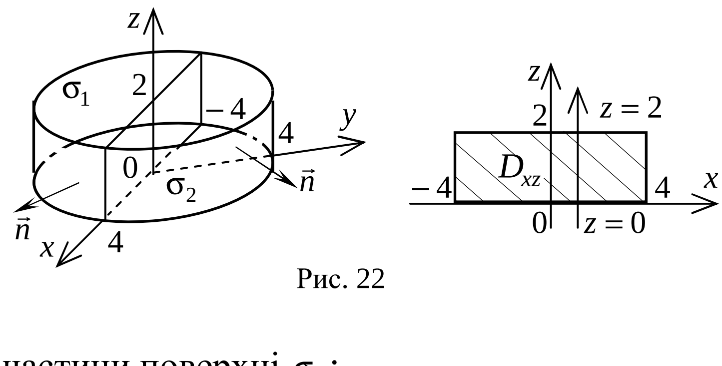

Рис. 22

Для правої частини поверхні σ_2:

$$\sigma_2:\ y=\sqrt{16-x^2}\ ;\quad y'_x=-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\ ;\quad y'_z=0\ ;\quad d\sigma=\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\ dxdz=\frac{4}{\sqrt{16-z^2}}\,dxdz\ ;$$

$$\mu(x,y(x,z),z)=z\left(2\sqrt{16-x^2}+\sqrt{16-x^2}\right)=3z\sqrt{16-x^2}\ ;\quad m_2=\iint_\sigma \mu(x,y,z)\,d\sigma=$$

$$=\iint_{D_{xz}} 3z\sqrt{16-z^2}\cdot\frac{4}{\sqrt{16-z^2}}\,dxdz=12\int_{-4}^{4}dx\int_0^2 z\,dz=12\int_{-4}^{4}\left(z^2/2\right)\Big|_0^2 dx=24\int_{-4}^{4}dx=24\,x\Big|_{-4}^{4}=192\,.$$

Отже, $m = m_1 + m_2 = 64 + 192 = 256$.

4.5. Поверхневий інтеграл по координатах (поверхневий інтеграл другого роду)

4.5.1. Поняття поверхневого інтеграла по координатах. Потік векторного поля

Нехай, як і раніше, у просторі задано деяку область V і в цій області – поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Нехай вибрана сторона $\sigma^{\pm}$ цієї поверхні характеризується одиничним вектором нормалі $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$, де $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$.

Нехай на поверхні σ визначено деяку неперервну векторну функцію $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$. Інакше кажучи, розглянемо векторне поле $\vec{F}$ на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Усередині кожної частини $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i) \in \Delta\sigma_i$, обчислимо в цій точці значення заданої функції $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і нормалі $\vec{n}(\overline{M}_i)$, потім знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і $\vec{n}(\overline{M}_i)$, помножимо цей добуток на площу елементарного майданчика $\Delta\sigma_i$ та складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\overline{M}_i) \cdot \vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i .$$

Одержаний вираз називається ***інтегральною сумою*** для вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x,y,z)$ по вибраній стороні $\sigma^{\pm}$ поверхні σ.

Скінчена границя інтегральної суми, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ *та від вибору точок* $\overline{M}_i$, *за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається* ***поверхневим інтегралом по координатах*** (***поверхневим інтегралом другого роду***) *від вектор-функції* $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x,y,z)$ *по вибраній стороні* $\sigma^{\pm}$ *поверхні* σ:

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\overline{M}_i) \cdot \vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i ,$$

де $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1, n}$; d_i – діаметр частинної поверхні $\Delta\sigma_i$.

Розглянемо докладніше вираз i-го доданку. За означенням скалярного добутку

$$\vec{F}(\overline{M}_i) \cdot \vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i = \left|\vec{F}(\overline{M}_i)\right| \cdot \left|\vec{n}(\overline{M}_i)\right| \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\sigma_i = \left|\vec{F}(\overline{M}_i)\right| \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\sigma_i , \quad \varphi = \widehat{\vec{F}(\overline{M}_i), \vec{n}(\overline{M}_i)}.$$

Останній вираз можна тлумачити таким чином: цей добуток визначає об'єм циліндра з основою $\Delta\sigma_i$ і висотою $\left|\vec{F}(\overline{M}_i)\right| \cdot \cos\varphi$ (рис. 23). Коли вважати, що векторне поле $\vec{F}$ є швидкість рідини, яка протікає через поверхню σ, то цей добуток дорівнює кількості рідини, яка протікає через майданчик $\Delta\sigma_i$ за одиницю часу в напрямку вектора $\vec{F}(\overline{M}_i)$. Інтеграл $\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ визначає загальну кількість рідини, що протікає за одиницю часу через вибрану сторону $\sigma^{\pm}$ поверхні σ.

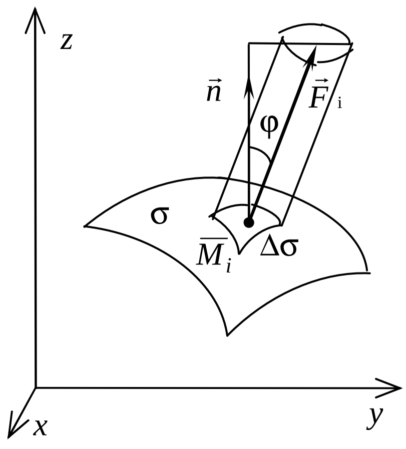

Рис. 23

Тому поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ також називають ***потоком векторного поля*** $\vec{F}$ через вибрану сторону $\sigma^{\pm}$ поверхні σ: $\Pi^{\pm} = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ (***фізичний зміст*** поверхневого інтеграла по координатах). Якщо поверхня σ замкнена, то інтеграл по ній записується так $\oiint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$.

Якщо виразити скалярний добуток в координатній формі, то одержимо співвідношення

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma,$$

що відображає *зв'язок між поверхневим інтегралами першого та другого роду*.

Векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можна розглядати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно, поверхневий інтеграл можна розглядати як суму трьох інтегралів

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\vec{i}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma^{\pm}} Q\vec{j}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma^{\pm}} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma.$$

Розглянемо останній з інтегралів:

$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, $\vec{k}\cdot\vec{n} = |\vec{k}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\gamma$ (рис. 24). Далі $\cos\gamma\,d\sigma$ є проекція майданчика $d\sigma$ на площину Oxy $\cos\gamma\,d\sigma = dxdy$, тому можна записати $\iint\limits_{\sigma^{\pm}} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} R\,dxdy$.

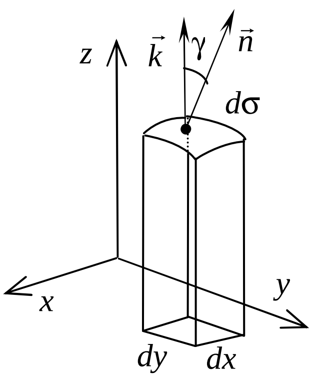

Рис. 24

Аналогічно

$$\cos\alpha\,d\sigma = dydz, \quad \cos\beta\,d\sigma = dxdz.$$

Тоді $\iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\vec{i}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz$; $\iint\limits_{\sigma^{\pm}} Q\vec{j}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} Q\,dxdz$.

Отримані три інтеграли називаються ***поверхневими інтегралами по відповідній парі координат*** x, y або y, z, або x, z. ***Повний поверхневий інтеграл по координатах*** записується так

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy.$$

4.5.2. Обчислення поверхневого інтеграла по координатах

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy$$

зводиться до обчислення подвійних інтегралів по плоских областях.

Можна спочатку перейти до поверхневого інтеграла першого роду

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma,$$

а потім спроектувати поверхню σ на <u>одну</u> з координатних площин і перейти до подвійного інтеграла.

Але, як правило, зручніше спроектувати поверхню σ на всі <u>три</u> координатні площини і безпосередньо перейти до відповідних подвійних інтегралів. Для цього треба розбити повний інтеграл на складові частини і кожну з них розглянути окремо.

<u>Метод проектування на одну із координатних площин</u>. Нехай поверхня σ правильна в напрямку осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 25). Тоді

$$d\sigma = dxdy/|\cos\gamma| = \pm dxdy/\cos\gamma; \quad \iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \left[(\vec{F},\vec{n})/|\cos\gamma|\right]_{z=z(x,y)} dxdy$$

або в координатній формі

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + + R\cos\gamma)d\sigma = \pm \iint\limits_{D_{xy}} (-z'_x(x,y)(P(x,y,z(x,y)) -$$

$$z'_y(x,y)Q(x,y,z(x,y)) + R(x,y,z(x,y)))dxdy.$$

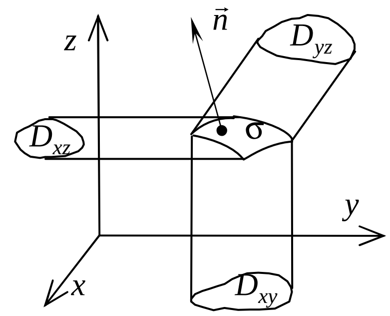

Рис. 25

Таким чином, обчислення поверхневого інтеграла зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma \ge 0$ (кут γ між нормаллю $\vec{n}$ і вибраною віссю Oz – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos\gamma \le 0$ (кут γ– тупий).

<u>Зауваження 1</u>. Аналогічно розглядаються випадки поверхонь, що правильні в напрямку осей Ox чи Oy.

<u>Приклад 1</u>. Обчислити поверхневий інтеграл по координатах

$$I = \iint\limits_{\sigma^-} (x/z)dydz + (2y/x)dxdz + (1 - 2z/y)dxdy$$

методом проектування на одну координатну площину. Тут σ^-– внутрішня сторона частини поверхні гіперболічного параболоїда $z = xy$, що відсікається площинами $z = 0$ і $x + y - 2 = 0$, відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ утворює з віссю Oz тупий кут γ.

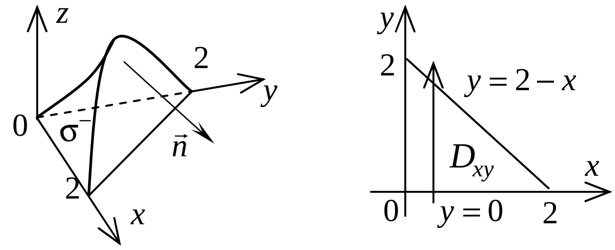

Рис. 26

<u>Розв'язання</u>. Задана поверхня зображена на рис. 26. Поверхня σ– правильна в напрямку осі Oz і задається явно рівнянням $z = xy$. Прямокутний трикутник D_{xy} - її проекція на площину Oxy. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак мінус, оскільки кут γ– тупий. Тоді

$$\sigma^- : z = xy; \; z'_x = y; \; z'_y = x; \; D_{xy}: \; 0 \le x \le 2, \; 0 \le y \le 2 - x;$$

$$I=\iint\limits_{\sigma^-}(x/z)\,dydz+(2y/x)\,dxdz+(1-2z/y)\,dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}\left(-y\frac{x}{xy}-x\frac{2y}{x}+1-\frac{2xy}{y}\right)dxdy=$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}}(x+y)\,dxdy=2\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}(x+y)\,dy=2\int\limits_0^2\left(2-x^2/2\right)dx=\left(4x-x^3/3\right)\Big|_0^2=5\frac{1}{3}.$$

Метод проектування на всі три координатні площини. Нехай поверхня σ правильна в усіх трьох напрямках Ox, Oy, Oz. Її, зокрема, можна задати явно рівнянням $z=z(x,y)$, де функцію $z(x,y)$ будемо вважати неперервною зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 25). Тоді $d\sigma=\pm dxdy/\cos\gamma$ і для поверхневого інтеграла $I_z=\iint\limits_{\sigma^\pm}R\,dxdy$ маємо

$$d\sigma=\pm dxdy/\cos\gamma;\ I_z=\iint\limits_{\sigma^\pm}R\,dxdy=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\,dxdy,$$

тобто обчислення поверхневого інтеграла $I_z=\iint\limits_{\sigma^\pm}R\,dxdy$ по парі координат x,y зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma\ge 0$ (кут γ – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos\gamma\le 0$ (кут γ– тупий).

Аналогічно обчислюються поверхневі інтеграли $I_x=\iint\limits_{\sigma^\pm}P\,dydz$ і $I_y=\iint\limits_{\sigma^\pm}Q\,dxdz$ по відповідній парі координат y,z і x,z:

$$I_x=\iint\limits_{\sigma^\pm}P\,dydz=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\,dydz;\ \ I_y=\iint\limits_{\sigma^\pm}Q\,dxdz=\pm\iint\limits_{D_{xz}}Q(x,y(x,z),z)\,dxdz,$$

де D_{yz} і D_{xz}– проекції поверхні σ на відповідні координатні площини. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо кут між нормаллю $\vec{n}$ і вибраною координатною віссю – гострий, чи знак мінус, якщо цей кут – тупий.

