Розділ 3. ЕЛЕМЕНТИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Методи варіаційного числення знаходять широке застосування в різних галузях науки та виробництва при постановці та розв'язанні задач моделювання, оптимізації та управління. Володіння ними стає складовою частиною сучасної інженерної освіти.

У цьому розділі наведено початкові теоретичні відомості з варіаційного числення з численними зразками розв’язання типових задач, доповнені контрольними запитаннями та індивідуальними розрахунково-графічними завданнями.

3.1. Функціонал та його варіація. Екстремум

3.1.1. Поняття про функціонал

Нехай задано деякий клас D функцій $y(x)$. Якщо кожній функції $y(x)$ із класу D за деяким законом ставиться у відповідність певне числове значення змінної *I*, то ця змінна *I* називається ***функціоналом*** від однієї функціональної змінної $y(x)$ і позначається $I = I[y] = I[y(x)]$.

Клас D функцій $y(x)$, на яких визначений функціонал, називається ***областю визначення*** функціоналу. При цьому функція $y(x)$ служить ***незалежною змінною (аргументом)*** функціоналу. Функції із області визначення D даного функціоналу *I* називаються ***функціями порівняння*** або ***допустимими функціями***.

Кожну функцію $y(x)$, яка належить області визначення D функціоналу $I[y]$, можна розглядати як точку (елемент) деякої множини (простору) функцій. Простори, елементами яких служать функції, називаються ***функціональними просторами***.

Функціонал — це функція, в якої значеннями незалежної змінної $y(x)$ є точки (елементи) функціонального простору, а значеннями залежної змінної I — числа.

Можна розглядати також функціонали від кількох незалежних функціональних змінних. Якщо скінченному набору функцій $y_1(x),\ y_2(x),\dots,y_n(x)$ з певного класу функцій D ставиться у відповідність за деяким законом певне числове значення змінної I, то I називається функціоналом від n функціональних змінних і позначається $I = I[y_1, y_2,\dots, y_n] = I[y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)]$.

<u>Приклад 1</u>. Обчислити заданий функціонал при заданих значеннях аргументу:

а) $I[y] = y(4);\ y_1 = \sqrt{x};\ y_2 = \cos\dfrac{\pi x}{4}.$ б) $I[y] = \lim\limits_{x\to+\infty} y;\ y_1 = arctgx;\ y_2 = e^{-x}.$

в) $I[y] = y'(0);\ y_1 = \dfrac{x}{\cos x};\ y_2 = tg^2 x^3.$ г) $I[y] = \int\limits_0^2 y^2(x)dx;\ y_1 = \sin\pi x;\ y_2 = xe^x.$

д) $I[y] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx;\ y_1 = x;\ y_2 = \ln\cos x.$ е) $I[y,z] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y^3 z dx;\ y_1 = \cos x;\ z_1 = \sin^2 x.$

Розв'язання.

а) $I[y_1]=\sqrt{4}=2;\ I[y_2]=\cos\frac{4\pi}{4}=-1.$

б) $I[y_1]=\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx=\frac{\pi}{2};\ I[y_2]=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0.$

в) $I[y_1]=\left(\frac{x}{\cos x}\right)'\bigg|_{x=0}=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\bigg|_{x=0}=1;$

$I[y_2]=\left(tg^2x^3\right)'\Big|_{x=0}=2tgx^3\frac{1}{\cos^2 x^3}\cdot 3x^2\bigg|_{x=0}=0.$

г) $I[y_1]=\int\limits_0^2\sin^2\pi x dx=\int\limits_0^2\frac{1-\cos 2\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx--\frac{1}{2}\int\limits_0^2\cos 2\pi x dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^2-$

$-\frac{1}{4\pi}\sin 2\pi x\Big|_0^2=1;\ I[y_2]=\int\limits_0^2 xe^x dx=xe^x\Big|_0^2-\int\limits_0^2 e^x dx=2e^2-e^x\Big|_0^2=2e^2-e^2+e^0=e^2-1.$

д) $y'_1=x'=1;\ I[y_1]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+1^2}dx=\sqrt{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{6};\quad y_2=(\ln\cos x)'=-tgx;\ I[y_2]=$

$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(-tgx)^2}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\ln\left|tg\frac{\pi}{3}\right|-\ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|=\ln\sqrt{3}.$

е) $I[y_1,z_1]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin^2 xdx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos xdx=$

$=\left|\begin{array}{l}\sin x=u;\ du=\cos xdx\\ \cos^2 x=1-u^2\\ u_H=\sin 0=0;\ u_B=\sin\frac{\pi}{2}=1\end{array}\right|=\int\limits_0^1 u^2\left(1-u^2\right)du=\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{15}.$

Надалі будемо розглядати, в основному, функціонал вигляду $I[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx$, областю визначення якого служить клас функцій $C_1[a,b]$, що визначені та неперервні разом з першою похідною на відрізку $[a,b]$.

3.1.2. Екстремум функціоналу

Відстанню нульового порядку між функціями (лініями) $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число $\rho_0=\rho_0(y_1,y_2)=\max\limits_{a\le x\le b}|y_1(x)-y_2(x)|$. При цьому вважається, що розглядувані функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$.

Відстанню першого порядку між функціями (лініями) $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число

$$\rho_1=\rho_1(y_1,y_2)=\max\limits_{a\le x\le b}|y_1(x)-y_2(x)|+\max\limits_{a\le x\le b}|y'_1(x)-y'_2(x)|.$$

При цьому вважається, що розглядувані функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні разом зі своїми першими похідними на відрізку $[a;b]$.

Приклад 2. Знайти відстань першого порядку між кривими $y = y_1(x) = x^2$ і $y = y_2(x) = x^3$ на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання.

$$\rho_1 = \max_{0 \le x \le 1} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{0 \le x \le 1} |y'_1(x) - y'_2(x)|.$$

Розглянемо функції $z_0(x) = y_1(x) - y_2(x) = x^2 - x^3$ і $z_1(x) = y'_1(x) - y'_2(x) = 2x - 3x^2$. Знайдемо їх найбільші та найменші значення на відрізку $[0;1]$:

$$z'_0(x) = 2x - 3x^2;\ z'_0(x) = 0;\ 2x - 3x^2 = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = \frac{2}{3};\ z_0(0) = 0;\ z_0(2/3) = (2/3)^2 -$$

$$-(2/3)^3 = 4/27;\ \ z_0(1) = 0; \quad \max_{0 \le x \le 1} z_0(x) = 4/27; \quad \min_{0 \le x \le 1} z_0(x) = 0;$$

$$z'_1(x) = 2 - 6x;\ z'_1(x) = 0;\ 2 - 6x = 0;\ x_1 = \frac{1}{3};\ \ z_1\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3};\ z_1(0) = 0;\ z_1(1) = -1;$$

$$\max_{0 \le x \le 1} z_1(x) = 1/3; \quad \min_{0 \le x \le 1} z_1(x) = -1.$$

Тоді

$$\max_{0 \le x \le 1} |y_1(x) - y_2(x)| = \max_{0 \le x \le 1} |z_0(x)| = \frac{4}{27};\ \ \max_{0 \le x \le 1} |y'_1(x) - y'_2(x)| = \max_{0 \le x \le 1} |z_1(x)| = 1;\ \rho_1 = \frac{4}{27} + 1 = 1\frac{4}{27}.$$

Нехай D_1 — деякий клас функцій порівняння (підмножина області визначення D) функціоналу $I = I[y]$. Функціонал $I = I[y]$ має в цьому класі D_1 ***абсолютний мінімум (максимум)***, який реалізується функцією $\bar{y}(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$ виконується нерівність

$$I[y(x)] \ge I[\bar{y}(x)] \quad (I[y(x)] \le I[\bar{y}(x)]).$$

Функціонал $I = I[y]$ має в класі D_1 ***локальний або відносний мінімум (максимум)***, який реалізується функцією $y_0(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$, яка близька до функції $y_0(x)$, виконується нерівність

$$I[y(x)] \ge I[y_0(x)] \quad (I[y(x)] \le I[y_0(x)]).$$

Максимуми і мінімуми називаються ***екстремумами***.

Якщо близькість функцій розуміється в смислі відстані нульового порядку, тобто $\rho_0(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — досить мале число, то такий відносний екстремум називається ***сильним***.

Якщо близькість функцій розуміється в смислі відстані першого порядку, тобто $\rho_1(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — досить мале число, то такий відносний екстремум називається ***слабким***.

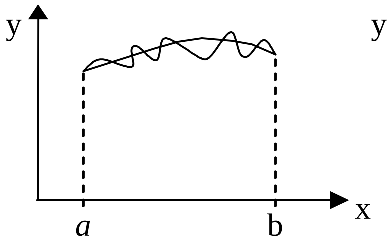

Рис.1

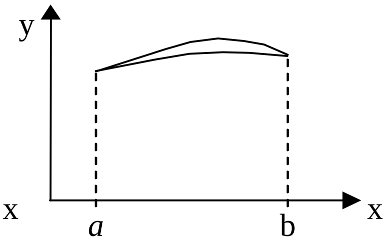

Рис.2

На рис. 1 зображені лінії, близькі в смислі відстані нульового порядку (координати їх близькі, а напрямки дотичних можуть суттєво відрізнятись), а на рис. 2 наведені криві, близькі в смислі відстані першого порядку (близькі не тільки їх координати, а і напрямки дотичних).

Абсолютний екстремум тим паче є відносним екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

Сильний відносний екстремум тим паче є слабким екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

Надалі будемо розглядати слабкий відносний екстремум і слова "слабкий", "відносний" будемо опускати.

Основною задачею варіаційного числення є дослідження функціоналу на екстремум.

3.1.3. Класичні задачі варіаційного числення

Задача про максимальну швидкодію (задача про брахістохрону). Знайти криву (рис.3), розміщену у вертикальній площині, що сполучає дві задані точки $A(a;y_a)$ і $B(b;y_b)$, які не лежать на одній вертикальній прямій, і таку, що матеріальна точка, рухаючись по цій кривій під дією сили тяжіння з точки A без початкової швидкості досягне точки B за найменший проміжок часу (рис.3). Така лінія називається ***брахістохроною***.

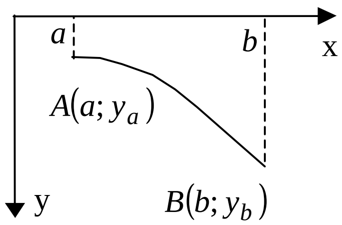

Рис. 3

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $y(x)$ знайти таку, яка доставляє мінімум функціоналу

$$I[y]=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx \quad \text{при крайових умовах} \quad \begin{cases} y(a)=y_a; \\ y(b)=y_b. \end{cases}$$

Задача про геодезичні лінії. Нехай на поверхні $\varphi(x,y,z)=0$ задано дві точки $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$. Серед всіх ліній, які лежать на даній поверхні і з'єднують точки A і B, вибрати ту, дуга AB якої має найменшу довжину. Така найкоротша лінія називається ***геодезичною***.

Геодезична лінія — це найкоротша лінія, яка лежить на даній поверхні і сполучає дві дані точки.

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $x(t), y(t), z(t)$ параметра t знайти такі, які задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x(t), y(t), z(t))=0$ і доставляють мінімум функціоналу

$$I[y,y,z]=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

при крайових умовах

$$x(t_1)=x_1;\ y(t_1)=y_1;\ z(t_1)=z_1;$$
$$x(t_2)=x_2;\ y(t_2)=y_2;\ z(t_2)=z_2.$$

Ізопериметрична задача (задача Дідо). Нехай на осі Ox задано дві точки $A(a;0)$ і $B(b;0)$. Серед всіх ліній заданої довжини l, які з'єднують на площині Oxy ці точки A і B, вибрати таку, що разом з відрізком AB обмежує найбільшу площу (рис.4).

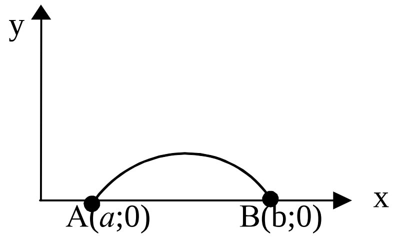

Рис. 4

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $y(x)$ вибрати таку, яка задовольняє рівняння зв'язку $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$ і доставляє максимум функціоналу $I[y] = \int_a^b y(x)dx$ при крайових умовах $\begin{cases} y(a) = 0; \\ y(b) = 0. \end{cases}$

3.1.4. Варіація функції та приріст функціоналу. Неперервність. Лінійний функціонал

Нехай функціонал $I = I[y]$ визначений на класі функцій D, $y(x)$ і $\overline{y}(x)$ — довільні функції даного класу D. Функція, яка дорівнює різниці функцій $\overline{y}(x)$ і $y(x)$, називається ***приростом або варіацією аргументу*** y функціоналу $I[y]$ і позначається δy: $\delta y = \delta y(x) = \overline{y}(x) - y(x)$. Тоді $\overline{y}(x) = y + \delta y$.

Різниця $\Delta I = \Delta I[y, \delta y] = I[y + \delta y] - I[y]$ називається ***приростом функціоналу*** $I[y]$, який відповідає варіації δy аргументу.

Зазначимо, що *похідна варіації функції дорівнює варіації похідної*: $(\delta y)' = \delta y'$.

Дійсно, $(\delta y)' = \left(\overline{y}(x) - y(x)\right)' = \overline{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$.

Якщо нескінченно малому приросту функції δy відповідає нескінченно малий приріст функціоналу ΔI, то такий функціонал $I[y]$ називається ***неперервним***. Точніше, функціонал $I[y]$ називається ***неперервним*** на кривій $y = y(x)$ в смислі відстані k–ого порядку, якщо за довільно заданим $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при виконанні умови $\rho_k(y, y_0) < \delta$ справджується нерівність $|\Delta I| = |I[y] - I[y_0]| < \varepsilon$.

Функціонал $I[y]$ називається ***лінійним***, якщо виконуються умови:

1. Функціонал від алгебраїчної суми функцій дорівнює відповідній алгебраїчній сумі функціоналів: $I[y_1 + y_2] = I[y_1] + I[y_2]$.

2. Сталий множник можна виносити за знак функціоналу: $I[cy] = cI[y]$.

3.1.5. Перша та друга варіації функціоналу

Якщо для довільно малої варіації аргументу δy приріст функціоналу ΔI можна подати у вигляді суми головної частини, лінійної відносно δy, та нескінченно малої вищого порядку порівняно з δy: $\Delta I = L[y, \delta y] + \beta[y, \delta y]$, де $L[y, \delta y]$ — лінійний відносно δy функціонал, $\beta[y, \Delta y]$ — нескінченно малий вищого порядку порівняно з δy функціонал: $\beta[y, \delta y] = o(\delta y)$, тобто, $\beta[y, \delta y] = \gamma[y, \delta y] \cdot \max|\delta y|$, де $\lim\limits_{\max|\delta y| \to 0} \gamma[y, \delta y] = 0$, то сам функціонал $I[y]$ називається ***варійовним***, а головна лінійна відносно δy частина його приросту $L[y,\delta y]$ називається ***диференціалом*** або ***варіацією функціоналу*** і позначається δI: $\delta I = L[y,\delta y]$, $\Delta I = \delta I + \beta[y,\delta y]$, де $\beta[y,\delta y] = o(\delta y)$. (***Перше означення варіації*** функціоналу).

При дослідженні функціоналів варіація функціоналу відіграє роль, аналогічну тій, яку виконує при дослідженні функцій диференціал. В таблиці 1 наведено відповідність понять диференціального та варіаційного числень.

Таблиця 1

№ п/п	Диференціальне числення	Варіаційне числення
1	Аргумент — числова змінна x	Аргумент — числова функція $y(x)$
2	Залежна змінна — числова y	Залежна змінна — числова I
3	Приріст аргументу Δx	Варіація аргументу δy
4	Приріст функції Δy	Приріст функціоналу ΔI
5	Диференціал функції dy	Варіація функціоналу δI
6	Другий диференціал функції $d^2 y$	Друга варіація функціоналу $\delta^2 I$
7	Необхідна умова екстремуму $dy = 0$	Необхідна умова екстремуму $\delta I = 0$
8	Стаціонарна точка функції	Стаціонарна функція (допустима екстремаль) функціоналу
9	Достатня умова екстремуму: $d^2 y > 0 - \min$, $d^2 y < 0 - \max$	Достатня умова екстремуму: $\delta^2 I > 0 - \min$, $\delta^2 I < 0 - \max$

Варіацію δI називають також ***варіацією першого порядку*** або ***першою варіацією функціоналу*** $I[y]$. Варіацію другого порядку введемо аналогічно тому, як це робиться для диференціала другого порядку функції.

Візьмемо довільну допустиму функцію $y = y(x)$ і довільну її варіацію $\delta y = \delta y(x)$ таку, що функція $y + \delta y$ є допустимою функцією. Зафіксуємо y та δy і розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $\overline{y} = y + \alpha\delta y$, де α — деяке число (параметр). Функціонал $I[y]$ на вказаній сім'ї функцій є функцією параметра α: $I[y + \alpha\delta y] = \Phi(\alpha)$.

