МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Л. П. Вороновська

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Модуль 1

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2021

УДК 517(042.3)

Вороновська Л. П. Вища математика. Модуль 1 : конспект лекцій для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 170 с.

Автор
канд. пед. наук Л. П. Вороновська

Рецензент
Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол №.12 від 4 травня 2021 року

Конспект лекцій складено з метою допомогти студентам будівельних спеціальностей вишів під час підготовки до занять та іспитів з вищої математики.

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами курсу «Вища математика» для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології.

До конспекту увійшли лекції за темами «Лінійна та векторна алгебра», «Аналітична геометрія на площині та у просторі», «Теорія границь» та «Диференціювання функцій однієї змінної».

Доступне, коротке подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів для практичного закріплення вивченого.

ЛЕКЦІЯ 1
МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ.
НЕВИРОДЖЕНІ МАТРИЦІ. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

1.1 Матриці (основні поняття)

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, що складається з m рядків та n стовпців. Матриця записується, як

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

або, скорочено, $A = \left(a_{ij}\right)$, де $i = \overline{1,m}$ – номер рядка, $j = \overline{1,n}$ – номер стовпця.

Матрицю A називають матрицею розміру $m \times n$ і записують $A_{m\times n}$. Числа a_{ij} називаються її ***елементами.***

Матриці A і B *рівні між собою*, якщо рівні всі відповідні елементи матриць, тобто $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількість стовпців $m = n$, називається ***квадратною m-го порядку.*** Елементи, у яких $i = j$ $(a_{11}, a_{22}, \dots)$, утворюють ***головну діагональ*** матриці.

Квадратна матриця, у якій всі елементи, окрім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною.***

Діагональна матриця, у якій кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається ***одиничною*** і позначається E:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що розміщуються вище (нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***нижньою трикутною (верхньою трикутною) або східчастою.***

Матриця, усі елемент якої дорівнюють нулю, називається ***нульовою*** і позначається O.

Матриця, яка складається тільки з одного рядка $m=1$, називається ***вектором-рядком***

$$B=(b_1\ \ b_2\ \ \dots\ \ b_n).$$

Матриця, яка складається тільки з одного стовпця $n=1$, називається ***вектором-стовпцем***

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \dots\\ a_m\end{pmatrix}.$$

Матриця, отримана із даної шляхом заміни кожного рядка стовпцем з тим самим номером, називається матрицею, ***транспонованою*** до даної, і позначається A^T.

Приклад. Знайти A^T для матриці A.

Розв'язання. Якщо $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 9 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix}3 & 9 & 0\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

1.2 Операції над матрицями

Додавання

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакових розмірів. Сумою двох матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$ і $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n} = (c_{ij})$, така, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

Приклад.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно виконується віднімання матриць.

Множення на число

Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число k називається матриця $B_{m\times n} = (b_{ij})$, така, що $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, k = 2, \qquad 2A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 6 & 2 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Властивості лінійних дій над матрицями:

1. $A + B = B + A$.
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$.
3. $A+O=A$.
4. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$.
5. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$.
6. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$.

Елементарні перетворення матриць:

– перестановка місцями двох рядків матриці;
– множення всіх елементів ряду матриці на число,

відмінне від нуля;

– додавання до всіх елементів ряду матриці відповідних елементів іншого ряду, помноженого на число.

Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними***, якщо одна з них отримується з іншої за допомогою елементарних перетворень. Записується: $A \sim B$.

Множення матриць

Операцію добутку двох матриць можна виконати тільки тоді, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

Добутком матриці $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ *на матрицю* $B_{n\times p} = \left(b_{jk}\right)$ називається матриця $C_{m\times p} = (c_{ik})$, така, що

$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$, де $i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,p}$.

Приклад. Знайти добуток матриць:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Якщо матриці A і B квадратні, одного розміру, то існує добуток AB і BA, до того ж $AB \neq BA$.

Властивості добутку матриць:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$.

Властивості операції транспонування:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$; 2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

1.3 Визначники та їх властивості

Основні поняття

Квадратній матриці A порядку n відповідає число $detA$ (або $|A|$ або Δ), яке є її визначником:

1. $n = 1$. $A = a_1$; $detA = a_1$.
2. $n = 2$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$;

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. $n = 3$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Приклад. Знайти визначник матриць:

Розв'язання. а) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;

$$detA = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 = -8 + 3 = -5.$$

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $detA = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 5 +$

$$+(-3) \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 6 \cdot (-2) — 3 \cdot 1 \cdot 5 -$$
$$-1 \cdot 4 \cdot 3 = 30 + 6 + 8 + 24 + 15 - 12 = 71.$$

Мінором $\boldsymbol{M_{ij}}$ елемента a_{ij} визначника n-го порядку Δ_n називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержують з визначника Δ_n шляхом видалення i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких розміщується елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення $\boldsymbol{A_{ij}}$ елемента a_{ij} визначається за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Властивості визначників

1. Якщо рядки визначника замінити стовпцями, визначник не зміниться.

2. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак.

3. Визначник, який має два однакових рядки, дорівнює нулю.

4. Спільний множник елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника.

5. Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника становлять суми двох доданків, то визначник можна розкласти на суму двох відповідних визначників.

Приклад.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

6. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного ряду додати відповідні елементи паралельного ряду, помноживши їх на будь-яке число. (Елементарні перетворення визначника).

7. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого ряду на відповідні їм алгебраїчні доповнення. (Розклад визначника за елементами деякого ряду).

Приклад. Розкласти визначник за елементами першого рядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Приклад. Обчислити визначник четвертого порядку за елементами другого рядка.

Розв'язання.

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+(-4) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-16 + 3 + 50 - 4 + 10 - 60) +$$

$$+4 \cdot (36 + 2 - 10 - 3 - 30 + 8) +$$

$$+6 \cdot (9 + 10 - 4 - 15 - 12 + 2) =$$

$$= -2(-17) + 4 \cdot 3 + 6(-10) = -14.$$

1.4 Матриці

Нехай A – квадратна матриця n-го порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця A називається ***невиродженою***, якщо визначник $detA$ не дорівнює нулю:

$$detA \neq 0.$$

У іншому разі ($detA = 0$) матриця A називається ***виродженою***.

Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до невиродженої квадратної матриці A, якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

де $E -$ одинична матриця того самою порядку, що й матриця A. Матриця A^{-1} має ті самі розміри, що й матриця A.

Теорема. *Для будь-якої невиродженої матриці А n-го порядку існує єдина обернена матриця A^{-1}.*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11}^T A_{12}^T \dots A_{1n}^T \\ A_{21}^T A_{22}^T \dots A_{2n}^T \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ A_{n1}^T A_{n2}^T \dots A_{nn}^T \end{pmatrix},$$

де A_{ij}^T – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} транспонованої матриці A^T.

Властивості оберненої матриці:

1. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$.
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
4. $A^{-1}A = A\,A^{-1} = E$.

План знаходження оберненої матриці A^{-1}

1. Знайти $detA$.
2. Знайти A^T.
3. Знайти алгебраїчні доповнення кожного елемента матриці A^T.
4. Записуємо A^{-1}.
5. Зробити перевірку A^{-1} ($A^{-1}A = E$.)

Приклад. Переконатися, що матриця A невироджена, і знайти обернену матрицю A^{-1}. Перевірити, чи $A^{-1}A = E$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1. $detA = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 15 + 4 + 18 = 41 \neq 0$

   – матриця A невироджена.

2. $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

3. Знайдемо алгебраїчні доповнення до матриці A^T.

$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2;$ $A_{12}^T = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$

$A_{13}^T = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;$ $A_{21}^T = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6;$

$A_{22}^T = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8;$ $A_{23}^T = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$

$A^T_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19;$ $\quad A^T_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2;$

$A^T_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11.$

4. Запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 2 & 11 & -1 \\ -6 & 8 & 3 \\ 19 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

5. Перевіримо рівність $A^{-1}A = E$:

$$A^{-1}A = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 2 & 11 & -1 \\ -6 & 8 & 3 \\ 19 & 2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 4+33+4 & -6+11-5 & 2+0-2 \\ -12+24-12 & 18+8+15 & -6+0+6 \\ 38+6-44 & -57+2+55 & 19+0+22 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 41 & 0 & 0 \\ 0 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, отримана обернена матриця A^{-1} правильна.

1.5 Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розміру $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виокремлимо в ній *k* рядків і *k* стовпців ($k \leq \min(m, n)$). З виокремлених елементів запишемо визначник *k*-го порядку. Усі такі визначники називаються ***мінором цієї матриці.***

Найбільший із порядків мінорів цієї матриці, відмінний від нуля, називається ***рангом матриці.*** Позначають його $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{rangA}$.

Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається *базисним*. У матриці може бути декілька базисних мінорів.

Властивості рангу матриці.

1. При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.

2. Якщо викреслити з матриці нульовий ряд, то ранг матриці не зміниться.

3. Ранг матриці не зміниться при елементарних перетвореннях матриці.

Приклад. Знайти ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Усі мінори 3-го порядку дорівнюють нулю, але є мінор другого порядку відмінний від нуля

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 6 = -15 \neq 0.$$

Отже, $rangA = 2$. Базисний мінор складається з елементів які розміщуються на перетині 2-го та 3-го рядків з 1-м та 3-м стовпцями.

ЛЕКЦІЯ 2

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА – КАПЕЛЛІ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЗА ФОРМУЛАМИ КРАМЕРА ТА МАТРИЧНИМ МЕТОДОМ

2.1 Основні поняття

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (далі СЛАР), яка має m рівнянь з n невідомими, називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де числа $a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ називаються ***коефіцієнтами*** системи, числа b_i – ***вільними членами.***

Таку систему зручно записувати в ***матричній формі***

$$A \cdot X = B.$$

Тут A – матриця коефіцієнтів системи, яка називається ***основною матрицею***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-стовпець з невідомих x_j,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{вектор-стовпець з вільних членів } b_i.$$

Система називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю: $b_i = 0 \ (i = \overline{1, m})$, і – ***неоднорідною***, якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля.

Розширеною матрицею системи називається матриця $\bar{A}$ системи, доповнена стовпцем вільних членів:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Розв'язком системи називається *n* значень невідомих $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, при підстановці яких усі рівняння системи перетворюються на істинні рівності. Будь-який розв'язок системи можна записати у вигляді матриці-стовпця

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо має декілька розв'язків.

2.2 Теорема Кронекера – Капеллі

Розглянемо систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Вичерпну відповідь на питання про сумісність цієї системи дає теорема Кронекера – Капеллі.

Теорема. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці.*

Якщо ранг сумісної системи дорівнює числу невідомих, то система має лише один єдиний розв'язок.

Якщо ранг сумісної системи менший за число невідомих, то система має нескінченну множину розв'язків.

2.3 Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Крамера

Розглянемо систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.1}$$

Основна матриця A такої системи квадратна. Визначник цієї матриці

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається *визначником системи.* Якщо визначник системи відмінний від нуля, то система невироджена.

Правило Крамера. Нехай $detA = \Delta \neq 0$, тоді розв'язок системи рівнянь (2.1) виглядає, як $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}\ (j = \overline{1, n})$, де Δ_j – визначник, отриманий із визначника Δ системи шляхом заміни j-го стовпця при невідомому x_j стовпцем вільних членів B.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з $\Delta_j \neq 0$, то система несумісна, тобто розв'язків не має.

Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = 0$, то система рівнянь або несумісна, або невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = -4 \\ x + 3y - 2z = 13 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}.$$

Розв'язання. Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 24 - 1 - 9 - 4 + 4 = 20;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 13 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 13 + 8 - 3 + 8 + 52 = 40;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 13 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 26 + 1 + 24 - 39 + 4 + 4 = 20;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 13 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 156 + 36 + 26 + 4 = -80.$$

Тоді $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{40}{20} = 2,$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20}{20} = 1,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-80}{20} = -4.$$

Перевірка: $2x - 4y + z = -4;$

$2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + (-4) = -4;$

$4 - 4 - 4 = -4;$

$-4 = -4$ – тотожність істинна.

Відповідь: $x = 2$; $y = 1$; $z = -4$.

2.4 Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці

Теорема. *Якщо основна матриця A квадратної системи $AX = B$ невироджена (тобто $detA \neq 0$), то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою*

$$X = A^{-1}B.$$

Оскільки матриця A – невироджена, то існує матриця A^{-1}. Тоді

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B; \qquad (A^{-1}A)X = A^{-1}B;$$

$$EX = A^{-1}B; \quad X = A^{-1}B.$$

Приклад . Розв'язати систему рівнянь методом оберненої матриці (матричним методом)

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 2z = 5 \\ 2x + 3y - 5z = -1 \end{cases}.$$

Розв'язання. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. $detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 49 \neq 0$ – матриця A невироджена.

2. $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

3. Знайдемо алгебраїчні доповнення кожного елемента A^T:

$A^T_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 14;$ $A^T_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 7;$

$A^T_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$ $A^T_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 9;$

$A^T_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -13;$ $A^T_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7;$

$A^T_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 11;$ $A^T_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5;$

$A^T_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -14.$

4. З отриманих алгебраїчних доповнень складемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 9 & -13 & -7 \\ 11 & -5 & -14 \end{pmatrix}.$$

5. Знайдемо матрицю X:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 9 & -13 & -7 \\ 11 & -5 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x = 1; y = -1; z = 0.$$

6. Перевірка: $3x + 2y - z = 1$;

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 0 = 1;$$

$$1 = 1.$$

Відповідь: $x = 1; y = -1; z = 0$.

ЛЕКЦІЯ 3
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ ГАУСА. ОДНОРІДНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

3.1 Розв'язування систем за методом Гауса

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Нехай A – основна матриця системи, а $\overline{A}$– розширена матриця цієї системи:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Оскільки, кожному елементарному перетворенню системи відповідає елементарне перетворення розширеної матриці системи, то замість системи будемо розглядати розширену матрицю цієї системи.

Елементарним перетворенням рядків розширеної матриці $\overline{A}$ і перестановці стовпців тільки основної матриці A відповідають такі рівносильні перетворення лінійної системи:

1) перестановка будь-яких двох рівнянь (перенумеровування рівнянь);

2) множення обох частин будь-якого рівняння на довільне ненульове число;

3) додавання до обох частин будь-якого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;

4) перенумерування невідомих.

Метод Гауса дослідження і розв'язування СЛАР складається з двох важливих етапів.

На першому етапі (*прямий хід* методу Гауса – зверху вниз) здійснюють послідовне виключення невідомих за допомогою зазначених рівносильних перетворень системи.

В результаті система зводиться до східчастої форми.

На другому етапі (*зворотний хід* методу Гауса – знизу вгору) вільні невідомі приймають за довільні сталі (параметри). Відкидають нульові рівняння (тотожності $0 = 0$). Переносять у праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержують систему верхньотрикутної форми відносно базисних невідомих. Цю систему розв'язують, підіймаючись знизу вгору.

Зауваження. Метод Гауса використовують для розв'язання систем з будь-якою кількістю невідомих, тому що зі збільшенням n кількість обчислень збільшується незначно.

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Гауса:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 2t = -7, \\ 3x + y + z - t = 5, \\ 2x - 2y + z - 3t = 14, \\ x - 3y - 4z + t = 6. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -2 & -2 & -7\\ 3 & 1 & 1 & -1 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -3 & 14\\ 1 & -3 & -4 & 1 & 6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -2 & -2 & -7\\ 0 & -8 & 7 & 5 & 26\\ 0 & -8 & 5 & 1 & 28\\ 0 & 6 & 2 & -3 & 13\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -2 & -2 & -7\\ 0 & -8 & 7 & 5 & 26\\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2\\ 0 & 0 & -58 & -6 & -52\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -2 & -2 & -7\\ 0 & -8 & 7 & 5 & 26\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -29 & -3 & -26\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -2 & -2 & -7\\ 0 & -8 & 7 & 5 & 26\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 55 & -55\end{array}\right).$$

$$\begin{cases}x+3y-2z-2t=-7,\\ \quad -8y+7z+5t=26,\\ \qquad -z-2t=1,\\ \qquad 55t=-55.\end{cases}$$

Отже, з останнього рівняння маємо: $t=-1$. З третього рівняння отримаємо значення z: $-z-2\cdot(-1)=1$; $z=1$. Підставивши в другий рядок отримані значення z і t, отримаємо: $-8y+7-5=26$; $y=-3$. І, нарешті, з першого рядка $x+3y-2z-2t=-7$ з урахуванням отриманих значень t, z і y: $x-9-2+2=-7$, маємо: $x=2$.

Відповідь: $x=2, y=-3, z=1, t=-1$.

3.2 Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо однорідну систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однорідна система завжди сумісна, тому що завжди має такий розв'язок:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Цей розв'язок називається *нульовим* (або *тривіальним*). Будь-який інший розв'язок, у якому хоча б один невідомий відмінний від нуля, називається *ненульовим* (або *нетривіальним*).

Теорема. *Для того, щоб однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь мала нетривіальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи був менше ніж число невідомих* ($rangA < n$).

Якщо кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих ($m = n$), умова ($rangA < n$) відповідає тому, що визначник системи дорівнює нулю ($\Delta = 0$).

Приклад. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 0, \\ x - 4y + z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 40 - 3 + 6 - 36 - 5 + 4 = 6 \neq 0.$$

Ранг матриці системи дорівнює 3 $(rangA = 3)$ і співпадає з кількістю невідомих, а отже, система має лише тривіальний розв'язок, тому $x = 0, y = 0,\ z = 0$.

Приклад. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0, \\ 3x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 1 - 18 - 6 + 4 + 9 = 0.$$

Ранг матриці менший 3, тому така система має нетривіальний розв'язок.

Спосіб 1. Знайдемо розв'язок, вилучивши одне з рівнянь системи, наприклад третє:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

Нехай $z = k$, де k – довільне число.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -k, \\ x + 2y = -2k. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -k & -3 \\ -2k & 2 \end{vmatrix} = -2k - 6k = -8k;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -k \\ 1 & -2k \end{vmatrix} = -4k + k = -3k.$$

Отже, маємо: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{8}{7}k;\;\; y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{3}{7}k;\quad z = k$,

або $x = -8k;\;\; y = -3k;\quad z = 7k,$ де $k\epsilon R.$

Спосіб 2. Розв’яжемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ \quad -7y - 3z = 0, \\ \qquad\quad 0z = 0. \end{cases}$$

Отже, з останнього рівняння маємо: $z = k,\; k\epsilon R.$ Підставивши в другий рядок отримане значення z отримаємо: $-7y - 3k = 0;\; y = -\frac{3}{7}k.$ І, нарешті, з першого рядка $x + 2y + 2z = 0,$ з урахуванням отриманих значень z і y: $x - \frac{6}{7}k + 2k = 0,$ маємо $x = -\frac{8}{7}k.$

Відповідь: $x = -8k;\;\; y = -3k;\quad z = 7k,$ де $k\epsilon R.$

3.3 Скалярні та векторні величини. Основні поняття

Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою трійкою чисел $(x; y; z)$ – її ***координатами***.

Величина, яка характеризується певним числовим значенням, називається ***скалярною величиною*** (***скаляром***).

Величина, яка характеризується не тільки числовим значенням, а й напрямком, називається ***векторною величиною*** (***вектором***).

Вектор зображується напрямленим прямолінійним відрізком, у якому зазначено його ***початок*** A і ***кінець*** B. Позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$ (рис. 1).

Модулем (***абсолютною величиною, довжиною***) вектора називається довжина відрізка, який зображає цей вектор. Позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$.

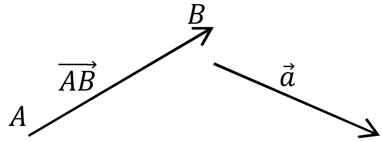

Рисунок 1

Вектор, початок і кінець якого співпадають, називається ***нульовим вектором*** і позначається $\vec{0}$. Його модуль дорівнює нулю, а напрям довільний (невизначений).

Вектор одиничної довжини називається ***одиничним вектором*** (***ортом***).

Вектори, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називаються ***колінеарними*** (***паралельними***). Позначається $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Вектори, які лежать у паралельних площинах або в одній площині, називаються ***компланарними***.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***рівними***, якщо:

1) модулі векторів рівні $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right|$;

2) вектори колінеарні $\left(\vec{a} \parallel \vec{b}\right)$ і напрямлені в один бік. Позначається $\vec{a} = \vec{b}$.

3.4 Лінійні операції над векторами

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який визначається за правилом трикутника (рис. 2) або за правилом паралелограма (рис. 3).

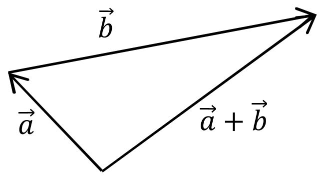

Рисунок 2

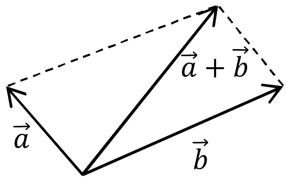

Рисунок 3

Добутком вектора $\vec{a}$ ***та числа*** λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який задовольняє такі умови: 1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$; 2) $\lambda\vec{a} \parallel \vec{a}$; 3) якщо $\lambda > 0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в один бік; якщо $\lambda < 0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в протилежні боки; якщо $\lambda = 0$, то $\vec{a} = \vec{0}$.

Вектор $(-1)\vec{a}$ називається ***протилежним*** щодо вектора $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

Різниця $\vec{a} - \vec{b}$ обчислюється за формулою

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right).$$

Розглянуті операції називаються лінійними, оскільки мають відповідні властивості (аналогічні властивостям операцій над дійсними числами):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};\ \ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\,\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right);$$

$$\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda;\ (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a});\ \ \lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b};$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a};\ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a};\ \ 1\vec{a} = \vec{a}.$$

3.5 Проекція вектора. Координати вектора

Проекцією вектора $\vec{a}$ на ненульовий вектор $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq 0)$ називається число, яке позначається $np_{\vec{b}}\,\vec{a}$ і обчислюється за формулою

$$np_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|cos\varphi,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ (рис. 4).

