

Розділ 2. ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Операційне числення, розроблене на основі перетворення Лапласа, широко використовується для розв'язання диференціальних та інших споріднених з ними рівнянь, що описують процеси функціонування різноманітних об'єктів. Зокрема, для розрахунків перехідних режимів електричних ланцюгів. Однак треба застерегти, що операційний метод безпосередньо незастосовний для ланцюгів, параметри та структура яких змінюються з бігом часу, а також таких, що містять нелінійні елементи.

2.1. Оператор Лапласа. Оригінал і зображення. Таблиці операційного числення

Оригіналом називається довільна функція $f(t)$, що розглядається на півінтервалі $[0; +\infty)$ і має такі властивості:

1) $f(t)$ кусково-неперервна на півінтервалі $[0; +\infty)$, тобто на будь-якому скінченному інтервалі має скінченне число точок розриву першого роду (скінченних стрибків);

2) існують додатні сталі $a > 0$, $M > 0$ такі, що $|f(t)| < M e^{at}$ при довільному значенні t із півінтервалу $[0; +\infty)$.

Для таких функцій $f(t)$ вводиться **оператор Лапласа (перетворення Лапласа)** наступним чином:

$$L(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt ,$$

де p – **параметр**.

Зауваження 1. Параметр p – це комплексна змінна $p = \alpha + i\beta$ з додатною дійсною частиною $\alpha > 0$, що забезпечує збіжність невластивого інтеграла.

Оператор – це відображення, що переводить функцію у функцію.

Інтегральний оператор Лапласа кожному оригіналу $f(t)$ ставить у відповідність єдину функцію

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt ,$$

яка називається **зображенням**.

Позначається

$$L(f(t)) = F(p) \text{ або } f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p), \text{ або } f(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} F(p) .$$

Спеціальний розділ вищої математики, в якому вивчається перетворення Лапласа та його застосування, називається **операційним численням**. Властивості перетворення Лапласа відображені в таблицях 1 і 2. Наведені в таблицях основні співвідношення докладно розглядаються нижче.

Таблиця 1 – Правила операційного числення

№ п/п	Операція, властивість	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	Лінійність	$C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)$	$C_1 F_1(p) \pm C_2 F_2(p)$
2	Зміщення аргументу зображення (затухання оригіналу)	$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
3*	Зміна масштабу (подібність)	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
4	Зміщення аргументу оригіналу (запізнювання оригіналу)	$f(t-b) \times \eta(t-b), b > 0$	$e^{-bp} F(p)$
5*	Випередження аргументу оригіналу	$f(t+b), b > 0, t > 0$	$e^{bp} \left(F(p) - \int_0^b e^{-pt} f(t) dt \right)$
6	Диференціювання зображення	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
6a	Перша похідна зображення	$t f(t)$	$-F'(p)$
7	Зображення похідних оригіналу	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
7a	Зображення першої похідної оригіналу	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
7б	Зображення другої похідної оригіналу	$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$
8	Зображення інтеграла від оригіналу	$\int_0^t f(u) du$	$\frac{1}{p} F(p)$
9*	Згортання оригіналів (множення зображень)	$\int_0^t f_1(u) \times f_2(t-u) du$	$F_1(p) F_2(p)$
10*	Інтеграл Дюамеля	$\int_0^t f'(u) \times \varphi(t-u) du + f(0)\varphi(t)$	$pF(p)\Phi(p)$
11*	Інтегрування зображення	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(z) dz$
12a*	Диференціювання за параметром	$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha)$	$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(p, \alpha)$
12б*	Інтегрування за параметром	$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha) d\alpha$	$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(p, \alpha) d\alpha$

Таблиця 2 – Основні оригінали та їх зображення

№ п/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t-b) = \begin{cases} 1, & t > b \\ 0, & t < b \end{cases}$	$e^{-bp} \cdot \frac{1}{p}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
4	$\sin bt$	$\frac{b}{p^2 + b^2}$
5	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2 + b^2}$
6	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$
7	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$
8	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
8a	t	$\frac{1}{p^2}$
8б	t^2	$\frac{2}{p^3}$
9	$t \eta(t-b)$	$e^{-bp} \left(b \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \right)$
10	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
10a	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
11	$t \sin bt$	$\frac{2pb}{(p^2 + b^2)^2}$
12	$t \cos bt$	$\frac{p^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2}$
13	$\frac{1}{2b^3} (\sin bt - -bt \cos bt)$	$\frac{1}{(p^2 + b^2)^2}$
14	$\sin(bt - \alpha)$	$e^{-\frac{\alpha}{b}p} \times \frac{b}{p^2 + b^2}$
15	$\cos(bt - \alpha)$	$e^{-\frac{\alpha}{b}p} \times \frac{p}{p^2 + b^2}$

16	$shbt$	$\frac{b}{p^2 - b^2}$
17	$chbt$	$\frac{p}{p^2 - b^2}$
18	$\delta(t)$	1
19	$\delta(t-b)$	e^{-bp}
20	$\delta^{(n)}(t)$	p^n
20a	$\delta'(t)$	p

Зауваження 2. Будь-який оригінал $f(t)$ розглядається на півінтервалі $[0; +\infty)$. Його зручно продовжити рівним нулю на всю числову пряму, поклавши $f(t)=0, t < 0$.

Зауваження 3. З означення випливає, що оригінал $f(t)$ може прямувати до нескінченності при $t \rightarrow +\infty$, але не надто швидко. Наприклад, функція $f(t)=e^{t^2}$ не є оригіналом.

Функції, що відповідають умові 2) з означення оригіналу, називаються **функціями експоненціального росту**.

Функція $f(t)=e^{t^2}$ до таких не належить.

Теорема 1 (теорема про поведінку зображень на нескінченності). Нехай $f(t)$ - довільний оригінал, $F(p)$ - його зображення. Тоді $\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p)=0$, тобто **будь-яке зображення прямує до нуля, коли параметр p прямує до нескінченності**.

Доведення. $|f(t)| < Me^{at}; a > 0, M > 0; p > a;$

$$\begin{aligned}
 |F(p)| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-pt} f(t)| dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} |f(t)| dt < \int_0^{+\infty} e^{-pt} M e^{at} dt = M \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t} dt = \\
 &= M \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N e^{-(p-a)t} dt = M \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)} \right) \Bigg|_0^N = M/(p-a),
 \end{aligned}$$

бо $e^{-(p-a)N} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$ ($p > a$).

Якщо $p \rightarrow +\infty$, то $M/(p-a) \rightarrow 0$. Отже, $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow +\infty$.

Теорема 2 (теорема єдинності). Якщо дві неперервні функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$ мають одне і те ж зображення $F(p)$, то ці функції тотожно рівні, тобто

$$\text{якщо } f_1(t) \stackrel{\cdot}{=} F_1(p); \quad f_2(t) \stackrel{\cdot}{=} F_2(p); \quad F_1(p) = F_2(p), \text{ то } f_1(t) = f_2(t).$$

(Без доведення).

2.2. Одинична ступінчаста функція Хевісайда $\eta(t)$ та її зображення

Функція $\eta(t)$, яка задається формулою

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

називається *одиничною ступінчастою функцією Хевісайда* (рис. 1). (Приймаємо $f(t)=1$).

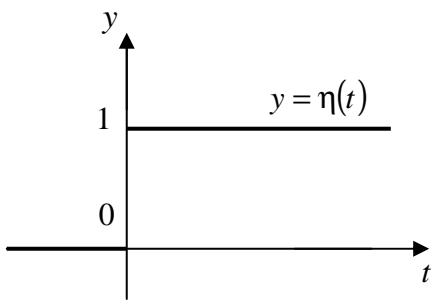


Рис. 1

$$\begin{aligned} L(\eta(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \eta(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N e^{-pt} \cdot 1 dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) \Big|_0^N = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e^{-pN}}{p} + \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p}, \text{ бо } \lim_{N \rightarrow +\infty} e^{-pN} = 0 \quad (p > 0). \end{aligned}$$

Отже,

$$\eta(t) \doteq \frac{1}{p} \text{ або } 1 \doteq \frac{1}{p}.$$

Зауваження. Основи операційного числення розробив Хевісайд як інструмент для вивчення характеру проходження сигналів у трансатлантичному телеграфно-телефонному кабелі, що з'єднав Європу і Північну Америку наприкінці XIX століття. За допомогою одиничної функції $\eta(t)$ він описав стандартні сигнали азбуки Морзе (крапка і тире). За Хевісайдом, довільну імпульсну функцію $y = y(t)$, яка скрізь дорівнює нулю, окрім деякого скінченного інтервалу $(\alpha; \beta)$ (рис. 2)

$$y = y(t) = \begin{cases} 0, & t < \alpha; \\ f(t), & t \in (\alpha; \beta); \\ 0, & t > \beta, \end{cases}$$

можна подати однією формулою

$$y = f(t)(\eta(t - \alpha) - \eta(t - \beta)),$$

де $\eta(t - b)$ – одинична функція Хевісайда з запізнюванням

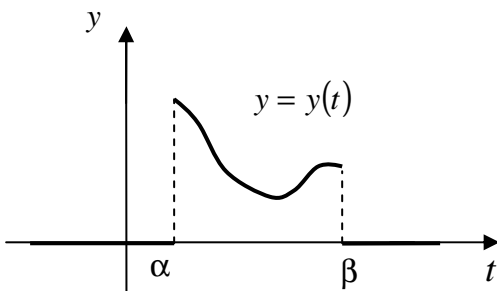


Рис. 2

$$\eta(t - b) = \begin{cases} 1, & t > b; \\ 0, & t < b. \end{cases}$$

2.3. Зображення функцій $\sin bt$, $\cos bt$

На основі формули інтегрування

$$\int e^{at} \sin bt \, dt = \frac{-be^{at} \cos bt + ae^{at} \sin bt}{a^2 + b^2}$$

маємо

$$\begin{aligned} L(\sin bt) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin bt \, dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N e^{-pt} \sin bt \, dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left. \frac{-be^{pt} \cos bt + (-p)e^{-pt} \sin bt}{p^2 + b^2} \right|_0^N = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{-be^{-pN} \cos bN - pe^{-pN} \sin bN}{p^2 + b^2} - \frac{-b}{p^2 + b^2} \right) = \frac{b}{p^2 + b^2}, \end{aligned}$$

бо $e^{-pN} \rightarrow 0$; $\cos bN$ і $\sin bN$ - обмежені функції.

Отже,

$$\sin bt \stackrel{\cdot}{=} \frac{b}{p^2 + b^2}.$$

Аналогічно, на основі формули інтегрування

$$\int e^{at} \cos bt \, dt = \frac{ae^{at} \cos bt + be^{at} \sin bt}{a^2 + b^2}$$

маємо

$$L(\cos bt) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos bt \, dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{-pe^{-pt} \cos bt + be^{-pt} \sin bt}{p^2 + b^2} \right) \Big|_0^N = \frac{p}{p^2 + b^2}.$$

Отже,

$$\cos bt \stackrel{\cdot}{=} \frac{p}{p^2 + b^2}.$$

2.4. Теорема зміщення (затухання)

Теорема 3 (теорема зміщення (затухання)). Якщо функція $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $F(p+a)$ служить зображенням функції $e^{-at} f(t)$:

$$f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p) \Rightarrow e^{-at} f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p+a).$$

Доведення. $L(e^{-at} f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} f(t) dt = F(p+a).$

2.5. Зображення функцій e^{-at} , $e^{-at} \sin bt$, $e^{-at} \cos bt$

$$1 \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p} \Rightarrow e^{-at} = e^{-at} \times 1 \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p+a}; \quad \sin bt \stackrel{\cdot}{=} \frac{b}{p^2+b^2} \Rightarrow e^{-at} \sin bt \stackrel{\cdot}{=} \frac{b}{(p+a)^2+b^2};$$

$$\cos bt \stackrel{\cdot}{=} \frac{p}{p^2+b^2} \Rightarrow e^{-at} \cos bt \stackrel{\cdot}{=} \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}.$$

2.6. Теорема про лінійність оператора Лапласа

Теорема 4 (теорема про лінійність оператора Лапласа). Зображення алгебраїчної суми двох функцій, помножених на сталі величини, дорівнює відповідній сумі зображень цих функцій, помножених на відповідні сталі

$$L(C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)) = C_1 L(f_1(t)) \pm C_2 L(f_2(t)),$$

тобто якщо $f(t) = C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)$ і $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$, $f_1(t) \stackrel{\cdot}{=} F_1(p)$, $f_2(t) \stackrel{\cdot}{=} F_2(p)$, то $F(p) = C_1 F_1(p) \pm C_2 F_2(p)$.

Доведення.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} (C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)) dt = C_1 \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_1(t) dt \pm C_2 \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_2(t) dt = C_1 F_1(p) \pm C_2 F_2(p).$$

Приклад 1. Знайти зображення функції $f(t) = 3 \cos 2t - 5 \sin 2t$.