Розкладемо цю функцію за формулою Тейлора до квадратичного члена включно в околі точки $\alpha = 0$:

$$I[y + \alpha\delta y] = I[y] + \left\{\frac{d}{d\alpha} I[y + \alpha\delta y]\right\}\Bigg|_{\alpha=0} \cdot \alpha + \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2}{d\alpha^2} I[y + \alpha\delta y]\right\}\Bigg|_{\alpha=0} \cdot \alpha^2 + R_2(y,\delta y,\alpha),$$

де залишковий член $R_2(y,\delta y,\alpha)$ є нескінченно малою вищого порядку порівняно з α^2: $R_2(y,\delta y,\alpha) = o(\alpha^2)$.

Тоді варіаціям першого та другого порядку можна дати такі означення.

Варіацією або ***першою варіацією функціоналу*** δI називається значення першої похідної функції $\Phi(\alpha)=I[y+\alpha\delta y]$ при $\alpha=0$: $\delta I=\delta I[y,\delta y]=\frac{d}{d\alpha}I[y+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}$.

(***Друге означення варіації*** функціоналу).

Можна показати, що це означення першої варіації рівносильне наведеному раніше. На практиці зручніше користуватись останнім означенням.

Другою варіацією функціоналу або ***варіацією другого порядку*** $\delta^2 I$ називається значення другої похідної функції $\Phi(\alpha)=I[y+\alpha\delta y]$ при $\alpha=0$: $\delta^2 I=\frac{d^2}{d\alpha^2}I[y+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}$.

Приклад 3. Знайти варіацію функціоналу

а) $I[y]=\int\limits_a^b y^2(x)dx$; б) $I[y]=\int\limits_a^b y(y+\sin x)dx$; в) $I[y]=\int\limits_a^b y^3(x)dx$;

користуючись першим означенням як головної лінійної відносно δy частини приросту ΔI.

Розв'язання. а) Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I=\int\limits_a^b (y(x)+\delta y)^2dx-\int\limits_a^b y^2(x)dx=\int\limits_a^b\left(y^2(x)+2y(x)\delta y+(\delta y)^2\right)dx-\int\limits_a^b y^2(x)dx=$$

$$=\int\limits_a^b y^2(x)dx+2\int\limits_a^b y(x)\delta y dx+\int\limits_a^b(\delta y)^2dx-\int\limits_a^b y^2(x)dx=2\int\limits_a^b y(x)\delta y dx+\int\limits_a^b(\delta y)^2dx.$$

За першим означенням $\delta I=2\int\limits_a^b y(x)\delta y dx.$

б) Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I=\int\limits_a^b(y+\delta y)(y+\delta y+\sin x)dx-\int\limits_a^b y(y+\sin x)dx=\int\limits_a^b\left(y^2+y\delta y+y\sin x+y\delta y+\right.$$

$$\left.+(\delta y)^2+\sin x\cdot\delta y\right)dx-\int\limits_a^b y(y+\sin x)dx=\int\limits_a^b\left(y^2+2y\delta y+y\sin x+(\delta y)^2+\sin x\cdot\delta y-\right.$$

$$\left.-y^2-y\sin x\right)dx=\int\limits_a^b\left(2y\delta y+(\delta y)^2+\sin x\cdot\delta y\right)dx=\int\limits_a^b(2y+\sin x)\delta y dx+\int\limits_a^b(\delta y)^2dx.$$

За першим означенням $\delta I=\int\limits_a^b(2y+\sin x)\delta y dx$.

в) Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I=\int\limits_a^b(y+\delta y)^3dx-\int\limits_a^b y^3dx=$$

$$=\int\limits_a^b\left(y^3+3y^2\delta y+3y(\delta y)^2+(\delta y)^3\right)dx-\int\limits_a^b y^3dx=3\int\limits_a^b y^2\delta y dx+3\int\limits_a^b y(\delta y)^2dx+\int\limits_a^b(\delta y)^3dx.$$

За першим означенням $\delta I=3\int\limits_a^b y^2\delta y dx$.

Приклад 4.Знайти варіацію функціоналу

$$\text{а) } I[y]=\int_a^b y^2(x)dx;\ \text{б) } I[y]=\int_a^b x\sqrt{y}dx;\ \text{в) } I[y]=\int_a^b (y')^2\sin y dx;$$

користуючись другим означенням варіації функціоналу як похідної по параметру.

Розв'язання. У відповідності з другим означенням варіації функціоналу маємо:

а) $\delta I=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b(y+\alpha\delta y)^2dx\Big|_{\alpha=0}=\int_a^b\left((y+\alpha\delta y)^2\right)'_\alpha dx\Big|_{\alpha=0}=\int_a^b 2(y+\alpha\delta y)\delta y dx\Big|_{\alpha=0}=2\int_a^b y\delta y dx;$

б) $\delta I=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b x\sqrt{y+\alpha\delta y}dx\Big|_{\alpha=0}=\int_a^b\left(x\sqrt{y+\alpha\delta y}\right)'_\alpha dx\Big|_{\alpha=0}=$

$$=\int_a^b x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+\alpha\delta y}}\cdot(y+\alpha\delta y)'_\alpha dx\Big|_{\alpha=0}=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{x\delta y}{\sqrt{y+\alpha\delta y}}dx\Big|_{\alpha=0}=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{x\delta y}{\sqrt{y}}dx;$$

в) $\delta I=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b\left((y+\alpha\delta y)'_x\right)^2\sin(y+\alpha\delta y)dx\Big|_{\alpha=0}=\int_a^b\frac{d}{d\alpha}\left((y'+\alpha\delta y')^2\sin(y+\alpha\delta y)\right)dx\Big|_{\alpha=0}=$

$$=\int_a^b\left(2(y'+\alpha\delta y')\delta y'\sin(y+\alpha\delta y)+(y'+\alpha\delta y')^2\cos(y+\alpha\delta y)\cdot\delta y\right)\Big|_{\alpha=0}dx=$$

$$=\int_a^b\left(2y'\sin y\cdot\delta y'+(y')^2\cos y\cdot\delta y\right)dx.$$

3.2. Необхідна умова екстремуму. Диференціальне рівняння екстремалей

3.2.1. Необхідна умова екстремуму функціоналу

Як відомо, необхідна умова екстремуму функції полягає в рівності нулю її диференціала. Аналогічно, для функціоналу справедлива теорема (***необхідна умова екстремуму*** в варіаційній формі):

Якщо функціонал $I[y]$ *має варіацію* δI *і досягає на деякій функції* $y_0=y_0(x)$ *екстремуму, то його варіація на цій функції дорівнює нулю:* $\delta I[y_0,\delta y]=0.$

Доведення. Розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $y_0+\alpha\delta y$, де α — деяке число. На вказаній сім'ї функцій функціонал $I[y]$ є функцією параметра α: $\delta I[y_0,\delta y]=\Phi(\alpha)$, яка згідно з умовою теореми має екстремум при α=0.

У відповідності з необхідною умовою екстремуму функції маємо $\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}=0$, тобто $\frac{d}{d\alpha}I[y_0+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}=0$. Згідно з другим означенням вказана похідна є варіацією функціоналу $\delta I[y_0,\delta y]$. Отже, $\delta I[y_0,\delta y]=0.$

Функції, на яких варіація функціоналу існує і дорівнює нулю, називаються ***стаціонарними функціями*** або ***допустимими екстремалями***.

3.2.2. Задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями. Диференціальне рівняння екстремалей (рівняння Ейлера)

Розглянемо найпростішу задачу варіаційного числення: Знайти мінімум (максимум) функціоналу $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$ при крайових умовах $y(x_1)=y_1$; $y(x_2)=y_2$ серед неперервно диференційовних на відрізку $[x_1;x_2]$ функцій $y=y(x)$, де x_1,x_2,y_1,y_2 — відомі числа.

Оскільки в даній задачі всі допустимі криві, серед яких шукається та, що доставляє екстремум функціоналу, проходять через дві різні нерухомі точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$, то поставлена задача називається ***варіаційною задачею з закріпленими кінцями***.

Теорема. *Допустимі екстремалі функціоналу з закріпленими кінцями* $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$; $y(x_1)=y_1$; $y(x_2)=y_2$, *визначаються як розв'язки диференціального рівняння* $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ *при крайових умовах* $y(x_1)=y_1$; $y(x_2)=y_2$.

Диференціальне рівняння другого порядку $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ називається ***рівнянням Ейлера***. Розв'язки рівняння Ейлера називаються ***екстремалями***, а само рівняння Ейлера — ***диференціальним рівнянням екстремалей***.

Таким чином, в даній задачі ***допустимі екстремалі*** виділяються зі всіх екстремалей врахуванням крайових умов.

Доведення. Необхідна умова екстремуму, з якої знаходяться екстремалі, має вигляд $\delta I[y,\delta y]=0$. Оскільки ця умова повинна виконуватись для будь-якої варіації функції δy, то при закріплених кінцях повинні справджуватись рівності $\delta y(x_1)=0,\ \delta y(x_2)=0$.

Виразимо варіацію функціоналу через функцію $F(x,y,y')$ та її похідні:

$$\delta I=\frac{d}{d\alpha}I[y_0+\alpha\,\delta y]\Big|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}\int\limits_{x_1}^{x_2}[F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{d}{d\alpha}F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\,dx\Bigg|_{\alpha=0}=\int\limits_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot(y+\alpha\delta y)'_\alpha+F'_{y'}\times$$

$$\times(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')(y'+\alpha\delta y')'_\alpha\Big]dx\Big|_{\alpha=0}=\int\limits_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot\delta y+$$

$$+F'_{y'}\,(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot\delta y'\Big]dx\Big|_{\alpha=0}=\int\limits_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y,y')\cdot\delta y+$$

$$+F'_{y'}\,(x,y,y')\cdot\delta y'\Big]dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}F'_y\,\delta y\,dx+\int\limits_{x_1}^{x_2}F'_{y'}\,\delta y'\,dx\ ,\ \text{де}\ F'_y=F'_y\,(x,y,y'),\quad F'_{y'}=F'_{y'}\,(x,y,y').$$

До другого доданка останньої рівності застосуємо інтегрування частинами:

$$\int_{x_1}^{x_2} F'_{y'}\,\delta y'\,dx = \left| \begin{array}{c} u = F'_{y'}; \quad du = \dfrac{d}{dx}F'_{y'}\cdot dx \\ dv = \delta y'\cdot dx = (\delta y)'\,dx; \quad v = \int (\delta y)'\,dx = \delta y \end{array} \right| = F'_{y'}\cdot\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} \delta y\cdot\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot dx = F'_{y'}\cdot\delta y(x_2) - F'_{y'}\cdot\delta y(x_1) - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\cdot dx = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\cdot dx,$$

оскільки $\delta y(x_1) = 0$ і $\delta y(x_2) = 0$.

Тоді варіацію функціоналу можна подати у вигляді

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} F'_y\cdot\delta y\,dx - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y\,dx.$$

На екстремалі варіація функціоналу повинна дорівнювати нулю:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y\,dx = 0,$$

причому для довільної варіації функції δy такої, що $\delta y(x_1) = 0$ і $\delta y(x_2) = 0$. Це можливо лише за умови, що вираз в дужках під знаком інтеграла дорівнює нулю для всіх x із відрізка $[x_1; x_2]$:

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0.$$

<u>Приклад 5.</u> Знайти екстремалі функціоналу:

а) $I[y] = \int_0^1 \left(2y - 2xy' + (y')^2\right)dx$; б) $I[y] = \int_0^{+\infty}\left(a^2y^2 + (y')^2\right)dx$, де $a = const > 0$.

<u>Розв'язання.</u> а)Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = 2y - 2xy' + (y')^2; \quad F'_y = 2; \quad F'_{y'} = -2x + 2y'; \quad \frac{d}{dx}F'_{y'} = \frac{d}{dx}(-2x + 2y') = -2 + 2y''$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду: $2 - (2 + 2y'') = 0$; $y'' - 2 = 0$. Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y' = \int 2dx = 2x + C_1; \quad y = \int (2x + C_1)dx = x^2 + C_1x + C_2.$$

Отже, екстремалями служать функції $\underline{y = x^2 + C_1x + C_2}$, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = a^2y^2 + (y')^2; \; F'_y = 2a^2y; \;\; F'_{y'} = 2y'; \; \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду

$$2a^2y - 2y'' = 0; \quad y'' - a^2y = 0.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$k^2 - \alpha^2 = 0; \; k_{1,2} = \pm\alpha; \quad \underline{y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{-\alpha x}}$$

— шукані екстремалі, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

<u>Приклад 6.</u> Знайти екстремалі функціоналу, що задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

а) $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(9y^2-(y')^2\right)dx;\ y(0)=2;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$

б) $I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(4y\cos x+(y')^2-y^2\right)dx;\ y(0)=0;\ y(\pi)=0;$

в) $I[y]=\int\limits_0^{1}\left(y^2+(y')^2+8y\left(e^{-x}+3e^{2x}\right)\right)dx;\quad y(0)=4;\ y(1)=4e^2;$

г) $I[y]=\int\limits_0^{1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x}dx;\ y(0)=1;\ y(1)=0.$

<u>Розв'язання.</u> а) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=9y^2-(y')^2;\ F'_y=18y;\ F'_{y'}=-2y';\ \frac{d}{dx}F'_{y'}=-2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду

$$18y-(-2y'')=0;\quad y''+9y=0.$$

Розв'яжемо одержане рівняння: $k^2+9=0$; $k_{1,2}=\pm 3i$.

Екстремалями служать функції $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Знайдемо конкретні значення C_1 і C_2 із крайових умов:

$$\begin{cases} C_1\cos 0+C_2\sin 0=2; & C_1=2; \\ C_1\cos\frac{3\pi}{2}+C_2\sin\frac{3\pi}{2}=0; & C_2=0. \end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y=2\cos 3x}$.

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=4y\cos x+(y')^2-y^2;\ F'_y=4\cos x-2y;\ F'_{y'}=2y';\quad \frac{d}{dx}F'_{y'}=2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду:

$$4\cos x-2y-2y''=0;\quad y''+y=2\cos x.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y''+y=0;\quad k^2+1=0;\ k_{1,2}=\pm i;\quad \overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x;$$

$$y_*=(A\cos x+B\sin x)x;\quad y'_*=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x);$$

$$y''_*=2(-A\sin x+B\cos x)-x(A\cos x+B\sin x);$$

$$2(-A\sin x+B\cos x)-x(A\cos x+B\sin x)+$$

$$(A\cos x+B\sin x)x=2\cos x;\quad -A\sin x+B\cos x=\cos x;$$

$$\begin{matrix}\cos x: \\ \sin x:\end{matrix}\begin{cases} B=1; & B=1; \\ -A=0; & A=0;\quad y_*=x\sin x; \end{cases}$$

$$y=\overline{y}+y_*=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x$$

— екстремалі, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Крайові умови дають систему алгебраїчних рівнянь для знаходження C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 + 0\cdot\sin 0 = 0; \\ C_1\cos\pi + C_2\sin\pi + \pi\cdot\sin\pi = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0; \\ C_1 + C_2\cdot 0 = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} C_1 = 0; \\ 0\cdot C_2 = 0. \end{matrix}$$

З останньої рівності випливає, що C_2 може набувати довільних значень. Значить, допустимими екстремалями служать функції $\underline{y = C_2\sin x + x\sin x}$, де C_2 — довільна стала.

Таким чином, варіаційна задача має нескінченну множину розв'язків.

в) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y') = y^2 + (y')^2 + 8y\left(e^{-x} + 3e^{2x}\right);\ F'_y = 2y + 8\left(e^{-x} + 3e^{2x}\right);\ F'_{y'} = 2y';\ \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду:

$$2y + 8\left(e^{-x} + 3e^{2x}\right) - 2y'' = 0; \quad y'' - y = 4e^{-x} + 12e^{2x}.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y' - y = 0;\quad k^2 - 1 = 0;\quad k_{1,2} = \pm 1;\quad \overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-x};\quad f_1(x) = 4e^{-x};\quad y_{*1} = Axe^{-x};$$

$$y'_{*1} = Ae^{-x} - Axe^{-x};\quad y''_{*1} = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} = Axe^{-x} - 2Ae^{-x};$$

$$Axe^{-x} - 2Ae^{-x} - Axe^{-x} = 4e^{-x};\quad -2A = 4;\ A = -2;\quad y_{*1} = -2xe^{-x};\quad f_2(x) = 12e^{2x};\quad y_{*2} = Ae^{2x};$$

$$y'_{*2} = 2Ae^{2x};\quad y''_{*2} = 4Ae^{2x};\quad 4Ae^{2x} - Ae^{2x} = 12e^{2x};\ 3A = 12;\ A = 4;$$

$$y_{*2} = 4e^{2x};\quad y_* = y_{*1} + y_{*2} = -2xe^{-x} + 4e^{2x};\quad y = \overline{y} + y_* = C_1e^x + C_2e^{-x} - 2xe^{-x} + 4e^{2x}$$

— екстремалі, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Використаємо крайові умови для знаходження C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1e^0 + C_2e^{-0} - 2\cdot 0\cdot e^{-0} + 4e^{2\cdot 0} = 4; \\ C_1e^1 + C_2e^{-1} - 2\cdot 1\cdot e^{-1} + 4e^{2\cdot 1} = 4e^2; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1e + C_2e^{-1} = 2e^{-1}; \end{cases}$$

$$C_1 = C_2;\ -C_2\cdot e + C_2\cdot\frac{1}{e} = 2\cdot\frac{1}{e};\ C_2\left(-e^2 + 1\right) = 2;\ C_2 = \frac{2}{1-e^2};\quad C_1 = -\frac{2}{1-e^2} = \frac{2}{e^2-1}.$$

Отже, допустима екстремаль

$$\underline{y = \frac{2}{e^2-1}e^x + \frac{2}{1-e^2}e^{-x} - 2xe^{-x} + 4e^{2x}.}$$

г) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x};\ F'_y = 0;\ F'_{y'} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+(y')^2}}2y' =$$

$$= \frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}};\quad \frac{d}{dx}F'_{y'} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}}\right).$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду:

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}}\right) = 0.$$

Звідси

$$y' = \frac{C_1 x}{\sqrt{1-C_1^2x^2}}\ ;\quad y = \int \frac{C_1 x dx}{\sqrt{1-C_1^2x^2}} = \begin{vmatrix} u = 1-C_1^2x^2; \\ du = -2C_1^2 x dx \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2C_1}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{C_1}\sqrt{u} + C_2 = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1-C_1^2x^2} + C_2.$$

Отже, $y = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1-C_1^2x^2} + C_2$ або в неявній формі $x^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{C_1^2}$ - рівняння екстремалей.

Як бачимо, екстремалями служить сім'я кіл.

Використовуючи крайові умови, знаходимо C_1 і C_2:

$$\begin{cases} 0^2 + (1-C_2)^2 = \frac{1}{C_1^2}; \\ 1^2 + (0-C_2)^2 = \frac{1}{C_1^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 2C_2 + C_2^2 = \frac{1}{C_1^2}; \\ 1 + C_2^2 = \frac{1}{C_1^2}; \end{cases} \quad \begin{matrix} -2C_2 = 0; \quad C_2 = 0; \\ \frac{1}{C_1^2} = 1; \quad C_2 = 1. \end{matrix}$$

Тоді $\underline{x^2 + y^2 = 1}$ —допустима екстремаль.

<u>Приклад 7</u>. Визначити форму твердого тіла, що рухається в потоці газу з найменшим опором. Вважати шукане тіло тілом обертання.

<u>Розв'язання</u>. З фізичних міркувань випливає, що задача зводиться до мінімізації сили опору

$$I[y] = 4\pi\rho v^2 \int_0^l (y')^3 y dx \text{ при крайових умовах } \begin{cases} y(0) = 0; \\ y(l) = R, \end{cases},$$

де ρ — густина газу, ν —швидкість газу відносно тіла, l — довжина тіла обертання, R — його поперечний радіус.

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = (y')^3 y; \quad F'_y = (y')^3; \quad F'_{y'} = y \cdot 3(y')^2 = 3y(y')^2;$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = \frac{d}{dx}\left(3y(y')^2\right) = 3\left(y' \cdot (y')^2 + y \cdot 2y' \cdot y''\right) = 3(y')^3 + 6y \cdot y' \cdot y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду:

$$(y')^3 - \left(3(y')^3 + 6y \cdot y' \cdot y''\right) = 0; \quad 3y \cdot y' \cdot y'' + (y')^3 = 0.$$

Ясно, що $y \neq const$, тоді $y' \neq 0$. Останнє рівняння спрощується: $3yy'' + (y')^2 = 0.$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y' = p, \quad p = p(y); \quad y'' = p' \cdot p; \quad p' = \frac{dp}{dy}; \quad 3y \cdot p' \cdot p + p^2 = 0 \quad \Big| \ : p = y' \neq 0; \quad 3y \cdot p' + p = 0;$$

$$3y\frac{dp}{dy} = -p; \quad \int\frac{dp}{p} = -\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y}; \quad \ln|p| = -\frac{1}{3}\ln|y| + \ln|C_1|;$$

$$p = C_1 y^{-\frac{1}{3}}; \quad y' = C_1 y^{-\frac{1}{3}}; \quad \frac{dy}{dx} = C_1 y^{-\frac{1}{3}}; \quad \int y^{\frac{1}{3}} dy = C_1 \int dx; \quad \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} = C_1 x + C_2; \ y = \left(\frac{4(C_1 x + C_2)}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$$

— екстремалі, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Використавши крайові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{4(C_1\cdot 0+C_2)}{3}\right)^{\frac{3}{4}}=0; \qquad C_2=0; \\ \left(\dfrac{4(C_1\cdot l+C_2)}{3}\right)^{\frac{3}{4}}=R; \qquad \dfrac{3}{4}C_1 l=R^{\frac{4}{3}}; \quad C_1=\dfrac{3}{4}R^{\frac{4}{3}}l^{-1}. \end{cases}$$

Тоді $y=\left(\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{4}R^{\frac{4}{3}}l^{-1}x\right)^{\frac{3}{4}}=R\left(\dfrac{x}{l}\right)^{\frac{3}{4}}$ — допустима екстремаль.

Оскільки допустима екстремаль єдина і з фізичних міркувань випливає, що поставлена задача має розв'язок, то функція $\underline{y=R(x/l)^{\frac{3}{4}}}$ визначає форму тіла обертання з найменшим опором.

3.2.3. Диференціальне рівняння екстремалей функціоналу, в який входять похідні вищих порядків (рівняння Ейлера–Пуассона)

Ставиться задача знаходження мінімуму (максимуму) функціоналу

$$I[y]=\int_{x_1}^{x_2}F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)dx$$

при крайових умовах

$$y^{(i)}(x_1)=y_1^{(i)},\ y^{(i)}(x_2)=y_2^{(i)},\ i=\overline{0,n-1}.$$

Із необхідної умови екстремуму $\delta I=0$ при $\delta y(x_1)=0$ і $\delta y(x_2)=0$ випливає, що допустимі екстремалі є розв'язками диференціального рівняння $F_y'+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\dfrac{d^i}{dx^i}F'_{y^{(i)}}=0$ при крайових умовах $y^{(i)}(x_1)=y_1^{(i)},\ y^{(i)}(x_2)=y_2^{(i)},\ i=\overline{0,n-1}.$

Розв'язки останнього диференціального рівняння називаються ***екстремалями***, а саме рівняння називається диференціальним рівнянням екстремалей або ***рівнянням Ейлера–Пуассона***.

<u>Приклад 8.</u> Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

а) $I[y]=\int_0^1\left(y^2+2(y')^2+(y'')^2\right)dx;\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\quad y(1)=0,\ y'(1)=-sh1;$

б) $I[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((y'')^2-y^2\right)dx;\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1;$

в) $I[y]=\int_{-1}^{0}\left(240y-(y''')^2\right)dx;\ y(-1)=1,\ y'(-1)=-\dfrac{9}{2},\quad y''(-1)=16,\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$

<u>Розв'язання.</u> а) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера–Пуассона:

$$F(x,y,y',y'')=y^2+2(y')^2+(y'')^2;\ \ F_y'=2y;\ \ F_{y'}'=2\cdot 2y'=4y';\ \ F_{y''}'=2y'';$$

$$\frac{d}{dx}F_{y'}'=\frac{d}{dx}(4y')=4y'';\ \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}'=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(2y'')\right)=\frac{d}{dx}(2y''')=2y^{IV}.$$

Тоді рівняння Ейлера–Пуассона

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}=0$$

набуває вигляду $2y-4y''+2y^{IV}=0;\ y^{IV}-2y''+y=0.$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$k^4-2k^2+1=0;\ \left(k^2-1\right)^2=0;\ k_1=k_2=1;\ k_3=k_4=-1;\quad y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{-x}+C_4xe^{-x}$$

— екстремалі, де C_1,C_2,C_3,C_4 — довільні сталі.

Допустимі екстремалі знайдемо, визначивши конкретні значення C_1,C_2,C_3,C_4 із крайових умов:

$$y'=C_1e^x+C_2e^x+C_2xe^x-C_3e^{-x}+C_4e^{-x}-C_4xe^{-x};$$

$$\begin{cases}0=C_1e^0+C_2\cdot 0e^0+C_3e^{-0}+C_4\cdot 0e^{-0};\\ 1=C_1e^0+C_2e^0+C_2\cdot 0e^0-C_3e^{-0}+C_4e^{-0}-C_4\cdot 0e^{-0};\\ 0=C_1e^1+C_2\cdot 1e^1+C_3e^{-1}+C_4\cdot 1e^{-1};\\ -sh1=C_1e^1+C_2e^1+C_2\cdot 1e^1-C_3e^{-1}+C_4e^{-1}-C_4\cdot 1e^{-1};\end{cases}$$

$$\begin{cases}0=C_1+C_3;\\ 1=C_1+C_2-C_3+C_4;\\ 0=C_1e+C_2e+C_3e^{-1}+C_4e^{-1};\\ -sh1=C_1e+2C_2e-C_3e;\end{cases}\qquad \begin{matrix}C_1=\frac{1}{2}; & C_3=-\frac{1}{2};\\ C_2=-\frac{1}{2}; & C_4=\frac{1}{2}.\end{matrix}$$

Отже, допустима екстремаль

$$y=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{-x}=\underline{(1-x)sh\,x}.$$

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера–Пуассона:

$$F(x,y,y',y'')=(y'')^2-y^2;\ F'_y=-2y;\ F'_{y'}=0;\ F'_{y''}=2y'';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=0;\ \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}=2y^{IV}.$$

Тоді рівняння Ейлера–Пуассона

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}=0$$

набуває вигляду $-2y-0+2y^{IV}=0;\ y^{IV}-y=0.$

Розв'яжемо останнє рівняння:

$$k^4-1=0;\ \left(k^2-1\right)\left(k^2+1\right)=0;\ \left[\begin{matrix}k^2-1=0;\ k_{1,2}=\pm 1;\\ k^2+1=0;\ k_{3,4}=\pm i;\end{matrix}\right.\quad y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

— екстремалі.

Конкретні значення C_1,C_2,C_3,C_4 знайдемо з крайових умов:

$$y'=C_1e^x-C_2e^{-x}-C_3\sin x+C_4\cos x;$$

$$\begin{cases}1=C_1+C_2+C_3;\\ 0=C_1-C_2+C_4;\\ 0=C_1e^{\frac{\pi}{2}}+C_2e^{-\frac{\pi}{2}}+C_4;\\ -1=C_1e^{\frac{\pi}{2}}-C_2e^{-\frac{\pi}{2}}-C_3;\end{cases}\qquad \begin{matrix}C_1=0; & C_3=1;\\ C_2=0; & C_4=0.\end{matrix}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y = \cos x.}$

в) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера–Пуассона:

$$F(x, y, y', y'', y''') = 240y - (y''')^2;\ F_y' = 240;\ F_{y'}' = 0;\ F_{y''}' = 0;$$

$$F_{y'''}' = -2y''';\ \frac{d}{dx}F_{y'}' = 0;\ \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}' = 0;\ \frac{d^3}{dx^3}F_{y'''}' = -2y^{(6)}.$$

Тоді рівняння Ейлера–Пуассона

$$F_{y'}' - \frac{d}{dx}F_{y'}' + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}' - \frac{d^3}{dx^3}F_{y'''}' = 0$$

набуває вигляду $240 - 0 + 0 - \left(-2y^{(6)}\right) = 0;\ y^{(6)} + 120 = 0.$

Розв'яжемо останнє рівняння:

$$y^{(6)} = -120;\ \ y^{(5)} = -120x + C_1;\qquad y^{(4)} = \int(-120x + C_1)dx = -60x^2 + C_1x + C_2;$$

$$y^{(3)} = \int\left(-60x^2 + C_1x + C_2\right)dx = -20x^3 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3;$$

$$y^{(2)} = \int\left(-20x^3 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3\right)dx = -5x^4 + C_1\frac{x^3}{6} + \ C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4;$$

$$y^{(1)} = \int\left(-5x^4 + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4\right)dx = -x^5 + C_1\frac{x^4}{24} + C_2\frac{x^3}{6} + C_3\frac{x^2}{2} + C_4x + C_5;$$

$$y = \int\left(-x^5 + C_1\frac{x^4}{24} + C_2\frac{x^3}{6} + C_3\frac{x^2}{2} + C_4x + C_5\right)dx = -\frac{x^6}{6} +$$

$$+ C_1\frac{x^5}{120} + C_2\frac{x^4}{24} + C_3\frac{x^3}{6} + C_4\frac{x^2}{2} + C_5x + C_6$$

— екстремалі, де $C_1, C_2, \ldots, C_6$ — довільні сталі.

Використавши крайові умови, знайдемо значення $C_1, C_2, \ldots, C_6$.

Спочатку із крайових умов $y^{(i)}(0) = 0,\ i = \overline{0,2}$ визначаємо $C_4 = C_5 = C_6 = 0$. Тоді на основі крайових умов

$$y(-1) = 1;\ y'(-1) = -\frac{9}{2};\ y''(-1) = 16$$

одержуємо систему для знаходження C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} 1 = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{C_1}{120} + \dfrac{C_2}{24} - \dfrac{C_3}{6}; \\ -\dfrac{9}{2} = 1 + \dfrac{C_1}{24} - \dfrac{C_2}{6} + \dfrac{C_3}{2}; \\ 16 = -5 - \dfrac{C_1}{6} + \dfrac{C_2}{2} - C_3; \end{cases} \quad \begin{matrix} C_3 = -1; & C_2 = 0; \\ C_1 = -120. & \end{matrix}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y = -\dfrac{x^6}{6} - x^5 - \dfrac{x^3}{6}.}$

3.2.4. Система диференціальних рівнянь екстремалей функціоналу, що залежить від кількох функцій (система рівнянь Ейлера–Лагранжа)

Ставиться задача знаходження мінімуму (максимуму) функціоналу

$$I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)dx$$

при крайових умовах $y_i(x_1) = y_{i1},\ y_i(x_2) = y_{i2},\ i = \overline{1, n}.$

Із необхідної умови екстремуму $\delta I = 0$ при $\delta y_i(x_1) = 0$ і $\delta y_i(x_2) = 0$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ випливає, що допустимі екстремалі є розв'язками системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} F'_{y_1} - \dfrac{d}{dx}F'_{y'_1} = 0; \\ F'_{y_2} - \dfrac{d}{dx}F'_{y'_2} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F'_{y_n} - \dfrac{d}{dx}F'_{y'_n} = 0 \end{cases} \text{ при крайових умовах } \begin{cases} y_i(x_1) = y_{i1}, \\ y_i(x_2) = y_{i2}, \end{cases} i = \overline{1, n}.$$

Розв'язки останньої диференціальної системи називаються ***екстремалями***, а сама система – системою диференціальних рівнянь екстремалей або ***системою рівнянь Ейлера–Лагранжа***.

