

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

В.В. Бізюк, А.В. Якунін

**СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ
ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
для електротехніків**

Навчальний посібник

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Харків – ХНАМГ – 2008

УДК 510
ББК 22.1

Бізюк В.В., Якунін А.В.

Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків: Навчальний посібник. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 300 с.

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України,
рішення № _____ від «__» _____ 200_ р.*

У навчальному посібнику за модульною технологією навчання викладено наступні спеціальні розділи: теорія функцій комплексної змінної; операційне числення; варіаційне числення; теорія поля; математична фізика, які об'єднують загальну прикладну спрямованість на застосування до електротехнічних задач. Кожен розділ може вивчатися незалежно від інших. Головну увагу приділено розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання для самостійної роботи.

Посібник призначений для студентів електротехнічних спеціальностей і може використовуватися для самоосвіти електротехніків-практиків.

Рецензенти:

В.К.Дубовий, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу (Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна);

А.Д.Тевяшев, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики (Харківський національний технічний університет радіоелектроніки);

Ю.Л.Геворкян, кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики (Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»)

*Розповсюджувати та тиражувати
без офіційного дозволу ХНАМГ заборонено*

ISBN 966-793-070-8

© Бізюк В.В., Якунін А.В., 2008
© ХНАМГ, 2008

З М І С Т

Передмова.....	8
Розділ 1. Елементи теорії функцій комплексної змінної.....	9
1.1. Комплексні числа та дії над ними.....	9
1.1.1. Поняття комплексного числа.....	9
1.1.2. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.....	10
1.1.3. Геометрична інтерпретація. Модуль і аргумент комплексного числа.....	11
1.1.4. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа.....	12
1.1.5. Дії над комплексними числами в тригонометричній і показниковій формах.....	14
1.1.6. Многочлени. Розкладання на множники.	
Розв'язання квадратних рівнянь.....	16
1.2. Топологія множини комплексних чисел. Комплексні функції дійсної змінної.....	17
1.2.1. Відстань між точками. Окіл точки. Нескінченно віддалена точка. Розширена комплексна площина.....	17
1.2.2. Область та її межа.....	18
1.2.3. Комплексні функції дійсної змінної. Лінії на комплексній площині.....	19
1.2.4. Диференціювання та інтегрування комплексної функції дійсної змінної.....	21
1.3. Функції комплексної змінної. Похідна. Поняття аналітичної функції. Конформне відображення.....	22
1.3.1. Поняття функції комплексної змінної. Границя та неперервність.....	22
1.3.2. Похідна. Умови Коші – Рімана.....	23
1.3.3. Поняття аналітичної функції. Зв'язок аналітичних функцій з гармонічними.....	25
1.3.4. Геометричний зміст модуля й аргументу похідної. Поняття про конформне відображення.....	28
1.4. Деякі елементарні функції комплексної змінної та їх властивості.....	30
1.4.1. Лінійна функція	30
1.4.2. Степенева і коренева функції.....	31
1.4.3. Показникова функція.....	31
1.4.4. Тригонометричні та гіперболічні функції.....	32
1.4.5. Логарифмічна функція.....	33
1.5. Інтеграл функції комплексної змінної.....	35
1.5.1. Поняття комплексного інтеграла.....	35

