МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова, Г. А. Кузнецова

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 101 – Екологія, 183 – Технології захисту навколишнього середовища, 206 – Садово-паркове господарство)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2021

Ламтюгова С. М. Вища математика : конспект лекцій для студентів усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 101 – Екологія, 183 – Технології захисту навколишнього середовища, 206 – Садово-паркове господарство / С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова, Г. А. Кузнецова; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 61 с.

Автори:
канд. фіз.-мат. наук, доц. С. М. Ламтюгова,
канд. пед. наук, доц. Ю. В. Ситникова,
ст. викл. Г. А. Кузнецова

Рецензент

А. В. Якунін, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 12 від 04.05.2021.

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій розроблено згідно з програмою нормативної навчальної дисципліни «Вища математика» та робочої навчальної програми щодо підготовки бакалавра за спеціальностями 101 – Екологія, 183 – Технології захисту навколишнього середовища, 206 – Садово-паркове господарство, який розраховано на студентів денної та заочної форм навчання.

Теоретичний матеріал структуровано та узгоджено з аудиторними лекційними заняттями, що проводяться під час вивчення модуля «Вища математика».

Конспект лекцій містить стислий теоретичний матеріал необхідний студентам для засвоєння базових знань із вищої математики. У конспекті розміщено значну кількість прикладів розв'язання типових задач, а також задач прикладного спрямування для практичного застосування та закріплення отриманих знань стосовно вирішення професійно-зорієнтованих завдань.

Для поглибленого вивчення та пошуку довідникової інформації подано посилання на джерела, у яких можна знайти більш детальну інформацію про ті або інші математичні положення чи доведення теорем, оскільки вони не представлені в цьому конспекті.

ЛЕКЦІЯ 1
ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

1.1 Визначення похідної функції, її геометричний зміст

Нехай функція $y = f\left(x\right)$ визначена на інтервалі $\left(a,b\right)$ і $x \in \left(a,b\right)$. Надамо аргументу x приріст Δx так, щоб нова точка $x + \Delta x \in \left(a,b\right)$. Оскільки точка x фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, яке також буде функцією приросту аргументу Δx.

Похідною функції $y = f\left(x\right)$ за незалежною змінною x називається границя, до якої прямує відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x}.$$

Похідна позначається одним із символів: y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $f'\left(x\right)$.

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням***.

Історично поняття похідної виникло з потреб геометрії і механіки. У геометрії поняття похідної з’являється в задачі про проведення дотичної до гладкої кривої в заданій точці.

Геометричний зміст похідної. Значення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 дорівнює тангенсу кута, утвореного додатнім напрямком осі Ox і додатнім напрямом дотичної, проведеної до графіка цієї функції в точці з абсцисою x_0 (рис.1.1) .

$$tg\alpha = f'(x_0).$$

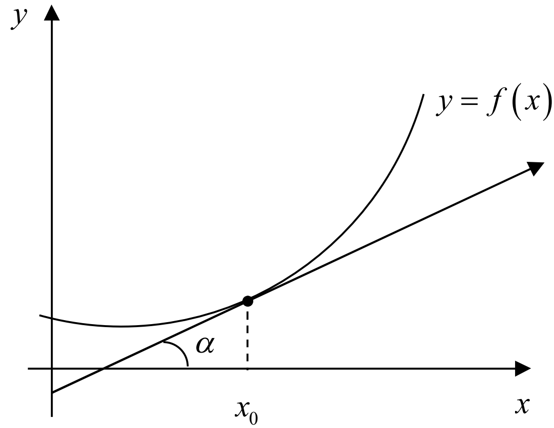


Рисунок 1.1

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$ виглядає так:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0),$$

де y_0' – значення похідної y' при $x = x_0$.

Нормаллю до кривої в точці M називається пряма, яка проходить через точку M перпендикулярно до дотичної.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$ виглядає так:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0).$$

У механіці при одновимірному русі матеріальної точки вздовж прямої за законом $y = f(t)$, де y – координата точки, а t – час, похідна $f'(t)$ інтерпретується як миттєва швидкість руху (***фізичний зміст похідної***).

Питання про те, з якою швидкістю змінюються функції при зміні визначальних параметрів, важливе при дослідженні різних фізичних, біологічних, економічних та інших процесів. За допомогою похідної можна знайти швидкість, з якою рухається літак або автомобіль, швидкість приросту населення тієї чи іншої держави, швидкість змінювання кількості електрики (тобто силу струму), швидкість змінювання чисельності мікроорганізмів, швидкість перебігу хімічної реакції тощо.

Окрім цього, за допомогою похідної можна знаходити екстремуми, тобто найбільші і найменші значення, найкращі, найбільш вигідні, найбільш економні. З такими задачами доводиться мати справу представникам різних спеціальностей: інженери-технологи намагаються так організувати виробництво, щоб отримати якомога більше продукції, конструктори хочуть так спланувати прилад, щоб його вага була найменшою тощо.

Прогнозування якості навколишнього середовища і оцінка можливого впливу на нього викидів від промислових підприємств, автомобільного транспорту та інших видів людської діяльності ґрунтується, здебільшого, на математичному моделюванні процесів перенесення забруднень у повітряному та водному середовищах.

1.2 Основні правила й формули диференціювання

Нехай C – стала, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функції, що мають похідні. Тоді:

1) $C' = 0$, 2) $x' = 1$, 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$,

4) $(Cu)' = Cu'$, 5) $(uv)' = u'v + uv'$,

6) $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

7) якщо $y = f(u)$, $u = u(x)$, тобто $y = f[u(x)]$, де функції $f(u)$ і $u(x)$ мають похідні, то $y'_x = f'_u \cdot u'_x$ (правило диференціювання складної функції),

8) $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{x'_y}$ (правило диференціювання оберненої функції),

9) якщо $y = (f(x))^{\varphi(x)}$ – показниково-степенева функція, то задану рівність необхідно спочатку прологарифмувати:

$$\ln y = \ln (f(x))^{\varphi(x)},$$

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln(f(x)),$$

а потім продиференціювати обидві частини отриманої рівності:

$$(\ln y)' = (\varphi(x) \cdot \ln(f(x)))'.$$

Таблиця похідних для функції $u = u(x)$

1) $C' = 0$,

2) $(u^a)' = a\,u^{a-1} \cdot u'$,

2а) $x' = 1$,

2б) $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u',$

2в) $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u',$

3) $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u',$

3а) $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u',$

4) $\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u',$

4а) $\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u',$

5) $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u',$

6) $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u',$

7) $\left(tg\ u\right)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u',$

8) $\left(ctg\ u\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u',$

9) $\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u',$

10) $\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u',$

11) $\left(arctg\ u\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u',$

12) $\left(arcctg\ u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$,

13) $\left(u^v\right)' = v\,u^{v-1}\cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$,

14) $\left(sh\ u\right)' = ch\ u\cdot u'$,

15) $\left(ch\ u\right)' = sh\ u\cdot u'$,

16) $\left(th\ u\right)' = \dfrac{1}{ch^2\, u}\cdot u'$,

17) $\left(cth\ u\right)' = -\dfrac{1}{sh^2\, u}\cdot u'$.

Приклад 1. Знайти похідні функцій:

а) $y = \ln\sin x^2$, б) $y = x^3\cdot\sin 3x$, в) $y = \dfrac{arctg^2 x}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання:

а) $y' = \left(\ln\sin x^2\right)' = \dfrac{1}{\sin x^2}\cdot\left(\sin x^2\right)' = \dfrac{1}{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot\left(x^2\right)' =$

$$= \frac{\cos x^2}{\sin x^2}\cdot 2x = ctgx^2\cdot 2x = 2xctgx^2,$$

б) $y' = \left(x^3\cdot\sin 3x\right)' = \left(x^3\right)'\cdot\sin 3x + x^3\cdot\left(\sin 3x\right)' =$

$$= 3x^2\cdot\sin 3x + x^3\cdot\cos 3x\cdot\left(3x\right)' = 3x^2\sin 3x + x^3\cos 3x\cdot 3 =$$

$$= 3x^2\sin 3x + 3x^3\cos 3x = 3x^2\left(\sin 3x + x\cos 3x\right),$$

в) $y' = \left(\dfrac{arctg^2 x}{\sqrt{x}} \right)' = \dfrac{\left(arctg^2 x \right)' \cdot \sqrt{x} - arctg^2 x \cdot \left(\sqrt{x} \right)'}{\left(\sqrt{x} \right)^2} =$

$$= \frac{2arctgx \cdot \left(arctgx \right)' \cdot \sqrt{x} - arctg^2 x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{2arctgx \cdot \dfrac{1}{1+x^2} \cdot \sqrt{x} - arctg^2 x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{\dfrac{2\sqrt{x}arctgx}{1+x^2} - \dfrac{arctg^2 x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{arctgx}{x} \cdot \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x^2} - \frac{arctgx}{2\sqrt{x}} \right).$$

Приклад 2. Знайти похідну функції:

$$y = \left(\cos x \right)^{x^2}.$$

Розв'язання:

$$\ln y = \ln \left(\cos x \right)^{x^2},$$

$$\ln y = x^2 \ln \left(\cos x \right),$$

$$\left(\ln y \right)' = \left(x^2 \ln \left(\cos x \right) \right)',$$

$$\frac{1}{y} y' = \left(x^2 \right)' \ln \left(\cos x \right) + x^2 \left(\ln \left(\cos x \right) \right)',$$

$$\frac{1}{y} y' = 2x \ln \left(\cos x \right) + x^2 \frac{-\sin x}{\cos x},$$

$$y' = y \left(2x \ln \left(\cos x \right) - x^2 \mathrm{tg} x \right),$$

$$y' = \left(\cos x \right)^{x^2} \left(2x \ln \left(\cos x \right) - x^2 \mathrm{tg} x \right).$$

Приклад 3. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^2 - 4x + 3$ в точці з абсцисою $x_0 = 4$.