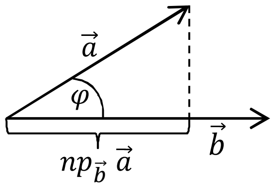

Рисунок 4

Нехай у просторі задана декартова прямокутна система координат (рис. 5). Упорядкована трійка одиничних векторів (ортів) $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ зі спільним початком O, спрямованих уздовж додатного напряму осей Ox, Oy і Oz відповідно утворює ***координатний базис*** $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

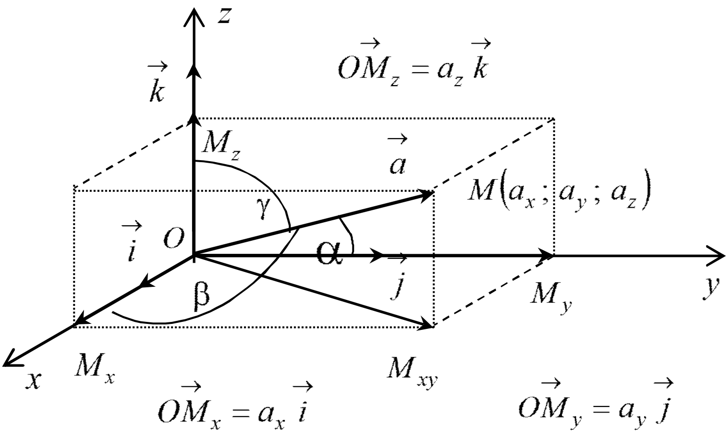

Рисунок 5

Нехай у координатному просторі $Oxyz$ заданий деякий вектор $\vec{a}$. Проекції вектора $\vec{a}$ на осі координат

$$a_x = np_{Ox}\,\vec{a};\;\; a_y = np_{Oy}\,\vec{a};\;\; a_z = np_{Oz}\,\vec{a}$$

називаються ***координатами*** (***компонентами***) вектора

$$\vec{a} = \vec{a}\left(a_x; a_y; a_z\right).$$

Координатні орти виглядають так: $\vec{i}(1; 0; 0)$, $\vec{j}(0; 1; 0)$ і $\vec{k}(0; 0; 1)$.

Вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ слугує ***радіусом-вектором*** точки $M\left(a_x; a_y; a_z\right)$.

Радіус-вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з розмірами $\left|\overrightarrow{OM_x}\right| = |a_x|$, $\left|\overrightarrow{OM_y}\right| = \left|a_y\right|$ і $\left|\overrightarrow{OM_z}\right| = |a_z|$. Тому

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Модуль вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат.

Кути $\alpha,\ \beta$ і γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями Ox, Oy і Oz, відповідно, називаються ***напрямними***, а

$$cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|};\;\; cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};\;\; cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

називаються ***напрямними косинусами*** вектора.

Приклад. Знайти модуль і напрямні косинуси вектора $\vec{a}(3; -4; 1)$.

Розв'язання: $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$.

$$cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{26}};\;\; cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{26}};\;\; cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Зі співвідношень (див. рис. 5)

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM}, \qquad \vec{a} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}$$

і $\overrightarrow{OM_x} = a_x\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_y} = a_y\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_z} = a_z\vec{k}$, одержимо

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} -$$

розклад вектора за координатним базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Якщо відомі координати початку $M_1(x_1; y_1 z_1)$ і кінця $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то зі співвідношення

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

маємо:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тобто, *координати вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *дорівнюють різниці відповідних координат його кінця* $M_2(x_2; y_2; z_2)$ *і початку* $M_1(x_1; y_1 z_1)$.

Відстань між двома точками $M_1(x_1; y_1 z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ обчислюється за формулою

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ***рівні*** тоді і тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y. \\ a_y = b_y \end{cases}$$

ЛЕКЦІЯ 4
ВЕКТОРНА АЛГЕБРА (ПРОДОВЖЕННЯ)

4.1 Лінійні операції над векторами у координатній формі. Умова колінеарності векторів

Нехай дано $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Лінійні операції з векторами виконуються покомпонентно:

1) при додаванні (відніманні) векторів їх відповідні координати додаються (віднімаються):

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + \left(a_y \pm b_y\right)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k};$$

2) при множенні вектора на число кожну координату множать на це число:

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}.$$

Умова колінеарності *(паралельності) двох векторів:* два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *колінеарні* тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z};\ \vec{a} \neq \vec{0};\ \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Приклад. Визначити, при яких значеннях α і β дані вектори колінеарні $\vec{a} = (\alpha - 2; 4; -3)$; $\vec{b} = (5; 3\beta; 6)$.

Розв’язання.

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}; \quad \frac{\alpha - 2}{5} = \frac{4}{3\beta} = \frac{-3}{6};$$

тому

$$1)\ \frac{\alpha-2}{5}=\frac{-1}{2};\ \alpha-2=\frac{-5}{2};\ \ \alpha=\frac{-1}{2};$$

$$2)\ \frac{4}{3\beta}=\frac{-1}{2};\ -3\beta=8;\ \beta=\frac{-3}{8}.$$

4.2 Скалярний добуток векторів

Умова перпендикулярності двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|cos\varphi.$$

Властивості скалярного добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$;
3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
4) $(\vec{a})^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|cos0=|\vec{a}|^2$.

Безпосередньо з означення маємо

$$cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Тоді $\quad пр_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів: *два ненульові вектори* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді , коли їх скалярний добуток дорівнює нулю:*

$$\vec{a}\perp\vec{b}\ \Rightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{a},\ \vec{b}\neq\vec{0}.$$

Оскільки координатні орти $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ взаємно перпендикулярні і мають одиничну довжину, то

$$(\vec{i})^2 = 1; \quad (\vec{j})^2 = 1; \quad \left(\vec{k}\right)^2 = 1;$$
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0; \ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0; \ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Нехай $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}; \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.
Тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Таким чином, ***скалярний добуток двох векторів*** *дорівнює сумі добутків їх відповідних координат*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Приклад. Знайти, при якому значенні параметра α задані вектори перпендикулярні $\vec{a} = (2\alpha; -2; -3)$; $\vec{b} = (\ \alpha; -\ \alpha; 4)$.

Розв'язання: $\vec{a} \perp \vec{b} \ \Rightarrow \ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0; \ 2\alpha \cdot \alpha + (-2)(-\alpha) - 12 = 0;$$

$$2\,\alpha^2 + 2\,\alpha - 12 = 0; \quad \alpha^2 + \alpha - 6 = 0;$$

за теоремою Вієта маємо: $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 2$.

4.3 Векторний добуток векторів. Площа трикутника

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 6) називається вектор, який позначається $\vec{a} \times \vec{b}$ і задовольняє такі умови:

1) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) модуль вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює добутку модулів співмножників на синус кута φ між ними:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin \varphi.$$

Іншими словами, модуль векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S_{пар};$$

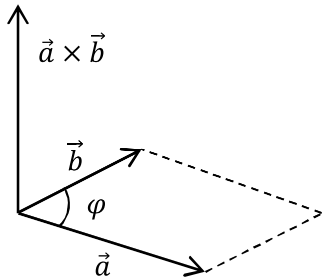

Рисунок 6

3) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ напрямлений так, що найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ здійснюється у додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки), якщо дивитися з кінця вектора $\vec{a} \times \vec{b}$.

Отже,

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}; \ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b};$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| sin\varphi = S_{пар}.$$

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\vec{a} \times \vec{b}$;

3) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Враховуючи взаємну орієнтацію координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ (рис. 7), отримаємо:

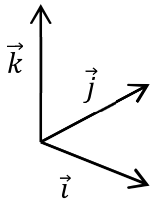

Рисунок 7

$$\vec{i}\times\vec{i}=0\ ;\ \ \vec{j}\times\vec{j}=0\ ;\ \ \vec{k}\times\vec{k}=0\ ;$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\ ;\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\ ;\ \ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}.$$

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Тоді ***векторний добуток двох векторів*** *дорівнює визначнику третього порядку, у якому перший рядок складається з координатних ортів, другий – з координат першого співмножника, а третій – з координат другого співмножника*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Зауваження. Оскільки діагональ ділить паралелограм на два рівні трикутники, то з геометричного змісту векторного добутку маємо

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

Приклад. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(-2;3;5), B(4;\ -1;2)$ і $C(3;7;\ -1)$.

Розв'язання:

$$\overrightarrow{AB}=(4-(-2);\ -1-3;2-5)=(6;\ -4;-3);$$

$$\overrightarrow{AC}=(3-(-2);7-3;\ -1-5)=(5;4;\ -6);$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -4 & -3\\ 5 & 4 & -6\end{vmatrix}=24\vec{i}+24\vec{k}-15\vec{j}+20\vec{k}+12\vec{i}+36\vec{j}$$

$$=36\vec{i}+21\vec{j}+44\vec{k};$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{36^2 + 21^2 + 44^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3673}\ \text{(од}^2\text{)}.$$

4.4 Мішаний добуток трьох векторів. Об’єм піраміди. Умова компланарності трьох векторів. Розклад вектора за довільним базисом

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Позначається $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ або $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Геометричний зміст: модуль мішаного добутку $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 8):

$$V_{\text{пар-да}} = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|.$$

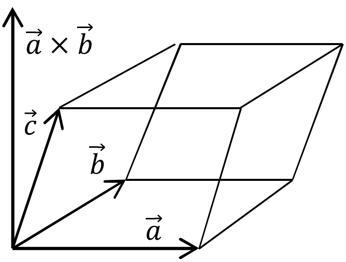

Рисунок 8

Доведення:

$$V_{\text{пар-да}} = S_{\text{пар-ма}} \cdot H;$$

$$S_{\text{пар-ма}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|;$$

$$H = \left|np_{\vec{a}\times\vec{b}}\,\vec{c}\right| = \left|\frac{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}}{\vec{a} \times \vec{b}}\right|;$$

$$V_{\text{пар-да}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \frac{\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|.$$

Зауваження. Об'єм трикутної піраміди $SABC$ обчислюється за формулою

$$V_{SABC} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AS}\right|.$$

Нехай $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$;

$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$. .

Тоді ***мішаний добуток трьох векторів*** *дорівнює визначнику третього порядку, у якому кожний рядок складається з координат відповідного співмножника*

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\,\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приклад. Задані координати вершин трикутної піраміди $S(4;\ -1;2), A(5;1;4), B(3;2;\ -1), C(0;0;3)$. Знайти її об'єм.

Розв'язання: $\overrightarrow{SA} = (5-4; 1-(-1); 4-2) = (1;2;2)$;

$$\overrightarrow{SB} = (3-4; 2-(-1);\ -1-2) = (-1;3;\ -3);$$

$$\overrightarrow{SC} = (0-4; 0-(-1); 4-3) = (-4;1;1);$$

$$\left(\overrightarrow{SA} \times \overrightarrow{SB}\right) \cdot \overrightarrow{SC} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 + 24 + 24 + 3 + 2 = 54;$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{SA} \times \overrightarrow{SB}\right) \cdot \overrightarrow{SC}\right| = \frac{1}{6} \cdot |54| = 9 \text{ (од}^3\text{)}.$$

Зауваження. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, то відповідний паралелепіпед вироджується і його об'єм дорівнює нулю. Звідси маємо ***умову компланарності трьох векторів***: *три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю*:

$$\vec{a}, \vec{b}\,, \vec{c} - \text{компланарні, тоді } \left(\vec{a} \times \vec{b}\,\right) \cdot \vec{c} = 0\ .$$

Приклад. Задані три точки: $A(1;0;\ -1)$, $B(4;\ -1;2)$, $C(0;1;\ -3)$. Знайти значення параметра α, при якому точка $N(2;\ \alpha;\ -1)$ лежить в площині ABC.

Розв'язання. Зазначені чотири точки лежать в одній площині, якщо три вектори $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BN}$ $і$ $\overrightarrow{CN}$ компланарні, тобто

$$\left(\overrightarrow{AN} \times \overrightarrow{BN}\right) \cdot \overrightarrow{CN} = 0.$$

$$\overrightarrow{AN} = \big(2-1;\ \alpha - 0;\ -1-(-1)\big) = (1;\ \alpha;0);$$

$$\overrightarrow{BN} = (2-4;\ \alpha - (-1);\ -1-2) = (-2;\ \alpha+1;\ -3);$$

$$\overrightarrow{CN} = \big(2-0;\ \alpha - 1;\ -1-(-3)\big) = (2;\ \alpha-1;2);$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ -2 & \alpha+1 & -3 \\ 2 & \alpha-1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2(\,\alpha+1) - 6\,\alpha + 3(\,\alpha-1) + 4\,\alpha = 0;$$

$$2\,\alpha + 2 + 3\,\alpha - 3 - 2\alpha = 0; \quad \alpha = \frac{1}{3}.$$

Зауваження. Довільна трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ утворює ***базис*** в тому розумінні, що будь-який вектор $\vec{d}$ єдиним способом може бути поданий у вигляді

$$\vec{d} = d_a\vec{a} + d_b\vec{b} + d_c\vec{c}.$$

Цю рівність називають ***розкладом вектора*** $\vec{d}$ ***за базисом*** $\{\vec{a}, \vec{b}\,, \vec{c}\}$. Числа d_a, d_b, d_c слугують ***координатами*** вектора $\vec{d}$

у цьому базисі.

Якщо відомі координати базисних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і вектора $\vec{d}$ у координатному базисі $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, то, записавши розклад вектора $\vec{d}$ за новим базисом $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ у скалярній формі, отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_x d_a + b_x d_b + c_x d_c = d_x \\ a_y d_a + b_y d_b + c_y d_c = d_y \\ a_z d_a + b_z d_b + c_z d_c = d_z \end{cases}$$

для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$.

Приклад. Перевірити, що задано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють базис. Знайти координати d_a, d_b, d_c заданого вектора $\vec{d}$ у цьому базисі $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$: $\vec{a} = (2;\ -1; 4)$; $\vec{b} = (1;\ 0;\ -3)$; $\vec{c} = (-2; 1;\ -1)$; $\vec{d} = (0;\ -1; 10)$.

Розв'язання: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= 0 + 4 - 6 - 0 + 6 - 1 = 3 \neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні і утворюють базис. Складемо і розв'яжемо систему рівнянь для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$:

$$\begin{cases} 2d_a + d_b - 2d_c = 0 \\ -d_a + \quad + d_c = -1 \\ 4d_a - 3d_b - d_c = 10 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 4 + 6 - 1 = 3;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 10 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 10 - 1 = 3, \qquad d_a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 20 - 8 - 20 = -6, d_b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 10 \end{vmatrix} = -4 - 6 + 10 = 0, \qquad d_c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0.$$

Відповідь: $d_a = 1;\ d_b = -2;\ d_c = 0.$

ЛЕКЦІЯ 5
ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ. ТИПОВІ ЗАДАЧІ НА ПРЯМУ ЛІНІЮ

5.1 Декартова прямокутна система координат на площині

Для визначення положення довільної точки використовується деяка система координат. Її вибір залежить від характеру поставленої задачі. Найпоширеніша декартова прямокутна система координат.

Довільній точці M координатної прямої Ox відповідає певне дійсне число x – її ***координата***. Навпаки, довільному дійсному числу x відповідає певна точка M координатної прямої Ox. Беручи до уваги таку взаємно однозначну відповідність, координатну пряму називають ***числовою прямою*** і ототожнюють з множиною дійсних чисел R: $R\epsilon(-\infty;\ +\infty)$.

Відстань між двома довільними точками $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ визначається формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

Дві взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox і Oy зі спільним *початком* O утворюють *декартову прямокутну систему координат на площині* Ox, що називається *віссю абсцис*, а Oy – *віссю ординат*. Сукупність прямих, перпендикулярних координатним осям, утворює *координатну сітку* на координатній площині Oxy . Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою парою чисел $(x; y)$ – її *координатами* (x – *абсциса*, y – *ордината*).

5.2 Відстань між двома точками. Ділення відрізка у заданому відношенні. Площа трикутника

З прямокутного $\Delta\, M_1KM_2$ (рис. 9) за теоремою Піфагора випливає, що ***відстань між*** довільними ***двома точками*** $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ *визначається формулою*

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

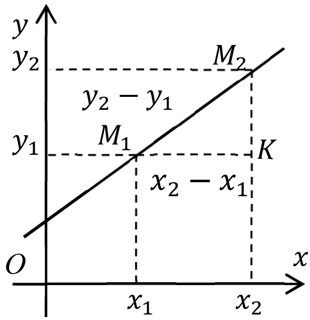

Рисунок 9

Нехай задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і відношення $\lambda = M_1M/MM_2$, у якому точка $M(x, y)$ ділить відрізок M_1M_2 (рис. 10).

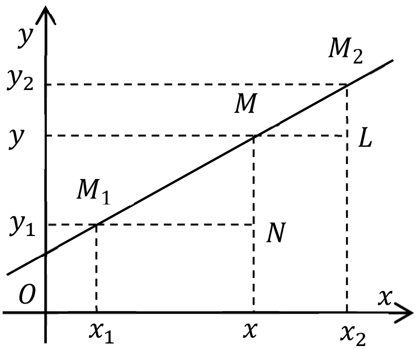

Рисунок 10

З подібності прямокутних трикутників $\Delta M_1NM \sim \Delta MLM_2$ випливає, що

$$\frac{NM}{LM_2} = \frac{M_1N}{ML} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda;$$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

Звідси ***координати точки $M(x,y)$, яка ділить заданий відрізок у заданому співвідношенні***, обчислюються за формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda=1$. Тоді ***координати середини відрізка*** визначаються за формулами

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Площу трикутника з вершинами в точках $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ та $C(x_3,y_3)$ знаходимо за формулою:

$$S=\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|.$$

5.3 Основні типи рівнянь прямої на площині Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Теорема. Будь-якій прямій відповідає рівняння першого степеня.

Доведення. Розглянемо загальний випадок розташування прямої на площині (рис. 11). Нехай α – кут, який утворює пряма з віссю Ox. Позначимо через $\boldsymbol{k=tg\alpha}$ ***кутовий коефіцієнт прямої***. Позначимо через b ординату точки перетину N прямої з віссю Oy.

Оберемо будь-яку точку $M(x, y)$, що належить прямій. Проведемо MK і NK паралельно до координатних осей. Отримаємо трикутник MNK – прямокутний (за побудовою). З прямокутного трикутника маємо:

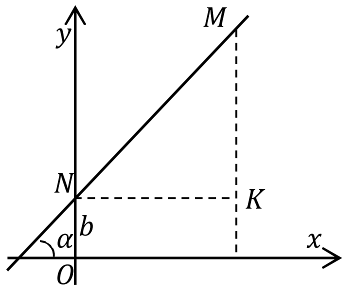

Рисунок 11

$$\frac{MK}{NK} = tg\alpha = k, \qquad NK = x,$$

$$MK = y - b, \frac{y-b}{x} = k,$$

$y = kx + b$ – ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.***

Зауваження: 1) якщо $k = 0$, пряма паралельна осі Ox і рівняння прямої виглядає так: $y = b$;

2)якщо k додатне, пряма утворює гострий кут з віссю Ox, якщо k від'ємне – тупий кут;

3)якщо пряма перпендикулярна осі Ox, кутовий коефіцієнт відсутній і рівняння прямої виглядає так: $x = a$.

Загальне рівняння прямої

Теорема. Будь-якому рівнянню першого степеня відповідає деяка пряма.

Доведення. Загальний вигляд рівняння першого степеня

$$Ax + By + C = 0.$$

Нехай $A = 0$, тоді $By + C = 0$, $y = -\frac{C}{B}$ (рівняння виду $y = b$).

Нехай $B = 0$, тоді $Ax + C = 0$, $x = -\frac{C}{A}$ (рівняння виду $x = a$).

Нехай $A \neq 0, B \neq 0$, тоді $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ (рівняння виду $y = kx + b$).

У будь-якому випадку рівняння першого ступеня описує пряму лінію. Отже,

$Ax + By + C = 0$ – ***загальне рівняння прямої.***

Рівняння прямої у відрізках

Нехай дано пряму $Ax + By + C = 0$, що не паралельна ні одній з координатних осей та не проходить через початок координат, тобто $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ (рис. 12).

Перетворимо це рівняння:

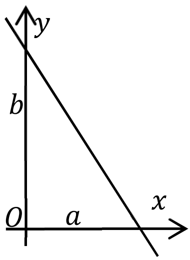

Рисунок 12

$$Ax + By = -C | : (-C);$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1;$$

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1.$$

Нехай $\frac{-C}{A} = a$, $\frac{-C}{B} = b$. Тоді рівняння виглядає так:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – ***рівняння прямої у відрізках.***

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, які належать прямій. Рівняння прямої $y = kx + b$ (1); якщо точка M_1 належить прямій, то виконується рівність $y_1 = kx_1 + b$ (2).

Від рівняння (1) віднімемо рівняння (2), отримаємо

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

За умовою ця пряма проходить і через точку M_2, а тому координати точки M_2 задовольняють рівняння:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Кутовий коефіцієнт шуканої прямої виглядає так:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Таким чином шукане рівняння виглядає так:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

або $$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Приклад. Дано трикутник ABC: $A(-2,-3)$, $B(4,3)$, $C(2,5)$. Знайти рівняння медіани BL.

Розв'язання. За визначенням, медіана поділяє сторону навпіл (рис.13), тому знайдемо координати точки L, використовуючи формули

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$x_L = \frac{-2 + 2}{2} = 0;\ \ y_L = \frac{-3 + 5}{2} = 1.$$

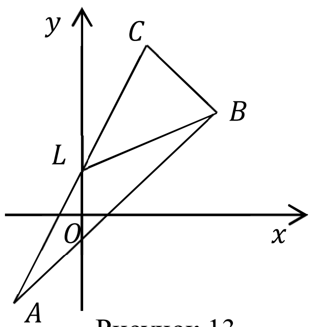

Рисунок 13

$L(0,1)$ – середина відрізку AC.