Розв'язання. $F(p) = 3L(\cos 2t) - 5L(\sin 2t) = 3 \frac{p}{p^2+2^2} - 5 \frac{2}{p^2+2^2} = \frac{3p-10}{p^2+4}.$

Приклад 2. Знайти оригінал функції $F(p) = \frac{5p+8}{p^2+6p+13}.$

Розв'язання. $F(p) = \frac{5p+8}{p^2+6p+13} = \frac{5p+8}{(p+3)^2+2^2} =$

$$= \left| \frac{p+3}{(p+3)^2+2^2} \stackrel{\cdot}{=} e^{-3t} \cos 2t; \quad \frac{2}{(p+3)^2+2^2} \stackrel{\cdot}{=} e^{-3t} \sin 2t \right| = 5 \cdot \frac{p+3+8/5-3}{(p+3)^2+2^2} =$$

$$= 5 \cdot \frac{p+3}{(p+3)^2+2^2} - \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{(p+3)^2+2^2} \stackrel{\cdot}{=} 5e^{-3t} \cos 2t - \frac{7}{2} e^{-3t} \sin 2t = f(t).$$

2.7. Зображення функцій $shbt$, $chbt$

Використовуючи формули

$$shbt = \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2}; \quad chbt = \frac{e^{bt} + e^{-bt}}{2}$$

і зображення

$$e^{-at} \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p+a}; \quad e^{at} \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p-a},$$

а також властивість лінійності, маємо

$$shbt = \frac{1}{2}(e^{bt} - e^{-bt}) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-b} - \frac{1}{p+b} \right) = \frac{p+b-p+b}{2(p-b)(p+b)} = \frac{b}{p^2-b^2};$$

$$chbt = \frac{1}{2}(e^{bt} + e^{-bt}) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p+b} \right) = \frac{p}{p^2-b^2}.$$

Отже,

$$shbt \stackrel{\cdot}{=} \frac{b}{p^2-b^2}; \quad chbt \stackrel{\cdot}{=} \frac{p}{p^2-b^2}.$$

2.8*. Теорема подібності (зміни масштабу)

Теорема 5 (теорема подібності (зміни масштабу)).

Якщо функція $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$ служить зображенням функції $f(at)$, де $a > 0$:

$$f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p) \Rightarrow f(at) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a > 0.$$

Доведення. $L(f(at)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at) dt = \left| u = at; \quad t = \frac{u}{a}; \quad dt = \frac{du}{a} \right|;$

$$u_n = 0; \quad u_g = +\infty \left| = \int_0^{+\infty} e^{-p\frac{u}{a}} f(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}u} f(u) du = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

2.9. Теорема запізнювання (зсув аргументу в оригіналу)

Теорема 6 (теорема запізнювання (зсув аргументу у оригіналу)). Нехай функція $f(t)$ тотожно дорівнює нулю при $t < 0$. Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, то функція $e^{-bp}F(p)$ служить зображенням функції $f(t-b)$, де $b > 0$ (рис. 3), тобто

$$\text{якщо } f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p), \text{ то } f(t-b) \stackrel{\cdot}{=} e^{-bp}F(p), \quad b > 0.$$

Доведення. $L(f(t-b)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-b) dt = \int_0^b e^{-pt} f(t-b) dt + \int_b^{+\infty} e^{-pt} f(t-b) dt =$

$$= \left| \begin{array}{l} f(t-b) = 0 \\ \text{при } t < b \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^b e^{-pt} f(t-b) dt = 0 \left| = \int_b^{+\infty} e^{-pt} f(t-b) dt = \left| \begin{array}{l} u = t-b; \quad t = u+b; \\ du = dt; \quad u_n = 0; \quad u_g = +\infty \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-p(u+b)} f(u) du = e^{-bp} \int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u) du = e^{-bp} F(p).$$

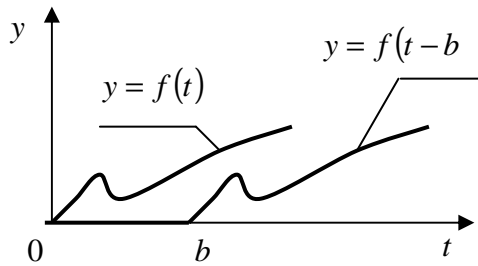


Рис. 3

Зауваження 1. Для явного врахування умо-

ви

$$f(t-b) = 0 \text{ при } t < b$$

формулу теореми запізнювання можна подати так

$$f(t-b)\eta(t-b) \doteq e^{-bp} F(p), \quad b > 0,$$

де $\eta(t-b)$ – одинична функція Хевісайда з за-

пізнюванням.

Зауваження 2. Згідно з теоремою запізнювання зображенням $Y(p)$ довільної імпульсної функції (рис. 2) $y(t)$, яку можна подати однією формулою

$$y(t) = f(t)(\eta(t-\alpha) - \eta(t-\beta)),$$

служить $Y(p) = e^{-\alpha p} F(p) - e^{-\beta p} F(p)$, де $f(t) \doteq F(p)$.

Приклад 1. Для одиничної функції Хевісайда з запізнюванням $\eta(t-b)$ знайти зображення.

Розв'язання. $\eta(t) \doteq \frac{1}{p} \Rightarrow \eta(t-b) \doteq e^{-bp} \cdot \frac{1}{p}$.

Приклад 2. За відомим зображенням $F(p) = \frac{2e^{-\pi p} + 2e^{-2\pi p}}{p^2 + 1}$ знайти відповід-

ний оригінал.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} F(p) &= 2 \cdot e^{-\pi p} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + 2 \cdot e^{-2\pi p} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \doteq 2 \sin(t - \pi) \times \eta(t - \pi) + 2 \sin(t - 2\pi) \eta(t - 2\pi) = \\ &= -2 \sin t \eta(t - \pi) + 2 \sin t \eta(t - 2\pi) = 2 \sin t (\eta(t - 2\pi) - \eta(t - \pi)) = f(t). \end{aligned}$$

Графік одержаного оригіналу подано на рис. 4.

Теорема 7* (теорема випередження). Якщо $F(p)$ є зображення функції

$f(t)$, то функція $e^{bp} \left(F(p) - \int_0^b e^{-pt} f(t) dt \right)$ служить зображенням функції $f(t+b)$,

де $b > 0$ і $t > 0$ (рис. 5).

Доведення.

$$\begin{aligned} L(f(t+b)) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t+b) dt = \left| \begin{array}{l} u = t+b; \quad t = u-b; \\ du = dt; \quad u_n = b; \quad u_g = +\infty \end{array} \right| = \int_b^{+\infty} e^{-p(u-b)} f(u) du = \\ &= e^{bp} \int_b^{+\infty} e^{-pu} f(u) du = \left(\int_b^0 e^{-pu} f(u) du + \int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u) du \right) = e^{bp} \left(- \int_0^b e^{-pu} f(u) du + F(p) \right). \end{aligned}$$

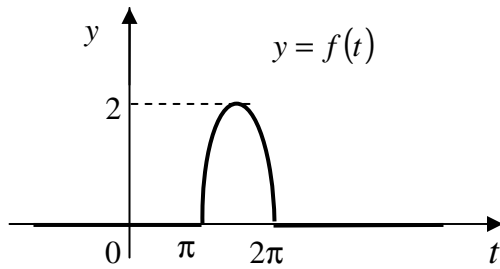


Рис. 4

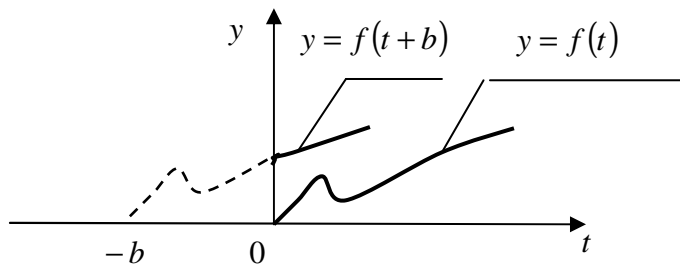


Рис. 5

2.10*. Зображення функцій $\sin(bt - \alpha)$, $\cos(bt - \alpha)$

Нехай $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ і $b > 0, \alpha > 0$, тоді застосовуючи послідовно теореми подібності та запізнювання, маємо

$$f(bt - \alpha) = f\left(b\left(t - \frac{\alpha}{b}\right)\right) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{b} e^{-\frac{\alpha}{b}p} F\left(\frac{p}{b}\right).$$

Використовуючи останнє співвідношення і формули

$$\sin t \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p^2 + 1}, \quad \cos t \stackrel{\cdot}{=} \frac{p}{p^2 + 1},$$

одержимо

$$\sin(bt - \alpha) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{b} e^{-\frac{\alpha}{b}p} \times \frac{1}{(p/b)^2 + 1} = e^{-\frac{\alpha}{b}p} \times \frac{b}{p^2 + b^2};$$

$$\cos(bt - \alpha) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{b} e^{-\frac{\alpha}{b}p} \times \frac{p/b}{(p/b)^2 + 1} = e^{-\frac{\alpha}{b}p} \times \frac{p}{p^2 + b^2}.$$

2.11. Диференціювання зображення

Теорема 8 (теорема про диференціювання зображення). Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$ служить зображенням функції $t^n f(t)$:

$$f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p) \Rightarrow t^n f(t) \stackrel{\cdot}{=} (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p).$$

Доведення. Диференціюючи ліву і праву частини формули

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

по параметру p , одержимо

$$F'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{d}{dp} e^{-pt} \right) f(t) dt = \int_0^{+\infty} (-t) e^{-pt} f(t) dt = - \int_0^{+\infty} e^{-pt} t f(t) dt .$$

Отже,

$$F'(p) \doteq -t f(t) \quad \text{або} \quad t f(t) \doteq -F'(p) .$$

Аналогічно знаходимо другу похідну зображення

$$F''(p) = \frac{d}{dp} \left(- \int_0^{+\infty} e^{-pt} t f(t) dt \right) = - \int_0^{+\infty} \left(\frac{d}{dp} e^{-pt} \right) t f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^2 f(t) dt .$$

Отже,

$$t^2 f(t) \doteq F''(p) .$$

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільної n -тої похідної зображення маємо співвідношення

$$t^n f(t) \doteq (-1)^n F^{(n)}(p) .$$

2.12. Зображення функцій t , t^n , $t \eta(t-b)$,

$$t e^{-at}, t^n e^{-at}, t \sin bt, t \cos bt$$

Використовуючи формули для зображення одиничної функції Хевісайда і похідної зображення, одержимо

$$1 \doteq \frac{1}{p} \Rightarrow t = t \times 1 \doteq - \left(\frac{1}{p} \right)' = - \left(- \frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{p^2} .$$

Отже,

$$t \doteq \frac{1}{p^2} .$$

Тоді

$$t^2 = t \times t \doteq - \left(\frac{1}{p^2} \right)' = \frac{2}{p^3} = \frac{1 \times 2}{p^3}; \quad t^3 = t \times t^2 \doteq - \left(\frac{2}{p^3} \right)' = \frac{1 \times 2 \times 3}{p^4} .$$

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільного n маємо співвідношення

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}} ,$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ – факторіал числа n .

Використовуючи формули для зображення одиничної функції Хевісайда з запізнюванням $\eta(t-b)$ і похідної зображення, одержимо

$$\eta(t-b) \doteq \frac{1}{p} e^{-bp} \Rightarrow t \eta(t-b) \doteq - \left(\frac{e^{-bp}}{p} \right)' = - \frac{e^{-bp} (-b)p - e^{-bp}}{p^2} = e^{-bp} \left(b \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \right) .$$

Отже,

$$t\eta(t-b) \doteq e^{-bp} \left(b \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \right).$$

Використовуючи зображення функцій t , t^n і теорему зміщення (затухання), одержимо зображення функцій te^{-at} і $t^n e^{-at}$

$$te^{-at} \doteq \frac{1}{(p+a)^2}; \quad t^n e^{-at} \doteq \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}.$$

Використовуючи формули для зображення функцій $\sin bt$, $\cos bt$ і похідної зображення, одержимо

$$\sin bt \doteq \frac{b}{p^2 + b^2} \Rightarrow t \sin bt \doteq - \left(\frac{b}{p^2 + b^2} \right)' = -b \cdot \frac{-2p}{(p^2 + b^2)^2} = \frac{2pb}{(p^2 + b^2)^2};$$

$$\cos bt \doteq \frac{p}{p^2 + b^2} \Rightarrow t \cos bt \doteq - \left(\frac{p}{p^2 + b^2} \right)' = - \frac{p^2 + b^2 - 2p \cdot p}{(p^2 + b^2)^2} = \frac{p^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2}.$$

Отже,

$$t \sin bt \doteq \frac{2pb}{(p^2 + b^2)^2}; \quad t \cos bt \doteq \frac{p^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2}.$$

2.13. Зображення похідних оригіналу

Теорема 9 (теорема про зображення похідної оригіналу). Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $pF(p) - f(0)$ служить зображенням похідної $f'(t)$:

$$f(t) \doteq F(p) \Rightarrow f'(t) \doteq pF(p) - f(0).$$

Доведення. Використовуючи означення перетворення Лапласа і формулу інтегрування частинами, одержимо

$$L(f'(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \left| \begin{array}{l} u = e^{-pt}; \quad du = -pe^{-pt} dt; \\ dv = f'(t) dt; \quad v = \int f'(t) dt = f(t) \end{array} \right| = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{+\infty} -$$

$$- \int_0^{+\infty} f(t) \times (-pe^{-pt}) dt = \left| \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} f(t) = 0 \right| = -f(0) + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(0).$$

$$\text{Отже, } f'(t) \doteq pF(p) - f(0).$$

Застосовуючи цю формулу повторно, одержимо

$$L(f''(t)) = L((f'(t))') = pL(f'(t)) - f'(0) = p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

$$\text{Отже, } f''(t) \doteq p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

На основі методу математичної індукції для довільної n -тої похідної оригіналу маємо співвідношення

$$\dot{f}^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Зауваження. Формули для зображення похідних спрощуються, якщо всі початкові умови нульові $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, Тоді

$$\dot{f}(t) \doteq F(p); \quad \dot{f}'(t) \doteq pF(p); \quad \dot{f}''(t) \doteq p^2 F(p); \quad \dot{f}^{(n)}(t) \doteq p^n F(p).$$

2.14. Відшукання оригіналу зображення, яке має вигляд раціонального дробу

У загальному випадку, знаходження оригіналу за його зображенням – досить складна задача. Обмежимося лише її розв'язанням за допомогою таблиці відповідності оригіналів та їх зображень. Розглянемо найбільш поширений випадок, коли зображення має вигляд раціонального дробу.