Розв'язання:

Обчислимо значення функції в точці $x_0 = 4$:

$$y_0 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3.$$

Знайдемо похідну від функції $y = x^2 - 4x + 3$:

$$y' = \left(x^2 - 4x + 3\right)' = 2x - 4.$$

Обчислимо значення похідної в точці $x_0 = 4$:

$$y_0' = 2 \cdot 4 - 4 = 8 - 4 = 4.$$

Тоді рівняння дотичної буде виглядати так:

$$y - y_0 = y_0'\left(x - x_0\right),$$

$$y - 3 = 4\left(x - 4\right), \quad y = 4x - 16 + 3,$$

$$y = 4x - 13,$$

а рівняння нормалі –

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}\left(x - x_0\right),$$

$$y - 3 = -\frac{1}{4}\left(x - 4\right), \quad y = -\frac{1}{4}x + 1 + 3,$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 4.$$

1.3 Правило Лопіталя

Правило Лопіталя. *Нехай функції* $f\left(x\right)$ *і* $\varphi\left(x\right)$*, коли* $x \to x_0$ *одночасно прямують до нуля або до нескінченності.*

Якщо відношення їх похідних має границю, то відношення самих функцій також має границю, яка дорівнює границі відношення похідних, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Розглянемо випадки застосування правила Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right),\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x)=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$, де $f(x)$ – складніша за $\varphi(x)$,

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\left(0^0\right),\left(\infty^0\right),\left(1^\infty\right)=A$,

$$\ln A=\ln\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)=\ldots=B,$$

$$\ln A=B,$$

$$A=e^B.$$

Приклад 4. Обчислити границі функцій:

$$\text{а) }\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\text{arctg}x},\ \text{б) }\lim_{x\to 0}x^2\cdot\ln x,\ \text{в) }\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Розв'язання:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\text{arctg}x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(5x)'}{(\text{arctg}x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{\dfrac{1}{1+x^2}}=$

$$=\lim_{x\to 0} 5\left(1+x^2\right)=5\cdot(1+0)=5,$$

б) $$\lim_{x\to 0} x^2\cdot\ln x=0^2\cdot\ln 0=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\frac{\ln 0}{\frac{1}{0^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-2}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2}=\frac{0^2}{-2}=0,$$

в) $$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=\left(e^{+\infty}+\infty\right)^{\frac{1}{+\infty}}=\left(\infty^0\right)=A,$$

$$\ln A=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(e^x+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}=$$

$$=\frac{\ln\left(e^{+\infty}+\infty\right)}{+\infty}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)==\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(e^x+x\right)\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^x+x}\cdot\left(e^x+x\right)'}{1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x}=\frac{e^{+\infty}+1}{e^{+\infty}+\infty}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^{+\infty}}{e^{+\infty}+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(e^x+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1,$$

$$\ln A=1,$$

$$A=e.$$

ЛЕКЦІЯ 2
ЗАГАЛЬНА СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

1. Область визначення функції.

2. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy знаходимо із умови $x = 0$, а з віссю Ox – з умови $y = 0$.

3. Парність (непарність) функції, періодичність.

Функція парна, якщо виконується умова $y(-x) = y(x)$, непарна, якщо $y(-x) = -y(x)$, і загального вигляду, якщо обидві умови не виконуються. Функція періодична, якщо $y(x+T) = y(x)$, де T – період функції.

4. Дослідження функції на монотонність та екстремуми за допомогою першої похідної.

5. Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину за допомогою другої похідної.

6. Асимптоти функції.

7. Побудова графіка функції.

Приклад 1. Дослідити функцію і побудувати її графік

$$y = \frac{x^2}{x-1}.$$

Розв'язання:

1. Область визначення функції:

$$x - 1 \neq 0,\ x \neq 1,\ x \in (-\infty;1) \cup (1,+\infty).$$

2. Точки перетину графіка з осями координат:

$$Ox:\ y = 0,\ \frac{x^2}{x-1} = 0,\ x^2 = 0,\ x = 0,\ O(0,0),$$

$$Oy:\ x = 0,\ y = \frac{0^2}{0-1} = 0,\ O(0,0).$$

3. Функція загального вигляду, тому що

$$y(-x)=\frac{(-x)^2}{-x-1}=\frac{x^2}{-x-1}=-\frac{x^2}{x+1}\neq \pm y(x)$$

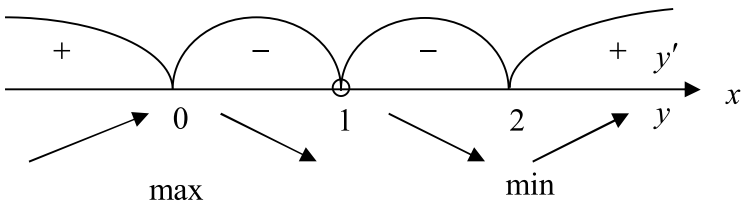
неперіодична.

4. Для дослідження функції на монотонність та екстремуми знайдемо першу похідну функції і прирівняємо її до нуля:

$$y'=\left(\frac{x^2}{x-1}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\cdot(x-1)-x^2\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=,$$

$$=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\,,\quad x^2-2x=0\,,\quad x(x-2)=0\,,$$

$x=0$, $x=2$ – критичні точки.



Інтервали зростання функції: $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$,

інтервали спадання функції: $x\in(0,1)\cup(1,2)$,

$x_{\max}=0$, $\quad y_{\max}(0)=\dfrac{0^2}{0-1}=0$,

$x_{\min}=2$, $\quad y_{\min}(2)=\dfrac{2^2}{2-1}=\dfrac{4}{1}=4$,

$O(0;0)$ – точка графіка, що відповідає максимуму,

$M_1(2;4)$ – точка графіка, що відповідає мінімуму.

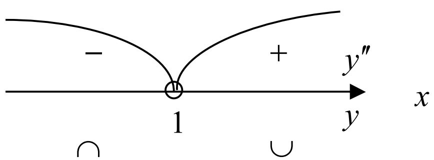
5. Для дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину знайдемо другу похідну функції і прирівняємо її до нуля:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{\left(x^2 - 2x\right)' \cdot (x-1)^2 - \left(x^2 - 2x\right) \cdot \left((x-1)^2\right)'}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - \left(x^2 - 2x\right) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x-1) \cdot \left((x-1)^2 - \left(x^2 - 2x\right)\right)}{(x-1)^4} = \frac{2\left(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x\right)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3},$$

$\dfrac{2}{(x-1)^3} \neq 0$, точок перегину немає.



Інтервали опуклості: $x \in (-\infty; 1)$,

інтервали угнутості: $x \in (1; +\infty)$.

6. $x = 1$ – вертикальна асимптота:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2}{x-1} = \frac{(1-0)^2}{1-0-1} = \frac{1}{-0} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2}{x-1} = \frac{(1+0)^2}{1+0-1} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Для визначення похилих асимптот $y = kx + b$ необхідно знайти коефіцієнти k і b:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(x-1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x\cdot(x-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1,$$

$y=x+1$ – похила асимптота.

7. Побудуємо графік функції (рис. 2.1)

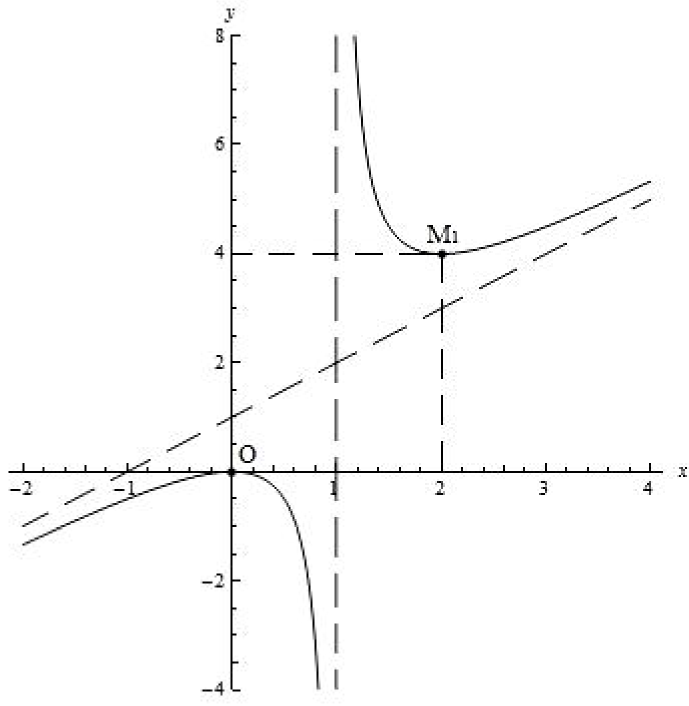


Рисунок 2.1

Приклад 2. Дослідити функцію і побудувати її графік

$$y=\left(x+1\right)e^{-2x}.$$

Розв'язання:

1. Область визначення функції: $x\in(-\infty;+\infty)$.

2. Точки перетину графіка з осями координат:

Oy: $x=0$, $y=\left(0+1\right)e^{-2\cdot 0}=1$, $A\left(0,1\right)$,

Ox: $y=0$, $\left(x+1\right)e^{-2x}=0$, $x=-1$, $B\left(-1,0\right)$.

3. Функція загального вигляду, тому що

$$y(-x)=(-x+1)e^{-2\cdot(-x)}=-(x-1)e^{2x}\neq\pm y(x)$$

неперіодична.