За формулою рівняння прямої, що проходить через дві точки, маємо:

$$\frac{y - 3}{1 - 3} = \frac{x - 4}{0 - 4}; \qquad \frac{y - 3}{-2} = \frac{x - 4}{-4};$$

$$-4(y-3) = -2(x-4) | : (-4);$$
$$y - 3 = \frac{1}{2}x - 2;$$
$$y = \frac{1}{2}x + 1 - \text{рівняння медіани } BL.$$

Рівняння прямої, що проходить через дану точку з заданим кутовим коефіцієнтом.

Нехай дано точку $A(x_1, y_1)$ і кутовий коефіцієнт k. Знайдемо рівняння $y = kx + b$ (1), невідоме b знайдемо за умови проходження прямої через точку A:

$$b = y_1 - kx_1.$$

Підставимо b у рівняння (1) і отримаємо:

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

або

$y - y_1 = k(x - x_1)$ – ***рівняння прямої, що проходить через дану точку із заданим кутовим коефіцієнтом.***

5.4 Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай дано дві прямі l_1 і l_2: $y = k_1x + b_1, y = k_2x + b_2$. Прямі мають, відповідно, кутові коефіцієнти:

$$k_1 = tg\alpha_1 \text{ і } k_2 = tg\alpha_2.$$

Розглянемо випадок, коли

прямі l_1 і l_2 перетинаються під довільним кутом φ (рис. 14). Під кутом φ розуміємо найменший кут, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки пряму l_1 до прямої l_2 щоб вони співпадали. Використаємо теорему про зовнішній кут трикутника:

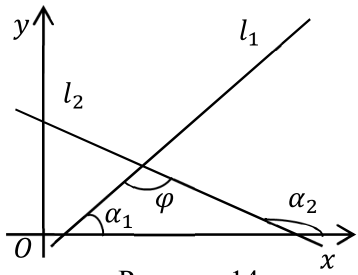

Рисунок 14

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi; \ \ \varphi = \alpha_2 - \alpha_1;$$

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1);$$

$$tg\varphi = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2};$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2};$$

$\varphi = arctg\left(\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right)$ – ***кут між прямими.***

Розглянемо випадок, коли прямі паралельні, тоді кути, що утворюють прямі з додатним напрямом осі абсцис, рівні: $\alpha_1 = \alpha_2$. Тому $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$ і, відповідно

$k_1 = k_2$ – ***умова паралельності прямих.***

Розглянемо випадок, коли прямі перпендикулярні. З теореми про зовнішній кут трикутника маємо: $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^{\circ}$,

$$tg\alpha_2 = tg\left(\alpha_1 + 90^{\circ}\right) = -ctg\alpha_2 = -\frac{1}{tg\alpha_2};$$

$k_1 = -\frac{1}{k_2}$ – ***умова перпендикулярності прямих.***

5.5 Відстань від точки до прямої

Знайдемо відстань d від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $l: Ax + By + C = 0$ (рис. 15).

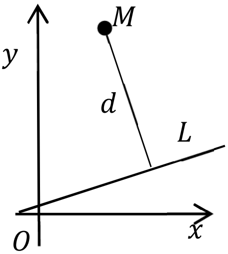

Рисунок 15

Нехай точка $L(x_1, y_1)$ належить прямій. Перетворимо загальне рівняння прямої на рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \qquad k = -\frac{A}{B}.$$

Прямі l і ML взаємно перпендикулярні. За умовою перпендикулярності прямих

$$k_1 = -\frac{1}{k_2};\ k_{ML} = \frac{B}{A}.$$

Рівняння ML: $y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$. Оскільки L належить прямій ML, то x_1 і y_1 задовольняють рівняння

$$y_1 - y_0 = \frac{B}{A}(x_1 - x_0) | : B;$$

$$\frac{y_1 - y_0}{B} = \frac{x_1 - x_0}{A} = g,$$

тоді

$$y_1 - y_0 = gB;\ \ x_1 - x_0 = gA. \qquad (1)$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} =$$

$$= \sqrt{g^2A^2 + g^2B^2} = |g|\sqrt{A^2 + B^2} \qquad (2)$$

З (1) знайдемо x_1, y_1:

$$y_1 = \mathscr{g}B + y_0; \;\; x_1 = \mathscr{g}A + x_0.$$

Підставимо отримані вирази x_1, y_1 у загальне рівняння прямої l, отримаємо:

$$A(\mathscr{g}A + x_0) + B(\mathscr{g}B + y_0) + C = 0;$$

$$\mathscr{g}A^2 + Ax_0 + \mathscr{g}B^2 + By_0 + C = 0;$$

$$\mathscr{g}(A^2 + B^2) = -Ax_0 - By_0 - C;$$

$$\mathscr{g} = \frac{-(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}. \qquad (3)$$

Підставимо у (2) вираз (3), тримаємо:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Отже, щоб знайти відстань від точки до прямої необхідно підставити координати цієї точки в загальне рівняння прямої і модуль цього виразу поділити на корінь квадратний з суми квадратів коефіцієнтів, які знаходяться біля змінних x, y.

5.6 Типові задачі на пряму лінію

Приклад. Для трикутника з вершинами $A(-2,-4)$, $B(-6{,}3)$, $C(5{,}1)$ (рис. 16) розв'язати такі задачі:

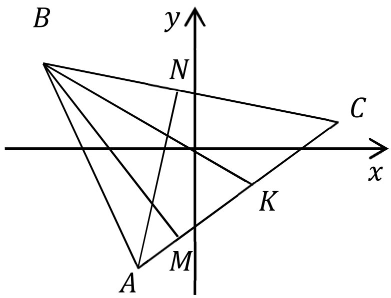

Рисунок 16

а) обчислити площу трикутника.

Розв'язання. Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

Тому маємо:

$$S = \frac{1}{2}|(-2-5)(3-1) - (-6-5)(-4-1)| = \frac{1}{2}|-14-55|.$$

$$S = 34{,}5 \text{ (од. кв.)}.$$

б) записати рівняння сторін трикутника.

Розв'язання. Рівняння сторони AB: $A(-2,-4)$, $B(-6{,}3)$. За формулою рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-(-2)}{-6-(-2)} = \frac{y-(-4)}{3-(-4)}$$

Після тотожних перетворень отримаємо:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}.$$

Рівняння сторін BC і AC знаходимо аналогічно:

BC: $B(-6{,}3)$, $C(5{,}1)$

$$\frac{x-(-6)}{5-(-6)} = \frac{y-3}{1-3}.$$

Звідси: $y = -\frac{2}{11}x + \frac{21}{11}$.

AC: $A(-2,-4)$, $C(5{,}1)$

$$\frac{x-(-2)}{5-(-2)} = \frac{y-(-4)}{1-(-4)}.$$

Звідси $y = \frac{5}{7}x - \frac{18}{7}$.

в) знайти внутрішній кут α трикутника.

Розв'язання. Для виконання цього завдання застосуємо формулу

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Кут α утворено внаслідок перетину прямих AB і AC. Отже, з урахуванням додатного обходу проти годинникової стрілки маємо:

$$k_1 = k_{AC} = \frac{5}{7}, \qquad k_2 = k_{AB} = -\frac{7}{4};$$

$$tg\alpha = \frac{-\frac{7}{4} - \frac{5}{7}}{1 - \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{4}} = \frac{-\frac{69}{28}}{-\frac{7}{28}} = \frac{69}{7}; \alpha = arctg\frac{69}{7};$$

в) знайти рівняння медіани BK.

Розв'язання. Медіана – це відрізок, який сполучає вершину трикутника з серединою його протилежної сторони. Координати точки K (рис. 16) знайдемо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Тут: $\mathrm{A}(-2, -4), \qquad \mathrm{C}(5,1).$

Отже, маємо:

$$x_K = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}, \qquad y_K = \frac{-4+1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Рівняння BK запишемо за формулою:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

$$B(-6,3), K\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

Отже $\quad \dfrac{x+6}{\frac{3}{2}+6} = \dfrac{y-3}{-\frac{3}{2}-3}$

Після тотожних перетворень отримаємо рівняння медіани *BK:*

$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5};$$

г) знайти рівняння висоти AN.

Розв'язання. Висота $AN -$ це перпендикуляр проведений з вершини A до сторони трикутника BC. Отже, для прямих BC і AN виконується умова перпендикулярності:

$$k_{AN} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\left(-\frac{2}{11}\right)} = \frac{11}{2}.$$

Рівняння висоти *AN* знаходимо за формулою:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

$$\text{де } k = k_{AN}, A(x_0, y_0).$$

Тобто: $k = \dfrac{11}{2}, \qquad A(-2, -4).$

Маємо $\qquad y + 4 = \dfrac{11}{2}(x + 2);\ \ y = \dfrac{11}{2}x + 11 - 4\,.$

$$\text{Рівняння висоти } AN\text{:} \quad y = \frac{11}{2}x + 7.$$

д) обчислити довжину висоти CM.

Розв'язання. Довжину висоти CM знайдемо як відстань від точки $C(x_0, y_0)$ до прямої *AB* за формулою:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Для цього перепишемо рівняння прямої *AB* в загальному вигляді:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}\ ;\quad 4y = -7x - 30;\quad 7x + 4y + 30 = 0;$$

$$A = 7, B = 4, C = 30.$$

Точка $C(x_0, y_0)$ має координати $x_0 = 5, y_0$=1.

Отже: $$d = \left|\frac{7 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 30}{\sqrt{7^2 + 4^2}}\right| = \frac{69}{\sqrt{65}}.$$

ж) записати рівняння прямої, яка проходить через вершину трикутника B паралельно до його сторони AC.

Розв'язання. Позначимо рівняння шуканої прямої як BF. За умовою пряма BF паралельна до прямої AC, а тому, використавши умову паралельності двох прямих, знайдемо кутовий коефіцієнт прямої BF:

$$k_{BF} = k_{AC} = \frac{5}{7}.$$

Для прямої BF відомі кутовий коефіцієнт та точка яка належить прямій, а отже, використаємо рівняння:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

$$k = \frac{5}{7},\ B(6{,}3).$$

Маємо:

$$y - 3 = \frac{5}{7}(x + 6)\ ;\quad y = \frac{5}{7}x + \frac{30}{7} + 3.$$

$$BF\colon\ y = \frac{5}{7}x + \frac{51}{7}.$$

ЛЕКЦІЯ 6
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ОСНОВНІ ТИПИ РІВНЯНЬ ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ. ОКРЕМІ ВИПАДКИ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

6.1 Загальне рівняння лінії другого порядку

Пряма – це єдина лінія першого порядку. Її загальним рівнянням є алгебраїчне рівняння першого степеня.

Лінії другого порядку відповідає рівняння другого степеня, загальний вигляд якого

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

де A, B, C, D, E, F – сталі коефіцієнти, до того ж хоча б одне з чисел A, B, C відмінне від нуля, тобто

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Існують чотири типи ліній другого порядку – ***коло, еліпс, гіпербола і парабола***.

6.2 Коло

Колом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки площини C (***центра*** кола) дорівнює заданому сталому числу R (***радіусу*** кола).

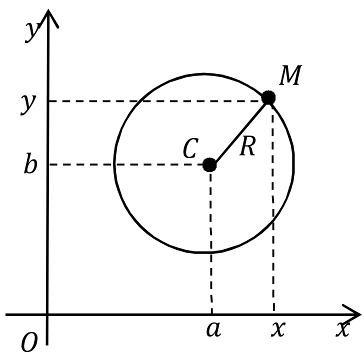

Рисунок 17

Розглянемо коло з центром у точці $C(a, b)$ і радіусом R (рис. 17). Для довільної точки

$M(x, y)$ кола

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R.$$

Одержане співвідношення

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

називається ***рівнянням кола***.

Якщо центр кола міститься в точці $O(0{,}0)-$ початку координат, то рівняння кола набуває такого вигляду:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$-$ рівняння кола з центром у початку координат.

6.3 Еліпс

Еліпсом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (*фокусів* еліпса) дорівнює заданому сталому числу 2а, більшому за відстань між фокусами. Для довільної точки $M(x, y)$ еліпса (рис. 18) $r_1 + r_2 = 2a$,

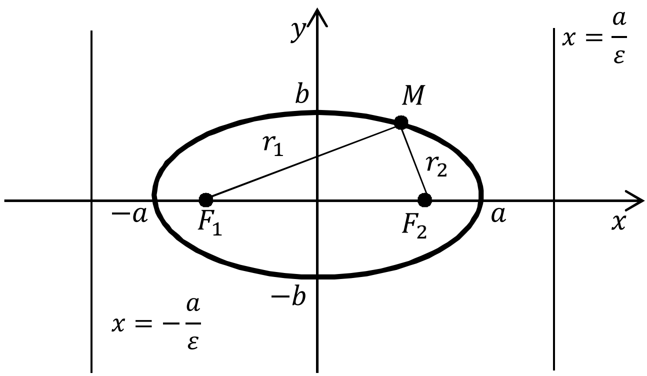

Рисунок 18

де $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x, y)$; $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ – фокуси, $F_1F_2 = 2c < 2a$. Тоді

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

Піднісши до квадрату, спростивши і позначивши

$$b^2 = a^2 - c^2$$

(зробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння еліпса***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; b^2 = a^2 - c^2 > 0.$$

Еліпс має форму овала, симетричного відносно ***великої осі*** $A_1A_2 = 2a$ і ***малої осі*** $B_1B_2 = 2b$. Відношення ***фокусної відстані*** $F_1F_2 = 2c$ до великої осі $A_1A_2 = 2a$ називається ***ексцентриситетом*** еліпса і позначається ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Зауваження. Ексцентриситет характеризує форму еліпса, при цьому $0 \le \varepsilon \le 1$. Якщо $\varepsilon = 0$, то маємо окремий випадок еліпса – коло, при цьому $a = b = r$.

Дві прямі, що мають рівняння $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, називаються ***директрисами*** еліпса.

Властивість директрис еліпса: *відношенням фокального радіуса* r *довільної точки еліпса до відстані* d *цієї точки до відповідної директриси є стала величина, що дорівнює ексцентриситету еліпса* $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

6.4 Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів*** гіперболи) дорівнює заданому сталому числу $2a$, меншому за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x, y)$ гіперболи (рис. 19)

$$|r_1 - r_2| = 2a,$$

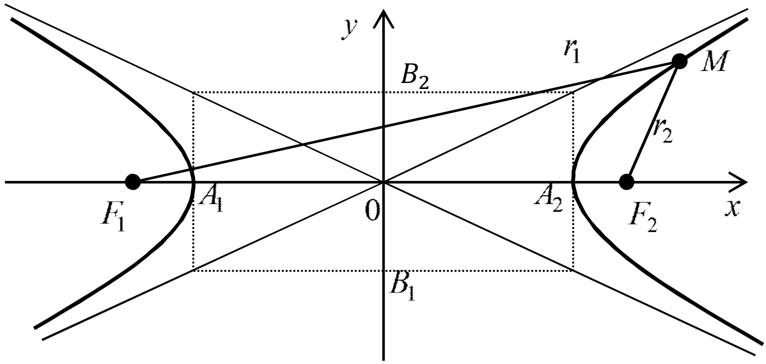

Рисунок 19

де $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x, y)$; $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ – фокуси, $F_1F_2 = 2c > 2a$. Тоді

$$\left|\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right| = 2a.$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи, за умови, що

$$b^2 = c^2 - a^2 > 0,$$

одержимо ***канонічне рівняння гіперболи***

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гіпербола складається з двох нескінченних гілок, які симетричні відносно ***дійсної осі*** $A_1A_2 = 2a$ і ***уявної осі*** $B_1B_2 = 2b$, а також центрально симетричні відносно точки $O(0;0)$ – ***центра*** гіперболи. Дійсні вершини $A_1(-a;0), A_2(0;a)$ є точками перетину гіперболи з віссю Ox. Через уявні вершини $B_1(0;-b), B_2(0;b)$ гіпербола не проходить. Прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ є ***асимптотами*** гіперболи.

Асимптотою називається пряма, що необмежено зближується з гілкою кривої на нескінченності.

Відношення ***між фокусною відстанню*** $F_1F_2 = 2c$ та дійсною віссю $A_1A_2 = 2a$ називається ***ексцентриситетом*** гіперболи і позначається $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Дві прямі, для яких справджується рівняння $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, називаються ***директрисами*** гіперболи.

Властивість директрис гіперболи аналогічна до відповідної властивості для еліпса: $\varepsilon = \frac{r}{d}$.

6.5 Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань від заданої точки площини F (***фокуса*** параболи) дорівнює відстані до заданої прямої l_d (***директриси*** параболи), що не проходить через фокус.

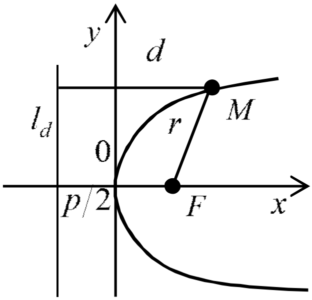

Рисунок 20

Для довільної точки $M(x;y)$ параболи (рис. 20) $r = d$, де $r = MF$– ***фокальний радіус*** точки $M(x;y)$; d – відстань точки $M(x;y)$ до директриси $l_d\colon x = -\frac{p}{2}$; $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус; p – ***параметр*** параболи (відстань від фокуса до директриси), $p > 0$. Тоді

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} = x - \left(-\frac{p}{2}\right).$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння параболи***

$$y^2 = 2px.$$

Парабола має форму нескінченної гілки, яка симетрична відносно ***осі*** параболи OF. Точка $O(0;0)$ на осі симетрії (початок координат) називається ***вершиною*** параболи.

Зауваження. Згідно з означенням параболи і властивостями директрис еліпса і гіперболи, прийнято, що ***ексцентриситет*** параболи дорівнює одиниці $\varepsilon = 1$.

6.6 Рівняння площини у просторі

Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай на площині α задана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і відомий ***вектор нормалі*** $\vec{n} = (A;B;C) \neq \vec{0}$ (рис. 21).

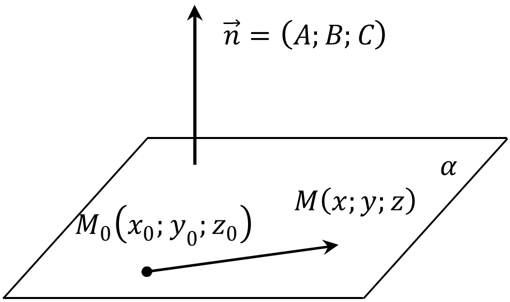

Рисунок 21

Оберемо довільну точку $M(x; y; z)$ на цій площині та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Точка $M(x; y; z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до нормалі $\vec{n}$. Використавши умову перпендикулярності векторів, маємо

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0,$$

або в координатній формі

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 -$$

рівняння площини, що проходить через задану точку M_0 перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}$.

Загальне рівняння площини

Розкриємо дужки в рівнянні

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

і отримаємо $Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$. Згрупуємо сталі величини та позначимо $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Одержимо

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ –}$$

загальне рівняння площини, що є лінійним відносно координат $x, y, z,$ до того ж хоча б один з коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Теорема. *Будь-яка площина визначається лінійним рівнянням відносно координат x, y, z. Кожному лінійному рівнянню зі змінними x, y, z відповідає деяка площина.*

Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай на площині α задано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$ які не лежать на одній прямій (рис. 22).

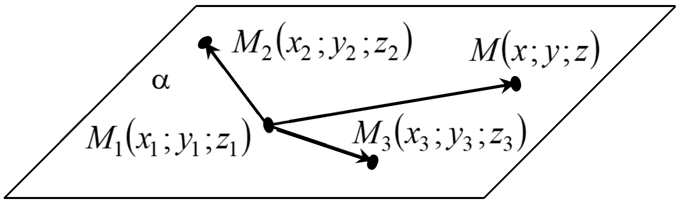

Рисунок 22

Оберемо довільну точку $M(x, y, z)$ на цій площині та побудуємо три вектори:

$$\overrightarrow{M_1M}(x - x_1; y - y_1; z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1),$$

що виходять з однієї точки M_1. Точка $M(x, y, z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні. Використавши умову компланарності трьох векторів, отримаємо:

$$\left(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}\right) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0,$$

або в координатній формі –

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ –}$$

рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Рівняння площини у відрізках

Нехай площина α перетинає всі три координатні вісі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$ і $M_3(0; 0; c)$ (рис. 23).

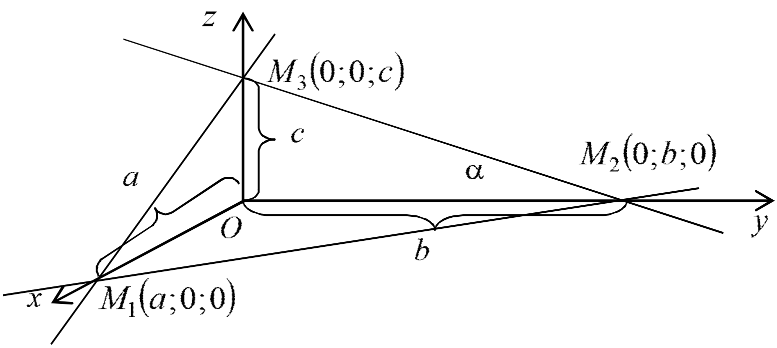

Рисунок 23

Використавши рівняння площини, що проходить через три точки, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$bcx - abc + abz + acy = 0;$$

$$bcx + abz + acy = abc \,|\div abc;$$

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ – рівняння площини у відрізках.

6.7 Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай дві площини α_1 і α_2 задано загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Кут φ між площинами α_1 і α_2 дорівнює куту між їх векторами нормалей: $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ (рис. 24).

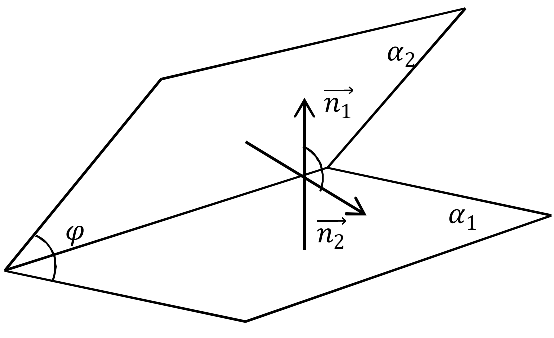

Рисунок 24

Отже,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}}.$$

Використавши умови перпендикулярності та паралельності векторів, отримаємо відповідні умови для площин.