Повний поверхневий інтеграл по координатах знаходиться як сума отриманих подвійних інтегралів

$$\iint\limits_{\sigma^\pm}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma^\pm}P\,dydz+Q\,dxdz+R\,dxdy=I_x+I_y+I_z.$$

Зауваження 2. У загальному випадку поверхню σ доводиться розбивати на правильні у вибраному напрямку частини.

Приклад 2. Методом проектування на всі три координатні площини обчислити потік векторного поля $\vec{F}=x\vec{i}+xy^2\vec{j}+\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ поверхні σ: $x^2+y^2+z^2=1$ ($x\ge 0$, $y\le 0$, $z\ge 0$), відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ якої утворює з віссю Oz гострий кут γ.

Розв’язання. Поверхня σ є восьмою частиною сфери одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 27). Вона правильна в усіх трьох напрямках Ox, Oy і Oz. При цьому нормаль $\vec{n}$ до вибраної сторони σ^+ з осями Ox і Oz утворює гострі кути α і γ, а з віссю Oy – тупий кут β. Позначимо проекції σ на координатні площини відповідно D_{yz}, D_{xz} і D_{xy}, які будуть чвертями кругів радіуса 1. Поверхню σ можна задати явно відповідно одним з рівнянь $x=\sqrt{1-y^2-z^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$ чи $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Розіб'ємо повний поверхневий інтеграл на три на складові частини по відповідній парі координат (y,z), і (x,z) і (x,y)

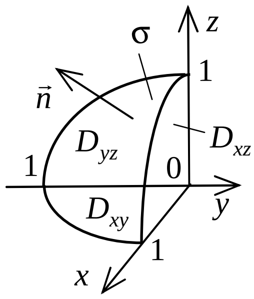

Рис. 27

$$\Pi=\iint_{\sigma^+}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint_{\sigma^+}x\,dydz+xy^2dxdz+dxdy=I_x+I_y+I_z$$

і обчислимо окремо кожний з інтегралів:

$$I_x=\iint_{\sigma^+}x\,dydz=+\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2-z^2}\,dydz=$$

$$=\left|\begin{array}{l} y=\rho\cos\varphi;\ z=\rho\sin\varphi; \\ y^2+z^2=\rho^2;\ dydz=\rho\,d\rho\,d\varphi \end{array}\right|=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{3}\cdot\left(1-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^1\right)=\frac{\pi}{6};$$

$$I_y=\iint_{\sigma^+}xy^2dxdz=-\iint_{D_{xz}}x\left(-\sqrt{1-x^2-z^2}\right)^2dxdz=-\iint_{D_{xz}}x\left(1-x^2-z^2\right)dxdz=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi;\ z=\rho\sin\varphi; \\ x^2+z^2=\rho^2;\ dxdz=\rho\,d\rho\,d\varphi \end{array}\right|=-\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1\rho\left(1-\rho^2\right)\rho\,d\rho=-\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1\left(\rho^2-\rho^4\right)d\rho=$$

$$=-\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{3}\rho^3-\frac{1}{5}\rho^5\right)\Bigg|_0^1\cos\varphi\,d\varphi=-\frac{2}{15}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi=-\frac{2}{15}\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}=-\frac{2}{15};$$

$$I_z=\iint_{\sigma^+}dxdy=+\iint_{D_{xy}}dxdy=\frac{\pi}{4}$$ (це просто площа чверті круга).

Отже, $\Pi=I_x+I_y+I_z=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{15}+\frac{\pi}{4}=\frac{25\pi-8}{60}$.

Приклад 3. Методом проектування на всі три координатні площини обчислити потік векторного поля $\vec{F}=xz\sqrt{16-y^2}\,\vec{i}+xy^2\,\vec{j}+z\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ поверхні кругового циліндра $x^2+y^2=16$, яка відтинається площинами $z=0$, $z=2$.

Розв'язання. Розіб'ємо повний поверхневий інтеграл на три на складові частини по відповідній парі координат (y,z), (x,z) і (x,y)

$$\Pi=\iint_{\sigma^+}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint_{\sigma^+}xz\sqrt{16-y^2}\,dydz+xy^2dxdz+z\,dxdy=I_x+I_y+I_z$$

і обчислимо окремо кожний з інтегралів.

Поверхня σ (рис. 22) неправильна в усіх трьох напрямках Ox, Oy і Oz. Її проекцією D_{xy} на площину Oxy є лінія (коло $x^2+y^2=16$) – фігура нульової площі. Тому останній з інтегралів-доданків дорівнює нулю $I_z=\iint_{\sigma^+}z\,dxdy=0$.

Розглянемо другий інтеграл $I_y=\iint_{\sigma^+}xy^2dxdz$. Поверхня σ координатною площиною $y=0$ розбивається на дві правильні в напрямку осі Oy частини: ліву $\sigma_{y1}: y=-\sqrt{16-x^2}$ і праву $\sigma_{y2}: y=\sqrt{16-x^2}$ зі спільною проекцією D_{xz} на площину Oxz (рис. 22), де D_{xz} – прямокутник: $-4\le x\le 4$, $0\le z\le 2$. При цьому нормаль $\vec{n}$

до зовнішньої сторони σ_{y1}^{+} з віссю Oy утворює тупий кут β, а нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ_{y2}^{+} з віссю Oy утворює гострий кут β. Тоді

$$I_y = \iint_{\sigma^+} xy^2 dxdz = \iint_{\sigma_{y1}^+} xy^2 dxdz + \iint_{\sigma_{y2}^+} xy^2 dxdz = -\iint_{D_{xz}} x\left(-\sqrt{16-x^2}\right)^2 dxdz + \iint_{D_{xz}} x\left(\sqrt{16-x^2}\right)^2 dxdz = 0.$$

Розглянемо перший інтеграл $I_x = \iint_{\sigma^+} xyz\,dydz$. Поверхня σ координатною площиною $x=0$ розбивається на дві правильні в напрямку осі Ox частини: задню σ_{x1}: $x = -\sqrt{16-y^2}$ і передню σ_{x2}: $x = \sqrt{16-y^2}$ зі спільною проекцією D_{yz} на площину Oyz (рис. 28), де D_{yz} – прямокутник: $-4 \le y \le 4$, $0 \le z \le 2$. При цьому нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ_{x1}^{+} з віссю Ox утворює тупий кут α, а нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ_{x2}^{+} з віссю Ox утворює гострий кут α. Тоді

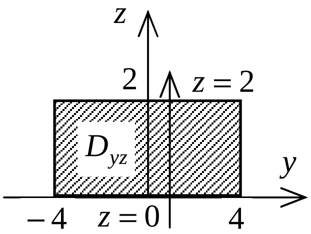

Рис. 28

$$I_x = \iint_{\sigma^+} xz\sqrt{16-y^2}\,dydz = \iint_{\sigma_{x1}^+} xz\sqrt{16-y^2}\,dydz +$$

$$+\iint_{\sigma_{x2}^+} xz\sqrt{16-y^2}\,dydz = -\iint_{D_{yz}} \left(-\sqrt{16-y^2}\right) z\sqrt{16-y^2}\,dydz + \iint_{D_{yz}} \sqrt{16-y^2}\, z\sqrt{16-y^2}\,dydz =$$

$$= 2\iint_{D_{yz}} z\left(16-y^2\right)dydz = 2\int_{-4}^{4}\left(16-y^2\right)dy\int_0^2 z\,dz = 2\int_{-4}^{4}\left(16-y^2\right)\left(z^2/2\right)\Big|_0^2 dy =$$

$$4\int_{-4}^{4}\left(16-y^2\right)dy = 4\left(16y - y^3/3\right)\Big|_{-4}^{4} = 341\frac{1}{3}. \quad \text{Отже,} \quad \Pi = I_x + I_y + I_z = 341\frac{1}{3}.$$

<u>Приклад 4</u>. Дано просторове електростатичне поле напруженості $\vec{E} = k\,q\vec{r}\big/\left|\vec{r}\right|^3$ позитивного точкового електричного заряду q ($q = const$), розміщеного в початку координат, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $k = const$. Обчислити потік цього векторного поля через зовнішню сторону σ^+ поверхні сфери σ радіуса R з центром у початку координат.

<u>Розв'язання</u>. На поверхні сфери $\left|\vec{r}\right| = R = const$, а одиничний вектор зовнішньої нормалі $\vec{n} = \vec{r}\big/\left|\vec{r}\right| = \vec{r}/R$. Тоді

$$\vec{r}\cdot\vec{n} = \left|\vec{r}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\cdot\cos 0 = R; \quad \Pi = \iint_{\sigma^+} k\frac{q}{\left|\vec{r}\right|^3}\cdot\vec{r}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \frac{kq}{R^2}\iint_{\sigma^+} d\sigma = \frac{kq}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi kq.$$

4.5.3. Формула Стокса

Для поверхневих інтегралів має місце формула, аналогічна формулі Гріна. Існують різні шляхи виведення цієї формули, обґрунтовані до найменших подробиць, але ними ж і обтяжені. Зупинимось на дещо полегшеному варіанті, зате на такому, який наглядно ілюструє суть усіх різновидів – зв'язок поверхневого інтеграла з подвійним, а останнього – через формулу Гріна – з криволінійним.

Розглянемо у просторі деяку поверхню σ, обмежену замкненою лінією L

(рис. 29). Проекцією цієї поверхні на площину Oxy буде область D, обмежена замкненою лінією l. Нехай у просторі задано векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} .$$

Якщо покласти $z = 0$ і $R(x, y, z) \equiv 0$, то матимемо плоске векторне поле, яке в області D приймає значення

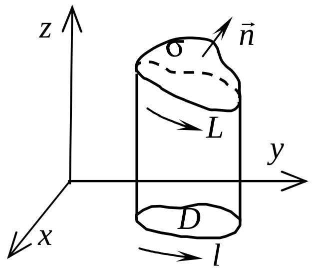

Рис. 29

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} .$$

Обчислимо ротор цього векторного поля

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y\right)\vec{k} .$$

Тоді потік цього ротора через область D буде

$$\iint\limits_D rot\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint\limits_D \left(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y\right)\vec{k} \cdot \vec{n}\, d\sigma .$$

Оскільки нормаль $\vec{n}$ до області D співпадає з $\vec{k}$, то $\vec{n} \cdot \vec{k} = 1$. Згадуючи формулу Гріна, отримуємо

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_l \vec{F}\, d\vec{l} .$$

Остаточно , маємо формулу Стокса $\oint\limits_l \vec{F}\, d\vec{l} = \iint\limits_D rot\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$, що для плоского поля є векторним записом формули Гріна.

У просторі для поверхні σ, обмеженої замкненою лінією L, ***формула Стокса*** залишається в тому ж вигляді

$$\oint\limits_L \vec{F}\, d\vec{l} = \iint\limits_{\sigma^+} rot\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma ,$$

при цьому вибирається додатний напрямок обходу контуру L: якщо дивитися з кінця вектора нормалі $\vec{n}$ до відповідної сторони σ^+ поверхні σ, то цей обхід здійснюється проти ходу годинникової стрілки.

Отже, справедлива <u>теорема Стокса</u>: *Циркуляція векторного поля $\vec{F}$ по замкненій лінії L, що обмежує поверхню σ, дорівнює потоку ротора цього векторного поля через цю поверхню.*

<u>Зауваження 1</u>. Розглянемо довільний одиничний вектор $\vec{n}$, що виходить з деякої точки M, і оточимо цю точку плоским майданчиком $\Delta\sigma$, перпендикулярним до вектора $\vec{n}$ і обмеженим замкненим контуром ΔL. За формулою Стокса одержимо $\oint\limits_{\Delta L} \vec{F}\, d\vec{l} = \iint\limits_{\Delta\sigma^+} rot\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$. До правої частини застосуємо теорему про середнє значення, тоді

$$\oint\limits_{\Delta L} \vec{F}\, d\vec{l} = rot\,\vec{F}(M_*) \cdot \vec{n}\,\Delta\sigma = np_{\vec{n}}\; rot\,\vec{F}(M_*) \cdot \Delta\sigma .$$

Розділивши рівність на $\Delta\sigma$ і стягуючи майданчик $\Delta\sigma$ до даної точки M, тобто переходячи до границі при $\Delta\sigma \to 0$, $M_* \to M$, $\Delta L \to 0$, отримаємо

$$np_{\vec{n}}\; rot\,\vec{F}(M) = \lim_{\Delta\sigma \to 0}\left(\oint_{\Delta L} \vec{F}\, d\vec{l} \,\big/ \Delta\sigma\right).$$

Таким чином можна визначити проекцію ротора на довільну вісь, тобто *ротор $rot\,\vec{F}$ не залежить від вибору системи координат* (*є інваріантною век-*

торною характеристикою поля).

