МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до проведення практичних занять, виконання самостійної та розрахунково-графічної робіт
із навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
МОДУЛЬ 2

*(для студентів 1 курсу всіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності
185 – Нафтогазова інженерія та технології)*

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2021

Методичні рекомендації до проведення практичних занять, виконання самостійної та розрахунково-графічної робіт із навчальної дисципліни «Вища математика». Модуль 2 (для студентів 1 курсу всіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія та технології) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. С. М. Ламтюгова. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2021. – 94 с.

Укладач канд. фіз.-мат. наук, доц. **С. М. Ламтюгова**

Рецензент

А. В. Якунін, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 1 від 31.08.2020.

Методичні рекомендації розроблені відповідно до навчального плану та програми дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 185 – Нафтогазова інженерія та технології і містять навчальний матеріал другого семестру. У методичних рекомендаціях розміщені теми практичних занять відповідно до робочої програми з посиланням на рекомендовану літературу; приклади розв’язання типових задач; питання та завдання для самостійної роботи.

З М І С Т

ВСТУП

Мета дисципліни – забезпечити належну фундаментальну математичну підготовку студентів та сформувати у них знання та вміння застосовувати її для аналізу різноманітних явищ з орієнтацією на сфери професійної діяльності. Завдання дисципліни – допомогти студентам засвоїти основи математичного апарату, необхідного для розв'язування теоретичних і практичних задач, виробити вміння та навички математичного дослідження прикладних об'єктів, навчити студентів самостійно вивчати наукові джерела з математики та її прикладних застосувань, сприяти розвитку логічного та алгоритмічного мислення.

Навчальний процес з дисципліни «Вища математика» для студентів факультету інженерних мереж та екології міст, що навчаються за спеціальністю 185 – Нафтогазова інженерія та технології триває три семестри на першому та другому курсах навчання. На лекціях викладається зміст, проводиться аналіз основних понять і методів вищої математики. На практичних заняттях студенти одержують пояснення теоретичних положень дисципліни, опановують основні методи, підходи та засоби розв'язання математичних задач.

Важливою формою засвоєння математичного апарату є самостійна робота студентів, місце і значення якої постійно зростає. Вона включає самостійне опрацювання теоретичного матеріалу низки тем, виконання домашніх завдань, проведення самоконтролю, творчі пошуки поза межами, передбаченими програмою дисципліни.

Основні форми самостійної роботи студентів:

– організаційно-методична робота в бібліотеці та в рамках інших інформаційних середовищ, конспектування навчального матеріалу згідно з тематичним планом програми дисципліни, опрацювання підручників і посібників, довідників і словників;

– опрацювання лекційного матеріалу;

– підготовка до практичних занять;

– самостійне вивчення окремих тем і питань на базі рекомендованих джерел;

– виконання поточних домашніх завдань;

– підготовка до проміжного контролю;

– підготовка до підсумкового екзамену;

– опрацювання конкретних проблемних питань для звернення за консультацією до викладача.

Результативність навчального процесу забезпечується ефективною системою контролю, яка включає опитування студентів за змістом лекцій, перевірку виконання поточних домашніх завдань, модульних контрольних робіт і здачу підсумкового іспиту за кожним модулем.

Методичні рекомендації спрямовані на надання студентові необхідної інформації щодо змісту, форми та особливостей організації навчального процесу під час проведення практичних занять і самостійної роботи та допомогу під час виконання розрахунково-графічної роботи. Головна увага приділяється практичним аспектам вивчення дисципліни. У методичних рекомендаціях подано формули й таблиці, необхідні для розв'язання задач, наведено необхідну кількість детально розібраних типових прикладів, ознайомлення з якими дає змогу студентові за незначної допомоги з боку викладача оволодіти основними методами розв'язання задач певного типу, а також запропоновані поточні завдання для самостійного розв'язання.

1 ЗМІСТ ПРАКТИЧНОЇ ЧАСТИНИ

Змістовий модуль 2.1 Інтегральне числення функцій однієї змінної

Практичне заняття № 1 – 2 год

Тема «Безпосереднє інтегрування».

Мета: розглянути таблицю інтегралів та виробити навички знаходити невизначені інтеграли за таблицею.

Література: [1–7].

Практичне заняття № 2 – 2 год

Тема «Заміна змінної та інтегрування частинами».

Мета: виробити вміння та навички знаходити невизначені інтеграли за допомогою заміни змінної та інтегрування частинами.

Література: [1–7].

Практичне заняття № 3 – 2 год

Тема «Інтегрування раціональних функцій. Інтегрування виразів, що містять лінійну ірраціональність».

Мета: виробити навички інтегрування раціональних функцій та виразів, що містять лінійну ірраціональність.

Література: [1–7].

Практичне заняття № 4 – 2 год

Тема «Інтегрування тригонометричних виразів. Тригонометричні підстановки».

Мета: виробити вміння та навички інтегрування тригонометричних функцій.

Література: [1–7].

Практичне заняття № 5 – 2 год

Тема «Інтегрування частинами і заміна змінної у визначеному інтегралі. Площа плоскої фігури».

Мета: сформувати вміння та навички обчислення визначених інтегралів і навчитись використовувати їх для обчислення площі плоскої фігури.

Література: [1–7].

Практичне заняття № 6 – 2 год

Тема «Довжина дуги плоскої кривої. Об’єм тіла обертання».

Мета: сформувати вміння та навички обчислення довжини дуги плоскої кривої та об’єму тіла обертання.

Література: [1–7].

Змістовий модуль 2.2 Функції декількох змінних

Практичне заняття № 7 – 2 год

Тема «Область визначення функції двох змінних. Частинні похідні. Повний диференціал функції багатьох змінних».

Мета: виробити вміння та навички знаходження області визначення двох змінних, частинних похідних та повного диференціала функції багатьох змінних.

Література: [1–6, 8].

Практичне заняття № 8 – 2 год

Тема «Складені функції та їх диференціювання. Неявні функції та їх диференціювання».

Мета: виробити вміння та навички знаходження похідних складених та неявних функцій багатьох змінних.

Література: [1–6, 8].

Практичне заняття № 9 – 2 год

Тема «Похідна за напрямком і градієнт. Дотична площина і нормальна пряма до поверхні».

Мета: сформувати вміння та навички знаходження похідної за напрямком і градієнта, рівнянь дотичної площини і нормальної прямої до поверхні.

Література: [1–6, 8].

Практичне заняття № 10 – 2 год

Тема «Екстремум функції багатьох змінних».

Мета: виробити вміння та навички знаходити екстремуми функції багатьох змінних.

Література: [1–6, 8].

Практичне заняття № 11 – 2 год

Тема «Найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області».

Мета: виробити вміння та навички знаходити найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області.

Література: [1–6, 8].

Змістовий модуль 2.3 Диференціальні рівняння. Рівняння математичної фізики

Практичне заняття № 12 – 2 год

Тема «Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні рівняння першого порядку».

Мета: виробити вміння та навички розв'язувати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та однорідні диференціальні рівняння першого порядку.

Література: [1–7].

Практичне заняття № 13 – 2 год

Тема «Лінійні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі».

Мета: виробити вміння та навички розв'язувати лінійні диференціальні рівняння першого порядку та нелінійне рівняння Бернуллі.

Література: [1–7].

Практичне заняття № 14 – 2 год

Тема «Інтегрування диференціальних рівнянь шляхом зниження порядку».

Мета: виробити вміння та навички інтегрування диференціальних рівнянь шляхом зниження порядку.

Література: [1–7].

Практичні заняття № 15, 16 – 4 год

Тема «Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду».

Мета: виробити навички розв’язання лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду.

Література: [1–7].

Практичне заняття № 17 – 2 год

*Тема «*Розв’язання диференціальних систем методом зведення до одного рівняння вищого порядку».

Мета: виробити вміння та навички розв’язання системи диференціальних рівнянь методом зведення до одного рівняння вищого порядку.

Література: [1–7].

2 ЗРАЗКИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Змістовий модуль 2.1 Інтегральне числення функцій однієї змінної

Практичне заняття № 1

Приклад 1. $\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx$.

Розв’язання. Розділивши чисельник підінтегральної функції на знаменник і використавши правило інтегрування степеневої функції, одержимо:

$$\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx = 3\int x^{-1/4}dx - 2\int x^{15/4}dx + \int x^{5/12}dx =$$

$$= 4x^{3/4} - \frac{8}{19}x^{19/4} + \frac{12}{17}x^{17/12} + C = 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19}\sqrt[4]{x^{19}} + \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + C$$

Приклад 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}} = \int (4-8x)^{-2/5} dx =$$

$$= -\frac{5}{8 \cdot 3}(4-8x)^{3/5} + C = -\frac{5}{24}\sqrt[5]{(4-8x)^3} + C .$$

Приклад 3. $\int \frac{dx}{6-7x}$.

Розв'язання. Застосуємо таблицю інтегралів:

$$\int \frac{dx}{6-7x} = -\frac{1}{7}\ln|6-7x| + C .$$

Приклад 4. $\int \cos(2-5x)dx$.

Розв'язання. За таблицею інтегралів:

$$\int \cos(2-5x)d = -\frac{1}{5}\sin(2-5x) + C .$$

Приклад 5. $\int \frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}}$.

Розв'язання. За таблицею інтегралів:

$$\int \frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{3}{4}}} = \frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{3}{4}}\right| + C .$$

Практичне заняття № 2

Приклад 1. $\int \frac{7xdx}{3x^2+4}$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральну функцію таким чином, щоб у чисельнику вийшла похідна знаменника:

$$\int \frac{7xdx}{3x^2+4} = \frac{7}{6}\int \frac{6xdx}{3x^2+4} = \begin{vmatrix} t = 3x^2+4 \\ dt = 6xdx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{7}{6}\int \frac{dt}{t} = \frac{7}{6}\ln|t| + C = \frac{7}{6}\ln|3x^2+4| + C .$$

Приклад 2. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx$.

Розв'язання. За допомогою заміни змінної:

$$\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx = \begin{vmatrix} t = \ln(x+2) \\ dt = \dfrac{1}{x+2}dx \end{vmatrix} = \int \sqrt[7]{t^3}dt = \int t^{\frac{3}{7}}dt = \frac{t^{\frac{10}{7}}}{\frac{10}{7}} + C =$$

$$= \frac{7\sqrt[7]{t^{10}}}{10} + C = \frac{7\sqrt[7]{\ln^{10}(x+2)}}{10} + C .$$

Приклад 3. $\int e^{3\cos x+2}\sin xdx$.

Розв'язання. За допомогою заміни змінної:

$$\int \sin xe^{3\cos x+2}dx = \begin{vmatrix} t = 3\cos x+2 \\ dt = -3\sin xdx \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\int e^t dt =$$

$$= -\frac{1}{3}e^t + C = -\frac{1}{3}e^{3\cos x+2} + C .$$

Приклад 4. $\int (x-7)\sin 5xdx$.

Розв'язання. За допомогою інтегрування частинами:

$$\int (x-7)\sin 5xdx = \begin{vmatrix} u = x-7, & du = dx, \\ dv = \sin 5xdx, & v = -\dfrac{1}{5}\cos 5x \end{vmatrix} =$$

$$=-\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x+\frac{1}{5}\int\cos 5xdx=-\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x+\frac{1}{25}\sin 5x+C$$

Приклад 5. $\int\arccos 4xdx$.

Розв'язання. Інтегруємо частинами:

$$\int\arccos 4xdx=\left|\begin{matrix}\arccos 4x=u, & dv=dx\\ -\frac{4dx}{\sqrt{1-16x^2}}=du, & v=x\end{matrix}\right|=-x\arccos 4x+$$

$$+4\int\frac{xdx}{\sqrt{1-16x^2}}=-x\arccos 4x-\frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{1-16x^2}+C=$$

$$=-x\arccos 4x-\frac{1}{4}\sqrt{1-16x^2}+C.$$

Приклад 6. $\int xe^{x-7}dx$.

Розв'язання. Інтегруємо частинами:

$$\int xe^{x-7}dx=\left|\begin{matrix}x=u, & e^{x-7}dx=dv\\ dx=du, & e^{x-7}=v\end{matrix}\right|=$$

$$=xe^{x-7}-\int e^{x-7}dx=xe^{x-7}-e^{x-7}+C.$$

Практичне заняття № 3

Приклад 1. $\int\frac{7x-x^2-4}{(x+1)(x^2-5x+6)}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція це раціональний дріб. Розкладемо її знаменник на множники: $(x+1)(x-2)(x-3)$.

У розкладанні правильного дробу на найпростіші кожному лінійному множнику знаменника відповідає доданок $\dfrac{A}{x-a}$. В даному випадку маємо:

$$\frac{7x-x^2-4}{(x+1)(x^2-5x+6)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

Привівши праву частину цієї рівності до загального знаменника і порівнявши чисельники дробів, одержимо тотожність

$$7x-x^2-4=A(x-2)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2).$$

Коефіцієнти A, B, C визначимо за допомогою визначених значень змінної:

$$\begin{array}{l|c} x=-1 & -12=12A \\ x=2 & 6=-3B \\ x=3 & 8=4C \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-2 \\ C=2 \end{cases}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в розкладання підінтегральної функції на найпростіші дроби, одержимо:

$$\int\frac{7x-x^2-4}{(x+1)(x^2-5x+6)}dx=\int\left(-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x-3}\right)dx=$$

$$=-\ln|x+1|-2\ln|x-2|+2\ln|x-3|+C.$$

Приклад 2. $\displaystyle\int\frac{15x-x^2-11}{(x-1)(x^2+x-2)}dx$.

Розв'язання.

$$\int\frac{15x-x^2-11}{(x-1)(x^2+x-2)}dx=\int\frac{15x-x^2-11}{(x-1)^2(x+2)}dx=$$

$$=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}\right)dx=I$$

$$15x-x^2-11=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$$

Складемо та розв'яжемо систему:

$$\begin{array}{l|c} x=1 & 3=3B \\ x=-2 & -5=9C \\ x=2 & 15=4A+4B+C \end{array} \Rightarrow \begin{cases} B=1 \\ C=-5 \\ A=4 \end{cases}$$

$$I=4\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-5\ln|x+2|+C.$$

Приклад 3. $\int \frac{2x^3-5x^2+8x-22}{x^4+9x^2+20}dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{2x^3-5x^2+8x-22}{x^4+9x^2+20}dx=\int \frac{2x^3-5x^2+8x-22}{(x^2+4)(x^2+5)}dx=$$

$$=\int\left(\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+5}\right)dx=I$$

$$2x^3-5x^2+8x-22=(Ax+B)(x^2+5)+(Cx+D)(x^2+4)$$

$$\begin{array}{l|c} \mathrm{x}^3 & 2=A+C \\ x^2 & -5=B+D \\ x^1 & 8=5A+4C \\ x^0 & -22=5B+4D \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-2 \\ C=2 \\ D=-3 \end{cases}$$

$$I=\int \frac{-2}{x^2+4}dx+\int \frac{2x-3}{x^2+5}dx=$$

$$=-arctg\frac{x}{2}+\ln(x^2+5)-\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Приклад 4. $\int \frac{4\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}dx$.

Розв'язання.

Інтегруємо шляхом уведення нової змінної:

$$\int \frac{4\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}dx = \left| \begin{array}{c} x-2=t^6, \quad dx=6t^5dt \\ x=t^6+2 \\ t=\sqrt[6]{x-2} \end{array} \right| = \int \frac{(4t^3-t)6t^5dt}{t^3+2t^2} =$$

$$= 6\int \frac{4t^6-t^4}{t+2}dt = 6\int (4t^5-8t^4+15t^3-30t^2+60t-120+\frac{240}{t+2})dt =$$

$$= 6\left(\frac{2}{3}t^6 - \frac{8}{5}t^5 + \frac{15}{4}t^4 - 10t^3 + 30t^2 - 120t + 240\ln|t+2| \right) + C,$$

де $t=\sqrt[6]{x-2}$.

Практичне заняття № 4

Приклад 1. $\int \cos^3(7x+2)dx$.

Розв'язання. Використовуючи тригонометричну тотожність $\cos^2(7x+2)=1-\sin^2(7x+2)$, одержуємо

$$\int \cos^3(7x+2)dx = \int \cos^2(7x+2)\cos(7x+2)dx =$$

$$= \int (1-\sin^2(7x+2))\cos(7x+2)dx = \int \cos(7x+2)dx -$$

$$- \int \sin^2(7x+2)\cos(7x+2)dx = \left| \begin{array}{l} t=\sin(7x+2) \\ dt=\cos(7x+2)\cdot 7dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{7}\sin(7x+2) - \frac{1}{7}\cdot\frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{7}\sin(7x+2) - \frac{t^3}{21} + C =$$

$$= \frac{1}{7}\sin(7x+2) - \frac{1}{21}\sin^3(7x+2) + C.$$

Приклад 2. $\int ctg^4 5xdx$.

Розв'язання. Тому що $ctg^2 5x = \frac{1}{\sin^2 5x} - 1$, маємо

$$\int ctg^4 5x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 5x} - 1 \right) ctg^2 5x dx = \int ctg^2 5x \frac{dx}{\sin^2 5x} -$$

$$-\int ctg^2 5x dx = \left| \begin{matrix} t = ctg 5x \\ dt = -\frac{1}{\sin^2 5x} \cdot 5dx \end{matrix} \right| = -\frac{1}{5} \int t^2 dt - \int \left(\frac{1}{\sin^2 5x} - 1 \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot \frac{t^3}{3} - \int \frac{dx}{\sin^2 5x} + \int dx = -\frac{1}{15} ctg^3 5x + \frac{1}{5} ctg 5x + x + C .$$

Приклад 3. $\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x + 1}$.

Розв'язання.

Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x + 1} = \left| \begin{matrix} t = tg\frac{x}{2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad x = 2arctgt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - 2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{2dt}{6t - 2 + 2t^2 + 1 + t^2} = 2\int \frac{dt}{3t^2 + 6t - 1} =$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 2t - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{(t+1)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}} \ln \left| \frac{t + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{t + 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} \right| + C =$$

В результаті маємо:

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}t+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}t+\sqrt{3}+2}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}tg\,\frac{x}{2}+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}tg\,\frac{x}{2}+\sqrt{3}+2}\right|+C.$$

Практичне заняття № 5

Приклад 1. $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Розв'язання. Використовуємо метод заміни змінної:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}=\left|\begin{matrix} x^2+1=t^2; & t=1, & \text{коли x} = 0 \\ \text{xdx} = \text{tdt}; & t=\sqrt{2}, & \text{коли x} = 1 \end{matrix}\right|=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{(t^2-1)}{t}dt=$$

$$=\int\limits_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt=\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}-\frac{1}{3}+1\approx 0,20.$$

Приклад 2. $\int\limits_1^e \ln^2 xdx$.