4. Для дослідження функції на монотонність та екстремуми знайдемо першу похідну функції і прирівняємо її до нуля:

$$y'=\left(\left(x+1\right)\cdot e^{-2x}\right)'=\left(x+1\right)'\cdot e^{-2x}+\left(x+1\right)\cdot\left(e^{-2x}\right)'=e^{-2x}+\left(x+1\right)\cdot\left(-2e^{-2x}\right)=$$

$$=e^{-2x}\left(1+\left(x+1\right)\cdot\left(-2\right)\right)=e^{-2x}\left(1-2x-2\right)=e^{-2x}\left(-2x-1\right),$$

$$e^{-2x}\left(-2x-1\right)=0,$$

$$x=-\frac{1}{2}\text{ – критична точка.}$$

x	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\uparrow$ зростає	$\frac{e}{2}$ max	$\downarrow$ спадає

Інтервали зростання функції: $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, інтервали спадання функції: $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty \right)$,

$$x_{\max} = -\frac{1}{2}, \quad y_{\max}\left(-\frac{1}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) e^{-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} e = \frac{e}{2},$$

$M_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{e}{2} \right)$ – точка графіка, що відповідає максимуму.

5. Для дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину знайдемо другу похідну функції і прирівняємо її до нуля:

$$y'' = \left(e^{-2x}(-2x-1) \right)' = \left(e^{-2x} \right)' \cdot (-2x-1) + e^{-2x} \cdot (-2x-1)' =$$

$$= -2e^{-2x} \cdot (-2x-1) + e^{-2x} \cdot (-2) =$$

$$= -2e^{-2x} \cdot (-2x-1+1) = -2e^{-2x} \cdot (-2x) = 4xe^{-2x},$$

$$4xe^{-2x} = 0, \quad x = 0, \quad e^{-2x} \neq 0,$$

$x = 0$ – критична точка.

	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	1	$\cup$

Інтервали опуклості: $x \in (-\infty; 0)$,

інтервали угнутості: $x \in (0; +\infty)$,

$x = 0, \quad y(0) = (0+1)e^{-2\cdot 0} = 1, \quad A(0,1)$ – точка перегину.

6. Функція визначена і неперервна на всій числовій осі, тобто вертикальних асимптот не має.

Для визначення похилих асимптот $y = kx + b$ необхідно знайти коефіцієнти k і b:

$$k_1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)e^{-2x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-2x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-2x} = \left(1+\frac{1}{-\infty}\right)\cdot e^{-2\cdot(-\infty)} = (1+0)\cdot e^{\infty} = e^{\infty} = \infty .$$

Отже, коли $x\to-\infty$, похилих асимптот немає.

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)e^{-2x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-2x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{e^{2x}} = \left(1+\frac{1}{+\infty}\right)\cdot\frac{1}{e^{2\cdot(+\infty)}} = (1+0)\cdot\frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(y(x)-kx\right) = \lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)'}{(e^{2x})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отже, коли $x\to+\infty$, $y=0$ – горизонтальна асимптота.

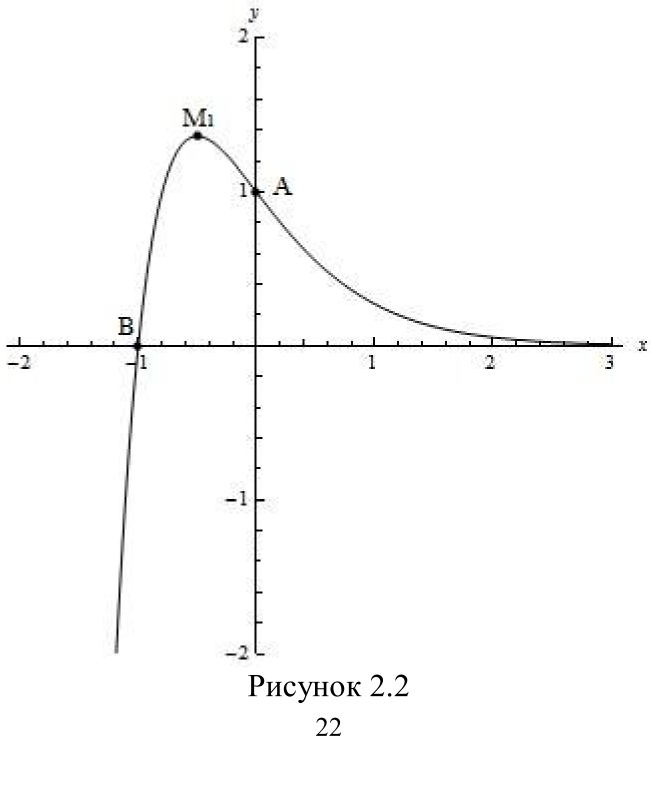


Рисунок 2.2

ЛЕКЦІЯ 3
ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ ТА НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ: ЗАМІНА ЗМІННОЇ ТА ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

3.1 Первісна функція та невизначений інтеграл

Основна задача диференціального числення – знаходження для функції $F(x)$ її похідної $F'(x)=f(x)$.

Обернена задача – знаходження функції $F(x)$ за її відомою похідною $f(x)$ – основна задача інтегрального числення.

Операції диференціювання та інтегрування взаємно обернені.

Первісною функцією для функції $f(x)$, визначеної на відрізку $[a,b]$, називається функція $F(x)$, яка визначена на тому самому відрізку і задовольняє умову

$$F'(x)=f(x) \text{ або } dF(x)=f(x)dx .$$

Якщо функція $f(x)$ має первісну, то вона має нескінченну множину первісних, до того ж всі вони відрізняються одна від одної тільки сталою величиною.

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ (або від виразу $f(x)dx$) називається сукупність усіх її первісних, тобто

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

де $\int$ – знак інтеграла, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, x – змінна інтегрування.

3.2 Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,\ a = const.$$

2. Інтеграл від алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі інтегралів від кожної функції окремо:

$$\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$$

3. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

4. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

5. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x).$$

6. Змінною інтегрування може бути не тільки незалежна змінна, а й довільна неперервно-диференційована функція:

якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

Зокрема,

$$\int f(ax+b)\,dx = \int f(ax+b)\cdot\frac{1}{a}d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

3.3 Таблиця інтегралів. Безпосереднє інтегрування

Основні невизначені інтеграли:

1) $\int 0\,du = C$,

2) $\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$,

2а) $\int du = u + C$,

2б) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$,

2в) $\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$,

3) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$,

4) $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1)$,

4а) $\int e^u\,du = e^u + C$,

5) $\int \sin u\,du = -\cos u + C$,

6) $\int \cos u\,du = \sin u + C$,

7) $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\ u + C$,

8) $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\ ctg\ u + C$,

9) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$ $(a > 0)$,

10) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln\left| u + \sqrt{u^2 + b} \right| + C$ $(b \neq 0)$,

11) $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\, arctg\dfrac{u}{a} + C$ $(a \neq 0)$,

12) $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u - a}{u + a}\right| + C$ $(a > 0)$.

Додаткові невизначені інтеграли:

1) $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left| tg\dfrac{u}{2} \right| + C$,

2) $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \right| + C$,

3) $\int tg\,u\ du = -\ln\left|\cos u\right| + C$,

4) $\int ctg\,u\ du = \ln\left|\sin u\right| + C$,

5) $\int sh\,u\ du = ch\,u + C$,

6) $\int ch\,u\ du = sh\,u + C$,

7) $\int \frac{du}{ch^2 u} = th\ u + C$,

8) $\int \frac{du}{sh^2 u} = -\ cth\ u + C$,

9) $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$

($a \neq 0$),

10) $\int \sqrt{a^2 - u^2}\ du = \frac{1}{a}u\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{u}{a} + C$

($a > 0$),

11) $\int e^{au}\sin bu\ du = \frac{-b\,e^{au}\cos bu + a\,e^{au}\sin bu}{a^2+b^2} + C$

($a \neq 0$, $b \neq 0$),

12) $\int e^{au}\cos bu\ du = \frac{a\,e^{au}\cos bu + b\,e^{au}\sin bu}{a^2+b^2} + C$

($a \neq 0$, $b \neq 0$).

Обчислення інтегралів за допомогою таблиці називається ***безпосереднім інтегруванням***.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int \frac{3-\sqrt{5+x^2}}{5+x^2}dx, \quad \text{б) } \int \frac{xe^x - x}{x}dx,$$

в) $\int\left(\sqrt{5x}+\sqrt[5]{8x}-3\sqrt[7]{x}\right)dx$, г) $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{(\sin x+1)^3}}$.

Розв'язання:

а) $$\int\frac{3-\sqrt{5+x^2}}{5+x^2}dx=\int\left(\frac{3}{5+x^2}-\frac{\sqrt{5+x^2}}{5+x^2}\right)dx=$$

$$=3\cdot\int\frac{dx}{5+x^2}-\int\frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}=3\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}-\ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}-\ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right|+C,$$

б) $$\int\frac{xe^x-x}{x}dx=\int\left(\frac{xe^x}{x}-\frac{x}{x}\right)dx=\int\left(e^x-1\right)dx=$$

$$=\int e^x dx-\int dx=e^x-x+C,$$

в) $$\int\left(\sqrt{5x}+\sqrt[5]{8x}-3\sqrt[7]{x}\right)dx=\int\sqrt{5x}dx+\int\sqrt[5]{8x}dx-\int 3\sqrt[7]{x}dx=$$

$$=\sqrt{5}\int x^{\frac{1}{2}}dx+\sqrt[5]{8}\int x^{\frac{1}{5}}dx-3\int x^{\frac{1}{7}}dx=\sqrt{5}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\sqrt[5]{8}\,\frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}-3\frac{x^{\frac{8}{7}}}{\frac{8}{7}}+C=$$

$$=\sqrt{5}\,\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+\sqrt[5]{8}\,\frac{5\sqrt[5]{x^6}}{6}-3\frac{7\sqrt[7]{x^8}}{8}+C=\frac{2\sqrt{5x^3}}{3}+\frac{5\sqrt[5]{8x^6}}{6}-\frac{21\sqrt[7]{x^8}}{8}+C,$$

г) $$\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{(\sin x+1)^3}}=\int\frac{d(\sin x+1)}{\sqrt{(\sin x+1)^3}}=\int(\sin x+1)^{-\frac{3}{2}}d(\sin x+1)=$$

$$=\frac{(\sin x+1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{\sqrt{\sin x+1}}+C.$$

3.4 Метод заміни змінної

Якщо інтеграл $\int f(x)dx$ не можна обчислити безпосередньо, то за допомогою введення нової незалежної змінної зазвичай вдається перетворити підінтегральний вираз $f(x)dx$. При цьому інтеграл зводиться до табличного або до такого, який можна звести до табличного.