1.5.2. Первісна функції комплексної змінної. Інтегральна теорема Коші.....	36
1.5.3. Інтегральна формула Коші та її наслідки.....	38
1.6. Ряди функцій комплексної змінної.....	41
1.6.1. Основні поняття про ряди з комплексними членами.....	41
1.6.2. Степеневі ряди. Ряд Тейлора.....	43
1.6.3. Ряд Лорана.....	45
1.6.4. Ізольовані особливі точки та їх класифікація.....	50
1.7. Лишки та їх застосування.....	53
1.7.1. Поняття лишку. Основна теорема про лишки.....	53
1.7.2. Обчислення інтегралів за допомогою лишків.....	56
1.7.3. Функції від матриці та їх обчислення за допомогою лишків.....	58
1.7.4. Логарифмічна похідна та її лишки. Принцип аргументу.....	59
1.8. Фазові криві диференціальних рівнянь.....	60
1.8.1. Лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталим комплексним коефіцієнтом і його розв'язок.....	60
1.8.2. Фазові криві лінійного однорідного диференціального рівняння.....	61
1.9. Плоске векторне поле. Комплексний потенціал.....	62
1.9.1. Спеціальні плоскі векторні поля. Комплексний потенціал.....	62
1.9.2. Елементарні точкові особливості векторного поля – джерело (витік) і вихор. Точковий диполь.....	64
1.10. Контрольні запитання.....	65
1.11. Індивідуальні завдання для самостійної роботи.....	68
Розділ 2. Елементи операційного числення.....	76
2.1. Оператор Лапласа. Оригінал і зображення. Таблиці операційного числення.....	76
2.2. Одиначна ступінчаста функція Хевісайда $\eta(t)$ та її зображення....	80
2.3. Зображення функцій $\sin bt$, $\cos bt$	81
2.4. Теорема зміщення (затухання).....	81
2.5. Зображення функцій e^{-at} , $e^{-at} \sin bt$, $e^{-at} \cos bt$	82
2.6. Теорема про лінійність оператора Лапласа.....	82
2.7. Зображення функцій $shbt$, $chbt$	82
2.8*. Теорема подібності (зміни масштабу).....	83
2.9. Теорема запізнювання (зсув аргументу в оригіналу).....	83
2.10*. Зображення функцій $\sin(bt - \alpha)$, $\cos(bt - \alpha)$	85
2.11. Диференціювання зображення.....	85
2.12. Зображення функцій t , t^n , $t\eta(t-b)$, te^{-at} , $t^n e^{-at}$, $t \sin bt$, $t \cos bt$	86
2.13. Зображення похідних оригіналу.....	87
2.14. Відшукання оригіналу зображення, що має вигляд раціонального дробу.....	88

2.15. Операційний метод розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем.....	89
2.16. Розв'язання диференціальних рівнянь з правою частиною, що містить запізнювання.....	95
2.17. Зображення інтеграла від оригіналу.....	97
2.18*. Згортка функцій. Розв'язання інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь.....	98
2.19*. Інтеграл Дюамеля та його застосування.....	102
2.20*. Теорема про інтегрування зображення.....	104
2.21. Одинична імпульсна дельта-функція Дірака $\delta(t)$ та її зображення	105
2.22. Приклади розв'язання операційним методом задач теоретичної електротехніки.....	108
2.23. Математичне моделювання динаміки систем у змінних “вхід – вихід”. Передаточна, перехідна та імпульсна перехідна функції.....	112
2.24. Контрольні запитання.....	114
2.25. Індивідуальні завдання для самостійної роботи.....	115
Розділ 3. Елементи варіаційного числення.....	120
3.1. Функціонал та його варіація. Екстремум.....	120
3.1.1. Поняття про функціонал.....	120
3.1.2. Екстремум функціоналу.....	121
3.1.3. Класичні задачі варіаційного числення.....	123
3.1.4. Варіація функції та приріст функціоналу. Неперервність. Лінійний функціонал.....	124
3.1.5. Перша та друга варіації функціоналу.....	124
3.2. Необхідна умова екстремуму. Диференціальне рівняння екстремалей	127
3.2.1. Необхідна умова екстремуму функціоналу.....	127
3.2.2. Задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями. Диференціальне рівняння екстремалей (рівняння Ейлера).....	128
3.2.3. Диференціальне рівняння екстремалей функціоналу, в який входять похідні вищих порядків (рівняння Ейлера-Пуассона).....	133
3.2.4. Система диференціальних рівнянь екстремалей функціоналу, що залежить від кількох функцій (система рівнянь Ейлера-Лагранжа).....	136
3.2.5. Канонічні рівняння екстремалей.....	138
3.3. Достатні умови екстремуму. Умовний екстремум. Варіаційні принципи.....	138
3.3.1. Достатні умови екстремуму.....	138
3.3.2. Умовний екстремум. Задача Лагранжа. Ізопериметрична задача.....	142
3.3.3. Задача на екстремум функціоналу з рухомими кінцями. Умови трансверсальності.....	149
3.3.4. Варіаційні принципи.....	153
3.4. Контрольні запитання.....	154
3.5. Індивідуальні завдання для самостійної роботи.....	156