Розв'язання. Двічі застосувавши метод інтегрування частинами, одержимо:

$$\int\limits_1^e \ln^2 xdx=\left|\begin{matrix} u=\ln^2 x & dv=dx \\ du=\frac{2\ln x}{x}dx & v=x \end{matrix}\right|=x\ln^2 x\Big|_1^e-2\int\limits_1^e \ln xdx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\ln x & du=\frac{dx}{x} \\ dv=dx & v=x \end{matrix}\right|=e\ln^2 e-2\,(x\ln x-x)\Big|_1^e=e-2e+2e-2\approx 0,72$$

Приклад 3. Обчислити (з точністю до двох знаків після коми) площу фігури, обмеженої лініями $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння $\ln^2 x = \ln x$ і знайдемо точки перетину даних кривих: $M_1(1,0)$; $M_2(e,1)$. Шукана площа (рис. 1) знаходиться за формулою: $S = \int_a^b (y_2 - y_1) dx$.

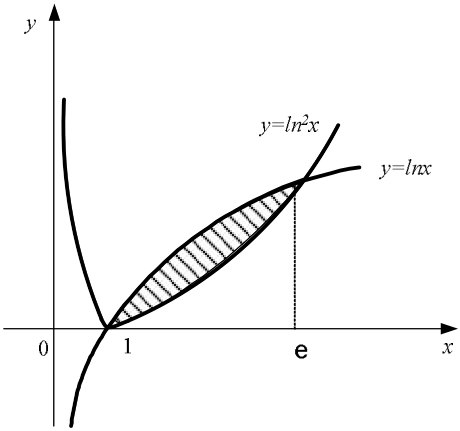

Рисунок 1

Тут $y_2 = \ln x$, $y_1 = \ln^2 x$, тобто: $S = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x) dx$.

Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\int \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x, & dv = dx \\ du = \dfrac{2\ln x}{x} dx, & v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x - 2\int \ln x dx,$$

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} \ln x = u, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Тоді

$$S=\int_1^e \ln x dx-\int_1^e \ln^2 x dx=(x\ln x-x)\Big|_1^e-(x\ln^2 x-2x\ln x+2x)\Big|_1^e=$$

$$=e\ln e-e+1-(e\ln^2 e-2e\ln e+2e-2)=3-e\approx 0,28 \text{ од}^2.$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої параметрично заданою лінією:

$$\begin{cases} x=1+3\cos t, \\ y=2-2\sin t, \quad 0\le \mathrm{t}\le 2\pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо криву. Виберемо достатню кількість значень параметра t_i, обчислимо відповідні значення x_i, y_i і отримаємо точки $M_i(x_i, y_i)$, подані у таблиці 1 в декартових координатах. З'єднаємо їх плавною лінією. Очевидно, що отримана крива є еліпс (рис. 2) із півосями *a = 3*, *b = 2* і центром у точці *C(1,2)*.

Таблиця 1

t_i	*0*	π/6	π/4	π/3	π/2	3π/4
x_i	*4*	*3,5*	*3,1*	*2,5*	*1*	*–1,1*
y_i	*2*	*1*	*0,6*	*0,3*	*0*	*0,6*
t_i	*π*	5π/4	3π/2	7 π/4	*2π*	
x_i	*–2*	*1,1*	*1*	*3,1*	*4*	
y_i	*2*	*3,4*	*4*	*3,4*	*2*	

Площу фігури, рівняння якої задано параметрично, обчислюємо за формулою:

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \text{, де } x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \text{ і } t\in[\alpha,\beta].$$

В результаті маємо:

$$S=\int_0^{2\pi}2(1-\sin t)(1+3\cos t)'dt=-6\int_0^{2\pi}\sin t(1-\sin t)dt=6(\cos t\Big|_0^{2\pi}+$$

$$+\int_0^{2\pi}\sin^2+dt)=3\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt=3(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}=6\pi \text{ од}^2.$$

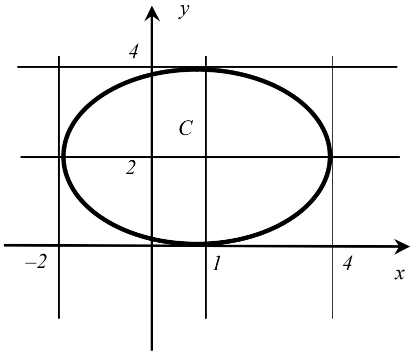

Рисунок 2

Приклад 5. Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

Розв'язання. Лінію подано у полярній системі координат. Побудуємо дану лінію. Для цього складемо таблицю 2, у якій приведені відповідні значення полярного кута $\varphi_i\,(i=\overline{1,9})$ і полярного радіусу ρ_i.

Таблиця 2

φ_i	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ρ_i	*0*	*0,6*	*1,2*	*2*	*4*	*6*	*6,8*	*7,4*	*8*

Побудувавши знайдені точки $M_i(\rho_i, \phi_i)$ у полярній системі координат та з'єднавши їх плавною лінією, одержимо кардиоїду (рис. 3).

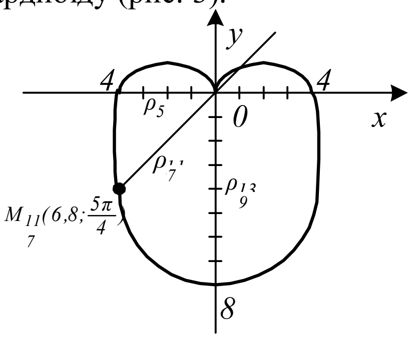

Рисунок 3

Площу фігури обчислюємо за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi \text{, де } \varphi \in [\alpha, \beta].$$

З урахуванням симетрії фігури, маємо:

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} (4(1-\sin\varphi))^2 d\varphi = 16\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin\varphi + \sin^2\varphi) d\varphi =$$

$$= 16\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 16\left(\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}(\sin 3\pi - \sin\pi)\right) = 24\pi$$

Практичне заняття № 6

Приклад 1. Обчислити довжину дуги лінії

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \quad 0 \le \mathrm{t} \le \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємося формулою:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt ,$$

$$x_t' = 2t\sin t + (t^2 - 2)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2 \cos t ,$$

$$y_t' = -2t\cos t - (2 - t^2)\sin t + 2\sin t + 2t\cos t = t^2 \sin t ,$$

$$\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = \sqrt{t^4 \cos^2 t + t^4 \sin^2 t} = t^2 .$$

Остаточно маємо:

$$l = \int_0^{\pi} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} \approx 10,32 \text{ од.}$$

Приклад 2. Обчислити довжину дуги лінії

$$\rho = 4(1 - \sin\varphi) .$$

Розв'язання. Довжину лінії у полярній системі координат знаходимо за формулою:

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\, d\varphi . \text{ Тут } \rho' = 4(1 - \sin\varphi)' = -4\cos\varphi .$$

Побудована лінія (рис. 3) симетрична відносно осі oy. Отже,

$$L = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-4\cos\varphi)^2 + (1 - \sin\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= 8\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\varphi + 1 - 2\sin\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

Використаємо основну тригонометричну тотожність:

$$=8\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(1-\sin\varphi)}d\varphi=8\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2})dy}={}^{2}dy=$$

$$=8\sqrt{2}(-2\cos\frac{\varphi}{2}-2\sin\frac{\varphi}{2})\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}=16\sqrt{2}(2\frac{\sqrt{2}}{2})=32\text{ од.}$$

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі абсцис плоскої фігури, обмеженої параболами: $y=3-x^2$, $y=x^2+1$.

Розв'язання. Знаходимо точки перетину парабол: *$M_1(-1,2)$, $M_2(1,2)$*. Об'єм V даного тіла одержуємо як різницю об'ємів V_1-V_2, де

$$V_2=\pi\int_{-1}^{1}(3-x^2)^2dx;\qquad V_1=\pi\int_{-1}^{1}(x^2+1)^2dx.$$

Таким чином,

$$V=V_2-V_1=\pi\int_{-1}^{1}((3-x^2)^2-(x^2+1)^2)dx=\pi\int_{-1}^{1}(8-8x^2)dx=$$

$$=8\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=16\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)\approx 33{,}50\text{ од}^3.$$

Рисунок до задачі виконати самостійно!

Змістовий модуль 2.2 Функції декількох змінних

Практичне заняття № 7

Приклад 1. Знайти область визначення функції

$$z=\ln(x^2-3y+6).$$

Розв'язання. Логарифмічна функція визначена тільки при додатному значенні аргументу, тому $x^2-3y+6>0$ чи

$y < \frac{1}{3}(x^2+6)$. Отже, границею області буде лінія $y = \frac{1}{3}x^2 + 2$, тобто парабола.

Область визначення даної функції складається з зовнішніх точок параболи (виключаючи параболу).

Приклад 2. Знайти частинні похідні і частинні диференціали функції $z = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні функції, використавши формулу диференціювання складної функції однієї змінної

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\left(-\frac{1}{3}(x^2+5y^2)^{\frac{2}{-3}}2x\right) = \frac{-2x}{3e^{\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\left(-\frac{1}{3}(x^2+5y^2)^{\frac{-2}{3}}10y\right) = \frac{-10y}{3e^{\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}.$$

Тепер знаходимо частинні диференціали:

$$d_x z = -\frac{2}{3}xe^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}dx;$$

$$d_y z = -\frac{10}{3}ye^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+5y^2)^2}}dy.$$

Приклад 3. Обчислити з точністю до двох знаків після коми значення частинних похідних $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для даної функції $f(x,y,z) = \sqrt{xy}\cos z$ у точці $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні даної функції, потім обчислюємо їх значення в точці $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{3}\right)$:

$$f_x'(x,y,z)=\frac{y}{2\sqrt{xy}}\cos z\,,\;\; f_x'(M_0)=0,25\,;$$

$$f_y'(x,y,z)=\frac{x}{2\sqrt{xy}}\cos z\,,\;\; f_y'(M_0)=0,25\,;$$

$$f_z'(x,y,z)=-\sqrt{xy}\sin z\,,\;\; f_z'(M_0)=-0,86\,.$$

Приклад 4. Знайти повний диференціал функції

$$z=arctg\sqrt{\frac{x}{y}}\,.$$

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні даної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}(x+y)}\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{\sqrt{x}}{2(x+y)\sqrt{y}}\,,$$

тоді
$$dz=\frac{1}{2(x+y)}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}dx-\sqrt{\frac{x}{y}}dy\right).$$

Практичне заняття № 8

Приклад 1. Обчислити значення похідної складної функції

$$z=\arccos\frac{x^2}{y}\,,\text{ де } x=1+\ln t\,,\; y=-2e^{-t^2+1}\,,\text{ коли } t_0=1\,.$$

Розв'язання. Використавши формулу $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{y^2}}}\cdot\frac{2x}{y}\cdot\frac{1}{t}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{y^2}}}\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot(-2e^{-t^2+1})\cdot(-2t)\,.$$

Коли $t_0=1$ одержуємо, що $x = 1$, $y = -2$, тоді

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t_0=1}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}\approx 2,29\,.$$

Приклад 2. Обчислити з точністю до двох знаків після коми значення частинних похідних функції $z(x,y)$, заданої рівнянням $4x^3-3y^3+2\text{xyz}-4xz=3-z^2$, у точці $M(0,1,-1)$.

Розв'язання. У даному випадку

$$F(x,y,z) = 4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz + z^2 - 3,$$

тому $F'_x=12x^2+2yz-4z$; $F'_y=-9y^2+2xz$;
$F'_z=2xy-4x+2z$.

Використовуючи формули $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$

маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{12x^2+2yz-4z}{2xy-4x+2z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-9y^2+2xz}{2xy-4x+2z}\,.$$

Обчислюємо значення $\frac{\partial z}{\partial x}$ й $\frac{\partial z}{\partial y}$ у точці $M(0,1,-1)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=1;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=-4,5\,.$$

Практичне заняття № 9

Приклад 1. Дано функцію $u(M)=\frac{\sqrt{x}}{z}-\frac{\sqrt{y}}{x}+2xyz$ і точки $M_1(1;1;-1)$, $M_2(-2;-1;1)$.

Обчислити: а) похідну цієї функції в точці M_1, за напрямком вектора $\overline{M_1M_2}$; б) $\overline{grad}\ U(M_1)$.

Розв'язання. а) скористаємося формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1}\cos\gamma;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2z\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{x^2}+2yz\Big|_{M_1}=-\frac{3}{2};\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2x\sqrt{y}}+2xz\Big|_{M_1}=-\frac{5}{2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\sqrt{y}}{x^2}+2yz\Big|_{M_1}=1.$$

Будуємо вектор $\overline{M_1M_2}=(-2-1;-1-1;1+1)=(-3;-2;2)$.

Обчислюємо напрямні косинуси:

$$\cos\alpha=\frac{-3}{\sqrt{9+4+4}}=-\frac{3}{\sqrt{17}};\ \cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{9+4+4}}=-\frac{2}{\sqrt{17}};$$

$$\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{9+4+4}}=\frac{2}{\sqrt{17}}.$$

Отже, $$\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)-\frac{5}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right)+1\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)=\frac{23}{2\sqrt{17}};$$

б) відповідно до визначення, маємо:

$$\overline{grad}\ \mathrm{U}(M_1)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}\cdot\bar{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\cdot\bar{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1}\cdot\bar{k}=-\frac{3}{2}\bar{i}-\frac{5}{2}\bar{j}+\bar{k}.$$

Приклад 2. Знайти у точці *M(–1,0,1)* рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні *S:* $z=x^2-y^2+3xy-4x+2y-4$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні від функції *F(x, y, z) = 0*, тобто

$$x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4 - z = 0:$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3y - 4; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y + 3x + 2; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

Обчислимо: $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M$; $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M$; $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M$. Маємо:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M = -6; \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M = -1.$$

Формула дотичної площини має вигляд

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M \cdot (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M \cdot (z - z_0) = 0.$$

Отже : $-6(x+1) - y - (z-1) = 0$ або $6x + y + z + 5 = 0$,
а рівняння нормалі знаходимо за формулою

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M}, \text{ тобто } \frac{x+1}{-6} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-1}{-1}$$

$$\text{або } \frac{x+1}{6} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

Практичне заняття № 10

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію

$$z = xy(x + y - 2).$$

Розв'язання. Знаходимо перші частинні похідні даної функції:

$$z'_x = 2xy + y^2 - 2y; \quad z'_y = x^2 + 2xy - 2x.$$

Прирівнявши їх до нуля, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y(2x + y - 2) = 0, \\ x(x + 2y - 2) = 0, \end{cases}$$

з якої визначаємо стаціонарні точки даної функції:

$$M_1(0;0),\ M_2(2;0),\ M_3(0;2),\ M_4\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right).$$

Знайдемо другі частинні похідні:

$$A = z''_{xx} = 2y;\ B = z''_{xy} = 2x + 2y - 2;\ C = z''_{yy} = 2x.$$

Складемо величину $\Delta = AC - B^2 = 4xy - (2x + 2y - 2)^2$.

Для точки M_1: $\Delta = -4 < 0$, тобто екстремума немає;

для точки M_2: $\Delta = -4 < 0$, тобто екстремума немає;

для точки M_3: $\Delta = -4 < 0$, тобто екстремума немає;

для точки M_4: $\Delta = \frac{12}{9} > 0$, $A = \frac{4}{3} > 0$, тобто маємо точку мінімуму функції, у якій $z_{\min} = z\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$.

Практичне заняття № 11

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy - y^2 + 3x + 4y$ в області *D*, обмеженої лініями *x = 0, y = 0,* *x +y – 1 = 0.*

Розв'язання. Накреслимо дану область *D* (рис. 4). Це трикутник *BOA*.

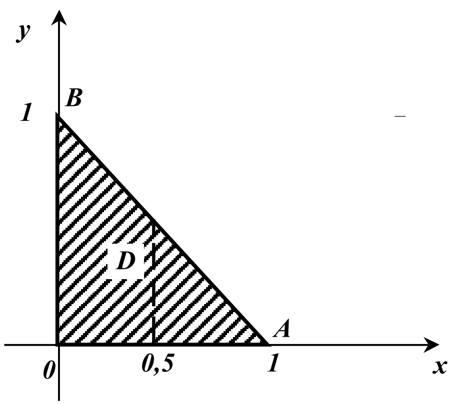

Рисунок 4

З'ясуємо, чи існують стаціонарні точки, що лежать усередині даної області *D*.

Маємо:

$$\begin{cases} z'_x = y + 3 = 0, \\ z'_y = x - 2y + 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь, знаходимо стаціонарну точку *M(–10,–3)*. Вона лежить поза областю *D*. Отже, при рішенні задачі не враховується.

Досліджуємо значення функції на границі області *D*.

На стороні *OA*($y = 0,\ 0 \le x \le 1$) трикутника функція $z = 3x$. Стаціонарних точок на відрізку *OA* немає, тому що $z' = 3$. У точках *O* і *A* відповідно $z(0,0) = 0,\ z(1,0) = 3$.

На стороні *0B* ($x = 0,\ 0 \le y \le 1$) трикутника функція $z = -y^2 + 4y$, $z' = -2y + 4$. Знаходимо стаціонарну точку. З рівняння $-2y + 4 = 0$, одержуємо, що $y = 2$. Таким чином, точка $M_1(0,2)$ не належить області *D*. Значення функції у точці *B* $z(0,1) = 3$.

На стороні *AB:* $x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1$, $z = -2x^2 + 2x + 3$ тоді $z' = -4x + 2$ і з $z' = 0$ випливає $x = 0{,}5$, тобто стаціонарна точка $M_2\left(0{,}5,\ 0{,}5\right)$ належить границі області *D*. Значення функції в ній $z\left(0{,}5,\ 0{,}5\right) = 3{,}5$.

Порівнюючи всі отримані значення функції, знаходимо її найбільше і найменше значення.

