МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

НАВЧАЛЬНИЙ ДОВІДНИК

З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Частина 1

(для студентів 1 курсу денної форми навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 192 –Будівництво та цивільна інженерія)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2021

Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика». Частина 1 (для студентів 1 курсу денної форми навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 44 с.

Укладач: Л. Б. Коваленко

Рецензенти: **А. В. Якунін**, кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету імені О. М. Бекетова

Л. І. Щелкунова, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури

Рекомендовано Вченою радою ХНУМГ імені О. М. Бекетова, (протокол № 8 від 29.04.2021.)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Навчальний довідник для студентів 1 курсу денної форми навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія передбачає засвоєння основних математичних понять та методів розв’язання задач під час виконання студентами самостійної роботи, в процесі вивчення курсу «Вища математика». Навчальний довідник містить основні теоретичні відомості та приклади використання формул, визначень, теорем застосовуваних під час розв’язання задач із лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії на площині та в просторі, теорії границь, диференціального числення функції однієї змінної.

Навчально-методичний комплекс дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія включає п’ять навчальних посібників із необхідним теоретичним матеріалом, довідниками та завданнями для проведення практичних занять, виконання самостійної роботи, та розрахунково-графічного завдання, що містить задачі за фаховим спрямуванням та наочно ілюструють практичне застосування методів лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу під час розв’язання прикладних задач.

Тема «Визначники»

Основні визначення

Визначником n-го порядку називається число Δ_n, яке записано у вигляді квадратної таблиці чисел:

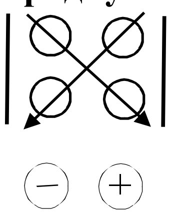
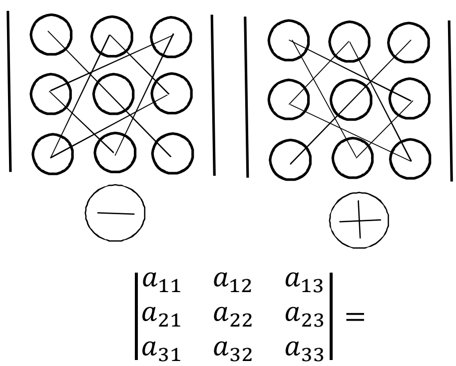
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} - це визначник $(n-1)$ порядку, який утворюється з початкового визначника закресленням i –того рядка і j-того стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Обчислення визначників

Обчислення **визначника другого порядку**  $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$	$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-5) \cdot 4 = 6 + 20 = \mathbf{26}$
Обчислення **визначника третього порядку** за правилом **Саррюса** (правилом трикутників)  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$ $-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$	Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$. За правилом Саррюса маємо $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot (-5) \cdot 7 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot (-2) -$ $- 2 \cdot (-5) \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 7 - 1 \cdot 2 \cdot 1 =$ $= -35 + 6 - 16 - 20 - 84 - 2 = \mathbf{-151}$

Мінором M_{ij} -це визначник, отриманий із початкового визначника, закресленням i-того рядка та j-того стовпця $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$	Дано визначник $\begin{vmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$, знайти M_{32}. $M_{32} = \begin{vmatrix} -2 & 6 & \cancel{5} \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ 2 & 7 & \cancel{6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -2 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 = 2 - 15 = \mathbf{-13}$
Алгебраїчним доповненням називається число, що знаходять за правилом $\boldsymbol{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$**.**	Дано визначник $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ -6 & 2 & 8 \end{vmatrix}$, зайти A_{13}. $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} =$ $= (-1)^4 \big(-2 \cdot 2 - 5 \cdot (-6)\big) =$ $= -4 + 30 = \mathbf{26}$
Обчислення визначників шляхом розкладання **за елементами рядка** $$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$$ ***Правило:*** визначник дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого рядка на їх алгебраїчні доповнення	Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ за елементами третього рядка. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} +$ $+(-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} +$ $+3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} +$ $+4 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot (-12 + 0 + 0 - 0 + 10 + 105) +$ $+1 \cdot (24 + 28 + 0 - 0 - 20 + 63) +$ $+3 \cdot (-30 - 4 + 0 - 0 - 9 - 0) -$ $-4 \cdot (50 + 8 + 0 - 70 + 15 - 0) = \mathbf{57}$

<table>
<tr>
<td>

Обчислення визначників шляхом розкладання **за елементами стовпця**

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_{kj} \cdot A_{kj}}$$

Правило: визначник дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого стовпця на їхні алгебраїчні доповнення

</td>
<td>

Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ за елементами другого стовпця.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 7 \\ -4 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= 1 \cdot (-27 - 32 + 10 - 12 - 12 - 60) +$$
$$+5 \cdot (-18 + 56 + 0 - 0 + 21 - 40) -$$
$$+1 \cdot (24 + 28 + 0 - 0 + 63 - 20) =$$
$$= -133 + 95 + 95 = \mathbf{57}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Обчислення визначників шляхом розкладання **за елементами рядка (стовпця)** з попереднім отриманням **нулів**

Правило: за властивостями визначників величина визначника не зміниться, якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) помножити на будь-яке число та додати до відповідних елементів іншого рядка (стовпця).

Зауваження: при отриманні нулів у рядку необхідно працювати зі стовпцями, при отриманні нулів у стовпці – із рядками

</td>
<td>

Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$, попередньо отримавши нулі в третьому рядку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

(1)

(-3)

(-4)

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -8 \\ 3 & 8 & -13 & -10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 8 & -13 & -10 \\ 2 & -1 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= 143 - 20 + 64 - 208 + 88 - 10 = \mathbf{57}$$

</td>
</tr>
</table>

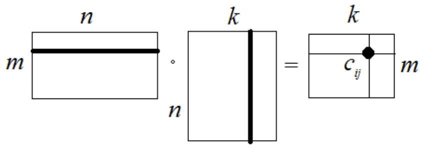
Тема «Матриці»

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Основні визначення</td></tr>
<tr><td colspan="2">Матрицею $A = \|a_{ij}\|$ називається прямокутна таблиця чисел, яка складається з m рядків та n стовпців:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Матриця, кількість рядків якої дорівнює кількості стовпців, називається квадратною матрицею</td></tr>
<tr><td colspan="2">Квадратна матриця, усі елементи головної діагоналі якої дорівнюють 1, а всі інші – 0, називається одиничною та позначається, як
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Операції з матрицями</td></tr>
<tr><td>Додавання (віднімання) матриць

Правило: додавати (віднімати) можна лише матриці однакового розміру
$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \;\Rightarrow\; c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$</td><td>Знайти суму та різницю матриць
$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.
$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2+4 & 5+2 & 7-3 \\ 3+1 & 0+9 & -4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$;
$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2-4 & 5-2 & 7+3 \\ 3-1 & 0-9 & -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-6} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-9} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>Множення матриці на число
$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{A} \;\Rightarrow c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$</td><td>Знайти матрицю $4A$, якщо $A = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.
$$4A = \begin{pmatrix} 4\cdot(-8) & 4\cdot 4 \\ 4\cdot 3 & 4\cdot 0 \\ 4\cdot 5 & 4\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-32} & \mathbf{16} \\ \mathbf{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{20} & \mathbf{-8} \end{pmatrix}$$</td></tr>
</table>

Множення матриць

Матриці-множники повинні задовольняти умови: кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. У результаті отримаємо матрицю, у якої стільки рядків, скільки у першої, і стільки стовпців, скільки у другої. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$:



Множимо рядок першої матриці на стовпець другої матриці:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + + \cdots a_{in} \cdot b_{nj}$$

Загалом,

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}.$$

Знайти добуток матриць $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо це можливо:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 & 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 4 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \\ 0 \cdot 5 + 5 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & 0 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 - 1 & 8 - 1 & 16 - 3 \\ 10 + 3 & 4 + 3 & 8 + 9 \\ 0 + 5 & 0 + 5 & 0 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{19} & \mathbf{7} & \mathbf{13} \\ \mathbf{13} & \mathbf{7} & \mathbf{17} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{15} \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 20 + 4 + 0 & -5 + 6 + 20 \\ 4 + 2 + 0 & -1 + 3 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{24} & \mathbf{21} \\ \mathbf{6} & \mathbf{17} \end{pmatrix}$$

Транспонування матриць

Транспонована матриця утворюється шляхом заміни рядків на стовпі (або навпаки):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Транспонувати матрицю $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

$$A^T = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Обернена матриця

Існує лише для квадратних невироджених матриць! Знаходимо обернену матрицю за алгоритмом:

1. Обчислюємо $detA$ $(detA \neq 0!)$.
2. Транспонуємо матрицю (A^T).
3. Обчислюємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці.
4. Складаємо обернену матрицю за правилом:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix}.$$

5. Виконуємо перевірку:

$$A^{-1} \cdot A = E$$

або $A \cdot A^{-1} = E$,

$$\text{де } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Знайти матрицю, обернену до $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 0 - 60 - 12 - 24 - 0$$
$$= -108 \neq 0;$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12;$$
$$A_{12}^T = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 - 10) = 14;$$
$$A_{13}^T = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6;$$
$$A_{21}^T = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -(24 - 0) = -24;$$
$$A_{22}^T = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8;$$
$$A_{23}^T = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 12) = -12;$$
$$A_{31}^T = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -30 - 6 = -36;$$
$$A_{32}^T = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(5 - 2) = -3;$$
$$A_{33}^T = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 6 = 9.$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{-108}\begin{pmatrix} -12 & 14 & -6 \\ -24 & -8 & -12 \\ -36 & -3 & 9 \end{pmatrix}}.$$

Перевірка:

$$\boldsymbol{A^{-1} \cdot A} = \frac{1}{-108}\begin{pmatrix} -12 & 14 & -6 \\ -24 & -8 & -12 \\ -36 & -3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{108}\begin{pmatrix} -12 - 84 - 12 & -12 + 42 - 30 & -24 + 0 + 24 \\ -24 + 48 - 24 & -24 - 24 - 60 & -48 + 0 + 48 \\ -36 + 18 + 18 & -36 - 9 + 45 & -72 + 0 - 36 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{108}\begin{pmatrix} -108 & 0 & 0 \\ 0 & -108 & 0 \\ 0 & 0 & -108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}$$

Тема «Розв’язання систем неоднорідних лінійних алгебраїчних рівнянь»

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2} \\ \cdots \\ \boldsymbol{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n} \end{cases}$$

Метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b_1} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \boldsymbol{b_2} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{b_n} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \boldsymbol{b_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{b_2} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \boldsymbol{b_n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\dots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boldsymbol{b_1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \boldsymbol{b_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \boldsymbol{b_n} \end{vmatrix};$$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}};\ \boldsymbol{x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}};\ \dots,$$

$$\boldsymbol{x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}}$$

Розв’язати за методом Крамера систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 21, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -14. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 2 + 60 - 5 - 56 + 9 = \boldsymbol{-11};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 5 \\ 9 & 1 & -1 \\ -14 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -147 - 28 + 135 + 70 - 126 +$$

$$+63 = \boldsymbol{-33}:$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 5 \\ 4 & 9 & -1 \\ 1 & -14 & -7 \end{vmatrix} = -189 - 21 - 280 - 45 + 588 -$$

$$-42 = \boldsymbol{11};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 4 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & -14 \end{vmatrix} = -42 - 18 + 252 - 21 - 112 - 81$$

$$= \boldsymbol{-22;}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = \boldsymbol{3};$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{11}{-11} = \boldsymbol{-1};$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = \boldsymbol{2}.$$

Перевірка.