Правило. Нехай треба знайти оригінал для зображення $F(p)$ у вигляді раціонального дробу

$$F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)},$$

де $P_m(p)$ і $Q_n(p)$ – многочлени відповідно степеня m і n .

Тоді:

1) Якщо дріб неправильний ($m \geq n$), то з нього треба виділити цілу частину.

2) Правильний дріб ($m < n$) треба розкласти на суму елементарних дробів виду

$$\frac{A}{(p-a)^k}; \quad \frac{Bp+C}{(p^2+a_1p+a_2)^k}; \quad k \geq 1; \quad D = a_1^2 - 4a_2 < 0.$$

3) Знайти оригінали для цілої частини і кожного елементарного дробу, скориставшись властивістю лінійності перетворення Лапласа і знайти оригінал початкового дробу.

4) Спростити одержаний вираз.

Приклад 1. Знайти оригінал за його зображенням:

$$F(p) = \frac{3p-11}{(p-1)(p+2)(p^2-4p+5)}$$

Розв'язання. $F(p) = \frac{3p-11}{(p-1)(p+2)(p^2-4p+5)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+2} + \frac{Cp+D}{p^2-4p+5} =$

$$= | A(p+2)(p^2-4p+5) + B(p-1)(p^2-4p+5) + (Cp+D)(p-1)(p+2) = 3p-11$$

$$\begin{array}{l}
 p=1: \\
 p=-2: \\
 p^3: \\
 p^0:
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 6A = -8 \\
 -3 \cdot 17B = -17 \\
 A + B + C = 0 \\
 10A - 5B - 2D = -11
 \end{array} \right.
 \left| \begin{array}{l}
 A = -\frac{4}{3}; \quad B = \frac{1}{3}; \\
 -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} + C = 0; \quad C = 1; \quad D = -2 \\
 -\frac{40}{3} - \frac{5}{3} - 2D = -11;
 \end{array} \right.
 = \frac{-\frac{4}{3}}{p-1} + \frac{\frac{1}{3}}{p+2} +$$

$$+ \frac{1p-2}{p^2-4p+5} = -\frac{4}{3} \times \frac{1}{p-1} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{p+2} + \frac{p-2}{(p-2)^2+1} \stackrel{\bullet}{=} -\frac{4}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t} + e^{2t} \cos t = f(t).$$

2.15. Операційний метод розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем

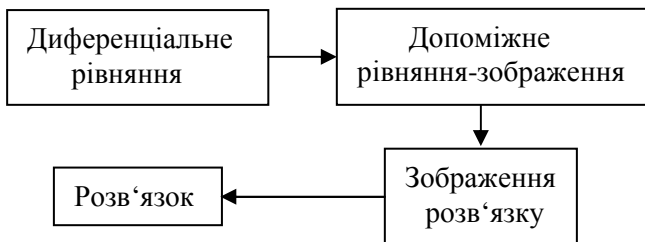


Рис. 6

Загальна схема методу показана на рис.6. Застосування цієї схеми докладно розберемо на прикладах.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку $\begin{cases} y' + 3y = 12t, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Нехай $y(t) \stackrel{\bullet}{=} Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \stackrel{\bullet}{=} pY(p) - y(0) = pY(p); \quad t \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p^2}.$$

Одержимо **операторну форму** диференціального рівняння

$$pY(p) + 3Y(p) = 12 \times \frac{1}{p^2}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$Y(p)(p+3) = \frac{12}{p^2}; \quad Y(p) = \frac{12}{p^2(p+3)}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{12}{p^2(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+3} \quad \left| \quad 12 = Ap(p+3) + B(p+3) + Cp^2; \right.$$

$$\begin{array}{l}
 p=0: \\
 p=-3: \\
 p^2:
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 3B = 12; \\
 9C = 12; \\
 A + C = 0;
 \end{array} \right.
 \left| \begin{array}{l}
 B = 12/3 = 4; \\
 C = 12/9 = 4/3; \\
 A = -C = -4/3;
 \end{array} \right.
 = \frac{-\frac{4}{3}}{p} + \frac{4}{p^2} + \frac{\frac{4}{3}}{p+3} =$$

$$= -\frac{4}{3} \frac{1}{p} + 4 \frac{1}{p^2} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{p+3} \stackrel{\bullet}{=} -\frac{4}{3} \times 1 + 4 \times t + \frac{4}{3} e^{-3t} = \frac{4}{3} e^{-3t} + 4t - \frac{4}{3} = y(t).$$

Отже, $y(t) = \frac{4}{3} e^{-3t} + 4t - \frac{4}{3}$ – шуканий розв'язок.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' + 4y = e^{3t} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \stackrel{\bullet}{=} Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y''(t) \stackrel{\bullet}{=} p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 2; \quad e^{3t} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p-3}.$$

Одержимо $p^2 Y(p) - 2 + 4Y(p) = \frac{1}{p-3}$ – допоміжне рівняння-зображення.

Розв'яжемо це рівняння

$$Y(p)(p^2 + 4) = \frac{1}{p-3} + 2; \quad Y(p)(p^2 + 4) = \frac{1+2p-6}{p-3}; \quad Y(p) = \frac{2p-5}{(p-3)(p^2+4)}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{2p-5}{(p-3)(p^2+4)} = \frac{A}{p-3} + \frac{Bp+C}{p^2+4} \quad \left| \begin{aligned} 2p-5 &= A(p^2+4) + (Bp+C)(p-3); \end{aligned} \right.$$

$$\begin{array}{l} p=3: \\ p^2: \\ p^0: \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} 13A=1; & A=1/13; \\ A+B=0; & B=-A=-1/13; \\ 4A-3C=-5; & 4/13-3C=-5; \quad C=23/13; \end{array} \right. \left| \begin{aligned} &= \frac{1}{13} \times \frac{1}{p-3} + \frac{-\frac{1}{13}p + \frac{23}{13}}{p^2+4} = \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{1}{13} \times \frac{1}{p-3} - \frac{1}{13} \frac{p}{p^2+2^2} + \frac{23}{13} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{p^2+2^2} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{13} e^{3t} - \frac{1}{13} \cos 2t + \frac{23}{26} \sin 2t = y(t).$$

Отже, $y(t) = \frac{1}{13} e^{3t} - \frac{1}{13} \cos 2t + \frac{23}{26} \sin 2t$ – шуканий розв'язок.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 4 \\ y(0) = 1; \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \stackrel{\bullet}{=} Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 1; \quad y''(t) \doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p + 1; \quad 1 \doteq \frac{1}{p}.$$

Одержимо $p^2Y(p) - p + 1 - 2(pY(p) - 1) + Y(p) = 4 \times \frac{1}{p}$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$Y(p)(p^2 - 2p + 1) = \frac{4}{p} + p - 3; \quad Y(p)(p-1)^2 = \frac{p^2 - 3p + 4}{p}; \quad Y(p) = \frac{p^2 - 3p + 4}{p(p-1)^2}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{p^2 - 3p + 4}{p(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{(p-1)^2} \quad | \quad p^2 - 3p + 4 = A(p-1)^2 + Bp(p-1) + Cp;$$

$$\begin{array}{l} p=0: \\ p=1: \\ p^2: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A=4; \\ C=2; \\ A+B=1; \end{array} \right. \quad B=1-A=-3 \quad \left| \quad = 4 \times \frac{1}{p} - 3 \times \frac{1}{p-1} + 2 \times \frac{1}{(p-1)^2} \doteq \right.$$

$$\doteq 4 - 3e^t + 2te^t = y(t). \quad \text{Отже, } y(t) = 2te^t - 3e^t + 4 \quad \text{– шуканий розв'язок.}$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' + 9y = 24 \cos 3t \\ y(0) = 0; \quad y'(0) = 3 \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \doteq Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y''(t) \doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 3; \quad \cos 3t \doteq \frac{p}{p^2 + 3^2} = \frac{p}{p^2 + 9}.$$

Одержимо $p^2Y(p) - 3 + 9Y(p) = 24 \times \frac{p}{p^2 + 9}$ – допоміжне рівняння-зображення.

Розв'яжемо це рівняння

$$Y(p)(p^2 + 9) = \frac{24p}{p^2 + 9} + 3; \quad Y(p) = \frac{24p}{(p^2 + 9)^2} + \frac{3}{p^2 + 9}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{24p}{(p^2 + 9)^2} + \frac{3}{p^2 + 9} = \frac{24}{2 \times 3} \times \frac{2p \times 3}{(p^2 + 3^2)^2} + \frac{3}{p^2 + 3^2} \doteq 4t \sin 3t + \sin 3t = y(t)$$

$$\text{Отже, } y(t) = (4t + 1) \sin 3t \quad \text{– шуканий розв'язок.}$$

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку

$$\begin{cases} y''' + 4y'' + 13y' = 0 \\ y(0) = -2; \quad y'(0) = 0; \quad y''(0) = 13 \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \doteq Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) + 2; \quad y''(t) \doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) + 2p;$$

$$y'''(t) \doteq p^3Y(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0) = p^3Y(p) + 2p^2 - 13.$$

Одержимо $p^3Y(p) + 2p^2 - 13 + 4(p^2Y(p) + 2p) + 13(pY(p) + 2) = 0$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$Y(p)p(p^2 + 4p + 13) = -2p^2 + 13 - 8p - 26; \quad Y(p) = \frac{-2p^2 - 8p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{-2p^2 - 8p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 4p + 13} \quad | \quad A(p^2 + 4p + 13) + (Bp + C)p = -2p^2 - 8p - 13;$$

$$\begin{array}{l} p^2: \\ p: \\ p^0: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A + B = -2; \\ 4A + C = -8; \\ 13A = -13; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} C = -8 - 4A = -8 + 4 = -4; \\ B = -2 - A = -2 + 1 = -1 \end{array} \quad \left| \quad = \frac{-1}{p} + \frac{-1p - 4}{p^2 + 4p + 13} = \right.$$

$$= -\frac{1}{p} - \frac{p + 2 - 2 + 4}{(p + 2)^2 + 3^2} = -\frac{1}{p} - \frac{p + 2}{(p + 2)^2 + 3^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(p + 2)^2 + 3^2} \doteq$$

$$\doteq -1 - e^{-2t} \cos 3t - \frac{2}{3} e^{-2t} \sin 3t = y(t).$$

Отже, $y(t) = -1 - e^{-2t} \cos 3t - \frac{2}{3} e^{-2t} \sin 3t$ – шуканий розв'язок.

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші для системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} x' = x + 4y; \\ y' = y - x; \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1.$$

Розв'язання. Нехай $x(t) \doteq X(p); \quad y(t) \doteq Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв'язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень

$$x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p); \quad y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 1.$$

Одержимо операторну форму диференціальної системи

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 4Y(p) \\ pY(p) - 1 = Y(p) - X(p) \end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв’яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, за формулами Крамера

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 4Y(p) = 0; \\ X(p) + (p-1)Y(p) = 1; \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -4 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^2 + 4; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = p-1; \quad X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{(p-1)^2 + 4}; \quad Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4}$$

– зображення шуканого розв’язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$X(p) = 2 \times \frac{2}{(p-1)^2 + 2^2} \stackrel{\bullet}{=} 2e^t \sin 2t = x(t); \quad Y(p) = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 2^2} \stackrel{\bullet}{=} e^t \cos 2t = y(t).$$

$$\text{Отже, } \begin{cases} x(t) = 2e^t \sin 2t; \\ y(t) = e^t \cos 2t \end{cases} \text{ – шуканий розв’язок.}$$

Приклад 7. Розв’язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} x' = -y + \cos t; \\ y' = -x + \sin t; \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 0.$$

Розв’язання. Нехай $x(t) \stackrel{\bullet}{=} X(p)$; $y(t) \stackrel{\bullet}{=} Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв’язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень

$$x'(t) \stackrel{\bullet}{=} pX(p) - x(0) = pX(p); \quad \cos t \stackrel{\bullet}{=} \frac{p}{p^2 + 1}; \quad y'(t) \stackrel{\bullet}{=} pY(p) - y(0) = pY(p); \quad \sin t \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Одержимо

$$\begin{cases} pX(p) = -Y(p) + \frac{p}{p^2 + 1}; \\ pY(p) = -X(p) + \frac{1}{p^2 + 1} \end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв’яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, методом вилучення (методом Гаусса)

$$\begin{cases} Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1} - pX(p); \\ p\left(\frac{p}{p^2 + 1} - pX(p)\right) = -X(p) + \frac{1}{p^2 + 1}; \end{cases} \quad X(p)(p^2 - 1) = \frac{p^2}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2 + 1};$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 1}; \quad Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1} - p \times \frac{1}{p^2 + 1} = 0$$

– зображення шуканого розв’язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \stackrel{\bullet}{=} \sin t = x(t); \quad Y(p) = 0 \stackrel{\bullet}{=} 0 = y(t).$$

Отже, $\begin{cases} x(t) = \sin t; \\ y(t) = 0 \end{cases}$ – шуканий розв'язок.