Умова перпендикулярності двох площин

$$\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}.$$

Умова паралельності двох площин

$$\boldsymbol{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}.$$

Дві площини збігаються, якщо

$$\boldsymbol{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_1}}.$$

Приклад. Знайти кут між заданими площинами $5x - 4y + 2z - 8 = 0$ і $3x + 7y - z + 1 = 0$.

Розв'язання. $\overrightarrow{n_1} = (5;\ -4; 2)$ і $\overrightarrow{n_2} = (3; 7;\ -1)$, тому маємо:

$$\cos\varphi = \frac{5\cdot 3 + (-4)\cdot 7 + 2\cdot(-1)}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 7^2 + (-1)^2}} = \frac{15 - 28 - 2}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{59}}$$

$$\cos\varphi = \frac{-15}{\sqrt{2\,655}};\ \varphi = \pi - arccos\frac{15}{\sqrt{2\,655}}.$$

6.8 Відстань від точки до площини

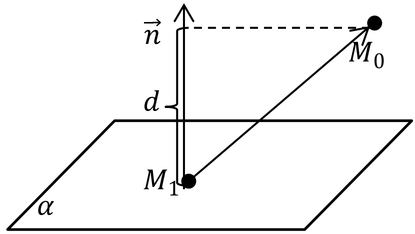

Рисунок 25

Нехай у просторі задані площина α загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і деяка точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис. 25).

Оберемо на цій площині довільну точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$: $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$.

Відстань d від точки M_0 до площини α дорівнює модулю проєкції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормалі $\vec{n} = (A; B; C)$

$$d = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Оскільки $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$, то ***відстань від точки до прямої*** обчислюємо за формулою:

$$\boldsymbol{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}.$$

Приклад. Знайти відстань d від точки $M_0(4; -3; 5)$ до площини α: $3x + 6y - 2z - 2 = 0$.

Розв'язання. $A = 3$, $B = 6$, $C = -2$, $D = -2$, $x_0 = 4$, $y_0 = -3$, $z_0 = 5$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) + (-2) \cdot 5 - 2|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}};$$

$$d = \frac{|-18|}{\sqrt{50}} = \frac{18}{5\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{5} \text{ (од.)}.$$

ЛЕКЦІЯ 7
ОСНОВНІ ТИПИ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ У ПРОСТОРІ. КУТ МІЖ ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ. ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ. ТИПОВІ ЗАДАЧІ НАПРЯМУ І ПЛОЩИНУ

7.1 Основні типи рівняння прямої лінії у просторі. Рівняння прямої, що проходить через задану точку, паралельно до заданого вектора (канонічні рівняння прямої)

Нехай на прямій l задана деяка точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і відомий ***напрямний вектор*** $\vec{S} = (m; n; p)$ цієї прямої – довільний ненульовий вектор, паралельний до неї (рис. 26).

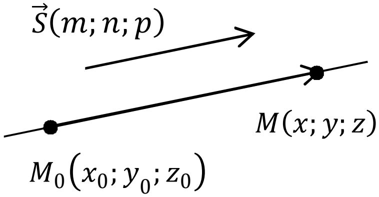

Рисунок 26

Оберемо довільну точку $M(x; y; z)$ на цій прямій та побудуємо вектор:

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0).$$

Точка M належить прямій тоді й тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний до вектора $\vec{S}$. Використавши умову паралельності векторів, отримаємо:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$ – ***канонічні рівняння прямої***.

Параметричні рівняння прямої

Якщо у канонічні рівняння прямої ввести коефіцієнт пропорційності t:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

і розв'язати їх відносно x, y та z, то отримаємо:

$$\frac{x-x_0}{m}=t, \qquad \frac{y-y_0}{n}=t, \qquad \frac{z-z_0}{p}=t.$$

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases} -$$

параметричні рівняння прямої, де змінна t слугує параметром.

Приклад. Пряма задана канонічним рівнянням

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{5}.$$

Записати параметричне рівняння цієї прямої.

Розв'язання.

$$\frac{x-1}{4}=t, \quad \frac{y+2}{-3}=t, \qquad \frac{z+1}{5}=t.$$

$$\begin{cases} x-1=4t \\ y+2=-3t; \\ z+1=5t \end{cases} \quad \begin{cases} x=4t+1 \\ y=-3t-2\,. \\ z=5t-1 \end{cases}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай на прямій l задано дві точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. За напрямний вектор можна обрати

$$\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1).$$

Тоді (за канонічними рівняннями) маємо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} -$$

рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-4; 2; -5)$ і $M_2(2; -6; 1)$.

Розв'язання.

$$\frac{x-(-4)}{2-(-4)} = \frac{y-2}{-6-2} = \frac{z-(-5)}{1-(-5)}; \quad \frac{x+4}{6} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z+5}{6};$$

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+5}{3}.$$

Пряма, як перетин двох площин

Просторова лінія може задаватися, як перетин двох поверхонь. Зокрема, пряма l слугує лінією перетину деяких двох площин α_1 і α_2. Якщо ці площини задані загальними рівняннями

$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

називається ***загальним рівнянням прямої***.

Приклад. Пряма l задана загальним рівнянням

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Знайти її канонічне рівняння.

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор прямої за допомогою векторного добутку векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$.

$$\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x = 0$, тоді

$$\begin{cases} -3y + 2z = 5 \\ y - z = -1 \end{cases}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad y = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3; \quad z = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -2.$$

$$M_0(0;\ -3;\ -2)$$

Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x}{1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+2}{7}.$$

7.2 Кут між двома прямими

Нехай дві прямі задано канонічними рівняннями

$$l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ і } l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Кут φ між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їхніми напрямними векторами $\overrightarrow{S_1} = (m_1; n_1; p_1)$ і $\overrightarrow{S_2} = (m_2; n_2; p_2)$. Отже,

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1{}^2 + n_1{}^2 + p_1{}^2}\sqrt{m_2{}^2 + n_2{}^2 + p_2{}^2}}.$$

Використавши умови перпендикулярності та паралельності векторів, отримаємо відповідні умови для прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих

$$\boldsymbol{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0}.$$

Умова паралельності двох прямих

$$\boldsymbol{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}.$$

7.3 Умова перетину двох непаралельних прямих. Відстань між мимобіжними прямими

Дві прямі у просторі можуть перетинатися або бути паралельними чи мимобіжними.

Нехай задано дві непаралельні прямі

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ і } l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Прямі l_1 і l_2 перетинаються, якщо вектори $\overrightarrow{S_1} = (m_1; n_1; p_1)$, $\overrightarrow{S_2} = (m_2; n_2; p_2)$ і $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ – компланарні (лежать в одній площині). Використавши умову компланарності трьох векторів $\left(\overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{S_1}\right) \cdot \overrightarrow{S_2} = 0$, одержимо ***умову перетину двох непаралельних прямих***:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Зауваження. Для довільних прямих l_1 і l_2 ця рівність слугує умовою їхньої належності одній площині. Якщо ця умова не виконується, то прямі l_1 і l_2 мимобіжні.

Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими l_1 і

l_2, розглянемо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2}$, перпендикулярний до обох прямих. Тоді відстань d між прямими l_1 і l_2 дорівнює модулю проєкції вектора $\overrightarrow{M_1 M_2} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right)$ на вектор $\vec{a}$:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{a}\right|}{|\vec{a}|}.$$

Зауваження. Ця формула справедлива також для прямих l_1 і l_2, що перетинаються. Зрозуміло, що при цьому $d = 0$.

Приклад. Знайти відстань d між заданими прямими:

$$l_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{2} \text{ і } l_2: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-3}.$$

Розв'язання.

$$\vec{a} = \overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Оскільки $\vec{a} \neq \vec{0}$, то прямі l_1 і l_2 – непаралельні. Далі знаходимо: $\overrightarrow{M_1 M_2} = (-2-1; 0+2;\ 2-5) = (-3; 2;\ -3)$;

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + 5^2} = \sqrt{110};$$

$$\left|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{a}\right| = |-3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5| = |-19|\,;$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{a}\right|}{|\vec{a}|} = \frac{19}{\sqrt{110}} \text{ (од.)}.$$

7.4 Кут між прямою та площиною

Нехай задано пряму l канонічними рівняннями і площину α загальним рівнянням:

$$l:\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ ;\quad \alpha: Ax+By+Cz+D=0.$$

Кут φ між ними доповнює кут між напрямним вектором прямої $\vec{S}=(m,n,p)$ і вектором нормалі площини $\vec{n}=(A,B,C)$ до 90° (рис. 27).

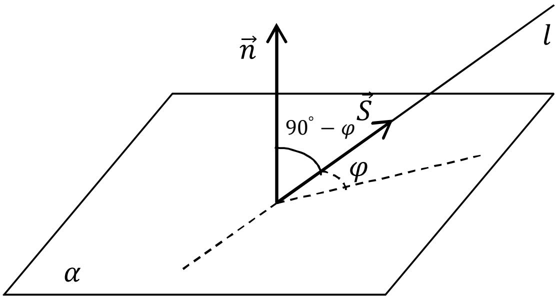

Рисунок 27

Тоді

$$\cos\left(90^{\circ}-\varphi\right)=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\ .$$

Застосовуючи тригонометричну формулу зведення і враховуючи, що кут φ між прямою і площиною – гострий, маємо

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Використавши умови перпендикулярності та паралельності векторів, отримаємо відповідні умови для взаємного розміщення прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої та площини:

$$\boldsymbol{\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}}.$$

Умова паралельності прямої та площини:

$$\boldsymbol{Am + By + Cp = 0}\ .$$

7.5 Перетин прямої з площиною

Нехай задано пряму l параметричними рівняннями і площину α загальним рівнянням:

$$l: \begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}; \quad \alpha: Ax + By + Cz + D = 0\ .$$

Для знаходження точки перетину прямої та площини необхідно скласти і розв'язати систему їхніх рівнянь. Цю систему зручно розв'язувати методом вилучення невідомих (методом Гауса), підставляючи вирази для x, y, z із параметричних рівнянь прямої у рівняння площини. Отримаємо рівняння для t:

$$(Am + Bn + Cp)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D).$$

Якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, тобто пряма не паралельна до площини, то пряма і площина перетинаються в одній точці, що відповідає значенню параметра

$$t = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{Am + Bn + Cp}.$$

Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна до площини, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тобто точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямої l не лежить на площині α, то рівняння для t розв'язків немає. Пряма паралельна до площини і не лежить на ній.

Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тобто точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямої l лежить на площині α, то рівняння для t виконується при всіх значеннях параметра. Пряма лежить на площині.

Приклад. Знайти проєкцію N точки $M_0(2; -5; 4)$ на площину α: $3x + 2y - z - 6 = 0$.

Розв'язання. Точка N слугує основою перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину α (рис. 28). Напрямний вектор $\vec{S}$ прямої M_0N колінеарний вектору нормалі $\vec{n}$ площини. Можна вважати, що

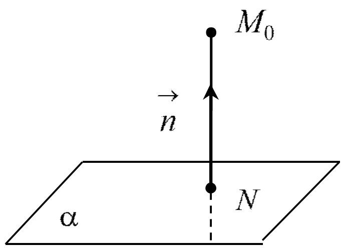

Рисунок 28

$$\vec{S} = \vec{n} = (3; 2; -1).$$

Тоді параметричне рівняння прямої M_0N: $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 5 \\ z = -t + 4 \end{cases}$.

Підставивши ці вирази у рівняння площини, одержимо значення параметра t, що відповідає точці перетину N прямої та площини:

$$3(3t+2)+2(2t-5)-(-t+4)-6=0; \quad t=-1.$$

Звідси $x=-1$; $y=-7$; $z=5$.

Отже, проєкцією слугує точка $N(-1;\ -7; 5)$.

7.6 Відстань від точки до прямої

Нехай потрібно знайти відстань d від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої l, яка задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}.$$

Розглянемо два способи визначення цієї відстані.

1. Оберемо на прямій відому точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та побудуємо паралелограм на векторах $\vec{S}=(m, n, p)$ і $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0; y_1-y_0; z_1-z_0)$ (рис. 29). Площа S цього паралелограма – $S=|\vec{S}|d$ або $S=\left|\vec{S}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|$. Звідси

$$d=\frac{\left|\vec{S}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{S}|}.$$

2. Проведемо через точку M_1 площину α, перпендикулярну до прямої l (рис. 30). Вектор нормалі $\vec{n}=(A, B, C)$ площини α колінеарний до напрямного вектора $\vec{S}$ прямої l. Можна припустити, що $\vec{n}=\vec{S}=(m, n, p)$.

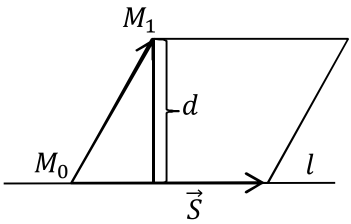

Рисунок 29

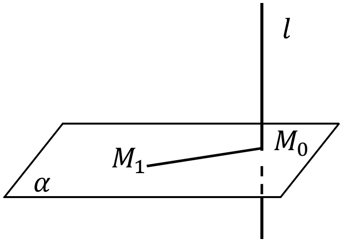

Рисунок 30

Тоді

$$\alpha: m(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0) + p(z_1 - z_0) = 0.$$

Далі знайдемо точку M_0 перетину прямої та площини. Ця точка слугує основою перпендикуляра, проведеного з точки M_1 до прямої l. Отже, $d = M_0M_1$.

ЛЕКЦІЯ 8
ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

8.1 Загальне рівняння поверхні другого порядку

Поверхні будемо розглядати в декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$.

Форму і властивості поверхні встановлюють за допомогою *методу паралельних перерізів*: побудови і дослідження просторових ліній перетину поверхні координатними площинами (*головні перерізи*) і площинами, що паралельні до них.

Поверхнею другого порядку називається множина всіх точок простору, координати яких задовольняють її ***загальне рівняння:***

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

де $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J$ – *сталі коефіцієнти*, до того ж хоча б один із коефіцієнтів $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ відмінний від нуля, тобто $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0$.

Існує дев’ять типів дійсних невироджених поверхонь другого порядку: три циліндри – еліптичний, гіперболічний і параболічний; конус другого порядку; еліпсоїд (зокрема, сфера); однопорожнинний гіперболоїд; двопорожнинний гіперболоїд; еліптичний параболоїд; гіперболічний параболоїд.

8.2 Сфера як поверхня другого порядку

Сферичною поверхнею **(*сферою*)** називається множина всіх точок $M(x, y, z)$ простору, кожна з яких віддалена від заданої точки $C(x_0, y_0, z_0)$ (*центра* сфери) на задану відстань R (*радіус* сфери) (рис. 31).

Зауваження. Сфера є обмеженою замкненою поверхнею, симетричною відносно центра. Довільна пряма, що проходить через її центр, слугує віссю симетрії сфери. Довільна площина, що проходить через центр сфери, слугує її площиною симетрії.

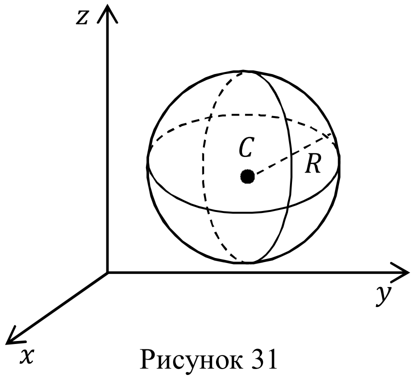

Рисунок 31

Для довільної точки $M(x, y, z)$ сфери виконується рівність $CM = R$.

Але $CM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Тому $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Піднісши до квадрата, отримаємо

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 -$$

рівняння сфери зі зміщеним центром.

Якщо центр сфери співпадає з початком координат $O(0,0,0)$ то маємо ***канонічне рівняння сфери***

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

8.3 Циліндричні поверхні другого порядку

Розглянемо *циліндричні поверхні другого порядку.*

1. ***Еліптичний циліндр*** (рис. 32) характеризується ***канонічним рівнянням***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

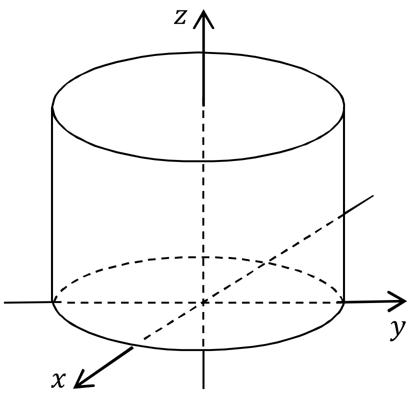

Рисунок 32

Зокрема, якщо $a^2 = b^2 = R^2$, то рівняння

$$x^2 + y^2 = R^2$$

визначає ***круговий циліндр.***

Координатні площини слугує площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії еліптичного циліндра. Вісь Oz називається *прямою центрів* еліптичного циліндра, оскільки кожна точка цієї осі є його центром симетрії.

2. ***Гіперболічний циліндр*** (рис. 33) характеризується ***канонічним рівнянням***

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

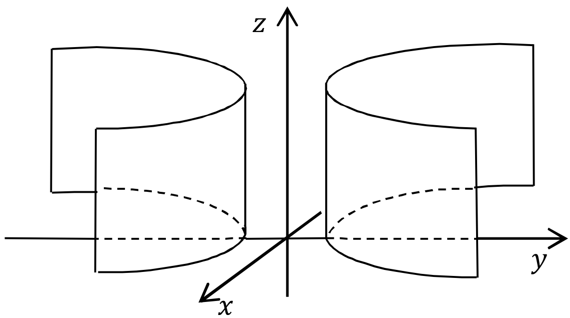

Рисунок 33

Координатні площини $Oxz,\ Oyz, Oxy$ слугує площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії гіперболічного циліндра. Вісь Oz називається *прямою центрів* гіперболічного циліндра, оскільки кожна точка цієї осі є його центром симетрії.

3) ***Параболічний циліндр*** (рис. 34) характеризується

канонічним рівнянням

$$y^2 = 2px$$

Дві координатні площини Oxy і Oxz служать площинами симетрії, а координатна вісь Ox – віссю симетрії параболічного циліндра.

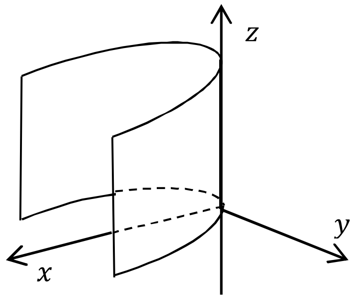

Рисунок 34

8.4 Конус другого порядку

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 -$$

канонічне рівняння конуса другого порядку (*еліптичного конуса*) (рис. 35).

Вершина $O(0{,}0{,}0)$ є центром симетрії, вісь Oz – віссю симетрії, а координатні площини – площинами симетрії цього конуса.

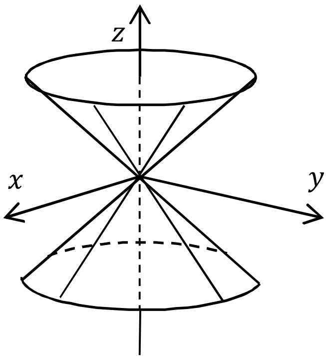

Рисунок 35

Зокрема, якщо $a = b$, то рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

визначає ***круговий конус***.

Зауваження. Коло, еліпс, гіперболу і параболу можна одержати як лінії перетину кругового конуса площиною.

8.5 Еліпсоїд обертання. Еліпсоїд загального вигляду

Якщо еліпс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо осі Oz, то отримаємо ***еліпсоїд обертання*** навколо осі Oz (***сфероїд***) (рис. 36)

$$\frac{(x^2+y^2)}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-$$

канонічне рівняння еліпсоїда обертання.

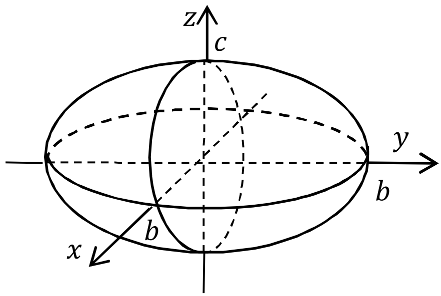

Рисунок 36

Рівномірно деформуючи еліпсоїд обертання (розтяг чи стиск) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k={}^{b}/_{a}$, отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-$$

канонічне рівняння еліпсоїда *загального вигляду* (*еліпсоїда*).

Еліпсоїд має форму обмеженої замкненої овальної поверхні. Координатні площини слугує площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається *центром* еліпсоїда.

Величини a, b і c називаються *півосями* еліпсоїда. Якщо будь-які дві півосі рівні між собою, то це еліпсоїд обертання, а якщо всі три півосі рівні між собою, то – сферу.

8.6 Однопорожнинний гіперболоїд обертання

Якщо гіперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо уявної осі Oz, то отримаємо ***однопорожнинний гіперболоїд обертання*** навколо осі Oz.

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 -$$

канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда обертання.

Рівномірно деформуючи однопорожнинний гіперболоїд обертання (розтяг чи стиск) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = {}^{b}/_{a}$, одержимо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 -$$

канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда *загального вигляду* (рис. 37).

Величини a, b і c називаються *півосями* однопорожнинного гіперболоїда.

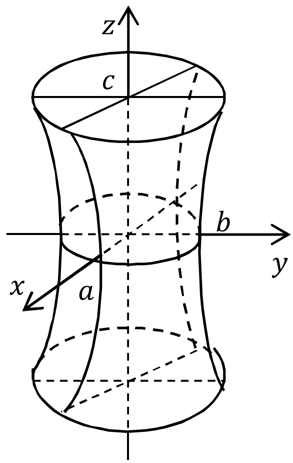

Рисунок 37

Однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної трубки, що розширюється в обидва боки від площини симетрії $z = 0$ уздовж осі симетрії Oz. Поперечним перерізом є еліпс. Переріз при $z = 0$ називається *горловим*. Координатні площини є площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається ***центром*** однопорожнинного гіперболоїда.