Підставимо отримані значення в друге рівняння системи

$4 \cdot 3 + (-1) - 2 = 9$, отримано тотожність.

Відповідь: $x_1 = \boldsymbol{3}$; $x_2 = \boldsymbol{-1}$; $x_3 = \boldsymbol{2}$

Матричний метод $$\boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B},$$ де $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$ $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$	Розв’язати матричним методом систему $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 21, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -14. \end{cases}$$ $$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix}.$$ $$detA = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -7 \end{vmatrix} =$$ $$= -21 + 2 + 60 - 5 - 56 + 9 = -11;$$ $$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & -7 \end{pmatrix};$$ $$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -7 + 3 = -4;$$ $$A_{12}^T = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -(14 - 15) = 1;$$ $$A_{13}^T = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 5 = -3;$$ $$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -(-28 + 1) = 27;$$ $$A_{22}^T = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -21 - 5 = -26;$$ $$A_{23}^T = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 20) = 23;$$ $$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11;$$ $$A_{32}^T = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(9 + 2) = -11;$$ $$A_{33}^T = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11.$$ $$A^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 27 & -26 & 23 \\ 11 & -11 & 11 \end{pmatrix}.$$ $$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-11} \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 27 & -26 & 23 \\ 11 & -11 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ -14 \end{pmatrix} =$$ $$= -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -84 + 9 + 42 \\ 567 - 234 - 322 \\ 231 - 99 - 154 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -33 \\ 11 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$ ***Відповідь:*** $x_1 = \mathbf{3}$; $x_2 = \mathbf{-1}$; $x_3 = \mathbf{2}$

Метод Гауса (метод послідовного виключення невідомих)

$\tilde{A} = (A|B) =$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)\dots\left(-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right) \overset{\dots}{\left(-\frac{a_{nn}^{(n-2)}}{a_{n-1,n}^{(n-2)}}\right)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-11)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right)$$

Розв'язати методом Гауса систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 21, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -14. \end{cases}$$

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 21 \\ 4 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 3 & -7 & -14 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & -14 \\ 4 & 1 & -1 & 9 \\ 3 & -2 & 5 & 21 \end{array}\right) (-4) \quad (-3) \quad \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & -14 \\ 0 & -11 & 27 & 65 \\ 0 & -11 & 26 & 63 \end{array}\right) (-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & -14 \\ 0 & -11 & 27 & 65 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Знаходимо невідомі:

$\Rightarrow x_3 = \mathbf{2}$;

$\Rightarrow -11x_2 + 27x_3 = 65$;
$-11x_2 = 65 - 27 \cdot 2$; $\quad x_2 = \mathbf{-1}$;

$\Rightarrow x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -14$;
$x_1 = -14 - 3 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 = \mathbf{3}.$

Відповідь: $x_1 = \mathbf{3}$; $x_2 = \mathbf{-1}$; $x_3 = \mathbf{2}$

Тема «Розв'язання систем однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь»

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0} \\ \dots \\ \boldsymbol{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0}, \end{cases}$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ - визначник системи.

<table>
<tr>
<td>

Якщо $\Delta \neq 0$,

то $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

</td>
<td>

Розв'язати однорідну систему

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -210 - 24 + 3 + 12 + 21 - 60 =$
$= -258 \neq 0.$

Отже, система має лише тривіальне рішення

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Якщо $\Delta = 0$,

то $rangA = rang\tilde{A} = m < n$

Система сумісна, але не визначена, тому має безліч розв'язків.

Закреслюємо $n - m$ рівнянь та виражаємо m базових невідомих через $n - m$ вільних

</td>
<td>

Розв'язати однорідну систему

$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 6 + 1 + 3 - 16 = 0.$

Оберемо два перших рівняння і виразимо два перших невідомих через третє:

$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -x_3 \\ 3x_1 + x_2 = -4x_3 \end{cases}.$

Нехай $x_3 = k$:

$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -k \\ 3x_1 + x_2 = -4k \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5;$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -k & -1 \\ -4k & 1 \end{vmatrix} = -k - 4k = -5k;$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -k \\ 3 & -4k \end{vmatrix} = -8k + 3k = -5k;$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5k}{5} = \boldsymbol{-k}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5k}{5} = \boldsymbol{-k}; \quad x_3 = \boldsymbol{k}; \quad k \in R$$

Відповідь: $x_1 = \boldsymbol{-k}$; $x_2 = \boldsymbol{-k}$; $x_3 = \boldsymbol{k}$, $k \in R$

</td>
</tr>
</table>

Тема «Вектори»

Координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, де $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$: $\vec{a}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ або $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, де $a_x = x_2 - x_1$; $a_y = y_2 - y_1$; $a_z = z_2 - z_1$	Знайти координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, якщо $A(-3,2,8)$, $B(4,-5,2)$. $\vec{a} = (4 - (-3);\ -5 - 2;\ 2 - 8)$; $\vec{a}(7; -7; -6)$, або $\vec{a} = 7\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k}$
Дано довжини двох векторів $\lvert\vec{a}\rvert$ і $\lvert\vec{b}\rvert$ та кут φ між ними	$\lvert\vec{a}\rvert = 5$; $\lvert\vec{b}\rvert = 3$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$
Скалярний добуток векторів $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\varphi$	Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{15}{2} = \mathbf{7,5}$
Модуль векторного добутку $\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \sin\varphi$	Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. $\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = 5 \cdot 3 \cdot sin\frac{\pi}{3} = \frac{\mathbf{15\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$
Проєкція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \cos\varphi$	Знайти проєкцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$. $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = 5 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{5}{2} = \mathbf{2,5}$
Дано координати векторів $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$	$\vec{a}(-2; 5; 3)$, $\vec{b}(4; 6; 0)$, $\vec{c}(1; -3; 8)$
Модуль вектора $\vec{a}$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$	Знайти модуль вектора $\vec{a}$. $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 25 + 9} = \sqrt{\mathbf{38}}$.
Сума (різниця) векторів $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z)$; $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x;\ a_y - b_y;\ a_z - b_z)$.	Знайти суму й різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. $\vec{a} + \vec{b} = (-2 + 4;\ 5 + 6;\ 3 + 0) = (\mathbf{2}; \mathbf{11}; \mathbf{3})$; $\vec{a} - \vec{b} = (-2 - 4;\ 5 - 6;\ 3 - 0) = (\mathbf{-6}; \mathbf{-1}; \mathbf{3})$.

Множення вектора **на число** $$\boldsymbol{\lambda\vec{a}} = (\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z)$$	Знайти вектор $-4\vec{c}$. $$-4\cdot\vec{c} = (-4\cdot 1; -4\cdot(-3); -4\cdot 8) = \\ = (\mathbf{-4}; \mathbf{12}; \mathbf{-32})$$
Скалярний добуток векторів $$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}$$	Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. $$\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\cdot 4 + 5\cdot 6 + 3\cdot 0 = -8 + 30 + 0 = \mathbf{22}$$
Векторний добуток векторів $$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\vec{i}} & \boldsymbol{\vec{j}} & \boldsymbol{\vec{k}} \\ \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{a_y} & \boldsymbol{a_z} \\ \boldsymbol{b_x} & \boldsymbol{b_y} & \boldsymbol{b_z} \end{vmatrix} =$$ $$= \boldsymbol{\vec{i}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_y} & \boldsymbol{a_z} \\ \boldsymbol{b_y} & \boldsymbol{b_z} \end{vmatrix} - \boldsymbol{\vec{j}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{a_z} \\ \boldsymbol{b_x} & \boldsymbol{b_z} \end{vmatrix} +$$ $$+\boldsymbol{\vec{k}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{a_y} \\ \boldsymbol{b_x} & \boldsymbol{b_y} \end{vmatrix}$$	Знайти векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$$ $$= \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$ $$= \vec{i}(0-18) - \vec{j}(0-12) + \vec{k}(-12-20) =$$ $$= \boldsymbol{-18\vec{i} + 12\vec{j} - 32\vec{k}}$$
Мішаний добуток векторів $$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{a_y} & \boldsymbol{a_z} \\ \boldsymbol{b_x} & \boldsymbol{b_y} & \boldsymbol{b_z} \\ \boldsymbol{c_x} & \boldsymbol{c_y} & \boldsymbol{c_z} \end{vmatrix}$$	Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. $$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix} =$$ $$= -96 + 0 - 36 - 18 - 160 - 0 = \mathbf{-310}$$
Умова колініарності двох векторів $$\boldsymbol{\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}}.$$	З’ясувати, чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. $$\frac{-2}{4} \neq \frac{5}{6} = \frac{3}{0} \ \Rightarrow$$ **неколініарні**
Умова ортогональності двох векторів $$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = 0}$$	З’ясувати, чи ортогональні вектори $\vec{c}$ і $\vec{b}$. $$\vec{c}\cdot\vec{b} = 1\cdot 4 + (-3)\cdot 6 + 8\cdot 0 = 4 - 18 + 0 = \\ -14 \neq 0 \Rightarrow$$ **не ортогональні**
Умова компланарності трьох векторів $$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = 0}$$	З’ясувати, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. $$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix} = -310 \neq 0$$ $\Rightarrow$ **не компланарні**

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $$\cos\varphi = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$	Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. $$\cos\varphi = \frac{-2\cdot4+5\cdot6+3\cdot0}{\sqrt{(-2)^2+5^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+6^2+0^2}} =$$ $$= \frac{22}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{52}} = \frac{\mathbf{11}}{\sqrt{\mathbf{494}}}$$
Проєкція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ $$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert} = \frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$	Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$. $$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{-2\cdot4+5\cdot6+3\cdot0}{\sqrt{4^2+6^2+0^2}} = \frac{22}{\sqrt{52}} = \frac{\mathbf{11}}{\sqrt{\mathbf{13}}}$$

Тема «Застосування векторної алгебри в розв'язанні простих геометричних задач»

Площа паралелограма, побудованого на двох векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $$S = \lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$$	Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ і $\vec{b} = 7\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$ $$= \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 25\vec{j} - 22\vec{k}.$$ $$\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = \sqrt{4^2 + (-25)^2 + (-22)^2} = \sqrt{1125} = 15\sqrt{3};$$ $\mathbf{S = 15\sqrt{3}}$ (од.кв.)
Площа трикутника, побудованого на двох векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $$S = \frac{1}{2}\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$$	Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(1,1,-2)$, $B(-3,1,5)$, $C(4,6,2)$. Знайдемо координати векторів $$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \big(-3 - 1; 1 - 1; 5 - (-2)\big) = (-4; 0; 7)$$ $$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (4 - (-3); 6 - 1; 2 - 5) = (7; 5; -3);$$ $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 7 \\ 7 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} =$$ $$= -35\vec{i} + 37\vec{j} - 20\vec{k}.$$ $$\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = \sqrt{(-35)^2 + 37^2 + (-20)^2} = \sqrt{2994};$$ $\mathbf{S = \frac{1}{2}\sqrt{2\,994}}$ (од.кв.)