Зауваження 2. Коли векторне поле безвихрове, тобто $rot\,\vec{F}=0$, то для довільного замкненого контуру L, який цілком лежить у цьому полі, за формулою Стокса маємо $\oint\limits_{L}\vec{F}\,d\vec{l}=\iint\limits_{\sigma^{\pm}} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=0$. Це означає, що безвихрове поле є потенціальним. Навпаки, якщо поле потенціальне, тобто для довільного замкненого контуру L $\oint\limits_{L}\vec{F}\,d\vec{l}=0$, то за формулою Стокса маємо $\iint\limits_{\sigma^{\pm}} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\oint\limits_{L}\vec{F}\,d\vec{l}=0$, звідки $rot\,\vec{F}=0$. Це означає, що потенціальне поле є безвихровим.

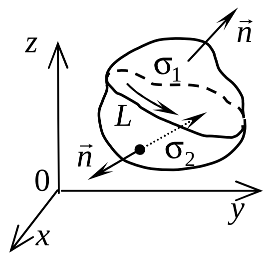

Рис. 30

Зауваження 3. Із формули Стокса випливає, що потік вихору векторного поля $\vec{F}$ не залежить від виду поверхні σ, що натягнута на замкнений контур L. Якщо через цей контур провести дві поверхні σ_1 та σ_2 (рис. 30), що обмежують деяке просторове тіло V, то $\iint\limits_{\sigma_1^{+}} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\oint\limits_{L}\vec{F}\,d\vec{l}=\iint\limits_{\sigma_2^{-}} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$.

Змінивши орієнтацію поверхні σ_2 на зовнішню σ_2^{+}, маємо

$$\iint\limits_{\sigma_2^{+}} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=-\iint\limits_{\sigma_2^{-}} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=-\iint\limits_{\sigma_1^{+}} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma .$$

Тоді для замкненої поверхні $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$, що обмежує просторове тіло V, одержуємо

$$\iint\limits_{\sigma^{+}} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1^{+}} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma_2^{+}} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=0 .$$

Отже, *потік вихору векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню дорівнює нулю*.

Приклад 1. Обчислити потік векторного поля $\vec{F}=x\vec{i}+xy\,\vec{j}+z\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^{+} поверхні σ: $x^2+y^2+z^2=1$ $(z\ge 0)$, відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ якої утворює з віссю Oz гострий кут γ.

Розв'язання. Поверхня σ є півсферою одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 31), обмеженою замкненою лінією L – колом $x^2+y^2=1$ в площині Oxy. За формулою Стокса

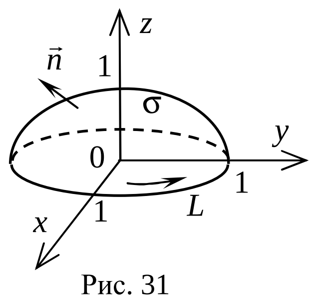

Рис. 31

$$\Pi=\iint\limits_{\sigma^{+}} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\oint\limits_{L}\vec{F}\,d\vec{l}=\int\limits_{L} x\,dx+xy\,dy+z\,dz= .$$

Далі врахуємо, що L лежить в площині $z=0$, і перейдемо до параметричних рівнянь

$$=\left|\begin{matrix} x=1\cos t;\ y=1\sin t;\ z=0;\ dx=-\sin t\,dt; \\ dy=\cos t\,dt;\ dz=0;\ 0\le t\le 2\pi \end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_{0}^{2\pi}\left(-\cos t\cdot\sin t+\cos t\cdot\sin t\cdot\cos t\right)dt=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin 2t\,dt+\int\limits_{0}^{2\pi}\cos^2 t\cdot\sin t\,dt=\frac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{3}\cos^3 t\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{4}(1-1)-\frac{1}{3}(1-1)=0 .$$

Приклад 2. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{F}=\left(x^2-4z\right)\vec{i}+\left(x+\sqrt{y}\right)\vec{j}+\left(y+\sin z\right)\vec{k}$ вздовж замкненого контуру L – кола, утвореного від перетину сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ площиною $x+y+z=0$, причому обхід кривої L здійснюється проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напряму осі Oz.

Розв'язання. Оскільки лінія L замкнена, можна застосувати формулу Стокса. Виберемо за поверхню σ, що натягнута на коло L, частину площини $x+y+z=0$, обмежену цим колом – круг радіуса R з центром у початку координат. Поверхня σ правильна в усіх трьох напрямках Ox, Oy і Oz. При цьому нормаль $\vec{n}$ до вибраної сторони σ^+ з осями Ox, Oy і Oz утворює гострі кути α, β і γ. Проекціями σ на координатні площини відповідно D_{yz}, D_{xz} і D_{xy} служать рівні круги радіуса R із центром у початку координат. Для обчислення поверхневого інтеграла будемо використовувати метод проектування на всі три координатні площини. Тоді

$$rot\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ x^2-4z & x+\sqrt{y} & y+\sin z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}(y+\sin z)-\frac{\partial}{\partial z}\left(x+\sqrt{y}\right)\right)\vec{i}\,-$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(y+\sin z)-\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2-4z\right)\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x+\sqrt{y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-4z\right)\right)\vec{k}=$$

$$=(1-0)\vec{i}-(0+4)\,\vec{j}+(1-0)\vec{k}=\vec{i}-4\,\vec{j}+\vec{k}\,;$$

$$\Gamma=\oint\limits_L \vec{F}\,d\vec{l}=\iint\limits_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma^+} dydz-4dxdz+dxdy=\iint\limits_{\sigma^+} dydz-4\iint\limits_{\sigma^+} dxdz+\iint\limits_{\sigma^+} dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}} dydz-4\iint\limits_{D_{xz}} dxdz+\iint\limits_{D_{xy}} dxdy=-2\iint\limits_{D_{xy}} dxdy=-2S_{D_{xy}}=-2\pi R^2\,.$$

Приклад 3. Дано просторове векторне поле $\vec{F}=(3z-4x)\vec{i}+6xy\,\vec{j}+9(4+z)\vec{k}$ і поверхня σ – частина площини $p:\ 4x+2y-3z-12=0$, що відсікається координатними площинами $x=0$, $y=0$ і $z=0$. Знайти циркуляцію векторного поля вздовж замкненого контуру L, що обмежує поверхню σ, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{N}=(A,B,C)$ цієї площини p. Обчислення провести двома способами:

а) безпосередньо за означенням циркуляції;

б) за допомогою формули Стокса.

Розв'язання. Поверхня σ – це $\Delta M_xM_yM_z$ (рис. 32) з вектором нормалі $\vec{N}=(4,2,-3)$. Замкнений контур L – це периметр $\Delta M_xM_yM_z$.

Рис. 32

а) Знайдемо циркуляцію безпосередньо за означенням

$$\Gamma = \oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = \oint_L (3z-4x)\,dx + 6xy\,dy + 9(4+z)\,dz = \int_{M_xM_z} + \int_{M_zM_y} + \int_{M_yM_x},$$

де кожний доданок обчислимо окремо.

Ділянка M_xM_z – це відрізок лінії (прямої) перетину площини p з координатною площиною $y=0$. Тоді

$$M_xM_z: \begin{cases} 4x+2y-3z-12=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4x/3-4 \\ y=0; \end{cases}$$

$$dx = dx;\ \ dy = 0;\ \ dz = (4/3)dx;\ \ x_1 = 3;\ x_2 = 0;$$

$$\int_{M_xM_z} (3z-4x)\,dx + 6xy\,dy + 9(4+z)\,dz = \int_3^0 [(3\cdot(4x/3-4)-4x) +$$

$$+6x\cdot 0\cdot 0 + 9\cdot(4+(4x/3-4))\cdot(4/3)]dx = 4\int_3^0 (4x-3)\,dx = 4\cdot\left(2x^2-3x\right)\Big|_3^0 = -36.$$

Ділянка M_zM_y – це відрізок лінії (прямої) перетину площини p з координатною площиною $x=0$. Тоді

$$M_zM_y: \begin{cases} 4x+2y-3z-12=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y/3-4 \\ x=0; \end{cases}$$

$$dx = 0;\ \ dy = dy;\ \ dz = (2/3)dy;\ \ y_1 = 0;\ y_2 = 6;$$

$$\int_{M_zM_y} (3z-4x)\,dx + 6xy\,dy + 9(4+z)\,dz = \int_0^6 [(3\cdot(2y/3-4)-4\cdot 0)\times$$

$$\times 0 + 6\cdot 0\cdot y + 9\cdot(4+(2y/3-4))\cdot(2/3)]dy = 4\int_0^6 y\,dx = 2y^2\Big|_0^6 = 72.$$

Ділянка M_yM_x – це відрізок лінії (прямої) перетину площини p з координатною площиною $z=0$. Тоді

$$M_yM_x: \begin{cases} 4x+2y-3z-12=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6-2x \\ z=0; \end{cases}$$

$$dx = dx;\ \ dy = -2\,dx;\ \ dz = 0;\ \ x_1 = 0;\ x_2 = 3;$$

$$\int_{M_yM_x} (3z-4x)\,dx + 6xy\,dy + 9(4+z)\,dz = \int_0^3 [(3\cdot 0-4x) + 6x(6-$$

$$-2x)\cdot(-2) + 9\cdot(4+0)\cdot 0]dy = 4\int_0^3 \left(6x^2-19x\right)dx = 2\cdot\left(4x^3-19x^2\right)\Big|_0^3 = -126.$$

Отже, $\Gamma = -36+72-126 = -90$.

б) Оскільки лінія L замкнена, можна застосувати формулу Стокса. Виберемо за поверхню σ, що натягнута на L, частину площини p – $\Delta M_xM_yM_z$. Поверхня σ правильна в усіх трьох напрямках Ox, Oy і Oz. Для обчислення поверхневого інтеграла використаємо метод проектування на одну координатну площину, за яку виберемо Oxy. При цьому нормаль до вибраної сторони σ^+ з віссю Oz утворює тупий кут γ. Проекцією D_{xy} поверхні σ на площину Oxy є ΔOM_xM_y (рис. 32). Тоді

$$rot\,\vec F=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 3z-4x & 6xy & 9(4+z)\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}9(4+z)-\frac{\partial}{\partial z}6xy\right)\vec i\,-$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}9(4+z)-\frac{\partial}{\partial z}(3z-4x)\right)\vec j+\ \left(\frac{\partial}{\partial x}6xy-\frac{\partial}{\partial y}(3z-4x)\right)\vec k=(0-0)=(0-0)\,\vec i-(0-3)\,\vec j\,+$$

$$+(6y-0)\,\vec k=0\,\vec i+3\,\vec j+6y\,\vec k\,;\quad \sigma:\ z=4x/3+2y/3-4;\ \ z'_x=4/3;\ \ z'_y=2/3;\ \cos\gamma<0\to\text{"}-\text{"};$$

$$\sigma\xrightarrow{Oz}D_{xy}:\ 0\le x\le 3;\ \ 0\le y\le 6-2x\,;$$

$$\Gamma=\oint\limits_L \vec F\,d\vec l=\iint\limits_{\sigma^+}rot\,\vec F\cdot\vec n\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma^+}0\,dydz+3\,dxdz+6y\,dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}\left(-\frac{4}{3}\cdot 0-\frac{2}{3}\cdot 3+6y\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(2-6y)\,dxdy=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{6-2x}(2-6y)\,dy=\int\limits_0^3\left(2y-3y^2\right)\Big|_0^{6-2x}dx=$$

$$=\int\limits_0^3\left(-12x^2+68x-96\right)dx=\left(-4x^3+34x^2-96x\right)\Big|_0^3=-90\,.$$