1. Незалежну змінну замінюють за формулою

$$x=\varphi(t), \tag{3.1}$$

де $\varphi(t)$ – диференційована функція.

Потім знаходять $dx=\varphi'(t)dt$, а інтеграл $\int f(x)dx$ приводять до вигляду $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$. У результаті інтегрування отримаємо функцію незалежної змінної t. Для того, щоб повернутися до змінної x, необхідно за рівнянням (3.1) виразити t через x і підставити в знайдену функцію.

Приклад 2. Знайти інтеграл:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

Розв'язання:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\begin{vmatrix} t=1+\sqrt{x} & \sqrt{x}=t-1 \\ x=(t-1)^2 & dx=2(t-1)dt \end{vmatrix}=\int\frac{2(t-1)dt}{t}=$$

$$=2\int\left(\frac{t}{t}-\frac{1}{t}\right)dt=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=2\left(\int dt-\int\frac{dt}{t}\right)=2\left(t-\ln|t|\right)+C=$$

$$=2\left(1+\sqrt{x}-\ln\left|1+\sqrt{x}\right|\right)+C.$$

2. Застосовують підстановку

$$\psi(x)=t. \tag{3.2}$$

Із рівняння (3.2) знаходять dt. Підінтегральний вираз замінюють:

$$f(x)dx=g(t)dt.$$

Після інтегрування отримаємо функцію змінної t. Для того щоб повернутися до змінної x, необхідно в знайдену функцію підставити $\psi(x)$ замість t.

Таку заміну доцільно використовувати, якщо підінтегральна функція є добутком двох множників, один із яких залежить від деякої функції $\psi(x)$, а другий – похідна $\psi(x)$ (з точністю до сталого множника).

Приклад 3. Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int \cos^3 2x \sin 2x dx , \quad \text{б) } \int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}} .$$

Розв'язання:

$$\text{а) } \int \cos^3 2x \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos 2x \\ dt = -2\sin 2x dx \\ \dfrac{dt}{-2} = \sin 2x dx \end{array} \right| = \int t^3 \frac{dt}{-2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int t^3 dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + C = -\frac{t^4}{8} + C = -\frac{\cos^4 2x}{8} + C ,$$

$$\text{б) } \int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 1+2x^2 \\ dt = 4xdx \\ \dfrac{dt}{4} = xdx \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{4}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{t} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{t}}{2} + C = \frac{\sqrt{1+2x^2}}{2} + C .$$

3.5 Метод інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – дві неперервні функції, які мають неперервні похідні. Диференціал їх добутку виглядає так: $d(uv) = vdu + udv$.

Проінтегруємо цей диференціал, отримаємо формулу інтегрування частинами:

$$\int d\left(uv\right)=\int vdu+\int udv\,,$$

$$uv=\int vdu+\int udv\,,$$

$$\int udv=uv-\int vdu\,.$$

Інтегрування частинами застосовується, якщо отриманий інтеграл $\int vdu$ простіший або подібний до заданого $\int udv$. Насамперед необхідно встановити, яка функція приймається за u і що відноситься до dv. Потім за допомогою диференціювання u знаходять du, а за відомим dv за допомогою інтегрування визначають v. Надамо рекомендації щодо вибору u:

1. $\displaystyle\int \underbrace{P_n\left(x\right)}_{u}\underbrace{\begin{matrix} e^{ax}dx \\ \sin axdx \\ \cos axdx \end{matrix}}_{dv}$,

де $P_n\left(x\right)$ – многочлен n-ого степеня (1, x, x^2, $2x+3$,...).

2. $\displaystyle\int \underbrace{\begin{matrix} \ln ax \\ \arcsin ax \\ \arccos ax \\ \mathrm{arctg}\, ax \\ \mathrm{arcctg}\, ax \end{matrix}}_{u}\cdot\underbrace{P_n\left(x\right)dx}_{dv}$.

3. $\displaystyle\int e^{ax}\begin{matrix} \cos bx \\ \sin bx \end{matrix}dx$ – за u обирається будь-яка функція, $\displaystyle\int \underbrace{\begin{matrix} \cos \ln x \\ \sin \ln x \end{matrix}}_{u}\underbrace{dx}_{dv}$. Після дворазового застосування формули інтегрування частинами отримаємо рівняння відносно невідомого інтеграла, розв’язуючи яке знаходимо значення шуканого інтеграла.

Приклад 4. Знайти інтеграли:

а) $\int x\sin xdx$, б) $\displaystyle\int \frac{\ln xdx}{x^4}$, в) $\int \cos\left(\ln x\right)dx$.

Розв’язання:

$$\text{а) } \int x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= x\cdot(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x +$$

$$+\sin x + C,$$

$$\text{б) } \int \frac{\ln x dx}{x^4} = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = \dfrac{dx}{x^4} & v = \int \dfrac{dx}{x^4} = \int x^{-4}dx = \dfrac{x^{-3}}{-3} = -\dfrac{1}{3x^3} \end{vmatrix} =$$

$$= \ln x\cdot\left(-\frac{1}{3x^3}\right) - \int\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{3x^3} + \frac{1}{3}\cdot\int\frac{dx}{x^4} = -\frac{\ln x}{3x^3} +$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3x^3}\right) + C = -\frac{\ln x}{3x^3} - \frac{1}{9x^3} + C,$$

$$\text{в) } \int \cos(\ln x)\,dx = \begin{vmatrix} u = \cos(\ln x) & du = -\sin(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{vmatrix} =$$

$$= \cos(\ln x)\cdot x - \int x\cdot\left(-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx\right) = \cos(\ln x)\cdot x +$$

$$+\int \sin(\ln x)\,dx = \begin{vmatrix} u = \sin(\ln x) & du = \cos(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\cdot x - \int x\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx = x\cos(\ln x) +$$

$$+x\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)\,dx.$$

Випишемо рівність із заданого інтеграла і отриманого результату, із якої виразимо шуканий інтеграл:

$$\int\cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)\,dx,$$

$$\int\cos(\ln x)\,dx + \int\cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x),$$

$$2\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x),$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)}{2} + C,$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right) + C.$$

ЛЕКЦІЯ 4
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ПЛОЩА ПЛОСКОЇ ФІГУРИ

4.1 Означення й властивості визначеного інтегралу. Формула Ньютона – Лейбниця

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n довільних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. На кожному елементарному відрізку $[x_{k-1}, x_k]$ оберемо довільну точку c_k і знайдемо довжину кожного такого відрізка $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називається сума вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називається границя інтегральної суми за умови, що довжина найбільшого із елементарних відрізків прямує до нуля:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

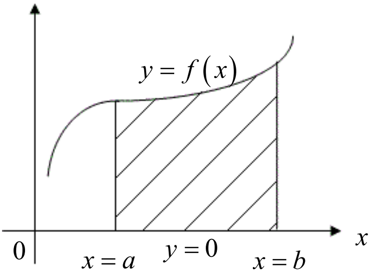


Рисунок 4.1

Якщо $f(x)>0$ на $[a,b]$, то визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ (із геометричної точки зору) дорівнює площі ***криволінійної трапеції*** – фігури, обмеженої лініями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ (рис. 4.1).

Основні властивості визначеного інтеграла

1. $\int\limits_b^a f(x)dx=-\int\limits_a^b f(x)dx$.

2. $\int\limits_a^a f(x)dx=0$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$.

4. $\int\limits_a^b \left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx=\int\limits_a^b f_1(x)dx\pm\int\limits_a^b f_2(x)dx$.

5. $\int\limits_a^b C\cdot f(x)dx=C\cdot\int\limits_a^b f(x)dx$, $C=const$.

6. Якщо $f(x)$ – непарна функція, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx=0$.

7. Якщо $f(x)$ – парна функція, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx$.

8. Оцінка визначеного інтеграла: якщо $m\le f(x)\le M$ на $[a,b]$, то $m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

Теорема (Ньютона – Лейбниця). *Нехай функція* $y=f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$ *і* $F(x)$ *– деяка її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції* $y=f(x)$ *на відрізку* $[a,b]$ *дорівнює приросту первісної* $F(x)$ *на цьому відрізку:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$ – ***формула Ньютона – Лейбниця***.

При обчисленні визначеного інтеграла застосовують всі відомі методи знаходження невизначеного інтеграла.

Приклад 1. Обчислити інтеграли:

а) $\int_1^9 \frac{4^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int_{-\pi/2}^{0} x\cos x dx$, в) $\int_0^{\pi/4}\sin^3 2x dx$.