Приклад 8*. Розв'язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} x' + y' - 2x - 2y = 1 - 2t; \\ x'' - 2y' + x = 0; \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad x'(0) = 0; \quad y(0) = 0.$$

Розв'язання. Нехай $x(t) \doteq X(p)$; $y(t) \doteq Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв'язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень

$$\begin{aligned} x'(t) \doteq pX(p) - x(0) &= pX(p); & y'(t) \doteq pY(p) - y(0) &= pY(p); \\ x''(t) \doteq p^2X(p) - px(0) - x'(0) &= p^2X(p); & t \doteq \frac{1}{p^2}; & 1 \doteq \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Одержимо

$$\begin{cases} pX(p) + pY(p) - 2X(p) - 2Y(p) = \frac{1}{p} - 2 \times \frac{1}{p^2}; \\ p^2X(p) - 2pY(p) + X(p) = 0 \end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв'яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, методом вилучення (методом Гаусса)

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (p-2)X(p) + (p-2)Y(p) = \frac{p-2}{p^2}; \\ (p^2+1)X(p) - 2pY(p) = 0; \end{cases} && \begin{cases} X(p) + Y(p) = \frac{1}{p^2}; \\ (p^2+1)X(p) - 2pY(p) = 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} X(p) = \frac{1}{p^2} - Y(p); \\ (p^2+1)\left(\frac{1}{p^2} - Y(p)\right) - 2pY(p) = 0; \end{cases} && -Y(p)(p^2+1+2p) = -\frac{p^2+1}{p^2}; \\ &&& Y(p)(p+1)^2 = \frac{p^2+1}{p^2}; \quad Y(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p+1)^2}; \\ &&& X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{p^2+1}{p^2(p+1)^2} = \frac{(p+1)^2 - (p^2+1)}{p^2(p+1)^2} = \frac{2}{p(p+1)^2} \end{aligned}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$X(p) = \frac{2}{p(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} = \left| A(p+1)^2 + Bp(p+1) + Cp = 2; \right.$$

$$\begin{aligned} p=0: & \begin{cases} A=2; \\ C=-2; \end{cases} \\ p=-1: & \begin{cases} C=-2; \\ A+B=0; \end{cases} \\ p^2: & \begin{cases} A+B=0; \\ B=-A=-2; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\left| = \frac{2}{p} + \frac{-2}{p+1} + \frac{-2}{(p+1)^2} = 2 \times \frac{1}{p} - 2 \times \frac{1}{p+1} - 2 \times \frac{1}{(p+1)^2} \right| \cdot 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} = x(t);$$

$$Y(p) = \frac{p^2 + 1}{p^2(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{(p+1)^2} =$$

$$= \left| Ap(p+1)^2 + B(p+1)^2 + Cp^2(p+1) + Dp^2 = p^2 + 1; \right.$$

$$\begin{aligned} p=0: & \quad \left\{ B=1; \right. \\ p=-1: & \quad \left\{ D=2; \right. \quad \left\{ A+C=0; \right. \quad \left\{ A=-C; \right. \\ p^3: & \quad \left\{ A+C=0; \right. \quad \left\{ 2A+1+C+2=1; \right. \quad \left\{ 2A+1+C+2=1; \right. \\ p^2: & \quad \left\{ 2A+B+C+D=1; \right. \end{aligned}$$

$$2C+C+2=0; C=2; A=-2;$$

$$\left| = \frac{-2}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} = -2 \times \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + 2 \times \frac{1}{p+1} + \right.$$

$$\left. + 2 \times \frac{1}{(p+1)^2} \right| \cdot -2 + t + 2e^{-t} + 2te^{-t} = y(t)$$

$$\text{Отже, } \begin{cases} x(t) = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t}; \\ y(t) = -2 + t + 2e^{-t} + 2te^{-t} \end{cases} \text{ - шуканий розв'язок.}$$

2.16. Розв'язання диференціальних рівнянь з правою частиною, що містить запізнювання

Єдина особливість застосування операційного числення для розв'язання таких рівнянь полягає в необхідності врахування запізнювань при переході від зображення шуканого розв'язку до його оригіналу. Для цього треба:

- 1) в зображенні розв'язку згрупувати члени, що відповідають однаковим запізнюванням, і винести відповідний експоненційний множник e^{-bp} за дужки;
- 2) вираз у кожних дужках подати у вигляді лінійної комбінації табличних зображень;
- 3) знайти оригінал для кожного зображення в дужках і врахувати відповідні запізнювання.

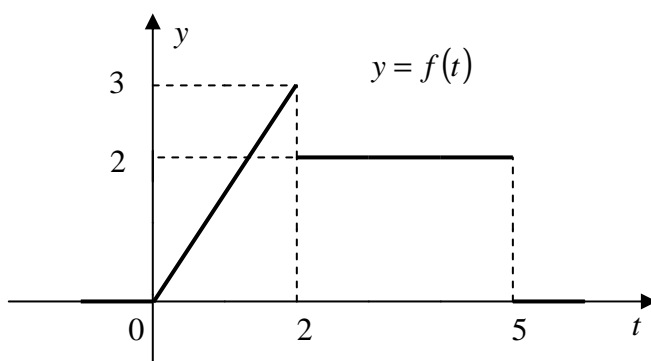


Рис. 7

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' + 9y = f(t) \\ y(0) = 2; \quad y'(0) = -3, \end{cases}$$

де права частина $f(t)$ задана графічно (рис 7).

Розв'язання. Виходячи з графіка, виразимо функцію $f(t)$ аналітично

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty; 0); \\ 3t, & t \in (0; 2); \\ 2, & t \in (2; 5); \\ 0, & t \in (5; +\infty). \end{cases}$$

Застосовуючи одиничну функцію Хевісайда, запишемо функцію $f(t)$ однією формулою

$$f(t) = 3t(\eta(t) - \eta(t-2)) + 2(\eta(t-2) - \eta(t-5)).$$

Отже, права частина $f(t)$ містить запізнювання.

Нехай $y(t) \doteq Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y''(t) \doteq p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 2p + 3; \quad f(t) = 3t - 3t\eta(t-2) + 2\eta(t-2) - 2\eta(t-5) \doteq \\ \doteq 3 \cdot \frac{1}{p^2} - 3 \left(2 \cdot \frac{e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} \right) + 2 \cdot \frac{e^{-2p}}{p} - 2 \cdot \frac{e^{-5p}}{p} = \frac{3}{p^2} - e^{-2p} \cdot \frac{4p+3}{p^2} - e^{-5p} \cdot \frac{2}{p} = F(p).$$

Одержимо

$$p^2 Y(p) - 2p + 3 + 9Y(p) = \frac{3}{p^2} - e^{-2p} \cdot \frac{4p+3}{p^2} - e^{-5p} \cdot \frac{2}{p}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$Y(p)(p^2 + 9) = \frac{2p^3 - 3p^2 + 3}{p^2} - e^{-2p} \cdot \frac{4p+3}{p^2} - e^{-5p} \cdot \frac{2}{p};$$

$$Y(p) = \frac{2p^3 - 3p^2 + 3}{p^2(p^2 + 9)} - e^{-2p} \cdot \frac{4p+3}{p^2(p^2 + 9)} - e^{-5p} \cdot \frac{2}{p(p^2 + 9)}$$

– зображення шуканого розв'язку.

Розкладаючи кожний раціональний дріб окремо в суму елементарних дробів, одержимо

$$Y(p) = \left(\frac{A_1}{p} + \frac{B_1}{p^2} + \frac{C_1 p + D_1}{p^2 + 9} \right) - e^{-2p} \left(\frac{A_2}{p} + \frac{B_2}{p^2} + \frac{C_2 p + D_2}{p^2 + 9} \right) - e^{-5p} \left(\frac{A_3}{p} + \frac{B_3 p + C_3}{p^2 + 9} \right) = \\ = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p^2} + 2 \cdot \frac{p}{p^2 + 9} - \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{3} \times \frac{3}{p^2 + 9} \right) - e^{-2p} \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{4}{9} \cdot \frac{p}{p^2 + 9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{p^2 + 9} \right) - \\ - e^{-5p} \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{p} - \frac{2}{9} \cdot \frac{p}{p^2 + 9} \right).$$

Застосовуючи таблицю відповідності оригіналів та їх зображень і теорему запізнювання, знайдемо оригінал шуканого розв'язку

$$y(t) = \frac{1}{3}t + 2 \cos 3t - \frac{10}{8} \sin 3t - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3}(t-2) - \frac{4}{9} \cos 3(t-2) - \right.$$

$$-\frac{1}{9} \sin 3(t-2) \Big) \eta(t-2) - \left(\frac{2}{9} - \frac{2}{9} \cos 3(t-5) \right) \eta(t-5) .$$

2.17. Зображення інтеграла від оригіналу

Теорема 10 (*теорема про зображення інтеграла від оригіналу*). Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $\frac{1}{p}F(p)$ служить зображенням інтеграла $\int_0^t f(u)du$:

$$f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p) \Rightarrow \int_0^t f(u)du \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p}F(p) .$$

Доведення. Нехай $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$; $\varphi(t) = \int_0^t f(u)du \stackrel{\cdot}{=} \Phi(p)$. Знайдемо похідну інтеграла зв змінною верхньою межею

$$\varphi'(t) = \left(\int_0^t f(u)du \right)' = f(t) .$$

Використаємо формулу для зображення похідної оригіналу

$$\varphi'(t) \stackrel{\cdot}{=} p\Phi(p) - \varphi(0) .$$

Але $\varphi(0) = \int_0^0 f(u)du = 0$, тому $\varphi'(t) \stackrel{\cdot}{=} p\Phi(p)$.

Таким чином,
$$\left. \begin{array}{l} f(t) = \varphi'(t) \stackrel{\cdot}{=} p\Phi(p) \\ f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p) \end{array} \right\} \Rightarrow F(p) = p\Phi(p) . \text{ Отже, } \Phi(p) = \frac{1}{p}F(p) .$$

Приклад 1. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу і формулою $\cos t \stackrel{\cdot}{=} \frac{p}{p^2+1}$, знайти зображення функції $\sin t$.

Розв'язання. $\sin t = \int_0^t \cos u du \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p} \times \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}$.

Приклад 2. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$.

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 4p + 29)} .$$

Розв'язання. $F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 4p + 29)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2 - 4p + 29} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p} \times$

$$\begin{aligned} & \times \frac{5}{(p-2)^2 + 5^2} = \left| \frac{1}{(p-2)^2 + 5^2} \cdot e^{2t} \sin 5t \right| \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{5} \int_0^t e^{2u} \sin 5u \, du = \\ & = \left| \int e^{at} \sin bt \, dt = \frac{-be^{at} \cos bt + ae^{at} \sin bt}{a^2 + b^2} \right| = \frac{1}{5} \left. \frac{-5e^{2u} \cos 5u + 2e^{2u} \sin 5u}{2^2 + 5^2} \right|_0^t = \frac{1}{145} (-5e^{2t} \cos 5t + \\ & \quad + 2e^{2t} \sin 5t + 5) = f(t) . \end{aligned}$$

Зауваження. Крім диференціальних рівнянь, що включають похідні невідомої функції, для математичного моделювання різних явищ використовуються також інші споріднені з ними рівняння. Зокрема, інтегральні рівняння, що містять інтеграл від невідомої функції, а також інтегро-диференціальні рівняння, в яких невідома функція входить як під знак похідної, так і під знак інтеграла.

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок інтегро-диференціального рівняння $y' - 2y + \int_0^t y(u) du = 3$, який задовольняє початкову умову $y(0) = 0$.

Розв'язання. Нехай $y(t) \stackrel{\cdot}{=} Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегро-диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \stackrel{\cdot}{=} pY(p) - y(0) = pY(p); \quad \int_0^t y(u) du \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p} Y(p); \quad 1 \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p} .$$

Одержимо $pY(p) - 2Y(p) + \frac{1}{p} Y(p) = 3 \times \frac{1}{p}$ – допоміжне рівняння-зображення.

Розв'яжемо це рівняння

$$p^2 Y(p) - 2pY(p) + Y(p) = 3; \quad (p^2 - 2p + 1)Y(p) = 3; \quad Y(p) = \frac{3}{(p-1)^2}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{3}{(p-1)^2} \stackrel{\cdot}{=} 3 \times te^t = y(t) .$$

Отже, $y(t) = 3te^t$ – шуканий розв'язок.

2.18*. Згортка функцій. Розв'язання інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь

Згорткою двох функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$ називається функція $f(t)$, яка задається рівністю

$$f(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du .$$

Позначається $f(t) = f_1 * f_2$.

Справедливо

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du = \int_0^t f_2(u)f_1(t-u)du = f_2 * f_1 .$$

(Доведення за допомогою заміни $t-u=z$ в правому інтегралі).

Теорема 11 (Теорема згортання оригіналів (теорема множення зображень)). Якщо $F_1(p)$ і $F_2(p)$ - зображення відповідно функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$, то добуток $F_1(p)F_2(p)$ служить зображенням функції $f(t) = \int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du$, тобто

якщо $f_1(t) \stackrel{\bullet}{=} F_1(p)$; $f_2(t) \stackrel{\bullet}{=} F_2(p)$, то

$$\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du \stackrel{\bullet}{=} F_1(p)F_2(p) .$$

(Без доведення).

Зауваження. На основі теореми згортання можна одержати зображення інтеграла від оригіналу

$$f_1(t) = f(t); f_2(t) = 1 \Rightarrow F_1(p) = F(p); F_2(p) = \frac{1}{p}; \int_0^t f(u)du = \int_0^t f(u)f_2(t-u)du \stackrel{\bullet}{=} F(p) \times \frac{1}{p} .$$

Отже,

$$\int_0^t f(u)du \stackrel{\bullet}{=} \frac{F(p)}{p} .$$

Приклад 1. Користуючись теоремою згортання оригіналів, знайти оригінал за його зображенням $F(p) = \frac{1}{(p^2 + b^2)^2}$.

Розв'язання.

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + b^2)^2} = \frac{1}{p^2 + b^2} \times \frac{1}{p^2 + b^2} \left| F(p) = F_1(p) \times F_2(p); F_1(p) = \frac{1}{p^2 + b^2} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{b} \sin bt ; \right.$$

$$F_2(p) = \frac{1}{p^2 + b^2} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{b} \sin bt ; f(t) = \int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du \left| \stackrel{\bullet}{=} \int_0^t (1/b) \sin bu \times (1/b) \sin b(t-u)du = \right.$$

$$= \frac{1}{2b^2} \int_0^t (\cos(bu - b(t-u)) - \cos(bu + b(t-u)))du = \frac{1}{2b^2} \left(\int_0^t \cos(2bu - bt)du - \cos bt \int_0^t du \right) =$$

$$= \frac{1}{2b^2} \left(\frac{1}{2b} \times \sin(2bu - bt) \Big|_0^t - \cos bt \times u \Big|_0^t \right) = \frac{1}{2b^2} \left(\frac{1}{2b} \sin bt - \frac{1}{2b} \sin(-bt) - \right.$$

$$\left. - t \cos bt \right) = \frac{1}{2b^3} (\sin bt - bt \cos bt) = f(t)$$

– шуканий оригінал.