Об'єм трикутної призми, побудованої на трьох векторах $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ $$\boldsymbol{V = \left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right|}$$	Знайти об'єм трикутної призми, побудованої на векторах $\vec{a}(2,7,-3)$, $\vec{b}(4,-1,0)$ і $\vec{c}(3,2,6)$. $$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$ $$= -12 + 0 - 24 - 9 - 168 - 0 = -213;$$ $$\boldsymbol{V} = \lvert -213 \rvert = \boldsymbol{213} \text{ (од.куб)}$$
Об'єм трикутної піраміди, побудованої на трьох векторах $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ $$\boldsymbol{V = \frac{1}{6}\left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}\right|}$$	Знайти об'єм трикутної піраміди $ABCD$, якщо $A(4,2,1), B(-3,7,5), C(6,1,-3), D(2,1,0)$. Координати векторів $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-3-4; 7-2; 5-1) = (-7; 5; 4)$; $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (6-4; 1-2; -3-1) = (2; -1; -4)$; $\vec{c} = \overrightarrow{AD} = (2-4; 1-2; 0-1) = (-2; -1; -1)$. $$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -7 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$ $$= -7 + 40 - 8 - 8 + 10 + 28 = 55;$$ $$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\frac{55}{6}} \text{ (од.куб)}$$
Площа паралелограма, побудованого на двох векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $$\boldsymbol{S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$$	Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$ і $\vec{b} = 7\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$. $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -4 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$ $$= \vec{\imath}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{\imath} - 25\vec{\jmath} - 22\vec{k}.$$ $$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{4^2 + (-25)^2 + (-22)^2} =$$ $$= \sqrt{1125} = 15\sqrt{3}; \qquad \boldsymbol{S = 15\sqrt{3}} \text{ (од.кв.)}$$

Тема «Аналітична геометрія на площині»

Довжина відрізка $\boldsymbol{AB}$, якщо $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $$\boldsymbol{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$	Знайти відстань між точками $A(-3,5)$ і $B(1,4)$. $$AB=d=\sqrt{\left(1-(-3)\right)^2+(4-5)^2}=\sqrt{\mathbf{17}}\text{ (од.)}$$
Координати точки $\boldsymbol{C}$, що **розподіляє** відрізок $\boldsymbol{AB}$ **у відношенні $\boldsymbol{\lambda}$** $$\boldsymbol{x=\frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda};\quad y=\frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda}}$$	Знайти координати точки, що розподіляє відрізок AB у відношенні $3:2$, якщо $A(1,5)$, $B(-3,4)$. За умовою, $\lambda=\frac{3}{2}$. $$x=\frac{1+\frac{3}{2}\cdot(-3)}{1+\frac{3}{2}}=\frac{\frac{2-9}{2}}{\frac{2+3}{2}}=-\frac{7}{5};\quad y=\frac{5+\frac{3}{2}\cdot 4}{1+\frac{3}{2}}=\frac{\frac{10+12}{2}}{\frac{2+3}{2}}=\frac{22}{5};$$ $$\boldsymbol{C\left(-\frac{7}{5};\frac{22}{5}\right)}$$
Координати **середини відрізка** $$\boldsymbol{x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}}$$	Знайти координати середини відрізка AB, якщо $A(3,-2)$, $B(7,8)$. $$x=\frac{3+7}{2}=5;\ y=\frac{-2+8}{2}=3.\quad \boldsymbol{C(5;3)}$$
Координати центра мас трикутника $$\boldsymbol{x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}}$$	Знайти координати центра мас трикутника ABC, якщо $A(2,-3), B(6,10), C(4,-1)$. $$x=\frac{2+6+4}{3}=3;\quad y=\frac{-3+10-1}{3}=2.\quad \boldsymbol{C(3;2)}$$
Площа трикутника ABC $$S=\frac{1}{2}\left\lvert\begin{matrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{matrix}\right\rvert$$ $-\quad +$	Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(1,3), B(5,0), C(-4,2)$. $$S=\frac{1}{2}\left\lvert\begin{matrix}1 & 3\\ 5 & 0\\ -4 & 2\\ 1 & 3\end{matrix}\right\rvert=$$ $$=\frac{1}{2}\lvert 1\cdot 0+5\cdot 2+(-4)\cdot 3-3\cdot 5-0\cdot(-4)-2\cdot 1\rvert=$$ $$=\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{2}}\text{ (од.кв.)}$$

Тема «Рівняння прямої на площині»

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $$\boldsymbol{y = kx + b}$$	Записати рівняння прямої, якщо відомо, що вона утворює кут 45^0 з додатнім напрямом осі абсцис та відсікає відрізок з 3 одиниць на осі ординат. $$k = \mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}45^0 = 1; \quad b = 3;$$ $$\boldsymbol{y = x + 3}$$
Загальне рівняння прямої $$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$$	Записати загальне рівняння прямої $\frac{x+3}{5} - \frac{7y}{2} = 4 - x$. $$\frac{x+3}{5} - \frac{7y}{2} = 4 - x \Big\vert \cdot 10;$$ $$2(x+3) - 35y = 10(4 - x);$$ $$2x + 6 - 35y - 40 + 10x = 0;$$ $$\boldsymbol{12x - 35y - 36 = 0}$$
Рівняння прямої у відрізках $$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$	1)Записати рівняння прямої, яка відсікає відрізки, що дорівнюють -2 і 3 одиницям, на осях абсцис та ординат відповідно. $$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = \mathbf{1.}$$ 2) З'ясувати які відрізки відсукає пряма $4x - 3y - 12 = 0$ на координатних осях. $$4x - 3y = 12 \vert :12; \ \frac{4x}{12} - \frac{3y}{12} = 1; \ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1;$$ $$\boldsymbol{a = 3}; \ \boldsymbol{b = -4}$$
Рівняння прямої, що проходить **через дві точки** $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, $$\boldsymbol{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}.$$	Записати рівняння прямої, що проходить через точки $A(-3,2)$ і $B(4,5)$. $$\frac{x-(-3)}{4-(-3)} = \frac{y-2}{5-2}; \quad \frac{x+3}{7} = \frac{y-2}{3};$$ $$7(y-2) = 3(x+3); \quad 7y - 14 = 3x + 9;$$ $$\boldsymbol{y = \frac{3}{7}x + \frac{23}{7}} \quad \text{або} \quad \boldsymbol{3x - 7y + 23 = 0}$$
Кутовий коефіцієнт прямої $$\boldsymbol{k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$	Знайти кутовий коефіцієнт прямої AB, якщо $A(8,-7), B(3,10)$. $$k = \frac{10 - (-7)}{3 - 8} = -\boldsymbol{\frac{17}{5}}$$

Рівняння прямої, що проходить через задану **точку $\boldsymbol{A(x_0, y_0)}$** в заданому **напрямі $\boldsymbol{k}$** $$\boldsymbol{y - y_0 = k(x - x_0).}$$	Записати рівняння прямої, яка утворює кут $\frac{\pi}{6}$ з віссю абсцис та проходить через точку $A(7, -1)$. $k = \mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $y - (-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 7)$; $\boldsymbol{y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{7}{\sqrt{3}} - 1}$
Нормальне рівняння прямої $$\boldsymbol{x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0}$$	З'ясувати, чи є рівняння прямої $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0$ номальним. Коефіцієнти при x та y $\left(\frac{3}{5}\text{ і } -\frac{4}{5}\right)$ за абсолютною величиною не перевищують 1, сума їх квадратів дорівнює одиниці: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$, знак при вільному члені – відмінний ⇒ **рівняння нормальне**
Перехід від **загального** рівняння прямої до **нормального** Необхідно загальне рівняння прямої $Ax + By + c = 0$ помножити на нормуючий множник M, знак якого обирається протилежним до знака C: $$\boldsymbol{M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$	Записати нормальне рівняння прямої $5x + 12y - 26 = 0$. Нормуючий множник $M = \pm\frac{1}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \pm\frac{1}{13}$. Обираємо знак «+», протилежний до знака C $(C = -26)$: $5x + 12y - 26 = 0 \,\Big\vert \cdot \frac{1}{13}$; $$\boldsymbol{\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0}$$
Кут між прямими $$\boldsymbol{\mathrm{tg}\vartheta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$	Знайти кут між прямими $y = \frac{2}{5}x - 4$; $y = -3x + 2$. За умови, що $k_1 = \frac{2}{5}$; $k_2 = -3$ ⇒ $\mathrm{tg}\vartheta = \frac{-3 - \frac{2}{5}}{1 + (-3)\cdot\frac{2}{5}} = 17$; $\boldsymbol{\vartheta = \mathrm{arctg}17}$
Умова паралельності прямих $$\boldsymbol{k_1 = k_2}$$	Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(-4,3)$ паралельно до прямої $y = 5x - 8$. За умовою паралельності, $k_1 = k_2 = 5$. Рівняння прямої: $y - 3 = 5\big(x - (-4)\big)$; $\boldsymbol{y = 5x + 23}$