8.7 Двопорожнинний гіперболоїд обертання

Якщо гіперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо дійсної осі Oz, то отримаємо ***двопорожнинний гіперболоїд обертання*** навколо осі Oz .

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 -$$

канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда обертання.

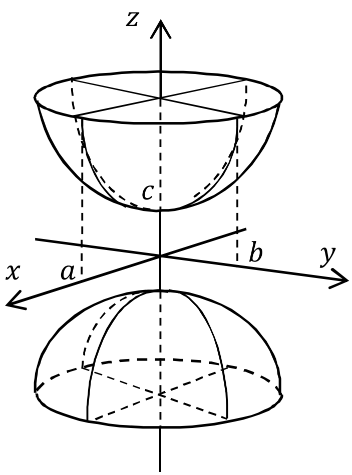

Рисунок 38

Рівномірно деформуючи двопорожнинний гіперболоїд обертання (розтяг чи стиск) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = {}^{b}/_{a}$, одержимо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда *загального вигляду* (рис. 38).

Величини a, b і c називаються ***півосями*** двопорожнинного гіперболоїда. Двопорожнинний гіперболоїд складається з двох симетричних порожнин, кожна з яких має форму нескінченної опуклої чаші.

Координатні площини слугує площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається ***центром*** двопорожнинного гіперболоїда.

8.8 Параболоїд обертання

Якщо параболу $y^2 = 2pz,\ p > 0$ що лежить у площині Oyz, обертати навколо її осі Oz, то отримаємо ***параболоїд обертання*** навколо осі Oz.

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z -$$

канонічне рівняння параболоїда обертання.

Рівномірно деформуючи параболоїд обертання (розтяг чи стиск) вздовж осі Oy з коефіцієнтом деформації $k = \sqrt{p/q}$, одержимо

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z -$$

канонічне рівняння параболоїда *загального вигляду* (*еліптичного параболоїда*) (рис. 39).

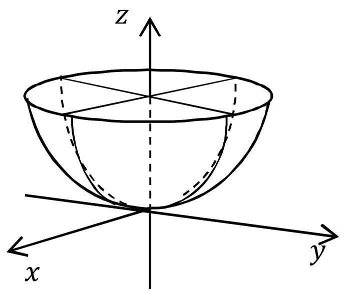

Рисунок 39

Величини p $і$ q називаються *параметрами* еліптичного параболоїда, $p > 0, q > 0$.

Еліптичний параболоїд має форму нескінченної опуклої чаші. Дві координатні площини Oxz і Oyz слугує площинами симетрії, а координатна вісь Oz – віссю симетрії. Початок координат називається *вершиною* еліптичного параболоїда.

ЛЕКЦІЯ 9
ЗМІННІ ТА СТАЛІ ВЕЛИЧИНИ. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ. ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ. ТЕОРІЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЦЬ. НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА ОСНОВНІ ПРИЙОМИ ЇХ РОЗКРИТТЯ

9.1 Змінні та сталі величини

Сталою величиною або ***константою*** (від латинського слова «constans» – «сталий») називається величина, яка не змінює свого значення за умови задачі.

Змінною величиною називається величина, яка може набувати різних значень за умови задачі.

Сукупність всіх числових значень змінної величини утворює її *область значень*.

Змінна x є *упорядкованою величиною*, якщо кожне з двох будь-яких її значень можна охарактеризувати, яке попереднє і наступне.

Змінна величина x називається *обмеженою*, якщо всі її значення за модулем не перевищують деякого додатного числа M протягом всього процесу змінювання: $|x| \leq M$.

В іншому разі змінна величина називається *необмеженою*. Зокрема, змінна величина x називається *необмеженою*, якщо для довільного додатного числа M знайдеться хоча б одне значення x, яке за модулем перевищує це число M: $|x| > M$.

Змінна величина x називається *зростаючою*, якщо в процесі змінювання її значення не зменшуються, тобто кожне наступне значення не менше за попереднє.

Змінна величина x називається *спадною*, якщо в процесі змінювання її значення не збільшуються, тобто кожне наступне значення не більше за попереднє.

Зростаючі та спадаючі змінні величини називаються *монотонними*.

9.2 Поняття функції. Способи задання функції. Складна, обернена функція

Нехай задано непорожні множини X і Y. Якщо зазначено правило (*закон відповідності*) f, за яким кожному значенню x із множини X ставиться у відповідність одне певне значення y із множини Y, то кажуть, що задано *функцію*, визначену на множині X, зі значеннями у множині Y. Функцію позначають так: $y = f(x)$.

До того ж x називається ***незалежною змінною*** (*аргументом*), а y – ***залежною змінною*** (*функцією*).

Множина $D(f) = X$ називається ***областю визначення*** функції. Множина $E(f) = Y$ всіх значень $y \epsilon Y$, кожне з яких відповідає принаймні одному $x \epsilon D(f)$, називається ***областю значень*** функції.

Якщо змінні x і y розглядати як декартові координати точок на площині, то *графіком* функції $y = f(x)$ є множина всіх точок координатної площини Oxy з координатами$\big(x, f(x)\big)$.

Основні способи завдання функції:

1. Табличний спосіб завдання функції. При цьому способі пишуть у визначеному порядку значення аргументу x_1, $x_2, \dots, x_i, \dots$ і відповідні значення функції y_1, $y_2, \dots, y_i, \dots$:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$

2. Графічний спосіб завдання функції. Якщо у прямокутній системі координат на площині маємо деяку сукупність точок (x, y) і при цьому ніякі дві точки не лежать на одній прямій, що паралельна осі Oy, то ця сукупність точок визначає деяку однозначну функцію $y = f(x)$. Значеннями аргументу є абсциси точок, значеннями функції – відповідні ординати.

3. Аналітичний спосіб завдання функції:

– ***явна форма завдання функції.*** Функцію задають у вигляді формул, що визначають операції (і послідовності їх виконання), які потрібно здійснити щодо значень незалежної змінної x, щоб визначити значення залежної змінної y.

Наприклад, $y = \left(\sqrt{x} - 1\right)^3$, де $x \geq 0$;

– ***неявна форма завдання функції.*** Неявним розуміють завдання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно y, яке визначає функцію тільки тоді, коли всі впорядковані пари (x, y), що є розв'язками даного рівняння, утворюють множину, у якій для будь-якого числа x_0 існує не більше ніж одна пара (x_0, y_0) з першим елементом x_0.

Наприклад, $xy + sin\, y - 1 = 0$;

– ***параметрична форма завдання функції.*** Якщо функцію задано параметрично, то значення змінних x і y, що відповідають одне одному, визначають через третю величину t (*параметр*): $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

Наприклад, $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

Складна функція. Нехай функція $y = f(U)$ визначена на множині U, а функція $U = \varphi(x)$ визначена на множині X, до того ж для кожного значення $x \epsilon X$ відповідне значення $U = \varphi(x)$ належить множині U. Тоді на множині X визначена функція $y = f\big(\varphi(x)\big)$, яку називають *складною функцією* від x або *суперпозицією* (*композицією*) функцій φ і f. $y = f(U)$ називають *зовнішньою функцією*, а $U = \varphi(x)$ – *внутрішньою функцією,* або *проміжним аргументом*. Змінну x називають *незалежною змінною,* або *внутрішнім аргументом*.

Наприклад, функцію $z = x^2 + 2$ можна записати так: $y = x^2$; $z = y + 2$.

Обернена функція. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині X, а Y –множина її значень. Якщо ця функція $y = f(x)$ така, що при кожному фіксованому $y \epsilon Y$ рівняння $y = f(x)$ має єдиний розв'язок $x \epsilon X$, то можна розглядати *обернену функцію* $x = f^{-1}(y)$, $y \epsilon Y$. Оберненій функція $x = f^{-1}(y)$ кожному $y \epsilon Y$ ставить у відповідність єдине значення $x \epsilon X$ таке, що $f(x) = y$. Функція $y = f(x)$, $x \epsilon X$ при цьому називається *прямою функцією*.

Теорема. *Нехай функція* $y = f(x)$ *визначена і строго зростаюча (чітко спадаюча) на відрізку* $[a, b]$. *Тоді обернена функція* $y = f^{-1}(x)$. *визначена і чітко зростаюча (чітко спадаюча) на відрізку*$[f(a), f(b)]$, $([f(b), f(a)])$.

9.3 Основні елементарні функції

Степенева функція $y = x^n$:

а) n – ціле додатне число. Функція визначена на всій числовій осі $-\infty < x < +\infty$;

б) n – ціле від'ємне число. Функція визначена для всіх значень x, окрім $x = 0$;

в) число n – раціональне дробове.

Показникова функція: $y = a^x, a > 0$ і $x \epsilon R$. *Логарифмічна функція:* $y = log_a x,\ a > 0,\ \ x > 0,\ a \neq 1$.

Тригонометричні функції: $y = sin\, x,\ y = cos\, x,\ y = tgx,$

$$y = ctgx,\ \ y = secx = 1/cos\, x,\ \ y = cosecx = 1/sin\, x.$$

Незалежна змінна x у формулах набуває значення у радіанах. Усі зазначені тригонометричні функції періодичні.

Обернені тригонометричні функції:

а) Функція арксинус $y = arcsin\, x$. Область її визначення – відрізок $[-1; 1]$, область значень – відрізок $[-\pi/2\,;\ \pi/2]$;

б) функція арккосинус $y = arccos\, x$. Область її визначення – відрізок $[-1; 1]$, область значень – відрізок $[0, \pi]$;

в) Функція арктангенс $y = arctg\, x$. Область її визначення – вся числова пряма, область значень – інтервал $(-\pi/2\,;\ \pi/2)$;

г) функція арккотангенс $y = arcctg\, x$. Область її визначення – вся числова пряма, область значень – інтервал $(0, \pi)$.

9.4 Границя змінної величини

Визначення. Стале число a називається границею деякої числової послідовності дійсних чисел x_n, якщо, яким би не було окілля точки a, воно включає всі члени вказаної послідовності, починаючи з деякого номера, тобто $|x_n - a| < \varepsilon$. Границю змінної величини будемо позначати, як $x_n \to a$ або $lim\, x_n = a$.

Приклад. Змінна величина послідовно набуває таких значення:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}, x_2 = 1 + \frac{1}{4}, x_3 = 1 + \frac{1}{8}, \ldots, x_n = 1 + \frac{1}{2^n}.$$

Доведемо, що змінна величина має границю, яка дорівнює одиниці.

Розв'язання. Обчислимо $|x_n - 1| = \left|\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) - 1\right| = \frac{1}{2^n}$. Зрозуміло, що для будь-якого наперед заданого малого додатного числа ε всі наступні значення змінної, починаючи з x_n, де $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, буде виконуватися нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, що й необхідно було довести.

Основні властивості змінних величин:

1. Границя константи дорівнює самій константі.
2. Змінна величина не може прямувати до двох границь.
3. Теорема про стиснуту змінну. Якщо $x_n \leq y_n \leq z_n$, $n = 1,2, \ldots$ і $lim\, x_n = lim\, z_n = a,$ то і $lim\, y_n = a$. Тобто, якщо дві змінні величини прямують до однієї й тієї ж границі, а третя змінна замкнена між ними, то вона теж прямує до тієї ж границі.

9.5 Границя функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай незалежна змінна x нескінченно наближається до числа x_0, а відповідне значення функції $y = f(x)$ нескінченно наближається до деякого числа A.

Тоді кажуть, що число $A -$ границя функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$.

Визначення. Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від числа x_0, відповідні значення функції $y = f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A. Границю функції позначають так:

$$lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Згідно з визначенням, число A є границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якого заздалегідь обраного малого додатного числа ε можна підібрати таке саме мале число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < 0$, буде справедливою також нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Односторонні границі

Визначення. Число A називається ***лівою границею*** функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якого малого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, де $\delta(\varepsilon)$ таке, що для всіх $x \epsilon (a, x_0)$, що задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Ліва границя позначається, як

$$lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$$

Аналогічно визначається ***права границя*** функції:

$$lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Ліва та права границі функції називаються односторонніми границями функції.

Якщо функція визначена на деякому інтервалі (a, b), крім, можливо, точки $x = x_0$, то для існування границі функції необхідно і достатньо, щоб ліва і права границі функції існували і дорівнювали одна одній:

$$lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

В загальному випадку ліва і права границя можуть існувати, але не дорівнювати одна одній.

9.6 Нескінченно малі і нескінченно великі величини

Визначення. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно великою*** величиною при $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від x_0, відповідні значення функції за абсолютною величиною перебільшують будь-яке наперед задане яке завгодно велике додатне число:

$$lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Визначення. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно малою*** величиною при $x \to x_0$, якщо її границя при $x \to x_0$ прямує до нуля:

$$lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x^2}$ при $x \to 0$ є нескінченно великою, а функція $y = 2^{-x}$ при $x \to \infty$ є нескінченно малою величиною.

Теорема. Якщо $f(x)$ – нескінченно велика величина, то $\frac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала величина, і навпаки: якщо $\varphi(x)$ – нескінченно мала величина, то $\frac{1}{\varphi(x)}$ – нескінченно велика величина.

Доведення: Нехай $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$; необхідно переконатися в тому, що $\frac{1}{f(x)} \to 0$. Задамо довільне мале число $\varepsilon > 0$ і оберемо число $M = \frac{1}{\varepsilon}$. За умовою теореми $f(x)$ – нескінченно велика величина, а тому для всіх x, близьких до x_0, справджується умова:

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Але в такому випадку справедливим буде і наступне:

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M} = \varepsilon.$$

З цього випливає, що $lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$, тобто величина $\frac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою, що потрібно було довести.

Аналогічно доводиться і друга частина теореми.

9.7 Основні теореми про границі функції

Теорема 1. Границя алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі границь функцій доданків:

$$\lim_{x \to x_0}(U + V + \cdots + W) = \lim_{x \to x_0} U + \lim_{x \to x_0} V + \cdots + \lim_{x \to x_0} W.$$

Теорема 2. Границя добутку кінцевого числа функцій дорівнює добутку границь функцій:

$$\lim_{x\to x_0}(U\cdot V\cdot\ldots\cdot W)=\lim_{x\to x_0}U\cdot\lim_{x\to x_0}V\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to x_0}W.$$

Наслідок 1. Сталий множник можна винести за знак границі:

$$\lim_{x\to x_0}C\cdot U=C\cdot\lim_{x\to x_0}U.$$

Наслідок 2. Добуток кінцевого числа нескінченно малих величин є нескінченно мала величина.

Наслідок 3. Добуток обмеженої функції і нескінченно малої є нескінченно мала величина.

Теорема 3. Границя частки функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границя знаменника відрізняється від нуля:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{U}{V}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}U}{\lim\limits_{x\to x_0}V}\text{, якщо }\lim_{x\to x_0}V\neq 0.$$

Приклад. Обчислити границю функції:

$$\lim_{x\to 2}\frac{7x^2-3x+4}{5x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(7x^2-3x+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(5x-1)}=$$

$$=\frac{7\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}4}{5\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}1}=\frac{7\cdot 2^2-3\cdot 2+4}{5\cdot 2-1}=\frac{26}{9}.$$

9.8 Невизначеності та основні прийоми їх розкриття

Визначення. Дріб, у якому і чисельник, і знаменник є нескінченно малими величинами, називається ***невизначеністю*** типу $\left|\frac{0}{0}\right|$. Знаходження границі такого дробу називається ***розкриттям невизначеності***.

Крім невизначеності $\left|\frac{0}{0}\right|$, існують такі невизначеності: $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|, |\infty-\infty|, \ |0\cdot\infty|, \ |1^{\infty}|, |\ \infty^{\infty}|, \ |\infty^{0}|, \ |0^{0}|\ ...$

Під час роботи з нескінченно малими та нескінченно великими величинами будемо використовувати такі властивості:

$$a\cdot 0=0; \qquad a\cdot\infty=\infty;$$

$$\frac{0}{a}=0; \qquad \frac{\infty}{a}=\infty;$$

$$\frac{a}{0}=\infty; \qquad \frac{a}{\infty}=0.$$

1. *Невизначеність типу* $\left|\frac{0}{0}\right|$*, що задана відношенням двох многочленів*

Правило. Щоб розкрити невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$, що задана у вигляді

$$\lim_{x\to x_0}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\cdots+K}{Lx^m+Mx^{m-1}+\cdots+P},$$

необхідно і чисельник, і знаменник розкласти на множники або розділити на критичний множник $(x-x_0)$ і скоротити дріб.

Приклад. Обчислити границю

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\left|\frac{0}{0}\right|.$$

Розкладемо чисельник та знаменник на множники, використовуючи формули $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ та $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1,x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$.

$$8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1);$$

$$6x^2-5x+1=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=(2x-1)(3x-1).$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}=\frac{3}{1/2}=6.$$

2. *Невизначеність типу $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, що задана відношенням двох многочленів*

Правило. Нехай при $x\to\infty$ і чисельник, і знаменник дробу нескінченно великі. Отже, отримаємо відношення двох нескінченно великих функцій. У такому разі необхідно чисельник і знаменник дробу розділити на найвищий степінь x, що зустрічається у цій функції.

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+6x}{7x^3-4x+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

(зрозуміло, що найвищим степенем незалежної змінної є x^3, тому розділимо кожен елемент дробу на x^3)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{5x^2}{x^3} + \frac{6x}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3} - \frac{4x}{x^3} + \frac{3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{7 - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = \frac{2}{7}$$

$$\text{\textit{бо}} \ \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x} = 0, \ \lim_{x\to\infty} \frac{6}{x^2} = 0, \ \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0, \ \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^3} = 0.$$

(за властивостями нескінченно великих величин).

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^5 + 3x^2 - 2x + 1}{6x^3 - 9x^2 - 7x + 2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^5}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{\frac{6x^3}{x^5} - \frac{9x^2}{x^5} - \frac{7x}{x^5} + \frac{2}{x^5}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5 + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}}{\frac{6}{x^2} - \frac{9}{x^3} - \frac{7}{x^4} + \frac{2}{x^5}} = \frac{5}{0} = \infty.$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3 + 3x^2 - 9}{4x^6 - 7x^5 + 2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{8x^3}{x^6} + \frac{3x^2}{x^6} - \frac{9}{x^6}}{\frac{4x^6}{x^6} - \frac{7x^5}{x^6} + \frac{2x}{x^6}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{8}{x^3} + \frac{3}{x^4} - \frac{9}{x^6}}{4 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^5}} = \frac{0}{4} = 0.$$

3. Невизначеності типу $\left|\frac{0}{0}\right|$ або $|\infty - \infty|$, задані ірраціональними виразами

Правило. Щоб знайти границю функції, яка містять ірраціональний вираз, і невизначеності типу $\left|\frac{0}{0}\right|$ необхідно помножити чисельник і знаменник на спряжене до ірраціонального виразу.

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9}=\frac{\sqrt{3+6}-3}{9-9}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

(спряженим до виразу $\sqrt{x+6}-3$ є $\sqrt{x+6}+3$, тому помножимо чисельник і знаменник на цей вираз)

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-9}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\frac{1}{12}.$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

(це ірраціональний вираз і в чисельнику, і в знаменнику, тому необхідно помножити чисельник і знаменник на спряжене обох виразів, які є ірраціональними)

$$= \lim_{x \to -3} \frac{\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{\left(\left(\sqrt{x^2+7}\right)^2-\left(\sqrt{7-3x}\right)^2\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{(x^2+7-7+3x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{(x+3-x^2+9)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{(x^2+3x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{-(x^2-x-12)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{x(x+3)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{-(x-4)(x+3)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} = \frac{-3(0+0)}{7(4+4)} = 0.$$

ЛЕКЦІЯ 10
ПЕРША ТА ДРУГА ВАЖЛИВІ ГРАНИЦІ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ. ТОЧКИ РОЗРИВУ ФУНКЦІЇ

10.1 Перша важлива границя

Теорема. Функція $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ при $\alpha \to 0$ має границю, що дорівнює 1:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Доведення. Використаємо геометричне визначення синуса (рис.40). Застосуємо коло одиничного радіуса і кут α в радіанах $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. З рисунка 40 зрозуміло, що

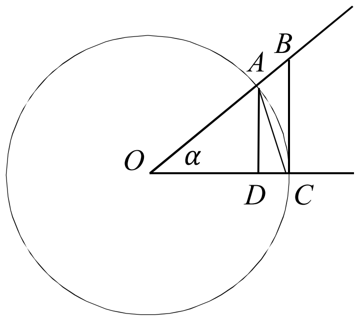

Рисунок 40

$$S_{OAC} < S_{\text{сек }AOC} < S_{OBC};$$

$$\frac{1}{2}OC\cdot AD < \frac{OC^2\cdot\alpha}{2} < \frac{1}{2}OC\cdot BC;$$

$$\frac{1}{2}\sin\alpha < \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}tg\alpha;$$

$$\sin\alpha < \alpha < tg\alpha \,|: \sin\alpha\,;$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha};$$

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha.$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1 \;\Rightarrow\; 1 < \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1.$$

За теоремою про стиснуту змінну маємо:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Наслідки першої важливої границі:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{tg\,\alpha}{\alpha}=1;$

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1;$

3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{arctg\,\alpha}{\alpha}=1.$

Зауваження. Для розкриття невизначеності виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ з тригонометричними виразами необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити дріб або застосувати першу важливу границю чи її наслідки.

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cdot\cos x}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x\cdot x^2\cos x}=\begin{bmatrix}1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cos x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x\cdot x\cdot\cos x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\cdot\cos x}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\right]=\frac{1}{2}.$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x\cdot 15x}{\sin 3x\cdot 15x}=$$

$$=\begin{bmatrix} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin5x}{5x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{sin3x}=1 \end{bmatrix}=\frac{5}{3}.$$

10.2 Друга важлива границя

Теорема. Функція $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ має границю при $n\to\infty$.