Приклад 2. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра першого роду

$$\int_0^t y(u) \cos(t-u) du = t \sin t .$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \doteq Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегрального рівняння до зображень

$$\cos t \doteq \frac{p}{p^2+1}; \quad t \sin t \doteq \frac{2p}{(p^2+1)^2}; \quad \int_0^t y(u) \cos(t-u) du \doteq Y(p) \times \frac{p}{p^2+1}.$$

Одержимо $Y(p) \times \frac{p}{p^2+1} = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$ – допоміжне рівняння-зображення.

Розв'яжемо це рівняння

$$Y(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} : \frac{p}{p^2+1} = \frac{2}{p^2+1}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = 2 \times \frac{1}{p^2+1} \doteq 2 \sin t = y(t) .$$

Отже, $y(t) = 2 \sin t$ – шуканий розв'язок.

Приклад 3. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$y(t) - 6 \int_0^t y(u) \sin 3(t-u) du = t \cos 3t .$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \doteq Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегрального рівняння до зображень

$$\sin 3t \doteq \frac{3}{p^2+9}; \quad t \cos 3t \doteq \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}; \quad \int_0^t y(u) \sin 3(t-u) du \doteq Y(p) \times \frac{3}{p^2+9}.$$

Одержимо $Y(p) - 6 \times Y(p) \times \frac{3}{p^2+9} = \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}$ – допоміжне рівняння.

Розв'яжемо це рівняння

$$Y(p) \times \frac{p^2+9-18}{p^2+9} = \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}; \quad Y(p) = \frac{1}{p^2+9}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+9} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{p^2+3^2} \doteq \frac{1}{3} \sin 3t = y(t) .$$

Отже, $y(t) = \frac{1}{3} \sin 3t$ – шуканий розв’язок.

Приклад 4. Розв’язати інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$y(t) + 2 \int_0^t y(u) \cos(t-u) du = e^t .$$

Розв’язання. Нехай $y(t) \doteq Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегрального рівняння до зображень

$$\cos t \doteq \frac{p}{p^2+1}; \quad e^t \doteq \frac{1}{p-1}; \quad \int_0^t y(u) \cos(t-u) du \doteq Y(p) \times \frac{p}{p^2+1} .$$

Одержимо $Y(p) + 2Y(p) \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p-1}$ – допоміжне рівняння-зображення.

Розв’яжемо це рівняння

$$(p^2+1)Y(p) + 2pY(p) = \frac{p^2+1}{p-1}; \quad Y(p)(p^2+1+2p) = \frac{p^2+1}{p-1}; \quad Y(p) = \frac{p^2+1}{(p-1)(p+1)^2}$$

– зображення шуканого розв’язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{p^2+1}{(p-1)(p+1)^2} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} = \left| A(p+1)^2 + B(p^2-1) + C(p-1) = p^2+1; \right.$$

$$\begin{array}{l} p = -1: \left\{ \begin{array}{l} -2C = 2; \quad C = -1; \\ 4A = 2; \quad A = 1/2; \end{array} \right. ; \\ p^0: \left\{ \begin{array}{l} A - B - C = 1; \quad B = A - C - 1 = 1/2 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\left| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \doteq \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} - te^{-t} = cht - te^{-t} = y(t) . \right.$$

Отже, $y(t) = cht - te^{-t}$ – шуканий розв’язок.

Приклад 5. Знайти частинний розв’язок інтегро-диференціального рівняння $y' - 2 \int_0^t e^{t-u} y(u) du = e^{-2t}$, який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Розв’язання. Нехай $y(t) \doteq Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегро-диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 1; \quad e^t \doteq \frac{1}{p-1}; \quad \int_0^t e^{t-u} y(u) du \doteq \frac{1}{p-1} Y(p); \quad e^{-2t} \doteq \frac{1}{p+2} .$$

Одержимо

$$pY(p) - 1 - 2 \frac{1}{p-1} Y(p) = \frac{1}{p+2}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$p(p-1)(p+2)Y(p) - (p-1)(p+2) - 2(p+2)Y(p) = p-1;$$

$$Y(p)(p+2)(p(p-1)-2) = p-1 + (p-1)(p+2); \quad Y(p) = \frac{p^2 + p - 3}{(p^2 - p - 2)(p+2)}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{p^2 + 2p - 3}{(p+1)(p-2)(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+2} =$$

$$= [A(p-2)(p+2) + B(p+1)(p+2) + C(p+1)(p-2)] =$$

$$= p^2 + 2p - 3; \quad \begin{cases} p = -1: & \begin{cases} -3A = -4; & A = 4/3; \\ p = 2: & \begin{cases} 12B = 5; & B = 5/12; \\ p = -2: & \begin{cases} 4C = -3; & C = -3/4; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\left| = \frac{4}{3} \times \frac{1}{p+1} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{p-2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{p+2} \right| = \frac{4}{3} e^{-t} + \frac{5}{12} e^{2t} - \frac{3}{4} e^{-2t} = y(t).$$

Отже, $y(t) = \frac{4}{3} e^{-t} + \frac{5}{12} e^{2t} - \frac{3}{4} e^{-2t}$ – шуканий розв'язок.

2.19*. Інтеграл Дюамеля та його застосування

На практиці зустрічається такий спеціальний випадок теореми про зображення згортки

$$pF(p)\Phi(p) \doteq \int_0^t f'(u)\varphi(t-u)du + f(0)\varphi(t).$$

Інтеграл у цій формулі називається *інтегралом Дюамеля*.

Доведення. Нехай $f(t) \doteq F(p)$; $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$. Тоді

$$pF(p)\Phi(p) = (pF(p) - f(0))\Phi(p) + f(0)\Phi(p) \doteq \int_0^t f'(u)\varphi(t-u)du + f(0)\varphi(t).$$

Розглянемо застосування інтеграла Дюамеля для розв'язання задачі Коші при умові, що зображення правої частини диференціального рівняння не виражається через елементарні функції.

Нехай треба знайти розв'язок задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t)$$

при нульових початкових умовах $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

Позначимо $y(t) \doteq Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його

зображення, $f(t) \doteq F(p)$ – права частина і її зображення. Тоді допоміжне рівняння-зображення має вигляд

$$p^2 Y(p) + a_1 p Y(p) + a_2 Y(p) = F(p)$$

або $Y(p)L(p) = F(p)$, де $L(p) = p^2 + a_1 p + a_2$ – характеристичний многочлен диференціального рівняння. Звідси

$$Y(p) = F(p) : L(p).$$

Додатково розглянемо цю задачу при $f(t) = f_1(t) = 1$ (права частина – одинична функція Хевісайда). Нехай відповідний розв'язок $y_1(t)$ та його зображення $Y_1(p)$ відомі. Відповідне допоміжне рівняння-зображення має вигляд

$$Y_1(p)L(p) = \frac{1}{p}.$$

Звідси $L(p) = \frac{1}{p Y_1(p)}$. Тоді $Y(p) = F(p) : \frac{1}{p Y_1(p)} = p Y_1(p) F(p)$.

Застосовуючи інтеграл Дюамеля і враховуючи нульові початкові умови, одержимо

$$Y(p) = p Y_1(p) F(p) \doteq \int_0^t y_1'(u) f(t-u) du + y_1(0) f(t) = \int_0^t y_1'(u) f(t-u) du = y(t).$$

Отже, $y(t) = \int_0^t y_1'(u) f(t-u) du$.

Зауваження. Таким чином, для знаходження розв'язку початкової задачі $y(t)$ за цим методом не треба знати зображення правої частини $F(p)$.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші з нульовими початковими умовами для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' + 4y = e^{-t^2}; \\ y(0) = 0; \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \doteq Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Зазначимо, що для правої частини диференціального рівняння $f(t) = e^{-t^2}$ зображення не виражається через елементарні функції. Скористаємось інтегралом Дюамеля.

При $f(t) = 1$ рівняння має вигляд $y'' + 4y = 1$.

Нехай $y_1(t) \doteq Y_1(p)$ – відповідно оригінал і зображення розв'язку одержаного рівняння при заданих нульових початкових умовах. Допоміжне рівняння-зображення має вигляд

$$p^2 Y_1(p) + 4Y_1(p) = \frac{1}{p}.$$

Розв'яжемо це рівняння: $Y_1(p)(p^2 + 4) = \frac{1}{p}$; $Y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + 4)}$

– зображення відповідного розв'язку. Знайдемо його оригінал

$$Y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + 4)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 4} = \left| A(p^2 + 4) + (Bp + C)p = 1 \right. ;$$

$$\begin{array}{l} p^2 : \\ p : \\ p^0 : \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} A + B = 0; & C = 0; \\ C = 0; & A = 1/4; \\ 4A = 1; & B = -A = -1/4; \end{array} \right. \left| = \frac{1}{4} \times \frac{1}{p} - \frac{1}{4} \times \frac{p}{p^2 + 4} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t = y_1(t) .$$

Розв'язок початкової задачі знаходимо за формулою

$$y(t) = \int_0^t y_1'(u) f(t-u) du .$$

Оскільки $y_1'(t) = (1/2)\sin 2t$, то $y(t) = (1/2) \int_0^t \sin 2u e^{-(t-u)^2} du$.

Одержаний розв'язок містить інтеграл, що не виражається через елементарні функції.

2.20*. Теорема про інтегрування зображення

Теорема 11 (Теорема про інтегрування зображення).

Нехай $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді інтеграл $\int_p^{+\infty} F(z) dz$ служить зображенням функції $\frac{f(t)}{t}$

$$\frac{f(t)}{t} \stackrel{\bullet}{=} \int_p^{+\infty} F(z) dz .$$

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi(t) = \frac{f(t)}{t}$. Нехай $\varphi(t) \stackrel{\bullet}{=} \Phi(p)$. За теоремою про диференціювання зображення маємо

$$f(t) = t \varphi(t) \stackrel{\bullet}{=} - \frac{d\Phi(p)}{dp} .$$

Спираючись на єдинність перетворення Лапласа, одержимо

$$\left. \begin{array}{l} f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p) \\ f(t) \stackrel{\bullet}{=} - \frac{d\Phi(p)}{dp} \end{array} \right\} \Rightarrow - \frac{d\Phi(p)}{dp} = F(p) .$$

Тоді $\Phi(p) = - \int_0^p F(z) dz + C$.

Значення сталої інтегрування C одержимо із умови, що довільне зображення на нескінченності прямує до нуля.

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \Phi(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(-\int_0^p F(z) dz + C \right) = -\int_0^{+\infty} F(z) dz + C = 0; \quad C = \int_0^{+\infty} F(z) dz .$$

$$\text{Тоді} \quad \Phi(p) = -\int_0^p F(z) dz + \int_0^{+\infty} F(z) dz = \int_p^0 F(z) dz + \int_0^{+\infty} F(z) dz = \int_p^{+\infty} F(z) dz .$$

$$\text{Отже,} \quad \frac{f(t)}{t} \stackrel{\bullet}{=} \int_p^{+\infty} F(z) dz .$$

Приклад 1. Користуючись теоремою про інтегрування зображення, знайти зображення функції $f(t) = \frac{sh(t)}{t}$.

$$\text{Розв'язання.} \quad sh t \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p^2 - 1} \Rightarrow \frac{sh t}{t} \stackrel{\bullet}{=} \int_p^{+\infty} \frac{1}{z^2 - 1} dz = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \Big|_p^{+\infty} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{p-1}{p+1} \right| .$$

2.21. Одинична імпульсна дельта-функція Дірака $\delta(t)$ та її зображення

Розглянемо імпульсну функцію $\delta_h(t)$, яка задається рівністю

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1/h, & 0 < t < h; \\ 0, & t > h, \end{cases}$$

де $h > 0$ – ширина імпульсу (рис. 8).

Співвідношення для $\delta_h(t)$ можна подати однією формулою за допомогою одиничної функції Хевісайда

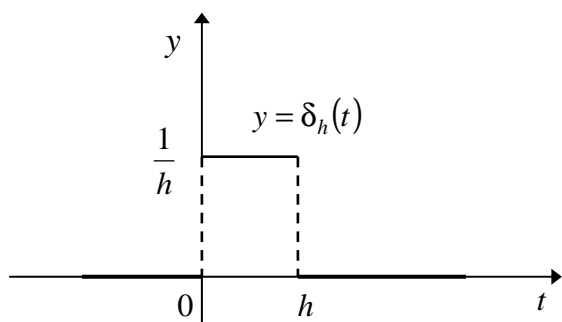


Рис. 8

$$\delta_h(t) = \frac{1}{h} (\eta(t) - \eta(t-h)) .$$

Знайдемо зображення цієї імпульсної функції $\delta_h(t)$

$$\eta(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p}; \quad \eta(t-h) \stackrel{\bullet}{=} e^{-hp} \frac{1}{p};$$

$$\delta_h(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{p} - e^{-hp} \frac{1}{p} \right) = \frac{1 - e^{-hp}}{ph} .$$

Одиничною імпульсною дельта-функцією Дірака $\delta(t)$ називається **узгалънена функція**, яка визначається умовами:

$$1) \delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ +\infty, & t = 0; \\ 0, & t > 0; \end{cases} \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 .$$

Дельта-функцію $\delta(t)$ можна розглядати як границю імпульсної функції $\delta_h(t)$ при $h \rightarrow 0$

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t) .$$

За зображення дельта-функції $\delta(t)$ природно взяти границю зображення імпульсної функції $\delta_h(t)$ при $h \rightarrow 0$

$$\delta(t) \stackrel{\bullet}{=} \lim_{h \rightarrow 0} L(\delta_h(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-hp}}{ph} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-hp})'}{(ph)'} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-e^{-hp}(-p)}{p} = 1 .$$

Отже,

$$\delta(t) \stackrel{\bullet}{=} 1 .$$

Зауваження 1 (механічний зміст дельта-функції Дірака). З точки зору механіки дельта-функцію $\delta(t)$ можна трактувати як нескінченну силу, що діє миттєво і має одиничний імпульс.