Розв'язання:

а) Обчислимо інтеграл за допомогою заміни змінної:

$$\int_1^9 \frac{4^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{lll} t=\sqrt{x} & dt=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}} & 2dt=\dfrac{dx}{\sqrt{x}} \\ t_1=\sqrt{1}=1 & t_2=\sqrt{9}=3 & \end{array} \right| = \int_1^3 4^t\cdot 2dt = 2\cdot\int_1^3 4^t dt =$$

$$=2\cdot\frac{4^t}{\ln 4}\Big|_1^3 = 2\cdot\left(\frac{4^3}{\ln 4}-\frac{4^1}{\ln 4}\right) = 2\cdot\left(\frac{64}{\ln 4}-\frac{4}{\ln 4}\right) = \frac{128}{\ln 4}-\frac{8}{\ln 4}=\frac{120}{\ln 4}.$$

б) Обчислимо інтеграл за допомогою метода інтегрування частинами $\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$:

$$\int_{-\pi/2}^{0} x\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u=x & du=dx \\ dv=\cos x dx & v=\int\cos x dx=\sin x \end{array} \right| = x\cdot\sin x\Big|_{-\pi/2}^{0} -$$

$$-\int_{-\pi/2}^{0}\sin x dx = 0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\Big|_{-\pi/2}^{0} = -\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}+$$

$$+\cos 0-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\cdot 1+1-0 = -\frac{\pi}{2}+1 = \frac{-\pi+2}{2}.$$

в)

$$\int_{0}^{\pi/4}\sin^3 2x dx = \int_{0}^{\pi/4}\sin^2 2x\cdot\sin 2x dx = \int_{0}^{\pi/4}\left(1-\cos^2 2x\right)\cdot\sin 2x dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} t=\cos 2x \quad dt=-2\sin 2x dx \\ \dfrac{dt}{-2}=\sin 2x dx \\ t_1=\cos 0=1 \quad t_2=\cos\dfrac{\pi}{2}=0 \end{array}\right| = \int_{1}^{0}\left(1-t^2\right)\cdot\frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2}\cdot\int_{1}^{0}\left(1-t^2\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\int_{1}^{0}dt+\frac{1}{2}\cdot\int_{1}^{0}t^2\cdot dt = -\frac{1}{2}\cdot t\Big|_{1}^{0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_{1}^{0} = -\frac{1}{2}\cdot(0-1)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{0^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

4.2 Обчислення площі плоскої фігури

Площа криволінійної трапеції, обмежена кривою $y = y(x) \ge 0$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком $[a,b]$ осі Ox, обчислюється за формулою:

$$S = \int_{a}^{b} y dx.$$

Площа криволінійної трапеції, обмежена кривою $x = x(y) \ge 0$, прямими $y = c$, $y = d$ і відрізком $[c,d]$ осі Oy, обчислюється за формулою:

$$S = \int_{c}^{d} x dy.$$

Площа фігури, обмежена кривими $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ ($y_1(x) \le y_2(x)$) та прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx.$$

Площа фігури, обмежена кривими $x_1 = x_1(y)$ і $x_2 = x_2(y)$ ($x_1(y) \le x_2(y)$) та прямими $y = c$ і $y = d$, обчислюється за формулою:

$$S = \int_c^d (x_2 - x_1)\,dy.$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмежену параболою і прямою: $y = -x^2 - 6x - 5$, $y = -x - 5$.

Розв'язання:

Для побудови параболи знайдемо координати її вершини і точки перетину з осями координат.

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\cdot(-1)} = -\frac{6}{2} = -3,$$

$$y_в(-3) = -(-3)^2 - 6\cdot(-3) - 5 = -9 + 18 - 5 = 4.$$

Тобто вершина параболи в точці $(-3, 4)$.

Точки перетину параболи з віссю Ox: $y = 0$,

$$-x^2 - 6x - 5 = 0,$$

$$D = (-6)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-5) = 36 - 20 = 16,$$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{16}}{2\cdot(-1)} = \frac{6+4}{-2} = \frac{10}{-2} = -5,$$

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{16}}{2\cdot(-1)} = \frac{6-4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1,$$

тобто точки $(-5;0)$, $(-1;0)$.

Точки перетину параболи з віссю Oy: $x = 0$, $y = -0^2 - 6 \cdot 0 - 5 = -5$, тобто точка $(0;-5)$.

Пряму $y = -x - 5$ будуємо за двома точками

x	-3	-2
y	-2	-3

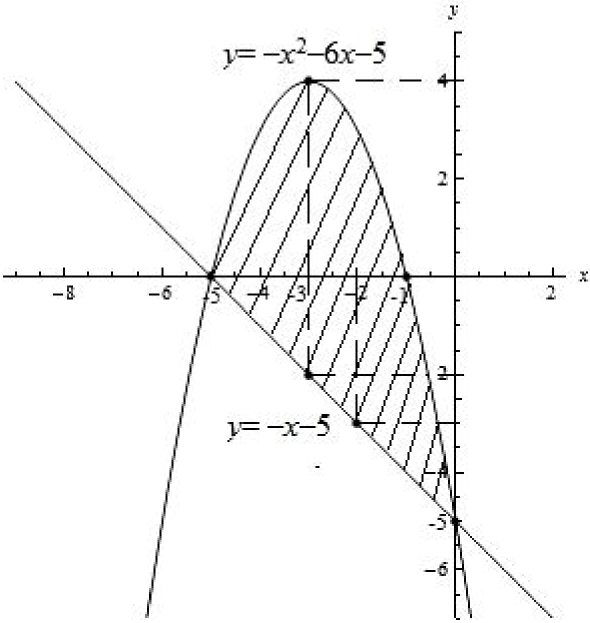


Рисунок 4.2

Знайдемо точки перетину параболи і прямої, розв’язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 6x - 5 \\ y = -x - 5 \end{cases}, \quad -x^2 - 6x - 5 = -x - 5,$$

$$x^2 + 5x = 0, \quad x(x+5) = 0,$$

$$x = 0, \quad x = -5.$$

Використаємо формулу $S=\int\limits_a^b\left(y_2-y_1\right)dx$. Обчислимо шукану площу при $y_1\left(x\right)=-x-5$, $y_2\left(x\right)=-x^2-6x-5$, $a=-5$, $b=0$:

$$S=\int\limits_{-5}^{0}\left(-x^2-6x-5-\left(-x-5\right)\right)dx=\int\limits_{-5}^{0}\left(-x^2-6x-5+x+5\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-5}^{0}\left(-x^2-5x\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-5\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-5}^{0}=-\frac{0^3}{3}-5\cdot\frac{0^2}{2}-$$

$$-\left(-\frac{\left(-5\right)^3}{3}-5\cdot\frac{\left(-5\right)^2}{2}\right)=\frac{-125}{3}+\frac{125}{2}=\frac{-250+375}{6}=\frac{125}{6}\text{ (кв. од.)}$$

Приклад 3. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $xy=9$, $y=x$, $y=9$.

Розв'язання:

Побудуємо задані лінії (рис. 4.3):

$xy=9$ – гіпербола, що проходить через точки $(1,9)$, $(9,1)$, $(-1,-9)$, $(-9,-1)$,

$y=x$ – пряма, що проходить через точки $\left(0,0\right)$, $\left(1,1\right)$,

$y=9$ – пряма, паралельна осі Ox.

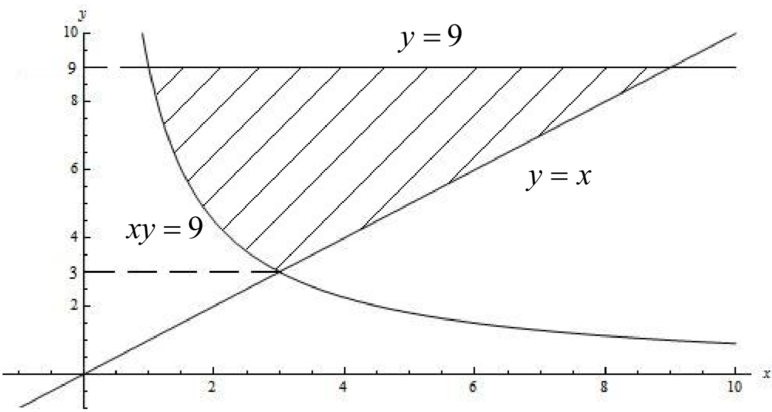


Рисунок 4.3

Знайдемо точки перетину ліній $xy=9$, $y=x$:

$$\begin{cases} xy=9; \\ y=x, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=9; \\ y=x, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm 3; \\ y=\pm 3. \end{cases}$$

Використаємо формулу $S=\int_c^d (x_2-x_1)\,dy$. Обчислимо шукану площу при $x_1(y)=\frac{9}{y}$, $x_2(y)=y$, $c=3$, $d=9$:

$$S=\int_3^9 \left(y-\frac{9}{y}\right)dy=\int_3^9 y\,dy-9\cdot\int_3^9 \frac{dy}{y}=\left.\left(\frac{y^2}{2}-9\ln|y|\right)\right|_3^9=$$

$$=\frac{9^2}{2}-9\ln|9|-\left(\frac{3^2}{2}-9\ln|3|\right)=\frac{81}{2}-9\ln 9-\frac{9}{2}+9\ln 3=$$

$$=\frac{72}{2}+9\cdot(\ln 3-\ln 9)=36+9\cdot\ln\frac{3}{9}=36+9\ln\frac{1}{3}$$

ЛЕКЦІЯ 5
ПОНЯТТЯ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

5.1 Загальні відомості

Диференціальним рівнянням називається співвідношення, яке зв’язує незалежну змінну, невідому функцію та її похідні (або диференціали).

Якщо невідома функція, яка входить у диференціальне рівняння, залежить тільки від однієї незалежної змінної, то диференціальне рівняння називається ***звичайним***.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної (або диференціала), що входить у рівняння.