Приклад 9. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

а) $I[y, z] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2z - 4y^2 + (y')^2 - (z')^2\right)dx; \quad y(0) = 0; \quad z(0) = 0;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;\ z\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{16};$

б) $I[y, z] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((y')^2 + (z')^2 - 2yz\right)dx; \quad y(0) = 0; \quad z(0) = 0;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;\ z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Розв'язання. а) Знайдемо похідні, що входять в систему рівнянь Ейлера–Лагранжа:

$$F(x, y, z, y', z') = 2z - 4y^2 + (y')^2 - (z')^2; \quad F'_y = -8y;$$

$$F'_{y'} = 2y';\ \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y'';\ F'_z = 2;\ F'_{z'} = -2z';\ \frac{d}{dx}F'_{z'} = -2z''.$$

Тоді система рівнянь Ейлера–Лагранжа

$$\begin{cases} F'_y - \dfrac{d}{dx}F'_{y'} = 0; \\ F'_z - \dfrac{d}{dx}F'_{z'} = 0 \end{cases}$$

набуває вигляду: $\begin{cases} -8y - 2y'' = 0; \\ 2 - (-2z'') = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + 4y = 0; \\ z'' + 1 = 0. \end{cases}$

Розв'яжемо останню систему:

$$y''+4y=0;\ k^2+4=0;\ k_{1,2}=\pm 2i;\ \ \underline{y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x};$$

$$z''=-1;\ z'=\int(-1)dx=-x+C_3;\ z=\int(-x+C_3)dx=\underline{-\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4}.$$

Конкретні значення довільних сталих C_1, C_2, C_3, C_4 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{array}{ll} y(0)=0: \\ z(0)=0: \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1: \\ z\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi^2}{16}: \end{array} \begin{cases} 0=C_1; & C_1=0; \\ 0=C_4; & C_4=0; \\ 1=C_2; & C_2=1; \\ -\frac{\pi^2}{16}=-\frac{\pi^2}{32}+C_3\frac{\pi}{4}; & C_3=-\frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

Отже, допустимі екстремалі

$$\underline{\begin{cases} y=\sin 2x; \\ z=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\pi x}{8}. \end{cases}}$$

б) Знайдемо похідні, що входять в систему рівнянь Ейлера–Лагранжа:

$$F(x,y,z,y',z')=(y')^2+(z')^2-2yz;\quad F'_y=-2z;$$

$$F'_{y'}=2y';\ \frac{d}{dx}F'_{y'}=2y'';\ F'_z=-2y;\ F'_{z'}=2z';\ \frac{d}{dx}F'_{z'}=2z''.$$

Тоді система рівнянь Ейлера–Лагранжа

$$\begin{cases} F'_y-\dfrac{d}{dx}F'_{y'}=0; \\ F'_z-\dfrac{d}{dx}F'_{z'}=0 \end{cases}$$

набуває вигляду $\begin{cases} -2z-2y''=0; \\ -2y-2z''=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y''+z=0; \\ z''+y=0. \end{cases}$

Розв'яжемо останню систему зведенням до одного диференціального рівняння вищого порядку:

$$y'''+z'=0;\ y^{IV}+z''=0;\ z''=-y;\ y^{IV}-y=0;\ k^4-1=0;\ (k^2+1)(k^2-1)=0;$$

$$k^2-1=0\ \textit{або}\ k^2+1=0;\ k_{1,2}=\pm1;\ k_{3,4}=\pm i;\ \ y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x;$$

$$z=-y'';\ y'=C_1e^x-C_2e^{-x}-C_3\sin x+C_4\cos x;\ \ y''=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x;$$

$$z=-C_1e^x-C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Використавши крайові умови, знайдемо C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{array}{l} y(0)=0: \\ z(0)=0: \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1: \\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=1: \end{array} \begin{cases} 0=C_1+C_2+C_3; \\ 0=-C_1-C_2+C_3; \\ 1=C_1e^{\frac{\pi}{2}}+C_2e^{-\frac{\pi}{2}}+C_4; \\ 1=-C_1e^{\frac{\pi}{2}}-C_2e^{-\frac{\pi}{2}}+C_4; \end{cases} \quad \begin{array}{l} C_3=0;\ C_4=1; \\ C_1=0;\ C_2=0. \end{array}$$

Отже, допустимі екстремалі: $\underline{\begin{cases} y=\sin x; \\ z=\sin x. \end{cases}}$

3.2.5. Канонічні рівняння екстремалей

Розглянемо систему рівнянь Ейлера–Лагранжа

$$F'_{y_i} - \frac{d}{dx} F'_{y'_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Позначимо $p_i = F'_{y'_i}$, $i = \overline{1, n}$. Функції $y_i, p_i, i = \overline{1, n}$ називаються ***канонічними змінними*** для функціоналу

$$I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) dx.$$

При цьому змінні y_i і p_i називаються ***спряженими***.

Введемо так звану ***функцію Гамільтона (гамільтоніан)***

$$H = H(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) =$$

$$= -F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) + \sum_{i=1}^{n} y'_i \, p_i.$$

Знайдемо частині похідні гамільтоніана H по y_i та $p_i, i = \overline{1, n}$:
$\frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = y'_i, \quad i = \overline{1, n}.$

Оскільки $y'_i = \frac{dy_i}{dx}$, а з системи рівнянь Ейлера–Лагранжа $\frac{\partial F}{\partial y_i} = F'_{y_i} = \frac{d}{dx} F'_{y'_i} = \frac{dp_i}{dx}$, то мають місце співвідношення:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}, & i = \overline{1, n}; \\ \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, & i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Одержана система називається ***канонічною системою рівнянь екстремалей*** для функціоналу

$$I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) dx.$$

3.3. Достатні умови екстремуму. Умовний екстремум. Варіаційні принципи

3.3.1. Достатні умови екстремуму

В багатьох варіаційних задачах існування та характер екстремуму очевидні з геометричного чи фізичного змісту задачі. Якщо при цьому допустима екстремаль єдина, то вона і буде розв'язком варіаційної задачі. В загальному випадку для того, щоб встановити наявність і характер екстремуму, треба скористатись достатніми умовами екстремуму.

Нехай функція $y_0(x)$ є допустимою екстремаллю функціоналу $I[y]$ в розглядуваному класі допустимих функцій D_1, тобто на цій кривій виконується необхідна умова екстремуму $\delta I[y_0, \delta y] = 0$. Характер екстремуму (максимум чи мінімум) визначається знаком приросту функціоналу: якщо $\Delta I \geq 0$, то функціонал має мінімум, а якщо $\Delta I \leq 0$, то — максимум. Оскільки на допустимій екстремалі перша варіація дорівнює нулю $\delta I[y_0, \delta y] = 0$, то знак приросту функціоналу ΔI для довільної досить малої варіації аргументу δy визначається знаком другої варіації функціоналу $\delta^2 I$.

Достатня умова екстремуму у варіаційній формі: *якщо на розглядуваному класі допустимих функцій D_1 для довільної досить малої варіації функції δy на допустимій екстремалі $y_0(x)$ друга варіація функціоналу $\delta^2 I$ додатня $\delta^2 I > 0$, то на цій екстремалі функціонал має мінімум, якщо друга варіація функціоналу $\delta^2 I$ від'ємна $\delta^2 I < 0$, то — максимум, якщо ж друга варіація функціоналу $\delta^2 I$ набуває значень обох знаків, то екстремуму немає.*

При певних умовах знак другої варіації $\delta^2 I$ функціоналу $I[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$ визначається знаком другої похідної $F''_{y'y'}$. Звідси випливають ***достатні умови Лежандра***:

1. ***Посилені достатні умови Лежандра слабкого екстремуму***: *якщо на допустимій екстремалі $y_0(x)$ виконується нерівність $F''_{y'y'}\big|_{y=y_0(x)} > 0$, то на цій екстремалі функціонал має слабкий мінімум, а якщо нерівність $F''_{y'y'}\big|_{y=y_0(x)} < 0$, то — слабкий максимум.*

2. ***Достатні умови Лежандра сильного екстремуму***: *якщо в усіх точках $(x; y)$, які близькі до допустимої екстремалі $y_0(x)$, виконується нерівність $F''_{y'y'} \geq 0$ $\left(F''_{y'y'} \leq 0\right)$ при довільних значеннях y', то ця екстремаль реалізує сильний мінімум (сильний максимум).*

Приклад 10. Користуючись достатніми умовами Лежандра, дослідити на екстремум функціонал при заданих крайових умовах:

а) $I[y] = \int\limits_1^e \left(x + 2y + \dfrac{(y')^2 x}{2} \right) dx;\ y(1) = 3;\ y(e) = 2e + 1.$

б) $I[y] = \int\limits_0^1 e^x \left(2y^2 + (y')^2\right) dx;\ y(0) = 1;\ y(1) = e.$

в) $I[y] = \int\limits_0^e (e + x)(y')^2 dx;\ y(0) = 1 - \ln 2;\ y(e) = 1.$

г) $I[y] = \int\limits_0^e \dfrac{e^{-y}}{y'} dx;\ \ y(0) = 1;\ y(e) = 1 + \ln 2.$

Розв'язання. а) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = x + 2y + \frac{(y')^2 x}{2};\ F'_y = 2;\ F'_{y'} = \frac{1}{2} \cdot 2y'x = y'x;\quad \frac{d}{dx} F'_{y'} = y''x + y'.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \dfrac{d}{dx} F'_{y'} = 0$ набуває вигляду

$$2-y''x-y'=0;\ y''+\frac{1}{x}y'=\frac{2}{x}.$$

Розв'яжемо останнє рівняння зниженням порядку:

$$p=y';\ y''=p';\ p'+\frac{1}{x}p=\frac{2}{x};\ p=uv;\ p'=u'v+v'u;\ u'v+v'u+\frac{1}{x}uv=\frac{2}{x};$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{1}{x}v\right)=\frac{2}{x};\quad v'+\frac{1}{x}v=0;\ \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x};\ \ln|v|=-\ln|x|;\ v=\frac{1}{x};$$

$$u'\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x};\ u'=2;\ u=2x+C_1;\ \ p=(2x+C_1)\cdot\frac{1}{x};\ y'=(2x+C_1)\cdot\frac{1}{x};$$

$$y=\int\left(2+C_1\frac{1}{x}\right)dx=2x+C_1\ln|x|+C_2 \text{ — екстремалі.}$$

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{cases}3=2+C_2; & C_2=1;\\ 2e+1=2e+C_1+C_2; & C_1=0.\end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y=2x+1}$.

Оскільки $F''_{y'y'}=x\geq 0$ при $x\in[1;e]$ і довільних значеннях y', то функціонал має сильний мінімум. Знайдемо його значення:

$$y'=2;\ F(x,y,y')=x+2(2x+1)+\frac{(2)^2x}{2}=7x+2;$$

$$I_{\min}=I[2x+1]=\int_1^e(7x+2)dx=\left.\frac{7x^2}{2}\right|_1^e+\left.2x\right|_1^e=\underline{\frac{7e^2+4e-11}{2}}.$$

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=e^x\left(2y^2+(y')^2\right);\ F'_y=4e^xy;\ F'_{y'}=2e^xy';\ \ \frac{d}{dx}F'_{y'}=2\left(e^xy'+e^xy''\right)=2e^x(y'+y'').$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду

$$4e^xy-2e^x(y'+y'')=0;\ y''+y'-2=0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння:

$$k^2+k-2=0;\ k_1=1;\ k_2=-2;\ y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$$

— екстремалі.

Використавши крайові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{cases}1=C_1+C_2; & C_1=1;\\ e=C_1e+C_2e^{-2}; & C_2=0.\end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y=e^x}$.

Оскільки $F''_{y'y'}=2e^x\geq 0$ при $x\in[0;1]$ і довільних значеннях y', то функціонал має сильний мінімум. Знайдемо його значення:

$$y'=e^x;\ F(x,y,y')=e^x\left(2\cdot e^{2x}+e^{2x}\right)=3e^{3x};\ \ I_{\min}=I\left[e^x\right]=\int_0^1 3e^{3x}dx=\left.e^{3x}\right|_0^1=\underline{e^3-1}.$$

в) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=(e+x)(y')^2;\ F'_y=0;\ F'_{y'}=2(e+x)y';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=2(y'+(e+x)y'').$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду

$$-2(y'+(e+x)y'')=0;\ (e+x)y''+y'=0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку:

$$y'=p;\ y''=p';\ (e+x)p'+p=0;\ \int\frac{dp}{p}=-\int\frac{dx}{e+x};$$

$$\ln|p|=-\ln|e+x|+\ln C_1;\ p=\frac{C_1}{e+x};\ y'=\frac{C_1}{e+x};$$

$y=\int\frac{C_1}{e+x}dx=C_1\ln|e+x|+C_2$ — екстремалі.

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{cases}1-\ln 2=C_1+C_2; & C_1=1;\\ 1=C_1(1+\ln 2)+C_2; & C_2=-\ln 2.\end{cases}$$

Отже, $y=\ln(e+x)-\ln 2=\underline{\ln\frac{e+x}{2}}$ — допустима екстремаль.

Оскільки $F''_{y'y'}=2(e+x)\geq 0$ при $x\in[0;e]$ і довільних значеннях y', то функціонал має сильний мінімум. Знайдемо його значення:

$$y'=\frac{1}{e+x};\ F(x,y,y')=(e+x)\left(\frac{1}{e+x}\right)^2=\frac{1}{e+x};\ I_{\min}=I\left[\ln\frac{e+x}{2}\right]=\int_0^e\frac{1}{e+x}dx=\ln|e+x|\Big|_0^e=\underline{\ln 2}.$$

г) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=\frac{e^{-y}}{y'};\ F'_y=-\frac{e^{-y}}{y'};\ F'_{y'}=-\frac{e^{-y}}{(y')^2};$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=-e^{-y}(-1)\cdot y'\cdot\frac{1}{(y')^2}-e^{-y}\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(y')^3}\cdot y''=\frac{e^{-y}}{y'}+\frac{2e^{-y}\cdot y''}{(y')^3}.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду

$$-\frac{e^{-y}}{y'}-\frac{e^{-y}}{y'}-\frac{2e^{-y}\cdot y''}{(y')^3}=0;\quad y''+(y')^2=0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку:

$$y'=p;\ p=p(y);\ y''=p'p;\ p'\cdot p+p^2=0;\ p'=-p;\ \int\frac{dp}{p}=-\int dy;$$

$$\ln|p|=-y+\ln C_1;\ p=C_1e^{-y};\ y'=C_1e^{-y};\ \int e^y dy=C_1\int dx;$$

$e^y=C_1x+C_2;\ y=\ln(C_1x+C_2)$ — екстремалі.

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{cases}1=\ln C_2; & C_2=e;\\ 1+\ln 2=\ln(C_1e+C_2); & C_1=1.\end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y=\ln(x+e)}$.

Оскільки друга похідна $F''_{y'y'}=2e^{-y}\cdot(y')^{-3}$ залежить від y', то скористаємося посиленими достатніми умовами Лежандра слабкого екстремуму.

На допустимій екстремалі $y=\ln(x+e)$ маємо:

$$y' = \frac{1}{x+e};\ F''_{y'y'}\Big|_{y=\ln(x+e)} = 2e^{-\ln(x+e)}\left(\frac{1}{x+e}\right)^{-3} = 2(x+e)^2 > 0$$

при $x \in [0; e]$.

Отже, на цій екстремалі функціонал досягає слабкого мінімуму. Знайдемо його значення:

$$F(x, y, y') = e^{-y} \cdot (y')^{-1} = e^{-\ln(x+e)} \cdot \left(\frac{1}{x+e}\right)^{-1} = 1;\ I_{\min} = I[\ln(x+e)] = \int_0^e 1dx = e.$$

3.3.2. Умовний екстремум. Задача Лагранжа. Ізопериметрична задача

Варіаційною ***задачею на умовний екстремум*** називається задача дослідження на екстремум функціоналу, коли на функції, від вибору яких залежить цей функціонал, крім крайових, накладено інші додаткові умови, що звуться ***зв'язками***.

В залежності від їх характеру зв'язки поділяються на: а) ***алгебраїчні*** або ***скінченні (голономні)***; б) ***диференціальні*** або ***неголономні***; в) ***інтергральні*** або ***ізопериметричні***.

За допомогою ***методу множників Лагранжа*** задачі на умовний екстремум зводяться до задач на безумовний екстремум.

Задача Лагранжа: знайти функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, які доставляють мінімум (максимум) функціоналу

$$I[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)dx$$

і задовольняють рівняння зв'язку

$$\varphi_j(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) = 0, \quad j = \overline{1, m},\ m < n,$$

а також крайові умови

$$y_i(x_1) = y_{i1}, \quad y_i(x_2) = y_{i2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Припускається, що рівняння зв'язку незалежні, а крайові умови їх задовольняють.

<u>Теорема</u>. *Якщо функції* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, *є допустимими екстремалями сформульованої задачі Лагранжа, то існують такі* <u>*функції*</u> $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$, ***(множники Лагранжа)****, що функції* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, *служать безумовними допустимими екстремалями для допоміжного функціоналу*

$$\overline{I}[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \overline{F}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)dx,$$

де $\overline{F}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j$ *— допоміжна функція* ***(функція Лагранжа)****.*

<u>Правило</u>. Згідно з наведеною теоремою для знаходження допустимих екстремалей задачі Лагранжа необхідно:

1. Скласти функцію Лагранжа $\overline{F} = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j$ і відповідний допоміжний функціонал $\overline{I} = \int_{x_1}^{x_2} \overline{F} dx$ з невизначеними функціями $\lambda_j(x),\ j = \overline{1,.m}$ — множниками Лагранжа.

2. Скласти систему рівнянь Ейлера–Лагранжа для допоміжного функціоналу:

$$\overline{F}'_{y_i} - \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'_i} = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

приєднати до неї рівняння зв'язку

$$\varphi_j = 0, \quad j = \overline{1,m}$$

і з одержаної об'єднаної системи знайти екстремалі $y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n),\ i = \overline{1,n}$, де $C_i,\ i = \overline{1,n}$ — довільні сталі, а також, якщо потрібно, множники Лагранжа $\lambda_j = \lambda_j(x, C_1, \ldots, C_n),\ j = \overline{1,m}$.

3. Використовуючи крайові умови, знайти конкретні значення $C_i,\ i = \overline{1,n}$ і допустимі екстремалі.

<u>Приклад 11.</u> Знайти екстремалі функціоналу $I[y,z] = \int_0^1 (y^2 + z^2) dx$ на зв'язку $y' = 3y + 4z$ при крайових умовах $y(0) = 1,\ y(1) = e^5$.