Зауваження 2. На основі теореми запізнювання маємо

$$\delta(t - b) \stackrel{\bullet}{=} e^{-bp} \times 1 = e^{-bp} .$$

Зауваження 3 (зв'язок між одиничними функціями Дірака і Хевісайда). Використовуючи означення $\delta(t)$ і формулу для зображення інтеграла від оригіналу, одержимо

$$\int_{-\infty}^t \delta(u) du = \int_0^t \delta(u) du \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p} \times 1 = \frac{1}{p} .$$

Тоді на основі єдинності перетворення Лапласа маємо

$$\int_{-\infty}^t \delta(u) du = \eta(t) .$$

Звідси, диференціюючи за змінною t , дістанемо

$$\delta(t) = \frac{d\eta(t)}{dt} .$$

Зауваження 4 (зображення похідних дельта-функції Дірака). Застосовуючи для $\delta'(t)$, $\delta''(t)$, ..., $\delta^{(n)}(t)$ формули для зображення похідних оригіналу при умові

$$\delta'(0) = \delta''(0) = \dots = \delta^{(n)}(0) = 0 ,$$

одержимо $\delta'(t) \stackrel{\bullet}{=} p$; $\delta''(t) \stackrel{\bullet}{=} p^2$; ...; $\delta^{(n)}(t) \stackrel{\bullet}{=} p^n$.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' - 2y' = 4 \cos 2t + 8\delta(t); \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0 .$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \stackrel{\bullet}{=} Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \stackrel{\cdot}{=} pY(p) - y(0) = pY(p); \quad y''(t) \stackrel{\cdot}{=} p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p); \quad \cos 2t \stackrel{\cdot}{=} \frac{p}{p^2+4}; \quad \delta(t) \stackrel{\cdot}{=} 1.$$

Одержимо $p^2Y(p) - 2pY(p) = 4\frac{p}{p^2+4} + 8$ – допоміжне рівняння-зображення.

Розв'яжемо це рівняння

$$Y(p)(p^2 - 2p) = \frac{8p^2 + 4p + 32}{p^2 + 4}; \quad Y(p) = \frac{8p^2 + 4p + 32}{p(p-2)(p^2 + 4)}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{8p^2 + 4p + 32}{p(p-2)(p^2 + 4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 4}$$

$$8p^2 + 4p + 32 = A(p-2)(p^2 + 4) + Bp(p^2 + 4) + (Cp + D)p(p-2)$$

$$\begin{array}{l} p=0: \\ p=2: \\ p^3: \\ p^2: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -8A = 32; \\ 16B = 72; \\ A + B + C = 0; \\ -2A - 2C + D = 8; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} A = -4; \quad B = \frac{9}{2}; \\ -4 + \frac{9}{2} + C = 0; \quad C = -\frac{1}{2} \\ D = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} -2 \times (-4) - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + D = 8; \end{array}$$

$$\left| = \frac{-4}{p} + \frac{\frac{9}{2}}{p-2} + \frac{-\frac{1}{2}p-1}{p^2+4} = -4 \times \frac{1}{p} + \frac{9}{2} \times \frac{1}{p-2} - \frac{1}{2} \times \frac{p}{p^2+2^2} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2} \times \frac{2}{p^2+2^2} \stackrel{\cdot}{=} -4 + \frac{9}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t = y(t) .$$

Отже, $y(t) = -4 + \frac{9}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t$ – шуканий розв'язок.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + 16y = 24(\delta'(t) + \delta(t-5) + \delta(t-10)) \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0 .$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \stackrel{\cdot}{=} Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y''(t) \stackrel{\cdot}{=} p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p); \quad \delta'(t) \stackrel{\cdot}{=} p; \quad \delta(t-5) \stackrel{\cdot}{=} e^{-5p}; \quad \delta(t-10) \stackrel{\cdot}{=} e^{-10p} .$$

Одержимо $p^2Y(p) + 16Y(p) = 24(p + e^{-5p} + e^{-10p})$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння і одержимо

$$Y(p) = \frac{24(p + e^{-5p} + e^{-10p})}{p^2 + 16}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = 24 \times \frac{p}{p^2 + 16} + \frac{24}{4} \times e^{-5p} \times \frac{4}{p^2 + 16} + \frac{24}{4} \times e^{-10p} \times \frac{4}{p^2 + 16} \stackrel{\bullet}{=} 24 \cos 4t + 6 \sin 4(t-5) \eta(t-5) + 6 \sin 4(t-10) \eta(t-10) = y(t) .$$

Отже,

$$y(t) = 24 \cos 4t + 6 \sin 4(t-5) \eta(t-5) + 6 \sin 4(t-10) \eta(t-10)$$

– шуканий розв’язок.

2.22. Приклади розв’язання операційним методом задач теоретичної електротехніки

Математичними моделями перехідних процесів у електричних ланцюгах служать диференціальні та споріднені з ними (інтегральні, інтегродиференціальні, скінченно-різницеві і т. п.) рівняння.

Зауваження. При складанні таких рівнянь звичайно користуються першим та другим законами Кірхгофа.

Перший закон Кірхгофа: алгебраїчна сума всіх струмів, що протікають в довільній точці ланцюга, дорівнює нулю.

Другий закон Кірхгофа: для кожного замкнутого контуру алгебраїчна сума падінь напруги в окремих гілках дорівнює нулю.

У довільний момент часу t перехідного процесу для активного опору R , індуктивності L , ємності C справедливі наступні співвідношення, що зв’язують падіння напруги на кінцях елемента $u(t)$ та силу струму в ньому $i(t)$:

$$u_R(t) = R i_R(t); \quad u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}; \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt + u_C(0),$$

де $u_C(0)$ – падіння напруги на ємності в початковий момент часу $t=0$.

Приклад 1. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R і індуктивності L (рис. 9). Знайти закон зміни сили струму $i(t)$ в контурі при його відключенні від джерела зі сталою електрорушійною силою E і замкненні ланцюга в початковий момент часу $t=0$ (перемикач K переводиться при $t=0$ із положення A в положення B).

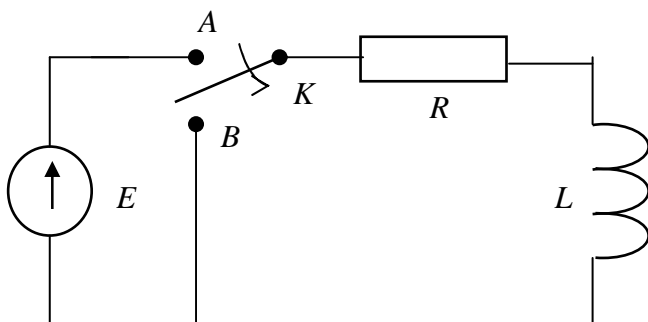


Рис. 9

Розв’язання. Нехай $i(t) \stackrel{\bullet}{=} I(p)$ – шукана сила струму (оригінал) і відповідне зображення. У момент перемикачання $t=0$ за законом Ома сила струму

$$i(0) = E/R .$$

Після перемикачання за другим законом Кірхгофа

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 .$$

Перейдемо в одержаному диференціальному рівнянні до зображень

$$\frac{di}{dt} \doteq pI(p) - i(0) = pI(p) - E/R; \quad L(pI(p) - E/R) + RI(p) = 0$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$(Lp + R)I(p) = \frac{LE}{R}; \quad I(p) = \frac{LE/R}{Lp + R}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$I(p) = \frac{LE/R}{Lp + R} = \frac{E}{R} \times \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \doteq \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = i(t).$$

Отже, $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$ – шуканий закон зміни сили струму в контурі.

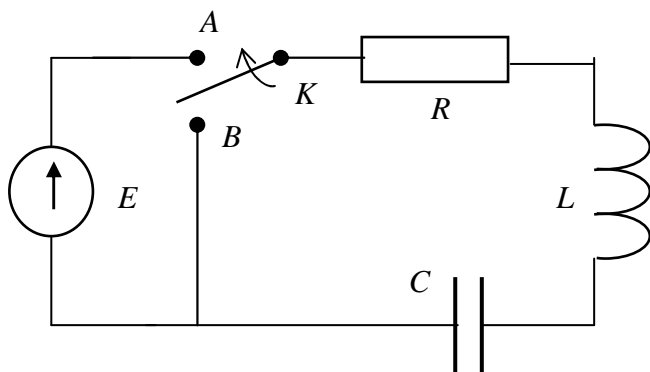


Рис. 10

Приклад №2. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R , індуктивності L і ємності C (рис. 10). Знайти закон зміни сили струму в контурі при його підключенні в початковий момент часу $t=0$ до джерела зі сталою електрорушійною силою E (перемикач K переводиться при $t=0$ з положення B в положення A).

Розв'язання. Нехай $i(t) \doteq I(p)$ –

шукана сила струму (оригінал) і відповідне зображення. В початковий момент $t=0$ сила струму і початкова напруга на обкладинках конденсатора дорівнюють нулю

$$i(0) = 0; \quad u_C(0) = 0.$$

Тоді згідно з другим законом Кірхгофа

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(z) dz = E.$$

Перейдемо в обох частинах одержаного інтегро-диференціального рівняння до зображень

$$\frac{di}{dt} \doteq pI(p) - i(0) = pI(p); \quad \int_0^t i(z) dz \doteq \frac{1}{p} I(p); \quad 1 \doteq \frac{1}{p}; \quad RI(p) + LpI(p) + \frac{1}{C} \times \frac{1}{p} I(p) = E \times \frac{1}{p}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$CRpI(p) + CLp^2I(p) + I(p) = CE; \quad I(p) = \frac{CE}{CLp^2 + CRp + 1} = \frac{\frac{E}{L}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL}}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал.

$$\text{Введемо позначення } \alpha = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 > 0.$$

Тоді

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL} = p^2 + \frac{R}{2L}p + \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} = p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \omega_0^2 - \alpha^2 = \\ = (p + \alpha)^2 + \omega^2; \quad I(p) = \frac{E}{L\omega} \times \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2} \stackrel{\bullet}{=} \frac{E}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t = i(t).$$

Отже, $i(t) = \frac{E}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t$ – шуканий закон зміни сили струму в контурі. Тут

$$\alpha = \frac{R}{2L} \text{ - коефіцієнт затухання; } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \text{ - кругова частота контуру;}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ - кругова частота, яку мав би контур при відсутності активного опору ($R=0$).

Приклад 3. Два однакових контури, кожний з яких складається з послідовно сполучених активного опору R , індуктивності L і ємності C , зв'язані взаємною індукцією M (рис. 11). Знайти закон зміни сили струму в першому $i_1(t)$ та другому $i_2(t)$ контурі при умові, що другий контур закорочений, а перший контур в початковий момент часу $t=0$ підключається до джерела зі сталою електрорушійною силою E (перемикач K переводиться при $t=0$ з положення B в положення A). Вважати індукційний зв'язок ідеальним, при якому $M=L$.

Розв'язання. Нехай $i_1(t) \stackrel{\bullet}{=} I_1(p)$, $i_2(t) \stackrel{\bullet}{=} I_2(p)$ – шукані закони зміни сили струму (оригінали) і відповідні зображення. В початковий момент $t=0$ обидва

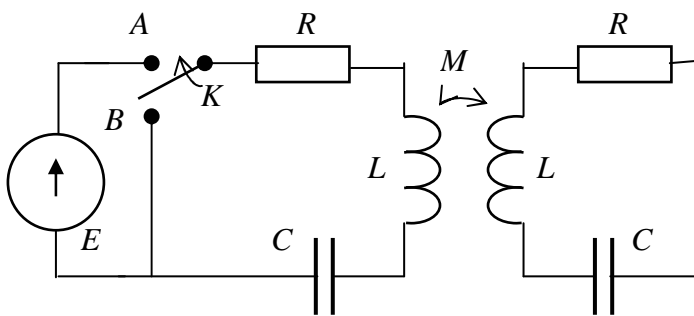


Рис. 11

контури закорочені, тому початкова сила струму і початкова напруга на обкладинках конденсаторів дорівнюють нулю

$$i_1(0) = 0; \quad u_{C1}(0) = 0; \quad i_2(0) = 0; \\ u_{C2}(0) = 0.$$

Застосовуючи другий закон Кірхгофа до кожного з

контурів, одержимо інтегро-диференціальну систему

$$\begin{cases} Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_1(z) dz + M \frac{di_2}{dt} = E; \\ Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(z) dz + M \frac{di_1}{dt} = 0. \end{cases};$$

Враховуючи умову $M = L$, маємо

$$\begin{cases} Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_1(z) dz + L \frac{di_2}{dt} = E; \\ Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(z) dz + L \frac{di_1}{dt} = 0. \end{cases};$$

Перейдемо в обох частинах одержаної інтегро-диференціальної системи до зображень

$$\frac{di_1}{dt} \stackrel{\bullet}{=} p I_1(p) - i_1(0) = p I_1(p); \quad \int_0^t i_1(z) dz \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p} I_1(p); \quad \frac{di_2}{dt} \stackrel{\bullet}{=} p I_2(p) - i_2(0) = p I_2(p);$$

$$\int_0^t i_2(z) dz \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p} I_2(p); \quad \int_0^t i_1(z) dz \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p} I_1(p); \quad 1 \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p};$$

$$\begin{cases} R I_1(p) + L p I_1(p) + \frac{1}{C p} I_1(p) + L p I_2(p) = E \times \frac{1}{p}; \\ R I_2(p) + L p I_2(p) + \frac{1}{C p} I_2(p) + L p I_1(p) = 0. \end{cases};$$

– допоміжна система-зображення. Розв'яжемо цю лінійну алгебраїчну систему за формулами Крамера

$$\begin{cases} (L C p^2 + R C p + 1) I_1(p) + L C p^2 I_2(p) = E C; \\ L C p^2 I_1(p) + (L C p^2 + R C p + 1) I_2(p) = 0. \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} L C p^2 + R C p + 1 & L C p^2 \\ L C p^2 & L C p^2 + R C p + 1 \end{vmatrix} = (R C p + 1)(2 L C p^2 + R C p + 1) =$$

$$= 2 R C^2 L \left(p + \frac{1}{R C} \right) \left(p^2 + \frac{R}{2 L} p + \frac{1}{2 L C} \right);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E C & L C p^2 \\ 0 & L C p^2 + R C p + 1 \end{vmatrix} = 2 R C^2 L \left(\frac{E}{2 R} p^2 + \frac{E}{2 L} p + \frac{E}{2 R C L} \right);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} L C p^2 + R C p + 1 & E C \\ L C p^2 & 0 \end{vmatrix} = -E C^2 L p^2;$$

$$I_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{E}{2 R} p^2 + \frac{E}{2 L} p + \frac{E}{2 R C L}}{\left(p + \frac{1}{R C} \right) \left(p^2 + \frac{R}{2 L} p + \frac{1}{2 L C} \right)}; \quad I_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = - \frac{\frac{E}{2 R} p^2}{\left(p + \frac{1}{R C} \right) \left(p^2 + \frac{R}{2 L} p + \frac{1}{2 L C} \right)}$$

– зображення шуканих сил струму. Знайдемо відповідні оригінали.