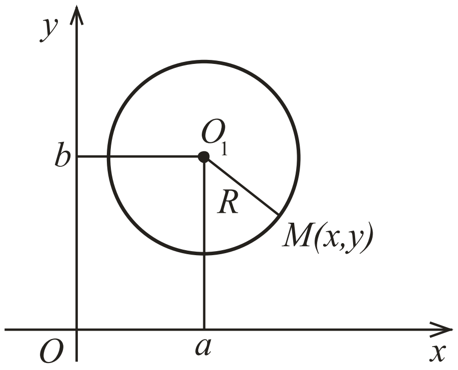
Умова перпендикулярності прямих $$\boldsymbol{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$	Записати рівняння висоти AN трикутника ABC, якщо $A(-7,4), B(0,-3), C(2,2)$. Висота AN перпендикулярна до сторони BC. Кутовий коефіцієнт BC: $k_{BC} = \frac{2-(-3)}{2-0} = \frac{5}{2}$. За умовою перпендикулярності $k_{AN} = -\frac{2}{5}$. Рівняння AN: $y - 4 = -\frac{2}{5}\left(x - (-7)\right)$; $$\boldsymbol{y = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}}.$$
Відстань від точки $\boldsymbol{M(x_0, y_0)}$ до прямої заданої а) нормальним рівнянням $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0$: $$\boldsymbol{d = \lvert x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p \rvert};$$ б) загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$: $$\boldsymbol{d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$	Знайти довжину висоти AN трикутника ABC, якщо $A(-7,4), B(0,-3), C(2,2)$. Висота AN - це відстань від точки A до прямої BC. Рівняння BC: $$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-(-3)}{2-(-3)};\quad 5x = 2(y+3);$$ $$\boldsymbol{5x - 2y - 6 = 0};$$ $$d = \frac{\lvert 5\cdot(-7) - 2\cdot 4 - 6 \rvert}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \boldsymbol{\frac{49}{\sqrt{29}}} \text{ (од.)}$$
Точка перетину двох прямих $$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$ $$A_2x + B_2y + C_2 = 0:$$ $$\boldsymbol{x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1};\ y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}}$$	Знайти точку перетину прямих $7x - 2y - 5 = 0$ і $4x + 3y + 2 = 0$. $A_1 = 7;\ B_1 = -2;\ C_1 = -5;\ A_2 = 4;\ B_2 = 3; C_2 = 2$. $$x = \frac{-2\cdot 2 - 3\cdot(-5)}{7\cdot 3 - 4\cdot(-2)} = \frac{11}{29};\ y = \frac{4\cdot(-5) - 7\cdot 2}{7\cdot 3 - 4\cdot(-2)} = -\frac{34}{29}.$$ $$\boldsymbol{C\left(\frac{11}{29}; -\frac{34}{29}\right)}$$

Тема «Криві другого порядку»

Канонічне рівняння **кола**

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0})^2=\boldsymbol{R^2},$$

(де (x_0, y_0) - координати центра, R -радіус)



Записати рівняння кола з центром у точці $M(4,-1)$ і радіусом $R=6$.

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{4})^2+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{1})^2=\boldsymbol{36}$$

Канонічне рівняння **еліпса**

$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}}+\frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}}=\boldsymbol{1},$$

де a - велика піввісь, b - мала піввісь;

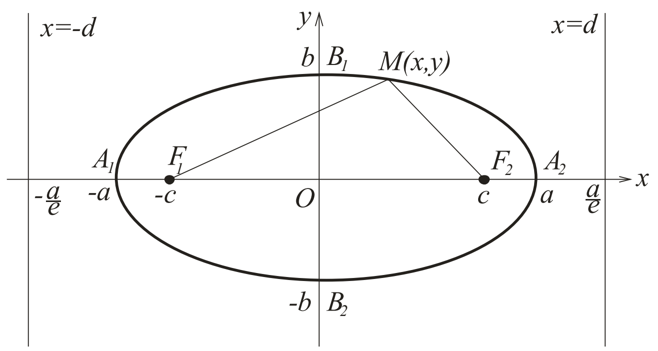
Координати фокусів $F_1(-c,0), F_2(c,0)$

головне співвідношення для еліпса:

$$b^2=a^2-c^2;$$

ексцентриситет $\quad e=\frac{c}{a}\,(e<1);$

рівняння директрис $x=\pm d$, де $d=\frac{a}{e}$.



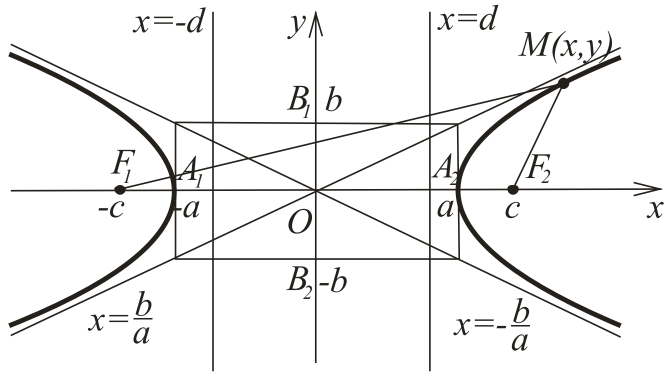
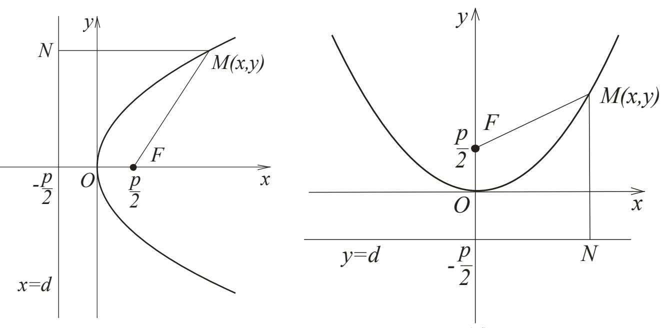
Записати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що мала піввісь дорівнює 6, а ексцентриситет - $\frac{4}{5}$.

За умовою $b=6, e=\frac{4}{5}$;

$$\begin{cases} b^2=a^2-c^2 \\ e=\frac{c}{a} \end{cases}; \qquad \begin{cases} a^2-c^2=36 \\ \frac{c}{a}=\frac{4}{5} \end{cases};$$

$$\begin{cases} c=\frac{4}{5}a \\ a^2-\frac{16}{25}a^2=36 \end{cases}; \qquad \begin{matrix} a^2=100 \\ a=10 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{100}}+\frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{36}}=\boldsymbol{1}$$

Канонічне рівняння **гіперболи** $$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,}$$ де a - дійсна піввісь, b - уявна піввісь. ***Координати фокусів*** $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ ***головне співвідношення для гіперболи***: $$b^2=c^2-a^2;$$ ***ексцентриситет*** $e=\frac{c}{a}\ (e>1)$; ***рівняння директрис*** $x=\pm d$, де $d=\frac{a}{e}$, ***рівняння асимптот*** $y=\pm\frac{b}{a}x$  .	Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами дорівнює $2\sqrt{74}$, а уявна вісь – 10. За умовою, $2c=2\sqrt{74}$, $2b=10$ $$\Rightarrow\quad c=\sqrt{74}, b=5.$$ $$b^2=c^2-a^2\ \Rightarrow$$ $$a^2=c^2-b^2=74-25=49;\ \Rightarrow$$ $$\boldsymbol{\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1}$$
Канонічне рівняння **параболи** $$\boldsymbol{y^2=2px}\quad (\boldsymbol{x^2=2py})$$ де p – параметр параболи. ***Координати фокуса*** $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ $\left(F\left(0,\frac{p}{2}\right)\right)$; ***ексцентриситет*** параболи дорівнює 1; ***рівняння директриси*** $x=-\frac{p}{2}$ $\left(y=-\frac{p}{2}\right)$.  (а) (б)	Записати канонічне рівняння параболи, фокус якої розташований у точці $F(-3,0)$. За формулами, $\frac{p}{2}=-3\quad\Rightarrow\quad p=-6$; $$y^2=2px\ \Rightarrow\ \boldsymbol{y^2=-12x}$$

Тема «Аналітична геометрія у просторі. Рівняння площини»

Загальне рівняння площини $$\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}$$	Записати загальне рівняння площини $$\frac{4}{3}(15x+3y)-7z=2(x-3z+1).$$ $$20x+4y-7z-2x+6z-2=0;$$ $$\boldsymbol{18x+4y-z-2=0}$$
Нормальне рівняння площини $$\boldsymbol{x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma=0}$$ **Зведення** загального рівняння площини до **нормального** вигляду. Загальне рівняння треба помножити на нормуючий множник, знак якого обирається оберненим до знаку *D* $$\boldsymbol{M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}.$$	Записати нормальне рівняння площини $$2x-5y+3z+4=0.$$ Обчислимо нормуючий множник: $$M=\pm\frac{1}{\sqrt{2^2+(-5)^2+3^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{38}};$$ виберемо знак *M,* протилежний до знака *D*, помножимо рівняння, отримаємо: $$\boldsymbol{-\frac{2}{\sqrt{38}}x+\frac{5}{\sqrt{38}}y-\frac{3}{\sqrt{38}}z-\frac{4}{\sqrt{38}}=0}$$
Рівняння площини **у відрізках** $$\boldsymbol{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,}$$ де $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ - відрізки, що відсікає площина на координатних осях Ox, Oy, Oz	Знайти довжину відрізків, що відсікає площина $5x-3y+z-15=0$ на координатних осях. $$5x-3y+z=15 \quad \vert :15;$$ $$\frac{5x}{15}-\frac{3y}{15}+\frac{z}{15}=1;$$ $$\frac{x}{3}-\frac{y}{5}+\frac{z}{15}=1;\Rightarrow$$ $$\boldsymbol{a=3,\ b=-5,\ c=15}$$
Рівняння площини**,** яка проходить через **задану точку** в **заданому напрямі** $$\boldsymbol{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)+D=0}$$	Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1,2,9)$ в напрямку вектора $\vec{n}(3,7,-2)$. $$3\big(x-(-1)\big)+7(y-2)-2(z-9)=0;$$ $$3x+3+7y-14-2z+18=0;$$ $$\boldsymbol{3x+7y-2z+7=0}$$

Рівняння площини, яка проходить **через три дані точки** $$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x-x_1} & \boldsymbol{y-y_1} & \boldsymbol{z-z_1} \\ \boldsymbol{x_2-x_1} & \boldsymbol{y_2-y_1} & \boldsymbol{z_2-z_1} \\ \boldsymbol{x_3-x_1} & \boldsymbol{y_3-y_1} & \boldsymbol{z_3-z_1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$	Записати рівняння площини, яка проходить через точки $A(-1,-3{,}4)$, $B(6{,}0,-2)$, $C(2{,}3{,}5)$. $$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-(-3) & z-4 \\ 6-(-1) & 0-(-3) & -2-4 \\ 2-(-1) & 3-(-3) & 5-4 \end{vmatrix} = 0;$$ $$\begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z-4 \\ 7 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$ $(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - (y+3)\cdot\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (z-4)\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0;$ $$39(x+1) - 25(y+3) + 33(z-4) = 0;$$ $$\boldsymbol{39x - 25y + 33z - 168 = 0}$$
Кут між площинами $$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ і}$$ $$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$ $$\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$	Знайти косинус кута між площинами $x + y - 2z - 7 - 0$ і $3x - 2y + z + 6 = 0$. $$\vec{N}_1(1{,}1,-2);\ \vec{N}_2(3,-2{,}1);$$ $$\cos\varphi = \frac{1\cdot 3 + 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}} =$$ $$= \frac{3-2-2}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{9+4+1}} = -\frac{1}{\sqrt{6\cdot 14}} = -\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{21}}}$$
Умова перпендикулярності двох площин**:** $$\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$	З’ясувати, чи є площини $4x - y + 7z - 2 = 0$ і $-3x + 2y + z - 1 = 0$ перпендикулярними? $$\vec{N}_1(4,-1{,}7);\ \vec{N}_2(-3{,}2{,}1);$$ $4\cdot(-3) + (-1)\cdot 2 + 5\cdot 1 = -12 - 2 + 14 = \boldsymbol{0,}$ отже, площини **перпендикулярні**