<u>Розв'язання</u>. Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\varphi = y' - 3y - 4z;\ \ \overline{F} = F + \lambda\varphi;\ \overline{F} = y^2 + z^2 + \lambda(y' - 3y - 4z);\ \ \overline{I} = \int_0^1 \overline{F} dx = \int_0^1 y^2 + z^2 + \lambda(y' - 3y - 4z) dx;$$

$$\lambda = \lambda(x).$$

Складемо систему рівнянь Ейлера–Лагранжа:

$$\begin{cases} \overline{F}'_y - \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 0; \\ \overline{F}'_z - \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{z'} = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} \overline{F}'_y = 2y - 3\lambda; & \overline{F}'_{y'} = \lambda; & \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = \lambda'; \\ \overline{F}'_z = 2z - 4\lambda; & \overline{F}'_{z'} = 0; & \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{z'} = 0; \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2y - 3\lambda - \lambda' = 0; \\ 2z - 4\lambda = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda' = 2y - 3\lambda; \\ z = 2\lambda. \end{cases}$$

Враховуючи рівняння зв'язку, маємо систему:

$$\begin{cases} \lambda' = 2y - 3\lambda; \\ z = 2\lambda; \\ y' = 3y + 4z. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему зведенням до диференціального рівняння вищого порядку:

$$z = 2\lambda; \begin{cases} \lambda' = 2y - 3\lambda; \\ y' = 3y + 8\lambda; \end{cases} \quad \begin{matrix} y'' = 3y' + 8\lambda';\ y'' = 3y' + 8(2y - 3\lambda); \\ y'' = 3y' + 16y - 24\lambda; \end{matrix}$$

$$\lambda=\frac{1}{8}(y'-3y);\ y''=3y'+16y-24\cdot\frac{1}{8}(y'-3y);\ y''=3y'+16y--3y'+9y;\quad y''-25y=0;$$

$$k^2-25=0;\ k_{1,2}=\pm 5;\ y=C_1e^{5x}+C_2e^{-5x};\ y'=5C_1e^{5x}-5C_2e^{-5x};$$

$$\lambda=\frac{1}{8}\left(5C_1e^{5x}-5C_2e^{-5x}-3C_1e^{5x}-3C_2e^{-5x}\right)=\frac{1}{4}C_1e^{5x}-C_2e^{-5x};$$

$$z=2\left(\frac{1}{4}C_1e^{5x}-C_2e^{-5x}\right)=\frac{1}{2}C_1e^{5x}-2C_2e^{-5x}.$$

Отже, екстремалями служать функції

$$y=C_1e^{5x}+C_2e^{-5x};\quad z=\frac{1}{2}C_1e^{5x}-2C_2e^{-5x}.$$

Знайдемо значення C_1 і C_2 із крайових умов:

$$\begin{cases}1=C_1+C_2; & C_1=1;\\ e^5=C_1e^5+C_2e^{-5}; & C_2=0.\end{cases}$$

Отже, допустимі екстремалі $\underline{y=e^{5x};\quad z=\frac{1}{2}e^{5x}}$.

<u>Приклад 12</u>. Знайти геодезичну лінію, яка сполучає дві задані точки $A(1;-1;0)$, $B(2;1;-1)$ поверхні $15x-7y+z-22=0$. Знайти її довжину.

<u>Розв'язання</u>. Нехай шукана лінія визначається рівняннями

$$y=y(x),\ z=z(x).$$

Тоді $y(1)=-1;\ z(1)=0;\ y(2)=1;\ z(2)=-1$ — крайові умови;

$\varphi(x,y,z)=15x-7y+z-22=0$ — рівняння зв'язку;

$I[y,z]=\int\limits_1^2\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx$ — функціонал (довжина дуги AB), мінімум якого треба знайти.

Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\overline{F}=F+\lambda\varphi;\ \overline{F}=\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(15x-7y+z-22);$$

$$\overline{I}[y,z]=\int\limits_1^2\overline{F}dx=\int\limits_1^2\left(\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(15x-7y+z-22)\right)dx.$$

Складемо систему рівнянь Ейлера–Лагранжа:

$$\overline{F}'_y=-7\lambda;\overline{F}'_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}};\ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=\frac{y''+y''(z')^2-z'z''y'}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\overline{F}'_z=\lambda;\overline{F}'_{z'}=\frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}};\ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{z'}=\frac{z''+z''(y')^2-y'y''z'}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\begin{cases}\overline{F}'_y-\frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=0;\\ \overline{F}'_z-\frac{d}{dx}\overline{F}'_{z'}=0;\end{cases}\quad\begin{cases}-7\lambda-\frac{y''+y''(z')^2-z'z''y'}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0;\\ \lambda-\frac{z''+z''(y')^2-y'y''z'}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0.\end{cases}$$

Вилучивши з останньої системи λ, одержимо

$$y''+y''(z')^2-z'z''y'+7\left(z''+z''(y')^2-y'y''z'\right)=0.$$

Продиференціювавши рівняння зв'язку, маємо

$$15-7y'+z'=0;\quad -7y''+z''=0.$$

Звідси $z'=7y'-15;\quad z''=7y''$. Тоді

$$y''+y''(7y'-15)^2-(7y'-15)\cdot 7y''\cdot y'+7\left(7y''+7y''\cdot(y')^2-y'y''(7y'-15)\right)=0.$$

Після спрощення маємо $y''=0$. Тоді $y'=C_1;\quad y=C_1x+C_2$.

З рівняння зв'язку $z=22-15x+7y$. Тоді $z=22-15x+7C_1x+7C_2$.

Отже, $y=C_1x+C_2,\ z=22-15x+7C_1x+7C_2$ — екстремалі.

Використавши крайові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{matrix} y(1)=-1: \\ y(2)=1: \end{matrix}\begin{cases} -1=C_1+C_2; & C_1=2; \\ 1=2C_1+C_2; & C_2=-3. \end{cases}$$

Отже, допустимі екстремалі:

$$y=2x-3;\quad z=22-15x+7(2x-3)=-x+1.$$

Таким чином, геодезична лінія визначається рівняннями

$$\underline{y=2x-3,\ z=-x+1,\ x\in[1;2]}.$$

Знайдемо її довжину: $y'=2;\ z'=-1$

$$I_{\min}=I[2x-3,-x+1]=\int_1^2\sqrt{1+2^2+(-1)^2}\,dx=\underline{\sqrt{6}}.$$

Найпростіша ***ізопериметрична задача***: знайти функцію $y(x)$, яка доставляє мінімум (максимум) функціоналу

$$I[y]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$$

і задовольняє інтегральне рівняння зв'язку

$$I_*[y]=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x,y,y')dx=l,$$

а також крайові умови $y(x_1)=y_1;\ y(x_2)=y_2$.

Теорема. *Якщо функція $y(x)$ є допустимою екстремаллю сформульованої ізопериметричної задачі, то існує таке стале число λ* ***(множник Лагранжа)****, що функція $y(x)$ служить безумовною допустимою екстремаллю допоміжного функціоналу*

$$\overline{I}[y]=\int_{x_1}^{x_2}\overline{F}(x,y,\lambda)dx,$$

де $\overline{F}(x,y,\lambda)=F+\lambda\varphi$ — допоміжна функція ***(функція Лагранжа)****.*

Принцип взаємності: *Сукупність умовних екстремалей не залежить від того, чи шукати екстремум функціоналу $I[y]$ при фіксованому значенні $I_*[y]$ чи, навпаки, шукати екстремум $I_*[y]$ при фіксованому значенні $I[y]$.*

Зазначимо, що, на відміну від алгебраїчних чи диференціальних, інтегральні зв'язки не накладають жорстких обмежень на шукані функції, бо з них не можна виразити одні з функцій через інші. Тому число ізопериметричних умов не обов'язково повинно бути меншим числа шуканих функцій.

Приклад 13. Знайти екстремалі функціоналу $I[y]=\int_0^1 (y')^2\,dx$ при крайових умовах $y(0)=1,\quad y(1)=6$ та ізопериметричному зв'язку $\int_0^1 y\,dx=3.$

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$\overline{F}=F+\lambda\varphi;\quad \overline{F}=(y')^2+\lambda y;\quad \overline{I}=\int_0^1 \overline{F}dx;\quad \overline{I}=\int_0^1\left((y')^2+\lambda y\right)dx;\ \lambda=const.$

Складемо рівняння Ейлера:

$$\overline{F}'_y=\lambda;\ \overline{F}'_{y'}=2y';\ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=2y'';$$

$$\overline{F}'_y-\frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=0;\ \lambda-2y''=0;\ y''=\frac{\lambda}{2}.$$

Звідси $y'=\frac{\lambda}{2}x+C_1;\quad y=\frac{\lambda}{4}x^2+C_1x+C_2.$

Використаємо крайові умови:

$$\begin{cases}1=C_2;\\ 6=\frac{\lambda}{4}+C_1+C_2;\end{cases}\quad \begin{matrix}C_2=1;\\ \lambda=20-4C_1;\end{matrix}\quad y=(5-C_1)x^2+C_1x+1.$$

З ізопериметричної умови маємо:

$$\int_0^1\left((5-C_1)x^2+C_1x+1\right)dx=3;\ \left.\left(\left(\frac{5-C_1}{3}\right)x^3+\frac{C_1}{2}x^2+x\right)\right|_0^1=3;\ \frac{5-C_1}{3}+\frac{C_1}{2}+1=3;\quad C_1=2.$$

Отже, допустима екстремаль $y=(5-2)x^2+2x+1=\underline{3x^2+2x+1}.$

Приклад 14. Знайти екстремалі функціоналу $I[y]=\int_0^\pi (y')^2\,dx$ при крайових умовах $y(0)=0,\quad y(\pi)=0$ та ізопериметричному зв'язку $\int_0^\pi y^2dx=1.$

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$\varphi=y^2;\ \overline{F}=F+\lambda\varphi;\quad \overline{F}=(y')^2+\lambda y^2;\ \overline{I}[y]=\int_0^\pi\overline{F}dx;\quad \overline{I}[y]=\int_0^\pi\left((y')^2+\lambda y^2\right)dx.$

Складемо рівняння Ейлера:

$$\overline{F}'_y=2\lambda y;\ \overline{F}'_{y'}=2y';\ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=2y'';$$

$$\overline{F}'_y-\frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=0;\ 2\lambda y-2y''=0;\ y''-\lambda y=0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння:

1. Якщо $\lambda>0$, то $k^2-\lambda=0;\ k_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda};\quad y=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}.$

З крайових умов випливає

$$\begin{cases}0=C_1+C_2;\\ 0=C_1e^{\sqrt{\lambda}\pi}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}\pi};\end{cases}\quad \begin{matrix}C_1=0;\\ C_2=0.\end{matrix}$$

Але функція $y=0$ не задовольняє інтегральне рівняння зв'язку. Отже, в цьому випадку допустима екстремаль не існує.

2. Якщо $\lambda=0$, то $k^2=0; k_{1,2}=0; \quad y=C_1+C_2x.$.

З крайових умов випливає

$$\begin{cases} 0=C_1; & C_1=0; \\ 0=C_1+C_2\pi; & C_2=0. \end{cases}.$$

Як було зазначено вище, функція $y=0$ не задовольняє ізопериметричній умові. Допустимої екстремалі немає.

3. Якщо $\lambda<0$, то $k^2-\lambda=0; k_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}i; \quad y=C_1\cos\sqrt{-\lambda}x+C_2\sin\sqrt{-\lambda}x$.

З крайової умови $y(0)=0$ маємо $C_1=0, C_2\sin\sqrt{-\lambda}\pi=0.$

Оскільки $C_2\neq 0,$ то з крайової умови $y(\pi)=0$ випливає $\sin\sqrt{-\lambda}\pi=0$. Звідси

$$\sqrt{-\lambda}\pi=m\pi, \quad m=0;\pm1,\pm2,\ldots; \; \lambda=-n^2, \, n=1,2,\ldots.$$

Тому $y=C_2\sin nx.$ Використаємо інтегральне рівняння зв'язку:

$$\int_0^\pi (C_2\sin nx)^2dx=1; \; C_2^2\int_0^\pi\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=1; \; \frac{1}{2}C_2^2\left(x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Bigg|_0^\pi=1; \; C_2^2\cdot\frac{\pi}{2}=1; \; C_2=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Отже, $\underline{y=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \, n=1,2,\ldots}$ — допустимі екстремалі.

Приклад15. Серед всіх плоских кривих заданої довжини $l=2sh\frac{1}{2}$, що сполучають дві задані точки $A(0;0)$ і $B(1;0)$ знайти таку, в якої ордината центра мас y_c найменша. Для знайденої кривої обчислити ординату центра мас $y_{c\min}$.

Розв'язання. Задача полягає в мінімізації функціоналу

$y_c=I[y]=\int_0^1 y\sqrt{1+(y')^2}dx$ при крайових умовах $y(0)=0, \, y(1)=0$ та ізопериметричному зв'язку $\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}dx=2sh\frac{1}{2}.$

Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\varphi=\sqrt{1+(y')^2}; \; \overline{F}=F+\lambda\varphi; \; \overline{F}=y\sqrt{1+(y')^2}+\lambda\sqrt{1+(y')^2};$$

$$\overline{I}[y]=\int_0^1\overline{F}dx; \; \overline{I}[y]=\int_0^1\left(y\sqrt{1+(y')^2}+\lambda\sqrt{1+(y')^2}\right)dx.$$

Складемо рівняння Ейлера:

$$\overline{F}'_y-\frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=0; \; \overline{F}'_y=\sqrt{1+(y')^2}; \; \overline{F}'_{y'}=\frac{yy'+\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}; \quad \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=\frac{(y')^2+(y')^4+yy''+\lambda y''}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\sqrt{1+(y')^2}-\frac{(y')^2+'(y')^4+yy''+\lambda y''}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0; \; y''(y+\lambda)-(y')^2-1=0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку:

$$y'=p; \; p=p(y); \; y''=p\cdot p'; \; p\cdot p'(y+\lambda)-p^2-1=0;$$

$$\int\frac{pdp}{p^2+1}=\int\frac{dy}{y+\lambda};\quad \frac{1}{2}\ln\left|p^2+1\right|=\ln|y+\lambda|+\ln|C_1|;\ p^2+1=C_1^2(y+\lambda)^2;$$

$$\sqrt{1+(y')^2}=C_1(y+\lambda);\ y'=\pm\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1};\ \int\frac{dy}{\pm\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1}}=\int dx;$$

$$\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1(y+\lambda)+\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1}\right|=x+C_2;\ C_1(y+\lambda)+\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1}=e^{C_1x+C_1C_2}.$$

Спростимо останній вираз, поклавши $C_1(y+\lambda)=ch\,t$.

Тоді

$$\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1}=\sqrt{ch^2t-1}=sh\,t;\ ch\,t+sh\,t=e^{C_1x+C_1C_2};\ e^t=e^{C_1x+C_1C_2};\ t=C_1x+C_1C_2.$$

Отже, $C_1(y+\lambda)=ch(C_1x+C_1C_2)$.

Тоді

$$\sqrt{1+(y')^2}=ch(C_1x+C_1C_2);\quad y=\frac{1}{C_1}ch(C_1x+C_1C_2)-\lambda$$

— екстремалі (сім'я ланцюгових ліній).

З крайових умов маємо:

$$\begin{cases}0=\dfrac{1}{C_1}ch(C_1C_2)-\lambda;\\ 0=\dfrac{1}{C_1}ch(C_1+C_1C_2)-\lambda;\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{C_1}ch(C_1C_2);\\ 0=\dfrac{1}{C_1}\left(ch(C_1+C_1C_2)-ch(C_1C_2)\right);\end{cases}$$

$$2sh\frac{C_1+C_1C_2+C_1C_2}{2}\cdot sh\frac{C_1+C_1C_2-C_1C_2}{2}=0;\quad sh\frac{C_1+2C_1C_2}{2}\cdot sh\frac{C_1}{2}=0.$$

Оскільки $C_1\neq 0$, то з останнього рівняння випливає $C_1+2C_1C_2=0;\ C_2=-\dfrac{1}{2}$.

Тоді

$$\lambda=\frac{1}{C_1}ch\left(-\frac{C_1}{2}\right)=\frac{1}{C_1}ch\left(\frac{C_1}{2}\right);\ y=\frac{1}{C_1}ch\left(C_1x-\frac{C_1}{2}\right)-\frac{1}{C_1}ch\frac{C_1}{2};\ \sqrt{1+(y')^2}=ch\left(C_1x-\frac{C_1}{2}\right).$$

Рівняння зв'язку набуває вигляду:

$$\int_0^1 ch\left(C_1x-\frac{C_1}{2}\right)dx=2sh\frac{1}{2};\ \frac{1}{C_1}sh\left(C_1x-\frac{C_1}{2}\right)\Bigg|_0^1=2sh\frac{1}{2};\ \frac{2}{C_1}sh\frac{C_1}{2}=2sh\frac{1}{2}.\ .$$

Звідси $C_1=1$. Отже, допустима екстремаль

$$\underline{y=ch(x-1/2)-ch(1/2)}.$$

З фізичного змісту задачі випливає, що мінімум функціоналу існує. Оскільки допустима екстремаль єдина, то на ній і досягається мінімум. Знайдемо шукану ординату центра мас $y_{c\min}$:

$$\sqrt{1+(y')^2}=ch(x-1/2);\ y_{c\min}=I[ch(x-1/2)-ch(1/2)]=\int_0^1(ch(x-1/2)-ch(1/2))ch(x-1/2)dx=$$

$$\int_0^1 ch^2(x-1/2)dx-ch(1/2)\int_0^1 ch(x-1/2)dx=(1/2)\int_0^1(1+ch(2x-1))dx-ch(1/2)sh(x-1/2)\Big|_0^1=$$

$$(x/2+(1/4)sh(2x-1))\Big|_0^1-2ch(1/2)\cdot sh(1/2)=1/2+(1/2)sh1-sh1=\underline{(1-sh1)/2}.$$

3.3.3. Задача на екстремум функціоналу з рухомими кінцями. Умови трансверсальності

Ставиться задача знаходження мінімуму (максимуму) функціоналу $I[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ серед неперервно диференційовних на відрізку $[x_1;x_2]$ функцій $y=y(x)$, якщо крайові умови не задані, але відомо, що точки $A(x_1;y(x_1))$ і $B(x_2;y(x_2))$ лежать відповідно на заданих лініях $y=g_1(x)$ і $y=g_2(x)$, причому числа x_1 і x_2 також підлягають визначенню.