Звичайне диференціальне рівняння порядку n у загальному випадку виглядає так:

$$f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0,$$

де x – незалежна змінна, y – невідома функція, а $y', y'', ..., y^{(n)}$ – її похідні.

Розв'язком або ***інтегралом*** диференціального рівняння називається довільна функція $y = y(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його на тотожність.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називається функція $y = y\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right)$, що містить n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ і задовольняє диференціальне рівняння при будь-яких допустимих значеннях $C_1, C_2, ..., C_n$.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який одержуємо із загального розв'язку при конкретних фіксованих значеннях довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$.

Для знаходження конкретних значень довільних сталих, які входять у загальний розв'язок, зазвичай використовуються:

1) ***початкові умови*** – відомі значення функції та її похідних в конкретній точці $x = x_0$,

2) ***крайові (граничні) умови*** – відомі значення функції та її похідних у декількох різних точках.

Початкових або крайових умов має бути стільки, скільки довільних сталих.

Диференціальне рівняння з початковими умовами називається ***початковою задачею*** (***задачею Коші***).

Диференціальне рівняння разом з крайовими умовами називається ***крайовою*** (***граничною***) ***задачею***.

5.2 Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння першого порядку називається ***рівнянням з відокремлюваними змінними***, якщо його можна подати так

$$y' = f(x)g(y) \tag{5.1}$$

або

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0\ . \tag{5.2}$$

Розділивши обидві частини рівняння (5.1) на $g(y)$ і помноживши їх на dx, отримаємо:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)\,, \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx\,.$$

Звідки, інтегруючи, отримаємо загальний інтеграл рівняння (5.1) у вигляді

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C\ .$$

Ця методика називається ***відокремленням змінних***.

Аналогічно, розділивши обидві частини рівняння (5.2) на $f_2(x)g_1(y)$ і інтегруючи, отримаємо загальний інтеграл (5.2) у вигляді

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C\ .$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

а) $y' = -\dfrac{y}{x^2}$, б) $\left(1+y^2\right)dx - \sqrt{x}dy = 0$, в) $y\left(1+x^2\right)y' = \left(1+y^2\right)x$.

Розв'язання:

а) Рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2}\,.$$

Звідки, розділяючи змінні, отримаємо:

$$dy = -\frac{y}{x^2}dx, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2},$$

і, отже,

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2},$$

$$\ln|y| = -\left(-\frac{1}{x}\right) + C, \quad \ln|y| = \frac{1}{x} + C.$$

б) Виконаємо наступні послідовні перетворення для відокремлення змінних:

$$\left(1+y^2\right)dx - \sqrt{x}dy = 0, \quad \left(1+y^2\right)dx = \sqrt{x}dy, \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння і отримаємо загальний розв'язок:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dy}{1+y^2}, \quad 2\sqrt{x} = arctgy + C.$$

в) Відокремимо змінні, виконавши такі послідовні перетворення:

$$y\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = \left(1+y^2\right)x, \quad y\left(1+x^2\right)dy = \left(1+y^2\right)xdx,$$

$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Обидва інтеграли можна обчислити, замінивши змінну:

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \left| \begin{array}{l} t = 1+y^2 \\ dt = 2ydy \\ dt/2 = ydy \end{array} \right| = \int \frac{dt/2}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|.$$

Тоді

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + \frac{1}{2}\ln C,$$

де довільна константа $\ln C$ обирається в логарифмічній формі. Використаємо властивості логарифмів, і отримаємо загальний розв'язок:

$$\ln\left|1+y^2\right| = \ln\left|1+x^2\right| + \ln C, \quad \ln\left|1+y^2\right| = \ln\left|C\left(1+x^2\right)\right|,$$

$$1+y^2 = C\left(1+x^2\right).$$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

а) $x^2 y' + y^2 = 0$, $y(-1) = 1$, б) $x\sqrt{1+y^2} + y \cdot y'\sqrt{1+x^2} = 0$, $y(0) = 0$.

Розв'язання:

а) Рівняння можна записати у вигляді

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$$

Розділяючи змінні, отримаємо

$$x^2 \frac{dy}{dx} = -y^2, \quad x^2 dy = -y^2 dx, \quad \frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{x^2},$$

отже, загальним розв'язком є

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{x^2} + C, \quad -\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + C, \quad \frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C,$$

$$\frac{1}{y} = \frac{-1+Cx}{x}, \quad y = \frac{x}{Cx-1}.$$

Використавши задану початкову умову $y(-1) = 1$, отримаємо:

$$1=\frac{-1}{C\cdot(-1)-1}, \quad C\cdot(-1)-1=-1,$$

$$-C-1=-1, \quad C=0,$$

отже, шуканим частинним розв'язком є

$$y=\frac{x}{0\cdot x-1}, \quad y=-x.$$

б) Виконаємо послідовні перетворення:

$$x\sqrt{1+y^2}+y\cdot y'\sqrt{1+x^2}=0, \quad x\sqrt{1+y^2}=-y\cdot y'\sqrt{1+x^2},$$

$$x\sqrt{1+y^2}=-y\cdot\frac{dy}{dx}\sqrt{1+x^2}, \quad x\sqrt{1+y^2}dx=-y\cdot\sqrt{1+x^2}dy,$$

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=-\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$1)\ \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\left|\begin{array}{l} t=1+x^2 \\ dt=2xdx \\ dt/2=xdx \end{array}\right|=\int\frac{dt/2}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}=$$

$$=\sqrt{t}=\sqrt{1+x^2},$$

$$2)\int\frac{-ydy}{\sqrt{1+y^2}}=\left|\begin{array}{l} t=1+y^2 \\ dt=2ydy \\ dt/2=ydy \end{array}\right|=\int\frac{-dt/2}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}=$$

$$=-\sqrt{t}=-\sqrt{1+y^2}.$$

Прирівнявши результати інтегрування, отримаємо загальний розв'язок:

$$\sqrt{1+x^2}=-\sqrt{1+y^2}+C,$$

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C.$$

Для визначення константи C використаємо початкову умову $y(0)=0$:

$$\sqrt{1+0^2}+\sqrt{1+0^2}=C,$$
$$1+1=C,\quad C=2.$$

Підставимо знайдену константу C в загальний розв'язок і отримаємо частинний розв'язок: $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=2$.

ЛЕКЦІЯ 6
ОДНОРІДНІ ТА ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

6.1 Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

називається ***однорідним***, якщо $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ є однорідними функціями одного порядку (функції не змінюються при заміні x на kx, y на ky і, відповідно, dx на kdx, dy на kdy, y' на y'). Це рівняння можна звести до такого вигляду:

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

підставивши $y=tx$, де t є новою невідомою функцією; воно перетворюється на рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}.$$

Розв'язання:

Виконаємо заміну:

$$y=tx,\ y'=t'x+t.$$

Тоді

$$x\left(t'x+t\right)=tx+\sqrt{x^2+\left(tx\right)^2},\quad x^2t'+tx=tx+\sqrt{x^2+t^2x^2},$$

$$x^2t'+tx=tx+\sqrt{x^2\left(1+t^2\right)},\quad x^2t'+tx=tx+x\sqrt{1+t^2},$$

$$x^2t' = tx + x\sqrt{1+t^2} - tx\,, \quad x^2t' = x\sqrt{1+t^2}\,.$$

Після перетворень отримано рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$x^2\frac{dt}{dx} = x\sqrt{1+t^2}\,, \quad x^2dt = x\sqrt{1+t^2}\,dx\,,$$

$$\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{xdx}{x^2}, \quad \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int\frac{dx}{x}, \quad \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| = \ln|x| + \ln C\,.$$

$$\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| = \ln|Cx|, \quad t+\sqrt{1+t^2} = Cx\,.$$

Замінюючи t на $\dfrac{y}{x}$, отримаємо загальний розв'язок рівняння:

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx\,, \quad \frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = Cx\,, \quad \frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = Cx\,,$$

$$\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = Cx, \quad y+\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2\,.$$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y' = 4+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2, \; y(1) = 2\,.$$

Розв'язання:

Виконаємо заміну:

$$y = tx\,, \; y' = t'x + t\,.$$

Тоді

$$t'x + t = 4+\frac{tx}{x}+\left(\frac{tx}{x}\right)^2, \quad t'x+t = 4+t+t^2,$$

$$t'x = 4+t+t^2-t\,, \quad t'x = 4+t^2\,.$$

Після перетворень отримано рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x\frac{dt}{dx}=4+t^2,\quad xdt=\left(4+t^2\right)dx,\quad \frac{dt}{4+t^2}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{4+u^2}=\int\frac{dx}{x},\quad \frac{1}{2}arctg\frac{u}{2}=\ln\left|x\right|+\frac{C}{2},\quad arctg\frac{u}{2}=2\ln\left|x\right|+C.$$

Замінюючи t на $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний розв'язок рівняння:

$$arctg\frac{\frac{y}{x}}{2}=2\ln\left|x\right|+C,\quad arctg\frac{y}{2x}=2\ln\left|x\right|+C.$$

Підставивши початкову умову $y\left(1\right)=2$ у загальний розв'язок, отримаємо:

$$arctg\frac{2}{2\cdot 1}=2\ln\left|1\right|+C,\quad C=arctg1=\frac{\pi}{4}.$$

Таким чином, частинним розв'язком є

$$arctg\frac{y}{2x}=2\ln\left|x\right|+\frac{\pi}{4}.$$

6.2 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння вигляду

$$y'+p(x)y=q(x)$$

називається ***лінійним***.