Тема «Аналітична геометрія у просторі. Рівняння прямої»

Канонічне рівняння прямої $$\boldsymbol{\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}},$$ де (a,b,c) - координати точки; а (m,n,p) - координати напрямного вектора	Дано рівняння прямої $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z+8}{0}$. З’ясувати координати напрямного вектора. Координати напрямного вектора $$\boldsymbol{\vec{s} = (2;-6;0)}$$

Параметричні рівняння прямої $x = a + mt;$ $y = b + nt;$ $z = c + pt$	Дано рівняння прямої $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-4}{6}$. Записати параметричне рівняння прямої $\frac{x-1}{-3} = t;\quad x-1=-3t;\ \boldsymbol{x = -3t+1};$ $\frac{y+1}{5} = t;\ \Rightarrow\ y+1=5t;\quad \boldsymbol{y = 5t-1};$ $\frac{z-4}{6} = t;\quad z-4=6t;\quad \boldsymbol{z = 6t+4}$
Напрямні косинуси прямої $\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{m}{\lvert\vec{S}\rvert}};$ $\boldsymbol{\cos\beta = \frac{n}{\lvert\vec{S}\rvert}};$ $\boldsymbol{\cos\gamma = \frac{p}{\lvert\vec{S}\rvert}}$	Знайти напрямні косинуси прямої $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-1}{5}$. Знайдемо модуль напрямного вектора: $\lvert\vec{S}\rvert = \sqrt{(-2)^2+4^2+5^2} = \sqrt{4+16+25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$ $\boldsymbol{\cos\alpha = -\frac{2}{3\sqrt{5}};\ \ \cos\beta = \frac{4}{3\sqrt{5}};\ \ \cos\gamma = \frac{5}{3\sqrt{5}}}$
Загальне рівняння прямої $\begin{cases} \boldsymbol{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0}, \\ \boldsymbol{A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0} \end{cases}$	Привести рівняння прямої $\begin{cases} 4x-3y+5z-8=0 \\ x-2y-z+6=0 \end{cases}$ до канонічного вигляду. Знайдемо будь-яку точку, яка належить прямій. Нехай $z = 1$, знайдемо x та y: $\begin{cases} 4x-3y+5-8=0; \\ x-2y-1+6=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-3y=3; \\ x-2y=-5. \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8+3 = -5;$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -6-15 = -21;$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -20-3 = -23;$ $x = \frac{-21}{-5} = \frac{21}{5};\quad y = \frac{-23}{-5} = \frac{23}{5}.$ $M\left(\frac{21}{5}; \frac{23}{5}; 1\right).$ Знайдемо напрямний вектор прямої, як векторний добуток векторів нормалі площини: $\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$ $= 13\vec{i} + 9\vec{j} - 5\vec{k}.$ Шукане рівняння виглядає так: $\boldsymbol{\frac{x-\frac{21}{5}}{13} = \frac{y-\frac{23}{5}}{9} = \frac{z-1}{-5}}$

Кут між прямими $\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}$ і $\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}$; $$\boldsymbol{\cos\gamma=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}}$$	Знайти кут між прямими $\frac{x-5}{3}=\frac{y+8}{-1}=\frac{z}{-2}$ і $\frac{x+4}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{-1}$. $\cos\gamma=\pm\frac{3\cdot2+(-1)\cdot4+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+(-1)^2}}=$ $=\pm\frac{6-4+2}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{4+16+1}}=\pm\frac{4}{7\sqrt{6}}$; $$\boldsymbol{\gamma=\pm\arccos\frac{4}{7\sqrt{6}}}$$
Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки, $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$. $$\boldsymbol{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$	Записати рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(3;2;-7)$ і $M_2(-1;4;2)$. $\frac{x-3}{-1-3}=\frac{y-2}{4-2}=\frac{z+7}{2+7}$; $$\boldsymbol{\frac{x-3}{-4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+7}{9}}$$

Тема «Аналітична геометрія у просторі. Задачі на пряму та площину»

Кут між прямою $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ **і площиною** $Ax+By+Cz+D=0$ $$\boldsymbol{\sin\varphi=\frac{\lvert Am+Bn+Cp\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}$$	Знайти кут між прямою $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-4}{-3}$ та площиною $3x-5y+z-16=0$: $\sin\varphi=\frac{\lvert 3\cdot1+(-5)\cdot5+1\cdot(-3)\rvert}{\sqrt{3^2+(-5)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+5^2+(-3)^2}}=$ $=\frac{\lvert 3-25-3\rvert}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{35}}=\frac{25}{2\sqrt{35}}$; $$\boldsymbol{\varphi=\arcsin\frac{25}{2\sqrt{35}}}$$
Точка перетину прямої $$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$ **і площини** $$Ax+By+Cz+D=0$$	Знайти точку перетину прямої $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$ і площини $x+2y-3z-3=0$. Перейдемо до параметричного завдання прямої: $$\begin{cases}\frac{x+2}{4}=t\\ \frac{y-1}{3}=t\\ \frac{z-3}{2}=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4t-2\\ y=3t+1,\\ z=2t+3\end{cases}$$ підставимо у рівняння площини $(4t-2)+2(3t+1)-3(2t+3)-3=0$, $4t-2+6t+2-6t-9-3=0;\Rightarrow\boldsymbol{t=3}$ Підставимо у параметричне рівняння прямої $$\begin{cases}x=4\cdot3-2=10\\ y=3\cdot3+1=10\\ z=2\cdot3+3=9\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{M(10;10;9)}$$

Тема «Теорія границь»

«Дії» з нескінченно малими та нескінченно великими величинами	$a\cdot 0=0;\quad a\cdot\infty=\infty;$ $\frac{0}{a}=0;\quad \frac{\infty}{a}=\infty;$ $\frac{a}{0}=\infty;\quad \frac{a}{\infty}=0$
Невизначеність типу $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, що задана відношенням многочленів $\lim\limits_{x\to a}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\dots+C}{Dx^m+Ex^{m-1}+\dots+F}.$ Для розкриття невизначеності необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники, використовуючи формули: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$ (де x_1, x_2 – корені квадратного рівняння $D=b^2-4ac;\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$); $a^2-b^2=(a-b)(a+b);$ $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$ $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$ $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2);$ та скоротити їх на критичний множник	Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(x-1)}{\cancel{(x-4)}(x+4)}=$ $=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-1}{x+4}=\frac{4-1}{4+4}=\mathbf{\frac{3}{8}}.$
Невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, що задана відношенням многочленів $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\dots+C}{Dx^m+Ex^{m-1}+\dots+F}.$ Для розкриття невизначеності необхідно винести максимальний степінь x в чисельнику та знаменнику й скоротити його. Обчислити такі границі можна усно за правилом: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\dots+C}{Dx^m+Ex^{m-1}+\dots+F}=\begin{cases}\frac{A}{B}, \text{при } n=m\\ \infty, \text{при } n>m\\ \mathbf{0}, \text{при } n<m\end{cases}$	1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-6x+5}{3x^2+8x+14}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(7-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{8}{x}+\frac{14}{x^2}\right)}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{8}{x}+\frac{14}{x^2}}=\mathbf{\frac{7}{3}};$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-6x^3-15x^2}{2x^3-3x^2+9}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5\left(4-\frac{6}{x^2}-\frac{15}{x^3}\right)}{x^5\left(\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{9}{x^5}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-\frac{6}{x^2}-\frac{15}{x^3}}{\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{9}{x^5}}=$ $=\frac{4}{0}=\infty;$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x+3}{9x^3+8x^2-7x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(9+\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{9+\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}}=\frac{0}{9}=\mathbf{0}$

Невизначеності типу $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ **або** $\|\infty-\infty\|$, **що задані ірраціональними виразами.** Необхідно позбутися ірраціональності за допомогою формул скороченого множення (пам’ятаємо основну властивість дробу: величина дробу не змінюється, якщо чисельник та знаменник помножити або поділити на одну й ту саму величину!): $a^2-b^2=(a-b)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$; $a^3\pm b^3=(a\pm b)(\boldsymbol{a^2}\mp\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b^2})$; та за необхідності розкласти многочлени на множники	1) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-3x-10}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=$ $=\lim\limits_{x\to5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(x+2)(\sqrt{x-1}+2)}=$ $=\lim\limits_{x\to5}\frac{x-1-4}{(x-5)(x+2)(\sqrt{x-1}+2)}=$ $=\lim\limits_{x\to5}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{1}{7\cdot4}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{28}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)=\|\infty-\infty\|=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1-(x-1)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\frac{2}{\infty}=\mathbf{0}$
Перша важлива границя $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 3x-\cos^2 x}{5x^2}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\cos3x-\cos x)(\cos3x+\cos x)}{5x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin x\cdot\sin2x\cdot2\cos2x\cdot\cos x\cdot2}{5\cdot x\cdot x\cdot2}=\frac{-2\cdot1\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1\cdot2}{5}=-\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}$
Наслідки першої важливої границі: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}=a$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$	1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=\mathbf{3}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin7x}{\sin5x}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}4x}{\sin8x}=\frac{4}{8}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin6x}{2x}=\frac{6}{2}=\mathbf{3}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\mathrm{arctg}5x}{1-\cos6x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\mathrm{arctg}5x}{2\sin^2 3x}=\frac{5}{2\cdot3\cdot3}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{18}}$
Друга важлива границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\|1^\infty\|=e$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-5}{2x+3}\right)^{5x+1}=\|1^\infty\|=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-5}{2x+3}-1\right)^{5x+1}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-5-2x-3}{2x+3}\right)^{5x+1}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-8}\cdot\frac{-8}{2x+3}\cdot(5x+1)}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-40x-8}{2x+3}}=e^{-\frac{40}{2}}=\boldsymbol{e^{-20}}$