Сформульована задача називається ***варіаційною задачею з рухомими кінцями***.

У даному випадку клас допустимих функцій, на яких шукається екстремум функціоналу, розширюється порівняно з ситуацією закріплених кінців, бо крім кривих порівняння, що мають спільні межові точки з досліджуваною кривою, можна брати криві зі зміщеними кінцевими точками. Це означає, що коли на якій-небудь функції $y_0(x)$ функціонал $I[y]$ досягає екстремуму в задачі з рухомими кінцями, то екстремум тим паче досягається по відношенню до більш вузького класу кривих, які мають спільні межові точки з кривою $y=y_0(x)$, а, отже, функція $y_0(x)$ повинна бути розв'язком рівняння Ейлера

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0.$$

Загальний розв'язок рівняння Ейлера $y=y(x,C_1,C_2)$ включає дві довільні сталі. Конкретні значення довільних сталих знаходяться при закріплених кінцях із крайових умов, а при рухомих — із додаткових умов, які називаються ***умовами трансверсальності*** і мають вигляд:

$$\left[F+(g'_1-y')F'_{y'}\right]_{x=x_1}=0;\quad \left[F+(g'_2-y')F'_{y'}\right]_{x=x_2}=0.$$

Часто числа x_1 і x_2 задані, і точки $A(x_1;y(x_1))$ і $B(x_2;y(x_2))$ можуть переміщатися тільки вздовж вертикальних прямих відповідно $x=x_1$ і $x=x_2$. Тоді умови трансверсальності набувають вигляду:

$$F'_{y'}\Big|_{x=x_1}=0,\quad F'_{y'}\Big|_{x=x_2}=0$$

і називаються ***природними крайовими умовами***.

Розглянемо виведення природних крайових умов. Варіація функціоналу визначається рівністю (п.3.2.2):

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}F'_y\,\delta y dx+\int_{x_1}^{x_2}F'_{y'}\,\delta y'dx.$$

До другого доданка застосуємо метод інтегрування частинами (як в п.3.2.2) і одержимо:

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y dx+\left(F'_{y'}\,\delta y\right)\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

На екстремалі $y(x)$ перший доданок останньої рівності дорівнює нулю, і з необхідної умови екстремуму $\delta I = 0$ випливає:

$$\delta I = F'_{y'}\Big|_{x=x_2} \delta y(x_2) - F'_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta y(x_1) = 0.$$

Оскільки δy — довільна варіація і на кінцях може набувати будь-яких значень, то рівність варіації функціоналу нулю можлива у випадку $F'_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0, \quad F'_{y'}\Big|_{x=x_2} = 0.$

Якщо $F = G(x,y)\sqrt{1+(y')^2}$, то умова трансверсальності, наприклад, для лівого кінця має вигляд:

$$\left[G(x,y)\sqrt{1+(y')^2} + (g'_1 - y')G(x,y)y' \Big/ \sqrt{1+(y')^2}\right]\Bigg|_{x=x_1} = 0 \quad \text{або} \quad \left[G(x,y)(1+g'_1 y')\right]\Big|_{x=x_1} = 0.$$

Якщо $G(x,y) \neq 0$, то $(1+g'_1 y')\big|_{x=x_1} = 0$ або $g'_1 y'\big|_{x=x_1} = -1$.

Останнє співвідношення є умовою перпендикулярності шуканої кривої, що доставляє екстремум функціоналу, і заданої лінії $y = g_1(x)$. Таким чином, поняття трансверсальності є деяким узагальненням поняття ортогональності.

<u>Правило</u> знаходження допустимих екстремалей варіаційної задачі з рухомими кінцями:

1. Скласти рівняння Ейлера $F'_y - \dfrac{d}{dx}F'_{y'} = 0$, розв'язати його і знайти екстремалі $y = y(x, C_1, C_2)$.

2. Скласти систему алгебраїчних рівнянь для знаходження конкретних значень довільних сталих C_1, C_2 і тих чисел з пари x_1 і x_2, які невідомі. Для цього використати крайові умови, якщо на відповідному кінці вони задані, або природні крайові умови чи, в загальному випадку, умови трансверсальності разом з тими рівняннями перетину шуканої допустимої екстремалі $y = y(x)$ з даними лініями $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, які відповідають невідомим числам з пари x_1 і x_2:

$y(x_1, C_1, C_2) = g_1(x_1); \quad y(x_2, C_1, C_2) = g_2(x_2).$

3. Розв'язати одержану систему і знайти допустиму екстремаль.

<u>Приклад 16.</u> Знайти криву, на якій реалізується мінімум функціоналу $I[y] = \int\limits_0^2 \left(xy' + (y')^2\right)dx$ при умові, що її лівий кінець розміщений в точці $A(0;3)$, а правий кінець — на прямій $x = 2$. Обчислити мінімальне значення функціоналу.

<u>Розв'язання.</u> Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера: $F = xy' + (y')^2$; $F'_y = 0$; $F'_{y'} = x + 2y'$; $\dfrac{d}{dx}F'_{y'} = 1 + 2y''$.

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \dfrac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду $1 + 2y'' = 0$. Розв'яжемо це рівняння:

$$y' = -\frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{2}x + C_1; \quad y = \int\left(-\frac{1}{2}x + C_1\right)dx = -\frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2 \text{ — екстремалі.}$$

Допустима екстремаль повинна проходити через точку $A(0;3)$, тобто на лівому кінці задана крайова умова $y(0)=3$.

Звідси $3=-\frac{0}{4}+C\cdot 0+C_2; C_2=3; y=-\frac{x^2}{4}+C_1x+3$.

Правий кінець допустимої екстремалі ковзає по вертикальній прямій $x=2$. Отже, там повинна виконуватись природна крайова умова $F'_{y'}\Big|_{x=x_2}=0$: $\left(x+2y'\right)\Big|_{x=2}=0.$

Підставивши в останній вираз похідну $y'=-x/2+C_1$, одержимо $\left(x+2\left(-x/2+C_1\right)\right)\Big|_{x=2}=0; C_1=0.$ Отже, допустима екстремаль $\underline{y=-x^2/4+3}$.

Оскільки $F''_{y'y'}=2\geq 0$ при $x\in[0;2]$ і довільних значеннях y', то згідно з достатніми умовами Лежандра на даній єдиній допустимій екстремалі реалізується сильний мінімум функціоналу. Знайдемо його значення:

$$y'=-x/2; \qquad I_{\min}=I\left[-x^2/4+3\right]=\int_0^2\left(x(-x/2)+(-x/2)^2\right)dx=-(1/4)\int_0^2 x^2dx=-x^3/12\Big|_0^2=\underline{-2/3}$$

<u>Приклад 17.</u> Знайти найкоротшу відстань від точки $A(1;0)$ до верхньої половини еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

<u>Розв'язання.</u> Мова йде про мінімізацію функціоналу (довжини дуги) $I[y]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ при умові, що лівий кінець дуги закріплений в точці $A(1;0)$, тобто $x_1=1; y(1)=0$, а правий – переміщується по верхній половині еліпса, тобто,

$$g_2(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}.$$

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F=\sqrt{1+(y')^2};\ F'_y=0;\ F'_{y'}=y'\Big/\sqrt{1+(y')^2};\ \frac{d}{dx}F'_{y'}=y''\Big/\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду

$$0-y''\Big/\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}=0;\quad y''=0.$$

Звідси $y'=C_1; y=\int C_1dx=C_1x+C_2$ — екстремалі.

На правому кінці повинна виконуватись умова трансверсальності $\left[F+(g'_2-y')F'_{y'}\right]_{x=x_2}=0$:

$$y'=C_1;\quad g'_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}(-2x)=-\frac{2x}{3\sqrt{9-x^2}};$$

$$\left[\sqrt{1+C_1^2}+\left(-\frac{2x}{3\sqrt{9-x^2}}-C_1\right)\cdot\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}\right]_{x=x_2}=0;\quad 1-\frac{2x_2C_1}{3\sqrt{9-x_2^2}}=0;\quad 3\sqrt{9-x_2^2}-2C_1x_2=0.$$

Приєднавши до останнього співвідношення рівняння перетину екстремалі з еліпсом і крайову умову на лівому кінці, одержимо систему:

$$\begin{cases} 3\sqrt{9-x_2^2}-2C_1x_2=0; \\ C_1x_2+C_2=\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x_2^2}; \\ C_1+C_2=0. \end{cases}$$

Розв'язавши її, знаходимо $x_2=\dfrac{9}{5}; C_1=2; C_2=-2.$.

Отже, допустима екстремаль $y=2x-2$.

Оскільки згідно з геометричним змістом задачі функціонал має мінімум і допустима екстремаль єдина, то вона й реалізує мінімум. Знайдемо його значення (найкоротшу відстань):

$$y'=2;\ I_{\min}=I[2x-2]=\int_1^{\frac{9}{5}}\sqrt{1+2^2}\,dx=\underline{\frac{4\sqrt{5}}{5}}.$$

<u>Приклад 18.</u> Знайти найкоротшу відстань між параболою $y=x^2$ і прямою $y=x-9/4$.

<u>Розв'язання.</u> Задача полягає в мінімізації функціоналу (довжини дуги) $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ при умові, що лівий кінець допустимої екстремалі може рухатись вздовж параболи $y=x^2$, а правий — вздовж прямої $y=x-9/4$.

Для цього функціоналу рівняння Ейлера має загальний розв'язок $y=C_1x+C_2$ (приклад 17).

Оскільки

$F=\sqrt{1+(y')^2},\ F'_{y'}=y'\big/\sqrt{1+(y')^2},\ g_1(x)=x^2;\ \ g'_1=2x,\ g_2(x)=x-9/4,\ g'_2=1,\ y'=C_1,$

то умови трансверсальності $\left[F+(g'_1-y')F'_{y'}\right]_{x=x_1}=0;\ \left[F+(g'_2-y')F'_{y'}\right]_{x=x_2}=0$ набувають вигляду:

$$\begin{cases} \sqrt{1+C_1^2}+(2x_1-C_1)C_1\big/\sqrt{1+C_1^2}=0; \\ \sqrt{1+C_1^2}+(1-C_1)C_1\big/\sqrt{1+C_1^2}=0; \end{cases} \begin{cases} 1+2C_1x_1=0; \\ 1+C_1=0. \end{cases}$$

Звідси $C_1=-1;\ x_1=\dfrac{1}{2}$.

Використавши рівняння перетину екстремалі з даними лініями $y=g_1(x)$ і $y=g_2(x)$, знайдемо C_2 і x_2:

$$\begin{cases} C_1x_1+C_2=x_1^2; \\ C_1x_2+C_2=x_2-9/4; \end{cases} \quad \begin{cases} -1\cdot(1/2)+C_2=(1/2)^2; \\ -1\cdot x_2+C_2=x_2-9/4; \end{cases}$$

$$C_2=3/4;\ x_2=(1/2)(C_2+9/4)=(1/2)(3/4+9/4)=3/2.$$

Отже, допустима екстремаль $y=-x+3/4$.

Знайдемо відповідне значення функціоналу:

$$y'=-1;\ I[-x+3/4]=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+(-1)^2}\,dx=\underline{\sqrt{2}.}$$

Оскільки згідно з геометричним змістом задачі функціонал має мінімум і допустима екстремаль єдина, то на ній і досягається мінімум. Отже, найкоротша відстань дорівнює $\sqrt{2}$.

Приклад 19. Знайти криву $y = y(x)$, яка доставляє максимум функціоналу $I[y] = \int_0^{\pi/2} \left(y^2 - (y')^2\right)dx$ при умові, що її лівий і правий кінці належать відповідно лініям $y = -x + 1$ і $y = 2x$.

Розв'язання. Складемо рівняння Ейлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0; \quad F = y^2 - (y')^2; F'_y = 2y; F'_{y'} = -2y'; \quad \frac{d}{dx}F'_{y'} = -2y''; \quad 2y + 2y'' = 0; y'' + y = 0.$$

Знайдемо загальний розв'язок:

$$k^2 + 1 = 0; k_{1,2} = \pm i; \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \text{ – екстремалі.}$$

Конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2 знайдемо з умов трансверсальності

$$\left[F + (g'_1 - y')F'_{y'}\right]\Big|_{x=x_1} = 0; \left[F + (g'_2 - y')F'_{y'}\right]\Big|_{x=x_2} = 0; \quad y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x; x_1 = 0;$$

$$x_2 = \pi/2; \; F = y^2 - (y')^2 = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)^2 - (-C_1 \sin x + C_2 \cos x)^2 = C_1^2 \cos^2 x +$$

$$+ 2C_1C_2 \sin x \cos x + C_2^2 \sin^2 x - C_1^2 \sin^2 x + 2C_1C_2 \sin x \cos x - C_2^2 \cos^2 x = C_1^2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) +$$

$$+ 2C_1C_2 \sin 2x - C_2^2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = C_1^2 \cos 2x + 2C_1C_2 \sin 2x - C_2^2 \cos 2x;$$

$$g_1 = -x + 1; g'_1 = -1; g_2 = 2x; g'_2 = 2; F'_{y'} = 2C_1 \sin x - 2C_2 \cos x;$$

$$\left[C_1^2 \cos 2x + 2C_1C_2 \sin 2x - C_2^2 \cos 2x + (-1 + C_1 \sin x - C_2 \cos x)(2C_1 \sin x - 2C_2 \cos x)\right]_{x=0} = 0;$$

$$\left[C_1^2 \cos 2x + 2C_1C_2 \sin 2x - C_2^2 \cos 2x + (2 + C_1 \sin x - C_2 \cos x)(2C_1 \sin x - 2C_2 \cos x)\right]_{x=\pi/2} = 0;$$

$$\begin{cases} C_1^2 - C_2^2 + (-1 - C_2) \cdot (-2C_2) = 0; \\ -C_1^2 + C_2^2 + (2 + C_1) \cdot 2C_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} C_1^2 + C_2^2 + 2C_2 = 0; \\ C_1^2 + C_2^2 + 4C_1 = 0; \end{cases} \qquad C_1 = -\frac{4}{5}; \quad C_2 = -\frac{8}{5}.$$

Отже, допустима екстремаль $y = -\frac{4}{5}\cos x - \frac{8}{5}\sin x$.

Оскільки $F''_{y'y'} = -2 \le 0$ при $x \in [0; \pi/2]$ і довільних значеннях y', то згідно з достатніми умовами Лежандра на даній єдиній допустимій екстремалі реалізується сильний максимум функціоналу. Отже, $y = -\frac{4}{5}\cos x - \frac{8}{5}\sin x$ – шукана крива.

3.3.4. Варіаційні принципи

Варіаційні принципи застосовуються до аналізу різноманітних явищ. Суть кожного з них полягає в тому, що зі всіх допустимих для досліджуваної системи станів реалізується той, який відповідає екстремуму певного функціоналу (для кожного принципу свого). Розглянемо два таких принципи.

Принцип Ферма в оптиці: *зі всіх можливих шляхів, які сполучають точки* A *і* B, *світло вибирає той, що відповідає найменшому часу руху*:

$$I = \frac{1}{c}\int_{\cup AB} n dt \to \min.$$

Тут c — швидкість світла у вакуумі, n — показник заломлення світла в даному середовищі, t — час.

Форма кривої AB визначається мінімумом вказаного функціоналу. В оптично однорідному середовищі $(n = const)$ — це пряма лінія.

Принцип Гамільтона–Остроградського (***принцип найменшої дії***) в механіці: *дійсний рух системи виділяється зі всіх допустимих рухів тим, що функціонал, який називається* ***дією***, $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt$ *досягає при цьому мінімуму.*

Тут L — ***функція Лагранжа***, що є різницею кінетичної T і потенціальної U енергій: $L = T - U$.