Отже: $z_{найб} = z\left(0{,}5,\ 0{,}5\right) = 3{,}5$; $z_{найм} = z\left(0{,}0\right) = 0$.

Змістовий модуль 2.3 Диференціальні рівняння. Рівняння математичної фізики.

Практичне заняття № 12

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

$$(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0.$$

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння

$$y(1-x^2)dy=-x(y^2+1)dx\,.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні:

$$\frac{ydy}{y^2+1}=\frac{-xdx}{1-x^2}\,.$$

Інтегруємо обидві частини останньої рівності:

$$y^2+1\ =C\,|\,x^2-1\,|\ \ \Rightarrow y^2=|\,x^2-1\,|\ \ -1\,.$$

Отже, загальним рішенням рівняння є

$$y=\pm\sqrt{C\,|\,x^2-1\,|-1}\,\textbf{.}$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{tgydx}{\cos^2 x}+\frac{tgxdy}{\cos^2 y}=0\,.$

Розв'язання. Дане рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремимо їх і інтегруємо:

$$\frac{dy}{tgy\cos^2 y}=-\frac{dx}{tgx\cos^2 x}\Rightarrow\int\frac{dy}{tgy\cos^2 y}=-\int\frac{dx}{tgx\cos^2 x}\Rightarrow$$

$$\ln|\,tgy\,|=-\ln|\,tgx\,|+\ln|\,C\,|\Rightarrow tgy=\frac{C}{tgx}\Rightarrow y=arctg\left(\frac{C}{tgx}\right).$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y-x\frac{dy}{dx}=x+y\frac{dy}{dx}\,.$

Розв'язання. З даного рівняння знаходимо $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}\,.$$

Це однорідне рівняння першого порядку. Вирішуємо його за допомогою підстановки $y=xu(x)\,.$

Далі знаходимо:

$$y' = u'x + u\,;\ u'x + u = \frac{ux - x}{x + ux}\,;\ u'x + u = \frac{u - 1}{u + 1}\,;$$

$$u'x = \frac{u - 1}{u + 1} - u = \frac{-u^2 - 1}{u + 1}\,;\ x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2 + 1}{u + 1}\,.$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його та знайдемо загальний інтеграл:

$$\frac{u + 1}{u^2 + 1}du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{u + 1}{u^2 + 1}du = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2udu}{u^2 + 1} + \int \frac{du}{u^2 + 1} =$$

$$= -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|u^2 + 1| + arctgu = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow arctgu = \ln\left|\frac{C}{x\sqrt{u^2 + 1}}\right| \Rightarrow arctg\frac{y}{x} = \ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

Практичне заняття № 13

Приклад 1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$dy - e^{-x}dx + ydx - xdy = xydx, \quad \mathrm{y}(0) = \ln 5\,.$$

Розв'язання. Перетворимо рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + e^{-x} - y}{1 - x}\,; \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} + \frac{1 - x}{1 - x}y = \frac{e^{-x}}{1 - x}\,.$$

Рівняння $\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^{-x}}{1 - x}$ є лінійним, першого порядку. Розв'язуємо його за допомогою підстановки *y* = *uv,* де $u = u(x)$ *і* $v = v(x)$. Маємо:

$$y' = u'v + uv'\,;\ u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1 - x},\ u'v + u\left(\frac{dv}{dx} + v\right) = \frac{e^{-x}}{1 - x}\,.$$

Знаходимо функцію *v(x)* з умови $\frac{dv}{dx} + v = 0$.

Тоді

$$\frac{dv}{dx}=-v\,;\ \frac{dv}{v}=-dx\,;\ \int\frac{dv}{v}=-\int dx\,;\ \ln|v|=-x\,;\ v=e^{-x}\,.$$

Підставляємо отриманий вираз для v у рівняння $u'v=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$:

$$\frac{du}{dx}e^{-x}=\frac{e^{-x}}{1-x}\,;\ \frac{du}{dx}=\frac{1}{1-x}\,;\ du=\frac{dx}{1-x}\,;\ \int du=\int\frac{dx}{1-x}\,;$$

$$u=-\ln|1-x|+\ln C\,;\ u=\ln\frac{C}{|1-x|}\,.$$

Тоді $y=uv=e^{-x}\ln\dfrac{C}{|1-x|}$ є загальним розв'язком рівняння.

Знаходимо С, використовуючи початкову умову:

$$y(0)=\ln C=\ln 5,\qquad C=5.$$

Остаточно одержуємо:

$$y=e^{-x}\ln\frac{5}{|1-x|}\,.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'+2e^{x}y=2e^{x}\sqrt{y}\ .$$

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням Бернуллі. Вирішуємо його за допомогою підстановки $y = uv$. Тоді

$$y'=u'v+uv'\,;\ u'v+uv'+2e^{x}uv=2e^{x}\sqrt{uv}\,,$$

$$u'v+(u'+2e^{x}u)v=2e^{x}\sqrt{uv}\ . \qquad (1)$$

Знаходимо $u(x)$ з умови

$$u'+2e^{x}u=0\Rightarrow\frac{du}{dx}=-2e^{x}u\Rightarrow\frac{du}{u}=-2e^{x}dx\Rightarrow\int\frac{du}{u}=-2\int e^{x}dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln|u|=-2e^{x}\,,\ u=e^{-2e^{x}}\,.$$

Отриманий вираз для *u(x)* підставляємо у рівняння (1):

$$v'e^{-2e^x} = 2e^x\sqrt{e^{-2e^x}v}\,, \quad v'e^{-2e^x} = 2e^x e^{-e^x}\sqrt{v}\,,$$

$$v' = 2e^x e^{e^x}\sqrt{v} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2e^{e^x}e^x\sqrt{v} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2e^{e^x}e^x dx\,,$$

$$\int\frac{dv}{\sqrt{v}} = 2\int e^x e^{e^x}dx \Rightarrow 2\sqrt{v} = 2e^{e^x} + 2C \Rightarrow v = (e^{e^x} + C)^2\,.$$

Остаточно знаходимо, що загальний розв'язок рівняння визначається формулою $y = uv = e^{-2e^x}(e^{e^x} + C)^2$.

Практичне заняття № 14

Приклад 1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''(x+2)^5 = 1$; з початковими умовами $y(-1) = \frac{1}{12}$; $y'(-1) = -\frac{1}{4}$.

Розв'язання.

Знайдемо загальний розв'язок даного рівняння:

$$y'' = \frac{1}{(x+2)^5}\,;\; y' = \int\frac{dx}{(x+2)^5} = -\frac{1}{4(x+2)^4 + C_1}\,;$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{4(x+2)^4} + C_1\right)dx = \frac{1}{12(x+2)^3} + C_1x + C_2\,.$$

Скориставшись початковими умовами, визначимо значення C_1, C_2:

$$y(-1) = \frac{1}{12} - C_1 + C_2 = \frac{1}{12} \Rightarrow C_2 - C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2\,,$$

$$y'(-1) = -\frac{1}{4} + C_1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0\,.$$

Частинний розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам, має вигляд: $y = \frac{1}{12(x+2)^3}$.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''(e^x+1)+y'=0$, яке допускає зниження порядку.

Розв'язання. Зробимо підстановку *y' = z(x)*, тоді $y''=\dfrac{dz}{dx}$ і

$$\frac{dz}{dx}(e^x+1)+z=0 \Rightarrow \frac{dz}{dx}(e^x+1)=-z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z}=-\frac{dx}{e^x+1} \Rightarrow \int\frac{dz}{z}=-\int\frac{dx}{e^x+1}$$

Шляхом заміни змінної $e^x+1=t$ знаходимо:

$\ln|z|=\ln|e^x+1|-\ln e^x+\ln C_1$, звідки $z=C_1\dfrac{e^x+1}{e^x}$.

Тоді $y=C_1\displaystyle\int\frac{e^x+1}{e^x}dx=C_1(x-e^{-x})+C_2$.

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y^3y''=-1$, яке допускає зниження порядку, та задовольняє заданим початковим умовам $y(1)=1$; *y'(1) = 0.*

Розв'язання. Понизимо порядок рівняння за допомогою підстановки *y' = p(y).*

$$y^3p\frac{dp}{dy}=-1;\quad pdp=-\frac{dy}{y^3};\ \int pdp=-\int\frac{dy}{y^3};\ \frac{p^2}{2}=\frac{1}{2y^2}+C_1;$$

$$p=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+2C_1};\ \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+2C_1};\ dx=\pm\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}};$$

$$x=\pm\int\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}}=\pm\frac{1}{4C_1}\int(1+2C_1y^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+2C_1y^2);$$

$$x=\pm\frac{1}{2C_1}\cdot\sqrt{1+2C_1y^2}+C_2,$$

тобто одержали загальний розв'язок початкового рівняння.

Визначимо значення C_1 и C_2 використавши початкові умови (при $x = 1,\ y' = 0$ і $y = 1$). Маємо:

$$\begin{cases} 1 = \pm\dfrac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1} + C_2, \\ 0 = \pm\sqrt{1+2C_1}, \ \text{ звідки } \ C_1 = -1/2, \ \ C_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, шуканий розв'язок має вигляд:

$$x = \pm\sqrt{1-y^2} + 1 \ \text{ або } \ (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Практичне заняття № 15, 16

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 3k - 4 = 0$ має корені $k_1 = 4$, $k_2 = -1$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння визначається формулою

$$y_0 = C_1e^{4x} + C_2e^{-x}.$$

За функцією $f(x) = 6xe^{-x}$, що стоїть у правій частині початкового рівняння, записуємо частинний розв'язок

$$y_r = (Ax+B)e^{-x}x = (Ax^2+Bx)e^{-x}.$$

Коефіцієнти A і B визначимо методом невизначених коефіцієнтів. Для цього знаходимо:

$$y_r' = (2Ax+B)e^{-x} + (Ax^2+Bx)e^{-x}\cdot(-1) = (2Ax+B)e^{-x} +$$

$$+(Ax^2+Bx)e^{-x} = (2Ax+B-Ax^2Bx)e^{-x},$$

$$y_r'' = (2A-2Ax-B)e^{-x} - (2Ax+B-Ax^2-Bx)e^{-x} =$$

$$= (2A-2Ax-B-2Ax-B+Ax^2+Bx)e^{-x} =$$

$$= (2A-4Ax-2B+2Ax^2+Bx)e^{-x}.$$

Знайдені вирази для y_r', і y_r'' підставимо у початкове рівняння і, розділивши обидві його частини на $e^{-x} \neq 0$, дорівняємо коефіцієнти при x^1 і x^0. Одержимо систему, з якої знайдемо *A* і *B*.

Відповідно до викладеного, маємо:

$$2A + Bx - 4Ax - 2B - 6Ax - 3B + 3Bx - 4Bx = 6x,$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & B - 4A - 6A + 3B - 4B = 6 \\ x^0 & \quad 2A - 2B - 3B = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{5}, \\ B = -\dfrac{6}{25}, \end{cases}$$

тоді $y_r = -\left(\dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{6}{25}x\right)e^{-x}$ і загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння визначається формулою

$$y = y_0 + y_r = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - \left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right)e^{-x}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння $y'' + y' = 5x + \cos 2x$.

Розв'язання. Знаходимо корені характеристичного рівняння $k^2 + k = 0$: $\mathrm{k}_1 = 0;\ k_2 = -1$. Отже, загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд: $y_0 = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Функція *f(x) = 5x + cos2x*, що стоїть праворуч у рівнянні, являє собою суму функцій $f_1(x) = 5x$ і $f_2(x) = \cos 5x$. Їм відповідає два частинних розв'язки:

$$y_{r_1} = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx; \quad y_{r_1} = C\cos 2x + D\sin 2x, \text{ тобто}$$

$$y_r = Ax^2 + Bx + C\cos 2x + D\sin 2x.$$

Знаходимо:

$$y_r' = 2Ax + B - 2C\sin 2x + 2D\cos 2x\ ,$$

$$y_r'' = 2A - 4C\cos 2x - 4D\sin 2x\ .$$

Підставляємо вирази y_r', і y_r'' у початкове рівняння та обчислюємо коефіцієнти *A, B, C, D.*

$$2A - 4C\cos 2x - 4D\sin 2x + 2Ax + B - 2D\sin 2x +$$

$$+2C\cos 2x = 5x + 2\cos 2x\ ,$$

$$\begin{array}{l|c} x^1 & 2A = 5 \\ x^0 & 2A + B = 0 \\ \cos 2x & -4C + 2D = 1 \\ \sin 2x & -2C - 4D = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = 5/2, \\ B = -5, \\ C = -1/5, \\ D = 1/10. \end{cases}$$

Таким чином, частинний розв'язок початкового рівняння має вигляд

$$y_r = \frac{5}{2}x^2 - 5x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x\,,$$

а його загальний розв'язок

$$y = y_0 + y_r = C_1 + C_2e^{-x} + 2,5x^2 - 5x - 0,5\cos 2x + 0,1\sin 2x\ .$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам, тобто розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 16 = (34x + 13)e^{-x}\,;\quad y(0) = -1\,;\quad y'(0) = 5\ .$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 16 = 0$ має уявні корені: $k_{1,2} = \pm 4i$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння визначається формулою $y_0 = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x$, а його частинний розв'язок має вигляд $y_r = (Ax + B)e^{-x}$.

Знаходимо:

$$y_r' = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = (A - Ax - B)e^{-x}$$

$$y_r'' = -Ae^{-x} - (A - Ax - B)e^{-x} = -e^{-x}(2A - Ax - B).$$

Підставляємо вирази y_r', і y_r'' у початкове рівняння. З отриманої тотожності

$$-2A+Ax+B+16Ax+16B = 34A+13$$

знаходимо $A = 2$; $B = 1$. Тоді $y_r' = (2x + 1)e^{-x}$.

Використовуючи початкові умови $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$, складаємо систему для обчислення значень C_1 і C_2

$$\begin{cases} -1 = C_1 + 1, \\ 5 = 4C_2 + 2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Підставляючи значення C_1 і C_2 у загальний розв'язок, знаходимо частинний розв'язок початкового рівняння

$$y = \sin 4x - 2\cos 4x + (2x + 1)e^{-x}.$$

Практичне заняття № 17

Приклад 1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -7x + y, \quad \mathrm{x = x(t),\ x' = dx/dt,} \\ y' = -2x - 5y, \quad \mathrm{y = y(t),\ \ y' = dy/dt,} \end{cases}$$

зведенням до диференціального рівняння вищого порядку.

Розв'язання. Диференціюємо перше рівняння даної системи: $x'' = -7x' + y'$.

Потім заміняємо y' його виразом із другого рівняння даної системи: $x'' = 7x' - 2x - 5y$, у якому y заміняємо виразом $y=x'+7x$, знайденим з першого рівняння системи.

У підсумку приходимо до диференціального рівняння другого порядку щодо невідомої функції *x(t):*

$$x'' = 7x' - 2x - 5(x' + 7)\,; \quad x'' + 12x' - 37x + 0\,.$$

Розв'язуємо його:

$$k^2 + 12k + 37 = 0\,,\ k_{1,2} = -6 \pm i \Rightarrow x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)\,.$$

Звідси знаходимо

$$x' = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 6e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)\,.$$

Підставляємо отримані вирази для *x* і *x'* у рівняння $y = x' + 7x$ і маємо

$$y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) +$$
$$+7e^{-6t}(-C_1 \cos t + C_2 \sin t)\,.$$

Отже, шуканим розв'язком є функції

$$\begin{cases} x(t) = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y(t) = e^{-6t}((C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)). \end{cases}$$

3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Змістовий модуль 2.1 Інтегральне числення функцій однієї змінної

Практичне заняття № 1

1. Вивчити таблицю основних інтегралів.
2. Знайти невизначені інтеграли:

1)

1.	$\int \frac{dx}{3 - x}$	**11.**	$\int \frac{dx}{3x + 4}$	**21.**	$\int \frac{dx}{6 + 5x}$
2.	$\int \frac{dx}{3x + 9}$	**12.**	$\int \frac{dx}{4x - 2}$	**22.**	$\int \frac{dx}{1 - 7x}$

3. $\int \frac{dx}{2-3x}$ **13.** $\int \frac{dx}{5-3x}$ **23.** $\int \frac{dx}{1+6x}$

4. $\int \frac{dx}{1-4x}$ **14.** $\int \frac{dx}{4-7x}$ **24.** $\int \frac{dx}{2+7x}$

5. $\int \frac{dx}{2+3x}$ **15.** $\int \frac{dx}{5x-3}$ **25.** $\int \frac{dx}{7-3x}$

6. $\int \frac{dx}{2-5x}$ **16.** $\int \frac{dx}{3-2x}$ **26.** $\int \frac{dx}{5-2x}$

7. $\int \frac{dx}{3x-2}$ **17.** $\int \frac{dx}{5+3x}$ **27.** $\int \frac{dx}{2x+7}$

8. $\int \frac{dx}{2x+3}$ **18.** $\int \frac{dx}{3-5x}$ **28.** $\int \frac{dx}{2x+9}$

9. $\int \frac{dx}{3x-4}$ **19.** $\int \frac{dx}{5+4x}$ **29.** $\int \frac{dx}{7x-3}$

10. $\int \frac{dx}{4-3x}$ **20.** $\int \frac{dx}{6-3x}$ **30.** $\int \frac{dx}{6x+1}$

2)

1. $\int \sin(2-3x)\,dx$ **2.** $\int \sin(3-2x)\,dx$ **3.** $\int \sin(5-3x)\,dx$

4. $\int \cos(2+3x)\,dx$ **5.** $\int \cos(3+2x)\,dx$ **6.** $\int \sin(4-2x)\,dx$

7. $\int \cos(5-2x)\,dx$ **8.** $\int \cos(7x+3)\,dx$ **9.** $\int \sin(8x-3)\,dx$

10. $\int \sin(3+4x)\,dx$ **11.** $\int \sin(3-4x)\,dx$ **12.** $\int \cos(4x+3)\,dx$

13. $\int \cos(3-4x)\,dx$ **14.** $\int \cos(2+5x)\,dx$ **15.** $\int \cos(3x+5)\,dx$