Наслідки другої важливої границі $$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{kx}=e^{k};}$$ $$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{p}{x}\right)^{x}=e^{\frac{1}{p}};}$$ $$\boldsymbol{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$	1) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{12x}=e^{\frac{12}{3}}=\boldsymbol{e^{4}};$ 2) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec}x}=\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=\mathbf{1};$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(4x+7)[\ln(x+9)-\ln(x+7)]=$ $=\lvert\infty-\infty\rvert=\lim\limits_{x\to\infty}(4x+7)\ln\left(\frac{x+9}{x+7}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+9}{x+7}\right)^{(4x+7)}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+9}{x+7}\right)^{(4x+7)}=$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+9}{x+7}-1\right)^{(4x+7)}=$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+9-x-7}{x+7}\right)^{(4x+7)}=$ $=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+7}\right)^{\frac{x+7}{2}\cdot\frac{2}{x+7}\cdot(4x+7)}=$ $=\ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x+14}{x+7}}=\ln e^{8}=\mathbf{8}$
Три важливі границі $$\boldsymbol{1)\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;}$$ $$\boldsymbol{2)\ \lim_{x\to0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a;}$$ $$\boldsymbol{3)\ \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{a}-1}{x}=a}$$	1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(5+x)-\ln 5}{4x}=\left\lvert\frac{0}{0}\right\rvert=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{5+x}{5}}{4x}=$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{4\cdot\frac{x}{5}\cdot5}=\mathbf{\frac{1}{20}};$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^{x}-7^{x}}{2x}=\left\lvert\frac{0}{0}\right\rvert=\lim\limits_{x\to0}\frac{3^{x}-1+1-7^{x}}{2x}=$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{3^{x}-1}{2x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{7^{x}-1}{2x}=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 7=\boldsymbol{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{7}};$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[7]{(1+3x)^{4}}-1}{8x}=\left\lvert\frac{0}{0}\right\rvert=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+3x)^{\frac{4}{7}}-1}{8\cdot3x\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{7}}{8\cdot\frac{1}{3}}=\mathbf{\frac{3}{14}}$

Тема «Диференціювання функції однієї змінної»

Таблиця похідних		
	$\boldsymbol{y = f(x)}$	$\boldsymbol{y = f\big(u(x)\big)}$
1	$C' = 0$	
2	$x' = 1$	
3	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
3a	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3b	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
4	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
5	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
6	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
7	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
8	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10	$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{tg}u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
11	$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{ctg}u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
12	$(\mathrm{arcsin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\mathrm{arcsin}u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13	$(\mathrm{arccos}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\mathrm{arccos}u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
14	$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arctg}u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
15	$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Основні правила диференціювання	
Похідна від алгебраїчної суми $(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \pm \boldsymbol{v}'$	1) $y = 5x^3 + 2\log_3 x - 8\cos x + 3\mathrm{arctg}x - \frac{4}{x} + 15$; $\boldsymbol{y' = 15x^2 + \frac{2}{x\ln 3} + 8\sin x + \frac{3}{1+x^2} + \frac{4}{x^2}}$; 2) $y = 9^{\mathrm{tg}^2 x} + 2\arccos 4x^7$; $y' = 9^{\mathrm{tg}^2 x} \cdot \ln 9 \cdot (\mathrm{tg}^2 x)' - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(4x^7)^2}} \cdot (4x^7)' =$ $= 9^{\mathrm{tg}^2 x} \cdot \ln 9 \cdot 2\mathrm{tg}x \cdot (\mathrm{tg}x)' - \frac{2}{\sqrt{1-16x^{14}}} \cdot 4 \cdot 7x^6 =$ $= \boldsymbol{\frac{2 \cdot 9^{\mathrm{tg}^2 x} \cdot \ln 9 \cdot \mathrm{tg}x}{\cos^2 x} - \frac{56x^6}{\sqrt{1-16x^{14}}}}$
Похідна від добутку двох функцій $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}'$ **Наслідок:** $(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{u})' = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{u}'$	1) $y = (9x^3 - 7^x) \cdot \arccos x$; $y' = (9x^3 - 7^x)' \arccos x + (9x^3 - 7^x)(\arccos x)' =$ $= \boldsymbol{(27x^2 - 7^x \ln 7) \cdot \arccos x - \frac{9x^3 - 7^x}{\sqrt{1-x^2}}}$; 2) $y = 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \sqrt[5]{(3x-7)^4}$; $u = 6^{\ln^8 \cos x}$; $v = \sqrt[5]{(3x-7)^4} = (3x-7)^{\frac{4}{5}}$; $u' = 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \ln 6 \cdot (\ln^8 \cos x)' =$ $= 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \ln 6 \cdot 8\ln^7 \cos x \cdot (\ln \cos x)' =$ $= 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \ln 6 \cdot 8\ln^7 \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' =$ $= 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \ln 6 \cdot 8\ln^7 \cos x \cdot \frac{1}{\cos x}(-\sin x) =$ $= 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \ln 6 \cdot 8\ln^7 \cos x \cdot \mathrm{tg}x$; $v' = \frac{4}{5}(3x-7)^{-\frac{1}{5}} \cdot (3x-7)' = \frac{4 \cdot 3}{5\sqrt[5]{3x-7}}$; $\boldsymbol{y' = 6^{\ln^8 \cos x} \cdot \ln 6 \cdot 8\ln^7 \cos x \cdot \mathrm{tg}x \cdot \sqrt[5]{(3x-7)^4} +}$ $\boldsymbol{+ \frac{12 \cdot 6^{\ln^8 \cos x}}{5\sqrt[5]{3x-7}}}$
Похідна від частки двох функцій $\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \boldsymbol{\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$. **Наслідок:** $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C \cdot v'}{v^2}$	1) $y = \frac{e^x + \sqrt{x}}{5\sin x}$; $y' = \frac{(e^x+\sqrt{x})' \cdot 5\sin x - (e^x+\sqrt{x}) \cdot (5\sin x)'}{(5\sin x)^2} =$ $= \frac{\left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot 5\sin x - (e^x+\sqrt{x}) \cdot 5\cos x}{25\sin^2 x} =$ $= \boldsymbol{\frac{(2\sqrt{x}e^x+1) \cdot 5\sin x - 2\sqrt{x}(e^x+\sqrt{x}) \cdot 5\cos x}{50\sqrt{x}\sin^2 x}}$; 2) $y = \frac{\mathrm{ctg}^5 7x}{\ln(\cos 3x)}$; $u = \mathrm{ctg}^5 7x$; $v = \ln(\cos 3x)$; $u' = 5 \cdot \mathrm{ctg}^4 7x \cdot (\mathrm{ctg}7x)' = 5\mathrm{ctg}^4 7x \left(-\frac{1}{\sin^2 7x}\right) \cdot (7x)' =$ $= -\frac{35\mathrm{ctg}^4 7x}{\sin^2 7x}$; $v' = \frac{1}{\cos 3x}(\cos 3x)' = \frac{1}{\cos 3x}(-\sin 3x)(3x)' = -3\mathrm{tg}3x$; $y' = \frac{-\frac{35\mathrm{ctg}^4 7x}{\sin^2 7x} \cdot \ln(\cos 3x) - \mathrm{ctg}^5 7x \cdot (-3\mathrm{tg}3x)}{(\ln(\cos 3x))^2} =$ $= \boldsymbol{\frac{-35\mathrm{ctg}^4 7x \cdot \ln(\cos 3x) + 3\mathrm{ctg}^5 7x \cdot \mathrm{tg}3x \cdot \sin^2 7x}{\sin^2 7x \cdot \ln^2(\cos 3x)}}$

<table>
<tr><td colspan="2">

Логарифмічне диференціювання

</td></tr>
<tr><td>

$$\boldsymbol{y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}}$$

</td><td>

$$\boldsymbol{y'=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}\left[\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

За методом логарифмічного диференціювання задану функцію необхідно спочатку прологарифмувати, потім спростити її за властивостями логарифмів. Диференціювання проводиться за правилами диференціювання.
Зауваження: за методом логарифмічного диференціювання знаходимо похідну не лише степенево-показникової функції, але й похідну від функцій, які містить більш ніж два множники

</td></tr>
<tr><td>

Нагадаємо необхідні для диференціювання властивості логарифмів:

$$\boldsymbol{\log_a x^c=c\cdot\log_a x;}$$
$$\boldsymbol{\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y;}$$
$$\boldsymbol{\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y}$$

</td><td>

1) $y=(\arcsin 2x^7)^{\sqrt[3]{4x+5}}$;

$\ln y=\ln(\arcsin 2x^7)^{\sqrt[3]{4x+5}}=$
$=\sqrt[3]{4x+5}\cdot\ln(\arcsin 2x^7)$;

$u=\sqrt[3]{4x+5}=(4x+5)^{\frac{1}{3}}$; $v=\ln(\arcsin 2x^7)$;

$u'=\frac{1}{3}(4x+5)^{-\frac{2}{3}}\cdot(4x+5)'=\frac{4}{3\sqrt[3]{(4x+5)^2}}$;

$v'=\frac{1}{\arcsin 2x^7}(\arcsin 2x^7)'=$
$=\frac{1}{\arcsin 2x^7}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(2x^7)^2}}\cdot(2x^7)'=$
$=\frac{1}{\arcsin 2x^7\sqrt{1-4x^{14}}}\cdot 14x^6$;

$\frac{y'}{y}=\frac{4}{3\sqrt[3]{(4x+5)^2}}\cdot\ln(\arcsin 2x^7)+\frac{14x^6\sqrt[3]{4x+5}}{\arcsin 2x^7\sqrt{1-4x^{14}}}$;

$$\boldsymbol{y'=(\arcsin 2x^7)^{\sqrt[3]{4x+5}}\cdot\left[\frac{4\ln(\arcsin 2x^7)}{3\sqrt[3]{(4x+5)^2}}+\frac{14x^6\sqrt[3]{4x+5}}{\arcsin 2x^7\sqrt{1-4x^{14}}}\right]};$$

2) $y=\frac{(x-6)^5\sqrt[7]{2x+5}}{(x+1)^8}$;

$\ln y=\ln\frac{(x-6)^5\sqrt[7]{2x+5}}{(x+1)^8}$;

$\ln y=\ln(x-6)^5+\ln(2x+5)^{\frac{1}{7}}-\ln(x+1)^8=$
$=5\ln(x-6)+\frac{1}{7}\ln(2x+5)-8\ln(x+1)$;

$\frac{y'}{y}=5\cdot\frac{1}{x-6}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2x+5}\cdot 2-8\frac{1}{x+1}$;

$$\boldsymbol{y'=\frac{(x-6)^5\sqrt[7]{2x+5}}{(x+1)^8}\left[\frac{5}{x-6}+\frac{2}{7(2x+5)}-\frac{8}{x+1}\right]}$$

</td></tr>
</table>

Похідні вищих порядків

$$f''(x) = [f'(x)]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

Похідну n-го порядку $\boldsymbol{f^{(n)}(x)}$ знаходять, як похідну від похідної $(n-1)$–го порядку

Знайти третю похідну функції $y = x^3 arctgx$ і обчислити її значення у точці $x_0 = 0$.