Візьмемо для прикладу найпростішу механічну систему, що складається тільки з однієї матеріальної точки масою m, яка рухається вздовж осі Ox під дією сили з потенціалом $U(x)$. Розглянемо два випадки:

а) Нехай система консервативна і її функція Лагранжа $L = L(x, \dot{x})$, де $\dot{x} = dx/dt$ – швидкість, не залежить явно від часу t (***однорідність часу***). Тоді рівняння Ейлера для функціоналу S спрощується і набуває вигляду: $L - L'_{\dot{x}} \cdot \dot{x} = -C$, де $C = const$.

Але $\dot{x} \cdot L'_{\dot{x}} = \dot{x} \cdot \left(m\dot{x}^2/2\right)'_{\dot{x}} = \dot{x} \cdot m \cdot \dot{x} = m\dot{x}^2 = 2T$; $L - L'_{\dot{x}} = (T - U) - 2T = -T - U$.

Звідси $-T - U = -C$, $\underline{T + U = C}$.

Тобто, *закон збереження енергії виступає наслідком варіаційного принципу найменшої дії*.

б) Нехай функція Лагранжа L не змінюється при паралельному перенесенні системи (***однорідність простору***). Тоді у функціоналі S підінтегральна функція $L = L(x, \dot{x})$ не залежить явно від невідомої функції $x = x(t)$ і рівняння Ейлера спрощується, набуваючи вигляду:

$$\frac{d}{dt} L'_{\dot{x}} = 0; \quad L'_{\dot{x}} = (T - U)'_{\dot{x}} = T'_{\dot{x}} = C, \quad C = const$$

Але $T'_{\dot{x}} = \left(m\dot{x}^2/2\right)'_{\dot{x}} = m \cdot \dot{x} = p$ — імпульс системи.

Звідси $\underline{p = C}$. Тобто, *закон збереження імпульсу теж виступає наслідком варіаційного принципу найменшої дії*.

3.4. Контрольні запитання

1) Що називається функціоналом?
2) Який функціонал називається лінійним?
3) Що називається відстанню нульового порядку між функціями? Відстанню першого порядку?
4) Що таке відносний (абсолютний) мінімум (максимум) функціоналу?
5) Що таке сильний (слабкий) екстремум функціоналу?
6) Сформулюйте перше і друге означення варіації функціоналу. Що називається другою варіацією функціоналу?

7) Як ставиться найпростіша задача варіаційного числення – задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями?
8) У чому полягає необхідна умова екстремуму функціоналу у варіаційній формі?
9) Запишіть рівняння Ейлера. Який його порядок?
10) Як ставиться найпростіша задача варіаційного числення для функціоналів, що залежать від кількох функцій?
11) Запишіть систему рівнянь Ейлера–Лагранжа.
12) Як ставиться найпростіша варіаційна задача для функціоналів, що залежать від похідних вищих порядків?
13) Запишіть рівняння Ейлера–Пуассона. Який його порядок?
14) У чому полягає достатня умова екстремуму функціоналу у варіаційній формі?
15) Сформулюйте посилені достатні умови Лежандра слабкого екстремуму функціоналу.
16) Сформулюйте достатні умови Лежандра сильного екстремуму функціоналу.
17) Як ставиться задача Лагранжа на умовний екстремум?
18) Що таке алгебраїчні, диференціальні та інтегральні зв’язки?
19) У чому полягає метод множників Лагранжа стосовно розв'язання задачі Лагранжа на умовний екстремум?
20) Сформулюйте правило знаходження допустимих екстремалей задачі Лагранжа на умовний екстремум.
21) Що таке ізопериметрична задача на умовний екстремум?
22) Чому кількість інтегральних зв’язків може бути більшою, ніж число шуканих функцій?
23) У чому полягає метод множників Лагранжа стосовно розв'язання ізопериметричної задачі?
24) У чому полягає принцип взаємності?
25) Як ставиться варіаційна задача з рухомими кінцями?
26) Сформулюйте природні крайові умови.
27) Сформулюйте умови трансверсальності для випадку, коли кінці шуканої екстремалі можуть ковзати вздовж заданих ліній.
28) Сформулюйте правило знаходження допустимих екстремалей варіаційної задачі з рухомими кінцями.
29) У чому полягає принцип Ферма в оптиці?
30) Сформулюйте принцип найменшої дії.
31) Як зв’язані фізичні закони збереження з варіаційними принципами?

3.5. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Обчислити заданий функціонал при заданому значенні аргументу.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$I[y]=\int_1^e xy(y'')^2\,dx$; $y=\ln x$	11	$I[y]=\int_0^{\pi/4}\frac{y''}{y}\cos^2 x\,dx$; $y=e^x\cos x$	21	$I[y]=\int_1^2\frac{x^2}{y''(1+x^2)}\,dx$; $y=arctg\,x$
2	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(y^2+(y'')^2\right)\sin x\,dx$; $y=\cos x$	12	$I[y]=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{y''}{y}\sin 2x\,dx$; $y=e^{-x}\sin x$	22	$I[y]=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{y}{y'}\,dx$; $y=ctg\,x$
3	$I[y]=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{y''\sin x}{(y')^3}dx$; $y=\ln x$	13	$I[y]=\int_1^e\frac{\cos x\,dx}{y''+y-2\sin x}$; $y=x^2\sin x$	23	$I[y]=\int_0^1 x\left(y+y''\right)dx$; $y=e^{-3x}$
4	$I[y]=\int_0^1 x\left(y^2+(y')^2\right)dx$; $y=\cos x$	14	$I[y]=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{y^2\,dx}{y''-2\cos x}$; $y=x\sin x$	24	$I[y]=\int_0^{3/5}\frac{xy'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; $y=\arcsin x$
5	$I[y]=\int_0^{\pi/8}\left(y^2-(y')^2\right)\sin 2x\,dx$; $y=\cos x$	15	$I[y]=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos^2 x\,dx}{y''+2\sin x}$; $y=x\cos x$	25	$I[y]=\int_0^{\pi/4}y''e^{-x}dx$; $y=e^x\cos 2x$
6	$I[y]=\int_0^1 x\left(y'\right)^2dx$; $y=arctg\,x$	16	$I[y]=\int_0^{\pi}y\,y''dx$; $y=\cos\left(x/3\right)$	26	$I[y]=\int_1^2\frac{yy''e^{-x}}{xy'}\,dx$; $y=x^2e^x$
7	$I[y]=\int_e^{e^2}\frac{dx}{y''y^2}$; $y=x\ln x$	17	$I[y]=\int_0^{\pi/2}y''y^2\,dx$; $y=\sin x$	27	$I[y]=\int_e^{e^2}\frac{yy''}{(y')^2}\,dx$; $y=\ln^2 x$
8	$I[y]=\int_0^{\pi/4}\frac{xy}{y'\cos x}\,dx$; $y=tg\,x$	18	$I[y]=\int_0^1\left(y+xy'\right)dx$; $y=\sin\pi x$	28	$I[y]=\int_0^{\pi/4}\frac{y^2}{y'}\,dx$; $y=tg\,x$
9	$I[y]=\int_0^{3/5}\frac{x}{y'(1-x^2)}\,dx$; $y=\arcsin x$	19	$I[y]=\int_0^1 y''(1+x^2)\,dx$; $y=\ln(1+x^2)$	29	$I[y]=\int_e^{e^2}\frac{y^2}{x^3y''+3}\,dx$; $y=\ln x/x$
10	$I[y]=\int_1^2\frac{y''}{xy'}dx$; $y=xe^{-x}$	20	$I[y]=\int_0^1 y^2\,dx$; $y=\sqrt{x}\,e^{-x}$	30	$I[y]=\int_e^{e^3}\frac{y^2}{xy''}dx$; $y=\sqrt{x}\ln x$

Завдання 2. Знайти відстань нульового порядку між заданими кривими на вказаних відрізках.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y_1(x)=x^3e^{-x}$; $y_2(x)=0$; $[0;2]$	11	$y_1(x)=x^2/2-2x$; $y_2(x)=8/(x-2)$; $[-2;1]$	21	$y_1(x)=6-x$; $y_2(x)=4/x^2$; $[1;4]$
2	$y_1(x)=\sqrt{x}\ln x$; $y_2(x)=\sqrt{x}$; $[e^{-2};1]$	12	$y_1(x)=3e^{-x}$; $y_2(x)=xe^{-x}$; $[0;5]$	22	$y_1(x)=x^4$; $y_2(x)=8x^3$; $[-1;2]$
3	$y_1(x)=2arctg\,x$; $y_2(x)=x$; $[0;\sqrt{3}]$	13	$y_1(x)=x^2e^x$; $y_2(x)=8e^x$; $[0;3]$	23	$y_1(x)=15\sqrt[3]{x^2}$; $y_2(x)=x\sqrt[3]{x^2}$; $[-1;4]$
4	$y_1(x)=4/(x+2)^2$; $y_2(x)=-x$; $[-1;2]$	14	$y_1(x)=-2/(x-1)$; $y_2(x)=x^2-2x$; $[-3;0]$	24	$y_1(x)=2\sqrt{x-1}$; $y_2(x)=x$; $[1;5]$
5	$y_1(x)=4\sqrt{x+2}$; $y_2(x)=x$; $[-1;7]$	15	$y_1(x)=x^5-5x^4$; $y_2(x)=-5x^3$; $[-1;2]$	25	$y_1(x)=\ln x/x$; $y_2(x)=1/x$; $[e^{-1};e]$
6	$y_1(x)=-16/x$; $y_2(x)=x^2$; $[1;4]$	16	$y_1(x)=\sin 2x$; $y_2(x)=\sin x$; $[0;\pi/2]$	26	$y_1(x)=2\ln x$; $y_2(x)=x$; $[1;e]$
7	$y_1(x)=x^4/4-2x^3/3$; $y_2(x)=3x^2/2$; $[-2;4]$	17	$y_1(x)=\ln x$; $y_2(x)=x$; $[e^{-1};e]$	27	$y_1(x)=-4/x^2$; $y_2(x)=8x$; $[1/2;2]$
8	$y_1(x)=x^2/2$; $y_2(x)=8/x$; $[-4;-1]$	18	$y_1(x)=8\ln x$; $y_2(x)=x^2$; $[1;e]$	28	$y_1(x)=3/x^2$; $y_2(x)=2/x^3$; $[1/2;2]$
9	$y_1(x)=108x-60$; $y_2(x)=x^4$; $[-1;4]$	19	$y_1(x)=-108/x$; $y_2(x)=2x^2$; $[2;4]$	29	$y_1(x)=xe^{-x}$; $y_2(x)=e^{-x}$; $[0;3]$
10	$y_1(x)=-16/(x-1)$; $y_2(x)=x^2-2x$; $[2;5]$	20	$y_1(x)=2x^3-3x^2$; $y_2(x)=12x$; $[-2;3]$	30	$y_1(x)=2x^5+5x^4$; $y_2(x)=10x^3$; $[-1;2]$

Завдання 3. Знайти варіацію δI для заданого функціоналу.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(x\cos y+(y')^3\right)dx$	16	$I[y]=\int_0^1 y\left(y'+e^{xy}\right)dx$
2	$I[y]=\int_0^{\pi}(x\sin y+y'\ln y)dx$	17	$I[y]=\int_{-2}^1\left(xy-(y')^2\right)dx$
3	$I[y]=\int_0^1 y'\,arctg\,(x+y)\,dx$	18	$I[y]=\int_1^4\left(\ln y-(y')^3\right)dx$

4	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(x\sin y+(y')^2\right)dx$	19	$I[y]=\int_1^{e}\left(x\ln y'+y^4\right)dx$
5	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(y^2\cos x-(y')^2\right)dx$	20	$I[y]=\int_0^{1}\left(xy'+ye^{y'}\right)dx$
6	$I[y]=\int_1^{2}(\sqrt{xy}+\ln y')\,dx$	21	$I[y]=\int_0^{1}\left((y')^2-xe^{y}\right)dx$
7	$I[y]=\int_{-2}^{1}\left(x^3(y')^2-e^{y}\right)dx$	22	$I[y]=\int_0^{1}\left(yy'+xe^{y'}\right)dx$
8	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(x\cos y+y\sqrt{y'}\right)dx$	23	$I[y]=\int_1^{3}y\sqrt{x+(y')^2}\,dx$
9	$I[y]=\int_1^{2}y'\arcsin\sqrt{xy}\,dx$	24	$I[y]=\int_1^{4}y'\,arctg\,\sqrt{xy}\,dx$
10	$I[y]=\int_0^{1}(x^2+y')\arcsin y\,dx$	25	$I[y]=\int_2^{5}\left(x^2-y\right)(y')^3dx$
11	$I[y]=\int_0^{1}(x-y')\,arctg\,y\,dx$	26	$I[y]=\int_{-1}^{1}\left(y^3-3x^4y'\right)dx$
12	$I[y]=\int_0^{1}y\,arctg\,(y'+x)\,dx$	27	$I[y]=\int_1^{e}x^2\ln(y'+y)dx$
13	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(y'\cos y+x(y')^2\right)dx$	28	$I[y]=\int_1^{2}y'\,\sqrt{x^2+y^2}\,dx$
14	$I[y]=\int_1^{e}\left(x\ln y+(y')^2\right)dx$	29	$I[y]=\int_0^{4}y\sqrt{xy+y'}\,dx$
15	$I[y]=\int_0^{1}y'\arcsin(x+y)\,dx$	30	$I[y]=\int_1^{2}y'\,\sqrt{\ln xy}\,dx$

Завдання 4. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють заданим крайовим умовам (допустимі екстремалі). Дослідити на виконання достатніх умов екстремуму.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$I[y]=\int_0^{1}\left(\sin y'+2(y')^2\right)dx$; $y(0)=3;\ y(1)=1.$	16	$I[y]=\int_{-1}^{0}\left(12xy-(y')^2\right)dx$; $y(-1)=1;\ y(0)=0.$
2	$I[y]=\int_0^{1}\left((y')^2-y^2-y\right)e^{2x}dx$; $y(0)=0;\ y(1)=e^{-1}.$	17	$I[y]=\int_0^{1}\left(x+(y')^2\right)dx$; $y(0)=1;\ y(1)=2.$

3	$I[y]=\int_1^2\left((y')^2+2yy'+y^2\right)dx;$ $y(1)=1;\ y(2)=0.$	18	$I[y]=\int_0^{2\pi}\left((y')^2-y^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(2\pi)=1.$
4	$I[y]=\int_1^e\left(x(y')^2+yy'\right)dx;$ $y(1)=0;\ y(e)=1.$	19	$I[y]=\int_1^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx;$ $y(1)=3;\ y(2)=5.$
5	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+y^2-4y\times\right.$ $\left.\times\sin x\right)dx;\ y(0)=0;\ y(1)=1$	20	$I[y]=\int_0^1 e^y(1+xy')dx;$ $y(0)=0;\ y(1)=0.$
6	$I[y]=\int_0^1\left(y+2xy'+(y')^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=2.$	21	$I[y]=\int_0^1\left(xy'-(y')^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=1/4.$
7	$I[y]=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(y^2-2(y')^2\right)e^{-x}dx;$ $y(0)=0;\ y(3\pi/2)=e^{3\pi/4}.$	22	$I[y]=\int_{-1}^2\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx;$ $y(-1)=1;\ y(2)=4.$
8	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+yy'+12xy\right)dx;$ $y(0)=y(1)=0$	23	$I[y]=\int_0^1(e^y+xy')dx;$ $y(0)=0;\ y(1)=1$
9	$I[y]=\int_1^2\left(x^2(y')^2+2y^2+\right.$ $\left.+2xy\right)dx;\ y(1)=1;\ y(2)=8$	24	$I[y]=\int_0^2\left(xy'+(y')^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(2)=0.$
10	$I[y]=\int_0^2\left(y'+(y')^2e^x-x^3\right)dx;$ $y(0)=2;\ y(2)=-1$	25	$I[y]=\int_0^1\left(e^y-xy'\right)dx;$ $y(0)=0;\ y(1)=1.$
11	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(4y\cos x+(y')^2-\right.$ $\left.-y^2\right)dx;\ y(0)=y(\pi)=0$	26	$I[y]=\int_0^1\frac{dx}{(y')^2};$ $y(0)=0;\ y(1)=1.$
12	$I[y]=\int_1^2\left(x^2(y')^2+12y^2\right)dx;$ $y(1)=1;\ y(2)=8.$	27	$I[y]=\int_0^1\left(y^2+2xyy'\right)dx;$ $y(0)=0;\ y(1)=0$
13	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+y^2+6y\times\right.$ $\left.\times sh2x\right)dx;\ y(0)=0;\ y(1)=1$	28	$I[y]=\int_{-1}^1\left(4xy'-(y')^2\right)dx;$ $y(-1)=0;\ y(1)=1/2$
14	$I[y]=\int_{-1}^1\left(\frac{2y'}{1+x^2}-(y')^2\right)dx;$ $y(-1)=0;\ y(1)=3$	29	$I[y]=\int_0^1\left(x+4y+(y')^2\right)dx;$ $y(0)=0;\ y(1)=0$
15	$I[y]=\int_1^3\left((y')^2-y'\ln x+2x\right)dx;$ $y(1)=2;\ y(3)=-1$	30	$I[y]=\int_0^1\left(xy+y^2-2y^2\times\right.$ $\left.\times y'\right)dx;\ y(0)=1;\ y(1)=2.$

Завдання 5. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють заданим крайовим умовам (допустимі екстремалі).