16. $\int \sin(5x-3)\,dx$

17. $\int \sin(5-3x)\,dx$

18. $\int \sin(3x+6)\,dx$

19. $\int \cos(5x-8)\,dx$

20. $\int \cos(3x-7)\,dx$

21. $\int \cos(5x-6)\,dx$

22. $\int \sin(7x+1)\,dx$

23. $\int \cos(7x+3)\,dx$

24. $\int \sin(7-4x)\,dx$

25. $\int \cos(3x-7)\,dx$

26. $\int \sin(8x-5)\,dx$

27. $\int \cos(8x-4)\,dx$

28. $\int \sin(9x-1)\,dx$

29. $\int \cos(10x-3)\,dx$

30. $\int \sin(9x+7)\,dx$

3)

1. $\int \frac{\sqrt{3}dx}{9x^2-3}$

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9x^2+3}}$

3. $\int \frac{xdx}{9x^2+3}$

4. $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$

13. $\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3-4x^2}}$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$

15. $\int \frac{dx}{2x^2+7}$

21. $\int \frac{dx}{3x^2-2}$

22. $\int \frac{dx}{4x^2+3}$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$

25. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}$

6. $\int \frac{dx}{7x^2-4}$ **16.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$ **26.** $\int \frac{xdx}{4x^2-3}$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-4}}$ **17.** $\int \frac{xdx}{3x^2+2}$ **27.** $\int \frac{dx}{8x^2-9}$

8. $\int \frac{dx}{5x^2+3}$ **18.** $\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{7-2x^2}}$ **28.** $\int \frac{dx}{4x^2+7}$

9. $\int \frac{dx}{5x^2-3}$ **19.** $\int \frac{\sqrt{14}dx}{2x^2-7}$ **29.** $\int \frac{dx}{4+3x^2}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$ **20.** $\int \frac{dx}{8x^2+9}$ **30.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}}$

Практичне заняття № 2

1. Знайти невизначені інтеграли за допомогою заміни змінної:

1)

1. $\int \frac{dx}{(2x+1)\cdot\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$ **2.** $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(1-x)}dx}{x-1}$ **3.** $\int \frac{dx}{(1-x)\cdot\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$

4. $\int \frac{dx}{(1-x)\cdot\sqrt[2]{\ln^3(1-x)}}$ **5.** $\int \frac{\ln^3(1-x)dx}{x-1}$ **6.** $\int \frac{\sqrt[2]{\ln(2x-1)}dx}{2x-1}$

7. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}dx}{3x+1}$ **8.** $\int \frac{dx}{(x+1)\cdot\ln^2(x+1)}$ **9.** $\int \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$

10. **11.** **12.**

$\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(1+x)}dx}{x+1}$ $\int \frac{\cos x}{\sqrt{(\sin x-4)^3}}dx$ $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$

13. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}}dx$ **14.** $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x}dx$ **15.** $\int \sin^3 4x \cdot \cos 4x dx$

16. $\int \sqrt[4]{\cos 2x} \cdot \sin 2x dx$ **17.** $\int \sqrt{\cos^3 2x} \cdot \sin 2x dx$ **18.** $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}}dx$

19. $\int \sin^3 5x \cdot \cos 5x dx$ **20.** $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}}dx$ **21.** $\int \frac{ctg^5 4x}{\sin^2 4x}dx$

22. $\int \frac{\sqrt[3]{tg^5 4x}}{\cos^2 4x}dx$ **23.** $\int \frac{\sqrt[5]{tg^2 3x}}{\cos^2 3x}dx$ **24.** $\int \frac{dx}{\cos^2 4x \cdot \sqrt{tg 4x}}$

25. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt[5]{ctg^4 x}}$ **26.** $\int \frac{tg 6x}{\cos^2 6x}dx$ **27.** $\int \frac{tg^6 2x}{\cos^2 2x}dx$

28. $\int \frac{\sqrt{ctg 4x}}{\sin^2 4x}dx$ **29.** $\int \frac{\sqrt[5]{ctg^2 x}}{\sin^2 x}dx$ **30.** $\int \frac{tg^7 3x}{\cos^2 3x}dx$

2)

1. $\int \frac{\sqrt{arctg^6 3x}}{1+9x^2}dx$ **2.** $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **3.** $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

4. $\int \frac{\mathrm{arc}\,tg^3 2x}{1+4x^2}dx$ **5.** $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **6.** $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^3 x}$

7. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$ 8. $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arc}\,tg^2 x}}{1+x^2}dx$ 9. $\int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^4 x}$ 11. $\int e^{5x^2-3}xdx$ 12. $\int e^{1-4x^2}xdx$

13. $\int e^{3x^2+4}xdx$ 14. $\int e^{\sin x+1}\cos xdx$ 15. $\int e^{4-x^2}xdx$

16. $\int \frac{e^{tgx}dx}{\cos^2 x}$ 17. $\int e^{3\cos x+2}\sin xdx$ 18. $\int e^{4\sin x-1}\cos xdx$

19. $\int e^{5x^2-3}xdx$ 20. $\int e^{5-2x^2}xdx$ 21. $\int e^{4-3x^2}xdx$

22. $\int e^{\cos 2x}\sin 2xdx$ 23. $\int e^{1-6x^2}xdx$ 24. $\int e^{x^3+1}x^2dx$

25. $\int \frac{e^{arctgx}dx}{1+x^2}$ 26. $\int e^{3x^2-2}xdx$ 27. $\int \frac{x^4dx}{e^{x^5+1}}$

28. $\int \frac{xdx}{e^{x^2-3}}$ 29. $\int \frac{xdx}{e^{2x^2+1}}$ 30. $\int e^{4-5x^2}xdx$

2. Знайти невизначені інтеграли за допомогою інтегрування частинами:

1. $\int \ln(x-5)\, dx$ **2.** $\int arctg 2x\, dx$ **3.** $\int x^2e^{-x}\, dx$

4. $\int (x+1)e^{-4x}\, dx$ **5.** $\int x^2e^{2x}\, dx$ **6.** $\int arctg 3x\, dx$

7. $\int x\cdot\cos 8x\, dx$ **8.** $\int arcctg 4x\, dx$ **9.** $\int \arcsin 5x\, dx$

10. $\int (x+1)e^{-x}\, dx$ **11.** $\int arctgx\, dx$ **12.** $\int x^2\cdot e^{3x}\, dx$

13. $\int x\cdot\cos(x+4)\, dx$ **14.** $\int x\cdot\cos(x-2)\, dx$ **15.** $\int x\cdot\cos(x+3)\, dx$

16. $\int x\cdot e^{2+x}\, dx$ **17.** $\int x\cdot e^{-7x}\, dx$ **18.** $\int \arcsin 2x\, dx$

19. $\int \arcsin 2x\, dx$ **20.** $\int x\cdot\cos(x-4)\, dx$ **21.** $\int \arccos 2x\, dx$

22. $\int x\cdot\cos(x+9)\, dx$ **23.** $\int (x+3)e^{-x}\, dx$ **24.** $\int \arccos x\, dx$

25. $\int (x^2-3)e^{x}\, dx$ **26.** $\int x\cdot e^{-4x}\, dx$ **27.** $\int x\cdot\cos(x+7)\, dx$

28. $\int x^2 \cdot e^{\frac{x}{2}}\, dx$ **29.** $\int x \cdot e^{3+x}\, dx$ **30.** $\int x \cdot \cos(2-x)\, dx$

Практичне заняття № 3

1. Знайти невизначені інтеграли від раціональних функцій:

1)

1. $\int \frac{1-2x-x^2}{x^2+1} dx$ **2.** $\int \frac{7-x}{1-x} dx$ **3.** $\int \frac{x^3+2}{x^2-1} dx$

4. $\int \frac{8x^3-1}{2x+1} dx$ **5.** $\int \frac{x^5-2}{x^2-4} dx$ **6.** $\int \frac{2x^4-3}{x^2+1} dx$

7. $\int \frac{x^3-1}{2x+1} dx$ **8.** $\int \frac{x^5}{1-x^3} dx$ **9.** $\int \frac{x^2}{x^2+3} dx$

10. $\int \frac{6x^3-2x+1}{2x+1} dx$ **11.** $\int \frac{x^4}{x^2-3} dx$ **12.** $\int \frac{2x^2+3}{2x^2-1} dx$

13. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4} dx$ **14.** $\int \frac{x^3+5x}{x^2+1} dx$ **15.** $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx$

16. $\int \frac{x^3-1}{x+3} dx$ **17.** $\int \frac{x^4-2x^2-1}{x^2+1} dx$ **18.** $\int \frac{x^4+1}{x^2+1} dx$

19. $\int \frac{x^3-3}{x+5} dx$ **20.** $\int \frac{x^4+2}{x^2-4} dx$ **21.** $\int \frac{1-2x^4}{x^2+1} dx$

22. $\int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx$ **23.** $\int \frac{2x^5+5}{x+1} dx$ **24.** $\int \frac{2x^3-3}{x-2} dx$

25. $\int \frac{x^2+x}{2-x} dx$ **26.** $\int \frac{x^3+3x+1}{x^2+2} dx$ **27.** $\int \frac{2x^3+3}{x-1} dx$

28. $\int \frac{2x^2+5}{x-7} dx$ **29.** $\int \frac{x^2+4}{x-3} dx$ **30.** $\int \frac{1-x^4}{x^2+4} dx$

2)

1. $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}\,dx$

2. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}\,dx$

3. $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx$

4. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}\,dx$

5. $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}\,dx$

6. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}\,dx$

7. $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$

8. $\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx$

9. $\int \frac{7x-10}{x^3+8}\,dx$

10. $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)}\,dx$

11. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}\,dx$

12. $\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}\,dx$

13. $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}\,dx$

14. $\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx$

15. $\int \frac{3-9x}{x^3-1}\,dx$

16. $\int \frac{x^3-2x^2+5}{x^4-1}\,dx$

17. $\int \frac{x^3+4x-3}{x^4+4x^2}\,dx$

18. $\int \frac{7x-2}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$

19. $\int \frac{4x^2-2}{x^4-x^2}\,dx$

20. $\int \frac{x^3-2x^2+4x-2}{x^4+3x^2-4}\,dx$

21. $\int \frac{2x^3-2x-5}{x^4+3x^2-4}\,dx$

22. $\int \frac{3x-8}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx$

23. $\int \frac{x^2}{x^4+5x^2+4}\,dx$

24. $\int \frac{2-8x}{x^4+4x^2}\,dx$

25. $\int \frac{x^3-x^2+4x}{x^4-1}\,dx$

26. $\int \frac{2x^3-3x^2+8x-27}{x^4+13x^2+36}\,dx$

27. $\int \frac{5x^3-x^2+21x-9}{x^4+10x^2+9}\,dx$

28. $\int \frac{2x^5-2x^3-x^2}{1-x^4}\,dx$

29. $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^4+5x^2+4}\,dx$

30. $\int \frac{2x+3}{(x-1)\left(x^3-x^2+4x-4\right)}\,dx$

2. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

1. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$

2. $\int \frac{x\cdot dx}{\sqrt{x+3}}$

3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}$

4. $\int \frac{x\cdot dx}{2+\sqrt{x+4}}$

5. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$

6. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}$ dx

7. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$

8. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$ dx

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+3)}$

11. $\int \frac{x+1}{x+\sqrt{x}}$ dx

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$

13. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x-1}}$

14. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$

15. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$

17. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}$ dx

18. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-7}}$

19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-4}}$

20. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}$ dx

21. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}}$

22. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+10}$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x-1)}$

24. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$

25. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x-2}}$ **26.** $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-2}}$ **27.** $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}$ dx

28. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}}$ **29.** $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$ **30.** $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$

Практичне заняття № 4

1. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

1. $\int \cos^4 3x \cdot \sin^2 3x\, dx$

2. $\int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cdot \cos^3 x \cdot dx$

3. $\int \cos^3 x \cdot \sin^8 x\, dx$

4. $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x\, dx$

5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx$

6. $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x} \cdot \cos^3 2x \cdot dx$

7. $\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x\, dx$

8. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx$

9. $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\, dx$

10. $\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x\, dx$

11. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$

12. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \cdot \sin^3 x\, dx$

13. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$

14. $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x} \cdot \sin^3 2x\, dx$

15. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}} dx$

16. $\int \sin^2 2x \cdot \cos^4 2x\, dx$

17. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cdot \cos^3 x\, dx$

18. $\int \sqrt[5]{\cos^4 x} \cdot \sin^3 x\, dx$

19. $\int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x\, dx$

20. $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}} dx$

21. $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} dx$

22. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$

23. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$

24. $\int \frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$

25. $\int \sin^3 x\cdot\cos^8 x\;dx$

26. $\int \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$

27. $\int \sin^5 x\cdot\sqrt[5]{\cos^3 x}\;dx$

28. $\int \sin^4 x\cdot\cos^5 x\;dx$

29. $\int \sin^4 3x\cdot\cos^2 3x\;dx$

30. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$

2. Знайти невизначені інтеграли за допомогою тригонометричних підстановок:

1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\;dx$ **2.** $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\;dx$ **3.** $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\;dx$

4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\;dx$ **5.** $\int \sqrt{4-x^2}\;dx$ **6.** $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\;dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\;dx$ **8.** $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\;dx$ **9.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}\;dx$ **11.** $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}\;dx$ **12.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}$

13. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\;dx$ **14.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$ **15.** $\int x^3\cdot\sqrt{9-x^2}\;dx$

16. $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$ **17.** $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2-1}}$ **18.** $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\;dx$

19. $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt{x^2-1}}$ **20.** $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}\;dx$ **21.** $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+9}}$

22. $\int x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}\ dx$ **23.** $\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\ dx$ **24.** $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^4}\ dx$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$ **26.** $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}\ dx$ **27.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$

28. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **29.** $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}\ dx$ **30.** $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\ dx$

Практичне заняття № 5

1. Ознайомитись з основними властивостями визначеного інтеграла та з формулою Ньютона-Лейбниця.

2. Обчислити визначені інтеграли:

1)

1. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\ dx$ **11.** $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\ dx$ **21.** $\int_1^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^2 x\ dx$

2. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{dx}}{1-\cos^2 x}$ **12.** $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{\mathrm{x}}}{\sqrt{x}}\ dx$ **22.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{4-3x}}$

3. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{12x^5\mathrm{dx}}{\sqrt{x^6+9}}$ **13.** $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\ dx$ **23.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{x\ dx}}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^3 x\ dx$ **14.** $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \frac{x\ dx}{\cos^2\left(x^2\right)}$ **24.** $\int_0^{-3} \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{25+3x}}$

5. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\ dx$ **15.** $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\mathrm{dx}}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ **25.** $\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{dx}}{4x^2-9}$

6. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}\ dx$ **16.** $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{x\ dx}}{\sqrt{4-x^2}}$ **26.** $\int_0^1 \frac{\mathrm{x}^2\mathrm{dx}}{1+x^2}$

7. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^8}$

17. $\int_0^1 x^2\left(1+e^{x^3}\right)dx$

27. $\int_{\pi/18}^{\pi/6} ctg3x\,dx$

8. $\int_1^{\sqrt{3}} x\cdot\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

18. $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4+4}}$

28. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

9. $\int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx$

19. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3 x\cdot\cos x\,d$

29. $\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{1+x^2}$

10 $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

20. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{1+x^6}$

30. $\int_0^1 x^3\cdot\sqrt{4+5x^4}\,dx$

2)

1. $\int_{-3}^0 (x-2)e^{-\frac{x}{3}}\,dx$

11. $\int_0^4 x^3\cdot\sqrt{x^2+9}\,dx$

21. $\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$

2. $\int_1^{e^2} \sqrt{x}\cdot\ln x\,dx$

12. $\int_0^{\pi/2} (x+3)\cdot\sin x$

22. $\int_0^1 \frac{\arcsin x/2}{\sqrt{2-x}}\,dx$

3. $\int_{-2}^0 x^2e^{-\frac{x}{2}}\,dx$

13. $\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}}\,dx$

23. $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)dx}{(1+x)^2}$

4. $\int_1^{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{x}\,dx$

14. $\int_0^1 x\cdot arctgx\,dx$

24. $\int_{-1/2}^0 x\cdot e^{-2x}\,dx$

5. $\int_0^{\pi/8} x^2\cdot\sin 4x\,dx$

15. $\int_0^{\pi/9} \frac{xdx}{\cos^2 3x}$

25. $\int_{-1}^0 (x+1)\cdot e^{-2x}\,dx$

6. $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x\,dx$

16. $\int_0^1 arctg\sqrt{x}\,dx$

26. $\int_1^l x\cdot\ln^2 x\,dx$

7. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\, dx$

8. $\int\limits_{-1}^{0} x\cdot\ln(1-x)\, dx$

9. $\int\limits_1^2 x^2\cdot\ln x\, dx$

10 $\int\limits_1^2 (x-1)\cdot\ln \mathrm{x}\, dx$

17. $\int\limits_1^l \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx$

18. $\int\limits_2^3 x\cdot\ln(x-1)\, dx$

19. $\int\limits_{1/2}^{1} \arcsin(1-x)$

20. $\int\limits_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}$

27. $\int\limits_{3/2}^{2} arctg(2x-3)\, dx$

28. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cdot\sin x\cdot\cos x\, dx$

29. $\int\limits_0^{\pi/4} x\cdot tg^2 x\, dx$

30. $\int\limits_1^2 \ln(3x+2)\, dx$

3. Обчислити площу фігури обмеженої зазначеними лініями:

1. $y=(x-2)^3,\ y=4x-8.$

2. $y=\cos x\sin^2 x,\ y=0,$
$(0\le x\le \pi/2).$

3. $y=\sqrt{4-x^2},\ y=0,$
$x=0,\ x=1.$

4. $y=4-x^2,\ y=x^2-2x.$

5. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}},\ y=0,$
$x=1,\ x=e^3.$

6. $y=(x+1)^2,\ y^2=x+1.$

7. $y=x\sqrt{36-x^2},\ y=0,$
$(0\le x\le 6).$

16. $y=x\sqrt{9-x^2},\ y=0,\ x\ge 0.$

17. $y=\sin x\cos^2 x,\ y=0,$
$(0\le x\le \pi/2).$

18. $y=x^2\sqrt{4-x^2},\ y=0,$
$(0\le x\le 2).$

19. $y=\sqrt{e^x-1},\ y=0,\ x=\ln 2.$

20. $y=\arccos x,\ y=0,\ x=0.$

21. $y=2x-x^2+3$
$y=x^2-4x+3.$

22. $x=\arccos y,\ x=0,\ y=0.$

8. $y = x \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = \sqrt{3}$.