4.5.4. Формула Остроградського – Гаусса

Розглянемо у просторі тіло V, обмежене замкненою поверхнею σ (рис. 33). Проекцію тіла на площину Oxy позначимо через D. Лінія L на поверхні тіла, яка проектується в межу області D, поділяє поверхню σ на дві частини σ_1 та σ_2, які описуються явно відповідно рівняннями $z=f_1(x,y)$ та $z=f_2(x,y)$. Окрім того, виділимо зовнішню сторону σ^+ поверхні, якій відповідає одиничний вектор нормалі $\vec n$. Нехай тепер у просторі задано векторне поле

$$\vec F=\vec F(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec i+Q(x,y,z)\,\vec j+R(x,y,z)\,\vec k\,.$$

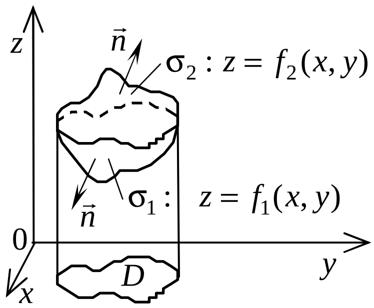

Рис. 33

Обчислимо потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_V\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dV=\iiint\limits_V\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dx\,dy\,dz=$$

$$=\iint\limits_D\left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}\frac{\partial\,(x,y,z)}{\partial z}\,dz\right)dx\,dy=\iint\limits_D\left(R(x,y,z)\Big|_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}\right)dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_D\left[\,R\big(x,y,\,f_2(x,y)\big)-R\big(x,y,\,f_1(x,y)\big)\right]dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_D R\big(x,y,\,f_2(x,y)\big)dx\,dy-\iint\limits_D R\big(x,y,\,f_1(x,y)\big)dx\,dy=\quad.$$

Далі перетворимо одержані подвійні інтеграли в поверхневі

$$=\iint\limits_{\sigma_2^+}R\big(x,y,z\big)dx\,dy+\iint\limits_{\sigma_1^+}R\big(x,y,z\big)dx\,dy=\oiint\limits_{\sigma^+}R(x,y,z)\,dx\,dy\,.$$

Таким чином $\displaystyle\iiint\limits_V\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dx\,dy\,dz=\oiint\limits_{\sigma^+}R(x,y,z)\,dx\,dy\,.$

Аналогічно можна обчислити

$$\iiint\limits_V\frac{\partial Q}{\partial y}dx\,dy\,dz=\oiint\limits_{\sigma^+}Q\,dx\,dz\,;\quad \iiint\limits_V\frac{\partial P}{\partial x}dx\,dy\,dz=\oiint\limits_{\sigma^+}P\,dy\,dz\,.$$

Склавши ці три рівності, маємо ***формулою Остроградського – Гаусса*** в координатній формі

$$\boxed{\oiint\limits_{\sigma^+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz}$$

або у векторній формі

$$\oiint\limits_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iiint\limits_V div\, \vec{F}\, dV .$$

Отже, справедлива <u>теорема Остроградського – Гаусса</u>:

Потік векторного поля $\vec{F}$ *через зовнішню сторону* σ^+ *замкненої поверхні* σ *дорівнює потрійному інтегралу за об'ємом* V, *обмеженим цією поверхнею, від дивергенції поля* $div\,\vec{F}$.

Ця теорема виражає зв’язок між поверхневим інтегралом і потрійним.

<u>Зауваження 1</u>. Розглянемо деяку точку M і розмістимо її всередині замкненої поверхні $\Delta\sigma$, яка обмежує об'єм ΔV. За формулою Остроградського – Гаусса $\oiint\limits_{\Delta\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iiint\limits_{\Delta V} div\, \vec{F}\, dV$. До правої частини застосуємо теорему про середнє значення, тоді

$$\oiint\limits_{\Delta\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = div\, \vec{F}(M_*)\Delta V .$$

Розділивши рівність на ΔV і стягуючи поверхню $\Delta\sigma$ до даної точки M, тобто переходячи до границі при $\Delta\sigma \to 0$, $M_* \to M$, $\Delta V \to 0$, отримаємо

$$div\, \vec{F}(M) = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\oiint_{\Delta\sigma^+} \vec{F}\, \vec{n}\, d\sigma \big/ \Delta V \right).$$

Таким чином *дивергенція* $div\,\vec{F}$ *не залежить від вибору системи координат* (*є інваріантною скалярною характеристикою поля*).

<u>Зауваження 2</u>. Нехай векторне поле $\vec{F}$ – соленоїдальне, тобто $div\,\vec{F} = 0$. Розглянемо частину векторної трубки об’ємом V, розміщену між перерізами σ_1 і σ_2 (рис. 34). Оскільки за умовою $div\,\vec{F} = 0$, то згідно формули Остроградського – Гаусса потік векторного поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю. Тоді для зовнішньої сторони замкненої поверхні, що обмежує виділений об’єм V, маємо

$$\iint\limits_{\sigma_0^+} \vec{F}\, \vec{n}\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_1^+} \vec{F}\, \vec{n}\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2^+} \vec{F}\, \vec{n}\, d\sigma = \iiint\limits_V div\, \vec{F}\, dV = 0 ,$$

де σ_0 – бічна поверхня трубки; $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі.

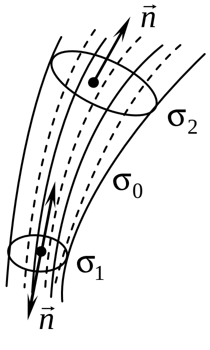

Рис. 34

Оскільки на бічній поверхні трубки нормаль $\vec{n}$ перпендикулярна до векторної лінії поля, то $\iint\limits_{\sigma_0^+} \vec{F}\, \vec{n}\, d\sigma = 0$.

Тоді виходить, що $\iint\limits_{\sigma_2^+} \vec{F}\, \vec{n}\, d\sigma = -\iint\limits_{\sigma_1^+} \vec{F}\, \vec{n}\, d\sigma$.

Якщо змінити напрямок нормалі на поверхні σ_1, тобто взяти внутрішню нормаль $\vec{n}$ (у напрямку векторних ліній), то одержимо $\iint\limits_{\sigma_2^+} \vec{F}\, \vec{n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1^-} \vec{F}\, \vec{n}\, d\sigma$.

Це означає, що *в соленоїдальному полі потік вектора в напрямку векторних ліній через кожний переріз векторної трубки один і той* *же*.

Якщо $\vec{F}$ – поле швидкостей текучої рідини, то в полі без джерел через кожний переріз векторної трубки протікає одна й та ж кількість рідини.

Відповідно до формули $div\,rot\,\vec{F}=0$ поле ротора довільного векторного поля $\vec{F}$ – трубчате. Справедливо й зворотне твердження – кожне трубчате поле є полем ротора деякого векторного поля, тобто якщо $div\,\vec{F}=0$, то існує таке векторне поле $\vec{\Phi}$, що $\vec{F}=rot\,\vec{\Phi}$. Вектор $\vec{\Phi}$ називають ***вектором-потенціалом*** даного поля.

Зауваження 3. Оскільки $rot\,grad\,u=0$, то векторний потенціал $\vec{\Phi}$ визначається з точністю до доданка $grad\,u$, де $u=u(x,y,z)$ – довільна двічі диференційовна функція.

Таким чином, справедлива теорема. *Для соленоїдального поля $\vec{F}$ наступні чотири властивості еквівалентні:*

1) потік поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю;

2) потік поля через поверхню σ, обмежену замкненим контуром L і відповідно з ним орієнтовану, залежить тільки від вибору контуру L і не залежить від конкретного вибору поверхні σ;

3) існує таке поле $\vec{\Phi}$, що $\vec{F}=rot\,\vec{\Phi}$;

4) розбіжність поля $\vec{F}$ дорівнює нулю, тобто $div\,\vec{F}=0$.

Приклад 1. Перевірити, що просторове векторне поле $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$, де $P=x-2yz$, $Q=2xz$ і $R=3xy^2-z$, є соленоїдальним. Знайти його плоскопаралельний вектор-потенціал $\vec{\Phi}=\Phi_x\vec{i}+\Phi_y\vec{j}+0\vec{k}$, де $\Phi_x=\Phi_x(x,y,z)$, $\Phi_y=\Phi_y(x,y,z)$, і записати загальний вигляд векторного потенціалу.

Розв'язання. Знайдемо дивергенцію даного поля $\vec{F}$

$$div\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(x-2yz)+\frac{\partial}{\partial y}(2xz)+\frac{\partial}{\partial z}(3xy^2-z)=1+0-1=0.$$

Оскільки $div\,\vec{F}=0$, то поле $\vec{F}$ – соленоїдальне. Тоді

$$\vec{F}=rot\,\vec{\Phi}=-\frac{\partial\Phi_y}{\partial z}\vec{i}+\frac{\partial\Phi_x}{\partial z}\vec{j}+\left(\frac{\partial\Phi_y}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Для відшукання векторного потенціалу $\vec{\Phi}$ маємо систему

$$-\frac{\partial\Phi_y}{\partial z}=P;\quad \frac{\partial\Phi_x}{\partial z}=Q;\quad \frac{\partial\Phi_y}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_x}{\partial y}=R.$$

Тоді

$$-\frac{\partial\Phi_y}{\partial z}=x-2yz;\quad \frac{\partial\Phi_x}{\partial z}=2xz;\quad \frac{\partial\Phi_y}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_x}{\partial y}=3xy^2-z.$$

З перших двох рівнянь знаходимо

$$\Phi_x=-\int 2xz\,dz+C_x(x,y)=-xz^2+C_x(x,y);$$

$$\Phi_y=-\int(x-2yz)\,dz+C_y(x,y)=-xz+yz^2+C_y(x,y),$$

де $C_x(x,y)$ і $C_y(x,y)$ – довільні функції. Виберемо одну з цих функцій. Наприклад, покладемо $C_y(x,y)=0$.

Далі знайдемо похідні $\dfrac{\partial \Phi_x}{\partial y} = \dfrac{\partial C_x}{\partial y}$; $\dfrac{\partial \Phi_y}{\partial x} = -z$ і підставимо в третє рівняння системи. Тоді

$$-z - \frac{\partial C_x}{\partial y} = 3xy^2 - z \qquad C_x = -3\int xy^2\,dy + C(x) = -xy^3 + C(x),$$

де $C(x)$ – довільна функція. Наприклад, покладемо $C(x) = 0$.

Таким чином, $\Phi_x = -xz^2 - xy^3$; $\Phi_y = -xz + yz^2$.

Отже, $\vec{\Phi} = \left(-xz^2 - xy^3\right)\vec{i} + \left(-xz + yz^2\right)\vec{j} + 0\vec{k}$

– плоскопаралельний вектор-потенціал.

Загальний вигляд векторного потенціалу

$$\vec{\Phi} = \left(-xz^2 - xy^3\right)\vec{i} + \left(-xz + yz^2\right)\vec{j} + 0\vec{k} + grad\,u,$$

де $u = u(x, y, z)$ – довільна двічі диференційовна функція.

<u>Приклад 2</u>. Обчислити потік векторного поля $\vec{F} = 2x^3\,\vec{i} + 2y^3\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ повної поверхні σ конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 2$.