Введемо позначення $\frac{1}{RC} = \alpha$; $\frac{R}{4L} = \beta$; $\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2} = \omega^2 > 0$.

Тоді

$$\left(p^2 + \frac{R}{2L} p + \frac{1}{2LC} \right) = p^2 + 2 \cdot \frac{R}{4L} p + \left(\frac{R}{4L} \right)^2 + \left(\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2} \right) = (p + \beta)^2 + \omega^2 ;$$

$$I_1(p) = \frac{\frac{E}{2R} p^2 + \frac{E}{2L} p + \frac{E}{2RCL}}{(p + \alpha)((p + \beta)^2 + \omega^2)} = \frac{E}{2R} \frac{1}{p + \alpha} + \frac{E}{4L} \frac{1}{(p + \beta)^2 + \omega^2} = \frac{E}{2R} \times \frac{1}{p + \alpha} + \frac{E}{4L\omega} \times$$

$$\times \frac{\omega}{(p + \beta)^2 + \omega^2} \stackrel{\bullet}{=} \frac{E}{2R} e^{-\alpha t} + \frac{E}{4L\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t = i_1(t);$$

$$I_2(p) = -\frac{\frac{E}{2R} p^2}{(p + \alpha)((p + \beta)^2 + \omega^2)} = -\frac{E}{2R} \frac{1}{p + \alpha} + \frac{E}{4L} \frac{1}{(p + \beta)^2 + \omega^2} = -\frac{E}{2R} \times \frac{1}{p + \alpha} + \frac{E}{4L\omega} \times$$

$$\times \frac{\omega}{(p + \beta)^2 + \omega^2} \stackrel{\bullet}{=} -\frac{E}{2R} e^{-\alpha t} + \frac{E}{4L\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t = i_2(t).$$

Отже, шукані закони зміни сили струму

$$i_1(t) = \frac{E}{2R} e^{-\alpha t} + \frac{E}{4L\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t ; \quad i_2(t) = -\frac{E}{2R} e^{-\alpha t} + \frac{E}{4L\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t .$$

2.23. Математичне моделювання динаміки систем у змінних “вхід – вихід”. Передаточна, перехідна та імпульсна перехідна функції

У багатьох випадках, зокрема, коли неможливе вимірювання внутрішніх змінних або невідомі закони протікання процесів, математичне моделювання здійснюється на основі дослідження зовнішньої поведінки системи у термінах “вхід – вихід”.

Розглянемо основні поняття на прикладі системи, що описується диференціальним рівнянням першого порядку

$$T \frac{dy}{dt} + y = ku ,$$

де $u = u(t)$, $y = y(t)$ – відповідно вхідна та вихідна змінні; T, k – сталі коефіцієнти. Така система називається *аперіодичною ланкою (інерційною ланкою першого порядку)*, а величини T, k – відповідно *сталю часу* і *коефіцієнтом підсилення*.

На рис. 12 зображена аперіодична ланка у вигляді електричного ланцюга, що складається з активних опорів R_1, R_2 та індуктивності L . Тут вхідна і вихідна змінні – відповідні напруги $u = u_1(t)$, $y = u_2(t)$. При цьому

$$T = L / (R_1 + R_2) ; \quad k = R_2 / (R_1 + R_2) .$$

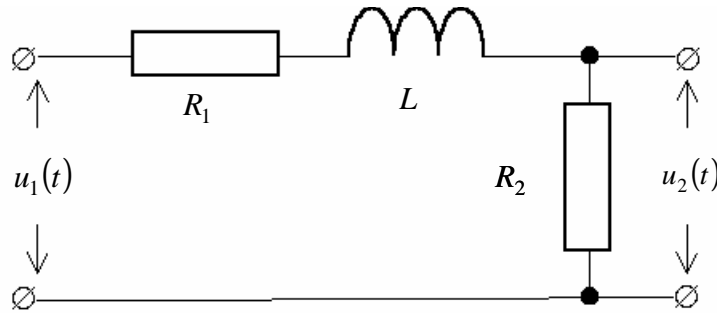


Рис. 12

Переходячи до зображень за Лапласом при нульових початкових умовах

$$u(t) \stackrel{\cdot}{=} U(p) ; \quad y(t) \stackrel{\cdot}{=} Y(p) ; \quad \frac{dy}{dt} \stackrel{\cdot}{=} pY(p) ,$$

одержимо операторну форму рівняння динаміки аперіодичної ланки

$$(Tp + 1)Y(p) = kU(p) .$$

Передаточною функцією системи $W(p)$ називається відношення зображень вихідної $Y(p)$ і вхідної $U(p)$ змінних при нульових початкових умовах

$$W(p) = Y(p)/U(p) .$$

Звідси

$$Y(p) = W(p)U(p) .$$

Перехідною функцією системи $h(t)$ називається реакція системи (значення вихідної змінної $y(t)$) на вхідну дію у вигляді одиничної ступінчастої функції Хевісайда $u(t) = \eta(t)$ при нульових початкових умовах.

Оскільки

$$u(t) = \eta(t) \stackrel{\cdot}{=} 1/p = U(p) ,$$

то для зображення перехідної функції $H(p)$ маємо

$$H(p) = Y(p) = W(p)U(p) = W(p) \frac{1}{p} .$$

Отже, зображення перехідної функції $H(p)$ дорівнює передаточній функції $W(p)$, поділеній на p :

$$H(p) = W(p)/p .$$

Для аперіодичної ланки

$$H(p) = \frac{k}{(Tp + 1)p} = k \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/T} \right) \stackrel{\cdot}{=} k (1 - e^{-t/T}) = h(t) .$$

Імпульсною перехідною (ваговою) функцією системи $\varphi(t)$ називається реакція системи (значення вихідної змінної $y(t)$) на вхідну дію у вигляді одиничної імпульсної дельта-функції Дірака $u(t) = \delta(t)$ при нульових початкових умо-

вах.

Оскільки $u(t) = \delta(t) \stackrel{\bullet}{=} 1$, то для зображення імпульсної перехідної функції $\Phi(p)$ маємо

$$\Phi(p) = Y(p) = W(p)U(p) = W(p) \cdot 1 .$$

Отже, зображення імпульсної перехідної функції $\Phi(p)$ дорівнює передаточної функції $W(p)$:

$$\Phi(p) = W(p) .$$

Для аперіодичної ланки

$$\Phi(p) = \frac{k}{Tp+1} = \frac{k}{T} \cdot \frac{1}{p+1/T} \stackrel{\bullet}{=} \frac{k}{T} e^{-t/T} = \varphi(t) .$$

Знайдемо зв'язок між імпульсною перехідною функцією $\varphi(t)$ і перехідною функцією $h(t)$:

$$\varphi(t) \stackrel{\bullet}{=} \Phi(p) = W(p) = p H(p) \stackrel{\bullet}{=} \frac{dh}{dt} .$$

Отже, імпульсна перехідна функція $\varphi(t)$ дорівнює похідній перехідної функції $h(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{dh}{dt} .$$

Для характеристики динамічних властивостей системи можна використати будь-яку з розглянутих функцій $W(p)$, $h(t)$, $\varphi(t)$. Метод дослідження і проектування систем за допомогою передаточної функції є одним з основних у теорії автоматичного керування.

2.24. Контрольні запитання

- 1) Яка функція називається оригіналом? Наведіть приклади оригіналів і функцій, що не є оригіналами.
- 2) Дайте означення перетворення (оператора) Лапласа. Що таке зображення оригіналу?
- 3) У чому полягає властивість лінійності оператора Лапласа?
- 4) Як веде себе будь-яке зображення на нескінченності?
- 5) Що таке одинична ступінчаста функція Хевісайда? Яке її зображення?
- 6) У чому полягає теорема про згасання оригіналу?
- 7) Сформулюйте теорему про зсув аргументу в оригіналу.
- 8) Який зв'язок між похідною зображення і оригіналом?
- 9) Як знаходиться зображення похідних оригіналу?
- 10) Сформулюйте правило знаходження оригіналу для зображення у вигляді раціонального дроби на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень.
- 11) За якою схемою здійснюється розв'язання диференціальних рівнянь та їх

систем?

- 12) У чому особливість розв'язання диференціальних рівнянь з запізнюваннями?
- 13) Як знаходиться зображення інтеграла від оригіналу?
- 14) Дайте означення згортки функцій. Як знаходиться її зображення?
- 15) Що називається інтегральним та інтегро-диференціальним рівнянням?
- 16) Що називається інтегралом Дюамеля? Як застосовується цей інтеграл для розв'язання диференціальних рівнянь?
- 17) Сформулюйте теорему про інтегрування зображення.
- 18) Що таке одинична імпульсна дельта-функція Дірака? Яке її зображення?
- 19) Який зв'язок між одиничними функціями Дірака і Хевісайда?
- 20) Наведіть приклади розрахунку перехідних процесів у електричних ланцюгах за допомогою операційного числення.
- 21) Що таке передаточна, перехідна та імпульсна перехідна функції? Який зв'язок між ними?

2.25. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Використовуючи тотожні перетворення оригіналів і властивість лінійності, на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень знайти зображення $F(p)$ вказаної функції $f(t)$. Результат записати у вигляді єдиного дроби.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$f(t) = t e^{-2t} - 2 \cos 3t - 3$	16	$f(t) = ch^2 3t$
2	$f(t) = 3t \sin 2t - e^{3t} - 3$	17	$f(t) = sh 2t \cdot \cos 6t$
3	$f(t) = e^{2t} \cos 2t - 3t \sin 2t$	18	$f(t) = ch 2t \cdot \cos 4t$
4	$f(t) = 2e^{2t} \sin t - 3 \cos 2t$	19	$f(t) = \cos 3t \cdot \cos 7t$
5	$f(t) = 4t e^{-2t} - sh 4t - 1$	20	$f(t) = 4t \sin t - t \cdot ch 2t$
6	$f(t) = 2e^{-t} \cos t - t \cdot sh 2t$	21	$f(t) = sh 2t \cdot \sin 6t$
7	$f(t) = e^{-2t} \sin t - 2t \cdot sh 3t$	22	$f(t) = ch 3t \cdot \sin 4t$
8	$f(t) = 2e^{3t} \cos t - 3 \sin 2t$	23	$f(t) = \cos^2 3t$
9	$f(t) = 3e^{-3t} \sin 2t - 2t + 2$	24	$f(t) = sh^2 2t$
10	$f(t) = 2e^{-t} \sin 4t - t \cdot sh t$	25	$f(t) = \sin 3t \cdot \sin 5t$
11	$f(t) = 2t \sin 3t - 3 \cos t$	26	$f(t) = \sin 5t \cdot \cos 7t$
12	$f(t) = 2t \cos 3t - 2t + 2$	27	$f(t) = \sin^2 4t$
13	$f(t) = e^{2t} \cos 2t - t \cdot sh 2t$	28	$f(t) = sh 5t \cdot ch 3t$
14	$f(t) = e^{-2t} \cos t + 4t \cdot ch 2t$	29	$f(t) = 2t e^{3t} - \sin 4t + 3$
15	$f(t) = 3e^{-2t} \cos 3t - 4t^2$	30	$f(t) = 3t \cos 2t - \sin 3t$

Завдання 2. Розв'язати наступні задачі.

а) Варіанти №1–№10: Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$.

б) Варіанти №11–№20: Користуючись теоремою згортання оригіналів, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$.