9. $x = \sqrt{e^y - 1}$, $x = 0$, $y = \ln 2$.

10. $y = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$.

11. $x = (y-2)^2$, $x = 4y - 8.$

12. $y = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$, $y = 0$, $x = 1$.

13. $y = \dfrac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = e^3$.

14. $y = x^2\sqrt{16-x^2}$, $y = 0$, $(0 \le x \le 4)$.

15. $y = (x-1)^2$, $y^2 = x - 1$.

23. $y = x^2\sqrt{8-x^2}$, $y = 0$, $\left(0 \le x \le 2\sqrt{2}\right)$.

24. $y = x\sqrt{4-x^2}$, $y = 0$, $(0 \le x \le 2)$.

25. $y = \dfrac{1}{1+\cos x}$, $y = 0$, $x = \pi/2$, $x = -\pi/2$.

26. $y = \cos^5 x \sin 2x$, $y = 0$, $(0 \le x \le \pi/2)$.

27. $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 2y.$

28. $y = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$.

29. $x = \sqrt{4-y^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

30. $y = x^2 \cos x$, $y = 0$, $(0 \le x \le \pi/2)$.

Практичне заняття № 6

1. Обчислити довжини дуг кривих, заданих у прямокутній системі координат:

1. $y = \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$.

16. $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$, $1 \le x \le 2$.

2. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, $0\le x\le {}^7\!/_9$.

3. $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$, ${}^1\!/_4\le x\le 1$.

4. $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$, $0\le x\le {}^8\!/_9$.

5. $y=2+ch\ x$, $0\le x\le 1$.

6. $y=e^x+13$, $\ln\sqrt{15}\le x\le \ln\sqrt{24}$.

7. $y=2-e^x$, $\ln\sqrt{3}\le x\le \ln\sqrt{8}$.

8. $y=1-\ln\sin x$, ${}^\pi\!/_3\le x\le {}^\pi\!/_2$.

9. $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}+5$, ${}^1\!/_9\le x\le 1$.

10. $y=\ln\sin x$, ${}^\pi\!/_3\le x\le {}^\pi\!/_2$.

11. $y=ch\ x+3$, $0\le x\le 1$.

12. $y=\ln\cos x+2$, $0\le x\le {}^\pi\!/_6$.

17. $y=\ln\left(\dfrac{5}{2x}\right)$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

18. $y=\ln\left(x^2-1\right)$, $2\le x\le 3$.

19. $y=\ln\left(1-x^2\right)$, $0\le x\le {}^1\!/_4$.

20. $y=1-\ln\cos x$, $0\le x\le {}^\pi\!/_6$.

21. $y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$, $0\le x\le {}^1\!/_4$.

22. $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le {}^{15}\!/_{16}$.

23. $y=\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+4$, $0\le x\le {}^1\!/_2$.

24. $y=-\arccos x+\sqrt{1-x^2}+1$, $0\le x\le {}^9\!/_{16}$.

25. $y=\ln\left(\dfrac{7}{x}\right)$, $\ln\sqrt{3}\le x\le \ln\sqrt{8}$.

26. $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le {}^3\!/_4$.

27. $y=e^x+2$, $\ln\sqrt{8}\le x\le \ln\sqrt{24}$.

13. $y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}+3,\ 0\le x\le 2.$

14. $y=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}+3}{4},\ 0\le x\le 2.$

15. $y=chx+3,$
$0\le x\le 1.$

28. $y=1-\ln\left(x^{2}-1\right),\ 3\le x\le 4.$

29. $y=e^{x}+e^{-x},$
$\ln\sqrt{3}\le x\le \ln\sqrt{15}.$

30. $y=\ln x,$
$\ln 3\le x\le \ln 8.$

2. Обчислити довжини дуг кривих, які задані параметричними рівняннями:

1. $\begin{cases} x=5\left(t-\sin t\right), \\ y=5\left(1-\cos t\right), \end{cases}$
$0\le t\le \pi.$

2. $\begin{cases} x=4\left(\cos t+t\sin t\right), \\ y=4\left(\sin t-t\cos t\right), \end{cases}$
$0\le t\le 2\pi.$

3. $\begin{cases} x=10\cos^{3} t, \\ y=10\sin^{3} t, \end{cases}$
$0\le t\le \pi/2.$

4. $\begin{cases} x=3\left(t-\sin t\right), \\ y=3\left(1-\cos t\right), \end{cases}$
$\pi\le t\le 2\pi.$

5. $\begin{cases} x=3\left(\cos t+t\sin t\right), \\ y=3\left(\sin t-t\cos t\right), \end{cases}$
$0\le t\le \pi/3.$

16. $\begin{cases} x=3\left(2\cos t-\cos 2t\right), \\ y=3\left(2\sin t-\sin 2t\right), \end{cases}$
$0\le t\le 2\pi.$

17. $\begin{cases} x=\left(t^{2}-2\right)\sin t+2t\cos t, \\ y=\left(2-t^{2}\right)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$
$0\le t\le \pi.$

18. $\begin{cases} x=e^{t}\left(\cos t+\sin t\right), \\ y=e^{t}\left(\cos t-\sin t\right), \end{cases}$
$0\le t\le \pi.$

19. $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t \end{cases}$
$\pi/2\le t\le 2\pi/3.$

20. $\begin{cases} x=\left(t^{2}-2\right)\sin t+2t\cos t, \\ y=\left(2-t^{2}\right)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$
$0\le t\le \pi/3.$

6. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/3$.

7. $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t), \\ y = 2{,}5(1 - \cos t), \end{cases}$
$\pi/2 \le t \le \pi$.

8. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi$.

9. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/6$.

10. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$\pi/2 \le t \le 2\pi/3$.

11. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/4$.

12. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$
$\pi/6 \le t \le \pi/4$.

21. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$\pi/2 \le t \le \pi$.

22. $\begin{cases} x = 3{,}5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3{,}5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/2$.

23. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/2$.

24. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$0 \le t \le 2\pi$.

25. $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/3$.

26. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \le t \le 2\pi$.

27. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$0 \le t \le 3\pi/2$.

13. $\begin{cases} x = 2(\mathrm{t} - \sin \mathrm{t}), \\ y = 2(1 - \cos \mathrm{t}), \end{cases}$

$0 \le \mathrm{t} \le \pi/2$.

28. $\begin{cases} x = 4(2\cos \mathrm{t} - \cos 2\mathrm{t}), \\ y = 4(2\sin \mathrm{t} - \sin 2\mathrm{t}), \end{cases}$

$0 \le \mathrm{t} \le \pi$.

14. $\begin{cases} x = 2(\cos \mathrm{t} + \mathrm{t}\sin \mathrm{t}), \\ y = 2(\sin \mathrm{t} - \mathrm{t}\cos \mathrm{t}), \end{cases}$

$0 \le \mathrm{t} \le \pi/2$.

29. $\begin{cases} x = (\mathrm{t}^2 - 2)\sin \mathrm{t} + 2\mathrm{t}\cos \mathrm{t}, \\ y = (2 - \mathrm{t}^2)\cos \mathrm{t} + 2\mathrm{t}\sin \mathrm{t}, \end{cases}$

$0 \le \mathrm{t} \le 3\pi$.

15. $\begin{cases} x = 2\cos^3 \mathrm{t}, \\ y = 2\sin^3 \mathrm{t}, \end{cases}$

$0 \le \mathrm{t} \le \pi/4$.

30. $\begin{cases} x = e^{\mathrm{t}}(\cos \mathrm{t} + \sin \mathrm{t}), \\ y = e^{\mathrm{t}}(\cos \mathrm{t} - \sin \mathrm{t}), \end{cases}$

$\pi/6 \le \mathrm{t} \le \pi/4$

3. Обчислити довжини дуг кривих, які задані рівняннями в полярній системі координат:

1. $\mathrm{r} = 3e^{3\varphi/2}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

2. $\mathrm{r} = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

3. $\mathrm{r} = 6e^{12\varphi/5}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

4. $\mathrm{r} = 4e^{4\varphi/3}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.

5. $\mathrm{r} = 5e^{5\varphi/12}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.

6. $\mathrm{r} = 1 - \sin\varphi$,

$-\pi/2 \le \varphi \le \pi/6$.

16. $\mathrm{r} = 2e^{4\varphi/3}$,

$-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

17. $\mathrm{r} = 5e^{5\varphi/12}$,

$-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

18. $\mathrm{r} = 3e^{3\varphi/2}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.

19. $\mathrm{r} = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.

20. $\mathrm{r} = 12e^{5\varphi/12}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.

21. $\mathrm{r} = 2(1 - \cos\varphi)$,

$-\pi \le \varphi \le -\pi/2$.

7. $r = 3(1+\sin\varphi)$, $-\pi/6 \le \varphi \le 0$.

8. $r = 5(1-\cos\varphi)$, $-\pi/3 \le \varphi \le 0$.

9. $r = 7(1-\sin\varphi)$, $-\pi/6 \le \varphi \le \pi/6$.

10. $r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 3/4$.

11. $r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 5/12$.

12. $r = 4\varphi$, $0 \le \varphi \le 3/4$.

13. $r = 5\varphi$, $0 \le \varphi \le 12/5$.

14. $r = 8\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/4$.

15. $r = 2\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/6$.

22. $r = 4(1-\sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi/6$.

23. $r = 6(1+\sin\varphi)$, $-\pi/2 \le \varphi \le 0$.

24. $r = 8(1-\cos\varphi)$, $-2\pi/3 \le \varphi \le 0$.

25. $r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 4/3$.

26. $r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 12/5$.

27. $r = 3\varphi$, $0 \le \varphi \le 4/3$.

28. $r = 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/6$.

29. $r = 6\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.

30. $r = 8\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/4$.

Змістовий модуль 2.2 Функції декількох змінних

Практичне заняття № 7

1. Побудувати область визначення функцій:

1. $z = 3xy : (2x^2 - 5y)$
2. $z = arcsin(x - y)$
3. $z = \sqrt{y^2 - x^2}$
4. $z = ln(x^2 + y^2 - 4)$
5. $z = 2 : (6 - x^2 - y^2)$
6. $z = \sqrt{2x^2 - 5y^2}$
7. $z = arccos(x + y)$
8. $z = 3x + y : (2 - x + y)$
9. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
10. $z = ln(3 - x^2 + y^2)$
11. $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$
12. $z = 4xy : (x - 3y^2 + 1)$
13. $z = \sqrt{xy} : (x^2 + y^2)$
14. $z = arcsin(x : y)$

15. $z = ln(y^2 - x^2)$

16. $z = x^3 y : (3 + x^2 - y)$

17. $z = arccos(x + 2y)$

18. $z = arcsin(2x - y)$

19. $z = ln(8 - x^2 - y^2)$

20. $z = \sqrt{3 - x^2 + 2y^2}$

21. $z = 1 : \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

22. $z = 4x + y : (2x - 5y)$

23. $z = \sqrt{3x - 2y} : (4 + x)$

24. $z = 7x^3 y : \sqrt{x - 4y}$

25. $z = 5 : (3 - x^2 - y^2)$

26. $z = \sqrt[4]{x^2 + 2y^2 - 4}$

27. $z = lg(2x - y + 3)$

28. $z = 4xy : (x^2 - y^2)$

29. $z = 1 : (2x^2 + 3y^2 - 6)$

30. $z = \sqrt{1 - x^2 + y}$

2. Знайти частинні похідні і частинні диференціали наступних функцій

1. $z = ln(y^2 - e^{-x})$

2. $z = arcsin\sqrt{xy}$

3. $z = arctg(x^2 + y^3)$

4. $z = cos(x^3 - 2xy)$

5. $z = sin\sqrt{y : x^3}$

6. $z = tg(x^3 + y^2)$

7. $z = ctg\sqrt{xy^3}$

8. $z = e^{-x^2 + y^2}$

9. $z = ln(3x^2 - y^4)$

10. $z = arccos(y : x)$

11. $z = arcctg(xy^2)$

12. $z = cos\sqrt{x^2 + y^2}$

13. $z = sin\sqrt{x - y^3}$

14. $z = tg(x^3 y^4)$

15. $z = ctg(3x - 2y)$

16. $z = e^{2x^2 - y^3}$

17. $z = ln(\sqrt{xy} - 1)$

18. $z = arcsin(2x^3 y)$

19. $z = arctg(x^2 : y^3)$

20. $z = cos(x - \sqrt{xy^3})$

21. $z = sin((x + y) : (x - y))$

22. $z = tg((2x - y^2) : x)$

23. $z = ctg\sqrt{x : (x - y)}$

24. $z = e^{-\sqrt{x^2 + y^3}}$

25. $z = ln(3x^2 - y^2)$

26. $z = arccos(x - y^2)$

27. $z = arctg(x^3 : y)$

28. $z = cos((x - y) : (x^2 + y^2))$

29. $z = sin\sqrt{y : (x + y)}$ 30. $z = e^{-\sqrt{x} + y^3}$

3. Обчислити значення частинних похідних від поданої функції у точці $M_o(x_o, y_o, z_o)$

1. $f(x,y,z) = z : \sqrt{x^2 + y^2}$, $M_o(0,-1,-1)$

2. $f(x,y,z) = ln(x + y : (2z))$, $M_o(1,2,1)$

3. $f(x,y,z) = (sin x)^{yz}$, $M_o(\frac{\pi}{6},1,2)$

4. $f(x,y,z) = ln(x^3 + 2y^3 - z^3)$, $M_o(2,1,0)$

5. $f(x,y,z) = x : \sqrt{y^2 z^2}$, $M_o(1,0,1)$

6. $f(x,y,z) = ln\,cos(x^2 y^2 + z)$, $M_o(0,0,\frac{\pi}{4})$

7. $f(x,y,z) = 27 \cdot \sqrt[3]{x + y^2 + z^3}$, $M_o(3,4,2)$

8. $f(x,y,z) = arctg(xy^2 + z)$, $M_o(2,1,0)$

9. $f(x,y,z) = arcsin(x^2 : y - z)$, $M_o(2,5,0)$

10. $f(x,y,z) = \sqrt{x} \cdot sin(y : z)$, $M_o(4,0,2)$

11. $f(x,y,z) = y : \sqrt{x^2 + z^2}$, $M_o(-1,1,0)$

12. $f(x,y,z) = arctg(xz : y^2)$, $M_o(2,1,1)$

13. $f(x,y,z) = ln\,sin(x - 2y + z : 4)$, $M_o(1,1/2,\pi)$

14. $f(x,y,z) = y : x + z : y - x : z$, $M_o(1,1,2)$

15. $f(x,y,z) = 1 : \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$, $M_o(1,2,2)$

16. $f(x,y,z) = ln(x - y^2) - \sqrt{x^2 - z^2}$, $M_o(5,1,3)$

17. $f(x,y,z) = \sqrt{z} \cdot x^y$, $M_o(1,2,4)$

18. $f(x,y,z) = -z : \sqrt{x^2 + y^2}$, $M_o(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$

19. $f(x,y,z)=ln(x^3+\sqrt[3]{y}-z),$ $\qquad M_o(2,1,8)$

20. $f(x,y,z)=z:(x^4+y^2),$ $\qquad M_o(2,3,25)$

21. $f(x,y,z)=8\cdot\sqrt[5]{x^3+y^2+z},$ $\qquad M_o(3,2,1)$

22. $f(x,y,z)=ln(\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{y}-z),$ $\qquad M_o(1,1,1)$

23. $f(x,y,z)=-2x:\sqrt{y^2+z^2},$ $\qquad M_o(3,0,1)$

24. $f(x,y,z)=z\cdot e^{-0{,}5(x^2+y^2)},$ $\qquad M_o(0,0,1)$

25. $f(x,y,z)=(sin(x-y)):z,$ $\qquad M_o(\pi/2,\pi/3,\sqrt{3})$

26. $f(x,y,z)=\sqrt{z}\cdot ln(\sqrt{x}+\sqrt{y}),$ $\qquad M_o(4,1,4)$

27. $f(x,y,z)=x\cdot z:(x-y),$ $\qquad M_o(3,1,1)$

28. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos z},$ $\qquad M_o(3,4,\pi/2)$

29. $f(x,y,z)=z\cdot e^{-xy},$ $\qquad M_o(0,1,1)$

30. $f(x,y,z)=arcsin(x\cdot\sqrt{y})-yz^2,$ $\qquad M_o(0,4,1)$

Практичне заняття № 8

1. Обчислити з точністю до 0,001 у точці, де $t=t_0$, значення похідної складної функції $u=u(x,y)$, де $x=x(t)$, $y=y(t)$

1. $u=e^{x-2y}$,	$x=sin\,t,$	$y=t^3,$	$t_o=0$
2. $u=ln(e^x+e^{-y}),$	$x=t^2,$	$y=t^3,$	$t_o=-1$
3. $u=y^x,$	$x=ln(t-1),$	$y=e^{0,5t},$	$t_o=2$
4. $u=e^{y-2x+2},$	$x=sin\,t,$	$y=cos\,t,$	$t_o=\pi/2$
5. $u=x^2\cdot e^y,$	$x=cos\,t,$	$y=sin\,t,$	$t_o=\pi$
6. $u=ln(e^x+e^y),$	$x=t^2,$	$y=t^3,$	$t_o=1$

7. $u = x^y$, $x = e^t$ $y = \ln t$, $t_o = 1$

8. $u = e^{y-2x}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $t_o = 0$

9. $u = x^2 \cdot e^{-y}$, $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$, $t_o = \pi/2$

10. $u = \ln(e^{-x} + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^3$, $t_o = -1$

11. $u = e^{y-2x-1}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t_o = \pi/2$

12. $u = \arcsin(x : y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_o = \pi$

13. $u = \arccos(2x : y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_o = \pi$

14. $u = x^2 : (y+1)$, $x = 1 - 2t$, $y = arctgt$, $t_o = \pi$

15. $u = x : y$, $x = e^t$, $y = 2 - e^{2t}$, $t_o = 0$

16. $u = \ln(e^{-x} + e^{-2y})$, $x = t^2$, $y = {}^1\!/_3 t^3$, $t_o = 1$

17. $u = \sqrt{x + y^2 + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_o = 1$

18. $u = \arcsin(x^2 : y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_o = \pi$

19. $u = y^2 : x$, $x = 1 - 2t$, $y = 1 + arctgt$, $t_o = 0$

20. $u = y : x - x : y$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_o = \pi/4$