<u>Розв’язання</u>. Оскільки поверхня σ (рис. 35) замкнена, то для обчислення потоку можна застосувати формулу Остроградського – Гаусса. Проекцією конуса V на площину Oxy є круг D радіуса $R = 2$ з центром у початку координат. Бокова поверхня конуса σ_1 задається явно рівнянням $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а поверхня σ_2 задається явно рівнянням $z = 2$. Знайдемо дивергенцію

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2y^3\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(3z^2\right) = 6\left(x^2 + y^2 + z\right).$$

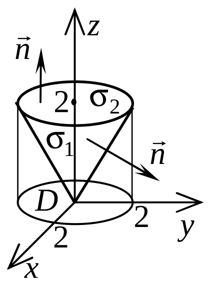

Рис. 35

Тоді

$$\Pi = \oiint\limits_{\sigma^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint\limits_V div\,\vec{F}\,dV = 6\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z\right)dx\,dy\,dz =$$

Для обчислення потрійного інтеграла перейдемо до циліндричних координат

$$= \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi;\ \ y = \rho\sin\varphi;\ \ z = z;\ \ x^2 + y^2 = \rho^2; \\ \sigma_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho;\ \ \sigma_2 : z = 2;\ dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \end{array} \right| =$$

$$= 6\iiint\limits_V \left(\rho^2 + z\right)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = 6\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\,d\rho \int\limits_\rho^2 \left(\rho^2 + z\right)dz = 6\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(\rho^2 z + z^2/2\right)\Big|_\rho^2 \rho\,d\rho =$$

$$= 6\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(2\rho^3 - \rho^4 + 2\rho - \rho^3/2\right)d\rho = 6\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(-\rho^4 + 3\rho^3/2 + 2\rho\right)d\rho = 6\int\limits_0^{2\pi} \left(-\rho^5/5 + 3\rho^4/8 + \rho^2\right)\Big|_0^2 d\varphi =$$

$$= 6\int\limits_0^{2\pi} \left(-32/5 + 6 + 4\right)d\varphi = \frac{108}{5}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{108}{5}\,\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{214\pi}{5}.$$

<u>Приклад 3</u>. Обчислити потік векторного поля $\vec{F} = xy^2\,\vec{i} + yz^2\,\vec{j} + zx^2\,\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ поверхні сфери σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

<u>Розв’язання</u>. Оскільки поверхня σ (рис. 36) замкнена, то для обчислення потоку можна застосувати формулу Остроградського – Гаусса. Знайдемо дивергенцію

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(yz^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(zx^2\right) = y^2 + z^2 + x^2 .$$

Тоді

$$\Pi = \oiint\limits_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iiint\limits_V div\,\vec{F}\, dV = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dx\, dy\, dz =$$

Для обчислення потрійного інтеграла перейдемо до сферичних координат

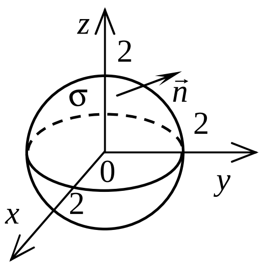

Рис. 36

$$= \left| \begin{array}{l} x = \rho \sin\theta \cos\varphi;\;\; y = \rho\sin\theta\sin\varphi;\;\; z = \rho\cos\theta; \\ x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2;\;\; \sigma : \rho = 2;\;\; dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\theta\; d\rho\, d\varphi\, d\theta \end{array} \right| =$$

$$= \iiint\limits_V \rho^2 \rho^2 \sin\theta\; d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^2 \rho^4\, d\rho =$$

$$= \frac{32}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \frac{32}{5}\int_0^{2\pi} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} d\varphi = \frac{64}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{128\pi}{5} .$$

<u>Зауваження 4</u>. Для спрощення обчислень незамкнену поверхню можна доповнити іншими поверхнями до замкненої. Потім знайти потік за формулою Остроградського – Гаусса і з результату відняти потоки через додаткові поверхні.

<u>Приклад 4</u>. Обчислити потік векторного поля $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + \left(x^2 + y^2 - 2xz - 2yz\right)\vec{k}$ через зовнішню сторону σ_1^+ частини σ_1 поверхні параболоїда $z = 4 - x^2 - y^2$, $0 \le z \le 4$.

<u>Розв’язання</u>. Поверхню σ_1 (рис. 37) доповнимо до замкненої $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, де σ_2 – круг D_{xy} радіуса $R = 2$ на площині Oxy: $z = 0$. Знайдемо дивергенцію

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + y^2 - 2xz - 2yz\right) = 0 .$$

Оскільки $div\,\vec{F} = 0$, то поле соленоїдальне і потік через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю. Тоді

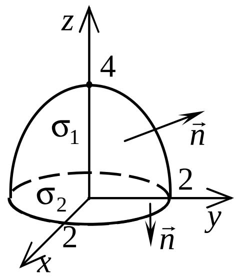

Рис. 37

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma_1^+} \vec{F}\,\vec{n}\, d\sigma = -\iint\limits_{\sigma_2^+} \vec{F}\,\vec{n}\, d\sigma = -\iint\limits_{\sigma_2^+} x^2\, dydz + y^2 dxdz +$$

$$+ \left(x^2 + y^2 - 2xz - 2yz\right) dxdy = -\left(I_x + I_y + I_z\right).$$

Поверхня σ_2 на площини Oyz і Oxz проектується у відрізки – фігури нульової площі. Тому перші два інтеграли-доданки дорівнюють нулю

$$I_x = \iint\limits_{\sigma_2^+} x^2\, dydz = 0 ; \quad I_y = \iint\limits_{\sigma_2^+} y^2\, dxdz = 0 .$$

Нормаль $\vec{n}$ до вибраної сторони σ_2^+ з віссю Oz утворює тупий кут γ, тоді

$$I_z = \iint\limits_{\sigma_2^+} \left(x^2 + y^2 - 2xz - 2yz\right) dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \left(x^2 + y^2 - 2x\cdot 0 - 2y \cdot 0\right) dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi;\;\; y = \rho\sin\varphi; \\ x^2 + y^2 = \rho^2;\;\; dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi \end{array} \right| = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \rho\, d\rho = -2\pi \cdot \rho^4 \big/ 4 \Big|_0^2 = -8\pi .$$

Отже, $\Pi = -\left(0 + 0 - 8\pi\right) = 8\pi$.

<u>Приклад 5</u>. Знайти потік просторового векторного поля $\vec{F} = (6x - 4y)\,\vec{i} + (2y - x + 6)\,\vec{j} + (2z + x + 2y - 6)\,\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ замкненої

повної поверхні σ піраміди V, утвореної при перетині площини $p: -3x+2y-2z+6=0$ з координатними площинами $x=0$, $y=0$ і $z=0$. Обчислення провести двома способами:

а) безпосередньо за означенням потоку;

б) за допомогою формули Остроградського – Гаусса.

Розв’язання.

а) Знайдемо потік безпосередньо за означенням. Піраміда $V=OABC$ зображена на рис. 38. Проекціями піраміди V на координатні площини відповідно D_{yz} (рис. 39), D_{xz} (рис. 40) і D_{xy} (рис. 41) служать прямокутні трикутники, що є правильними плоскими областями в напрямку відповідних координатних осей. Потік через зовнішню сторону σ^+ замкненої повної поверхні σ піраміди є сумою потоків через всі її чотири грані

$$\Pi = \oiint\limits_{\sigma^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \oiint\limits_{\sigma^+} (6x-4y)\,dydz + (2y-x+6)\,dxdz +$$

$$+(2z+x+2y-6)\,dxdy = \Pi_{\Delta ABC} + \Pi_{\Delta OBC} + \Pi_{\Delta OAC} + \Pi_{\Delta OAB}\,.$$

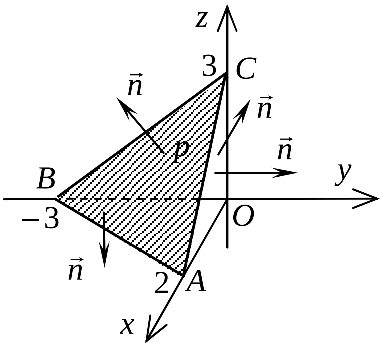

Рис. 38

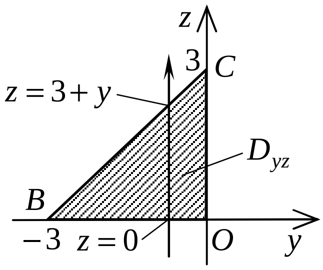

Рис. 39

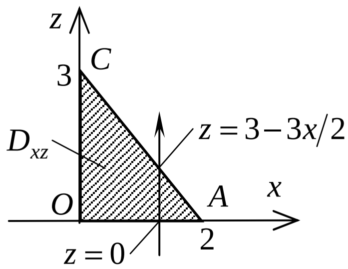

Рис. 40

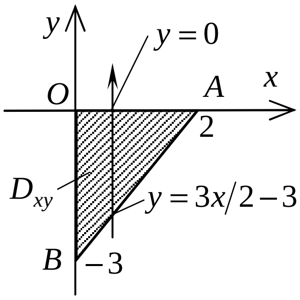

Рис. 41

Для обчислення поверхневих інтегралів-доданків будемо використовувати метод проектування на всі три координатні площини. Тоді

$$\Pi_{\Delta ABC} = \iint\limits_{\Delta ABC} (6x-4y)\,dydz + (2y-x+6)\,dxdz +$$

$$+(2z+x+2y-6)\,dxdy = I_x + I_y + I_z\,;\ I_x = \iint\limits_{\Delta ABC} (6x-4y)\,dydz =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \Delta ABC: x = 2+2y/3-2z/3;\ \cos\alpha > 0 \to "+"; \\ \Delta ABC \xrightarrow{Ox} D_{yz}: -3 \le y \le 0;\ 0 \le z \le 3+y \end{array} \right| =$$

$$= +\iint\limits_{D_{yz}} \bigl(6\cdot(2+2y/3-2z/3) - 4y\bigr)\,dydz = \iint\limits_{D_{yz}} (12-4z)\,dydz =$$

$$= \int\limits_{-3}^{0} dy \int\limits_{0}^{3+y} (12-4z)\,dz = \int\limits_{-3}^{0} \left(12z-2z^2\right)\Big|_0^{3+y} dy = \int\limits_{-3}^{0} \left(-2y^2+18\right)dy = \left(-2y^3/3+18y\right)\Big|_{-3}^{0} = 36\,;$$

$$I_y = \iint\limits_{\Delta ABC} (2y-x+6)\,dxdz = \left| \begin{array}{l} \Delta ABC: y = 3x/2+z-3;\ \cos\beta < 0 \to "-"; \\ \Delta ABC \xrightarrow{Oy} D_{xz}:\ 0 \le x \le 2;\ \ 0 \le z \le 3-3x/2 \end{array} \right| =$$

$$= -\iint\limits_{D_{xz}} \bigl(2\cdot(3x/2+z-3) - x + 6\bigr)\,dxdz = -\iint\limits_{D_{xz}} (2x+2z)\,dxdz =$$

$$=-\int_0^2 dx\int_0^{3-3x/2}(2x+2z)\,dz=-\int_0^2\left(2xz+z^2\right)\Big|_0^{3-3x/2}dx=-\int_0^2\left(-3x^2/4-3x+9\right)dx=$$

$$-\left(-x^3/4-3x^2/2+9x\right)\Big|_0^2=-10;\quad I_z=\iint_{\Delta ABC}(2z+x+2y-6)\,dxdy=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\Delta ABC: z=3-3x/2+y;\ \cos\gamma>0\to"+";\\ \Delta ABC\xrightarrow{Oz}D_{xy}:\ 0\le x\le 2;\ \ 3x/2-3\le y\le 0\end{array}\right|=+\iint_{D_{xy}}\left(2\cdot\left(3-3x/2+y\right)+x+2y-6\right)dxdy=$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(-2x+4y\right)dxdy=\int_0^2 dx\int_{3x/2-3}^{0}(-2x+4y)\,dy=\int_0^2\left(-2xy+2y^2\right)\Big|_{3x/2-3}^{0}dx=$$

$$=\int_0^2\left(-3x^2/2+12x-18\right)dx=\left(-x^3/2+6x^2-18x\right)\Big|_0^2=-16;\quad \Pi_{\Delta ABC}=36-10-16=10;$$

$$\Pi_{\Delta OBC}=\iint_{\Delta OBC}(6x-4y)\,dydz+(2y-x+6)\,dxdz+(2z+x+2y-6)\,dxdy=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\Delta OBC: x=0;\ dx=0;\ \cos\alpha<0\to"-";\\ \Delta OBC\xrightarrow{Ox}D_{yz}: -3\le y\le 0;\ \ 0\le z\le 3+y\end{array}\right|=-\iint_{D_{yz}}\left(6\cdot 0-4y\right)dydz=4\iint_{D_{yz}}y\,dydz=$$

$$=4\int_{-3}^{0}ydy\int_0^{3+y}dz=4\int_{-3}^{0}yz\Big|_0^{3+y}dy=4\int_{-3}^{0}\left(3y+y^2\right)dy=4\left(3y^2/2+y^3/3\right)\Big|_{-3}^{0}=-18;$$

$$\Pi_{\Delta OAC}=\iint_{\Delta OAC}(6x-4y)\,dydz+(2y-x+6)\,dxdz+(2z+x+2y-6)\,dxdy=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\Delta OAC: y=0;\ dy=0;\ \cos\beta>0\to"+";\\ \Delta OAC\xrightarrow{Oy}D_{xz}:\ 0\le x\le 2;\ \ 0\le z\le 3-3x/2\end{array}\right|=+\iint_{D_{xz}}\left(2\cdot 0-x+6\right)dxdz=\iint_{D_{xz}}\left(6-x\right)dxdz=$$

$$=\int_0^2(6-x)dx\int_0^{3-3x/2}dz=\int_0^2(6-x)z\Big|_0^{3-3x/2}dx=\int_0^2\left(3x^2/2-12x+18\right)dx=\left(x^3/2-6x^2+18x\right)\Big|_0^2=16;$$

$$\Pi_{\Delta OAB}=\iint_{\Delta OAB}(6x-4y)\,dydz+(2y-x+6)\,dxdz+(2z+x+2y-6)\,dxdy=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\Delta OAB: z=0;\ dz=0;\ \cos\gamma<0\to"-";\\ \Delta OAB\xrightarrow{Oz}D_{xy}:\ 0\le x\le 2;\ \ 3x/2-3\le y\le 0\end{array}\right|=-\iint_{D_{xy}}\left(2\cdot 0+x+2y-6\right)dxdy=$$

$$=-\iint_{D_{xy}}(x+2y-6)\,dxdy=-\int_0^2 dx\int_{3x/2-3}^{0}(x+2y-6)\,dy=-\int_0^2\left(xy+y^2-6y\right)\Big|_{3x/2-3}^{0}dx=$$

$$=\int_0^2\left(15x^2/4-21x+27\right)dx=\left(5x^3/4-21x^2/2+27x\right)\Big|_0^2=22;$$

$$\Pi=\Pi_{\Delta ABC}+\Pi_{\Delta OBC}+\Pi_{\Delta OAC}+\Pi_{\Delta OAB}=10-18+16+22=30.$$