Розділ 4. Елементи теорії поля.....	166
4.1. Скалярне поле.....	166
4.1.1. Поняття поля. Поверхні та лінії рівня.....	166
4.1.2. Похідна за напрямком.....	167
4.1.3. Градієнт.....	168
4.1.4. Криволінійний інтеграл по довжині (криволінійний інтеграл першого роду).....	171
4.1.5. Обчислення криволінійного інтеграла по довжині.....	172
4.1.6. Застосування криволінійного інтеграла по довжині.....	174
4.2. Векторне поле.....	175
4.2.1. Поняття векторного поля. Векторні лінії.....	175
4.2.2. Дивергенція і ротор векторного поля.....	177
4.2.3. Криволінійний інтеграл по координатах (криволінійний інтеграл другого роду).....	180
4.2.4. Властивості криволінійного інтеграла по координатах.....	181
4.2.5. Обчислення криволінійного інтеграла по координатах.....	182
4.2.6. Формула Гріна.....	184
4.2.7. Умови незалежності криволінійного інтеграла по координатах від шляху інтегрування.....	186
4.2.8. Обчислення функції за її повним диференціалом. Розв'язання диференціальних рівнянь у повних диференціалах.....	188
4.2.9. Потенціальне векторне поле.....	191
4.3. Оператор Гамільтона та його застосування.....	195
4.3.1. Оператор Гамільтона у скалярному полі.....	195
4.3.2. Оператор Гамільтона у векторному полі.....	196
4.3.3. Застосування оператора Гамільтона до добутку скалярних та векторних полів.....	196
4.4. Поверхневий інтеграл по площі (поверхневий інтеграл першого роду).....	198
4.4.1. Поняття поверхневого інтеграла по площі.....	198
4.4.2. Обчислення поверхневого інтеграла по площі.....	200
4.5. Поверхневий інтеграл по координатах (поверхневий інтеграл другого роду).....	203
4.5.1. Поняття поверхневого інтеграла по координатах. Потік векторного поля.....	203
4.5.2. Обчислення поверхневого інтеграла по координатах.....	204
4.5.3. Формула Стокса.....	208
4.5.4. Формула Остроградського – Гауса.....	213
4.6. Контрольні запитання.....	220
4.7. Індивідуальні завдання для самостійної роботи.....	222

Розділ 5. Елементи математичної фізики.....	231
5.1. Поняття про диференціальні рівняння з частинними похідними...	231
5.1.1. Диференціальне рівняння з частинними похідними та його розв'язок. Початкові та граничні умови. Крайові задачі. Коректність постановки задач математичної фізики.....	231
5.1.2. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними. Основні поняття.....	234
5.1.3. Характеристики. Зведення лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними до канонічного вигляду.....	236
5.2. Виведення основних рівнянь математичної фізики.....	242
5.2.1. Основні етапи побудови математичної моделі фізичного процесу.....	242
5.2.2. Рівняння коливань струни.....	242
5.2.3. Телеграфні рівняння.....	245
5.2.4. Рівняння поширення тепла у стержні.....	246
5.2.5. Математичні моделі стаціонарних процесів.....	248
5.3. Методи розв'язання задач математичної фізики.....	250
5.3.1. Розв'язання задачі Коші для хвильового рівняння методом характеристик. Біжучі хвилі.....	250
5.3.2. Розв'язання першої крайової задачі для одновимірного хвильового рівняння методом відокремлення змінних. Стоячі хвилі...	256
5.3.3. Розв'язання другої крайової задачі для одновимірного рівняння теплопровідності методом відокремлення змінних.....	269
5.3.4. Розв'язання першої крайової задачі для рівняння Лапласа у крузі методом відокремлення змінних. Інтегральна формула Пуассона	273
5.3.5. Застосування операційного числення до розв'язання задач математичної фізики.....	276
5.3.6. Розв'язання задач математичної фізики чисельним методом сіток.....	279
5.4. Нелінійні рівняння математичної фізики. Солітони. Узагальнені розв'язки. Самоорганізація.....	283
5.4.1. Загальне поняття про нелінійні моделі фізичних процесів.....	283
5.4.2. Солітони.....	284
5.4.3. Узагальнені розв'язки.....	288
5.4.4. Самоорганізація нелінійних систем.....	289
5.5. Контрольні запитання.....	291
5.6. Індивідуальні завдання для самостійної роботи.....	292
Післямова.....	295
Список літератури.....	296