21. $u = \sqrt{x^2 + y + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_o = 1$

22. $u = src\sin(x : (2y))$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_o = \pi$

23. $u = x : y - y : x$, $x = \sin 2t$, $y = tg^2 t$, $t_o = \pi/4$

24. $u = \sqrt{x + y + 3}$, $x = \ln t$, $y = t^2$, $t_o = 1$

25. $u = y : x$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$, $t_o = 0$

26. $u = \arcsin(2x : y)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_o = \pi$

27. $u = \ln(e^{2x} + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^4$, $t_o = 1$

28. $u = arctg(x + y)$, $x = t^2 + 2$, $y = 4 - t^2$, $t_o = 1$

29. $u=\sqrt{x^2+y^2+3}$, $x=\ln t$, $y=t^3$, $t_o=1$

30. $u=arctg(xy)$, $x=t+3$, $y=e^t$, $t_o=0$

2. Обчислити з точністю до 0,001 значення частинних похідних від уявної функції в точці $M_o(x_o, y_o, z_o)$

1. $x^3+y^3+z^3-3xyz=4$, $M_o(2,1,1)$
2. $x^2+y^2+z^2-xy=2$, $M_o(-1,0,1)$
3. $3x+2y+z=xz+5$, $M_o(2,1,-1)$
4. $e^z+x+2y+z=4$, $M_o(1,1,0)$
5. $x^2+y^2+z^2-z-4=0$, $M_o(1,1,-1)$
6. $z^3+3xyz+3y=7$, $M_o(1,1,1)$
7. $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1{,}5$, $M_o(\pi/4, 3\pi/4, \pi/4)$
8. $e^{z-1}=\cos x\cdot\cos y+1$, $M_o(0,\pi/2,1)$
9. $x^2+y^2+z^2-6x=0$, $M_o(1,2,1)$
10. $xy=z^2-1$, $M_o(0,1,-1)$
11. $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=2$, $M_o(1,1,1)$
12. $x^2+y^2+z^2+2xz=5$, $M_o(0,2,1)$
13. $x\cos y+y\cos z+z\cos x=\pi/2$, $M_o(0,\pi/2,\pi)$
14. $3x^2y^2+2xyz^2-2x^3z+4y^3z=4$, $M_o(2,1,2)$
15. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z+2=0$, $M_o(1,1,1)$
16. $x+y+z+2=xyz$, $M_o(2,-1,-1)$
17. $x^2+y^2+z^2-2xz-2=0$, $M_o(0,1,-1)$
18. $e^z-xyz-x+1=0$, $M_o(2,1,0)$
19. $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y-15=0$, $M_o(1,-1,2)$

20. $x^2-2xy-3y^2+6x-2y+z^2-8z+20=0,$ $M_o(0,-2,2)$

21. $x^2+y^2+z^2=y-z+3,$ $M_o(1,2,0)$

22. $x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z=0,$ $M_o(1,-1,1)$

23. $x^2-y^2-z^2+6z+2x-4y+12=0,$ $M_o(0,1,-1)$

24. $\sqrt{x^2+y^2}+z^2-3z=3,$ $M_o(4,3,1)$

25. $x^2+2y^2+3z^2=59,$ $M_o(3,1,4)$

26. $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=17,$ $M_o(-2,-1,2)$

27. $x^3+3xyz-z^3=27,$ $M_o(3,1,3)$

28. $\ln z=x+2y-z+\ln 3,$ $M_o(1,1,3)$

29. $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+6=0,$ $M_o(2,1,1)$

30. $z^2=xy-z+x^2-4,$ $M_o(2,1,1)$

3. Знайти частинні похідні другого порядку зазначеної функції і перевірити, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

1. $z=e^{x^2-y^2}$
2. $z=e^{2x^2+y^2}$
3. $z=tg(x:y)$
4. $z=tg\sqrt{xy}$
5. $z=\sin(x^2-y)$
6. $z=\sin\sqrt{x^3y}$
7. $z=\arcsin(x-y)$
8. $z=\arccos(4x-y)$
9. $z=arctg(x-3y)$
10. $z=arctg(2x-y)$
11. $z=e^{\sqrt{x+y}}$
12. $z=\ln(3x^2-2y^2)$
13. $z=\arccos(x-5y)$
14. $z=ctg(y:x)$

15. $z = cos(3x^2 - y^3)$ 16. $z = cos(x^2y^2 - 5)$

17. $z = ln(5x^2 - 3y^4)$ 18. $z = arcsin(x - 2y)$

19. $z = ctg(x + y)$ 20. $z = arctg(5x + 2y)$

21. $z = ln(-3xy - 4)$ 22. $z = ln(4x^2 - 5y^3)$

23. $z = cos(xy^2)$ 24. $z = arcsin(4x + y)$

25. $z = arctg(x + y)$ 26. $z = sin\sqrt{xy}$

27. $z = arccos(2x + y)$ 28. $z = arctg(3x + 2y)$

29. $z = arcsin(x - 4y)$ 30. $z = \ln(3x + 4y)$

Практичне заняття № 9

1. Дана функція $u = u(x, y, z)$ і точки M_1 і M_2. Обчислити: похідну цієї функції в точці M_1 за напрямом вектора $\overline{M_1M_2}$; $\overrightarrow{\text{grad}}\, u(M_1)$.

1. $u = u(M) = x^2y + y^2z + z^2x,$ $M_1(1,-1,2),$ $\mathrm{M}_2(3,4,-1)$
2. $u = u(M) = 5xy^3z^2,$ $M_1(2,1,-1),$ $\mathrm{M}_2(4,-3,0)$
3. $u = u(M) = \ln(x^2 + y^2 + z^2),$ $M_1(-1,2,1),$ $\mathrm{M}_2(3,1,-1)$
4. $u = u(M) = z \cdot \exp\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$ $M_1(0,0,0),$ $\mathrm{M}_2(3,-4,2)$
5. $u = u(M) = \ln(xy + yz + xz),$ $M_1(-2,3,-1),$ $\mathrm{M}_2(2,1,-3)$
6. $u = u(M) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2},$ $M_1(1,1,1),$ $\mathrm{M}_2(3,2,1)$
7. $u = u(M) = x^2y + xz^2 - 2,$ $M_1(1,1,-1),$ $\mathrm{M}_2(2,-1,3)$

8. $u = u(M) = x \cdot e^{y} + ye^{x} - z^{2}$, $M_1(3,0,2)$, $\mathrm{M}_2(4,1,3)$

9. $u = u(M) = 3xy^{2} + z^{2} - xyz$, $M_1(1,1,2)$, $\mathrm{M}_2(3,-1,4)$

10. $u = u(M) = 5x^{2}yz - xy^{2}z + yz^{2}$, $M_1(1,1,1)$, $\mathrm{M}_2(9,-3,9)$

11. $u = u(M) = x : (x^{2} + y^{2} + z^{2})$, $M_1(1,2,2)$, $\mathrm{M}_2(-3,2,-1)$

12. $u = u(M) = y^{2}z - 2xyz + z^{2}$, $M_1(3,1,-1)$, $\mathrm{M}_2(-2,1,4)$

13. $u = u(M) = x^{2} + y^{2} + z^{2} - 2xyz$, $M_1(1,-1,2)$, $\mathrm{M}_2(5,-1,4)$

14. $u = u(M) = \ln(1 + xy^{2} + z^{2})$, $M_1(1,1,1)$, $\mathrm{M}_2(3,-5,1)$

15. $u = u(M) = x^{2} + 2y^{2} - 4z^{2} - 5$, $M_1(1,2,1)$, $\mathrm{M}_2(-3,-2,6)$

16. $u = u(M) = \ln(x^{3} + y^{3} + z + 1)$, $M_1(1,3,0)$, $\mathrm{M}_2(-4,1,3)$

17. $u = u(M) = x - 2y + e^{z}$, $M_1(-4,-5,0)$, $\mathrm{M}_2(2,3,4)$

18. $u = u(M) = x^{y} - 3xyz$, $M_1(1,-1,2)$, $\mathrm{M}_2(3,4,-1)$

19. $u = u(M) = 3x^{2}yz^{3}$, $M_1(1,-1,2)$, $\mathrm{M}_2(3,4,-1)$

20. $u = u(M) = \exp\left(xy + z^{2}\right)$, $M_1(-5,0,2)$, $\mathrm{M}_2(2,4,-3)$

21. $u = u(M) = x^{yz}$, $M_1(3,1,4)$, $\mathrm{M}_2(1,-1,-1)$

22. $u = u(M) = \left(x^{2} + y^{2} + z^{2}\right)$, $M_1(1,2,-1)$, $\mathrm{M}_2(0,-1,3)$

23. $u = u(M) = \left(x - y\right)^{z}$, $M_1(1,5,0)$, $\mathrm{M}_2(3,7,-2)$

24. $u = u(M) = x^{2}y + y^{2}z - 3z$, $M_1(0,-2,-1)$, $\mathrm{M}_2(12,-5,0)$

25. $u = u(M) = 10 : (x^{2} + y^{2} + z^{2} + 1)$, $M_1(-1,2,-2)$, $\mathrm{M}_2(2,0,1)$

26. $u = u(M) = \ln(1 + x^{2} - y^{2} + z^{2})$, $M_1(1,1,1)$, $\mathrm{M}_2(5,-4,8)$

27. $u = u(M) = xy^{-1} + yz^{-1} - zx^{-1}$, $M_1(-1,1,1)$, $\mathrm{M}_2(2,3,4)$

28. $u = u(M) = x^{3} + xy^{2} - 6xyz$, $M_1(1,3,-5)$, $\mathrm{M}_2(4,2,-2)$

29. $u = u(M) = xy^{-1} - yz^{-1} - xz^{-1}$, $M_1(2,2,2)$, $\mathrm{M}_2(-3,4,1)$

30. $u = u(M) = \exp\left(x - yz\right)$, $M_1(1,0,3)$, $\mathrm{M}_2(2,-4,5)$

2. Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до поверхні S у точці $M_o(x_o, y_o, z_o)$

1. $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0,$ $M_o(2,1,-1)$
2. $S: x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy,$ $M_o(-2,1,2)$
3. $S: x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7,$ $M_o(1,2,1)$
4. $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8,$ $M_o(-1,1,2)$
5. $S: 2x^2 - y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0,$ $M_o(2,1,-1)$
6. $S: x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0,$ $M_o(2,1,-1)$
7. $S: x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46,$ $M_o(1,2,-3)$
8. $S: x^2 + y^2 - xz - yz = 0,$ $M_o(0,2,2)$
9. $S: x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2,$ $M_o(1,1,1)$
10. $S: y^2 - z^2 + x^2 - 2xz + 2x = z,$ $M_o(1,1,1)$
11. $S: z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y,$ $M_o(-1,-1,-1)$
12. $S: z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y,$ $M_o(1,-1,1)$
13. $S: z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y,$ $M_o(-1,1,1)$
14. $S: x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13,$ $M_o(3,1,2)$
15. $S: 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9,$ $M_o(1,-2,1)$
16. $S: z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2,$ $M_o(2,1,0)$
17. $S: 2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3,$ $M_o(1,2,1)$
18. $S: x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14,$ $M_o(3,1,4)$
19. $S: x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4,$ $M_o(1,1,2)$
20. $S: x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5,$ $M_o(-2,1,0)$

21. $S: x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11,$ $M_o(1,4,-1)$

22. $S: x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8,$ $M_o(0,2,0)$

23. $S: x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0,$ $M_o(-1,-1,1)$

24. $S: x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z,$ $M_o(1,0,1)$

25. $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0,$ $M_o(1,-1,1)$

26. $S: x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8,$ $M_o(1,1,0)$

27. $S: z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10,$ $M_o(-1,1,3)$

28. $S: z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15,$ $M_o(-1,3,4)$

29. $S: z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10,$ $M_o(-7,1,8)$

30. $S: z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1,$ $M_o(1,-1,2)$

Практичне заняття № 10

1. Ознайомитись з необхідними та достатніми умовами екстремуму функції декількох змінних.

2. Дослідити на екстремум наступні функції:

1. $z = y \cdot \sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$
2. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$
3. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$
4. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$
5. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$
6. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$
7. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$
8. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$
9. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$
10. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$
11. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$
12. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$
13. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$
14. $z = x^3 + y^3 - 3xy$
15. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$
16. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$
17. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$
18. $z = xy(12 - x - y)$
19. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$
20. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$

21. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

22. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

23. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

24. $z = xy(6 - x - y)$

25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$

26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

27. $z = (x-1)^2 + 2y^2$

28. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$

29. $z = x^2 + 3(y+2)^2 + 1$

30. $z = 2(x+y) - x^2 - y^2 - 2$

Практичне заняття № 11

1. Знайти найбільше і найменше значення функції в заданій області:

1. $z = 3x + y - xy$ $\quad D: y = x, y = 4, x = 0$
2. $z = xy - x - 2y$ $\quad D: x = 3, y = x, y = 0$
3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ $\quad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$
4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ $\quad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$
5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ $\quad D: x - y + 1 = 0, y = 0, x = 3$
6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$ $\quad D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$
7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ $\quad D: x = 0, x = 1, y = 6, y = 0$
8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ $\quad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$
9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ $\quad D: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$
10. $z = x^2 + 2xy - 10$ $\quad D: y = 0, y = x^2 - 4$
11. $z = xy - 2x - y$ $\quad D: y = x, y = 4, x = 0$
12. $z = 0{,}5 \cdot x^2 - xy$ $\quad D: y = x, y = 4, x = 0$
13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ $\quad D: x = 0, y = 0, x + y = 1$
14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$ $\quad D: y = \sqrt{9 - 2{,}5 \cdot x^2}, y = 0$
15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ $\quad D: x = -3, x + y + 1 = 0, y = 0$
16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$ $\quad D: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0$
17. $z = 2x^2 + 2xy - 0{,}5y^2 - 4x$ $\quad D: y = 2x, y = 2, x = 0$
18. $z = x^2 - 2xy + 2{,}5y^2 - 2x$ $\quad D: y = x, y = 4, x = 0$

19. $z = xy - 3x - 2y$ $\qquad D: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$

20. $z = x^2 + xy - 2$ $\qquad D: y = 4x^2 - 4, y = 0$

21. $z = x^2 y \cdot (4 - x - y)$ $\qquad D: x = 0, y = 0, y = 6 - x$

22. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ $\qquad D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$

23. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ $\qquad D: x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0$

24. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ $\qquad D: y = x, y = 4, x = 0$

25. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$ $\qquad D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$

26. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ $\qquad D: y = x + 2, y = 0, x = 2$

27. $z = 4 - 2x^2 - y^2$ $\qquad D: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$

28. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ $\qquad D: x = -1, x = 1, y = \pm 1$

29. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ $\qquad D: x + y + 2 = 0, x = 0, y = 0$

30. $z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2$ $\qquad D: x = 0, y = 0, x + y = 6$

Змістовий модуль 2.3 Диференціальні рівняння. Рівняння математичної фізики.

Практичне заняття № 12

1. Знайти загальний розв’язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння

1. $e^{x+3y} dy = xdx$ $\qquad$ 2. $x^{-1} \cdot e^{-x^2} dy + sec^2\, ydx = 0$

3. $y' = (2x - 1) \cdot ctgy$ $\qquad$ 4. $sec^2\, x \cdot tgydy = -sec^2\, y \cdot tgx \cdot dx$

5. $(1 + e^x) \cdot ydy - e^y dx = 0$ $\qquad$ 6. $(y^2 + 3)dx = e^x \cdot x^{-1} \cdot ydy$

7. $y' = (2y + 1) \cdot tgx$ $\qquad$ 8. $sin\, y\, cos\, xdy - cos\, y\, sin\, dx = 0$

9. $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$ $\qquad$ 10. $sin(x + y)dx + sec\, ydy = sin(y - x)dx$

11. $y' = e^{2x} : ln\, y$ $\qquad$ 12. $3e^x sin\, ydx + (1 - e^x) cos\, ydy = 0$

13. $2^{x^2 + y} dy + xdx = 0$ $\qquad$ 14. $sin\, x \cdot tgydx - cosecydy = 0$

15. $y' = e^{x^2} \cdot (1 + y^2) \cdot x$ $\qquad$ 16. $cos(x - 2y)y' + cos(x + 2y)y' = sec\, x$