в) Варіанти №21–№30: Розкладаючи спочатку правильний раціональний дріб у суму елементарних дробів, а потім застосовуючи лінійність перетворення Лапласа і таблицю відповідності оригіналів та їх зображень, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 4p + 13)}$	11	$F(p) = \frac{p}{(p-5)(p^2 + 9)}$	21	$F(p) = \frac{p^3 - 5p^2 + 6}{(p-2)(p^3 - 8)}$
2	$F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 6p + 25)}$	12	$F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 4)(p^2 + 25)}$	22	$F(p) = \frac{p^2}{p^4 - 5p^2 - 36}$
3	$F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 8p + 17)}$	13	$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 + 64)}$	23	$F(p) = \frac{p^2 + 6p}{(p^2 - 4)(p^2 + 4)}$
4	$F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 8p - 9)}$	14	$F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 4)(p^2 + 36)}$	24	$F(p) = \frac{p^2}{p^4 + 5p^2 + 4}$
5	$F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 4p - 5)}$	15	$F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 9)(p^2 + 49)}$	25	$F(p) = \frac{p^3 - 3p + 6}{(p+3)(p^3 + 27)}$
6	$F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 12p + 40)}$	16	$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 9)(p^2 + 1)}$	26	$F(p) = \frac{p^3 - 5p}{(p+2)(p^3 + 8)}$
7	$F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 6p + 18)}$	17	$F(p) = \frac{1}{(p-2)(p^2 + 9)}$	27	$F(p) = \frac{p^3 - 4p^2 - 2}{(p^2 - 9)(p^2 + 9)}$
8	$F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 6p + 10)}$	18	$F(p) = \frac{p}{(p-3)(p^2 + 16)}$	28	$F(p) = \frac{3p^2 + 2}{(p^2 + 2p - 3)^2}$
9	$F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 7p - 8)}$	19	$F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 9)(p^2 + 4)}$	29	$F(p) = \frac{2p^3 - p^2 - 4p}{(p+2)^2(p^2 + 4)}$
10	$F(p) = \frac{1}{p(p^2 - 9p - 10)}$	20	$F(p) = \frac{1}{(p+2)(p^2 + 25)}$	30	$F(p) = \frac{4p^3 - 3p^2 + 2}{p^4 - 3p^2 - 4}$

Завдання 3. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння другого порядку (знайти частинний розв'язок заданого диференціального рівняння, який задовольняє вказаним початковим умовам).

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$x'' + 4x' + 4x = 3e^{-2t} \cos t;$ $x(0) = 3; x'(0) = 0$	16	$x'' - 4x' - 5x = 4e^{-t} \sin t;$ $x(0) = 2; x'(0) = 1$
2	$x'' + 2x' - 3x = \sin 2t; x(0) = 2; x'(0) = 0$	17	$x'' - 4x = 12 \cos 2t; x(0) = 0; x'(0) = -2$
3	$x'' + 6x' + 10x = 6te^{-2t};$ $x(0) = -2; x'(0) = 0$	18	$x'' - x' - 6x = 12e^{-2t} \cos 2t;$ $x(0) = 2; x'(0) = 0$
4	$x'' + 5x' + 6x = 2 \sin 2t; x(0) = 0; x'(0) = 4$	19	$x'' - 9x = 4 \sin 3t; x(0) = 4; x'(0) = 0$
5	$x'' + 2x' = 4e^{-2t} \cos t; x(0) = 0; x'(0) = 2$	20	$x'' + 4x' + 5x = 2te^t; x(0) = 0; x'(0) = -1$
6	$x'' + 4x' + 13x = 2te^{-2t};$ $x(0) = -3; x'(0) = 1$	21	$x'' - 4x' + 13x = 12 \cos 2t;$ $x(0) = 2; x'(0) = 3$
7	$x'' + 4x' + 20x = 6t; x(0) = 4; x'(0) = -2$	22	$x'' + 2x' = 4e^{-2t} \cos 2t; x(0) = -3; x'(0) = 2$
8	$x'' - 4x' - 5x = 4e^{-t} \cos 2t;$ $x(0) = -2; x'(0) = -4$	23	$x'' + 4x' - 12x = e^{-2t} \sin 2t;$ $x(0) = 0; x'(0) = -3$
9	$x'' - 9x = 4e^{-3t} \sin 3t; x(0) = 4; x'(0) = 0$	24	$x'' + 5x' - 14x = 2te^{2t}; x(0) = 0; x'(0) = -1$
10	$x'' - 3x' - 10x = 6e^{2t} \cos 3t;$ $x(0) = -4; x'(0) = 2$	25	$x'' - 4x = 12e^{-2t} \sin 2t;$ $x(0) = 2; x'(0) = -4$
11	$x'' - 5x' + 6x = 2e^{2t} \sin 2t;$ $x(0) = 6; x'(0) = 3$	26	$x'' - x' - 6x = 12e^{3t} \cos 2t;$ $x(0) = 0; x'(0) = -5$
12	$x'' - 6x' + 10x = 6te^{3t}; x(0) = -2; x'(0) = 0$	27	$x'' + 2x' - 24x = 12t^2; x(0) = 1; x'(0) = 4$
13	$x'' + 2x' + 17x = 8 \sin 4t;$ $x(0) = 2; x'(0) = 6$	28	$x'' - 4x' + 29x = 10e^{2t};$ $x(0) = 2; x'(0) = -2$
14	$x'' - 2x' - 3x = 6e^{3t} \sin 2t;$ $x(0) = 0; x'(0) = -2$	29	$x'' + 6x' - 7x = 6e^{-t} \sin 2t;$ $x(0) = -2; x'(0) = 6$
15	$x'' + 4x = 4t^2; x(0) = -3; x'(0) = 2$	30	$x'' + 9x = 4e^{-3t} \sin 3t; x(0) = 0; x'(0) = -4$

Завдання 4. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (знайти частинний розв'язок заданої диференціальної системи, який задовольняє вказаним початковим умовам).

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y + 6\cos 2t \\ x(0) = 2; y(0) = 3 \end{cases}$	11	$\begin{cases} x' = x + 5y - 2e^{2t} \\ y' = -2x - 5y \\ x(0) = 1; y(0) = -1 \end{cases}$	21	$\begin{cases} x' = 4x - 5y - 2 \\ y' = 2x - 2y + 3t \\ x(0) = 1; y(0) = 0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x' = -x + 3y + \sin t \\ y' = 3x - y \\ x(0) = 0; y(0) = 0 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y = 2\sin 3t \\ x(0) = 2; y(0) = 0 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 3x + 2y - 4t \\ x(0) = 0; y(0) = -2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x' = x + 4y + e^{-2t} \\ y' = x - 2y \\ x(0) = 0; y(0) = 5 \end{cases}$	13	$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5t \\ y' = 3x + 2y - 3 \\ x(0) = 0; y(0) = 1 \end{cases}$	23	$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = x + y - 4\cos 2t \\ x(0) = 0; y(0) = -4 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = -2x - y + 6t \\ x(0) = -1; y(0) = 0 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x' = 2x - y - 3e^{-t} \\ y' = x + 2y \\ x(0) = -2; y(0) = 1 \end{cases}$	24	$\begin{cases} x' = x + 2y + 2e^{-t} \\ y' = 2x + y - 4 \\ x(0) = 0; y(0) = 1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x' = -x + 3y - 3e^{-2t} \\ y' = x + y + e^t \\ x(0) = 1; y(0) = 1 \end{cases}$	15	$\begin{cases} x' = 2x - y + 2\sin t \\ y' = 4x - 3y \\ x(0) = -4; y(0) = -3 \end{cases}$	25	$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y + 4t \\ x(0) = 2; y(0) = 1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x' = 7x + 2y - 2\sin t \\ y' = -9x - 2y + \cos t \\ x(0) = -4; y(0) = 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -x - 2\cos t \\ x(0) = 2; y(0) = 0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} x' = 4x + 6y + 4\cos 2t \\ y' = 4x + 2y \\ x(0) = -1; y(0) = -3 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x' = -2x - 6y \\ y' = -x - y + 6t \\ x(0) = 4; y(0) = 1 \end{cases}$	17	$\begin{cases} x' = 6x - 10y \\ y' = x - y + 5\cos t \\ x(0) = 0; y(0) = -3 \end{cases}$	27	$\begin{cases} x' = -x + y + e^{-2t} \\ y' = x - y + 2e^t \\ x(0) = 1; y(0) = 1 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x' = -3x - 4y + e^t \\ y' = x + y + e^{-t} \\ x(0) = 1; y(0) = -1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^{-t} \\ y' = x + 2y - 3e^{-t} \\ x(0) = 6; y(0) = 2 \end{cases}$	28	$\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t \\ y' = 5x - y - \cos t \\ x(0) = 0; y(0) = 2 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x' = -5x + 2y + 4e^{2t} \\ y' = 4x - 3y - 2e^{2t} \\ x(0) = 3; y(0) = -2 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x' = -3x - y + 2 \\ y' = x - y + e^{-t} \\ x(0) = -1; y(0) = -2 \end{cases}$	29	$\begin{cases} x' = 6x - 2y - 3e^{2t} \\ y' = 5x - y - e^{2t} \\ x(0) = 4; y(0) = 0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x' = 2x + 4y + 4t \\ y' = 3x + 6y - 3 \\ x(0) = 1; y(0) = 6 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x' = 4x + y + 3\cos 2t \\ y' = -2x + 3y - \sin 2t \\ x(0) = 1; y(0) = 0 \end{cases}$	30	$\begin{cases} x' = -x + 5y + e^t \\ y' = -x + 3y + 2 \\ x(0) = 0; y(0) = -3 \end{cases}$

Завдання 5. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку, права частина якого $f(t)$ задана графічно: для варіантів №1–№5 – на рис. 13, для варіантів №6–№10 – на рис. 14, для варіантів №11–№15 – на рис. 15, для варіантів №16–№20 – на рис. 16, для варіантів №21–№25 – на рис. 17, для варіантів №26–№30 – на рис. 18.

Вказівка. Виходячи з графіка, виразити функцію $f(t)$ аналітично однією формулою, застосовуючи одиничну функцію Хевісайда. При розв'язанні врахувати наявність в правій частині $f(t)$ запізнювань.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$x'' - 4x = f(t); x(0) = 2; x'(0) = 0$	16	$x'' + 4x = f(t); x(0) = 0; x'(0) = -2$
2	$x'' + 2x' = f(t); x(0) = 3; x'(0) = -1$	17	$x'' + 2x' + x = f(t); x(0) = 1; x'(0) = -2$
3	$x'' - 3x' + 2x = f(t); x(0) = 3; x'(0) = -1$	18	$x'' + 9x = f(t); x(0) = 0; x'(0) = -3$
4	$x'' - 2x' + x = f(t); x(0) = -2; x'(0) = 0$	19	$x'' + 3x' = f(t); x(0) = 0; x'(0) = -2$
5	$x'' - 9x = f(t); x(0) = -2; x'(0) = 0$	20	$x'' - 3x' - 4x = f(t); x(0) = 2; x'(0) = -1$
6	$x'' - 2x' + 2x = f(t); x(0) = -1; x'(0) = 2$	21	$x'' + 4x' + 4x = f(t); x(0) = -2; x'(0) = 0$
7	$x'' - 4x' + 8x = f(t); x(0) = 0; x'(0) = -1$	22	$x'' - 6x' + 9x = f(t); x(0) = -2; x'(0) = 0$
8	$x'' - x' - 6x = f(t); x(0) = -1; x'(0) = 2$	23	$x'' - 16x = f(t); x(0) = -2; x'(0) = 0$
9	$x'' + 16x = f(t); x(0) = 0; x'(0) = -3$	24	$x'' - 2x' - 8x = f(t); x(0) = -2; x'(0) = 1$
10	$x'' - 6x' + 10x = f(t); x(0) = 4; x'(0) = 0$	25	$x'' + 6x' + 10x = f(t); x(0) = 2; x'(0) = 3$
11	$x'' + 2x' + 5x = f(t); x(0) = -1; x'(0) = 2$	26	$x'' - 6x' = f(t); x(0) = 0; x'(0) = -2$
12	$x'' - 2x' + 10x = f(t); x(0) = 1; x'(0) = 2$	27	$x'' + 4x' + 3x = f(t); x(0) = 2; x'(0) = 2$
13	$x'' - 5x' + 6x = f(t); x(0) = 0; x'(0) = 2$	28	$x'' + 5x' + 6x = f(t); x(0) = 4; x'(0) = 1$
14	$x'' - 5x' - 6x = f(t); x(0) = -2; x'(0) = 1$	29	$x'' - 2x' + 17x = f(t); x(0) = 0; x'(0) = 2$
15	$x'' + 2x' + 17x = f(t); x(0) = 4; x'(0) = 0$	30	$x'' - 6x' + 8x = f(t); x(0) = -2; x'(0) = 1$

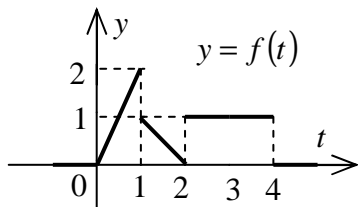


Рис. 13

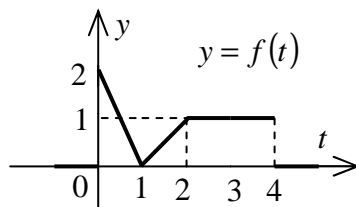


Рис. 14

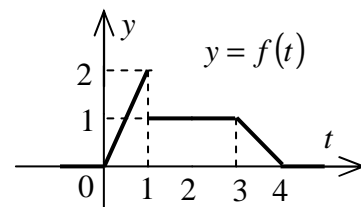


Рис. 15

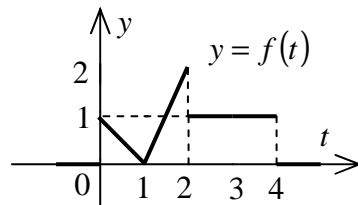


Рис. 16

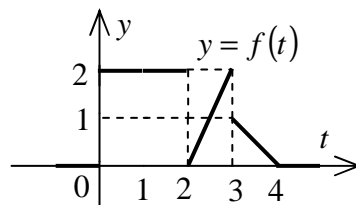


Рис. 17

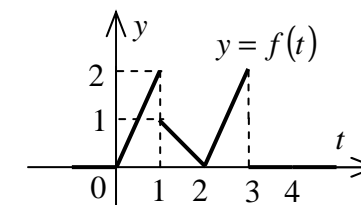


Рис. 18