б) Для обчислення потоку через зовнішню сторону σ^+ замкненої повної поверхні σ піраміди можна застосувати формулу Остроградського – Гаусса. Знайдемо дивергенцію

$$div\,\vec F=(6x-4y)'_x+(2y-x+6)'_y+(2z+x+2y-6)'_z=10.$$

Тоді

$$\Pi=\oint\!\!\oint_{\sigma^+}\vec F\cdot\vec n\,d\sigma=\iiint_V div\,\vec F\,dV=10\iiint_V dxdydz=\left|\begin{array}{c}V:\ 0\le z\le 3-3x/2+y;\ V\xrightarrow{Oz}D_{xy};\\ D_{xy}:\ 0\le x\le 2;\ \ 3x/2-3\le y\le 0\end{array}\right|=$$

$$=10\iint_{D_{xy}} dxdy \int_0^{3-3x/2+y} dz = 10\int_0^2 dx \int_{3x/2-3}^0 (3-3x/2+y)dy = 10\int_0^2 \left(3y-3xy/2+y^2/2\right)\Big|_{3x/2-3}^0 dx =$$

$$=10\int_0^2 \left(9x^2/8-9x/2+9/2\right)dx = 10\left(3x^3/8-9x^2/4+9x/2\right)\Big|_0^2 = 30\,.$$

4.6. Контрольні запитання

1) Що таке скалярне поле? Що таке лінії та поверхні рівня?
2) Які основні характеристики скалярного поля? Дайте означення похідної за напрямом і градієнта.
3) Який зв'язок між похідною за напрямом і градієнтом скалярного поля?
4) Сформулюйте та доведіть основні властивості градієнта скалярного поля.
5) Як виражаються координати вектора одиничної нормалі до поверхні? Запишіть відповідні співвідношення в залежності від того, яким рівнянням задається поверхня.
6) Що таке векторне поле? Що таке векторні лінії? Векторні трубки?
7) Які основні характеристики векторного поля?
8) Дайте означення дивергенції векторного поля. Які її властивості?
9) Дайте означення ротора векторного поля. Які його властивості?
10) Яке поле називається безвихровим? Яке поле називається потенціальним? Як зв'язані ці поняття?
11) Як знайти потенціал векторного поля?
12) Яке поле називається соленоїдальним?
13) Що таке вектор-потенціал соленоїдального поля?
14) Яке поле називається гармонічним?
15) Що таке оператор Гамільтона? Наведіть вирази для диференціальних операцій першого порядку – градієнта, дивергенції та ротора – за допомогою цього оператора.
16) Які існують диференціальні операції другого порядку? Що таке оператор Лапласа (лапласіан)?
17) Що називається криволінійним інтегралом по довжині (першого роду)?
18) Як обчислити криволінійний інтеграл першого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задані у параметричній формі?
19) Як обчислити криволінійний інтеграл по довжині за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задано в явному вигляді $y = y(x)$?
20) Як за допомогою криволінійного інтеграла по довжині обчислити довжину дуги, масу кривої та площу циліндричної поверхні?
21) Що називається криволінійним інтегралом по координатах (другого роду)?
22) Як обчислити криволінійний інтеграл по координатах за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задані у парамет-

ричній формі?
23) Як обчислити криволінійний інтеграл по координатах за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задано в явному вигляді $y = y(x)$?
24) Як визначається додатний напрямок обходу замкненої кривої?
25) Сформулюйте теорему і запишіть формулу Гріна.
26) Сформулюйте умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування.
27) Як за допомогою криволінійного інтеграла по координатах відновити функцію двох чи трьох змінних за її повним диференціалом?
28) Як за допомогою криволінійного інтеграла по координатах знайти загальний розв'язок диференціального рівняння у повних диференціалах?
29) Як за допомогою криволінійного інтеграла по координатах обчислити площу плоскої фігури?
30) Як обчислити роботу змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж заданої кривої?
31) Які поверхні називаються двосторонніми? Односторонніми? Наведіть приклади двосторонніх поверхонь.
32) Що таке орієнтація двосторонньої поверхні?
33) Яка поверхня називається правильною (стандартною) в напрямку осі Ox? Осі Oy? Осі Oz? Яка поверхня називається просто правильною (стандартною)?
34) Що називається поверхневим інтегралом по площі (першого роду)?
35) Як обчислюється поверхневий інтеграл по площі?
36) Які геометричні та фізичні застосування має поверхневий інтеграл по площі?
37) Як знайти масу матеріальної поверхні за допомогою поверхневого інтеграла по площі?
38) Що називається поверхневим інтегралом по координатах (другого роду)?
39) У чому полягає зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду?
40) Як обчислюється поверхневий інтеграл по координатах методом проектування на одну координатну площину?
41) Як обчислюється поверхневий інтеграл по координатах методом проектування на всі три координатні площини?
42) Сформулюйте теорему і запишіть формулу Стокса.
43) Сформулюйте теорему і запишіть формулу Остроградського-Гаусса.
44) Які застосування має поверхневий інтеграл по координатах?

4.7. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Обчислити вказаний криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною) $I=\int\limits_L f(x,y)\,dl$ по заданій дузі L:

№ в-та	Завдання
1	$\int\limits_L (x^2-y)\,dl$, $L-$ дуга кола $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le \pi/2$
2	$\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, $L-$ дуга кардіоїди $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\pi/2$
3	$\int\limits_L \frac{\sin^2 x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$, $L-$ дуга лінії $y=\ln\sin x$, $\pi/6\le x\le\pi/2$
4	$\int\limits_L x^3\sqrt{y}\,dl$, $L-$ дуга лінії $y=x^4$, $0\le x\le 1$
5	$\int\limits_L y\,dl$, $L-$ дуга циклоїди $x=5(t-\sin t)$, $y=5(1-\cos t)$, $0\le t\le\pi/2$
6	$\int\limits_L (x^2+y^2)^{3/2}dl$, $L-$ дуга лемніскати Бернуллі $\rho=3\sqrt{\sin 2\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi/4$
7	$\int\limits_L \frac{x^2dl}{y^3}$, $L-$ дуга лінії $y=1/x$, $\sqrt{3}/2\le x\le 1$
8	$\int\limits_L \sqrt{1+\cos^4 x}\,dl$, $L-$ дуга тангенсоїди $y=tg\,x$, $0\le x\le\pi/3$
9	$\int\limits_L (x+y)\,dl$, $L-$ дуга лемніскати Бернуллі $\rho=3\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi/4$
10	$\int\limits_L \sin x\cos^2 x\,dl$, $L-$ дуга лінії $y=\ln\sin x$, $\pi/6\le x\le\pi/2$
11	$\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, $L-$ дуга циклоїди $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $0\le t\le\pi/2$
12	$\int\limits_L \sin^2 x\cos^2 x\,dl$, $L-$ дуга лінії $y=\ln\cos x$, $0\le x\le\pi/4$
13	$\int\limits_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$, $L-$ дуга синусоїди $y=\sin x$, $0\le x\le\pi/2$
14	$\int\limits_L \frac{x^4 y}{\sqrt{1+x^2}}dl$, $L-$ дуга лінії $y=\ln x$, $1\le x\le e$
15	$\int\limits_L \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}dl$, $L-$ дуга синусоїди $y=\sin x$, $0\le x\le\pi/4$
16	$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, $L-$ дуга лемніскати Бернуллі $\rho=3\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi/4$
17	$\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$, $L-$ дуга косинусоїди $y=\cos x$, $0\le x\le\pi/2$
18	$\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, $L-$ дуга лінії $x=\cos t+t\sin t$, $y=\sin t-t\cos t$, $0\le t\le\pi/2$
19	$\int\limits_L x\sqrt{1+4y}\,dl$, $L-$ дуга параболи $y=x^2$, $0\le x\le 1$

20	$\int_L \sin^2 x \cos^3 x\, dl$, L – дуга лінії $y = \ln\cos x$, $\pi/6 \le x \le \pi/4$
21	$\int_L \frac{dl}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, L – дуга гіперболічної спіралі $\rho = 3/\varphi$, $4/3 \le \varphi \le \sqrt{3}$
22	$\int_L \frac{x-3y}{\sqrt{1+4y}} dl$, L – дуга параболи $y = x^2$, $0 \le x \le 1$
23	$\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}) dl$, L – дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$
24	$\int_L x\sqrt{1+y^2}\, dl$, L – дуга експоненти $y = e^x$, $0 \le x \le 1$
25	$\int_L x\sqrt{1+y^6}\, dl$, L – дуга лінії $y = x^4/4$, $0 \le x \le 1$
26	$\int_L xy\, dl$, L – дуга кола $\rho = 4\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$
27	$\int_L xy\sqrt{x^2+16y^2}\, dl$, L – дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$
28	$\int_L (x+y)\, dl$, L – дуга кола $\rho = 4\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$
29	$\int_L \sin x\sqrt{1+\sin^4 x}\, dl$, L – дуга лінії $y = ctg\, x$, $\pi/6 \le x \le \pi/2$
30	$\int_L \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dl$, L – дуга кардіоїди $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi/2$

Завдання 2. Обчислити вказаний криволінійний інтеграл другого роду (за координатами) $I = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ по заданій дузі L:

№ в-та	Завдання
1	$\int_L xy\,dx + (x^2 - y^2)dy$, L – дуга кривої $x = 2e^{-t}$, $y = 2e^t$, $0 \le t \le 1$
2	$\int_L 2xy\,dx + y^2 dy$, L – дуга кола $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$
3	$\int_L xy^2\,dx - x\,dy$, L – дуга еліпса $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$
4	$\int_L \sin^2 x\,dx + \frac{1}{y^2}dy$, L – дуга кривої $y = ctg\, x$, $\pi/6 \le x \le \pi/4$
5	$\int_L \cos^2 x\,dx - \frac{1}{y^3}dy$, L – дуга кривої $y = tg\, x$, $\pi/6 \le x \le \pi/4$
6	$\int_L \sqrt[3]{xy^2}\,dx - dy$, L – дуга астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$
7	$\int_L (x - y^2)dx + xy\,dy$, L – дуга параболи $y^2 = 1 - x$ від $A(1,0)$ до $B(0,1)$
8	$\int_L (x - 2y)dx + x\,dy$, L – дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$
9	$\int_L 3x^2 y\,dx + (x^3 + 3y)dy$, L – дуга лінії $y = x^3/3$, $0 \le x \le 1$