17. $1+e^{y}+e^{y}\cdot y'=0$

18. $ctgx\cdot cos^{2}ydx+sin^{2}x\cdot tgydy=0$

19. $y'ctgx+y=2$

20. $sin\,x\cdot y'=y\cdot cos\,x+2\,cos\,x$

21. $3^{y^{2}-x^{2}}=y\cdot y'\cdot x^{-1}$

22. $cos^{3}y\cdot y'-cos(2x+y)=cos(2x-y)$

23. $(1+e^{3y})x\cdot dx=e^{3y}dy$

24. $(sin(2x+y)-sin(2x-y))dx=cos\,ecydy$

25. $y'\,sin\,x=y\,ln\,y$

26. $e^{x}\cdot tgydx=(1-e^{x})\,sec^{2}ydy$

27. $e^{x}\cdot sin\,ydx+tgy\cdot dy=0$

28. $y'+sin(x+y)=sin(x-y)$

29. $y'\cdot\sqrt{1-x^{2}}-cos^{2}y=0$

30. $cos\,ydx=2\sqrt{1+x^{2}}dy+cos\,y\cdot\sqrt{1+x^{2}}dy$

2. Знайти загальний розв’язок

1. $(xy+x^{3}y)y'=1+y^{2}$

2. $y^{2}\,ln\,xdx=(y-1)xdy$

3. $y-xy'=2(1+x^{2}y')$

4. $y-xy'=1+x^{2}y'$

5. $(x+4)dy-xydx=0$

6. $(x^{2}+x)ydx+(y^{2}+1)dy=0$

7. $y':7^{y-x}=3$

8. $(x+xy^{2})dy+ydx=y^{2}dx$

9. $(xy^{3}+x)dx+(x^{2}y^{2}-y^{2})dy=0$

10. $y'+y+y^{2}=0$

11. $y'+2y-y^{2}=0$

12. $(1+y^{2})dx=(y+yx^{2})dy$

13. $y'=2xy+x$

14. $y'-xy'=3(1+x^{2}y')$

15. $2xyy'=1-x^{2}$

16. $(x^{2}-1)y'-xy=0$

17. $(y^{2}x+y^{2})dy+xdx=0$

18. $(1+x^{3})y^{3}dx=(y^{2}-1)x^{3}dy$

19. $xy'-y=y^{2}$

20. $(y+1)y'=y:\sqrt{1-x^{2}}+xy$

21. $(x^{2}y-y)^{2}y'=x^{2}y-y+x^{2}-1$

22. $2x^{2}yy'+y^{2}=2$

23. $y'=(1+y^{2}):(1+x^{2})$

24. $y'\cdot\sqrt{1+y^{2}}=x^{2}:y$

25. $(1+x^{2})y'+y\sqrt{1+x^{2}}=xy$

26. $\sqrt{y^{2}+1}dx=xydy$

27. $xyy'=(1+x^{2}):(1-y^{2})$

28. $(xy-x)^{2}dy=y(x-1)dx$

29. $\sqrt{1-y^{2}}dx+y\sqrt{1-x^{2}}dy=0$

30. $y'-xy^{2}=2xy$

3. Знайти загальний розв’язок

1. $y - xy' = x \cdot sec(y : x)$

2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$

3. $(x + 2y)dx - xdy = 0$

4. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$

5. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$

6. $y^2 + x^2 y' = xyy'$

7. $xy' - y = xtg(y : x)$

8. $xy' = y - x \cdot e^{y:x}$

9. $xy' - y = (x + y)ln(x)$

10. $xy' = y \cdot cos(ln \frac{y}{x})$

11. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$

12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

13. $y\ u = x(y' - e^{\frac{y}{x}})$

14. $y' = y : x - 1$

15. $y' x + x + y = 0$

16. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

17. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$

18. $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$

19. $(x - y)ydx - x^2 dy = 0$

20. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$

21. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$

22. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$

23. $xy' + y(ln(y : x) - 1) = 0$

24. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

25. $(y^2 - 2xy)dx - x^2 dy = 0$

26. $(x + 2y)dx + xdy = 0$

27. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$

28. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$

29. $x^2 y' = y(x + y)$

30. $y' = \dfrac{4x^2 + 3xy + y^2}{4y^2 + 3xy + x^2}$

Практичне заняття № 13

1. Знайти частинний розв'язок (задача Коші)

1. $(x^2+1)y' + 4xy = 3,$ $y(0)=0$

2. $y' + ytgx = \sec x,$ $y(0)=0$

3. $(1-x)(y'+y) = e^{-x},$ $y(0)=0$

4. $xy' - 2y = 2x^4,$ $y(1)=0$

5. $y' = 2x(x^2+y),$ $y(0)=0$

6. $y' - y = e^x,$ $y(0)=1$

7. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0,$ $y(1)=0{,}5e$

8. $\cos y dx = (x + 2\cos y)\sin y dy,$ $y(0)=0{,}25\pi$

9. $x^2y' + xy + 1 = 0,$ $y(1)=0$

10. $yx' + x = 4y^3 + 3y^2,$ $y(2)=1$

11. $(2x+y)dy = ydx + 4\ln y dy,$ $y(0)=1$

12. $y' = y : (3x - y^2),$ $y(0)=1$

13. $(1-2xy)y' = y(y-1),$ $y(0)=1$

14. $x(y'-y) = e^x,$ $y(1)=0$

15. $y = x(y' - x\cos x),$ $y(0{,}5\pi)=0$

16. $(xy'-1)\ln x = 2y,$ $y(e)=0$

17. $(2e^y - x)y' = 1,$ $y(0)=0$

18. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$ $y(1)=0$

19. $(x+y^2)dy = ydx,$ $y(0)=1$

20. $(\sin^2 y + xctgy)y' = 1,$ $y(0)=0{,}5\pi$

21. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2,$ $y(0)=0$

22. $xy' - 2y + x^2 = 0,$ $y(1)=0$

23. $xy' + y = \sin x,$ $y(0,5\pi) = 2/\pi$

24. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x,$ $y(\sqrt{2}) = 1$

25. $(1 - x^2)y' + xy = 1,$ $y(0) = 1$

26. $y' ctgx - y = 2\cos^2 x \cdot ctgx,$ $y(0) = 0$

27. $x^2 y' = 2xy + 3,$ $y(1) = -1$

28. $y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2},$ $y(0) = 0$

29. $y' - 3x^2 y - x^2 \cdot e^{x^3} = 0,$ $y(0) = 0$

30. $xy' + y = \ln x + 1,$ $y(1) = 0$

2. Знайти частинний розв'язок (задача Коші)

1. $y' + y = x\sqrt{y}$

2. $ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x}\sec^2 ydy$

3. $y' + 2y = y^2 e^x$

4. $y' = y^4 \cos x + ytgx$

5. $xydy = (y^2 + x)dx$

6. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$

7. $y' x^3 \sin y = xy' - 2y$

8. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$

9. $2y' = x \cdot y^{-1} + xy : (x^2 - 1)$

10. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

11. $xy^2 y' = x^2 + y^3$

12. $(x + 1)(y' + y^2) = -y$

13. $y' x + y = -xy^2$

14. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$

15. $xy' - 2\sqrt{x^3 y} = y$

16. $y' + xy = x^3 y^3$

17. $y' = x \cdot y^{-1} \cdot e^{2x} + y$

18. $yx' + x = -yx^2$

19. $x(x - 1)y' + y^3 = xy$

20. $2x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 1 = 0$

21. $x^{-1} \cdot dx = (y^{-1} - 2x)dy$

22. $y' = -x \cdot \sqrt[3]{y} + 3y$

23. $xy' + y = y^2 \ln x$

24. $xdx = (x^2 \cdot y^{-1} - y^3)dy$

25. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$

26. $y' + y = x \cdot y^{-2}$

27. $y' - y \cdot tgx + y^2 \cos x = 0$

28. $y' + 2y \cdot x^{-1} = 2\sqrt{y} \cdot \sec^2 x$

29. $y' - y + y^2 \cdot \cos x = 0$

30. $y' = x\sqrt{y} + xy : (x^2 - 1)$

Практичне заняття № 14

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння, яке дозволяє зниження порядку

1. $(1-x^2)y'' - xy' = 2$
2. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$
3. $x^3y'' + x^2y' = 1$
4. $y'' + y' \cdot tgx = \sin 2x$
5. $y'' \cdot x \cdot \ln x = y'$
6. $xy'' - y' = x^2 \cdot e^x$
7. $y'' \cdot x \cdot \ln x = 2y'$
8. $x^2y'' + xy' = 1$
9. $y'' = -x \cdot y^{-1}$
10. $xy'' = y'$
11. $y'' = y' + x$
12. $-xy'' + y' + x^2 = 0$
13. $xy'' = y' \ln(y' : x)$
14. $xy'' + y' = \ln x$
15. $y'' tgx = y' + 1$
16. $y'' + 2x(y')^2 = 0$
17. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$
18. $y'' - y' : (x-1) = x(x-1)$
19. $y'' + y' tgx = \sec x$
20. $y'' - 2y' ctgx = \sin^3 x$
21. $y'' + 4y' = 2x^2$
22. $xy'' - y' = 2x^2e^x$
23. $x(y'' + 1) + y' = 0$
24. $y'' + 4y' = \cos 2x$
25. $y'' + y' = \sin x$
26. $x^2y'' = (y')^2$
27. $2xy''y' = (y')^2 - 4$
28. $y'' x \ln x = y'$
29. $y'' ctgx + y' = 2$
30. $(1+x^2)y'' = 2xy$

2. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке дозволяє зниження порядку

1. $y'' = y' \cdot e^y$, $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

2. $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 0$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

3. $yy'' + (y')^2 = 0$, $\quad y(0) = y'(0) = 1$

4. $y'' + 2y(y')^3 = 0$, $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1/3$

5. $y'' \cdot tgy = 2(y')^2$, $\quad y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 2$

6. $2y \cdot y'' = (y')^2$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

7. $yy'' - (y')^2 = y^4$, $\quad y(0) = y'(0) = 1$

8. $y'' = -1 : (2y^3)$, $\quad y(0) = 0.5,\ y'(0) = \sqrt{2}$

9. $y'' = 1 - (y')^2$, $\quad y(0) = y'(0) = 0$

10. $(y'')^2 = y'$, $\quad y(0) = 2/3,\ y'(0) = 1$

11. $2y \cdot y'' = (y')^2 + 1$, $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

12. $y'' = 2 - y$, $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 2$

13. $y'' = y^{-3}$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

14. $yy'' - 2(y')^2 = 0$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

15. $y'' = y' + (y')^2$, $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

16. $y'' = y' \cdot e^y$, $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

17. $y'' = y' \cdot e^y$, $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

18. $y'' = y' \cdot e^y$, $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

19. $4 \cdot (y'')^2 = 1 + (y')^2$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

20. $2(y')^2 = (y-1) \cdot y''$, $\quad y(0) = 2\ \ y'(0) = 2$

21. $y'' = y' \cdot e^y,$ $\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$

22. $y'' = y' \cdot e^y,$ $\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$

23. $yy'' - (y')^2 = 0,$ $\quad y(0)=1,\ y'(0)=2$

24. $yy'' - (y')^2 = y^2 \cdot \ln y,$ $\quad y(0)=1,\ y'(0)=1$

25. $y(1-\ln y)\cdot y'' + (1+\ln y)\cdot (y')^2 = 0,$ $\quad y(0)=1,\ y'(0)=1$

26. $y'' = y' \cdot e^y,$ $\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$

27. $y'' = y' : \sqrt{y},$ $\quad y(0)=1,\ y'(0)=2$

28. $y'' = \frac{1}{2}\cdot(1+(y')^2),$ $\quad y(0)=0,\ y'(0)=0$

29. $yy'' - 2yy' \cdot \ln y = (y')^2,$ $\quad y(0)=1,\ y'(0)=1$

30. $y'' = y' \cdot e^y,$ $\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$

Практичне заняття № 15, 16

1. Знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

1. $y'' - 8y' + 17y = 10 \cdot e^{2x}$
2. $y'' - 7y' + 12y = 3 \cdot e^{4x}$
3. $y'' - 6y' + 34y = 18\cos 5x$
4. $y'' + 2y' + y = 22x - 4$
5. $y'' - 2y' + y = 4 \cdot e^{x}$
6. $y'' - 6y' + 13y = 34 \cdot e^{-3x} \cdot \sin 2x$
7. $y'' + 4y' + 4y = 6 \cdot e^{-2x}$
16. $y'' + y' - 6y = 6x \cdot e^{3x}$
17. $y'' - 2y' = 6 + 12x$
18. $y'' - 2y' = (4x+4)\cdot e^{2x}$
19. $y'' - 4y' = 8 - 16x$
20. $y'' - 8y' + 20y = 16\sin 2x$
21. $y'' + 2y' - 3y = (6x-4)\cdot e^{x}$
22. $y'' + 3y' = 10 - 6x$

8. $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x$

9. $y'' + 4y' + 5y = 5 - 32x$

10. $y'' - 4y = (-24x) \cdot e^{2x}$

11. $y'' + 16y = 80 \cdot e^{2x}$

12. $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x$

13. $y'' - 14y' + 49y = 144\sin 7x$

14. $4y'' - 4y' + y = -25\cos x$

15. $y'' + 4y' + 29y = 26 \cdot e^{-x}$

23. $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x$

24. $y'' + 2y' + y = 12x \cdot e^{-x}$

25. $y'' + 6y' + 9y = 72 \cdot e^{3x}$

26. $y'' + 4y' = 15 \cdot e^{x}$

27. $y'' + 2y' + y = 18x \cdot e^{-x}$

28. $y'' + 9y = 10 \cdot e^{3x}$

29. $3y'' - 5y' - 2y = 6\cos 2x$

30. $4y'' + 3y' - y = 11\cos x$

2. Знайти частинний розв’язок диференційного рівняння, який задовольняє початковим умовам (задача Коші)

1. $y'' - 2y' - y = -12\cos 2x - 9\sin 2x,\ y(0) = -2,\quad y'(0) = 0$

2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,\quad y(0) = -1,\quad y'(0) = 0$

3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,\qquad y(0) = 1,\quad y'(0) = 4$

4. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x,\ y(0) = 2,\quad y'(0) = -2$

5. $y'' - 14y' + 53y = 42x^2 + 59x - 14,\ y(0) = 0,\quad y'(0) = 7$

6. $y'' + 16y = e^{x}(\cos 4x - 8\sin 4x),\ y(0) = 0,\quad y'(0) = 5$

7. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},\qquad y(0) = 1,\quad y'(0) = 2$

8. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 4$

9. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10,\qquad y(0) = 2,\quad y'(0) = 3$

10. $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$

11. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$, $\quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$

12. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$

13. $y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\sin 3x$, $\quad y(0) = 4, \; y'(0) = 0$

14. $y'' + 25y = e^{x}(\cos 5x - 10\sin 5x)$, $\quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4$

15. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x}\sin 2x$, $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$

16. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$, $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

17. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, $\quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5$

18. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

19. $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8$, $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

20. $y'' - 2y' + 37y = 36e^{x}\cos 6x$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$

21. $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3$, $\quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 14$

22. $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18$, $\quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

23. $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x}$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

24. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x$, $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

25. $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3$, $\quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2$

26. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$, $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7$

27. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1$, $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$

28. $y'' + 16y = 32e^{4x}$, $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

29. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x$, $\quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -2$

30. $y'' - 4y = 8e^{2x}$, $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -8$

Практичне заняття № 17

1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

1. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = -3x + 4y \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = y - 4x \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x' = 4x - 8y \\ y' = -8x + 4y \end{cases}$

2. Знайти частинний розв’язок системи диференціальних рівнянь, що відповідає початковим умовам (задача Коші)

1. $\begin{cases} x' = 3y + 6x \\ y' = -8x - 5y \\ x(0) = 2;\ y(0) = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \\ x(0) = 1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = x + 3y + 2 \\ y' = x - y + 1 \\ x(0) = -1;\ y(0) = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1 \\ y' = x + y \\ x(0) = 1;\ y(0) = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x - y + 9 \\ x(0) = 1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 4x - y \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = x - 2y + 2 \\ x(0) = 1;\ y(0) = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1 \\ y' = x + 2y + 1 \\ x(0) = 0;\ y(0) = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -5x - 3y + 2 \\ x(0) = 2;\ y(0) = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1 \\ y' = 2x + 3y \\ x(0) = 0;\ y(0) = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1 \\ y' = 2x + 2y \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 4x - 2y \\ x(0) = -1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y + 1 \\ x(0) = 0;\ y(0) = 5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = -x - 2y + 1 \\ y' = -1{,}5x + y \\ x(0) = 1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = 2{,}5x - y + 2 \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1 \\ y' = 3x + 4y \\ x(0) = 2;\ y(0) = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x + y + 1 \\ x(0) = 1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 3y + 2 \\ y' = x + 2y \\ x(0) = -1;\ y(0) = 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = 4x + 2y \\ x(0) = 2;\ y(0) = 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = -7x + 5y \\ y' = 4x - 8y \\ x(0) = 3;\ y(0) = 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2 \\ y' = 3x + y + 1 \\ x(0) = 0;\ y(0) = 2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 2y + 1 + x \\ y' = 2x + 3 + y \\ x(0) = -1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2 \\ y' = 4y + 1 - x \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = -5x + 4y \\ y' = -2x - 3y \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = x + 4y + 1 \\ y' = 2x + 3y \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = -7x + 5y \\ y' = 4x - 8y \\ x(0) = 1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x + 2y \\ x(0) = -1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = y + 3x \\ y' = x + 2y \\ x(0) = 1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = x + 3y + 3 \\ y' = x - y + 1 \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 2 \\ y' = x + y + 1 \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

3. Ознайомитись з основними рівняннями математичної фізики: рівнянням коливань струни, рівнянням поширення тепла у стержні.

4 ЗАВДАННЯ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ І РЕКОМЕНДАЦІЇЇ ДО ЇЇ ВИКОНАННЯ

Розподіл тиску по стовбуру газової свердловини визначається за таким співвідношенням:

$$\frac{dp}{dh} = c\rho(p),\ p(h_0) = p_0,$$

де p – тиск у стовбурі; h – глибина; ρ – щільність газу; h_0 – відмітка, на якій тиск відомий (наприклад гирло свердловини) і дорівнює p_0; c – деяка стала.

Розв'язавши задане диференціальне рівняння, отримаємо розподіл тиску по стовбуру свердловини.

1. Знайти розподіл тиску в зупиненій газовій свердловині від поверхні до деякої глибини h_1, якщо $\rho(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$ – залежність щільності газу від тиску; p_0 – тиск на поверхні, атм.; c – коефіцієнт пропорційності в диференціальному рівнянні. Записати задачу Коші для розподілу тиску при заданих в таблиці 3 умовах та знайти розв'язок цієї задачі.

2. Дослідити функцію розподілу тиску та побудувати її графік в системі координат «глибина-тиск».