Доведення. За формулою бінома Ньютона маємо:

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Виконаємо перетворення:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Зрозуміло, що функція $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ зростаюча. Доведемо, що вона обмежена. Для цього замінимо в усіх членах праворуч вирази у дужках одиницями, отримаємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}.$$

Ще більше збільшимо праву частину, якщо

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{2\cdot 3} \text{ на } \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{4!}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} \text{ на } \frac{1}{2^3};\ \dots;\ \frac{1}{n!}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot \dots \cdot n} \text{ на } \frac{1}{2^{n-1}},$$

звідси маємо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Дописавши в праву частину члени прогресії $\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots$, отримаємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots\right).$$

У дужках отримали суму нескінченної спадаючої геометричної прогресії, яка дорівнює 2. Звідси маємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Якщо $n=1$, ліва частина нашої формули дорівнює 2. Отже остаточно маємо

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Визначення . Числом e називається границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Воно приблизно дорівнює $e\approx 2{,}718\dots$

Функція має границю не тільки тоді, коли її аргумент набуває цілочислових значень, але й при неперервній його змінній та прямуванні до нескінченності.

Теорема. Функція $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ має границю, яка дорівнює числу e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

(приймемо без доведення).

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{4+3x}\right)^{5x-2} = \begin{bmatrix}\frac{3x-1}{4+3x}\to 1, \text{при } x\to\infty \\ 5x-2\to\infty, \text{при } x\to\infty\end{bmatrix} = |1^{\infty}| =$$

(В основі степенево-показникової функції додамо та віднімемо 1.)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1}{4+3x}-1\right)^{5x-2} =$$

(Приведемо до спільного знаменника другий та третій доданки в дужках основи.)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1-4-3x}{4+3x}\right)^{5x-2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{5x-2} =$$

(Помножимо степінь на дріб, обернений до дробу, який міститься в основі функції, а потім на такий самий.)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{\frac{4+3x}{-5}\cdot\frac{(-5)}{4+3x}\cdot(5x-2)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5(5x-2)}{4+3x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10-25x}{4+3x}} = e^{-\frac{25}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^{25}}}.$$

Розглянемо випадок, коли коефіцієнти, які містяться в основі функції біля більшого ступеня змінної, різні:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{kx}=\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}.$$

У такій ситуації є два рішення: 1) якщо $a>c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}=\infty$;

2) якщо $a<c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}=0$.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x-4}{9x+3}\right)^{x+2}=\left(\frac{7}{9}\right)^{\infty}=0.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{2x-6}\right)^{7x}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\infty}=\infty.$$

Наслідки другої важливої границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+x)}{x}=1;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=ln\,a;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$

10.3 Неперервність функції. Точки розриву функції

Функція $y=f(x)$ визначена в точці x_0і у деякому її околлі. Функція $y=f(x)$ називається ***неперервною в точці*** $\boldsymbol{x_0}$**,** якщо існує границя цієї функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Для неперервності функції в точці x_0 необхідно й достатньо, щоб $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$, де $f(x_0-0)= =\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ – ліва границя функції, $f(x_0+0)= =\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ – права границя функції, $f(x_0)$ – значення функції $f(x)$ в точці x_0.

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна у кожній точці інтервалу(a,b), то її називають неперервною в інтервалі (a,b).

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна у кожній точці інтервалу (a,b) і в точці $x=a$, вона неперервна справа $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)\right)$, а якщо в точці $x=b$, вона неперервна зліва$\left(\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)\right)$, отже її називають неперервною на відрізку $[a,b]$.

Варто пам'ятати, що всі елементарні функції неперервні в області їх визначення.

Точки, у яких порушується умова неперервності, називають точками розриву функції. Точки розриву можуть належати області визначення або розміщуватися на границі цієї області.

Усі точки розриву функції діляться на точки розриву першого та другого роду.

Точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду***, якщо в цій точці існують кінцеві границі функції справа та зліва, тобто $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_1$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_2$. До того ж якщо $A_1\neq A_2$, то точка x_0 називається точкою кінцевого розриву. Величину $|A_1-A_2|$ називають стрибком функції в точці розриву.

Точка x_0 називається ***точкою розриву другого роду***, якщо в цій точці хоча б одна з границь $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ не існує чи дорівнює нескінченності.

Під час визначення знаходженні точок розриву функції необхідно керуватися такими твердженнями:

1) елементарна функція може мати розрив тільки в тій точці, де вона не визначена;

2) якщо функція задана кількома різними аналітичними виразами (формулами) для різних інтервалів зміни аргументу, вона може мати розриви лише в тих точках, де міняється її аналітичний вираз.

Приклад. З'ясувати, чи функція $y = 2^{\frac{1}{x}}$ неперервна або розривна для $x = 3$ та $x = 0$.

Розв'язання. За означенням функція неперервна в точці x_0, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Перевіримо виконання цієї умови в цих точках.

При $x = 3$ маємо: $y(3) = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$;

$$\lim_{x \to 3+0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{3+0}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2};$$

$$\lim_{x \to 3-0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{3-0}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

Умова неперервності при $x = 3$ виконується, отже, в цій точці функція неперервна.

Аналогічно будемо міркувати якщо $x \to 0$.

$y(0) = 2^{\frac{1}{0}}$ не існує, бо ділення на нуль не має значення.

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-0} y = \lim_{x\to-0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Умова неперервності при $x = 0$ не виконується, отже, в цій точці $x = 0$, функція розривна (має нескінченний розрив).

Приклад. Дослідити на неперервність і побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < -1 \\ x^2 - 2, & \text{якщо } -1 \le x \le 1 \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Задана функція не є елементарною, тому що задана кількома формулами. Кожна з функцій $y = -1$, $y = x^2 - 2$, $y = 1$ є елементарною і визначеною, а отже, і неперервна на всій числовій осі. Тому задана функція може бути розривною лише в тих точках, де міняється її аналітичний вираз, тобто в точках $x = -1, x = 1$. Дослідимо функцію на неперервність в цих точках. Використовуючи означення, одержимо:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-1-0} y &= \lim_{x\to-1-0} -1 = -1 \\ \lim_{x\to-1+0} y &= \lim_{x\to-1+0} (x^2 - 2) = -1 \end{aligned}\right\}$$ задана функція неперервна в точці $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 1-0} y = \lim\limits_{x\to 1-0}(x^2-2) = -1\\ \lim\limits_{x\to 1+0} y = \lim\limits_{x\to 1+0} 1 = 1\end{array}\right\}$$ задана функція розривна в точці $x = 1$.

Таким чином, в точці $x = 1$ функція має розрив першого роду: $A_1 = -1,\ A_2 = 1\ (A_1 \neq A_2)$. Побудуємо графік функції (рис. 41)

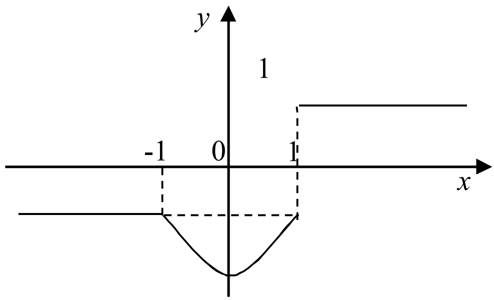

Рисунок 41

ЛЕКЦІЯ 11
ПОХІДНА. ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. ПОХІДНА СКЛАДНОЇ ТА ОБЕРНЕНОЇ ФУНКЦІЙ. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ ПАРАМЕТРИЧНО

11.1 Поняття похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$ і $x \in (a; b)$. Надамо аргументу приріст Δx так, щоб нова точка $x + \Delta x \in (a; b)$. Оскільки точка x фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, яке також буде функцєю від Δx.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називається швидкість змінювання функції y в цій точці відносно змінювання аргументу x. *Похідна дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Еквівалентні позначення похідної y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням функції.*** Функція, що має похідну в точці x, називається *диференційованою* у цій точці.

Теорема. *Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в деякій точці x, то вона неперервна в цій точці.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0.$$

Зауваження. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в деякій точці x, то вона може бути як диференційованою, так і недиференційованою в цій точці.

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^2$.

Розв'язання. Для будь-якого x маємо $y = x^2$. Якщо аргумент дорівнює $x + \Delta x$, то $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. Звідси

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

11.2 Фізичний та геометричний зміст похідної

Фізичний зміст похідної. Нехай матеріальна точка рухається під дією деяких сил. Оберемо який-небудь момент часу t_0 і розглянемо проміжок часу Δt від моменту t_0 до моменту $t = t_0 + \Delta t$. За цей проміжок часу точка пройде певний шлях, який позначимо $\Delta S(t_0)$. Цей шлях є функцією від Δt. За відомим із фізики означенням, відношення $\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$ є середньою швидкістю руху точки за час Δt. Розглядатимемо дедалі коротші проміжки Δt , що прямують до нуля. Границя

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = S^{'}(t_0) = V(t_0)$$

є миттєвою швидкістю точки у момент часу t_0.

Геометричний зміст похідної. Нехай дано деяку лінію *L* і на ній точку *M* (рис. 42). Оберемо на лінії *L* деяку точку *N,* яка не збігається з точкою *M*. Пряма *MN* є січною для лінії *L*. Нехай тепер точка *N* наближається до точки *M,* залишаючись на лінії *L*. Тоді кожному положенню точки *N* відповідатиме своя січна й усі ці січні проходитимуть через точку *M*.

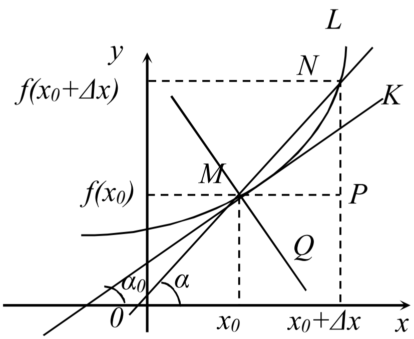

Рисунок 42

Дотичною до лінії *L* у точці *M* називається граничне положення *MK* січної *MN*, якщо точка *N* прямує до точки *M.* Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, графіком якої є лінія *L*, диференційована у точці x_0. У декартовій прямокутній системі координат точка *M,* яка лежить на графіку функції $y = f(x)$ має координати $\left(x_0; f(x_0)\right)$. Нехай точка *N* належить графіку функції (рис. 42) і має координати $\left(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)\right)$. Проведемо через точку *M* пряму, паралельну до Ox, і позначимо точку її перетину з прямою $x = x_0 + \Delta x$ через *P*. Розглянемо прямокутний трикутник *MNP*.

Відношення

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = tg\alpha$$

дорівнює тангенсу кута нахилу січної *MN* до додатного напряму осі Ox.

Якщо приріст $\Delta x \to 0$, то геометрично це означає, що точка $N(x_0 + \Delta x; y + \Delta y)$ рухатиметься по лінії *L,* наближаючись до точки *M,* а кут α прямуватиме до кута α_0 – кута нахилу дотичної до додатного напряму осі Ox. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha.$$

Оскільки границя лівої частини рівності дорівнює $\boldsymbol{f'(x_0)}$, а границя правої частини дорівнює $\boldsymbol{tg\alpha_0}$, тому $\boldsymbol{tg\alpha_0 = f'(x_0)}$. Тобто *значення похідної функції* $\boldsymbol{f'(x)}$ *у точці* $\boldsymbol{x_0}$ *дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної*.

Тоді ***рівняння дотичної*** до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить через точку *M* $(x_0; y_0)$, можна записати у вигляді

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Пряма *MQ*, яка проходить через точку дотику $M(x_0; y_0)$ і перпендикулярна до дотичної *MK*, називається ***нормальною прямою*** (***нормаллю***). Її рівняння

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

11.3 Основні правила диференціювання

Нехай маємо деякі функції $u = u(x)$, $v = v(x)$, які диференційовані у проміжку $(a; b)$.

Теорема 1. *Похідна алгебраїчної суми (різниці) кінцевого числа функцій дорівнює сумі (різниці) їх похідних*:

$$y = u \pm v, \text{ то } y' = (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Доведення. Розглянемо суму двох функцій.

Якщо $y = u + v$, то $y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$; тоді $\Delta y = (y + \Delta y) - y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (u + v)$;

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v.$$

Звідси

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Тому маємо:

$$(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \pm \boldsymbol{v}'.$$

Теорема 2. *Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію:*

$$y = uv, \text{ то } y' = (uv)' = u'v + uv'.$$

Доведення. Розглянемо добуток двох функцій.

Якщо $y = uv$, то $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$;

$\Delta y = (y + \Delta y) - y = uv + \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv;$

$$\Delta y = \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v = u'v + uv' + u' \cdot 0,$$

(при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ і $\Delta v \to 0$). Тому маємо

$$(\boldsymbol{uv})' = \boldsymbol{u'v} + \boldsymbol{uv'}.$$

Теорема 3. *Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, у якому знаменник є квадратом знаменника, а чисельник є різницею між добутками похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник*:

$$y = \frac{u}{v}, \qquad \text{де } v \neq 0, \qquad \text{то} \quad y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доведення. Розглянемо частку двох функцій.

Якщо $y = \frac{u}{v}$, то $y + \Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$; тоді

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + \Delta uv - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{\Delta uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta uv - u\Delta v}{\Delta x\, v(v + \Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta uv}{\Delta x} - \frac{u\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)};$$

(при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ і $\Delta v \to 0$). Тому маємо:

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u'v} - \boldsymbol{uv'}}{\boldsymbol{v^2}}.$$

Дії з константами. *Сталий множник можна виносити з-під знака похідної*:

$$y = cu, \qquad \text{то} \quad y' = (cu)' = cu';$$

$$y = \frac{u}{c}, \qquad \text{то} \quad y' = \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c};$$

$$y = \frac{c}{u}, \qquad \text{то} \quad y' = \left(\frac{c}{u}\right)' = \frac{-c}{u^2}u'.$$

11.4 Похідна складної функції

Теорема. *Похідна складної функції дорівнює похідній цієї функції за проміжним аргументом, помноженої на похідну цього аргументу за незалежною змінною.*

Доведення. Нехай $y = f(u),\ u = \varphi(x)$. Доведемо, що

$$y' = f'(u) \cdot u' = f'(u) \cdot \varphi'(x) = f'_u \cdot \varphi'_x.$$

Надамо аргументу x приріст Δx; унаслідок цього маємо приріст проміжного аргументу Δu, яке зумовить зміну функції y на Δy. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Обчислимо границю

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'_u$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'_x$, то

$$y' = f'_u \cdot \varphi'_x.$$

11.5 Похідна оберненої функції

Нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій. Відомо, що похідна $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ і не дорівнює нулю. Оскільки $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$, то з тотожності

$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ отримаємо:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)},$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Похідні від взаємно обернених функцій обернені за величиною:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

11.6 Основні формули диференціювання

Знайдемо похідні для деяких функцій.

1. *Похідна синуса:* $y = \sin x$, $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$. Знайдемо приріст функції

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin\frac{\Delta x}{2} \cos\frac{2x + \Delta x}{2}.$$

Складемо відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Використаємо першу важливу границю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

Остаточно маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = \cos x\,;$$

$$(sin\, x)' = cos\, x.$$

2. *Похідна показникової функції:* $y = a^x, y + \Delta y = a^{x+\Delta x}$.

Приріст функції:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right).$$

Знайдемо границю при $\Delta x \to 0$. Беручи до уваги «важливу границю» $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln u$, отримаємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

3. *Похідна арксинуса:* $y = arcsin\, x$.

Функція обернена до арксинуса $x = siny$, її похідна $x'_y = cosy$. За формулою, $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{cosy}$. Відомо, що

$$cosy = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Запишемо таблицю похідних для складних функцій:

1. $x' = 1;$
2. $c' = 0;$
3. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u';$
4. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$
5. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u';$
6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$
7. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$
8. $(e^u)' = e^u \cdot u';$
9. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$
10. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$
11. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$
12. $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$
13. $(ctg\, u)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u';$
14. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
15. $(\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
16. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$
17. $(arcctg\, u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'.$

Приклад. Знайти похідні функцій.

а) $y = x^3 \cdot \cos 3x;$

$$y' = (x^3)' \cdot \cos 3x + x^3 \cdot (\cos 3x)' = 3x^2 \cos 3x + x^3(-\sin 3x)3 =$$

$$= 3x^2 \cos 3x - 3x^3 \sin 3x.$$

б) $y = \frac{arctg^4(2x+5)}{3^{\sin x}};$

$$y' = \frac{\left(arctg^4(2x+5)\right)' \cdot 3^{\sin x} - arctg^4(2x+5) \cdot \left(3^{\sin x}\right)'}{(3^{\sin x})^2} =$$

$$=\frac{4arctg^3(2x+5)\big(arctg(2x+5)\big)'3^{sinx}-arctg^4(2x+5)3^{sinx}ln3(sinx)'}{3^{2sinx}}$$

$$=\frac{4arctg^3(2x+5)\dfrac{1}{1+(2x+5)^2}(2x+5)'3^{sinx}-arctg^4(2x+5)3^{sinx}ln3\ cosx}{3^{2sinx}}$$

$$=\frac{\dfrac{8arctg^3(2x+5)}{1+(2x+5)^2}3^{sinx}-arctg^4(2x+5)3^{sinx}\ ln3\ cosx}{3^{2sinx}}=$$

$$=\frac{3^{sinx}arctg^3(2x+5)\big(8-arctg(2x+5)\ ln3\ cosx(1+(2x+5)^2)\big)}{3^{2sinx}}$$

$$=\frac{arctg^3(2x+5)\big(8-arctg(2x+5)\ ln3\ cosx(1+(2x+5)^2)\big)}{3^{sinx}}.$$

в) $y=lnctg\big(1-\sqrt{2+e^x}\big)$;

$$y'=\left(ln\left(ctg\big(1-\sqrt{2+e^x}\big)\right)\right)'=$$

$$=\frac{1}{ctg\big(1-\sqrt{2+e^x}\big)}\left(ctg\big(1-\sqrt{2+e^x}\big)\right)'=$$

$$=\frac{1}{ctg\big(1-\sqrt{2+e^x}\big)}\cdot\frac{(-1)}{sin^2\big(1-\sqrt{2+e^x}\big)}\cdot\big(1-\sqrt{2+e^x}\big)'=$$

$$=\frac{1}{ctg\big(1-\sqrt{2+e^x}\big)}\cdot\frac{(-1)}{sin^2\big(1-\sqrt{2+e^x}\big)}\cdot\frac{(-1)}{2\sqrt{2+e^x}}(2+e^x)'=$$

$$=\frac{1}{ctg\big(1-\sqrt{2+e^x}\big)}\cdot\frac{1}{sin^2\big(1-\sqrt{2+e^x}\big)}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{2+e^x}}.$$

11.7 Диференціювання функції, заданої параметрично

Нехай задано функцію

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases};$$

де t – параметр, а $x(t)$ і $y(t)$ неперервні і диференційовані функції аргументу t у деякому інтервалі $t\epsilon(a,b)$.

Нехай в деякій точці $t_0\epsilon(a,b)$ існує похідна, яка не дорівнює нулю $x'(t) = x'_t(t_0) \neq 0$. Нехай ця похідна в точці додатна. Тоді вона буде додатна і в деякому окіллі точки t_0. З цього випливає, що функція $x(t)$ монотонно зростаюча, а тому має обернену $t = t(x)$. Похідна оберненої функції дорівнює

$$x'_t = \frac{1}{t'_x}.$$

Підставимо $t = t(x)$ у вираз для $y(t)$, отримаємо:

$$y = y\big(t(x)\big) = y(x).$$

Знаходимо її похідну, як похідну складної функції:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x.$$

Остаточно маємо:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Знайти похідну функції: $\begin{cases} x = ln(1+t^2) \\ y = t - arctg\, t \end{cases}.$

Розв'язання. Обчислимо похідні x'_t, y'_t:

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2}\cdot 2t; \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Підставимо отримані похідні у формулу і спростимо результат:

$$y'_x = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}.$$

ЛЕКЦІЯ 12
ЛОГАРИФМІЧНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ. ПОХІДНА НЕЯВНИХ ФУНКЦІЙ. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

12.1 Логарифмічне диференціювання

Розглянемо функцію $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$. Така функція називається ***степенево-показниковою функцією.*** Диференціювати її за формулами за таблицею похідних не можна, тому застосуємо такий алгоритм:

1. Логарифмуємо цю функцію за основою e:

$$ln\, y = ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)};$$

2. Виконаємо перетворення використовуючи властивості логарифмів:

$$ln\, y = \varphi(x) \cdot ln\left(f(x)\right);$$

3. Диференціюємо обидві частини отриманого рівняння:

$$(ln\, y)' = \left(\varphi(x) \cdot ln\left(f(x)\right)\right)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \left(\varphi(x)\right)' \cdot ln\left(f(x)\right) + \varphi(x) \cdot \left(ln\left(f(x)\right)\right)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \left(\varphi(x)\right)' \cdot ln\left(f(x)\right) + \varphi(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot \left(f(x)\right)';$$

4. Виразимо шукану похідну:

$$y' = \left(\left(\varphi(x)\right)' \cdot ln\left(f(x)\right) + \varphi(x) \cdot \frac{\left(f(x)\right)'}{f(x)}\right)\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}.$$

Приклад. Знайти y', якщо $y=(arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}$.

Розв'язання. $lny = ln(arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}$,

$$lny = ln(2x+1)\cdot ln(arctg\sqrt{x}),$$

$$\frac{y'}{y} = (ln(2x+1))'\cdot ln(arctg\sqrt{x}) + ln(2x+1)\cdot\left(ln\left(arctg\sqrt{x}\right)\right)'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(2x+1)'}{2x+1}\cdot ln(arctg\sqrt{x}) + ln(2x+1)\cdot\frac{\left(arctg\sqrt{x}\right)'}{arctg\sqrt{x}},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{2x+1}\cdot ln(arctg\sqrt{x}) + ln(2x+1)\cdot\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{(1+x)\cdot arctg\sqrt{x}},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2ln(arctg\sqrt{x})}{2x+1} + \frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x)\cdot arctg\sqrt{x}},$$

$$y' = y\cdot\left(\frac{2ln(arctg\sqrt{x})}{2x+1} + \frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x)\cdot arctg\sqrt{x}}\right),$$

$$y' = (arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}\left(\frac{2ln(arctg\sqrt{x})}{2x+1} + \frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x)arctg\sqrt{x}}\right).$$

Приклад. Знайти y', якщо $y=(ln\cos x)^{arcsinx^3}$.