Розв'язок шукають у вигляді добутку

$$y=uv,$$

де $v=v(x)$ – будь-яка функція, яка задовольняє «скорочене» рівняння $v'+f(x)v=0$ (в якості $v(x)$ приймається частинний розв'язок $v=e^{-F}$, де $F=\int f(x)dx$). У результаті отримаємо таке рівняння з відокремлюваними змінними для $u=u(x)$: $v(x)u'=g(x)$. Інтегрування його дає загальний розв'язок:

$$y(x)=e^{-F}\left(\int e^{F}g(x)dx+C\right),\ F=\int f(x)dx,$$

де C – довільна константа.

Диференціальне рівняння вигляду

$$y'+p(x)y=q(x)y^{n},\ n\neq 0;1,$$

називається ***рівнянням Бернуллі***.

Його можна розв'язати так само, як і лінійне рівняння.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy'+y=x+1.$$

Розв'язання:

Задано лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Підставивши

$$y=uv,\ y'=u'v+uv',$$

отримаємо:

$$x\left(u'v+uv'\right)+uv=x+1,\quad xu'v+xuv'+uv=x+1,$$

$$xu'v+u\left(xv'+v\right)=x+1.$$

Виберемо функцію $v(x)$ так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тоді

$$\begin{cases} xv'+v=0; \\ xu'v=x+1. \end{cases}$$

Спочатку розв'яжемо рівняння $xv'+v=0$. Це рівняння з відокремлюваними змінними, отже:

$$x\frac{dv}{dx}+v=0,\quad x\frac{dv}{dx}=-v,\quad xdv=-vdx,$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x},\quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},\quad \ln|v|=-\ln|x|,$$

$$\ln|v| = \ln|x|^{-1}, \quad \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Далі розв'яжемо рівняння $xu'v = x + 1$, підставивши $v = \frac{1}{x}$. Це також рівняння з відокремлюваними змінними, отже:

$$xu'\frac{1}{x} = x + 1, \quad u' = x + 1, \quad u = \int(x+1)\,dx,$$

$$u = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Таким чином, загальним розв'язком рівняння є

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)\cdot\frac{1}{x}, \quad y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C}{x}.$$

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$xy' - y = x^2\sin x, \quad y(\pi) = \pi.$$

Розв'язання:

Задано лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Знайдемо його загальний розв'язок. Припустимо, що

$$y = uv, \; y' = u'v + uv',$$

тоді

$$x(u'v + uv') - uv = x^2\sin x, \quad xu'v + xuv' - uv = x^2\sin x,$$

$$xu'v + u(xv' - v) = x^2\sin x.$$

Виберемо функцію $v(x)$ так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тоді

$$\begin{cases} xv' - v = 0; \\ xu'v = x^2\sin x. \end{cases}$$

Спочатку розв'яжемо рівняння $xv' - v = 0$. Це рівняння з відокремлюваними змінними, отже,

$$x\frac{dv}{dx}=v,\quad xdv=vdx,\quad \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x},\quad \ln|v|=\ln|x|,\quad v=x.$$

Далі розв'яжемо рівняння $xu'v=x^2\sin x$, підставивши $v=x$. Це також рівняння з відокремлюваними змінними, отже:

$$xu'x=x^2\sin x,\quad u'=\sin x,$$

$$u=\int\sin xdx=-\cos x+C.$$

Таким чином, загальним розв'язком рівняння є

$$y=uv=\left(-\cos x+C\right)\cdot x.$$

Використаємо початкову умову $y(\pi)=\pi$:

$$\pi=\left(-\cos\pi+C\right)\cdot\pi,\quad \pi=\left(-(-1)+C\right)\cdot\pi,$$

$$1+C=1,\quad C=0.$$

Отже, частинним розв'язком рівняння є

$$y=\left(-\cos x+0\right)\cdot x,$$

$$y=-x\cos x.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'+\frac{y}{x}=-xy^2.$$

Розв'язання:

Задано рівняння Бернуллі. Припустимо, що

$$y=uv,\ y'=u'v+uv',$$

тоді

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=-x(uv)^2,\quad u'v+uv'+\frac{uv}{x}=-xu^2v^2,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = -xu^2v^2 .$$

Виберемо функцію $v(x)$ так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тоді

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0; \\ u'v = -xu^2v^2. \end{cases}$$

Спочатку розв'яжемо рівняння $v' + \frac{v}{x} = 0$. Це рівняння з відокремлюваними змінними, отже:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0 , \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} , \quad dv = -\frac{v}{x}dx ,$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} , \quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x} , \quad \ln|v| = -\ln|x| ,$$

$$\ln|v| = \ln\left|x^{-1}\right| , \quad v = x^{-1} , \quad v = \frac{1}{x} .$$

Далі розв'яжемо рівняння $u'v = -xu^2v^2$, підставивши $v = \frac{1}{x}$. Це також рівняння з відокремлюваними змінними, отже:

$$u' \cdot \frac{1}{x} = -xu^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 , \quad u' \cdot \frac{1}{x} = -xu^2 \cdot \frac{1}{x^2} , \quad u' \cdot \frac{1}{x} = -\frac{u^2}{x} ,$$

$$u' = -u^2 , \quad \frac{du}{dx} = -u^2 , \quad du = -u^2dx ,$$

$$\frac{du}{u^2} = -dx , \quad \int\frac{du}{u^2} = -\int dx , \quad -\frac{1}{u} = -x + C ,$$

$$\frac{1}{u} = x + C , \quad u = \frac{1}{x + C} .$$

Таким чином, загальним розв'язком рівняння є

$$y = uv = \frac{1}{x+C} \cdot \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{x^2 + Cx}.$$

ЛЕКЦІЯ 7
ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

7.1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння вигляду

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{7.1}$$

де a, b, c – дійсні числа, називається ***лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку(далі – ЛОДР) зі сталими коефіцієнтами***.

Для знаходження частинних розв'язків рівняння (7.1) складають ***характеристичне рівняння***

$$ak^2 + bk + c = 0, \tag{7.2}$$

яке одержують із рівняння (7.1) шляхом заміни в ньому похідних шуканої функції відповідними степенями k, сама функція при цьому замінюється одиницею. Рівняння (7.2) завжди має два корені (серед яких можуть бути і рівні).

Розв'яжемо рівняння (7.2):

$$D = b^2 - 4ac, \quad k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}.$$

Загальний розв'язок рівняння (7.1) будується залежно від особливостей різновиду коренів рівняння (7.2):

1) якщо $D > 0$, $k_1 \neq k_2$, то $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$,

2) якщо $D = 0$, $k_1 = k_2 = k$, то $y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right)$,

3) якщо $D<0$, $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, то $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$.

Приклад 1. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } 9y''-12y'+4y=0, \quad \text{б) } y''+4y'+5y=0.$$

Розв'язання:

а) $9y''-12y'+4y=0$,

$$9k^2-12k+4=0,$$

$$D=\left(-12\right)^2-4\cdot 9\cdot 4=144-144=0,$$

$$k_{1,2}=\frac{-\left(-12\right)+\sqrt{0}}{2\cdot 9}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3},$$

$$y=C_1e^{\frac{2}{3}x}+C_2xe^{\frac{2}{3}x}.$$

б) $y''+4y'+5y=0$,

$$k^2+4k+5=0,$$

$$D=4^2-4\cdot 1\cdot 5=16-20=-4,$$

$$k_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm 2\sqrt{-1}}{2}=\frac{-4\pm 2i}{2}=-2\pm i,$$

$$y=e^{-2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right).$$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє задані початкові умови (розв'язати задачу Коші):

$$4y''+8y'=0; \quad y\left(0\right)=0, \quad y'\left(0\right)=1.$$

Розв'язання:

Знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$4k^2+8k=0, \quad 4k\left(k+2\right)=0,$$

$$k=0, \quad k=-2,$$

$$y=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{-2\cdot x},$$

$$y=C_1+C_2e^{-2x}.$$

Знайдемо похідну від загального розв'язку:

$$y'=\left(C_1+C_2e^{-2x}\right)'=0+C_2e^{-2x}\cdot\left(-2x\right)'=C_2e^{-2x}\cdot\left(-2\right)=-2C_2e^{-2x}.$$

Для визначення сталих C_1 і C_2 використаємо початкові умови $y(0)=0$, $y'(0)=1$:

$$\begin{cases}0=C_1+C_2e^{-2\cdot 0};\\ 1=-2C_2e^{-2\cdot 0},\end{cases} \quad \begin{cases}0=C_1+C_2\\ 1=-2C_2\end{cases}, \quad \begin{cases}C_1=-C_2\\ C_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}, \quad \begin{cases}C_1=\dfrac{1}{2}\\ C_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Підставимо знайдені сталі в загальний розв'язок і отримаємо частинний розв'язок диференціального рівняння (розв'язок задачі Коші):

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}.$$

7.2 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{7.3}$$

де p, q – дійсні числа, $f(x)$ – відома функція.

Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння виглядає так

$$y=y_0+\overline{y},$$

де y_0 – загальний розв'язок ЛОДР, $\overline{y}$ – частинний розв'язок ЛНДР.

Розглянемо випадок, коли права частина рівняння (7.3) – функція спеціального вигляду

$$f(x)=e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx\right),$$

де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – відповідно многочлени степенів n і m,

n і m – довільні невід'ємні цілі числа,

a і b – дійсні числа, із яких формується перевірочне число $z=a+bi$.

Тоді $\overline{y}$ шукаємо так:

$$\overline{y} = x^r e^{ax}\left(\overline{P}_l(x)\cos bx + \overline{Q}_l(x)\sin bx\right),$$

де $\overline{P}_l(x)$, $\overline{Q}_l(x)$ – многочлени степеня $l = \max\{n, m\}$ з невідомими коефіцієнтами, r – кратність кореня $z = a + bi$ в характеристичному рівнянні.

Розглянемо окремі випадки правої частини спеціального вигляду і відповідні форми частинного розв'язку $\overline{y}$.