10	$\int_L (x^2-y^2)\,dx + xy\,dy$, L – дуга кривої $y=e^x$, $0\le x\le 1$
11	$\int_L 2y\,dx - \left(3x^2-2y^2\right)dy$, L – дуга параболи $y=x^2/4$, $0\le x\le 1$
12	$\int_L y\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy$, L – дуга лінії $y=\arcsin x$, $0\le x\le 1/2$
13	$\int_L \frac{xy\,dx+dy}{\sqrt{1+x^2}}$, L – дуга лінії $y=\sqrt{1+x^2}$, $0\le x\le 1$
14	$\int_L y^2\sin x\,dx + \sqrt{1-y^2}\cos x\,dy$, L – дуга лінії $y=\cos x$, $0\le x\le \pi/2$
15	$\int_L dx + (x\cos^2 x + y\sin x)\,dy$, L – дуга лінії $y=x\sin x$, $0\le x\le \pi/2$
16	$\int_L \frac{y}{x}dx + 4x^4\,dy$, L – дуга лінії $y=\ln x$ у напрямі від $A(1,0)$ до $B(e,1)$
17	$\int_L 12xy\,dx - \left(x^2+4y^2\right)dy$, L – дуга параболи $y=x^2/4$, $0\le x\le 1$
18	$\int_L (xy-2)\,dx + x^2dy$, L – дуга параболи $y^2=4x$ від $A(0,0)$ до $B(1,2)$
19	$\int_L x^3y\,dx - dy$, L – дуга еліпса $x=4\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le \pi/2$
20	$\int_L (x+2y)\,dx + (x-2y)\,dy$, L – дуга еліпса $x=2\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le \pi/2$
21	$\int_L (x^2y-y^2)\,dx + 2x^2\,dy$, L – дуга параболи $y=x^2$, $0\le x\le 1$
22	$\int_L ydx - x\,dy$, L – дуга кривої $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $0\le t\le \pi/2$
23	$\int_L xy\,dx - \left(x^2+y^2\right)dy$, L – дуга кола $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $0\le t\le \pi/2$
24	$\int_L y\,dx + (1+x^2)\,dy$, L – дуга лінії $y=arctg\,x$, $0\le x\le 1$
25	$\int_L 3x^2y\,dx + (x^3+3y)\,dy$, L – дуга лінії $y=x^3/3$, $0\le x\le 1$
26	$\int_L y\,dx - (1+x^2)\,dy$, L – дуга лінії $y=\ln\left(1+x^2\right)$, $0\le x\le 1$
27	$\int_L xy\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy$, L – дуга лінії $y=\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le 1/2$
28	$\int_L y\sin x\,dx + \sqrt{1-y^2}\cos x\,dy$, L – дуга лінії $y=\sin x$, $0\le x\le \pi/2$
29	$\int_L y^2\,dx + 4y\sin x\,dy$, L – дуга лінії $y=\sqrt{\cos x}$, $0\le x\le \pi/4$
30	$\int_L \frac{y}{x}dx + \frac{x\ln x}{y}dy$, L – дуга лінії $y=x\ln x$, $e\le x\le e^2$

Завдання 3. Перевірити, що дане диференціальне рівняння $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ є рівнянням у повних диференціалах $\left(\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ і знайти його загальний розв'язок $u(x,y)=C$, відновлюючи функцію за її повним диференціалом за допомогою криволінійного інтеграла за координатами $u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$:

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\left(1+\frac{x}{y^4}\right)dx-\frac{2x^2}{y^5}dy=0$	16	$\frac{2xe^{-y}}{(1+x^2)^2}dx+\left(\frac{e^{-y}}{1+x^2}+2\right)dy=0$
2	$2xydx+(x^2-2e^y)dy=0$	17	$ydx+(x+3y^2)dy=0$
3	$3x^2e^ydx+(x^3e^y-2)dy=0$	18	$xy^2dx+(x^2y+\sin y)dy=0$
4	$y\,dx+(x-2e^y)dy=0$	19	$y\cdot x^{y-1}dx+\left(x^y\ln x+1\right)dy=0$
5	$xy^2dx+(e^y+x^2y)dy=0$	20	$y^3dx+(3xy^2+e^y)\,dy=0$
6	$\frac{2x}{y^3}dx-\left(\frac{3x^2}{y^4}+4y^3\right)dy=0$	21	$\frac{y}{x}dx+(\ln x+\sin y)dy=0$
7	$\frac{y^2}{x}dx+(2y\ln x-e^y)dy=0$	22	$\frac{xdx}{y^2-x^2}+\left(e^y-\frac{y}{y^2-x^2}\right)dy=0$
8	$\frac{y^2}{x^2}dx-\left(\frac{2y}{x}+y^4\right)dy=0$	23	$(\ln y-x)dx+\left(\frac{x}{y}-3y^2\right)dy=0$
9	$xy^2dx+\left(x^2y+6y^5\right)dy=0$	24	$e^{\,y}dx+\left(xe^{\,y}-y^2\right)dy=0$
10	$y^3dx+\left(3xy^2-\cos y\right)dy=0$	25	$2x\sin y\,dx+\left(x^2\cos y+y\right)dy=0$
11	$3x^2e^ydx+\left(x^3e^y-3y^2\right)dy=0$	26	$\cos^2 y\,dx+\left(y-x\sin 2y\right)d\,y=0$
12	$\frac{\sin 2x}{y}dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$	27	$y^2dx+\left(\frac{2y}{1+y^2}+2xy\right)dy=0$
13	$2xe^y\,dx+\left(x^2e^y-\sin y\right)dy=0$	28	$\sin 2y\,dx+\left(2x\cos 2y+y^2\right)dy=0$
14	$(ctg\,y+x)dx-\frac{x}{\sin^2 y}\,\mathrm{dy}=0$	29	$3x^2y\,dx+\left(\cos y+x^3\right)dy=0$
15	$\left(tg\,y-6x^2\right)dx+\frac{x}{\cos^2 y}\,dy=0$	30	$\left(1+\frac{2x}{y^3}\right)dx-\frac{3x^2}{y^4}dy=0$

Завдання 4. Обчислити вказаний поверхневий інтеграл першого роду (за площею) $I=\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds$, де S – частина заданої площини $p:\ Ax+By+Cz+D=0$, яка відсічена координатними площинами $x=0$, $y=0$ і $z=0$:

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\iint\limits_S (x-2y+6z)ds$, $p: 2x-y+2z-4=0$	11	$\iint\limits_S (3x+2y-6z)ds$, $p: x-2y+6z-6=0$	21	$\iint\limits_S (2x+y-6z+1)ds$, $p: 3x-y+2z-6=0$
2	$\iint\limits_S (4x+3y-2z)ds$, $p: 3x-2y+2z-6=0$	12	$\iint\limits_S (5x+y-4z-3)ds$, $p: 3x-y+2z-6=0$	22	$\iint\limits_S (x+4y-2z-3)ds$, $p: x-2y+2z+8=0$
3	$\iint\limits_S (x+4y-4z)ds$, $p: x-2y+2z-4=0$	13	$\iint\limits_S (x-5y-6z-1)ds$, $p: 2x-y+2z-6=0$	23	$\iint\limits_S (6x+y-4z-1)ds$, $p: 3x-y+2z+6=0$
4	$\iint\limits_S (4x+3y-4z)ds$, $p: 3x-2y+2z-12=0$	14	$\iint\limits_S (x+2y-6z+3)ds$, $p: 3x-y+3z-6=0$	24	$\iint\limits_S (3x-y-6z-5)ds$, $p: x-4y-6z-12=0$
5	$\iint\limits_S (3x+2y-6z+4)ds$, $p: 3x-y+3z-3=0$	15	$\iint\limits_S (5x+4y-2z-1)ds$, $p: 4x-y+2z+8=0$	25	$\iint\limits_S (x+2y-6z+3)ds$, $p: 3x-y+2z-12=0$
6	$\iint\limits_S (5x-3y-4z+2)ds$, $p: 3x-2y+4z+12=0$	16	$\iint\limits_S (x+4y-4z)ds$, $p: x-2y+2z-4=0$	26	$\iint\limits_S (4x-3y-6z+4)ds$, $p: 6x-2y-3z+12=0$,
7	$\iint\limits_S (3x-y-2z+2)ds$, $p: 2x-2y+z+8=0$	17	$\iint\limits_{S^+} (2x-y+3z)dy\,dz$, $p: 2x-2y+z-4=0$	27	$\iint\limits_S (4x-3y+2z+5)ds$, $p: 2x-4y-z+4=0$
8	$\iint\limits_S (3x+4y-6z)ds$, $p: 3x-y+3z-3=0$	18	$\iint\limits_S (3x+4y-6z)ds$, $p: 3x-y+3z-3=0$	28	$\iint\limits_S (x+y-2z-1)ds$, $p: 4x-3y+2z-12=0$
9	$\iint\limits_S (3x-2y+2z)ds$, $p: 2x-y+2z-4=0$	19	$\iint\limits_S (3x-5y-4z)ds$, $p: 2x-y+2z-6=0$	29	$\iint\limits_S (2x+3y-4z+1)ds$, $p: 5x-y-2z+10=0$
10	$\iint\limits_S (4x+3y-2z)ds$, $p: 3x-2y+2z-6=0$	20	$\iint\limits_S (x-5y-2z-5)ds$, $p: 3x-2y+2z-6=0$	30	$\iint\limits_S (6x+y-4z-1)ds$, $p: 3x-y+2z+6=0$

Завдання 5. Задано векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ і поверхня σ – частина площини $p: Ax + By + Cz + D = 0$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Знайти циркуляцію векторного поля $\Gamma = \oint_L \vec{F}\,d\vec{l} = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ вздовж замкненого контуру L, що обмежує поверхню σ, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{N} = (A, B, C)$ цієї площини p. Обчислення провести двома способами:

а) безпосередньо за означенням циркуляції;

б) за допомогою формули Стокса $\oint_L \vec{F}\,d\vec{l} = \iint_{\sigma^+} rot\,\vec{F} \cdot \vec{n}\,d\sigma$.

№ в-та	Завдання
1	$\vec{F} = (2x - 3z)\vec{i} - 4\vec{j} + 2xz\vec{k}$, $p: 2x - 2y + z - 4 = 0$
2	$\vec{F} = 6\vec{i} + (3y - x)\vec{j} - 3yz\vec{k}$, $p: x - 3y + z - 6 = 0$
3	$\vec{F} = (2x - 3y)\vec{i} + 4\vec{j} - 3xz\vec{k}$, $2x + y + z - 4 = 0$
4	$\vec{F} = 2xz\vec{i} - (3y + 2x)\vec{j} - 2\vec{k}$, $p: 2x - 3y - z + 6 = 0$
5	$\vec{F} = 4\vec{i} + 6yz\vec{j} + (3y - 2z)\vec{k}$, $p: 4x - 4y + z + 8 = 0$
6	$\vec{F} = 2xz\vec{i} - 6\vec{j} + (3y + 4z)\vec{k}$, $p: 2x - 4y - z - 8 = 0$
7	$\vec{F} = 6xy\vec{i} - 4\vec{j} + (4y + z)\vec{k}$, $p: 3x - 3y - z + 6 = 0$
8	$\vec{F} = 6\vec{i} + 3xy\vec{j} + (3x - 4z)\vec{k}$, $p: 2x + 3y - z - 12 = 0$
9	$\vec{F} = 4\vec{i} + 2yz\vec{j} + (z - 6y)\vec{k}$, $p: 3x - 4y + z + 12 = 0$
10	$\vec{F} = 4\vec{i} + 2xy\vec{j} + (2z - 3y)\vec{k}$, $p: 3x - 4y - z - 12 = 0$
11	$\vec{F} = 6\vec{i} + 3yz\vec{j} + (4x - 3z)\vec{k}$, $p: 2x - 3y - z - 12 = 0$
12	$\vec{F} = 4\vec{i} + (3x - 4y)\vec{j} + 6xz\vec{k}$, $p: 6x + 4y - z + 12 = 0$
13	$\vec{F} = (6x - 2y)\vec{i} + 2xy\vec{j} - 3\vec{k}$, $p: 6x - 3y + z - 6 = 0$
14	$\vec{F} = (6x - 4y)\vec{i} - 3\vec{j} + 6yz\vec{k}$, $p: 6x - 4y - z - 12 = 0$
15	$\vec{F} = 6x\vec{i} + (8y - x)\vec{j} + 2xz\vec{k}$, $p: 3x - 4y + z + 12 = 0$
16	$\vec{F} = 2\vec{i} + (4y - x)\vec{j} - 3xz\vec{k}$, $p: 2x - 4y - z + 4 = 0$
17	$\vec{F} = 4\vec{i} + (3x - 4y)\vec{j} - 2yz\vec{k}$, $p: x + 2y - z - 4 = 0$
18	$\vec{F} = (6x - y)\vec{i} - 2\vec{j} + 2xz\vec{k}$, $p: 2x - y + z - 4 = 0$
19	$\vec{F} = 6xz\vec{i} + (4y + 3z)\vec{j} - 3\vec{k}$, $p: x - 4y - z + 4 = 0$
20	$\vec{F} = (4x - 3y)\vec{i} - 2yz\vec{j} + 2\vec{k}$, $p: 4x - 2y - z - 8 = 0$
21	$\vec{F} = 4xz\vec{i} + (3x - 4y)\vec{j} + 3\vec{k}$, $p: 2x - 4y + z + 8 = 0$
22	$\vec{F} = -4xy\vec{i} + 6\vec{j} + (2z - 3y)\vec{k}$, $p: 2x - 6y - z + 6 = 0$
23	$\vec{F} = (2x - 5z)\vec{i} - 4xy\vec{j} + 3\vec{k}$, $p: 2x + 4y - z - 8 = 0$
24	$\vec{F} = (4x + 3y)\vec{i} - 4yz\vec{j} + 2\vec{k}$, $p: 4x - 4y + z - 8 = 0$
25	$\vec{F} = (2x + 5z)\vec{i} - 6xy\vec{j} + 3\vec{k}$, $p: 2x - 6y - z + 12 = 0$

26	$\vec{F}=(3y-4x)\vec{i}-6yz\,\vec{j}+3\vec{k}$, $p: 4x-3y-z+12=0$
27	$\vec{F}=2\vec{i}+(4y-3z)\,\vec{j}-2xz\,\vec{k}$, $p: 6x+4y+z-12=0$
28	$\vec{F}=(6x-4z)\vec{i}-3xy\,\vec{j}+2\vec{k}$, $p: 6x+3y+z-6=0$
29	$\vec{F}=4\vec{i}+(4y-x)\,\vec{j}+6yz\,\vec{k}$, $p: 6x-4y+3z+12=0$
30	$\vec{F}=6xz\,\vec{i}-4\,\vec{j}+(2z-5y)\vec{k}$, $p: 6x-2y+z-6=0$

Завдання 6. Задано векторне поле $\vec{a}=\vec{a}(M)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ і піраміда V, утворена вказаною площиною $p:\ Ax+By+Cz+D=0$ і координатними площинами $x=0$; $y=0$; $z=0$. Необхідно:

1) Зробити рисунок піраміди V та її проекцій D_{xy}, D_{xz} і D_{yz} на відповідні координатні площини у просторовій системі координат $Oxyz$. Зобразити одиничний вектор зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до кожної з граней піраміди V.