Розв'язання. $lny = ln(ln\cos x)^{arcsinx^3}$,

$$lny = arcsinx^3\cdot ln(ln\cos x),$$

$$\frac{y'}{y} = (arcsinx^3)'\cdot ln(ln\cos x) + arcsinx^3\cdot\left(ln(ln\cos x)\right)',$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{(x^3)'}{\sqrt{1-x^6}}\cdot ln(ln\cos x)+arcsinx^3\cdot\frac{(ln\cos x)'}{ln\cos x},$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\cdot ln(ln\cos x)+arcsinx^3\cdot\frac{(\cos x)'}{\cos x\cdot ln\cos x},$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3x^2\cdot ln(ln\cos x)}{\sqrt{1-x^6}}-arcsinx^3\cdot\frac{\sin x}{\cos x\cdot ln\cos x},$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3x^2\cdot ln(ln\cos x)}{\sqrt{1-x^6}}-\frac{tgx\cdot arcsinx^3}{ln\cos x},$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3x^2\cdot ln(ln\cos x)}{\sqrt{1-x^6}}-\frac{tgx\cdot arcsinx^3}{ln\cos x},$$

$$y'=y\cdot\left(\frac{3x^2\cdot ln(ln\cos x)}{\sqrt{1-x^6}}+\frac{tgx\cdot arcsinx^3}{ln\cos x}\right),$$

$$y'=(ln\cos x)^{arcsinx^3}\left(\frac{3x^2\cdot ln(ln\cos x)}{\sqrt{1-x^6}}+\frac{tgx\cdot arcsinx^3}{ln\cos x}\right).$$

Логарифмічне диференціювання використовують не лише для степенево-показникової функції, а й під час знаходження похідної від добутку (частки) більш ніж двох функцій. Послідовність дій не змінюється. Розглянемо на прикладі.

Приклад. Знайти y', якщо $y=\frac{tg^2x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}}{(3x+8)^5}$.

Розв'язання. $ln\, y=ln\frac{tg^2x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}}{(3x+8)^5}$.

Використаємо такі властивості логарифмів:

$$ln(a \cdot b) = ln\, a + ln\, b; \;\; ln\frac{a}{b} = ln\, a - ln\, b; \;\; ln\, a^c = c \cdot ln\, a.$$

Виконаємо перетворення:

$$ln\, y = ln\, tg^2 x + ln\sqrt[3]{x^2 - 7} - ln(3x + 8)^5;$$

$$ln\, y = 2\, ln(tgx) + \frac{1}{3} ln(x^2 - 7) - 5\, ln(3x + 8).$$

Продиференціюємо отриманий вираз:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{tgx} \cdot (tgx)' + \frac{1}{3(x^2 - 7)} \cdot (x^2 - 7)' - \frac{5}{3x + 8} \cdot (3x + 8)';$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{tgx} \cdot \frac{1}{cos^2 x} + \frac{1}{3(x^2 - 7)} \cdot 2x - \frac{5}{3x + 8} \cdot 3;$$

$$y' = \left(\frac{2}{sinx \cdot cosx} + \frac{2x}{3(x^2 - 7)} - \frac{15}{3x + 8}\right) \cdot \frac{tg^2 x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 7}}{(3x + 8)^5}.$$

12.2 Похідні неявних функцій

Диференціювання функції, заданої деяким рівнянням $F(x, y) = 0$, де незалежна змінна *x* пов’язана з функцією y, що не розв’язується відносно y, зводиться до такого:

1) диференціюємо ліву і праву частини рівняння, що задає функцію, вважаючи y *функцією від* x, *тобто застосовуючи правило диференціювання складної функції*;

2) розв’язуємо отримане рівняння відносно шуканої похідної y'.

Зауваження. Похідна неявної функції $F(x, y) = 0$, в загальному випадку, виражається не тільки через значення аргументу x, а й через значення функції y при даному значенні x.

Приклад. Знайти похідну функції

$$sin(3x - 6y) + 5x^2y = 2y^3.$$

Розв'язання. $(sin(3x - 6y) + 5x^2y)' = (2y^3)'$,

$$cos(3x - 6y)(3x - 6y)' + 5((x^2)'y + x^2(y)') = 6y^2y',$$

$$cos(3x - 6y)(3 - 6y') + 10xy + 5x^2y' = 6y^2y',$$

$$3cos(3x - 6y) - 6y'cos(3x - 6y) + 10xy + 5x^2y' = 6y^2y',$$

$$y' \cdot (-6cos(3x - 6y) + 5x^2 - 6y^2) = -3cos(3x - 6y) - 10xy,$$

$$y' = \frac{-3cos(3x - 6y) - 10xy}{-6cos(3x - 6y) + 5x^2 - 6y^2},$$

$$y' = \frac{3cos(3x - 6y) + 10xy}{6cos(3x - 6y) - 5x^2 + 6y^2}.$$

12.3 Похідні вищих порядків
Функція задана явно $y = f(x)$

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована у проміжку $(a; b)$. Похідна цієї функції $f'(x)$ є функцією аргументу x. Якщо функція $f'(x)$ диференційована, то її похідна називається ***похідною другого порядку*** і позначається $f''(x)$ або y'', $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Таким чином, $y'' = (y')'$.

Похідна від похідної другого порядку, якщо вона існує, називається ***похідною третього порядку*** і позначається $f'''(x)$ або $y''', \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$. Таким чином, $y''' = (y'')'$.

Визначення. *Похідною n- го порядку* (або *n*-ю похідною) називається похідна від похідної (*n* – 1) порядку (якщо вона існує). Таким чином,

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Похідні порядку, вищого за перший, називають ***похідними вищих порядків.***

Приклад. Знайти третю похідну функції $y = 2x \cdot cosx$ і обчислити її значення при $x = 0$.

Розв'язання. $y' = 2cosx + 2x(-sinx),$

$$y'' = -2sinx - 2sinx - 2xcosx = -4sinx - 2x \cdot cosx,$$

$$y''' = -4cosx - 2cosx + 2x \cdot sinx = 2x \cdot sinx - 6cosx.$$

Знайдемо значення третьої похідної при $x = 0$

$$y'''(0) = -6.$$

Функція задана неявно $F(x, y) = 0$.

Під час знаходження похідних вищих порядків неявно заданої функції використовуємо ті самі правила, що й для знаходження похідної першого порядку неявно заданої функції.

Приклад. Знайти похідну другого порядку функції

$$4x^2y^3 + x^2 = sin6y.$$

Розв'язання. $8xy^3 + 12x^2y^2 \cdot y' + 2x = 6cos6y \cdot y'$,

$$y' \cdot (6cos6y - 12x^2y^2) = 8xy^3 + 2x,$$

$$y' = \frac{8xy^3 + 2x}{6cos6y - 12x^2y^2},$$

$$y' = \frac{4xy^3 + x}{3cos6y - 6x^2y^2}.$$

$$y'' = \left(\frac{4xy^3 + x}{3cos6y - 6x^2y^2}\right)' =$$

$$= \frac{(4xy^3 + x)'(3cos6y - 6x^2y^2) - (4xy^3 + x)(3cos6y - 6x^2y^2)'}{(3cos6y - 6x^2y^2)^2} =$$

$$= \frac{(4y^3 + 12xy^2y' + 1)(3cos6y - 6x^2y^2) - (4xy^3 + x)(-18sin6yy' - 12(xy^2 + x^2yy'))}{(3cos6y - 6x^2y^2)^2}$$

$$= \frac{(4y^3 + 12xy^2y' + 1)(3cos6y - 6x^2y^2) + (4xy^3 + x)(18sin6yy' + 12(xy^2 + x^2yy'))}{(3cos6y - 6x^2y^2)^2},$$

де

$$y' = \frac{4xy^3 + x}{3cos6y - 6x^2y^2}.$$

Функція задана параметрично $\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t)} \\ \boldsymbol{y = y(t)} \end{cases}$

Для знаходження другої похідної від функції, що задана параметрично, диференціюємо вираз для першої похідної, як складну функцію незалежної змінної.

Знаходимо похідну, як похідну складної функції:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_t \cdot t'_x, \qquad t'_x = \frac{1}{x'_t}.$$

Остаточно маємо:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Похідна *n*-го порядку параметрично заданої функції:

$$y_x^{(n)} = \frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Знайти похідну другого порядку функції

$$\begin{cases} x = arctgt \\ y = ln(1+t^2) \end{cases}.$$

Розв'язання. $x'_t = \frac{1}{1+t^2}$, $y'_t = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t$,

$$y'_x = \frac{\frac{1}{1+t^2} \cdot 2t}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t,$$

$$(y'_x)'_t = (2t)' = 2, \qquad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{2}{\frac{1}{1+t^2}} = 2(1+t^2),$$

$$y''_{xx} = 2(1+t^2).$$

12.4 Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і диференційована при певних значеннях незалежного аргументу:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

З цього випливає, що відношення приросту функції до приросту аргументу можна подати у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon, \text{де } \varepsilon - \text{нескінченно мала при } \Delta x \to 0.$$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x.$$

Нескінченно малий приріст функції Δy дорівнює сумі величини, яка пропорційна нескінченно малому приросту незалежної змінної Δx, та нескінченно малої величини більш високого порядку малості порівнянно з Δx.

Визначення. Головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту незалежної змінної, називається ***диференціалом функції:***

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Приріст Δx незалежної змінної називається її ***диференціалом*** dx*:*

$$\Delta x = dx.$$

Диференціал функції дорівнює добутку похідної функції на диференціал незалежної змінної:

$$dy = f'(x)dx.$$

Властивості диференціала

За визначенням диференціала знайдемо диференціали деяких функцій:

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx; \qquad d(cosx) = -sinx\,dx;$$

$$d(lnx) = \frac{dx}{x}; \qquad d(arctg\,x) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Правила обчислення диференціалів:

1. Диференціал алгебраїчної суми двох функцій:
$$d(U \pm V) = dU \pm dV.$$
2. Диференціал добутку двох функцій:
$$d(U \cdot V) = V \cdot dU + U \cdot dV.$$
3. Диференціал частки двох функцій:
$$d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \cdot dU - U \cdot dV}{V^2}.$$

Диференціал складної функції. Інваріантність диференціала.

Нехай дано $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – неперервні і диференційовані функції своїх аргументів.

Похідну складної функції знаходять за формулою

$$y' = f'_u \cdot \varphi'_x \,.$$

Помножимо обидві частини рівності на dx, отримаємо

$$dy = f'_u \cdot u'_x dx.$$

За означенням диференціала $u'_x dx = du$, тому

$$dy = f'_u \cdot du.$$

Ця властивість називається ***інваріантністю форми диференціала від аргументу функції.***

Приклад. Знайти диференціал функції

$$y = 2^{tgx} + ln^3 x \cdot arcsin3x.$$

Розв'язання. $dy = d(2^{tgx} + ln^3 x \cdot arcsin3x) =$

$$= d(2^{tgx}) + arcsin3xd(ln^3x) + ln^3xd(arcsin3x) =$$

$$= \frac{2^{tgx}d(tgx)}{ln2} + arcsin3x \cdot 3ln^2xd(lnx) + ln^3x\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} =$$

$$= \frac{2^{tgx}}{ln2 \cdot cos^2x}dx + 3arcsin3x \cdot \frac{ln^2x}{x}dx + \frac{3ln^3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx;$$

$$dy = \left(\frac{2^{tgx}}{ln2 \cdot cos^2x} + 3arcsin3x \cdot \frac{ln^2x}{x} + \frac{3ln^3x}{\sqrt{1-9x^2}}\right)dx.$$

ЛЕКЦІЯ 13
ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ. ТЕОРЕМИ ФЕРМА, РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА, КОШІ . ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ ЩОДО РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

Теорема Ферма. *Нехай задано функцію $y = f(x)$, неперервну на інтервалі $[a, b]$.* Нехай *функція $y = f(x)$ набуває свого найбільшого (найменшого) значення у деякій точці x_0, що належить інтервалу $[a, b]$. Якщо в точці x_0 похідна існує, то вона дорівнює нулю:*

$$f'(x_0) = 0.$$

Доведення. Нехай для визначеності в точці x_0 функція $y = f(x)$ набуває свого найбільшого значення. З цього випливає, що для будь-якої точки, що належить інтервалу $[a, b]$, повинна виконуватися умова:

$$f(x) \le f(x_0).$$

Отже, якщо $x < x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0,$$

а якщо $x > x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0.$$

Якщо існує похідна, то існує ліва та права границі:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0,$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Одночасно ці нерівності справджується лише при $f'(x_0) = 0$.

Аналогічно доводимо теорему, якщо в точці x_0 функція набуває найменшого значення.

Теорема Ролля. *Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на інтервалі $[a, b]$, диференційована в усіх внутрішніх точках цього відрізка і на його кінцях приймає рівні значення $f(a) = f(b)$, то існує хоча б одна точка x_0, в якій похідна дорівнює нулю*

$$f'(x_0) = 0.$$

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона досягає на ньому свого найбільшого M і найменшого m значень.

Якщо $M = m$, то функція стала. Похідна від сталої величини дорівнює нулю і теорема доведена.

Нехай $f(c) = M$, де $c \epsilon (a, b)$. Через те що $f(c) = M$ найбільше значення функції, то $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$, як при $\Delta x > 0$, так і при $\Delta x < 0$. Отже: $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$, коли $\Delta x > 0$, і $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$, коли $\Delta x < 0$.

За умовою теореми похідна $f'(c)$ існує, тобто $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$, а $f^{'}(c) \leq 0$ при $\Delta x > 0$ і $f^{'}(c) \geq 0$ при $\Delta x < 0$. Ці нерівності сумісні лише тоді, коли $f^{'}(c) = 0$. Отже, між a і b є точка c, де похідна дорівнює нулю.

Геометричний зміст. За умов, зазначених у теоремі

Ролля, на дузі AB існує хоча б одна дотична, паралельна до осі Ox (рис. 42).

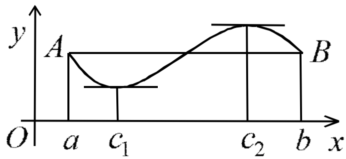

Рисунок 42

Теорема Лагранжа. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована в усіх його внутрішніх точках, то на інтервалі (a, b) знайдеться хоча б одна точка c, у якій виконується рівність*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Доведення. Визначимо число λ рівністю $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lambda$. Складемо допоміжну функцію $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \cdot \lambda$. Очевидно, що $F(a) = F(b) = 0$.

Функція $F(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована в кожній внутрішній точці. Отже, вона відповідає теоремі Ролля, за якою всередині відрізка є точка c така, що $F'(c) = 0$. Але $F'(x) = f'(x) - \lambda$, тому

$$F'(c) = f'(c) - \lambda = 0.$$

Звідси $f'(c) = \lambda$, тобто

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Теорема Коші. *Якщо* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *– дві функції, неперервні на відрізку* $[a, b]$ *і диференційовані в усіх його внутрішніх точках, до того ж похідна* $\varphi'(x)$ *ніде не обертається у нуль, то на інтервалі* (a, b) *знайдеться принаймні одна така точка* c, *коли виконується рівність*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Доведення. Визначимо число λ за рівністю

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\lambda,$$

де $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$.

Складемо допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-\big(\varphi(x)-\varphi(a)\big)\cdot\lambda.$$

Зрозуміло, що $F(a)=F(b)=0$. Тобто, функція $F(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля, тому між a і b є така точка c, що $F'(c)=0$. Але $F'(x)=f'(x)-\lambda\varphi'(x)$. Отже, $F'(c)=f'(c)-\lambda\varphi'(c)=0$. Звідси $\lambda=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ або

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Теорема Коші є узагальненням теореми Лагранжа.

Теорема Лопіталя. *Нехай функція* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *при* $x\to x_0$ *одночасно прямують до нуля або до нескінченності. Якщо відношення їх похідних має границю, то відношення самих функцій також має границю, яка дорівнює границі відношення похідних, тобто*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доводити цю теорему загалом не будемо, обмежимося лише розглядом найпростіших випадків.

Доведемо насамперед, що, якщо $x \to x_0$, функції $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ прямують до нуля і їхні похідні в точці x_0 існують, якщо $\varphi^{'}(x_0) \neq 0$.

За умовою теореми $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$. Розглянемо відношення

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}}.$$

Перейдемо до границі при $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Зауваження 1. Теорема справджується і в тому разі, коли функції $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ не визначені при $x=x_0$, але

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \; i \; \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0.$$

Зауваження 2. Якщо $f'(x_0)=\varphi'(x_0)=0$ і $f'(x)$ та $\varphi'(x)$ відповідають тим самим умовам, що й $f(x)$ і $\varphi(x)$, то, застосовуючи правило Лопіталя що до відношення $\frac{f^{'}(x)}{\varphi^{'}(x)}$ отримаємо формулу

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ і тощо.}$$

Зауваження 3. Якщо $\varphi^{'}(x_0) = 0$, а $f^{'}(x_0) \neq 0$, то теорема справджується що до оберненого відношення

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \to 0, \qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)} \to \infty.$$

Розглянемо випадки застосування правила Лопіталя.

1. Функція представлена відношенням двох функцій, які одночасно прямують до нуля або до нескінченності (невизначеності типу $\left|\frac{0}{0}\right|$*або* $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$*).*

Приклад. Знайти границі функцій:

а) $\lim_{x\to 0}\frac{ln(5+3x)}{2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{(ln(5+3x))'}{(2x)'}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{5+3x}}{2} = \frac{3}{10}$;

б) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{7x-3}}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{(e^{7x-3})'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{7e^{7x-3}}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{(7e^{7x-3})'}{(2x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{49e^{7x-3}}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty.$

2. Функція представлена різницею двох функцій, які прямують до нескінченності (невизначеність типу $|\infty-\infty|$*).*

Приклад. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = |\infty-\infty| =$$

(приведемо різницю дробів до спільного знаменника)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x-1)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{\big(x(e^x-1)\big)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}.$$

3. Функція представлена добутком двох функцій, одна з яких є нескінченно мала, а інша – нескінченно велика величина (невизначеність типу $|0\cdot\infty|$*)*

Границя виглядає так:

$$1)\ \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x) = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}} = \left|\frac{0}{0}\right|;$$

$$2)\ \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x) = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Приклад. Знайти границі функцій

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0} x^2\cdot lnx = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to 0}\frac{lnx}{1/x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0;$$

$$\text{б)}\ \lim_{x\to 1} lnx\cdot ln(x-1) = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to 1}\frac{ln(x-1)}{1/lnx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{ln^2x}\cdot\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(lnx)^2}{x-1} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{(lnx)^2+\frac{2xlnx}{x}}{1} = -\lim_{x\to 1}((lnx)^2+2lnx) = 0\ ;$$

в) $\lim_{x\to a}(a^2-x^2)\cdot tg\frac{\pi x}{2a} = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to a}\frac{a^2-x^2}{\frac{1}{tg\frac{\pi x}{2a}}} = \lim_{x\to a}\frac{a^2-x^2}{ctg\frac{\pi x}{2a}}$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to a}\frac{-2x}{\frac{-1}{sin^2\frac{\pi x}{2a}}\cdot\frac{\pi}{2a}} = \frac{4a^2}{\pi}.$$

4. Функція степенево-показникова(невизначеності типу $|1^\infty|, |\infty^0|, |0^0|$*).*

Для обчислення таких границь за правилом Лопіталя необхідно спочатку прирівняти границю до деякого числа A, що є границею функції , прологарифмувати отримане рівняння та знайти границю логарифма, а потім знайти значення A.

Приклад. Знайти границі функцій

а)$\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx}$; *б)* $\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}}$.

Розв'язання: а) функція є степенево-показниковою, тому позначимо границю функції через A та прологарифмуємо її:

$$\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = |0^0| = A\ ,$$

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = \lim_{x\to 0}ln(arcsinx)^{tgx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} tgx \cdot ln(arcsinx) = \lim_{x\to 0} \frac{ln(arcsinx)}{ctgx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-sin^2x}{\sqrt{1-x^2} \cdot arcsinx} =$$

(використавши першу важливу границю та її наслідки маємо)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2} \cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0\,,$$

тоді $A = e^0 = 1$.

б) $\lim_{x\to 0} (ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = |\infty^0| = A,$

$$lnA = ln\lim_{x\to 0} (ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0} ln(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{lnx} \cdot lnctgx =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{lnctgx}{lnx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{sin^2x \cdot ctgx}}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{sin^2x \cdot ctgx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{sin^2x \cdot \frac{cosx}{sinx}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{sinx \cdot cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{sinx} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-1}{cosx} = -1.$$

Отримаємо: $lnA = -1$, тоді $A = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

ЛЕКЦІЯ 14
УМОВИ ЗРОСТАННЯ ТА СПАДАННЯ ФУНКЦІЙ. НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ. НАЙМЕНШЕ ТА НАЙБІЛЬШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ В ІНТЕРВАЛІ

14.1 Ознаки монотонності функції

Теорема *(необхідна ознака монотонності).*

1. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі (a,b) зростає, то її похідна $f'(x)$ невід'ємна: $f'(x) \geq 0$.

2. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі (a,b) спадає, то її похідна $f'(x)$ недодатна: $f'(x) \leq 0$.

3. Якщо функція $f(x)$ не змінюється в інтервалі (a,b), то її похідна $f'(x)$ дорівнює нулю.