№ в-та	Завдання
1	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+(y'')^2+2ye^{-2x}\right)dx;\quad y(0)=0;\ y'(0)=1;\ y(1)=1;\ y'(1)=-2$
2	$I[y]=\int_0^1\left(6x^2y-(y'')^2\right)dx;\quad y(0)=0;\ y'(0)=1;\ y(1)=0;\ y'(1)=5$
3	$I[y]=\int_0^1\left(2xy+(y''')^2\right)dx;\ y(0)=1;\ y'(0)=-1;\ y''(0)=0;\ y(1)=0;\ y'(1)=0;\ y''(1)=0$
4	$I[y]=\int_{-1}^1\left(4xy+3(y'')^2\right)dx;\quad y(-1)=y(1)=0;\ y'(-1)=y'(1)=0$
5	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2-2(y')^2+y^2-4ye^x\right)dx;\ y(0)=y(1)=0;\ y'(0)=1;\quad y'(1)=2$
6	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2-y^2-6y\sin x\right)dx;\ y(0)=2;\ y(\pi/2)=0;\ y'(0)=1;\quad y'(\pi/2)=-1$
7	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2-2(y')^2+y^2-12xy\right)dx;\ y(0)=3;\ y(1)=0;\ y'(0)=-1;\quad y'(1)=2$
8	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2+4y'y''+(y')^2-6y\cos x\right)dx;\quad y(0)=0;$ $y(\pi/2)=2;\ y'(0)=-1;\ y'(\pi/2)=0$
9	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2-(y')^2+4y\sin x\right)dx;\quad y(0)=-1;\ y(\pi/2)=0;\ y'(0)=1;\quad y'(\pi/2)=0$
10	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2+2yy'-(y')^2-2xy\right)dx;\ y(0)=1;\ y(1)=0;\ y'(0)=-1;\quad y'(1)=-2$
11	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2+4y'y''+(y')^2+6y\sin x\right)dx;\ y(0)=0;\ y(\pi/2)=0;$ $y'(0)=-1;\quad y'(\pi/2)=-2$
12	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2+4yy'-(y')^2-2ye^x\right)dx;\ y(0)=1;\ y(1)=0;\ y'(0)=0;\quad y'(1)=-2$
13	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2+3y'y''+(y')^2+4ye^{-2x}\right)dx;\ y(0)=1;\ y(1)=2;\ y'(0)=-1;\quad y'(1)=0$
14	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2-y^2-4y\cos x\right)dx;\ y(0)=2;\ y(\pi/2)=0;\ y'(0)=-1;\quad y'(\pi/2)=0$
15	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2-2(y')^2+y^2+12ye^{-2x}\right)dx;\ y(0)=-2;\ y(1)=0;\ y'(0)=1;\quad y'(1)=0$
16	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2+4y'y''+(y')^2-6ye^{-x}\right)dx;\quad y(0)=0;\ y(1)=0;\ y'(0)=-1;\ y'(1)=-2$

17	$I[y]=\int\limits_0^1\left((y'')^2-(y')^2+12xy\right)dx$; $y(0)=-2$; $y(1)=1$; $y'(0)=0$; $y'(1)=2$
18	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/4}\left((y'')^2-(y')^2-6y\sin 2x\right)dx$; $y(0)=-1; y(\pi/4)=0$; $y'(0)=0$; $y'(\pi/4)=-1$
19	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/2}\left((y'')^2-2(y')^2+y^2+6y\cos x\right)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi/2)=0$; $y'(0)=-1$; $y'(\pi/2)=2$
20	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/2}\left((y'')^2+3y'y''+(y')^2+4\sin x\right)dx$; $y(0)=1; y(\pi/2)=2; y'(0)=0; y'(\pi/2)=0$
21	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/2}\left((y'')^2-y^2-12y\sin 2x\right)dx$; $y(0)=-1$; $y(\pi/2)=1$; $y'(0)=1$; $y'(\pi/2)=0$
22	$I[y]=\int\limits_0^1\left((y'')^2+4yy'-(y')^2+4ye^{-x}\right)dx$; $y(0)=2$; $y(1)=0$; $y'(0)=0$; $y'(1)=-1$
23	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/2}\left((y'')^2-(y')^2+8y\cos x\right)dx$; $y(0)=-1$; $y(\pi/2)=2$; $y'(0)=0$; $y'(\pi/2)=0$
24	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/2}\left((y'')^2+4yy'-2(y')^2+y^2+6xy\right)dx$; $y(0)=-2$; $y(\pi/2)=0$; $y'(0)=0$; $y'(\pi/2)=1$
25	$I[y]=\int\limits_0^1\left((y'')^2+3y'y''+(y')^2-12ye^{x}\right)dx$; $y(0)=1$; $y(1)=0$; $y'(0)=-1$; $y'(1)=-4$
26	$I[y]=\int\limits_0^1\left((y'')^2-(y')^2+12ye^{-x}\right)dx$; $y(0)=-1$; $y(1)=3$; $y'(0)=-1$; $y'(1)=0$
27	$I[y]=\int\limits_0^1\left((y'')^2-2(y')^2+y^2+6ye^{2x}\right)dx$; $y(0)=0$; $y(1)=0$; $y'(0)=-1$; $y'(1)=0$
28	$I[y]=\int\limits_0^1\left((y'')^2-y^2-6xy\right)dx$; $y(0)=4$; $y(1)=-1$; $y'(0)=1$; $y'(1)=0$
29	$I[y]=\int\limits_0^1\left((y'')^2+3y'y''+(y')^2+12xy\right)dx$; $y(0)=1$; $y(1)=0$; $y'(0)=-1$; $y'(1)=3$
30	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/2}\left((y'')^2-2(y')^2+y^2+4y\sin x\right)dx$; $y(0)=1$; $y(\pi/2)=0$; $y'(0)=-1$; $y'(\pi/2)=0$

Завдання 6. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють заданим крайовим умовам (допустимі екстремалі).

№ в-та	Завдання
1	$I[y,z]=\int_0^1\left((y')^2+(z')^2+2xy\right)dx;\ \ y(0)=1;\ z(0)=0;\ y(1)=0;\ z(1)=1$
2	$I[y,z]=\int_1^2\left((y')^2+z^2+(z')^2-2xy\right)dx;\ \ y(1)=1;\ z(1)=0;\ y(2)=2;\ z(2)=1$
3	$I[y,z]=\int_0^{\pi}\left(2yz-2y^2+(y')^2-(z')^2\right)dx;\ \ y(0)=0;\ z(0)=0;\ y(\pi)=1;\ z(\pi)=1$
4	$I[y,z]=\int_{-1}^1\left(6xy-3(y')^2+(z')^2\right)dx;\ \ y(-1)=2;\ z(-1)=-1;\ y(1)=0;\ z(1)=1$
5	$I[y,z]=\int_0^1\left((y')^2-2xyz'\right)dx;\ \ y(0)=2;\ z(0)=0;\ y(1)=1;\ z(1)=-1$
6	$I[y,z]=\int_1^2\left((z')^2-xy'z\right)dx;\ \ y(1)=1;\ z(1)=1;\ y(2)=0;\ z(2)=1$
7	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2}\left(y^2+z^2+y'z-yz'-2xz\right)dx;\ \ y(0)=1;\ z(0)=-2;\ \ y(\pi/2)=0;\ \ z(\pi/2)=1.$
8	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2}\left((y')^2+(z')^2+2yz-4y\sin x\right)dx;\ y(0)=0;\ z(0)=2;\ \ y(\pi/2)=0;\ \ z(\pi/2)=0$
9	$I[y,z]=\int_0^1\left(2y'z'-y^2+z^2-6ye^x\right)dx;\ \ y(0)=-2;\ z(0)=1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1$
10	$I[y,z]=\int_0^1\left((y+z)^2+(y')^2+(z')^2+4xy\right)dx;\ y(0)=1;\ z(0)=-2;\ y(1)=0;\ z(1)=0$
11	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-6z\cos x\right)dx;$ $y(0)=-1;z(0)=0;y(\pi/2)=0;z(\pi/2)=-2$
12	$I[y,z]=\int_0^{\pi/4}\left(2y'z'-y^2+z^2-6y\sin 2x\right)dx;\ \ y(0)=1;\ z(0)=0;\ \ y(\pi/4)=0;\ \ z(\pi/4)=-4$
13	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2}\left(2y'z'+y^2+z^2+6y\sin x\right)dx;\ \ y(0)=0;\ z(0)=-1;\ y(\pi/2)=0;\ z(\pi/2)=2$
14	$I[y,z]=\int_0^1\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2-6xz\right)dx;\ \ y(0)=1;\ z(0)=-2;\ y(1)=-2;\ z(1)=0$
15	$I[y,z]=\int_0^{\pi/4}\left(2y'z'-y^2+z^2+2z\cos 2x\right)dx;\ \ y(0)=0;\ z(0)=0;\ \ y(\pi/4)=2;\ \ z(\pi/4)=0$
16	$I[y,z]=\int_0^1\left((y')^2+(z')^2+y^2+z^2+4yz+2xy\right)dx;\ y(0)=4;\ z(0)=-1;\ y(1)=0;\ z(1)=-2$
17	$I[y,z]=\int_0^1\left(2y'z'+y^2+z^2+6ye^{-2x}\right)dx;\ \ y(0)=0;\ z(0)=-2;\ y(1)=-1;\ z(1)=0$

18	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/2}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-6z\sin x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=0;\ \ y(\pi/2)=3;\ \ z(\pi/2)=0$
19	$I[y,z]=\int\limits_0^1\left(2y'z'+y^2+z^2+4ye^x\right)dx;\ y(0)=1;\ z(0)=0;\ y(1)=-1;\ z(1)=0$
20	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/4}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-2y\sin 2x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=1;\ \ y(\pi/4)=0;\ \ z(\pi/4)=0$
21	$I[y,z]=\int\limits_0^1\left((y')^2+(z')^2-y^2-z^2-4yz+2ye^{3x}\right)dx;\ y(0)=0;\ z(0)=-3;\ y(1)=1;\ z(1)=0$
22	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/4}\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2-2y\cos 2x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=2;\ \ y(\pi/4)=0;\ \ z(\pi/4)=0$
23	$I[y,z]=\int\limits_0^1\left((y')^2+(z')^2+y^2+z^2+4yz+2ye^x\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=-1;\ y(1)=2;\ z(1)=-2$
24	$I[y,z]=\int\limits_0^1\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-6xy\right)dx;\ \ y(0)=3;\ z(0)=0;\ \ y(1)=0;\ \ z(1)=-1$
25	$I[y,z]=\int\limits_0^1\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2+8ze^{-2x}\right)dx;\ \ y(0)=-2;\ z(0)=-1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1$
26	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/2}\left(2y'z'-y^2+z^2-12y\cos x\right)dx;\ \ y(0)=1;\ z(0)=-4;\ \ y(\pi/2)=0;\ \ z(\pi/2)=0.$
27	$I[y,z]=\int\limits_0^1\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2+4ye^{2x}\right)dx;\ y(0)=2;\ z(0)=-2;\ y(1)=0;\ z(1)=1$
28	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/4}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-2z\cos 2x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=0;\ \ y(\pi/4)=0;\ \ z(\pi/4)=0$
29	$I[y,z]=\int\limits_0^1\left(2y'z'-y^2+z^2-6ye^x\right)dx;\ \ y(0)=-2;\ z(0)=1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1$
30	$I[y,z]=\int\limits_0^1\left((y')^2+(z')^2-y^2-z^2-4yz+2xz\right)dx;\ y(0)=3;\ z(0)=-1;\ y(1)=1;\ z(1)=0$

Завдання 7. Розв'язати наступні задачі.

а) Варіанти №1–№5: Знайти допустимі екстремалі задачі Лагранжа.

б) Варіанти №6–№9: Знайти допустимі екстремалі ізопериметричної задачі.

в) Варіанти №10–№20: Знайти допустиму екстремаль функціоналу $I[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ при умові, що лівий кінець закріплений $y(x_1)=y_1$, а на правому кінці задана природна крайова умова $F'_{y'}\big|_{x=x_2}=0$.

г) Варіанти №21–№30: Знайти допустиму екстремаль функціоналу $I[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ при умові, що лівий кінець закріплений $y(x_1)=y_1$, а правий кінець $B(x_2;y(x_2))$ знаходиться на заданій лінії $y=g_2(x)$ (виконується умова трансверсальності $\left[F+(g'_2-y')F'_{y'}\right]\big|_{x=x_2}=0$).

№ в-та	Завдання
1	$I[y,z]=\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx;\quad y(0)=-1; z(0)=1; y(1)=0; z(1)=-1; x+y+z=0.$
2	$I[y,z]=\int_0^1 \left((y')^2+z\right)dx;\quad y(0)=1; z(0)=1; y(1)=e; z(1)=e^2+1; z-y^2-x=0.$
3	$I[y,z]=\int_0^1 \left((y')^2+z^2\right)dx;\quad y(0)=0; z(0)=1; y(1)=1; z(1)=\sqrt{2}; y-z^2+1=0.$
4	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2} \left(2yz+z^2\right)dx;\; y'=y+z;\quad y(0)=0;\; z(0)=1; y(\pi/2)=1; z(\pi/2)=-1.$
5	$I[y,z]=\int_0^1 y'z'dx;\quad y'+y+z-x^2=0;\quad y(0)=0;\; z(0)=-1; y(1)=3/2;\; z(1)=-5/2.$
6	$I[y]=\int_0^1 \left((y')^2+x^2\right)dx;\quad y(0)=0; y(1)=0; \int_0^1 y^2dx=2.$
7	$I[y]=\int_0^1 (y')^2dx;\quad y(0)=0; y(1)=\frac{1}{4}; \int_0^1 \left(y-(y')^2\right)dx=\frac{1}{12}.$
8	$I[y]=\int_0^1 \left(x+(y')^2\right)dx;\quad y(0)=0; y(1)=0; \int_0^1 ydx=2.$
9	$I[y]=\int_0^1 (y')^2dx;\quad y(0)=2;\; y(1)=0;\; \int_0^1 xydx=1.$
10	$I[y]=\int_{-1}^1 \left(\frac{2y'}{1+x^2}-(y')^2\right)dx;\quad y(-1)=0$
11	$I[y]=\int_1^3 \left((y')^2-y'\ln x+2x\right)dx;\quad y(1)=2$

12	$I[y]=\int_1^e \left(x(y')^2+yy'\right)dx;\ \ y(1)=0$
13	$I[y]=\int_1^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx;\ \ y(1)=3$
14	$I[y]=\int_0^1 e^y\left(1+xy'\right)dx;\ y(0)=0$
15	$I[y]=\int_0^1 \left(y+2xy'+(y')^2\right)dx;\ \ y(0)=1$
16	$I[y]=\int_0^1 \left(xy+y^2-2y^2y'\right)dx;\ \ y(0)=1$
17	$I[y]=\int_0^1 \left(y^2-2(y')^2\right)e^{-x}dx;\ \ y(0)=0$
18	$I[y]=\int_0^1 \left((y')^2+yy'+12xy\right)dx;\ \ y(0)=1$
19	$I[y]=\int_0^1 (e^y+xy')dx;\ \ y(0)=0$
20	$I[y]=\int_1^2 \left(x^2(y')^2+2y^2+2xy\right)dx;\ y(1)=1$
21	$I[y]=\int_0^1 \left(xy'+(y')^2\right)dx;\ \ y(0)=1;\ g_2(x)=x^2-1$
22	$I[y]=\int_0^1 \left(x+4y+(y')^2\right)dx;\ \ y(0)=0;\ g_2(x)=2x^2-1$
23	$I[y]=\int_0^1 \left(e^y-xy'\right)dx;\ \ y(0)=1;\ g_2(x)=x^2+x$
24	$I[y]=\int_1^2 \left(x^2(y')^2+12y^2\right)dx;\ \ y(1)=1;\ g_2(x)=x^2-2x$
25	$I[y]=\int_0^1 \left(y^2+2xyy'\right)dx;\ \ y(0)=0;\ g_2(x)=2-x^2$
26	$I[y]=\int_{-1}^0 \left(4xy'-(y')^2\right)dx;\ \ y(-1)=0;\ g_2(x)=x-x^2$
27	$I[y]=\int_{-1}^0 \left(12xy-(y')^2\right)dx;\ y(-1)=1;\ g_2(x)=2x^2-x$
28	$I[y]=\int_0^1 \left(y'+(y')^2e^x\right)dx;\ \ y(0)=2;\ g_2(x)=x^2-4x$
29	$I[y]=\int_0^1 \left((y')^2-y^2\right)dx;\ \ y(0)=1;\ g_2(x)=x^2+3x$
30	$I[y]=\int_0^1 \left(xy'-(y')^2\right)dx;\ y(0)=1;\ g_2(x)=2x^2-3x$