Таблиця 3

Варіант	a_0	a_1	a_2	p_0	c
1	2	3	4	5	6
0	0,002	0,812	-2,13	20	0,01
1	0,0004	0,8079	-3,8992	40	0,1
2	0,0015	0,4525	10,082	130	0,04
3	-0,0005	1,0366	-17,385	110	0,04
4	0,0009	0,74	-1,7198	60	0,08
5	0,0015	0,6677	0,5308	40	0,12
6	0,0004	0,6428	1,1188	10	0,4
7	0,0025	0,0065	60,461	190	0,02
8	0,0006	0,6226	1,5784	38	0,15
9	0,0003	0,8579	-3,8992	50	0,1
10	0,001	0,5755	3,0962	59	0,09
11	0,0011	0,5524	4,1294	82	0,06
12	0,0013	0,5126	6,1759	100	0,06
13	0,0016	0,4148	12,932	140	0,03
14	0,0009	0,6767	-11,131	170	0,03
15	0,0028	-0,1287	76,103	240	0,015
16	0,001	0,8145	-49,109	250	0,015
17	0,0001	1,0366	-20,5	100	0,04
18	0,002	0,53	0,5	45	0,055
19	0,0028	0,0061	63,62	180	0,02
20	0,0005	0,945	-59,1	230	0,02
21	0,0014	0,6079	-3,552	140	0,001
22	0,1015	0,0525	5,082	110	0,01
23	-0,0505	10,0366	-1,385	10	0,004
24	0,4025	0,7065	30,401	120	0,15
25	0,0706	0,9226	1,5084	59	0,105
26	0,0303	0,3579	-3,8005	70	0,01
27	0,0301	1,0366	-25,5	80	0,004

1	2	3	4	5	6
28	0,0002	0,053	52,052	70	0,055
29	0,6028	0,3061	3,62	100	0,025
30	0,0605	0,905	-9,1	125	0,02

Розв'язання варіанта 0:

1. Записати задачу Коші для розподілу тиску при заданих в таблиці 1 умовах та знайти розв'язок цієї задачі:

$$\frac{dp}{dh} = 0{,}01 \cdot (0{,}002 p^2 + 0{,}812 p - 2{,}13), \; p(0) = 20 .$$

Розв'яжемо задане рівняння. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Виконаємо перетворення:

$$dp = 0{,}01 \cdot (0{,}002 p^2 + 0{,}812 p - 2{,}13) dh ,$$

$$\frac{dp}{0{,}002 p^2 + 0{,}812 p - 2{,}13} = 0{,}01 dh .$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння, отримаємо загальний розв'язок:

$$\int \frac{dp}{0{,}002 p^2 + 0{,}812 p - 2{,}13} = 0{,}01 \int dh ;$$

1) виокремимо в знаменнику повний квадрат:

$$\int \frac{dp}{0{,}002 p^2 + 0{,}812 p - 2{,}13} =$$

$$= \left| \begin{aligned} & 0{,}002 p^2 + 0{,}812 p - 2{,}13 = 0{,}002(p^2 + 406 p - 1065) = \\ & = 0{,}002((p^2 + 2 \cdot p \cdot 203 + 41209) - 42274) = \\ & = 0{,}002((p + 203)^2 - 205{,}6^2) \end{aligned} \right| =$$

$$= \int \frac{dp}{0{,}002((p + 203)^2 - 205{,}6^2)} = \frac{1}{0{,}002} \int \frac{dp}{(p + 203)^2 - 205{,}6^2} =$$

$$= 500 \cdot \frac{1}{2 \cdot 205{,}6} \ln\left|\frac{p + 203 - 205{,}6}{p + 203 + 205{,}6}\right| = 1{,}2 \cdot \ln\left|\frac{p - 2{,}6}{p + 408{,}6}\right|;$$

$$2)\ 0{,}01\int dh = 0{,}01h\,, \quad 1{,}2 \cdot \ln\left|\frac{p - 2{,}6}{p + 408{,}6}\right| = 0{,}01h + C\,.$$

Використаємо початкову умову $p(0) = 20$:

$$1{,}2 \cdot \ln\left|\frac{20 - 2{,}6}{20 + 408{,}6}\right| = 0{,}01 \cdot 0 + C\,, \quad C = 1{,}2 \cdot \ln\left|\frac{17{,}4}{428{,}6}\right| \approx -3{,}8\,.$$

Підставимо знайдену константу в загальний розв'язок, отримаємо частинний розв'язок:

$$1{,}2 \cdot \ln\left|\frac{p - 2{,}6}{p + 408{,}6}\right| = 0{,}01h - 3{,}8\,.$$

Знайдемо функцію розподілу тиску в явному вигляді:

$$\ln\left|\frac{p - 2{,}6}{p + 408{,}6}\right| = 0{,}008h - 3{,}2\,, \quad \frac{p - 2{,}6}{p + 408{,}6} = e^{0{,}008h - 3{,}2}\,,$$

$$p - 2{,}6 = e^{0{,}008h - 3{,}2}(p + 408{,}6)\,,$$

$$p - 2{,}6 = e^{0{,}008h - 3{,}2}p + 408{,}6e^{0{,}008h - 3{,}2}\,,$$

$$p - e^{0{,}008h - 3{,}2}p = 408{,}6e^{0{,}008h - 3{,}2} + 2{,}6\,,$$

$$p(1 - e^{0{,}008h - 3{,}2}) = 408{,}6e^{0{,}008h - 3{,}2} + 2{,}6\,,$$

$$p = \frac{408{,}6e^{0{,}008h - 3{,}2} + 2{,}6}{1 - e^{0{,}008h - 3{,}2}}\,.$$

2. Дослідити функцію розподілу тиску та побудувати її графік в системі координат «глибина-тиск».

2.1. Область визначення:

$$1 - e^{0{,}008h - 3{,}2} \neq 0\,, \quad e^{0{,}008h - 3{,}2} \neq 1\,, \quad e^{0{,}008h - 3{,}2} \neq e^{0}\,,$$

$$0{,}008h - 3{,}2 \neq 0\,, \quad 0{,}008h \neq 3{,}2\,, \quad h \neq 400\,.$$

Отже, $h \in [0,400) \cup (400,+\infty)$.

2.2. Знайдемо точки перетину з осями координат:

Oh: $p = 0$,

$$\frac{408{,}6e^{0{,}008h-3{,}2}+2{,}6}{1-e^{0{,}008h-3{,}2}}=0,$$

$$408{,}6e^{0{,}008h-3{,}2}+2{,}6=0, \quad 408{,}6e^{0{,}008h-3{,}2}=-2{,}6,$$

$$e^{0{,}008h-3{,}2}=-0{,}006, \quad 0{,}008h-3{,}2=\ln(-0{,}006).$$

$\ln(-0{,}006)$ не існує, тому точок перетину з віссю Oh функція не має.

Op: $h = 0$,

$$p=\frac{408{,}6e^{0{,}008\cdot 0-3{,}2}+2{,}6}{1-e^{0{,}008\cdot 0-3{,}2}}=\frac{408{,}6e^{-3{,}2}+2{,}6}{1-e^{-3{,}2}}=\frac{19{,}6}{0{,}96}=20{,}4,$$

$$A(0;20{,}4).$$

2.3. Задана функція є функцією загального вигляду:

$$p(-h)=\frac{408{,}6e^{0{,}008\cdot(-h)-3{,}2}+2{,}6}{1-e^{0{,}008\cdot(-h)-3{,}2}}=\frac{408{,}6e^{-0{,}008\cdot h-3{,}2}+2{,}6}{1-e^{-0{,}008\cdot h-3{,}2}}\neq\begin{cases}p(h);\\-p(h),\end{cases}$$

неперіодичною.

2.4. Знайдемо інтервали монотонності та екстремуми функції.

Знайдемо похідну функції розподілу тиску:

$$p'=\frac{(408{,}6e^{0{,}008h-3{,}2}+2{,}6)'\cdot(1-e^{0{,}008h-3{,}2})}{(1-e^{0{,}008h-3{,}2})^2}-$$

$$-\frac{(408{,}6e^{0{,}008h-3{,}2}+2{,}6)\cdot(1-e^{0{,}008h-3{,}2})'}{(1-e^{0{,}008h-3{,}2})^2}=$$

$$=\frac{408{,}6e^{0{,}008h-3{,}2}\cdot 0{,}008\cdot(1-e^{0{,}008h-3{,}2})}{(1-e^{0{,}008h-3{,}2})^2}-$$

$$-\frac{(408,6e^{0,008h-3,2}+2,6)\cdot(-e^{0,008h-3,2}\cdot 0,008)}{(1-e^{0,008h-3,2})^2}=$$

$$=\frac{0,008e^{0,008h-3,2}\cdot(408,6-408,6e^{0,008h-3,2}+408,6e^{0,008h-3,2}+2,6)}{(1-e^{0,008h-3,2})^2}=$$

$$=\frac{0,008e^{0,008h-3,2}\cdot 411,2}{(1-e^{0,008h-3,2})^2}=\frac{3,3e^{0,008h-3,2}}{(1-e^{0,008h-3,2})^2}.$$

Прирівняємо знайдену похідну до нуля та розв'яжемо рівняння:

$$\frac{3,3e^{0,008h-3,2}}{(1-e^{0,008h-3,2})^2}=0,\quad \begin{cases}3,3e^{0,008h-3,2}=0;\\ (1-e^{0,008h-3,2})^2\neq 0,\end{cases}$$

$e^{0,008h-3,2}\neq 0$, тому екстремумів функція не має.

	$[0,400)$	400	$(400,+\infty)$
$p'(h)$	+	не існує	–
$p(h)$	$\uparrow$ зростає	не існує	$\downarrow$ спадає

$[0,400)$ – інтервал зростання функції,

$(400,+\infty)$ – інтервал спадання функції.

2.5. Знайдемо інтервали опуклості і угнутості та точки перегину функції.

Знайдемо другу похідну функції розподілу тиску:

$$p''=\frac{(3,3e^{0,008h-3,2})'\cdot(1-e^{0,008h-3,2})^2-3,3e^{0,008h-3,2}\cdot((1-e^{0,008h-3,2})^2)'}{(1-e^{0,008h-3,2})^4}=$$

$$=\frac{3,3e^{0,008h-3,2}\cdot 0,008\cdot(1-e^{0,008h-3,2})^2}{(1-e^{0,008h-3,2})^4}-$$

$$-\frac{3,3e^{0,008h-3,2}\cdot 2(1-e^{0,008h-3,2})\cdot(-e^{0,008h-3,2}\cdot 0,008)}{(1-e^{0,008h-3,2})^4}=$$

$$=\frac{0,026e^{0,008h-3,2}(1-e^{0,008h-3,2})\cdot(1-e^{0,008h-3,2}+2e^{0,008h-3,2})}{(1-e^{0,008h-3,2})^4}=$$

$$=\frac{0,026e^{0,008h-3,2}\cdot(1+e^{0,008h-3,2})}{(1-e^{0,008h-3,2})^3}.$$

Прирівняємо знайдену похідну до нуля та розв'яжемо рівняння:

$$\frac{0,026e^{0,008h-3,2}\cdot(1+e^{0,008h-3,2})}{(1-e^{0,008h-3,2})^3}=0,$$

$$\begin{cases}0,026e^{0,008h-3,2}\cdot(1+e^{0,008h-3,2})=0;\\(1-e^{0,008h-3,2})^3\neq 0,\end{cases}$$

$$e^{0,008h-3,2}\neq 0,\quad 1+e^{0,008h-3,2}=0,$$

$$e^{0,008h-3,2}\neq -1,$$

Точок перегину функція не має.

	$[0,400)$	400	$(400,+\infty)$
$p''(h)$	+	не існує	–
$p(h)$	угнута	не існує	опукла

$(400,+\infty)$ – інтервал опуклості функції,

$[0,400)$ – інтервал угнутості функції.

2.6. Знайдемо асимптоти функції.

$h=400$ – вертикальна асимптота функції.

Знайдемо коефіцієнти k і b для похилої асимптоти $y=kx+b$:

$$k_1=\lim_{h\to-\infty}\frac{p}{h}=\lim_{h\to-\infty}\frac{408,6e^{0,008h-3,2}+2,6}{(1-e^{0,008h-3,2})h}=\frac{408,6e^{0,008\cdot(-\infty)-3,2}+2,6}{(1-e^{0,008\cdot(-\infty)-3,2})\cdot(-\infty)}=$$

$$=\frac{408,6e^{-\infty}+2,6}{(1-e^{-\infty})\cdot(-\infty)}=\frac{408,6\cdot 0+2,6}{(1-0)\cdot(-\infty)}=\frac{2,6}{-\infty}=0,$$

$$b_1 = \lim_{h\to-\infty}(p-kh) = \lim_{h\to-\infty}\frac{408{,}6e^{0{,}008h-3{,}2}+2{,}6}{1-e^{0{,}008h-3{,}2}} = \frac{408{,}6e^{0{,}008\cdot(-\infty)-3{,}2}+2{,}6}{1-e^{0{,}008\cdot(-\infty)-3{,}2}} =$$

$$= \frac{408{,}6e^{-\infty}+2{,}6}{1-e^{-\infty}} = \frac{408{,}6\cdot 0+2{,}6}{1-0} = \frac{2{,}6}{1} = 2{,}6\,,$$

$p = 2{,}6$ – горизонтальна асимптота при $h \to -\infty$,

$$k_2 = \lim_{h\to+\infty}\frac{p}{h} = \lim_{h\to+\infty}\frac{408{,}6e^{0{,}008h-3{,}2}+2{,}6}{(1-e^{0{,}008h-3{,}2})h} = \frac{408{,}6e^{0{,}008\cdot(+\infty)-3{,}2}+2{,}6}{(1-e^{0{,}008\cdot(+\infty)-3{,}2})\cdot(+\infty)} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{h\to+\infty}\frac{(408{,}6e^{0{,}008h-3{,}2}+2{,}6)'}{((1-e^{0{,}008h-3{,}2})h)'} =$$

$$= \lim_{h\to+\infty}\frac{408{,}6e^{0{,}008h-3{,}2}\cdot 0{,}008}{(1-e^{0{,}008h-3{,}2})'\cdot h+(1-e^{0{,}008h-3{,}2})\cdot h'} =$$

$$= \lim_{h\to+\infty}\frac{3{,}27e^{0{,}008h-3{,}2}}{-e^{0{,}008h-3{,}2}\cdot 0{,}008\cdot h+(1-e^{0{,}008h-3{,}2})\cdot 1} =$$

$$= \lim_{h\to+\infty}\frac{3{,}27e^{0{,}008h-3{,}2}}{-0{,}008e^{0{,}008h-3{,}2}h+1-e^{0{,}008h-3{,}2}} =$$

$$= \frac{3{,}27e^{0{,}008\cdot(+\infty)-3{,}2}}{-0{,}008e^{0{,}008\cdot(+\infty)-3{,}2}\cdot(+\infty)+1-e^{0{,}008\cdot(+\infty)-3{,}2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{h\to+\infty}\frac{3{,}27}{-0{,}008h+\dfrac{1}{e^{0{,}008h-3{,}2}}-1} = \frac{3{,}27}{-0{,}008\cdot(+\infty)+\dfrac{1}{e^{0{,}008\cdot(+\infty)-3{,}2}}-1} =$$

$$= \frac{3{,}27}{-\infty+\dfrac{1}{e^{+\infty}}-1} = \frac{3{,}27}{-\infty+0-1} = \frac{3{,}27}{-\infty} = 0\,,$$

$$b_2 = \lim_{h\to+\infty}(p-kh) = \lim_{h\to+\infty}\frac{408{,}6e^{0{,}008h-3{,}2}+2{,}6}{1-e^{0{,}008h-3{,}2}} =$$

$$=\frac{408,6e^{0,008\cdot(+\infty)-3,2}+2,6}{1-e^{0,008\cdot(+\infty)-3,2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{h\to+\infty}\frac{(408,6e^{0,008h-3,2}+2,6)'}{(1-e^{0,008h-3,2})'}=$$

$$=\lim_{h\to+\infty}\frac{408,6e^{0,008h-3,2}\cdot 0,008}{-e^{0,008h-3,2}\cdot 0,008}=-408,6\,,$$

$p=-408{,}6$ – горизонтальна асимптота при $h\to+\infty$.

Побудуємо графік функції розподілу тиску в системі координат «глибина-тиск» (рис. 5):

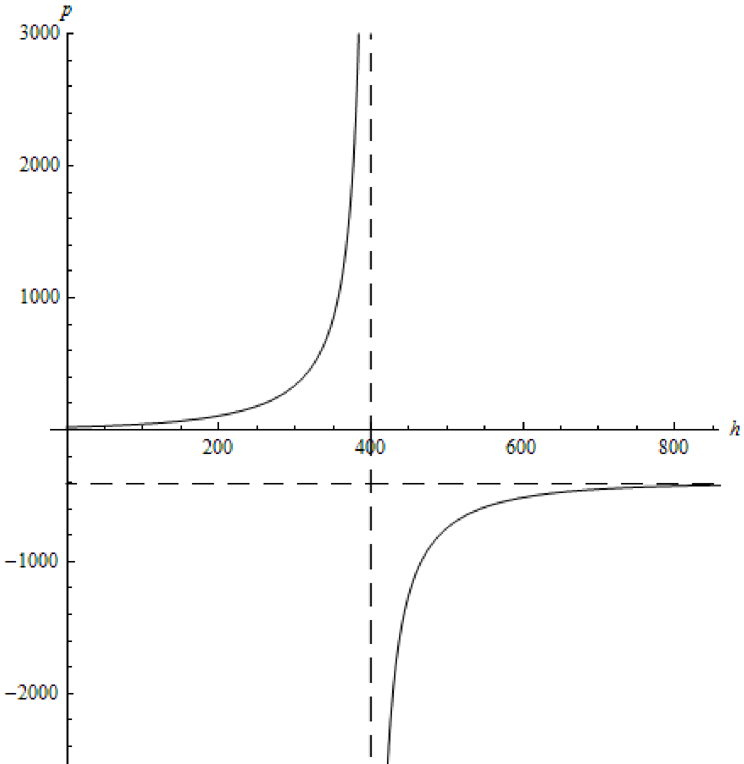

Рисунок 5

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вороновська Л. П. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» Модуль 2 для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології [Електронний ресурс] / Л. П. Вороновська. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 155 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/49557

2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 1980. – Ч.1 – 320 с.; Ч.2 – 365 с.

3. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике: в 4 ч. / И. А. Каплан. – Харьков: ХГУ, 1963. – Ч.2. – 370 с.; 1965. – Ч.3. – 374 с.; 1971. – Ч.4. – 498 с.

4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. − Т.1. − 430 с.; Т.2. − 580 с.

5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. − М.: Наука, 1985. − Т. 1. − 430 с.; Т. 2. − 560 с.

6. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 2 : навч. посібник [Електронний ресурс] / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2017. – 221 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/47207

7. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях: навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики [Електронний ресурс] / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2016. – Частина 2. – 141 с. − Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/42486

8. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях: навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики / Г.А. Кузнецова, С.М. Ламтюгова, Ю.В. Ситникова. – Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2018. – Частина 3. – 141 с. − Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/48450

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації
до проведення практичних занять, виконання
самостійної та розрахунково-графічної робіт
із навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
М О Д У Л Ь 2

*(для студентів 1 курсу всіх форм навчання
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності
185 – Нафтогазова інженерія та технології)*

Укладач : **ЛАМТЮГОВА** Світлана Миколаївна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *О. А. Норик*
Комп'ютерне верстання *С. М. Ламтюгова*

План 2020, поз. 122 М.

Підп. до друку 18.05.2021. Формат 60 × 84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 3,0.
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.