Доведення. 1. Нехай функція $f(x)$ в інтервалі (a,b) зростає, тобто $f(x+\Delta x) > f(x)$, якщо $\Delta x > 0$, і $f(x+\Delta x) > > f(x)$, якщо $\Delta x > 0$, для будь-якого x в цьому інтервалі. Але тоді відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

є величиною додатною незалежно від знака Δx, а отже, границя цього виразу, тобто похідна, не може бути від'ємним числом:

$$f^{'}(x) \geq 0.$$

2. Якщо функція $f(x)$ спадає, то відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – величина від'ємна і її границя, тобто похідна, може бути або від'ємним числом, або дорівнювати нулю:

$$f^{'}(x) \leq 0.$$

3. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі (a,b) не змінюється, тобто $f(x) = const$, то її похідна дорівнює нулю:

$$f'(x) = 0.$$

***Геометричний зміст цієї теореми*:**

1) якщо функція зростає, то дотична до графіка функції утворює гострий кут з віссю Ox;

2) якщо функція спадає, то дотична до графіка функції утворює тупий кут з віссю Ox.

Теорема *(достатня ознака монотонності).*

1. Якщо похідна $f'(x)$ від функції $f(x)$ у всьому інтервалі додатна, то функція $f(x)$ в цьому інтервалі зростає.

2. Якщо похідна $f'(x)$ від функції $f(x)$ у всьому інтервалі від'ємна, то функція $f(x)$ в цьому інтервалі спадає.

3. Якщо похідна $f'(x)$ від функції $f(x)$ у всьому інтервалі дорівнює нулю, то функція $f(x)$ в цьому інтервалі не змінюється (є константою).

Доведення. Оберемо дві довільні точки x_1 і x_2, що належать інтервалу, до того ж $x_1 < x_2$. За формулою Лагранжа маємо:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \qquad x_1 < \xi < x_2.$$

Оскільки $x_1 < x_2$, то різниця $x_2 - x_1$ додатна і знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$ визначається знаком похідної $f'(\xi)$. Якщо похідна $f'(x)$ завжди додатна, то і $f'(\xi) > 0$. Отже, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1,$$

це й означає, що функція $f(x)$ зростає.

Якщо похідна завжди від'ємна, то й $f'(\xi) < 0$, а отже,

$$f(x_2) < f(x_1) \text{ при } \ x_2 > x_1,$$

тобто функція спадає.

Якщо похідна завжди дорівнює нулю, то $f'(\xi) = 0$, а отже, $f(x_2) = f(x_1)$ при $x_2 > x_1$, тобто функція постійна.

Приклад. Дослідити функцію на монотонність:

$$y = x^3 - 3x.$$

Розв'язання. Зауважимо, що будь-яке дослідження функції необхідно розпочинати зі знаходження області визначення функції: $D(y) = R$.

Похідна цієї функції $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$.

Отже, функція $y = x^3 - 3x$ зростає на проміжках $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-1; 1)$.

14.2 Екстремум функції

Особливе значення дослідження функції мають значення x, які відділяють інтервали зростання від інтервалів спадання функції. При переході через ці точки функція $y = f(x)$ зі зростаючої стає спадною, і навпаки: зі спадної – зростаючою.

Визначення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околлі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***максимуму*** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найбільшим значенням функції $y = f(x)$ в деякому околі точки x_0 (рис. 43).

Визначення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***мінімуму***

функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найменше значення функції $y = f(x)$ в деякому околі точки x_0 (рис. 44).

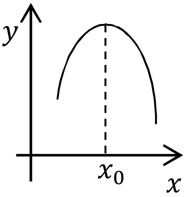

Рисунок 43

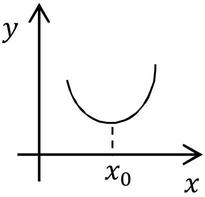

Рисунок 44

Точки максимуму і мінімуму називаються точками екстремуму функції.

Теорема *(необхідна ознака екстремуму). Якщо в точці x_0 функція $y = f(x)$ досягає екстремуму, то її похідна в цій точці або дорівнює нулю $(f'(x_0) = 0)$, або не існує.*

Доведення. Дійсно, якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції, то значення функції в ній є найбільшим (або найменшим) в деякому околі точки x_0. Звідси випливає, що якщо в точці x_0 існує похідна, то, за теоремою Ферма, вона дорівнює нулю.

Точки x_0, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними* точками функції.

Теорема *(достатня ознака екстремуму). Точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, якщо при переході x через x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак на протилежний; при зміні знака «+» на «–» точка x_0 є точкою максимуму, при зміні знака з «–» на «+» точка x_0 є точкою мінімуму.*

Доведення. Нехай при переході x зліва направо через x_0 похідна змінює знак з «+» на «–» ; із цього випливає, що ліворуч точки x_0 розташований інтервал зростання функції, а праворуч – інтервал спадання функції. Отже, точка x_0 є точкою максимуму функції.

Аналогічними є міркування в разі зміни знака з «–» на «+» ; при переході x через x_0 зліва направо, точка x_0 є точкою мінімуму функції.

Загальний план дослідження функції на екстремум та монотонність

1. З'ясуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо похідну функції.
3. Знайдемо критичні точки ($f'(x) = 0$). Нанесемо їх на координатну пряму.
4. В кожному з отриманих інтервалів з'ясуємо знак похідної. За знаком похідної визначаємо характер поведінки функції. З'ясовуємо, при переході через які *критичні* точки похідна змінює знак, саме ці точки є точками екстремуму функції. Інколи два суміжні інтервали мають однаковий знак, тому точка, яка їх розділяє, не є точкою екстремуму.
5. Знайдемо значення функції в точках екстремуму.

Приклад. Дослідити функцію на монотонність та екстремум

$$y = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $x \neq \pm 1$; тобто

$$D(y) = (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, \infty).$$

2. Знайдемо $y'(x)$:

$$y' = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

3. $y' = 0$ при $x = 0$ і y' не існує при $x = \pm 1$, тобто критичною точкою є тільки точка $x = 0$, оскільки при $x = \pm 1$ функція не існує.

4. На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(-1{,}0)$ функція спадає, оскільки $y' < 0$.

На інтервалах $(0{,}1)$ та $(1, \infty)$ функція зростає, оскільки $y' > 0$ (рис. 45).

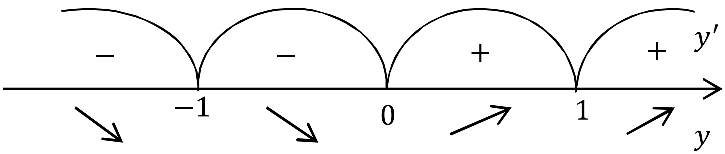

Рисунок 45

При переході через $x = 0$ похідна змінює знак з – на +, тому при $x = 0$ маємо мінімум функції.

5. $y_{min} = y(0) = 1$, тобто точка $B(0{,}1)$ – точка екстремуму функції.

Відповідь: функція спадає при $x \epsilon (-\infty, -1)$ та $(-1{,}0)$; функція зростає при $x \epsilon (0{,}1)$ та $(1, \infty)$; точка $B(0{,}1)$ – точка екстремуму функції (min).

14.3 Найменше та найбільше значення функції в інтервалі

Розв'язання задачі на найменше та найбільше значення функції в інтервалі пов'язане з дослідженням функції на екстремум та монотонність. Функція $y = f(x)$ може набувати найменшого (найбільшого) значення або в точках екстремуму, або на кінцях інтервалу $[a, b]$.

Загальний план дослідження на найменше та найбільше значення функції в інтервалі

1. З'ясовуємо область визначення функції (далі ОВФ).
2. Знайдемо похідну функції.
3. Знайдемо критичні точки ($f'(x) = 0$).
4. Знайдемо значення функції в критичних точках, у яких похідна існує і які належать інтервалу $[a, b]$ та значення функції у крайніх точках інтервалу. Порівняємо отримані значення і оберемо серед них найменше та найбільше.

Приклад. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = x^2 \ln x$ на інтервалі $[e^{-3}, 1]$.

Розв'язання.

1. ОВФ: $x \epsilon (0, \infty)$.
2. $y' = 2x \cdot lnx + x^2 \frac{1}{x} = 2x \cdot lnx + x.$
3. $2x \cdot lnx + x = 0;\;\; x(2lnx + 1) = 0;\;\; x_1 = 0,$

$$2lnx + 1 = 0, \qquad x_2 = e^{-\frac{1}{2}}.$$

x_1 не належить ОВФ, $x_2 \epsilon [e^{-3}, 1]$.

4. $y(e^{-3}) = e^{-6} lne^{-3} = -3e^{-6} = \frac{-3}{e^6};$

$$y\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1} ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} e^{-1} = -\frac{1}{2e};$$

$$y(1) = ln1 = 0.$$

Отже, найменше значення функція набуває при $x = e^{-\frac{1}{2}}$, а найбільше – при $x = 1$.

ЛЕКЦІЯ 15
УМОВИ ОПУКЛОСТІ ТА УГНУТОСТІ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ. ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ. АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ. ЗАГАЛЬНА СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

15.1 Умови опуклості та угнутості графіка функції. Точки перегину

Визначення. Дуга називається *опуклою*, якщо вона перетинається з будь-якою січною не більше ніж у двох точках.

Якщо дуга опукла, то вона розміщується з одного боку від дотичної, проведеної в будь-якій точці. Опукла дуга може бути опуклою вгору (опуклою) (рис. 46) або опуклою вниз (угнутою) (рис. 47). Опукла дуга розміщується нижче дотичної, а угнута – вище.

Особливу роль відіграють точки переходу від інтервалів опуклості до інтервалів угнутості, ці точки називаються *точками перегину.*

Визначення. *Точкою перегину* називається така точка,

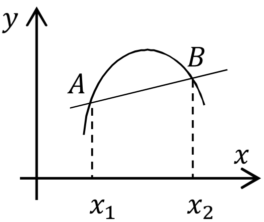

Рисунок 46

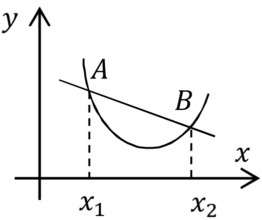

Рисунок 47

лінії якої відділяють опуклу дугу від угнутої.

Теорема. Якщо друга похідна $f''(x)$ в інтервалі (a,b) від'ємна $(f''(x) \leq 0)$, то дуга лінії $y = f(x)$, опукла в цьому інтервалі; якщо $f''(x)$ в інтервалі (a,b) додатна $(f''(x) \geq 0)$, то лінія $y = f(x)$ у цьому інтервалі угнута.

Теорема. (*необхідна умова існування точок перегину*) *Якщо в точці* x_0 *лінії* $y = f(x)$ *має точку перегину, то або* $f''(x_0) = 0$ *або не існує.*

Теорема. (*достатня умова існування точок перегину*) *Точка* (x_0, y_0) *(якщо в цій точці виконується необхідна умова) є точкою перегину лінії* $y = f(x)$, *якщо друга похідна функції* $f''(x)$ *змінює знак при переході* x *через* x_0.

Приймемо ці теореми без доведення.

Схема дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину

1. Визначемо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо першу та другу похідні.
3. Визначимо критичні точки другого порядку, тобто точки, в яких $f''(x) = 0$ або не існує.
4. Нанесемо на координатну пряму критичні точки та точки, в яких функція не існує. З'ясуємо знак другої похідної $f''(x)$ у кожному частковому інтервалі. Якщо $f''(x) < 0$, то функція опукла, якщо $f''(x) > 0$ – угнута. Якщо при переході через критичні точки другого порядку похідна $f''(x)$ змінює знак, то ці точки є точками перегину.
5. Знайдемо значення функції в точках перегину.

Приклад. Знайти точки перегину та інтервали опуклості й угнутості функції $y = x^2 e^x$.

Розв'язання. 1. ОВФ: $x \epsilon R$.

2. $y' = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2)$;

$y'' = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$.

3. $e^x(x^2 + 4x + 2) = 0$; $e^x \neq 0$; $x^2 + 4x + 2 = 0$,

$$x_1 = -2 - \sqrt{2};\ x_2 = -2 + \sqrt{2}.$$

4.

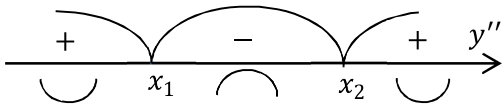

Рисунок 48

Функція угнута при $x\epsilon\left(-\infty, -2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{2}, \infty\right)$ та опукла при $x\epsilon\left(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}\right)$. Точки з абсцисами $x_1 = -2 - \sqrt{2}$; $x_2 = -2 + \sqrt{2}$ є точками перегину (рис. 48).

5. $y\left(-2 - \sqrt{2}\right) = \left(-2 - \sqrt{2}\right)^2 e^{-2-\sqrt{2}} = \dfrac{6 + 4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$;

$$y(-2 + \sqrt{2}) = (-2 + \sqrt{2})^2 e^{-2+\sqrt{2}} = \frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}.$$

15.2 Асимптоти графіка функції

Визначення. Пряма лінія S називається *асимптотою* лінії L, якщо відстань від точки лінії L до прямої S прямує до нуля при необмеженому віддалені цієї точки від початку координат.

Вертикальні та похилі асимптоти

1. Нехай лінія $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту. Рівняння вертикальної асимптоти $x = x_0$, а відповідно визначенню асимптоти $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$; і навпаки якщо точка x_0 є точкою нескінченного розриву функції $f(x)$, то пряма $x = x_0$ є асимптотою лінії $y = f(x)$. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то лінія $y = f(x)$ має своєю асимптотою пряму $x = x_0$.

Взаємне розташування нескінченної гілки лінії та її вертикальної асимптоти $x = x_0$ розглядають за допомогою лівої та правої границь.

Приклад. Знайти вертикальні асимптоти функції

$$y = \frac{x^2 - x}{x + 3}.$$

*Розв'язання:*1. ОВФ: $x \neq -3$.

2. $\lim\limits_{x \to -3-0} \frac{x^2 - x}{x + 3} = \frac{(-3-0)^2 - (-3-0)}{-3-0+3} = \frac{12}{-0} = -\infty;$

$$\lim_{x \to -3+0} \frac{x^2 - x}{x + 3} = \frac{(-3+0)^2 - (-3+0)}{-3+0+3} = \frac{12}{0} = \infty.$$

3. При $x \to -3$ кожна з двох односторонніх границь прямує до нескінченності, тому $x = -3$ – вертикальна асимптота. При $x \to -3 - 0$ гілка функції прямує до $-\infty$; при $x \to -3 + 0$ гілка функції прямує до ∞.

2. Нехай лінія $y = f(x)$ має похилу асимптоту. Рівняння такої асимптоти: $y = kx + b$. Відповідно до визначення відстань від MN_1 прямує до нуля при $x \to \infty$ (рис. 49). Зручніше розглядати відстань MN, що також прямує до нуля при $x \to \infty$:

$$MN = kx + b - f(x);$$

$$\lim_{x \to \infty} \big(kx + b - f(x)\big) = 0;$$

$$f(x) = kx + b + \varepsilon(x),$$

де $\varepsilon(x)$ нескінченно мала при $x \to \infty$. Поділимо обидві частини на x і перейдемо до границі при $x \to \infty$:

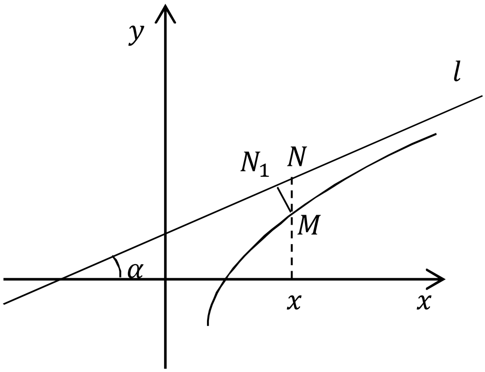

Рисунок 49

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{kx}{x} + \frac{b}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x} \right);$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Знайдемо b: $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$.

Зауваження 1. Під час знаходження k для показникової функції необхідно розглядати випадки при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$ окремо (тобто маємо k_1 і k_2). Якщо $k_i = \pm\infty$, то похилої асимптоти немає і знаходити b_i не потрібно.

Зауваження 2. Якщо $k = 0$, то похила асимптота перетворюється на горизонтальну:

$$y = b, \qquad b = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Приклад. Знайти похилу асимптоту функції

$$y = \frac{x^2 - x}{x + 3}.$$

Розв'язання:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2 - x}{x+3}}{x} \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x}{(x+3)x} = 1\,.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - x}{x + 3} - x\right) = |\infty - \infty| =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - x^2 - 3x}{x + 3} = -4.$$

$y = x - 4$ похила асимптота функції.

15.3 Загальна схема дослідження функції

1. Область визначення функції.
2. Точки перетину з осями координат. Точки перетину з віссю Oy знаходимо з умови, що $x = 0$, а з віссю Ox з умови, що $y = 0$.
3. Парність (непарність) функції. Функція парна, якщо виконується умова $y(-x) = y(x)$, і непарна, якщо $y(-x) = -y(x)$.
4. Періодичність. Якщо функція періодична, то $y(x + \mathrm{T}) = y(x)$, де Т – період функції.
5. Дослідження функції на монотонність та екстремум.

6. Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину.
7. Асимптоти функції.
8. Побудова графіка функції.

Приклад. Дослідити функцію та побудувати графік

$$y = \frac{x^2}{x+4}.$$

Розв'язання:

1. ОВФ: $x + 4 \neq 0$; $x \neq -4$.
2. При $x = 0, y = 0$. т. M_1 (0,0) – точка перетину з осями координат.
3. $y(-x) = \frac{x^2}{-x+4}$, $y(-x) \neq \pm y(x) -$ функція загального виду.
4. Неперіодична.
5. $y' = \frac{2x(x+4)-x^2}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x}{(x+4)^2}$,

   $y' = 0$, при $x^2 + 8x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -8$.

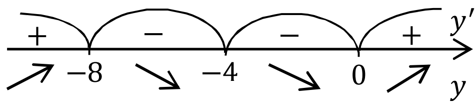

Рисунок 50

При $x \epsilon (-\infty, -8) \cup (0, \infty)$ функція зростає, при $x \epsilon (-8, -4) \cup (-4{,}0)$ функція спадає (рис. 50).

$y(-8) = \frac{(-8)^2}{-8+4} = \frac{64}{-4} = -16$, $M_2(-8, -16) -$ точка екстремуму (max). $y(0) = 0$, $M_3(0{,}0)$ – точка екстремуму (min).

6. $$y'' = \frac{(2x+8)(x+4)^2 - 2(x^2+8x)(x+4)}{(x+4)^4} = \frac{24}{(x+4)^3},$$

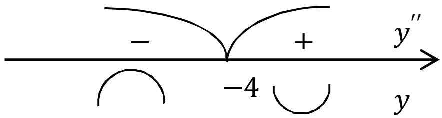

Рисунок 51

$y'' \neq 0$ – точок перегину немає.

При $x \epsilon (-\infty, -4)$ функція опукла, при $x \epsilon (-4, \infty)$ функція угнута (рис. 51).

7. Вертикальні асимптоти: ОВФ $x \neq -4$, тому

$$\lim_{x \to -4-0} \frac{x^2}{x+4} = \frac{(-4-0)^2}{-4-0+4} = \frac{16}{-0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to -4+0} \frac{x^2}{x+4} = \frac{(-4+0)^2}{-4+0+4} = \frac{16}{0} = \infty.$$

При $x \to -4$ кожна з двох односторонніх границь прямує до нескінченності, тому $x = -4$ – вертикальна асимптота. При $x \to -4-0$ гілка функції прямує до $-\infty$; при $x \to -4+0$ гілка функції прямує до ∞.

Похила асимптота:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x+4}}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+4x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x+4} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x}{x+4} = -4,$$

$y = x - 4$ похила асимптота.

Побудуємо графік функції (рис.52)

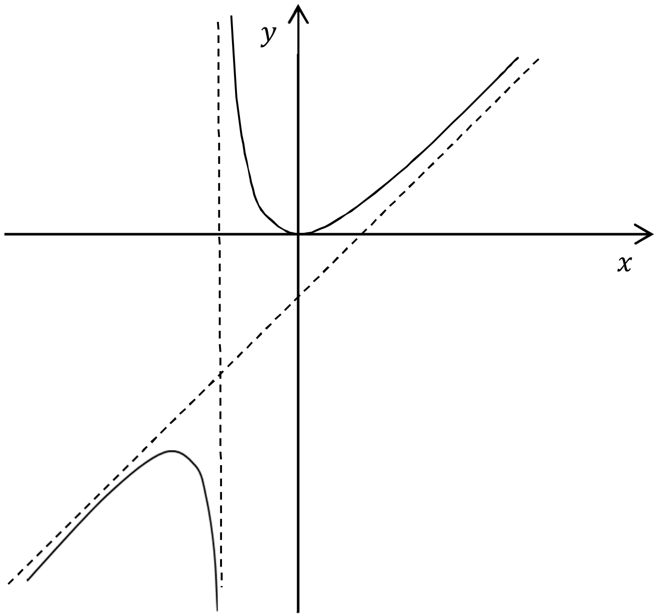

Рисунок 52

Функцію дослідженно.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1 Зайцев Є.П. Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу : навч. посібник для студ. вищ. навч. закл / Є. П. Зайцев. – К.: Алерта, 2017. – 574 с.

2. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005.–270 с.

3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г. Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с. – Кн. 2 – Спеціальні розділи. – 368 с.

4. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський – Харків : ХНУМГ, 2015. – 255 с.

5. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2003. – 648 с.

6. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. – М. : Физматлит, 2005. – 240 с.

7. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.

8. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 2011. − Т.1. − 430 с. Т.2. − 580 с.

9. Розендорн Э. Р. Теория поверхностей / Э. Р. Розендорн. – М. : Физматлит, 2006. – 304 с.

Навчальне видання

ВОРОНОВСЬКА Лариса Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Модуль 1

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології)

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

Редактор *О. А. Норик*

Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2021, поз. 186 Л

Підп. до друку 18.08.2021. Формат 60 × 84/16.
Електронне видання. Ум. друк. арк. 9,9.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.