Права частина $f(x)$		$\overline{y}$
$f(x) = P_n(x) =$ $= A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$, $z = 0$	$k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$	$\overline{y} = \overline{P}_n(x) =$ $= \overline{A}_0x^n + \overline{A}_1x^{n-1} + \ldots + \overline{A}_n$
	$k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$	$\overline{y} = x\overline{P}_n(x) =$ $= \overline{A}_0x^{n+1} + \overline{A}_1x^n + \ldots + \overline{A}_nx$
$f(x) = Ae^{ax}$, $z = a$	$k_1 \neq a$, $k_2 \neq a$	$\overline{y} = \overline{A}e^{ax}$
	$k_1 = a$, $k_2 \neq a$	$\overline{y} = \overline{A}xe^{ax}$
	$k_1 = k_2 = a$	$\overline{y} = \overline{A}x^2e^{ax}$
$f(x) = P_n(x)e^{ax}$, $z = a$	$k_1 \neq a$, $k_2 \neq a$	$\overline{y} = \overline{P}_n(x)e^{ax}$
	$k_1 = a$, $k_2 \neq a$	$\overline{y} = \overline{P}_n(x)xe^{ax}$
	$k_1 = k_2 = a$	$\overline{y} = \overline{P}_n(x)x^2e^{ax}$
$f(x) = A\cos bx + B\sin bx$, $z = \pm bi$	$k_{1,2} \neq \pm bi$	$\overline{y} = \overline{A}\cos bx + \overline{B}\sin bx$
	$k_{1,2} = \pm bi$	$\overline{y} = x\left(\overline{A}\cos bx + \overline{B}\sin bx\right)$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів підставляємо $\overline{y}$ у ЛНДР і порівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x, e^{ax}, $\sin bx$, $\cos bx$.

Якщо права частина ЛНДР має вигляд $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

а) $y'' + 3y' + 2y = 1 - 2x$, б) $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$.

Розв'язання:

а) $y'' + 3y' + 2y = 1 - 2x$.

Знайдемо загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + 3y' + 2y = 0,$$

$$k^2 + 3k + 2 = 0,$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1,$$

$$k_1 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1, \quad k_2 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2,$$

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Права частина рівняння – $1-2x$ (многочлен першого степеня), тобто $z = 0 \neq k_{1,2}$, тому частинний розв’язок будемо шукати у вигляді $\overline{y} = Ax + B$.

Тоді

$$\overline{y}' = A; \quad \overline{y}'' = 0.$$

Підставимо частинний розв’язок і його похідні в рівняння, отримаємо

$$3A + 2\left(Ax + B\right) = 1 - 2x,$$

$$3A + 2Ax + 2B = 1 - 2x,$$

$$\begin{array}{c|c} x & 2A = -2 \\ x^0 & 3A + 2B = 1 \end{array}, \quad \begin{cases} 2A = -2 \\ 3A + 2B = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = -1 \\ 3 \cdot (-1) + 2B = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = -1 \\ 2B = 4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}.$$

Тоді частинний розв’язок набуває вигляду $\overline{y} = -x + 2$.

Загальний розв’язок рівняння:

$$y = y_0 + \overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - x + 2.$$

б) $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$.

Знайдемо загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + y = 0,$$

$$k^2 + 1 = 0,$$

$$k^2 = -1,$$

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i,$$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Права частина даного рівняння – $2\cos 4x + 3\sin 4x$, тобто $z = \pm 4i \neq k_{1,2}$, тому частинний розв'язок будемо шукати у вигляді $\overline{y} = A\cos 4x + B\sin 4x$.

Тоді

$$\overline{y}' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x; \quad \overline{y}'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x.$$

Підставимо частинний розв'язок і його похідні в рівняння, отримаємо

$$-16A\cos 4x - 16B\sin 4x + A\cos 4x + B\sin 4x = 2\cos 4x + 3\sin 4x,$$

$$-15A\cos 4x - 15B\sin 4x = 2\cos 4x + 3\sin 4x,$$

$$\begin{array}{l|l} \cos 4x & -15A = 2 \\ \sin 4x & -15B = 3 \end{array}, \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{2}{15} \\ B = -\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Тоді частинний розв'язок набуває вигляду

$$\overline{y} = -\frac{2}{15}\cos 4x - \frac{1}{5}\sin 4x.$$

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = y_0 + \overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{2}{15}\cos 4x - \frac{1}{5}\sin 4x.$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x}, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$$

Розв'язання:

Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + 2y' - 8y = 0,$$

$$k^2 + 2k - 8 = 0,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36,$$

$$k_1 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 6}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad k_2 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - 6}{2} = \frac{-8}{2} = -4,$$

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}.$$

Права частина рівняння – $(12x+20)e^{2x}$, тобто $z = 2 = k_1$, тому частинний розв’язок будемо шукати у вигляді

$$\overline{y} = x(Ax+B)e^{2x} = (Ax^2+Bx)e^{2x}.$$

Тоді

$$\overline{y}' = (Ax^2+Bx)' e^{2x} + (Ax^2+Bx)(e^{2x})' = (2Ax+B)e^{2x} + $$
$$+(Ax^2+Bx)\cdot 2e^{2x} = e^{2x}(2Ax+B+2Ax^2+2Bx),$$

$$\overline{y}'' = (e^{2x})'(2Ax+B+2Ax^2+2Bx) + e^{2x}(2Ax+B+2Ax^2+2Bx)' =$$
$$= 2e^{2x}(2Ax+B+2Ax^2+2Bx) + e^{2x}(2A+4Ax+2B) =$$
$$= e^{2x}(4Ax+2B+4Ax^2+4Bx+2A+4Ax+2B) =$$
$$= e^{2x}(8Ax+4B+4Ax^2+4Bx+2A).$$

Підставимо частинний розв’язок і його похідні в рівняння, отримаємо

$$e^{2x}(8Ax+4B+4Ax^2+4Bx+2A) + 2e^{2x}(2Ax+B+2Ax^2+2Bx) -$$
$$-8(Ax^2+Bx)e^{2x} = (12x+20)e^{2x},$$

$$8Ax+4B+4Ax^2+4Bx+2A+2\cdot(2Ax+B+2Ax^2+2Bx) -$$
$$-8(Ax^2+Bx) = 12x+20,$$

$$8Ax+4B+4Ax^2+4Bx+2A+4Ax+2B+4Ax^2+4Bx-8Ax^2 -$$
$$-8Bx = 12x+20,$$
$$12Ax+6B+2A = 12x+20,$$

$$\begin{array}{c|c} x & 12A = 12 \\ x^0 & 6B+2A = 20 \end{array}, \quad \begin{cases} A = 1 \\ 6B+2\cdot 1 = 20 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = 1 \\ 6B = 18 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \end{cases}.$$

Тоді частинний розв’язок набуває вигляду

$$\overline{y} = (x^2+3x)e^{2x}.$$

Загальний розв’язок рівняння

$$y = y_0 + \overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + (x^2+3x)e^{2x},$$

звідки

$$y' = C_1\left(e^{2x}\right)' + C_2\left(e^{-4x}\right)' + \left(x^2+3x\right)' e^{2x} + \left(x^2+3x\right)\cdot\left(e^{2x}\right)' =$$

$$= 2C_1e^{2x} - 4C_2e^{-4x} + \left(2x+3\right)e^{2x} + \left(x^2+3x\right)\cdot 2e^{2x}.$$

Із початкових умов знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{cases} 0 = C_1e^{2\cdot 0} + C_2e^{-4\cdot 0} + \left(0^2+3\cdot 0\right)e^{2\cdot 0} \\ 1 = 2C_1e^{2\cdot 0} - 4C_2e^{-4\cdot 0} + \left(2\cdot 0+3\right)e^{2\cdot 0} + \left(0^2+3\cdot 0\right)\cdot 2e^{2\cdot 0}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - 4C_2 + 3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 2\cdot\left(-C_2\right) - 4C_2 = 1-3, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ -6C_2 = -2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{3} \\ C_2 = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Шуканий розв'язок задачі Коші

$$y = -\frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-4x} + \left(x^2+3x\right)e^{2x}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – СПб. : Профессия, 2001. – 432 с.

2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2006. – 736 с.

3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі : у 2 кн. / За ред. Г. Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с. – Кн. 2 : Спеціальні розділи. – 368 с.

4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: у 2ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : АСТ, 2014. – Ч. 1: 303 с., Ч. 2: 415 с.

5. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях [Електронний ресурс] : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 – Будівництво, 6.050702 – Електромеханіка, 6.050701 – Електротехніка та електротехнології) / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – Ч. 2. – 141 с. – Режим доступу: http://eprints.kname.edu.ua/42486/, вільний. – (дата звернення :01.09.2020). – Назва з екрана.

6. Кузнецова Г.А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях. [Електронний ресурс] Навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2018. – 141 с. − Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/48450/, вільний. – (дата звернення : 01.09.2020). – Назва з екрана.

7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : для втузов : у 2 т. / Н. С. Пискунов. – [13-е изд.] – М. : Наука, 1985. – Том 1. – 432 с.

Навчальне видання

ЛАМТЮГОВА Світлана Миколаївна
СИТНИКОВА Юлія Валеріївна
КУЗНЕЦОВА Ганна Анатоліївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 101 – Екологія, 183 – Технології захисту навколишнього середовища, 206 – Садово-паркове господарство)

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*

Редактор *О. А. Норик*
Комп’ютерне верстання *С. М. Ламтюгова*

План 2020, поз. 65Л
Підп. до друку 04.06.2021. Формат 60 × 84/16.
Електронний документ. Ум. друк. арк. 3,5.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.