2) Подати кожну плоску область D_{xy}, D_{xz} і D_{yz} як правильну в напрямку однієї з координатних осей і зробити рисунок у відповідній плоскій системі координат.

3) Обчислити потік $\Pi=\oiint\limits_{\sigma^+}\vec{a}\vec{n}\,d\sigma=\oiint\limits_{\sigma^+}P\,dydz+Q\,dxdz+R\,dxdy$ векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ замкненої повної поверхні σ піраміди V двома способами:

а) безпосередньо за означенням потоку;

б) за допомогою формули Остроградського – Гаусса

$$\Pi=\oiint\limits_{\sigma^+}\vec{a}\vec{n}\,d\sigma=\iiint\limits_{V}div\,\vec{a}\,dV=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\,.$$

№ в-та	Завдання
1	$\vec{a}=(2x-5y)\vec{i}+3\vec{j}-3xz\vec{k}$, $2x+y+z-4=0$
2	$\vec{a}=3\vec{i}+(3x+2y)\,\vec{j}-2yz\,\vec{k}$, $p: x+2y-z-4=0$
3	$\vec{a}=(2x-3z)\vec{i}-4\,\vec{j}+2xz\,\vec{k}$, $p: 2x-2y+z-4=0$
4	$\vec{a}=3xz\,\vec{i}+(4y+z)\,\vec{j}-3\vec{k}$, $p: x-4y-z+4=0$
5	$\vec{a}=3xy\,\vec{i}-2\,\vec{j}+(y+2z)\vec{k}$, $p: 3x-3y-z+6=0$
6	$\vec{a}=2xz\,\vec{i}+(x-4y)\,\vec{j}+3\vec{k}$, $p: 2x-4y+z+8=0$
7	$\vec{a}=3\vec{i}+4yz\,\vec{j}+(y-2z)\vec{k}$, $p: 4x-4y+z+8=0$
8	$\vec{a}=(2x-z)\vec{i}-4xy\,\vec{j}+3\vec{k}$, $p: 2x+4y-z-8=0$
9	$\vec{a}=2\vec{i}+3yz\,\vec{j}+(3x-z)\vec{k}$, $p: 2x-3y-z-12=0$
10	$\vec{a}=(2x+z)\vec{i}-6xy\vec{j}+3\vec{k}$, $p: 2x-6y-z+12=0$
11	$\vec{a}=3\vec{i}+4yz\,\vec{j}+(2z-y)\vec{k}$, $p: 3x-4y+z+12=0$
12	$\vec{a}=2\vec{i}+(4y-z)\,\vec{j}-2xz\,\vec{k}$, $p: 6x+4y+z-12=0$
13	$\vec{a}=(6x-z)\vec{i}-3xy\,\vec{j}-2\vec{k}$, $p: 6x+3y+z-6=0$

14	$\vec{a}=6xz\vec{i}-4\vec{j}+(2z-y)\vec{k}$, $p: 6x-2y+z-6=0$
15	$\vec{a}=2\vec{i}+(4y-x)\vec{j}-2xz\vec{k}$, $p: 2x-4y+z+12=0$
16	$\vec{a}=(2x-3y)\vec{i}-2\vec{j}+2xz\vec{k}$, $p: 2x-y+z-4=0$
17	$\vec{a}=2\vec{i}+(3y-x)\vec{j}-3yz\vec{k}$, $p: x-3y+z-6=0$
18	$\vec{a}=2\vec{i}+(4y-x)\vec{j}-3xz\vec{k}$, $p: 2x-4y-z+4=0$
19	$\vec{a}=2xz\vec{i}-(3y+x)\vec{j}-2\vec{k}$, $p: 2x-3y-z+6=0$
20	$\vec{a}=-2xy\vec{i}+3\vec{j}+(2z-y)\vec{k}$, $p: 2x-6y-z+6=0$
21	$\vec{a}=2xz\vec{i}-4\vec{j}+(y-2z)\vec{k}$, $p: 2x-4y-z-8=0$
22	$\vec{a}=(4x+y)\vec{i}-2yz\vec{j}+2\vec{k}$, $p: 4x-2y-z-8=0$
23	$\vec{a}=2\vec{i}+3xy\vec{j}+(3x+z)\vec{k}$, $p: 2x+3y-z-12=0$
24	$\vec{a}=(y-4x)\vec{i}-3yz\vec{j}+3\vec{k}$, $p: 4x-3y-z+12=0$
25	$\vec{a}=4\vec{i}+4xy\vec{j}+(2z-y)\vec{k}$, $p: 3x-4y-z-12=0$
26	$\vec{a}=(4x+y)\vec{i}-4yz\vec{j}+2\vec{k}$, $p: 4x-4y+z-8=0$
27	$\vec{a}=4\vec{i}+(x-4y)\vec{j}+2xz\vec{k}$, $p: 6x+4y-z+12=0$
28	$\vec{a}=(6x-y)\vec{i}+3xy\vec{j}-4\vec{k}$, $p: 6x-3y+z-6=0$
29	$\vec{a}=6xy\vec{i}+(4y-z)\vec{j}+2\vec{k}$, $p: 6x+2y+z+12=0$
30	$\vec{a}=(6x-2y)\vec{i}-3\vec{j}+2yz\vec{k}$, $p: 6x-4y-z-12=0$

Завдання 7. Для скалярного поля $u=u(x,y,z)$ знайти його градієнт $\vec{a}=grad\,u$ і лапласіан Δu. Перевірити, що векторне поле градієнтів $\vec{a}=grad\,u$ є потенціальним ($rot\,\vec{a}=\vec{0}$):

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$u=2xyz-2xy+5yz$	11	$u=3xz-4xyz+3z^2$	21	$u=2xy-4z^2-3yx^2$
2	$u=4x^2-4xy+5yz$	12	$u=xz-4xy^2+yz$	22	$u=5yz-3xy-2xyz$
3	$u=xyz-4xy-3yz$	13	$u=x^2z-4y^2-2z$	23	$u=4y^2z-xyz+2x$
4	$u=3x^2-yz^2-2y$	14	$u=2xyz-4y^2+3z^2$	24	$u=2xyz-4xz-3x^2$
5	$u=2xz+2y^2-z^2$	15	$u=3xyz-6y^2+2yz$	25	$u=3x^2-2xy+xyz$
6	$u=xyz-2xz+4z^2$	16	$u=4xy^2-3xz+3yz$	26	$u=x^2z-4xy-yz$
7	$u=x^2-2yz^2-2z$	17	$u=4xz-2y^2+5xyz$	27	$u=3x^2-5xyz-2yz$
8	$u=x^2+3yz+2xz$	18	$u=2yz-4y^2+xz$	28	$u=4xy^2-xz+3z^2$
9	$u=2y^2z-4x^2-3z$	19	$u=3xyz-4xy+4yz$	29	$u=xyz-2xz+4y^2$
10	$u=2z^2-4xy-xyz$	20	$u=2xz-yz^2-2x$	30	$u=2y^2-4xz-3x^2$

Завдання 8. Для векторного поля $\vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ знайти його ротор $\vec{b}=rot\,\vec{a}$. Перевірити, що векторне поле роторів $\vec{b}=rot\,\vec{a}$ є соленоїдальним ($div\,\vec{b}=0$):

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\vec{a}=yz\,\vec{i}+(x-z)\,\vec{j}+2xy\,\vec{k}$	16	$\vec{a}=(2y-z)\vec{i}-2xz\,\vec{j}+yz\,\vec{k}$
2	$\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(3-yz)\,\vec{j}-xy\,\vec{k}$	17	$\vec{a}=2y^2\,\vec{i}+(z-xy)\,\vec{j}-yz\,\vec{k}$
3	$\vec{a}=z\,\vec{i}-(4xy+z)\,\vec{j}-xz\,\vec{k}$	18	$\vec{a}=2xz\,\vec{i}-(3z-x)\,\vec{j}-yz\,\vec{k}$
4	$\vec{a}=xz\,\vec{i}+(xy-z)\,\vec{j}+2yz\,\vec{k}$	19	$\vec{a}=2z\,\vec{i}+(x-2yz)\,\vec{j}-(y+xz)\vec{k}$
5	$\vec{a}=3xz\,\vec{i}-2xy^2\,\vec{j}+(4y-x)\vec{k}$	20	$\vec{a}=2xz\,\vec{i}+(3x-yz)\,\vec{j}+(x-y)\vec{k}$
6	$\vec{a}=(y+xz)\vec{i}-xyz\,\vec{j}+2y\,\vec{k}$	21	$\vec{a}=(xy-z^{2)}\,\vec{i}-4xz\vec{j}-yz\,\vec{k}$
7	$\vec{a}=(xz-y)\vec{i}-4xz\,\vec{j}+xyz\,\vec{k}$	22	$\vec{a}=(xz-y^2)\vec{i}-2z\,\vec{j}+2xy\,\vec{k}$
8	$\vec{a}=(2xy-z^2)\vec{i}-2yz\,\vec{j}-x^2\,\vec{k}$	23	$\vec{a}=(2xy-z)\vec{i}-2yz\,\vec{j}+(xz+y)\vec{k}$
9	$\vec{a}=(y^2-z^2)\vec{i}-2xz\,\vec{j}-4x^2\,\vec{k}$	24	$\vec{a}=(2y^2+xz)\vec{i}-2xz\,\vec{j}-(x+y)\vec{k}$
10	$\vec{a}=yz\,\vec{i}+(x^2-z)\,\vec{j}-2xyz\,\vec{k}$	25	$\vec{a}=(2y^2-z)\vec{i}-2xz\,\vec{j}-xyz\,\vec{k}$
11	$\vec{a}=4y^2\,\vec{i}+(z-xy)\,\vec{j}-y^2z\,\vec{k}$	26	$\vec{a}=(y-z^2)\vec{i}-(x-yz)\,\vec{j}-2xy\,\vec{k}$
12	$\vec{a}=z\,\vec{i}-(4xy+z^2)\,\vec{j}-xyz\,\vec{k}$	27	$\vec{a}=2xyz\,\vec{i}-(3z-x^2)\,\vec{j}+2y\,\vec{k}$
13	$\vec{a}=xyz\,\vec{i}-(xy-z^2)\,\vec{j}+2y\,\vec{k}$	28	$\vec{a}=2yz\,\vec{i}+(x^2-2yz)\,\vec{j}-xz\,\vec{k}$
14	$\vec{a}=(3xz+y)\vec{i}-2xyz\,\vec{j}-3y\,\vec{k}$	29	$\vec{a}=4xz\,\vec{i}+(3x^2-yz)\,\vec{j}+2xy\,\vec{k}$
15	$\vec{a}=2xyz\,\vec{i}-z\,\vec{j}+(x-y^2)\vec{k}$	30	$\vec{a}=(y^2-z^2)\vec{i}-2xyz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$