$$y' = 3x^2 \cdot arctgx + x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} = 3x^2 \cdot arctgx + \frac{x^3}{1+x^2};$$

$$y'' = (y')' = 6x \cdot arctgx + \frac{3x^2}{1+x^2} + \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$
$$= 6x \cdot arctgx + \frac{3x^2}{1+x^2} + \frac{3x^2+3x^4-2x^4}{(1+x^2)^2} =$$
$$= 6x \cdot arctgx + \frac{3x^2+3x^4+3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} = 6x \cdot arctgx + \frac{4x^4+6x^2}{(1+x^2)^2};$$

$$y''' = (y'')' = 6 \cdot arctgx + 6x \cdot \frac{1}{1+x^2} +$$
$$+ \frac{(16x^3+12x)(1+x^2)^2 - (4x^4+6x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} =$$
$$= 6 \cdot arctgx + \frac{6x}{1+x^2} + \frac{4x(1+x^2)[(4x^2+3)(1+x^2) - (4x^4+6x^2)]}{(1+x^2)^4} =$$
$$= 6arctgx + \frac{6x}{1+x^2} + \frac{4x(4x^2+3+4x^4+3x^2-4x^4-6x^2)}{(1+x^2)^3} =$$
$$= 6arctgx + \frac{6x(1+x^2)^2+4x(x^2+3)}{(1+x^2)^3} = 6arctgx + \frac{2x(3x^4+8x^2+9)}{(1+x^2)^3}.$$

Обчислимо значення отриманої функції у точці x_0:

$$y'''(x_0) = y'''(0) = 0$$

Диференціювання функцій, заданих параметрично $\begin{cases}\boldsymbol{x = x(t)}\\ \boldsymbol{y = y(t)}\end{cases}$

Похідна першого порядку

$$\boldsymbol{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

$$\begin{cases}x = e^{5t}\sin 4t\\ y = e^{5t}\cos 4t\end{cases};$$

$$x'_t = 5e^{5t}\sin 4t + e^{5t}\cdot 4\cos 4t = e^{5t}(5\sin 4t + 4\cos 4t);$$
$$y'_t = 5e^{5t}\cos 4t - e^{5t}\cdot 4\sin 4t = e^{5t}(5\cos 4t - 4\sin 4t);$$
$$\boldsymbol{y'_x} = \frac{e^{5t}(5\cos 4t - 4\sin 4t)}{e^{5t}(5\sin 4t + 4\cos 4t)} = \boldsymbol{\frac{5\cos 4t - 4\sin 4t}{5\sin 4t + 4\cos 4t}}$$

Похідна другого порядку

$$\boldsymbol{y''_{xx} = \frac{y''_{tt}\cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}}$$

$$\begin{cases}x = \ln(1+t^2)\\ y = t - \mathrm{arctg}t\end{cases};$$

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2}\cdot(1+t^2)' = \frac{2t}{1+t^2};$$
$$x''_{tt} = \frac{(2t)'(1+t^2) - 2t(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1+t^2) - 2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2+2t^2-4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2};$$
$$y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2};$$
$$y''_{tt} = \frac{(t^2)'\cdot(1+t^2) - t^2\cdot(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} = \frac{2t(1+t^2) - t^2\cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2t(1+t^2-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)^2};$$

$$\boldsymbol{y''_{xx}} = \frac{\frac{2t}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{2t}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \frac{\frac{4t^2-2t^2+2t^4}{(1+t^2)^3}}{\frac{8t^3}{(1+t^2)^3}} = \frac{2t^2(1+t^2)}{8t^3} = \boldsymbol{\frac{1+t^2}{4t}}$$

<table>
<tr><td colspan="2">

Диференціювання неявної функції $\boldsymbol{F\big(x, y(x)\big) = 0}$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Знаходячи похідну, необхідно пам'ятати, що $\boldsymbol{y}$ **є функцією від** $\boldsymbol{x}$, тому диференціюємо її як **складну** функцію!
Знаходити похідну необхідно за правилами диференціювання та за допомогою таблиці похідних, а надалі розв'язати лінійне рівняння відносно шуканої похідної y'.
При повторному диференціюванні отримуємо вирази, які містять похідні менших порядків. Для запису відповіді необхідно підставити вже відомі вирази попередніх похідних

</td></tr>
<tr><td>

Похідна першого порядку

$$\boldsymbol{F'(x, y) = 0}$$

</td><td>

$$\cos(xy) = 3x^4 + 6y^3; \quad \Rightarrow \quad \cos(xy) - 3x^4 - 6y^3 = 0;$$
$$-\sin(xy) \cdot (1 \cdot y + x \cdot y') - 12x^3 - 18y^2 \cdot y' = 0;$$
$$-\sin(xy) \cdot y - \sin(xy) \cdot xy' - 12x^3 - 18y^2 \cdot y' = 0;$$
$$(x \sin(xy) + 18y^2) \cdot y' = -(y \sin(xy) + 12x^3);$$
$$\boldsymbol{y' = -\frac{y \sin(xy) + 12x^3}{x \sin(xy) + 18y^2}}$$

</td></tr>
<tr><td>

Похідна другого порядку

$$\boldsymbol{\big(F'(x, y)\big)' = 0}$$

</td><td>

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4xy; \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} - 4xy = 0;$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' - 4(y + x \cdot y') = 0;$$
$$y'\left(\frac{1}{2\sqrt{y}} - 4x\right) = 4y - \frac{1}{2\sqrt{x}};$$
$$\boldsymbol{y'} = \frac{4y - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{y}} - 4x} = \frac{\frac{4y-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1-4x}{2\sqrt{y}}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{y}(4y-1)}{\sqrt{x}(1-4x)}};$$

$$y'' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{y}} y'(4y-1) + \sqrt{y} \cdot 4y'\right)\sqrt{x}(1-4x) - \sqrt{y}(4y-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-4x) - 4\sqrt{x}\right)}{x(1-4x)^2} =$$
$$= \frac{y'(4y-1+8y)x(1-4x) - y(4y-1)(1-4x-8x)}{x(1-4x)^2\sqrt{xy}} =$$
$$= \frac{y'x(12y-1)(1-4x) - y(4y-1)(1-12x)}{x(1-4x)^2\sqrt{xy}}.$$

Підставимо замість y' вже відомий вираз:

$$\boldsymbol{y''} = \frac{\frac{\sqrt{y}(4y-1)}{\sqrt{x}(1-4x)} x(12y-1)(1-4x) - y(4y-1)(1-12x)}{x(1-4x)^2\sqrt{xy}} =$$
$$= \frac{x\sqrt{y}(4y-1)(12y-1)(1-4x) - y\sqrt{x}(1-4x)(4y-1)(1-12x)}{(1-4x)^3 x^2 \sqrt{y}} =$$
$$= \boldsymbol{\frac{x\sqrt{y}(48y^2-16y+1)(1-4x) - y\sqrt{x}(1-16x+28x^2)(4y-1)}{(1-4x)^3 x^2 \sqrt{y}}}$$

</td></tr>
</table>

Наближене обчислення за допомогою диференціалу	
Наближене обчислення функції $$\boldsymbol{f(x_0+dx) \approx f(x_0)+f'(x_0)dx}$$	Знайти наближене значення функції $y = x^2 + x + \arcsin x$ при $x = 0{,}51$. Маємо $x_0 = 0{,}5$, $dx = 0{,}01$. Знайдемо похідну $y' = 2x + 1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $f(x_0) = f(0{,}5) = (0{,}5)^2 + 0{,}5 + \arcsin 0{,}5 = 0{,}75 + \frac{\pi}{2} = 2{,}32$; $f'(x_0) = f'(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 + 1 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} = 3{,}15$. За формулою знаходимо $y(0{,}51) \approx 2{,}32 + 3{,}15 \cdot 0{,}01 = \mathbf{2{,}35}$

Тема «Обчислення границь за правилом Лопіталя»

$$\lim_{\substack{x \to a \\ (x\to\infty)}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left\|\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{\substack{x \to a \\ (x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$ **Зауваження:** за необхідності правилом Лопіталя можна послідовно скористатися декілька разів (не забуваючи, якщо це можливо, спрощувати вираз) до зникнення невизначеності!	
Безпосереднє застосування правила Лопіталя	1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^5-32}{x^3-8} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 2}\frac{5x^4}{3x^2} = \frac{5\cdot 16}{3\cdot 4} = \mathbf{\frac{20}{3}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}{-\sin x + x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| =$ $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{-\cos x + 1} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$
Функцію подано у вигляді добутку. Перед застосуванням правила Лопіталя необхідно замінити множення діленням на обернене	1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x \cdot \sin\frac{3}{x}\right) = \|\infty \cdot 0\| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = \left\|\frac{0}{0}\right\| =$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{3}{x}\cdot 3\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = -3\lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{3}{x} = -3 \cdot 1 = \mathbf{-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2} = \|0 \cdot \infty\| = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2}} =$ $= \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\sin^2\frac{\pi x}{2} = \mathbf{\frac{2}{\pi}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 \cdot e^{-5x}) = \|\infty \cdot 0\| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{5x}} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{5e^{5x}} =$ $= \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{25e^{5x}} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \frac{2}{\infty} = \mathbf{0}$

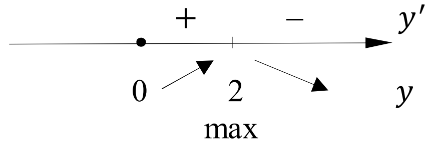
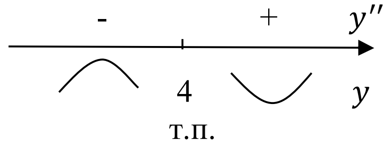
Функцію подано у вигляді різниці. Перед застосуванням правила Лопіталя необхідно привести дроби до спільного знаменника	1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lvert\infty-\infty\rvert=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{\infty}=\mathbf{0}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lvert\infty-\infty\rvert=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\left\lvert\frac{0}{0}\right\rvert=$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\left\lvert\frac{0}{0}\right\rvert=$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x}=\left\lvert\frac{0}{0}\right\rvert=$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{(2-x^2)\sin x+4x\cos x}=$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{-2x\sin x+(2-x^2)\cos x+4\cos x-4x\sin x}=\mathbf{\frac{1}{6}}$
Функцію подано у степенево-показниковому вигляді. Перед застосуванням правила Лопіталя необхідно про логарифмувати функцію. Не забувайте, що для запису відповіді, необхідно скористатися властивістю $\boldsymbol{e^{\ln A}=A}$**!**	1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\lvert\infty^0\rvert=A$; $\ln A=\ln\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(\ln x)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}=\left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{\infty}=0$; $\Rightarrow\quad A=e^{\ln A}=e^0=\mathbf{1}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}x^x=\lvert0^0\rvert=A$; $\ln A=\ln\lim\limits_{x\to0}x^x=\lim\limits_{x\to0}\ln x^x=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\ln x=\lvert0\cdot\infty\rvert=$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0}x=0$; $\Rightarrow\quad A=e^{\ln A}=e^0=\mathbf{1}$

Тема «Геометричний та механічний сенс похідної»

Рівняння дотичної $\boldsymbol{y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)}$	Записати рівняння дотичної до кривої $y=\frac{2}{3}\sqrt{x}-5$ у точці з абсцисою $x_0=9$. Знайдемо похідну: $y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{3\sqrt{x}}$. Обчислимо: $y_0=y(x_0)=y(9)=\frac{2}{3}\sqrt{9}-5=-3$; $y'(x_0)=y'(9)=\frac{1}{3\sqrt{9}}=\frac{1}{9}$. За формулою отримаємо: $y+3=\frac{1}{9}(x-9)$; $\boldsymbol{y=\frac{1}{9}x-4}$.
Рівняння нормалі $\boldsymbol{y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)}$	Записати рівняння нормалі до кривої $y=\mathrm{arctg}2x$ у точці з абсцисою $x_0=0$. Знайдемо похідну $y'=\frac{2}{1+4x^2}$. Обчислимо: $y_0=y(x_0)=y(0)=\mathrm{arctg}0=0$; $y'(x_0)=y'(0)=\frac{2}{1+0}=2$. За формулою маємо $y-0=-\frac{1}{2}(x-0)$; $\boldsymbol{y=-\frac{x}{2}}$

Закон руху матеріальної точки $s = s(t)$. **Швидкість:** $\boldsymbol{v = s'(t)}$**;** **прискорення:** $\boldsymbol{a = v' = s'(t)}$	Закон руху матеріальної точки $s = \frac{5}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + t - 9.$ Знайти швидкість та прискорення через $t = 5$ с. $v = s' = 5t^3 + 2t^2 - 6t + 1;$ $a = v' = s'' = 15t^2 + 4t - 6;$ $v(5) = 5 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 - 6 \cdot 5 + 1 = \mathbf{646}$ (м/с); $a(5) = 15 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 - 6 = \mathbf{389}$ (м/с^2)

Тема «Дослідження функції»

Дослідження функції на монотонність та екстремуми: 1) ОДЗ; 2) знаходимо y'; 3) прирівнюємо її до нуля: $y' = 0$, звідси знаходимо точки, у яких може бути екстремум (критичні точки першого порядку); 4) наносимо на числову вісь критичні точки та точки, у яких функція не існує (ОДЗ); 5) досліджуємо знак y' в кожному з отриманих інтервалів: «+» - функція зростає, «-» - функція спадає, якщо при переході через критичні точки y' змінює знак – це точки екстремуму, до того ж, якщо знаки змінюються з «+» на «-» - це максимум, якщо з «-» на «+» - мінімум.	Дослідити на монотонність на екстремуми функцію $y = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$. 1) ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x \in [0; \infty).$ 2) $y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+2) - \sqrt{x} \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-2x}{2\sqrt{x}(x+2)^2} = \frac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)^2};$ 3) $y' = 0; \quad \frac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)^2} = 0; \quad x = 2;$ 4)  5) функція зростає на інтервалі $x \in (0; 2)$, спадає $x \in (2; \infty)$ на інтервалі в точці з абсцисою $x = 2$ – максимум
Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину: 1) ОДЗ; 2) знаходимо y''; 3) дорівнюємо її до нуля: $y'' = 0$, звідси знаходимо точки, в яких можуть бути точки перегину (критичні точки другого порядку); 4) наносимо на числову вісь критичні точки та точки, в яких функція не існує (ОДЗ); 5) досліджуємо знак y'' в кожному з отриманих інтервалів: «+» - функція угнута, «-» - функція опукла, якщо при переході через критичні точки y'' змінює знак – це точки перегину	Дослідити функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - 2x + 10$ на опуклість, угнутість та точки перегину. 1) ОДЗ: $x \in R$; 2) $y' = x^2 - 8x - 2; \quad y'' = 2x - 8;$ 3) $y'' = 0; \quad 2x - 8 = 0; \quad x = 4;$ 4)  5) функція угнута на інтервалі $x \in (0; 4)$, опукла - $x \in (4; \infty)$, у точці з абсцисою $x = 4$ - точка перегину функції

Асимптоти функції

1) **вертикальні $\boldsymbol{x = a}$**

(a беремо з ОДЗ), якщо

$$\lim_{x\to a} y(x) = \pm\infty.$$

2) **похилі $\boldsymbol{y = kx + b}$,**

де $$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [y(x) - kx],$$

якщо існують скінчені границі, то існує похила асимптота.

3) **горизонтальні $\boldsymbol{y = b}$,**

де $$b = \lim_{x\to\pm\infty} y(x).$$

Горизонтальна асимптота – частинний випадок похилої асимптоти, якщо $k = 0$!

Знайти асимптоти функції $y = \frac{3x^3+5x^2-2}{x^2-9}$.

ОДЗ: $x^2 - 9 \neq 0$; $x \neq \pm 3$;

$x = 3$: $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3x^3+5x^2-2}{x^2-9} = \frac{124}{0} = \infty$

$\Rightarrow$ **$\boldsymbol{x = 3}$ – вертикальна асимптота;**

$x = -3$: $\lim\limits_{x\to -3} \frac{3x^3+5x^2-2}{x^2-9} = \frac{-38}{0} = -\infty$

$\Rightarrow$ **$\boldsymbol{x = -3}$ – вертикальна асимптота;**

Знайдемо похилу асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3x^3+5x^2-2}{x^2-9}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3+5x^2-2}{x^3-9x} = \mathbf{3};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{3x^3+5x^2-2}{x^2-9} - 3x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3+5x^2-2-3x^3+27x}{x^2-9} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2+27x-2}{x^2-9} = \mathbf{5};$$

отже, **$\boldsymbol{y = 3x + 5}$ – похила асимптота**

Повна схема дослідження функції

1) **ОДЗ**.

2) **Точки перетину з осями координат** (з Ox перетинається, якщо $y = 0$, а з Oy - якщо $x = 0$.

3) **Інтервали знакосталості.** Наносимо на числову вісь точки перетину з віссю Ox та точки, в яких функція не існує, та з'ясовуємо знак в кожному інтервалі.

4) **Парність функції.** Якщо $y(-x) = y(x)$, то функція **парна** і її графік симетричний відносно осі Oy, а якщо $y(-x) = -y(x)$, то функція **непарна** і її графік симетричний відносно початку координат. Якщо не виконується не одна з умов, то функція **загального положення**.

Провести повне дослідження функції

$y = (x-3)e^{x+1}$ та побудувати графік.

1) ОДЗ: $\boldsymbol{x \in R}$;

2) Ox: $y = 0$; $(x-3)e^{x+1} = 0$; $\Rightarrow$ $x = 3$;

Oy: $x = 0$; $y = (0-3)e^{0+1} = -3e$.

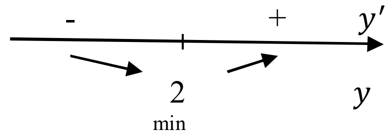
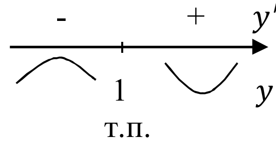
Точки перетину $\boldsymbol{K_1(3,0)}$; $\boldsymbol{K_2(0,-3e)}$.

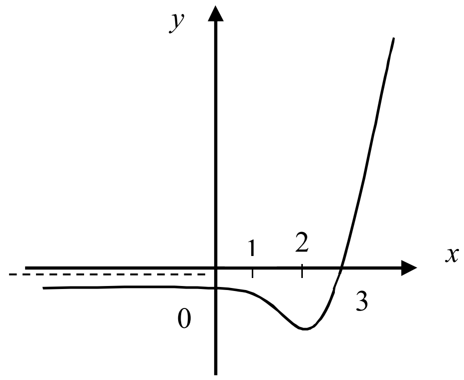
3) $-$ $+$ x

3

Функція **додатна** при $\boldsymbol{x \in (3,\infty)}$, **від'ємна** при $\boldsymbol{x \in (-\infty, 3)}$.

4) $y(-x) = (-x-3)e^{-x+1} \neq \pm y(x)$, це функція **загального положення**

5) **періодичність**. Якщо виконується умова $y(x+T)=y(x)$, де T - період функції, то функція **періодична**, якщо ні – **неперіодична;**	5) $y(x+T)\neq y(x) \Rightarrow$ функція **неперіодична;**
6) **дослідження на монотонність та екстремуми;**	6) $y' = 1\cdot e^{x+1} + (x-3)e^{x+1} = (x-2)e^{x+1}$; $y' = 0;\ \ (x-2)e^{x+1} = 0;\ \ \Rightarrow\ \ x = 2$  $y(2) = (2-3)e^{2+1} = -e^3.$ Функція **зростає** при $x\in(2,\infty)$, **спадає** при $x\in(-\infty,2)$. У точці $M(2,-e^3)$ - **мінімум** функції;
7) **дослідження на опуклість, угнутість та точки перегину;**	7) $y'' = 1\cdot e^{x+1} + (x-2)e^{x+1} = (x-1)e^{x+1}$; $y'' = 0;\ \ (x-1)e^{x+1} = 0;\ \ \Rightarrow\ \ x = 1;$  $y(1) = (1-3)e^{1+1} = -2e^2.$ Функція **опукла** при $x\in(1,\infty)$, **угнута** при $x\in(-\infty,1)$. У точці - **точка перегину** функції.
8) **асимптоти;**	8) якщо, що ОДЗ $x\in R$ прямує, що вертикальних асимптот немає. Знайдемо похилі. $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-3)e^{x+1}}{x} = \left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x+1}+(x-3)e^{x+1}}{1} = \infty;$ $k = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x-3)e^{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-3}{x\cdot e^{-x-1}} = \left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert =$ $= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1\cdot e^{-x-1} - x\cdot e^{-x-1}} = \mathbf{0;}$ $b = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-3)e^{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-3}{e^{-x-1}} =$ $= \left\lvert\frac{\infty}{\infty}\right\rvert = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x-1}} = \mathbf{0;}$ $\boldsymbol{y=0}\ \ (\boldsymbol{x\to-\infty})$ **- горизонтальна асимптота**

9) **графік функції**	9) побудуємо графік функції: 

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 256 с.
2. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 250 с.
3. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 2 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 221 с.
4. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 192 с.
5. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 3 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 233 с.
6. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 270 с.
7. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 1) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський – Харків : ХНАМГ, 2010. – 88 с.
8. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 2) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський – Харків : ХНАМГ, 2010. – 125 с.
9. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 3) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 110 с.
10. Розрахунково-графічне завдання з вищої математики (для студентів-бакалаврів денної форми навчання спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад.: Л. Б. Коваленко, А. А. Кузнецова, О. П. Довгаль. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 57 с.

Довыдкове видання

НАВЧАЛЬНИЙ ДОВІДНИК
З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Частина 1

(для студентів 1 курсу денної форми навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія)

Укладач **КОВАЛЕНКО** Людмила Борисівна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *О. А. Норик*
Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*

План 2020, поз. 128 М

Підп. до друку 02.03.2021. Формат 60×84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 2,6.
Тираж 60 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.